FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Trabajo Práctico 1 — Karatsuba

[7529/9506] Teoría de Algoritmos I
Segundo cuatrimestre de 2021

Alumno:	XXXXX XXXXX, Xxxx
Número de padrón:	106 713
Email:	XXXXXX@fi.uba.ar
Entrega:	nº 1 (29/09/2021)

Índice

1. Introducción

1.1. Resumen

El presente informe documenta el enunciado y la solución del primer trabajo práctico de la materia Teoría de Algoritmos I. El mismo comprende la resolución manual de una multiplicación mediante el algoritmo de Karatsuba junto con su análisis, así como una parte teórica sobre recursividad y Teorema Maestro.

Si bien este trabajo es individual, es redactado empleando el plural de modestia (tan usual en el ámbito académico).

1.2. Lineamientos básicos

- El trabajo se realizará en forma individual.
- Se debe entregar el informe en formato pdf en el aula virtual de la materia.
- El informe debe presentar carátula con datos del autor y fecha de entrega. Debe incluir número de hoja en cada página.
- En caso de re-entrega, entregar un apartado con las correcciones mencionadas

2. Parte 1: ¡Karatsuba!

2.1. Enunciado

Dados los siguientes números (completada por su número de padrón):

```
a35b411c
2d98ef55
```

con:

```
a: dígito del padrón correspondiente a la unidad
b: dígito del padrón correspondiente a la centena
c: los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7
d: dígito del padrón correspondiente a la decena
e: dígito del padrón correspondiente a la unidad de mil
f: los dos dígitos del padrón de la derecha mod 9
```

Ejemplo. Padrón: 95473

```
33544114
27985155
```

Se pide:

1. Resuelva la multiplicación paso a paso utilizando el algoritmo de Karatsuba.
2. Cuente la cantidad de sumas y multiplicaciones que realiza y relaciónelo con la complejidad temporal del método.
3. Comparar lo obtenido con el método de multiplicación tradicional. ¿Observa alguna mejora? Analice.
4. ¿Por qué se puede considerar al algoritmo de Karatsuba como de “división y conquista”?

2.2. Resolución con Karatusba

Enunciado 1.1

Resuelva la multiplicación paso a paso utilizando el algoritmo de Karatsuba.

2.2.1. Adaptación de factores al número de padrón

Comenzaremos realizando la adaptación del número según el padrón 106 713:

```
a: dígito del padrón correspondiente a la unidad = 3
b: dígito del padrón correspondiente a la centena = 7
c: los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7 = 10 mod 7 = 3
d: dígito del padrón correspondiente a la decena = 1
e: dígito del padrón correspondiente a la unidad de mil = 6
f: los dos dígitos del padrón de la derecha mod 9 = 13 mod 9 = 4
```

Por lo que el resultado es:

```
33574113
21986455
```

2.2.2. Detalles generales y de la función recursiva

También definimos que trabajaremos en base decimal, por lo que en cada etapa de recursión (hasta llegar a $n = 1$):

- convertiremos los factores X e Y en:

$$X \rightarrow X_1 \times 10^{n/10} + X_0$$

$$Y \rightarrow Y_1 \times 10^{n/10} + Y_0$$

  Es decir, sabiendo que $D = 10^{\lceil n/2 \rceil}$:

$$X_0 = X \mod D, \quad X_1 = \lfloor X/D \rfloor$$

$$Y_0 = Y \mod D, \quad Y_1 = \lfloor Y/D \rfloor$$

- Calculamos[1] $P_X = X_0 + X_1$ e $P_Y = Y_0 + Y_1$.
- Obtendremos recursivamente (para n>1) las 3 multiplicaciones[1]:

$$M_0 = X_0 \times Y_0, \quad M_1 = X_1 \times Y_1, \quad P = P_X \times P_Y$$

- Realizamos las sumas y desplazamientos (multiplicación por potencia de la base elegida: 10^k):

$$M_1 \times 10^n + (P - M_1 - M_0) \times 10^{n/2} + M_0$$

Una vez alcanzado el caso base, se obtendrá el resultado mediante una clásica tabla de multiplicar de 1 cifra decimal.

[1] El uso de P_X, P_Y, M_1 y M_2 corresponde a una notación propia de este informe (para mayor claridad), no al material de estudio.

2.2.3. Etapas de recursión del caso dado

Para mantener la claridad de la explicación paso a paso, comenzaremos tan solo mostrando cuáles son las distintas llamadas de recursión.

