

Mohamed Thebti

Résumé de cours
de l'ingénierie

A predictable tagline

The Publisher $\boxed{\mathcal{PL}}$

Contents

1	Introduction	5
2	Algèbre	6
2.1	Logarithme	6
2.1.1	Relations	6
2.1.2	Changement de base	6
2.2	Produits remarquables	6
2.3	Equation de degré 2	6
2.4	Equation degré 3 : Méthode de Cardan	6
2.5	Suites & Séries	6
2.6	Nombres complexes	7
2.6.1	Utilité	7
2.6.2	Définition	7
2.6.3	Résolution d'équations imaginaires	7
2.7	Série et transformée de Fourier	7
2.8	Transformée de Laplace	7
3	Equations différentielles	8
4	Algèbre linéaire	9
5	Analyse numérique	10
6	Cinématique multi-corps	11
7	Cryptologie	12
8	Systèmes de coordonnées	13
8.1	Coordonnées cylindriques	13
8.2	Coordonnées sphériques	13
9	Géométrie	14
9.1	Triangle quelconque	14
9.2	Trigonométrie	14
9.3	Norme	14
9.4	Vecteurs	14
9.5	Base	15
9.6	Produit scalaire	15
9.7	Volume	15
9.8	Produit vectoriel	15
9.8.1	Définition	15
9.8.2	Relation	16
9.8.3	Propriétés	16
9.9	Equations dans l'espace	16
9.9.1	Dans le plan	16
9.9.2	Dans l'espace	16
9.10	Allignements	17
9.11	Intersections	18
9.12	Projections	18
9.13	Calculs volume	18

9.14	Calculs surface	19
10	Mathématiques	20
11	Matériaux	21
12	Mécanique	22
12.1	Cinématique	22
12.1.1	MRU	22
12.1.2	MRUA	22
12.1.3	MCU	22
12.1.4	MCUA	22
12.2	Equations d'équilibre	22
12.3	Mécanique Lagrangienne	22
12.4	Centre de masse et moment d'inertie	23
12.5	Quantité mouvement, moment cinétique	24
13	Mécanique des structures	25
13.1	Traction/compression	25
13.2	Effort tranchant	25
13.3	Flexion	25
13.4	Torsion	25
14	Mécanique vibratoire	26
14.1	Système à un degré de liberté	26
15	Physique	27
15.1	Lois de conservation	27
15.1.1	Quatité de mouvement	27
15.1.2	Energie	27
15.1.3	Moment cinétique	28
15.2	Lois de distribution	28
15.3	Chocs	28
16	Statistique	29
16.1	Combinatoire	29
16.2	*****	29
17	Régulation	30
18	Thermodynamique	31
18.1	Définitions	31
18.2	Laws of Thermodynamics	32
18.3	Thermodynamic processes	33
18.4	Cycles	34
18.4.1	Carnot	34
18.5	Rendements isentropiques	34
18.6	Rayonnement corps noir	34
18.7	Changement de phase	34
19	Conversion d'unité	35

1 Introduction

cet ouvrage est un résumé.

faire le lien entre différentes sciences.

Des résultats développés dans une partie sont utilisés dans d'autres parties.

2 Algèbre

2.1 Logarithme

2.1.1 Relations

Fonction et fonction inverse (réciproque)

$$e^n = x \quad (2.1.1)$$

$$\ln(x) = n \quad (2.1.2)$$

$$\ln(x^a) = a \cdot n \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Changement de base

$$\log_n(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(n)} = a \quad (2.1.4)$$

$$n^a = x \quad (2.1.5)$$

2.2 Produits remarquables

Théorème de Binôme :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \quad (2.2.1)$$

2.3 Equation de degré 2

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.3.1)$$

Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \quad (2.3.2)$$

3 possibilités :

1. $\Delta > 0$: Il y a deux solutions réelles.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. $\Delta = 0$: Une solution réelle. $x = \frac{-b}{2a}$

3. $\Delta < 0$: Il y deux solutions complexes.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

2.4 Equation degré 3 : Méthode de Cardan

Inverse d'une matrice :

Produit de convolution

2.5 Suites & Séries

suite de finonesci// suite arithmétique

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(1+n)}{2} \quad (2.5.1)$$

$$\lim \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (2.5.2)$$

2.6 Nombres complexes

2.6.1 Utilité

résoudre des équations qui donne des résultats impossible dans le domaine réel. exemple $\sqrt{-1}$.

