Etude cinématique du bras d'une pelle mécanique

Mohamed Thebti

17 septembre 2023

Table des matières

1 Introduction

2 Who is Viktor Schauberger ?

3 Solenoid of Schauberger

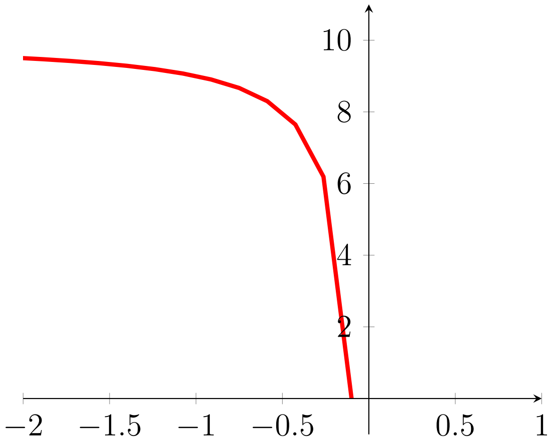
—

—

—

Solenoid radius :

$$r(z) = r_0 + \frac{1}{z} \tag{1}$$



Solenoid surface in 2D :

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} r_z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \vec{S} = \begin{bmatrix} r_0 + \frac{1}{z} \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \tag{2}$$

Now, we can draw this solenoid in 3D using the cylindric coordinates :

$$R_{cyl} = [\vec{e_r}; \vec{e_\theta}; \vec{e_z}] \tag{3}$$

Rotation matrix over z-axis :

$$Rot_Z^\theta = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\vec{S}_{R_{cyl}} = \vec{S} \cdot Rot_Z^\theta = \begin{bmatrix} r_z \cdot cos(\theta) \\ r_z \cdot sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} \tag{5}$$

The surface is determined by two variables, θ and z.

$$\vec{S}_{R_{cyl}}(\theta, z) = \begin{bmatrix} r_z \cdot cos(\theta) \\ r_z \cdot sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} \tag{6}$$

a particule mass is moving in the solenoid with a vertical velocity v_z and an angular speed $\dot{\theta}$.

$$\theta = \dot{\theta} \cdot t \tag{7}$$
$$z = v_z \cdot t \tag{8}$$

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} r_z \cdot cos(\dot{\theta} \cdot t) \\ r_z \cdot sin(\dot{\theta} \cdot t) \\ v_z \cdot t \end{bmatrix} \tag{9}$$

First step, surface of a cylinder, with a fixed radius :

$$\vec{S}_{R_{cyl}} = \begin{bmatrix} r_z \cdot cos(\theta) \\ r_z \cdot sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} \tag{10}$$

4 Schéma cinématique

La pelle complète est dessinée schématiquement, ce qui donne le résultat suivant : (mettre le schéma ici)

4.1 Articulations et pivots

les articulations : A,B,C, D, E, F
les pivots : ...

4.2 Degrés de liberté

ddl : α_1, v_1 à v_7. (v pour vérin)

— v_3 et v_4 sont interdépendants

4.3 Repère global

Il est placé à l'origine O. il se utilisé pour exprimer la position de chaque point, principalement l'extrémité du bras (le godet).

$$R = \{x, y, z\} \tag{11}$$

FIGURE 1 – Vue de dessus

4.4 Repères locaux

ce sont des repères mobiles, qui bougent avec les bras sur lesquels ils sont placés. Ainsi chacun dépend du repère précédent : le repère R_{i+1} se déplacent selon un axe du repère R_i.

Repère 1 : placé en A, rotation de α_1 autour de l'axe z.

$$R_1 = \{x_1, y_1, z_1\} \tag{12}$$

Repère 2 : placé en C, rotation de α_2 autour de l'axe y_1.

$$R_2 = \{x_2, y_2, z_2\} \tag{13}$$

Repère 3 : placé en D, rotation de α_3 autour de l'axe y_2.

$$R_3 = \{x_3, y_3, z_3\} \tag{14}$$

Repère 4 : placé en E_1, rotation de α_4 autour de l'axe y_3.

$$R_4 = \{x_4, y_4, z_4\} \tag{15}$$

Repère 5 : placé en F, rotation de α_5 autour de l'axe y_4.