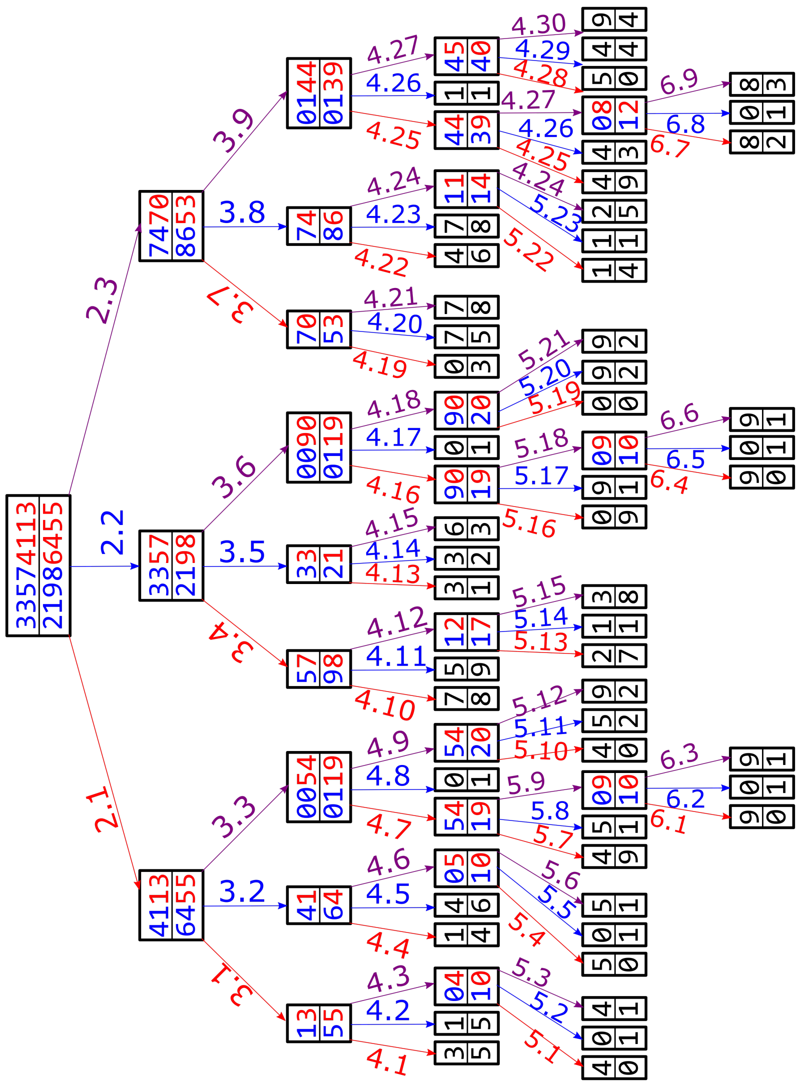

Figura 1: **Etapas de recursión de Karatsuba** para el caso dado, donde cada nodo consiste del X e Y de cada llamada a la función. Las mitades superiores de X e Y (X_0 e Y_0) han sido coloreadas en azul y las inferiores (X_1 e Y_1) con rojo.
Las flechas mantienen el color de las mitades que se usaron (rojo para M_1 y azul para M_0), o violeta para la que emplea la sumas P (de la mitad alta y baja de cada factor).

El siguiente listado incluye todas las llamadas a la función, y en el caso en que corresponda (cuando n>1) se detalla qué función llama cada una:

```
Etapa 1:
        Llamada 1.1: Karatsuba(33574113, 21986455). Req.:
                M0=karatsuba(4113,6455),M1=karatsuba(3357,2198),P=karatsuba(7470,8653).
```

```
Etapa 2:
        Llamada 2.1: Karatsuba(4113, 6455). Req.:
                M0=karatsuba(13,55),M1=karatsuba(41,64),P=karatsuba(54,119).
        Llamada 2.2: Karatsuba(3357, 2198). Req.:
                M0=karatsuba(57,98),M1=karatsuba(33,21),P=karatsuba(90,119).
        Llamada 2.3: Karatsuba(7470, 8653). Req.:
                M0=karatsuba(70,53),M1=karatsuba(74,86),P=karatsuba(144,139).
```

```
Etapa 3:
        Llamada 3.1: Karatsuba(13, 55). Req.:
                M0=karatsuba(3,5),M1=karatsuba(1,5),P=karatsuba(4,10).
        Llamada 3.2: Karatsuba(41, 64). Req.:
                M0=karatsuba(1,4),M1=karatsuba(4,6),P=karatsuba(5,10).
        Llamada 3.3: Karatsuba(54, 119). Req.:
                M0=karatsuba(54,19),M1=karatsuba(0,1),P=karatsuba(54,20).
        Llamada 3.4: Karatsuba(57, 98). Req.:
                M0=karatsuba(7,8),M1=karatsuba(5,9),P=karatsuba(12,17).
        Llamada 3.5: Karatsuba(33, 21). Req.:
                M0=karatsuba(3,1),M1=karatsuba(3,2),P=karatsuba(6,3).
        Llamada 3.6: Karatsuba(90, 119). Req.:
                M0=karatsuba(90,19),M1=karatsuba(0,1),P=karatsuba(90,20).
        Llamada 3.7: Karatsuba(70, 53). Req.:
                M0=karatsuba(0,3),M1=karatsuba(7,5),P=karatsuba(7,8).
        Llamada 3.8: Karatsuba(74, 86). Req.:
                M0=karatsuba(4,6),M1=karatsuba(7,8),P=karatsuba(11,14).
        Llamada 3.9: Karatsuba(144, 139). Req.:
                M0=karatsuba(44,39),M1=karatsuba(1,1),P=karatsuba(45,40).
```

```
Etapa 4:
        Llamada 4.3: Karatsuba(4, 10). Req.:
                M0=karatsuba(4,0),M1=karatsuba(0,1),P=karatsuba(4,1).
        Llamada 4.6: Karatsuba(5, 10). Req.:
                M0=karatsuba(5,0),M1=karatsuba(0,1),P=karatsuba(5,1).
        Llamada 4.7: Karatsuba(54, 19). Req.:
                M0=karatsuba(4,9),M1=karatsuba(5,1),P=karatsuba(9,10).
        Llamada 4.9: Karatsuba(54, 20). Req.:
                M0=karatsuba(4,0),M1=karatsuba(5,2),P=karatsuba(9,2).
        Llamada 4.12: Karatsuba(12, 17). Req.:
                M0=karatsuba(2,7),M1=karatsuba(1,1),P=karatsuba(3,8).
        Llamada 4.16: Karatsuba(90, 19). Req.:
                M0=karatsuba(0,9),M1=karatsuba(9,1),P=karatsuba(9,10).
        Llamada 4.18: Karatsuba(90, 20). Req.:
                M0=karatsuba(0,0),M1=karatsuba(9,2),P=karatsuba(9,2).
        Llamada 4.24: Karatsuba(11, 14). Req.:
                M0=karatsuba(1,4),M1=karatsuba(1,1),P=karatsuba(2,5).
        Llamada 4.25: Karatsuba(44, 39). Req.:
                M0=karatsuba(4,9),M1=karatsuba(4,3),P=karatsuba(8,12).
        Llamada 4.27: Karatsuba(45, 40). Req.:
                M0=karatsuba(5,0),M1=karatsuba(4,4),P=karatsuba(9,4).
```

```
Etapa 5:
        Llamada 5.9: Karatsuba(9, 10). Req.:
                M0=karatsuba(9,0),M1=karatsuba(0,1),P=karatsuba(9,1).
        Llamada 5.18: Karatsuba(9, 10). Req.:
                M0=karatsuba(9,0),M1=karatsuba(0,1),P=karatsuba(9,1).
        Llamada 5.27: Karatsuba(8, 12). Req.:
                M0=karatsuba(8,2),M1=karatsuba(0,1),P=karatsuba(8,3).
```

