

Trabajo Práctico 1 — Karatsuba

[7529/9506] Teoría de Algoritmos I
Segundo cuatrimestre de 2021

Alumno:	XXXXXX XXXXX, Xxxx
Número de padrón:	106 713
Email:	XXXXXXX@fi.uba.ar
Entrega:	n ^o 1 (29/09/2021)

Índice

1. Introducción	2
1.1. Resumen	2
1.2. Lineamientos básicos	2
2. Parte 1: ¡Karatsuba!	3
2.1. Enunciado	3
2.2. Resolución con Karatsuba	4
2.2.1. Adaptación de productos al número de padrón	4
2.2.2. Detalles generales y de la función recursiva	4
2.2.3. Etapas de recursión del caso dado	5
2.2.4. Resolución de cada etapas, paso a paso	7
2.3. Cantidad de operaciones y complejidad	7
2.4. Comparación con algoritmo tradicional	7
2.5. División y conquista	8
3. Parte 2: Cuestión de complejidad...	9
3.1. Enunciado	9
3.2. Teorema maestro	10
3.3. Complejidad temporal	10

1. Introducción

1.1. Resumen

El presente informe documenta el enunciado y la solución del primer trabajo práctico de la materia Teoría de Algoritmos I. El mismo comprende la resolución manual de una multiplicación mediante el algoritmo de Karatsuba junto con su análisis, así como una parte teórica sobre recursividad y Teorema Maestro.

Si bien este trabajo es individual, es redactado empleando el [plural de modestia](#) (tan usual en el ámbito académico).

1.2. Lineamientos básicos

- El trabajo se realizará en forma individual.
- Se debe entregar el informe en formato pdf en el aula virtual de la materia.
- El informe debe presentar carátula con datos del autor y fecha de entrega. Debe incluir número de hoja en cada página.
- En caso de re-entrega, entregar un apartado con las correcciones mencionadas

2. Parte 1: ¡Karatsuba!

2.1. Enunciado

Dados los siguientes números (completada por su número de padrón):

```
a35b411c
2d98ef55
```

con:

```
a: dígito del padrón correspondiente a la unidad
b: dígito del padrón correspondiente a la centena
c: los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7
d: dígito del padrón correspondiente a la decena
e: dígito del padrón correspondiente a la unidad de mil
f: los dos dígitos del padrón de la derecha mod 9
```

Ejemplo. Padrón: 95473

```
33544114
27985155
```

Se pide:

1. Resuelva la multiplicación paso a paso utilizando el algoritmo de Karatsuba.
2. Cuente la cantidad de sumas y multiplicaciones que realiza y relaciónelo con la complejidad temporal del método.
3. Comparar lo obtenido con el método de multiplicación tradicional. ¿Observa alguna mejora? Analice.
4. ¿Por qué se puede considerar al algoritmo de Karatsuba como de “división y conquista”?

2.2. Resolución con Karatsuba

Enunciado 1.1

Resuelva la multiplicación paso a paso utilizando el algoritmo de Karatsuba.

2.2.1. Adaptación de productos al número de padrón

Comenzaremos realizando la adaptación del número según el padrón 106 713:

a: dígito del padrón correspondiente a la unidad = 3
 b: dígito del padrón correspondiente a la centena = 7
 c: los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7 = $10 \bmod 7 = 3$
 d: dígito del padrón correspondiente a la decena = 1
 e: dígito del padrón correspondiente a la unidad de mil = 6
 f: los dos dígitos del padrón de la derecha mod 9 = $13 \bmod 9 = 4$

Por lo que el resultado es:

33574113
 21986455

2.2.2. Detalles generales y de la función recursiva

También definimos que trabajaremos en base decimal, por lo que en cada etapa de recursión (hasta llegar a $n = 1$):