$$R_5 = \{x_5, y_5, z_5\} \tag{16}$$

Repère 6 : placé en G, rotation de α_6 autour de l'axe z_5.

$$R_5 = \{x_5, y_5, z_5\} \tag{17}$$

4.5 Passage d'un repère à un autre

Matrice de transformation T_i du repère $i+1$ à i :

$$\vec{A}_{R_i i+1} = T_i \cdot \vec{A}_{R_i} \tag{18}$$

Pour la suite, nous avons besoin d'exprimer la position d'un point par rapport au repère global. En partant de la relation précédente, on peut en déduire :

$$\vec{A}_R = T_1 \cdot T_2 \cdot .... \cdot T_i \cdot \vec{A}_{R_i} \tag{19}$$

4.5.1 Matrice de rotation

Ci-dessous les matrices qui permettent de faire une rotation d'un angle quelconque α selon les axes X, Y et Z.

$$Rot_X^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$Rot_Y^\alpha = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & 0 & -sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\alpha) & 0 & cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$Rot_Z^\alpha = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

5 Etude cinématique

5.1 les vecteurs de position

définir les vecteurs qui expriment les barres de la pelle mécanique, selon les repères définis précédemment.

$$\vec{OA}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}_R \quad \vec{AB}_{R_1} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R1} \quad \vec{BB}_{1R_1} = \begin{bmatrix} b_1 \cdot cos(\beta_1) \\ 0 \\ b_1 \cdot sin(\beta_1) \end{bmatrix}_{R1} \quad \vec{BB}_{2R_1} = \begin{bmatrix} b_2 \cdot cos(\beta_2) \\ 0 \\ b_2 \cdot sin(\beta_2) \end{bmatrix}_{R1} \tag{23}$$

$$\vec{B_1B}_{2R_1} = \begin{bmatrix} v_1 \cdot cos(\beta_4) \\ 0 \\ v_1 \cdot sin(\beta_4) \end{bmatrix}_{R1} \quad \vec{B_1C}_{1R_1} = \begin{bmatrix} c_1 \cdot cos(\beta_1) \\ 0 \\ c_1 \cdot sin(\beta_1) \end{bmatrix}_{R1} \quad \vec{C_1C}_{R_1} = \begin{bmatrix} c \cdot cos(\beta_1) \\ 0 \\ c \cdot sin(\beta_1) \end{bmatrix}_{R1} \tag{24}$$

$$\vec{C_1C}_2 = \begin{bmatrix} v_2 \cdot cos(\gamma_1) \\ 0 \\ v_2 \cdot sin(\gamma_1) \end{bmatrix}_{R1} \quad \vec{CC}_{2R_1} = \begin{bmatrix} -c_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R2} \quad \vec{C_2D}_{R_2} = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R2} \quad \vec{DD}_{1R_3} = \begin{bmatrix} -d_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_3} \tag{25}$$

$$\vec{D_1D}_{2R_3} = \begin{bmatrix} -d_2 \cdot cos(\delta_1) \\ 0 \\ d_2 \cdot sin(\delta_1) \end{bmatrix}_{R_3} \tag{26}$$

—

—

—

5.2 Position des pivots selon repère global

$$\vec{OA}_R = \tag{27}$$

$$\vec{OB}_R = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R \tag{28}$$

$$\vec{OC}_R = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R + \vec{BB}_{1R} + \vec{B_1C}_{1R} + \vec{C_1C}_R \tag{29}$$

$$\vec{OD}_R = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R + \vec{BB}_{1R} + \vec{B_1C}_{1R} + \vec{C_1C}_R + \vec{CC}_{2R} + \vec{C_2D}_R \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\vec{OE}_R = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R + \vec{BB}_{1R} + \vec{B_1C}_{1R} + \vec{C_1C}_R \\ + \vec{CC}_{2R} + \vec{C_2D}_R + \vec{DD}_{1R} + \vec{D_1E}_R\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\vec{OF}_R = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R + \vec{BB}_{1R} + \vec{B_1C}_{1R} + \vec{C_1C}_R \\ + \vec{CC}_{2R} + \vec{C_2D}_R + \vec{DD}_{1R} + \vec{D_1E}_R + \vec{EF}_R\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\vec{OG}_R = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R + \vec{BB}_{1R} + \vec{B_1C}_{1R} + \vec{C_1C}_R + \vec{CC}_{2R} \\ + \vec{C_2D}_R + \vec{DD}_{1R} + \vec{D_1E}_R + \vec{EF}_R + \vec{FF}_{3R} + \vec{F_3G}_R\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\vec{OH}_R = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R + \vec{BB}_{1R} + \vec{B_1C}_{1R} + \vec{C_1C}_R + \vec{CC}_{2R} + \vec{C_2D}_R \\ + \vec{DD}_{1R} + \vec{D_1E}_R + \vec{EF}_R + \vec{FF}_{3R} + \vec{F_3G}_R + \vec{GH}_R\end{aligned} \tag{34}$$