2.2.4. Resolución de cada etapas, paso a paso

Ahora, conociendo los cálculos necesarios en cada llamada y cada etapa, comenzaremos a resolverlos desenrollando las recursiones desde la más superficial hasta las más profundas.

1.1: $Karatsuba(33574113, 21986455) n = 8 \implies D = 10^{\lceil 8/2 \rceil} = 10^4$
- 1.1.1: $X\_0 = 33574113 \mod 10^4 = 4113, \quad X\_1 = \lfloor 33574113/10^4 \rfloor = 3357$
- 1.1.2: $Y\_0 = 21986455 \mod 10^4 = 6455, \quad Y\_1 = \lfloor 21986455/10^4 \rfloor = 2198$
- 1.1.3: $P\_X = X\_0 + X\_1 = 4113 + 3357 = 7470, \quad P\_Y = Y\_0 + Y\_1 = 6455 + 2198 = 8653$
- 1.1.4: $M\_0 = karatsuba(4113, 6455) = \ldots$ Llamada a 2.1 ($n = 4 \implies D = 10^{\lceil 4/2 \rceil} = 10^2$
  - 2.1.1: $X\_0 = 13, X\_1 = 41$
  - 2.1.2: $Y\_0 = 55, Y\_1 = 64$
  - 2.1.3: $P\_X = 54, P\_Y = 119$
  - 2.1.4: $M0 = karatsuba(13, 55)$. Llamada a 3.1 ($n = 2, D = 10$)
    - 3.1.1: $X\_0 = 3, X\_1 = 1$
    - 3.1.2: $Y\_0 = 5, Y\_1 = 5$
    - 3.1.3: $P\_X = 4, P\_Y = 10$
    - 3.1.4: $M0 = karatsuba(3, 5)$. Llamada a 4.1 ($n = 1$) $= \boxed{15}$
    - 3.1.5: $M1 = karatsuba(1, 5)$. Llamada a 4.2 ($n = 1$) $= \boxed{5}$
    - 3.1.6: $P = karatsuba(4, 10)$. Llamada a 4.3 ($n = 2, D = 10$)
      - 4.3.1: $X\_0 = 4, X\_1 = 0$
      - 4.3.2: $Y\_0 = 0, Y\_1 = 1$
      - 4.3.3: $P\_X = 4, P\_Y = 1$
      - 4.3.4: $M0 = karatsuba(4, 0)$. Llamada a 5.1 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
      - 4.3.5: $M1 = karatsuba(0, 1)$. Llamada a 5.2 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
      - 4.3.6: $P = karatsuba(4, 1)$. Llamada a 5.3 ($n = 1$) $= \boxed{4}$
      - 4.3.7: $\leftarrow 0 \times 100 + (4 - 0 - 0) \times 10 + 0 = 0 \times 100 + 4 \times 10 + 0 = \boxed{40}$
    - 3.1.7: $\leftarrow 5 \times 100 + (40 - 5 - 15) \times 10 + 15 = 500 + 20 \times 10 + 15 = \boxed{715}$
  - 2.1.5: $M1 = karatsuba(41, 64)$. Llamada a 3.2 ($n = 2, D = 10$)
    - 3.2.1: $X\_0 = 1, X\_1 = 4$
    - 3.2.2: $Y\_0 = 4, Y\_1 = 6$
    - 3.2.3: $P\_X = 5, P\_Y = 10$
    - 3.2.4: $M0 = karatsuba(1, 4)$. Llamada a 4.4 ($n = 1$) $= \boxed{4}$
    - 3.2.5: $M1 = karatsuba(4, 6)$. Llamada a 4.5 ($n = 1$) $= \boxed{24}$
    - 3.2.6: $P = karatsuba(5, 10)$. Llamada a 4.6 ($n = 2, D = 10$)
      - 4.6.1: $X\_0 = 5, X\_1 = 0$
      - 4.6.2: $Y\_0 = 0, Y\_1 = 1$
      - 4.6.3: $P\_X = 5, P\_Y = 1$
      - 4.6.4: $M0 = karatsuba(5, 0)$. Llamada a 5.4 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
      - 4.6.5: $M1 = karatsuba(0, 1)$. Llamada a 5.5 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
      - 4.6.6: $P = karatsuba(5, 1)$. Llamada a 5.6 ($n = 1$) $= \boxed{5}$
      - 4.6.7: $\leftarrow 0 \times 100 + (5 - 0 - 0) \times 10 + 0 = 0 + 5 \times 10 + 0 = \boxed{50}$
    - 3.2.7: $\leftarrow 24 \times 100 + (50 - 24 - 4) \times 10 + 4 = 2400 + 22 \times 10 + 4 = \boxed{2624}$
  - 2.1.6: $P = karatsuba(54, 119)$. Llamada a 3.3 ($n = 4, D = 100$)
    - 3.3.1: $X\_0 = 54, X\_1 = 0$
    - 3.3.2: $Y\_0 = 19, Y\_1 = 1$
    - 3.3.3: $P\_X = 54, P\_Y = 20$
    - 3.3.4: $M0 = karatsuba(54, 19)$. Llamada a 4.7 ($n = 2, D = 10$)
      - 4.7.1: $X\_0 = 4, X\_1 = 5$
      - 4.7.2: $Y\_0 = 9, Y\_1 = 1$