- convertiremos los productos X e Y en:

$$X \rightarrow X_1 \times 10^{n/10} + X_0$$

$$Y \rightarrow Y_1 \times 10^{n/10} + Y_0$$

Es decir, sabiendo que $D = 10^{\lceil n/2 \rceil}$:

$$X_0 = X \bmod D, \quad X_1 = \lfloor X/D \rfloor$$

$$Y_0 = Y \bmod D, \quad Y_1 = \lfloor Y/D \rfloor$$

- Calculamos¹ $P_X = X_0 + X_1$ e $P_Y = Y_0 + Y_1$.
- Obtendremos recursivamente (para $n > 1$) las 3 multiplicaciones¹:

$$M_0 = X_0 \times Y_0, \quad M_1 = X_1 \times Y_1, \quad P = P_X \times P_Y$$

- Realizamos las sumas y desplazamientos (multiplicación por potencia de la base elegida: 10^k):

$$M_1 \times 10^n + (P - M_1 - M_0) \times 10^{n/2} + M_0$$

Una vez alcanzado el caso base, se obtendrá el resultado mediante una clásica tabla de multiplicar de 1 cifra decimal.

¹El uso de P_X , P_Y , M_1 y M_2 corresponde a una notación propia de este informe (para mayor claridad), no al material de estudio.

2.2.3. Etapas de recursión del caso dado

Para mantener la claridad de la explicación paso a paso, comenzaremos tan solo mostrando cuáles son las cuentas que deben realizarse en cada etapa de recursión.

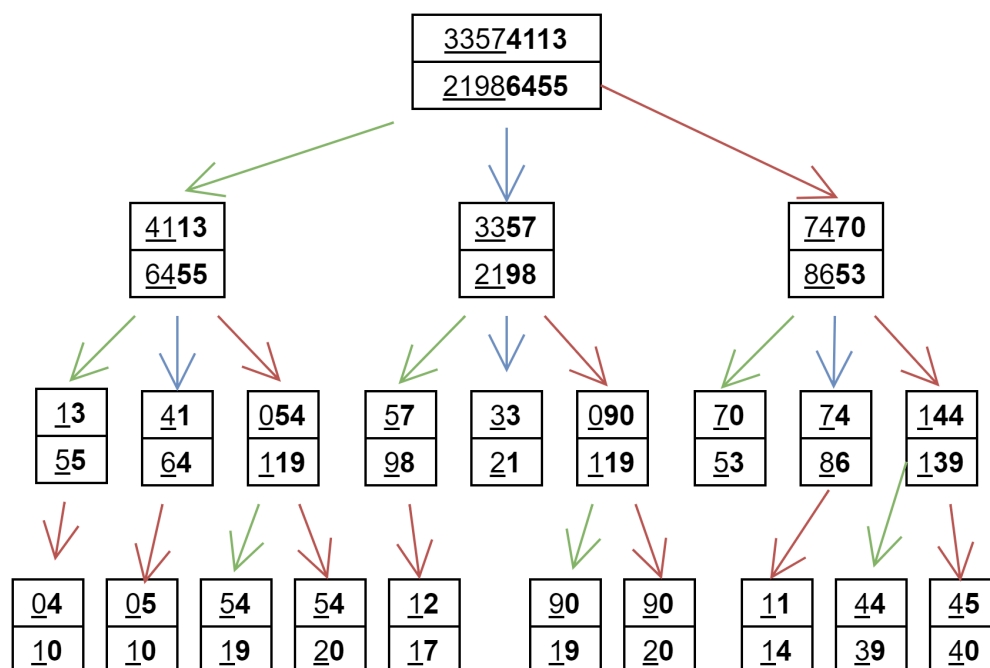


Figura 1:

Etapas de recursión de Karatsuba para el caso dado. Cada nodo consiste del X e Y de cada llamada a la función, pero los casos bases ($n=1$) han sido omitidos. La parte inferior (X_0 e Y_0) han sido remarcadas con subrayados, mientras que la superior (X_1 e Y_1) con negritas. En verde el cálculo de M_0 (producto de partes inferiores), en azul M_1 (de partes superiores) y en rojo P (producto de suma de partes equivalentes de cada entrada).

El siguiente listado incluye todas las llamadas a la función, y en el caso en que corresponda (cuando $n>1$) se detalla qué función llama cada una:

Etapas 1:

Llamada 1.1: Karatsuba(33574113, 21986455). Req.:
 $M_0 = \text{karatsuba}(4113, 6455)$, $M_1 = \text{karatsuba}(3357, 2198)$, $P = \text{karatsuba}(7470, 8653)$.