2.6.2 Définition

Partie réelle, partie imaginaire,

Multiplication par le conjugué

2.6.3 Résolution d'équations imaginaires

2.7 Série et transformée de Fourier

Continue :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t} dt \quad (2.7.1)$$

Discrete :

2.8 Transformée de Laplace

$$L(s) = \quad (2.8.1)$$

3 Equations différentielles

degré 1,2, solution homogène, solution particulière, coefficients constants/variables. equ diff
partielle : résolution avec fourier/Laplace

4 Algèbre linéaire

$$A^{-1} = ()$$

(4.0.1)

décomposition LU,
Equation caractéristique, vecteur propre, valeur propre

5 Analyse numérique

Dérivée numérique, intégrale numérique, equation différentielle partielle numérique (espace, temps), résolution , précision,

progressive, rétrograde

6 Cinématique multi-corps

Euler, Newton

quadrilatère articulé

Boucle vectorielle fermée

Méthode de Newton-Raphson

équilibrage des arbres

7 Cryptologie

cours Collège

Codage numérique :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_OU_exclusif

8 Systèmes de coordonnées

coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques,

8.1 Coordonnées cylindriques

$$r = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z \quad (8.1.1)$$

$$v = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\Phi} \cdot \vec{e}_\Phi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z \quad (8.1.2)$$

$$a = (\ddot{\rho} - \rho \cdot \Phi^2) \vec{e}_\rho + (\rho \cdot \ddot{\Phi} + 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\Phi}) \vec{e}_\Phi + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z \quad (8.1.3)$$

8.2 Coordonnées sphériques

$$r = r \cdot \vec{e}_r \quad (8.2.1)$$

$$v = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \Phi \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\Phi \quad (8.2.2)$$

$$a = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2 - r \cdot \Phi^2 \cdot \sin^2(\theta)) \vec{e}_r + \quad (8.2.3)$$

$$(r \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)) \vec{e}_\theta + \quad (8.2.4)$$

$$(r \cdot \ddot{\Phi} \cdot \sin(\theta) + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\Phi} \cdot \sin(\theta) + 2 \cdot r \cdot \dot{\Phi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta)) \cdot \vec{e}_\Phi \quad (8.2.5)$$

9 Géométrie

Pour vérifier qu'un triangle ABC est rectangle en un point C, on vérifie que le produit scalaire de AC et BC soit nulle

9.1 Triangle quelconque

Propriétés :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (9.1.1)$$

Théorème d'Al-Kashi

Triangle avec cotés a,b,c et angles α β γ . α opposé à a, β à b, γ à c.

$$\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha} \dots \quad (9.1.2)$$

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 \cdot r \quad (9.1.3)$$

r : rayon du cercle circonscrit. Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \quad (9.1.4)$$

Aire du triangle

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab \sin(\gamma) = 2r^2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) \quad (9.1.5)$$

9.2 Trigonométrie

relations

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad (9.2.1)$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad (9.2.2)$$

$$\tan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad (9.2.3)$$

$$\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)} \quad (9.2.4)$$

9.3 Norme

Norme euclidienne, et les autres types de normes

9.4 Vecteurs

Une grandeur qui a une direction, un sens et une intensité

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix} \quad (9.4.1)$$

Norme vecteur

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} \quad (9.4.2)$$

Vecteur dimension n :

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} \quad (9.4.3)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_1^n u_i^2} \quad (9.4.4)$$

normalisation d'un vecteur : on modifier un vecteur de façon à ce que sa norme vaille 1 :

$$\vec{B}_{normalisé} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad (9.4.5)$$

Multiplication par un scalaire :

$$k \cdot \vec{B} = \begin{bmatrix} k \cdot x_B \\ k \cdot y_B \\ k \cdot z_B \end{bmatrix} \quad (9.4.6)$$

Distributivité

$$k \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = k \cdot \vec{A} + k \cdot \vec{B} = \quad (9.4.7)$$

Le vecteur \vec{v} est colinéaire à \vec{u} s'il existe un scalaire k tel que :

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} \quad (9.4.8)$$

Combinaison linéaire

$$\vec{u} = \sum_1^n n_i \cdot \vec{x}_i \quad (9.4.9)$$

3 vecteurs coplanaires : un des vecteurs est la combinaison linéaire des deux autres