4.7.3: $P\_X = 9, P\_Y = 10$
4.7.4: $M0 = karatsuba(4, 9)$. Llamada a 5.7 ($n = 1$) = $\boxed{36}$
4.7.5: $M1 = karatsuba(5, 1)$. Llamada a 5.8 ($n = 1$) = $\boxed{5}$
4.7.6: $P = karatsuba(9, 10)$. Llamada a 5.9 ($n = 2, D = 10$)
5.9.1: $X\_0 = 9, X\_1 = 0$
5.9.2: $Y\_0 = 0, Y\_1 = 1$
5.9.3: $P\_X = 9, P\_Y = 1$
5.9.4: $M0 = karatsuba(9, 0)$. Llamada a 6.1 ($n = 1$) = $\boxed{0}$
5.9.5: $M1 = karatsuba(0, 1)$. Llamada a 6.2 ($n = 1$) = $\boxed{0}$
5.9.6: $P = karatsuba(9, 1)$. Llamada a 6.3 ($n = 1$) = $\boxed{9}$
5.9.7: $\leftarrow 0 \times 100 + (9) \times 10 + 0 = 0 + 9 \times 10 + 0 = \boxed{90}$
4.7.7: $\leftarrow 5 \times 100 + (90 - 5 - 36) \times 10 + 36 = 500 + 49 \times 10 + 36 = \boxed{1026}$
3.3.5: $M1 = karatsuba(0, 1)$. Llamada a 4.8 ($n = 1$) = $\boxed{0}$
3.3.6: $P = karatsuba(54, 20)$. Llamada a 4.9 ($n = 2, D = 10$)
4.9.1: $X\_0 = 4, X\_1 = 5$
4.9.2: $Y\_0 = 0, Y\_1 = 2$
4.9.3: $P\_X = 9, P\_Y = 2$
4.9.4: $M0 = karatsuba(4, 0)$. Llamada a 5.10 ($n = 1$) = $\boxed{0}$
4.9.5: $M1 = karatsuba(5, 2)$. Llamada a 5.11 ($n = 1$) = $\boxed{10}$
4.9.6: $P = karatsuba(9, 2)$. Llamada a 5.12 ($n = 1$) = $\boxed{18}$
4.9.7: $\leftarrow 10 \times 100 + (18 - 10 - 0) \times 10 + 0 = 1000 + 80 + 0 = \boxed{1080}$
3.3.7: $\leftarrow 0 \times 10^4 + (1080 - 1026) \times 100 + 1026 = 0 + 54 \times 100 + 1026 = \boxed{6426}$
2.1.7: $\leftarrow 2624 \times 10^4 + (6426 - 2624 - 715) \times 100 + 715 =$
$= 26240000 + 308700 + 715 = \boxed{26549415}$
1.1.5: $M1 = karatsuba(3357, 2198)$. Llamada a 2.2 ($n = 4, D = 100$)
2.2.1: $X\_0 = 57, X\_1 = 33$
2.2.2: $Y\_0 = 98, Y\_1 = 21$
2.2.3: $P\_X = 90, P\_Y = 119$
2.2.4: $M0 = karatsuba(57, 98)$. Llamada a 3.4 ($n = 2, D = 10$)
3.4.1: $X\_0 = 7, X\_1 = 5$
3.4.2: $Y\_0 = 8, Y\_1 = 9$
3.4.3: $P\_X = 12, P\_Y = 17$
3.4.4: $M0 = karatsuba(7, 8)$. Llamada a 4.10 ($n = 1$) = $\boxed{56}$
3.4.5: $M1 = karatsuba(5, 9)$. Llamada a 4.11 ($n = 1$) = $\boxed{45}$
3.4.6: $P = karatsuba(12, 17)$. Llamada a 4.12 ($n = 2, D = 10$)
4.12.1: $X\_0 = 2, X\_1 = 1$
4.12.2: $Y\_0 = 7, Y\_1 = 1$
4.12.3: $P\_X = 3, P\_Y = 8$
4.12.4: $M0 = karatsuba(2, 7)$. Llamada a 5.13 ($n = 1$) = $\boxed{14}$
4.12.5: $M1 = karatsuba(1, 1)$. Llamada a 5.14 ($n = 1$) = $\boxed{1}$
4.12.6: $P = karatsuba(3, 8)$. Llamada a 5.15 ($n = 1$) = $\boxed{24}$
4.12.7: $\leftarrow 1 \times 100 + (24 - 14 - 1) \times 10 + 14 = 100 + 90 + 14 = \boxed{204}$
3.4.7: $\leftarrow 45 \times 100 + (204 - 45 - 56) \times 10 + 56 = 4500 + 103 \times 10 + 56 = \boxed{5586}$
2.2.5: $M1 = karatsuba(33, 21)$. Llamada a 3.5 ($n = 2, D = 10$)
3.5.1: $X\_0 = 3, X\_1 = 3$
3.5.2: $Y\_0 = 1, Y\_1 = 2$
3.5.3: $P\_X = 6, P\_Y = 3$
3.5.4: $M0 = karatsuba(3, 1)$. Llamada a 4.13 ($n = 1$) = $\boxed{3}$
3.5.5: $M1 = karatsuba(3, 2)$. Llamada a 4.14 ($n = 1$) = $\boxed{6}$
3.5.6: $P = karatsuba(6, 3)$. Llamada a 4.15 ($n = 1$) = $\boxed{18}$