Etapas 2:

Llamada 2.1: Karatsuba(4113, 6455). Req.:
 $M_0 = \text{karatsuba}(13, 55)$, $M_1 = \text{karatsuba}(41, 64)$, $P = \text{karatsuba}(54, 119)$.
 Llamada 2.2: Karatsuba(3357, 2198). Req.:
 $M_0 = \text{karatsuba}(57, 98)$, $M_1 = \text{karatsuba}(33, 21)$, $P = \text{karatsuba}(90, 119)$.
 Llamada 2.3: Karatsuba(7470, 8653). Req.:
 $M_0 = \text{karatsuba}(70, 53)$, $M_1 = \text{karatsuba}(74, 86)$, $P = \text{karatsuba}(144, 139)$.

Etapa 3:

Llamada 3.1: Karatsuba(13, 55). Req.:
 $M0=karatsuba(3,5), M1=karatsuba(1,5), P=karatsuba(4,10)$.

Llamada 3.2: Karatsuba(41, 64). Req.:
 $M0=karatsuba(1,4), M1=karatsuba(4,6), P=karatsuba(5,10)$.

Llamada 3.3: Karatsuba(54, 119). Req.:
 $M0=karatsuba(54,19), M1=karatsuba(0,1), P=karatsuba(54,20)$.

Llamada 3.4: Karatsuba(57, 98). Req.:
 $M0=karatsuba(7,8), M1=karatsuba(5,9), P=karatsuba(12,17)$.

Llamada 3.5: Karatsuba(33, 21). Req.:
 $M0=karatsuba(3,1), M1=karatsuba(3,2), P=karatsuba(6,3)$.

Llamada 3.6: Karatsuba(90, 119). Req.:
 $M0=karatsuba(90,19), M1=karatsuba(0,1), P=karatsuba(90,20)$.

Llamada 3.7: Karatsuba(70, 53). Req.:
 $M0=karatsuba(0,3), M1=karatsuba(7,5), P=karatsuba(7,8)$.

Llamada 3.8: Karatsuba(74, 86). Req.:
 $M0=karatsuba(4,6), M1=karatsuba(7,8), P=karatsuba(11,14)$.

Llamada 3.9: Karatsuba(144, 139). Req.:
 $M0=karatsuba(44,39), M1=karatsuba(1,1), P=karatsuba(45,40)$.

Etapa 4:

Llamada 4.3: Karatsuba(4, 10). Req.:
 $M0=karatsuba(4,0), M1=karatsuba(0,1), P=karatsuba(4,1)$.

Llamada 4.6: Karatsuba(5, 10). Req.:
 $M0=karatsuba(5,0), M1=karatsuba(0,1), P=karatsuba(5,1)$.

Llamada 4.7: Karatsuba(54, 19). Req.:
 $M0=karatsuba(4,9), M1=karatsuba(5,1), P=karatsuba(9,10)$.

Llamada 4.9: Karatsuba(54, 20). Req.:
 $M0=karatsuba(4,0), M1=karatsuba(5,2), P=karatsuba(9,2)$.

Llamada 4.12: Karatsuba(12, 17). Req.:
 $M0=karatsuba(2,7), M1=karatsuba(1,1), P=karatsuba(3,8)$.

Llamada 4.16: Karatsuba(90, 19). Req.:
 $M0=karatsuba(0,9), M1=karatsuba(9,1), P=karatsuba(9,10)$.

Llamada 4.18: Karatsuba(90, 20). Req.:
 $M0=karatsuba(0,0), M1=karatsuba(9,2), P=karatsuba(9,2)$.

Llamada 4.24: Karatsuba(11, 14). Req.:
 $M0=karatsuba(1,4), M1=karatsuba(1,1), P=karatsuba(2,5)$.

Llamada 4.25: Karatsuba(44, 39). Req.:
 $M0=karatsuba(4,9), M1=karatsuba(4,3), P=karatsuba(8,12)$.

Llamada 4.27: Karatsuba(45, 40). Req.:
 $M0=karatsuba(5,0), M1=karatsuba(4,4), P=karatsuba(9,4)$.

Etapa 5:

Llamada 5.9: Karatsuba(9, 10). Req.:
 $M0=karatsuba(9,0), M1=karatsuba(0,1), P=karatsuba(9,1)$.

Llamada 5.18: Karatsuba(9, 10). Req.:
 $M0=karatsuba(9,0), M1=karatsuba(0,1), P=karatsuba(9,1)$.