5.3 Les quadrilatères du bras

il y en a six déterminés par :
- $Q_1 : B,B_1,B_2$
- $Q_2 : C_1, C, C_2$
- $Q_3 : D, D_4, D_5$ et D, D_3, D_6. (symétriques)
- $Q_4 : D_1, D_2, E_1, E$
- $Q_5 : E_1, E_2, F_1, F$
- $Q_6 : F, F_1, F_2, F_3$
- $Q_7 : G,G_1,G_2,G_3$

La relation qui donne les angles et les longueurs de bras pour chaque quadrilatère [1] :

5.3.1 Q_1

$$\frac{v_1}{sin(\beta_5)} = \frac{b_1}{sin(\beta_4)} = \frac{b_2}{sin(\beta_2)} \tag{35}$$

$$\beta_6 = \pi - \beta_1 \tag{36}$$

$$\beta_5 = 2\pi - \beta_3 - \beta_6 = 2\pi - \beta_3 - (\pi - \beta_1) = \pi + \beta_1 - \beta_3 \tag{37}$$

$$\pi = \beta_2 + \beta_4 + \beta_5 \tag{38}$$

$$b_2^2 = v_1^2 + b_1^2 - 2 \cdot v_1 \cdot b_1 \cdot cos(\beta_5) \tag{39}$$

Les paramètres constants : β_2 ,b_1,b_2

1. à l'aide des relations de Al-Kashi

5.3.2 Q_2

$$\frac{v_2}{sin(\gamma_6)} = \frac{c}{sin(\gamma_8)} = \frac{c_2}{sin(\gamma_4)} \tag{40}$$

$$\gamma_2 = 2\pi - \gamma_1 \tag{41}$$

$$\gamma_3 = \beta_1 \tag{42}$$

$$\gamma_4 = \gamma_1 - \beta_1 \tag{43}$$

$$\gamma_6 = 2\pi - \gamma_5 - \beta_6 = \pi + \beta_2 - \gamma_5 \tag{44}$$

$$\gamma_7 = \pi - \gamma_5 \tag{45}$$

$$\gamma_8 = 2\pi - \gamma_2 - \gamma_7 \tag{46}$$

$$\pi = \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_8 \tag{47}$$

$$c^2 = v_2^2 + c_2^2 - 2 \cdot v_2 \cdot c_2 \cdot cos(\gamma_8) \tag{48}$$

5.3.3 Q_3

5.3.4 Q_4

5.3.5 Q_5

5.3.6 Q_6

5.3.7 Q_6

Pour résoudre ces quadrilatères et connaître les paramètres inconnus, on utilise la méthode suivante.

6 La méthode de Newton-Raphson

but : déterminer les inconnues dans chaque quadrilatère

—
—
—

7 vitesse accélération

expression générale de la vitesse et de l'accélération

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{dx}{d\omega} \cdot \dot{\omega} \tag{49}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \tag{50}$$

Ce qui donne :

8 Régulation/contrôle

8.1 méthode 1

connaître le résultat à l'extrémité du bras quand une des variables et modifier :

$$\delta v \to \vec{\delta p} \tag{51}$$

8.2 méthode 2

plus complexe : le but est de connaitre les vérins à actionner si on veut que l'extrémité du bras, c'est-à-dire le ..., fasse un certain mouvement
exemple :

- mouvement de translation selon un axe x,y ou z : typiquement imposer que 2 composantes sur les 3 restes constantes
- mouvement de rotation : plus complexe