9.5 Base

des vecteurs forment une base s'ils sont linéairement indépendants. (non colinéaire)

9.6 Produit scalaire

Projection d'un vecteur sur un autre.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\theta) \quad (9.6.1)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B \quad (9.6.2)$$

Si deux vecteurs sont perpendiculaires, θ vaut 90° :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.6.3)$$

9.7 Volume

9.8 Produit vectoriel

9.8.1 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} résulte en un vecteur qui leur est perpendiculaire. La norme de ce vecteur est égale à l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs \vec{A} et \vec{B} . (schéma)

9.8.2 Relation

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \|A\| \|B\| \sin(\theta) \quad (9.8.1)$$

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A z_B - z_A y_B \\ -x_A z_B + z_A x_B \\ x_A y_B - y_A x_B \end{bmatrix} \quad (9.8.2)$$

Pour connaître la direction du vecteur résultant, on utilise la règle des trois doigts.
Si les deux vecteurs sont parallèles, l'angle ,

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = 0 \quad (9.8.3)$$

9.8.3 Propriétés

pas commutatif,

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = -(\vec{B} \otimes \vec{A}) \quad (9.8.4)$$

$$(9.8.5)$$

distributif par rapport à l'addition,

pas associatif

9.9 Equations dans l'espace

9.9.1 Dans le plan

Equation paramétrique d'une droite

$$ax + by + c = 0 \quad (9.9.1)$$

Equation paramétrique d'une droite

$$y = a \cdot x + b \quad (9.9.2)$$

Forme usuelle :

$$ax + by + c = 0 \quad (9.9.3)$$

Equation algébrique d'une droite :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by + c = 0\} \quad (9.9.4)$$

9.9.2 Dans l'espace

Droite Equation algébrique d'une droite :

$$D = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz + d = 0 \quad (9.9.5)$$

Equation vectorielle d'une droite :

$$\begin{cases} x = at + x_P \\ y = bt + x_P \\ z = ct + z_P \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (9.9.6)$$

Avec $P = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$ un point de la droite et $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vecteur directeur de la droite.

Une autre forme de l'équation vectorielle :

$$(D_1) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \quad (9.9.7)$$

Plan Equation paramétrique d'un plan :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (9.9.8)$$

Avec $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vecteur normale au plan.

Equation vectorielle :

$$(\Pi) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} ; (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R} \quad (9.9.9)$$

\vec{m} et \vec{n} appartiennent au plan Π .

Cercle

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (9.9.10)$$

Paramétrisation :

$$C = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} \quad (9.9.11)$$

Equation cercle, sphère, couronne, solénoïde, courbes, splines,

résumer le tout dans un tableau.

9.10 Alignements

pour vérifier si des points sont alignés, il y a deux méthodes :

Méthode 1 :

1. Calculer les vecteurs directeurs entre chaque deux points
2. Normaliser ces vecteurs
3. Comparer
4. Les vecteurs normalisés doivent être égaux

Méthode 2 :

1. Choisir deux points
2. Créer une droite avec une équation vectorielle
3. Vérifier que les autres points appartiennent à la droite

9.11 Intersections

Intersection entre deux éléments : égaliser les expressions.

Exemple : soit deux droites D_1 et D_2 :

$$(D_1) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \quad (9.11.1)$$

$$(D_2) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} ; \gamma \in \mathbb{R} \quad (9.11.2)$$

On trouve l'intersection en posant :

$$(D_1) \cap (D_2) : \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad (9.11.3)$$

en recherchant les solutions pour γ et λ

Intersection entre deux plans donne une droite :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (9.11.4)$$

Intersection entre droite et plan donne un point :

9.12 Projections

calculer la distance entre deux éléments

Distance entre un point et une droite, droite et un plan, point à un plan,

9.13 Calculs volume

calculer volume surface, d'une fonction.

Volume (rotation de la fonction autour d'une droite,, avec une intégrale) : considérer la fonction comme un rayon et calculer le volume d'un cercle d'épaisseur dx .

Autour de l'axe X

$$V = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx \quad (9.13.1)$$

Autour de l'axe Y (à confirmer)

$$V = \int_a^b \pi \cdot x^2 \cdot dy \quad (9.13.2)$$

$$dy = \frac{df(x)}{dx} \cdot dx \quad (9.13.3)$$

Autour d'un axe quelconque

9.14 Calculs surface

Surface surface : délimité par deux fonctions $g(x)$ et $f(x)$.