3.5.7: $\leftarrow 6 \times 100 + (18 - 6 - 3) \times 10 + 3 = 600 + 90 + 3 = \boxed{693}$
2.2.6: $P = karatsuba(90, 119)$. Llamada a 3.6 ($n = 4, D = 100$)
3.6.1: $X\_0 = 90, X\_1 = 0$
3.6.2: $Y\_0 = 19, Y\_1 = 1$
3.6.3: $P\_X = 90, P\_Y = 20$
3.6.4: $M0 = karatsuba(90, 19)$. Llamada a 4.16 ($n = 2, D = 10$)
4.16.1: $X\_0 = 0, X\_1 = 9$
4.16.2: $Y\_0 = 9, Y\_1 = 1$
4.16.3: $P\_X = 9, P\_Y = 10$
4.16.4: $M0 = karatsuba(0, 9)$. Llamada a 5.16 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
4.16.5: $M1 = karatsuba(9, 1)$. Llamada a 5.17 ($n = 1$) $= \boxed{9}$
4.16.6: $P = karatsuba(9, 10)$. Llamada a 5.18 ($n = 2, D = 10$)
5.18.1: $X\_0 = 9, X\_1 = 0$
5.18.2: $Y\_0 = 0, Y\_1 = 1$
5.18.3: $P\_X = 9, P\_Y = 1$
5.18.4: $M0 = karatsuba(9, 0)$. Llamada a 6.4 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
5.18.5: $M1 = karatsuba(0, 1)$. Llamada a 6.5 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
5.18.6: $P = karatsuba(9, 1)$. Llamada a 6.6 ($n = 1$) $= \boxed{9}$
5.18.7: $\leftarrow 0 \times 100 + (9 - 0 - 0) \times 10 + 0 = 0 + 90 + 0 = \boxed{90}$
4.16.7: $\leftarrow 9 \times 100 + (90 - 9 - 0) \times 10 + 0 = 900 + 810 + 0 = \boxed{1710}$
3.6.5: $M1 = karatsuba(0, 1)$. Llamada a 4.17 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
3.6.6: $P = karatsuba(90, 20)$. Llamada a 4.18 ($n = 2, D = 10$)
4.18.1: $X\_0 = 0, X\_1 = 9$
4.18.2: $Y\_0 = 0, Y\_1 = 2$
4.18.3: $P\_X = 9, P\_Y = 2$
4.18.4: $M0 = karatsuba(0, 0)$. Llamada a 5.19 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
4.18.5: $M1 = karatsuba(9, 2)$. Llamada a 5.20 ($n = 1$) $= \boxed{18}$
4.18.6: $P = karatsuba(9, 2)$. Llamada a 5.21 ($n = 1$) $= \boxed{18}$
4.18.7: $\leftarrow 18 \times 100 + (18 - 18 - 0) \times 10 + 0 = 1800 + 0 + 0 = \boxed{1800}$
3.6.7: $\leftarrow 0 \times 10000 + (1800 - 0 - 1710) \times 100 + 1710 =$
$= 0 + 9000 + 1710 = \boxed{10710}$
2.2.7: $\leftarrow 693 \times 10000 + (10710 - 5586 - 693) \times 100 + 5586 =$
$= 6930000 + 443100 + 5586 = \boxed{7378686}$
1.1.6: $P = karatsuba(7470, 8653)$. Llamada a 2.3 ($n = 4, D = 100$)
2.3.1: $X\_0 = 70, X\_1 = 74$
2.3.2: $Y\_0 = 53, Y\_1 = 86$
2.3.3: $P\_X = 144, P\_Y = 139$
2.3.4: $M0 = karatsuba(70, 53)$. Llamada a 3.7 ($n = 2, D = 10$)
3.7.1: $X\_0 = 0, X\_1 = 7$
3.7.2: $Y\_0 = 3, Y\_1 = 5$
3.7.3: $P\_X = 7, P\_Y = 8$
3.7.4: $M0 = karatsuba(0, 3)$. Llamada a 4.19 ($n = 1$) $= \boxed{0}$
3.7.5: $M1 = karatsuba(7, 5)$. Llamada a 4.20 ($n = 1$) $= \boxed{35}$
3.7.6: $P = karatsuba(7, 8)$. Llamada a 4.21 ($n = 1$) $= \boxed{56}$
3.7.7: $\leftarrow 35 \times 100 + (56 - 35 - 0) \times 10 + 0 = 3500 + 210 + 0 = \boxed{3710}$
2.3.5: $M1 = karatsuba(74, 86)$. Llamada a 3.8 ($n = 2, D = 10$)
3.8.1: $X\_0 = 4, X\_1 = 7$
3.8.2: $Y\_0 = 6, Y\_1 = 8$
3.8.3: $P\_X = 11, P\_Y = 14$
3.8.4: $M0 = karatsuba(4, 6)$. Llamada a 4.22 ($n = 1$) $= \boxed{24}$
3.8.5: $M1 = karatsuba(7, 8)$. Llamada a 4.23 ($n = 1$) $= \boxed{56}$