Llamada 5.27: Karatsuba(8, 12). Req.:
 $M0=karatsuba(8,2), M1=karatsuba(0,1), P=karatsuba(8,3)$.

2.2.4. Resolución de cada etapas, paso a paso

Ahora, conociendo los cálculos necesarios en cada etapa, comenzaremos a resolverlos desde la más profunda (los casos base, de $n = 1$) hasta llegar a la más superficial (el problema planteado, de $n = 8$).

- 1.1: $Karatsuba(33574113, 21986455)n = 8 \implies D = 10^{\lceil 8/2 \rceil} = 10^4$
- 1.1.1: $X_0 = 33574113 \bmod 10^4 = 4113, X_1 = \lfloor 33574113/10^4 \rfloor = 3357$
- 1.1.2: $Y_0 = 21986455 \bmod 10^4 = 6455, Y_1 = \lfloor 21986455/10^4 \rfloor = 2198$
- 1.1.3: $P_X = X_0 + X_1 = 4113 + 3357 = 7470, P_Y = Y_0 + Y_1 = 6455 + 2198 = 8653$
- 1.1.4: $M_0 = karatsuba(4113, 6455) = \dots$ Llamada a 2.1 ($n = 4 \implies D = 10^{\lceil 4/2 \rceil} = 10^2$)
- 2.1.1: $X_0 = 13, X_1 = 41$
- 2.1.2: $Y_0 = 55, Y_1 = 64$
- 2.1.3: $P_X = 13 + 41 = 54, P_Y = 55 + 64 = 119$
- 2.1.4: $M0 = karatsuba(13, 55)$. Llamada a 3.1 ($n = 2, D = 10$)
- 3.1.1:
- 3.1.2:
- 3.1.3:
- 3.1.4: $M0 = karatsuba(3, 5) = 15$
- 3.1.5: $M1 = karatsuba(1, 5) = 5$
- 3.1.6: $P = karatsuba(4, 10)$. Llamada 4.3 ($n = 2, D = 10$)
- 4.3.1:
- 4.3.2:
- 4.3.3:
- 4.3.4: $M0 = karatsuba(4, 0) = 0$
- 4.3.5: $M1 = karatsuba(0, 1) = 0$
- 4.4.6: $P = karatsuba(4, 1) = 4$
- 4.3.7: $\leftarrow 0 \times 10^2 + (4 - 0 - 0) \times 10 = 0 + 40 + 0 = \boxed{40}$
- 3.1.7: $\leftarrow 5 \times 10^2 + (40 - 5 - 15) \times 10 + 15 = 500 + 200 + 15 = \boxed{715}$

A completar

2.3. Cantidad de operaciones y complejidad

Enunciado 1.2

Cuente la cantidad de sumas y multiplicaciones que realiza y relaciónelo con la complejidad temporal del método.

A completar

2.4. Comparación con algoritmo tradicional

Enunciado 1.3

Comparar lo obtenido con el método de multiplicación tradicional. ¿Observa alguna mejora? Analice.

A completar

2.5. División y conquista

Enunciado 1.4

¿Por qué se puede considerar al algoritmo de Karatsuba como de “división y conquista”?

A completar

3. Parte 2: Cuestión de complejidad...

3.1. Enunciado

Dada la siguiente relación de recurrencia

$$a \, T(n/b) + O(c)$$

Con:

a: $1 + (\text{los dos dígitos del padrón de la izquierda mod } 9)$
b: $2 + (\text{los dos dígitos del padrón de la izquierda mod } 7)$
c: "n" si su padrón es múltiplo de 4,
sino "nlogn" si su padrón es múltiplo de 3,

Se pide:

1. Responda y complete: ¿Qué le falta a la relación de recurrencia para que se pueda aplicar el teorema maestro?
2. Calcular la complejidad temporal utilizando el teorema maestro.
3. Explique paso a paso cómo llega a la misma.

3.2. Teorema maestro

Enunciado 2.1

Responda y complete: ¿Qué le falta a la relación de recurrencia para que se pueda aplicar el teorema maestro?

3.3. Complejidad temporal

Enunciado 2.2

Calcular la complejidad temporal utilizando el teorema maestro.

Enunciado 2.3

Explique paso a paso cómo llega a la misma.

A completar