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot dx \tag{9.14.1}$$

10 Mathématiques

moyenne : moyenne arithmétique, et autre type de moyenne

11 Matériaux

loi de Hooke :

$$\sigma = \epsilon \cdot E \quad (11.0.1)$$

Contrainte à la rupture

$$\sigma = \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi e}} \quad (11.0.2)$$

12 Mécanique

12.1 Cinématique

12.1.1 MRU

Mouvement rectiligne uniforme :

$$a(t) = 0 \quad (12.1.1)$$

$$v(t) = v = \text{const} \quad (12.1.2)$$

$$x(t) = v \cdot t + x_0 \quad (12.1.3)$$

12.1.2 MRUA

Mouvement rectiligne uniformément accéléré :

$$a(t) = a = \text{const} \quad (12.1.4)$$

$$v(t) = a \cdot t + v_0 \quad (12.1.5)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \quad (12.1.6)$$

12.1.3 MCU

12.1.4 MCUA

12.2 Equations d'équilibre

1er loi de Newton

2ème loi de Newton,

$$\Sigma F = m \cdot a \quad (12.2.1)$$

3ème loi de Newton :

action = réaction

Equation couple

$$\Sigma M = I \cdot \alpha \quad (12.2.2)$$

12.3 Mécanique Lagrangienne

q : variables d'état d'un système

$$L(q, \dot{q}) = \sum E_{cin}(q, \dot{q}) - \sum E_{pot}(q, \dot{q}) \quad (12.3.1)$$

E_{cin} : Energie cinétique de translation et de rotation.

E_{pot} : Energie potentielle

Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_i} = 0 \quad (12.3.2)$$

12.4 Centre de masse et moment d'inertie

Centre de masse d'un corps solide:

$$x_G = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm} \quad (12.4.1)$$

Pour un assemblage de plusieurs corps solides :

$$x_G = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i} \quad (12.4.2)$$

Centroïde d'une courbe

$$x_G = \frac{\int x \cdot dA}{A} \quad (12.4.3)$$

Centroïde d'une surface

$$x_G = \frac{\int x \cdot dl}{l} \quad (12.4.4)$$

Centroïde d'un volume

$$x_G = \frac{\int x \cdot dV}{V} \quad (12.4.5)$$

Moment d'inertie d'un corps solide :

$$I = \iiint d^2 dm = \iiint d^2 \rho dV \quad (12.4.6)$$

Assemblage

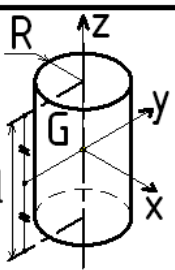
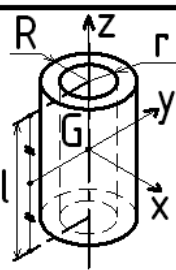
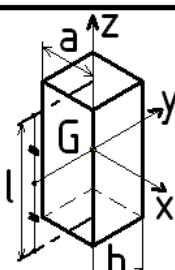
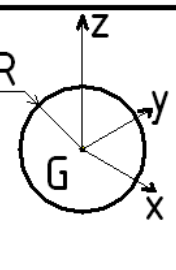
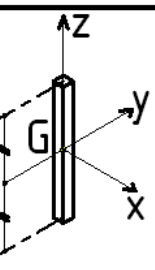
$$I = \sum r_i^2 \cdot m_i \quad (12.4.7)$$

Théorème de Huygens-Steiner :

$$I = I_G + m \cdot m^2 \quad (12.4.8)$$

Quelques formules d'inertie :

III-2.e.2°) Expressions du moment d'inertie dans les cas usuels :