3.8.6: $P = karatsuba(11, 14)$. Llamada a 4.24 $(n = 2, D = 10)$
4.24.1: $X\_0 = 1, X\_1 = 1$
4.24.2: $Y\_0 = 4, Y\_1 = 1$
4.24.3: $P\_X = 2, P\_Y = 5$
4.24.4: $M0 = karatsuba(1, 4)$. Llamada a 5.22 $(n = 1) = \boxed{4}$
4.24.5: $M1 = karatsuba(1, 1)$. Llamada a 5.23 $(n = 1) = \boxed{1}$
4.24.6: $P = karatsuba(2, 5)$. Llamada a 5.24 $(n = 1) = \boxed{10}$
4.24.7: $\leftarrow 1 \times 100 + (10 - 4 - 1) \times 10 + 4 = 100 + 50 + 4 = \boxed{154}$
3.8.7: $\leftarrow 56 \times 100 + (154 - 56 - 24) \times 10 + 24 = 5600 + 740 + 24 = \boxed{6364}$
2.3.6: $P = karatsuba(144, 139)$. Llamada a 3.9 $(n = 4, D = 100)$
3.9.1: $X\_0 = 44, X\_1 = 1$
3.9.2: $Y\_0 = 39, Y\_1 = 1$
3.9.3: $P\_X = 45, P\_Y = 40$
3.9.4: $M0 = karatsuba(44, 39)$. Llamada a 4.25 $(n = 2, D = 10)$
4.25.1: $X\_0 = 4, X\_1 = 4$
4.25.2: $Y\_0 = 9, Y\_1 = 3$
4.25.3: $P\_X = 8, P\_Y = 12$
4.25.4: $M0 = karatsuba(4, 9)$. Llamada a 5.25 $(n = 1) = \boxed{36}$
4.25.5: $M1 = karatsuba(4, 3)$. Llamada a 5.26 $(n = 1) = \boxed{12}$
4.25.6: $P = karatsuba(8, 12)$. Llamada a 5.27 $(n = 2, D = 10)$
5.27.1: $X\_0 = 8, X\_1 = 0$
5.27.2: $Y\_0 = 2, Y\_1 = 1$
5.27.3: $P\_X = 8, P\_Y = 3$
5.27.4: $M0 = karatsuba(8, 2)$. Llamada a 6.7 $(n = 1) = \boxed{16}$
5.27.5: $M1 = karatsuba(0, 1)$. Llamada a 6.8 $(n = 1) = \boxed{0}$
5.27.6: $P = karatsuba(8, 3)$. Llamada a 6.9 $(n = 1) = \boxed{24}$
5.27.7: $\leftarrow 0 \times 100 + (24 - 16) \times 10 + 16 = 0 + 80 + 16 = \boxed{96}$
4.25.7: $\leftarrow 12 \times 100 + (96 - 12 - 36) \times 10 + 36 = 1200 + 480 + 36 = \boxed{1716}$
3.9.5: $M1 = karatsuba(1, 1)$. Llamada a 4.26 $(n = 1) = \boxed{1}$
3.9.6: $P = karatsuba(45, 40)$. Llamada a 4.27 $(n = 2, D = 10)$
4.27.1: $X\_0 = 5, X\_1 = 4$
4.27.2: $Y\_0 = 0, Y\_1 = 4$
4.27.3: $P\_X = 9, P\_Y = 4$
4.27.4: $M0 = karatsuba(5, 0)$. Llamada a 5.28 $(n = 1) = \boxed{0}$
4.27.5: $M1 = karatsuba(4, 4)$. Llamada a 5.29 $(n = 1) = \boxed{16}$
4.27.6: $P = karatsuba(9, 4)$. Llamada a 5.30 $(n = 1) = \boxed{36}$
4.27.7: $\leftarrow 16 \times 100 + (36 - 16) \times 10 + 0 = 1600 + 200 + 0 = \boxed{1800}$
3.9.7: $\leftarrow 1 \times 10^4 + (1800 - 1716 - 1) \times 100 + 1716 = 10000 + 8300 + 1716 = \boxed{20016}$
2.3.7: $\leftarrow 6364 \times 10^4 + (20\,016 - 6364 - 3710) \times 100 + 3710 =$
$63\,640\,000 + 994\,200 + 3710 = \boxed{64\,637\,910}$
1.1.7: $\leftarrow 7\,378\,686 \times 10^8 + (64\,637\,910 - 7\,378\,686 - 26\,549\,415) \times 10^4 + 26\,549\,415 =$
$= 737\,868\,600\,000\,000 + 307\,098\,090\,000 + 26\,549\,415 = \boxed{\boxed{738\,175\,724\,639\,415}}$

2.3. Cantidad de operaciones y complejidad

Enunciado 1.2

Cuente la cantidad de sumas y multiplicaciones que realiza y relaciónelo con la complejidad temporal del método.

Para realizar la cuenta **no** tomaremos en cuenta las operaciones de desplazamiento posicional (expresadas como multiplicaciones por potencia de la base del sistema numeral) ni las separación del número en su parte alta y baja (expresadas como divisiones y residuos). Si bien han sido expresadas formalmente como tales, una buena elección de detalles de implementación (por ejemplo, para una implementación decimal usar BCD[2]) será O(1). En términos generales observamos:

- Para el cálculo de P_X y P_Y se requieren 2 sumas en total.
- Para la sumatoria final, se consideran 4 sumas: 2 para realizar $S = (P - M_1) - M_0$; y otras 2 para el resultado de cada etapa de recursión $(M_1 \times K_1 + S \times K_S) + M_0$. [3]
- Para cada multiplicación, cuando ambos números son de 1 cifra se considera 1 operación. En caso contrario se desenrollará la recursión y se sumará el costo de cada llamada, más las 6 descritas en los puntos anteriores.

En el siguiente gráfico podemos ver el desarrollo completo.

[2] Binary-Coded Decimal o Decimal codificado en binario.

[3] Como se explicó anteriormente, aunque el cambio de posición se formule como multiplicación por una potencia de la base del sistema elegido (decimal en este caso), no se tomará en cuenta.

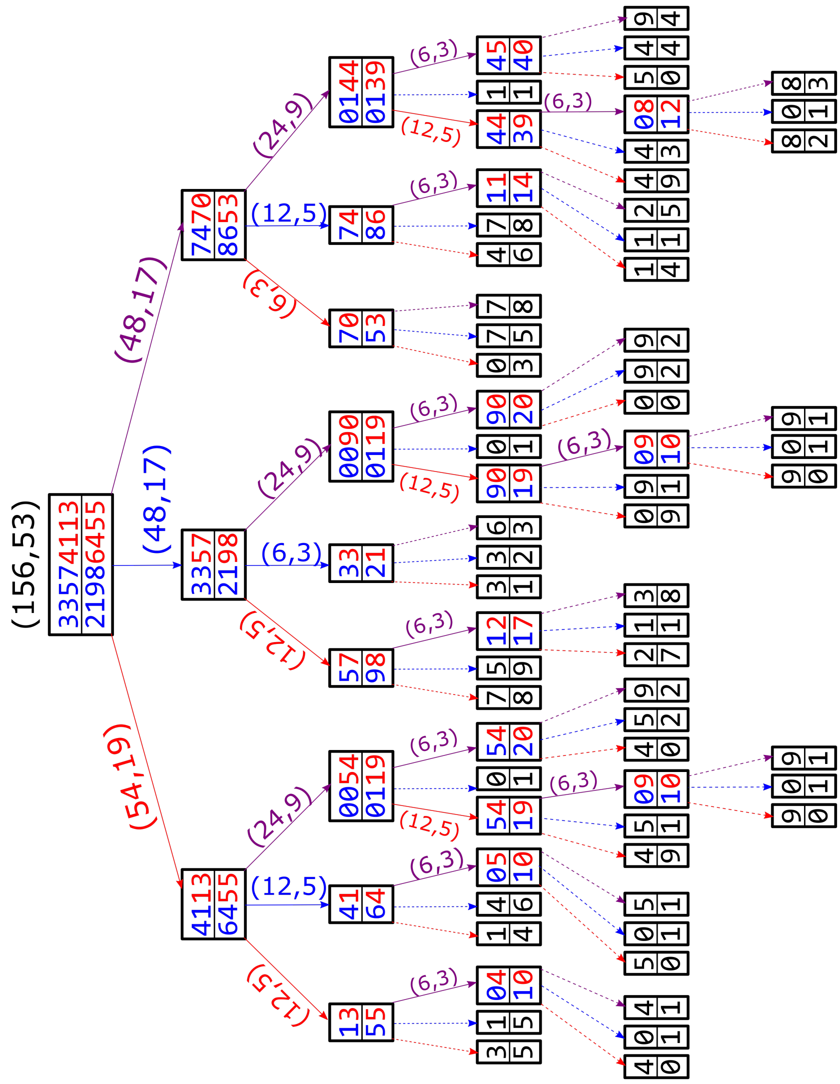

Figura 2:
Operaciones de suma y resta con Karatsuba para el caso dado, donde cada arco representa el costo en (sumas, multiplicaciones) de cada operación hija. Los nodos hojas tienen todos costo $(0, 1)$ (se representa con la flecha intermitente) y cada nodo padre tienen el costo de sus nodos hijos más un adicional de $(6, 0)$ del cómputo realizado por el algoritmo de Karatsuba.

En realidad, basta con saber (analizando el primer gráfico) que en este caso hay 53 multiplicaciones de una sola cifra (representadas por los nodos en negro) y 26 ejecuciones del algoritmo (nodos en color y con flechas), para calcularlo:

$$Sumas = Ejecuciones * 6 \implies Sumas = 26 * 6 \implies \boxed{Sumas = 156}$$

$$Multiplicaciones = NodosNegros \times 1 \implies \boxed{Multiplicaciones = 53}$$

2.4. Comparación con algoritmo tradicional

Enunciado 1.3

Comparar lo obtenido con el método de multiplicación tradicional. ¿Observa alguna mejora? Analice.

El algoritmo tradicional requiere n” multiplicaciones de 1 cifra (siendo n el tamaño máximo de ambos factores), y $n-1$ operaciones de suma de cifras arbitrarias. En este caso, serían (8,64). Si bien Karatsuba ya proveé una mejora en la cantidad de multiplicaciones de casi 18 % menos, la cantidad de sumas es de más de 1800 % veces superior.

De todas formas, las operaciones de suma que se realizan en Karatsuba son, en un porcentaje relevante, de números de menor cantida de cifras. Sabiendo que las computadoras no tienen la capacidad de sumar números arbitrarios de grandes cifras en una sola operación y que el análisis de complejidad de algoritmos se torna relevante a medida que N crece significativamente, nos puede parecer prudente comparar también las sumas de 1 cifra.

Puede observarse que tenemos un solo caso, la ejecución incial, en el que la cantidad de cifras sumadas en el algoritmo de Karatsuba es N, mientras que en las restantes va disminuyendo. Mientras que en el algoritmo tradicional cada suma de dos sumandos de cifras arbitrarias es, en realidad, de $(n+1)$ cifras; es decir, es $O(n^2)$. Un análisis formal y estricto de todos los casos excede el objeto de este TP, pero podemos analizar la instancia planteada:

Cifras	Sumas	Veces	Sumas de 1 cifra
8	6	1	48
4	6	6	144
2	6	19	228
Total		26	**420**

Si bien siguen siendo bastantes más sumas, siendo 420/64 es un 560 % adicional. Y por las características del algoritmo este número también tiene una cota superior menor que la del algoritmo tradicional.

2.5. División y conquista

Enunciado 1.4

¿Por qué se puede considerar al algoritmo de Karatsuba como de “división y conquista”?

Para que un algoritmo sea considerado de "divide y conquista"debe dividir sus datos de entrada, **llamarse recursivamente**, una o varias veces, **con una fracción de los datos** (hasta un caso base que resulte trivial o se resuelva mediante otro algoritmo) y finalmente unificar los resultados para formar una solución.

Es notable destacar que no es una condición necesaria que haya una relación unívoca entre las características de la división y la cantidad de llamadas. Así, pueden encontrarse algoritmos como la búsqueda binaria, en la que se fracciona en 2 partes iguales, pero sólo se invoca la recursión sobre una mitad. De manera análoga pero inversa, el algoritmo de Karatsuba realiza (excepto en el caso base) tres llamadas recursivas con datos de la mitad del tamaño de los de entrada.

En todo caso, sí son condiciones necesarias que en cada llamada recursiva la cantidad de datos disminuya **acercándose al caso base**, y que el algoritmo aplicado sea el mismo. **Por todo esto, podemos afirmar que el algoritmo de Karatsuba puede considerarse como un algoritmo de “división y conquista”**.

3. Parte 2: Cuestión de complejidad...

3.1. Enunciado

Dada la siguiente relación de recurrencia

```
    a T(n/b) + O(c)
```

Con:

```
a: 1 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 9)
b: 2 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7)
c: ‘‘n’’ si su padrón es múltiplo de 4,
   sino ‘‘nlogn’’ si su padrón es múltiplo de 3,
```

Se pide:

1. Responda y complete: ¿Qué le falta a la relación de recurrencia para que se pueda aplicar el teorema maestro?
2. Calcular la complejidad temporal utilizando el teorema maestro.
3. Explique paso a paso cómo llega a la misma.

3.2. Teorema maestro

Enunciado 2.1

Responda y complete: ¿Qué le falta a la relación de recurrencia para que se pueda aplicar el teorema maestro?

Comencemos adaptando la consigna al número de padrón:

```
a: 1 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 9) = 1+(10 mod 9)=1+1 = 2
b: 2 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7) = 2+(10 mod 7)=2+3 = 5
c: ‘‘n’’ si su padrón es múltiplo de 4,
   sino ‘‘nlogn’’ si su padrón es múltiplo de 3, => c = n log n
   sino ‘‘n2’’
```

Por lo tanto: $T(n) = 2T(n/5) + f(n)$ para una $f(n)conO(nlogn)$.
A la relación de recurrencia dada, para poder aplicar el teorema maestro, le falta:

- Indicar que el caso base es una constante.

3.3. Complejidad temporal

Enunciado 2.2

Calcular la complejidad temporal utilizando el teorema maestro.

La complejidad de $T(n) = 2T(n/5) + f(n)$ para una $f(n)conO(nlogn)$ es: $T(n) = \Omega(nlog(n))$

Enunciado 2.3

Explique paso a paso cómo llega a la misma.

- Verificamos (caso 2) si la complejidad de f(n), dada como $O(nlogn)$ es posible acotarla, tanto inferior como superiormente, con la que que propone el teorema maestro como $O(n^{log_b a})$; es decir, con $O(n^{log_5 2}) \approx O(n^{0,43\dots})$, pero no podemos.

- Nos enfocamos en el caso 1, mirando si es posible acotarla superiormente con $O(n^{log_5 2-\epsilon} \approx O(n^{0,43\dots-\epsilon}))$ con un $\epsilon > 0$. Pero a medida que aumentamos el e, obtenemos un resultado inferior.

- Buscamos si es posible encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $O(n^{log_5 2+\epsilon}$ pueda acotar **inferiormente** a $f(n)$, es decir a $O(nlogn)$. Encontramos que valores pequeños, por ejemplo $\epsilon = 0{,}1$ es una cota inferior a $f(n)$.

- Verificamos el caso 3, si existe un valor constante $c < 1$ tal que $a \times f(n/b) \leq c \times f(n)$. Es decir que $2 \times f(n/5) \leq c \times f(n) \implies 2 \times (n/5) \times log(n/5) \leq c \times nlog(n)$. Lo que se cumple para $c = 2/5$, siendo que:

$$2 \times (n/5) \times log(n/5) \leq (2/5) \times nlog(n)$$
$$\cancel{(2/5)} \times n \times log(n/5) \leq \cancel{(2/5)} \times nlog(n)$$
$$\cancel{n} \times log(n/5) \leq \cancel{n} log(n)$$
$$\cancel{log(n)} - log(5) \leq 0 + \cancel{log(n)}$$
$$-log(5) \leq 0$$

Por lo tanto, siguiendo la conclusión del caso 3, la complejidad se corresponde con la de la función f(n).