SOLIDES	CYLINDRE	TUBE	PARALLELEPIPEDE RECTANGLE	SPHERE	TIGE
					
INERTIE	$I_{gx} = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot l^2}{12}$ $I_{gy} = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot l^2}{12}$ $I_{gz} = \frac{m \cdot R^2}{2}$	$I_{gx} = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m \cdot l^2}{12}$ $I_{gy} = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m \cdot l^2}{12}$ $I_{gz} = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{2}$	$I_{gx} = \frac{m \cdot (b^2 + l^2)}{12}$ $I_{gy} = \frac{m \cdot (a^2 + l^2)}{12}$ $I_{gz} = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{12}$	$I_{gx} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$ $I_{gy} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$ $I_{gz} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$	$I_{gx} = \frac{m \cdot l^2}{12}$ $I_{gy} = \frac{m \cdot l^2}{12}$ $I_{gz} \approx 0$
Unités	I=Inertie (en kg.m ²) m=masse(en kg) Dimensions (en m)				

http://www.bonne-mesure.com/moment_d_inertie.php

Rayon de giration

$$I_G = m \cdot k_g^2 \Rightarrow k_G = \sqrt{\frac{I_G}{m}} \quad (12.4.9)$$

$$k^2 = k_G^2 + d^2 \quad (12.4.10)$$

Thm du sinus + (schéma du triangle)

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad (12.4.11)$$

Thm cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad (12.4.12)$$

12.5 Quantité mouvement, moment cinétique

théorème quantité de mouvement : TAero, début Part 2

$$\iint_{\Sigma} [(\vec{p}\vec{n}) + \rho \vec{V}(\vec{V}\vec{n})] d\sigma \quad (12.5.1)$$

cette intégrale donne la force de poussée.

moment cinétique, théorème implusion

https://fr.wikipedia.org/wiki/Quantit%C3%A9_de_mouvement

13 Mécanique des structures

Loi de Hooke linéaire

$$F = k \cdot \Delta x \quad (13.0.1)$$

13.1 Traction/compression

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (13.1.1)$$

$$\epsilon = \frac{\delta L}{l} \quad (13.1.2)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (13.1.3)$$

13.2 Effort tranchant

13.3 Flexion

13.4 Torsion

Méthode flexion 3 points

Poutre encastrée

14 Mécanique vibratoire

modèle simple, pendule simple, amortissement, equation différentielle, solutions réelles, solutions complexes, exercice suspension vhc : système roue amortisseur/ressort -> fonction de transfert

14.1 Système à un degré de liberté

Oscillateur simple : une masse avec un ressort et un amortissement

Equation du mouvement :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (14.1.1)$$

qu'on peut écrire différemment.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (14.1.2)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14.1.3)$$

$$\zeta = \frac{c}{c_r} \quad (14.1.4)$$

$$c_r = 2m\omega_0 = 2\sqrt{km} \quad (14.1.5)$$

c_r : constante d'amortissement critique.

Solution : $x(t) = C \exp^{\lambda t}$

15 Physique

Force gravitationnelle

$$\vec{F}_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} [N] \quad (15.0.1)$$

Gravité terrestre :

$$g = G \cdot \frac{m_{terre}}{(Rayon_{terre} + altitude)^2} [\frac{m}{s^2}] \quad (15.0.2)$$

Frottement sec

$$F = \mu \cdot F_n [N] \quad (15.0.3)$$

μ : coefficient de frottement $[-]$

La force normale F_n est perpendiculaire à F . (schéma)

Pression d'Archimède :

$$P = \rho \cdot g \cdot h [Pa] \quad (15.0.4)$$

Dilatation unidirectionnelle :

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (15.0.5)$$

α : coefficient de dilation thermique $[-]$

ΔT : Différence de température $[K]$

Dilatation volumique :

$$\Delta V = V_0 \cdot \beta \cdot \Delta T \quad (15.0.6)$$

$$\beta \approx 3 \cdot \alpha$$

15.1 Lois de conservation

15.1.1 Quatité de mouvement

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} \quad (15.1.1)$$

$$\sum P_i = \sum m_i \cdot v_i = \sum P'_i = \sum m'_i \cdot v'_i \quad (15.1.2)$$

15.1.2 Energie

$$\sum E_{initiale} = \sum E_{finale} \quad (15.1.3)$$

$$E_{cin}^{translation} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (15.1.4)$$

$$E_{cin}^{rotation} = \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \omega^2 \quad (15.1.5)$$

$$E_{pot}^{gravité} = m \cdot g \cdot h \quad (15.1.6)$$

$$E_{pot}^{élastique} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \quad (15.1.7)$$

15.1.3 Moment cinétique

Corps solide

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (15.1.8)$$

Pt matériel

$$\vec{L} = \sum G\vec{P}_i * m \cdot \vec{r}_i \quad (15.1.9)$$

Théorème de Huygens-Steiner

$$I = I_G + M \cdot d^2 \quad (15.1.10)$$

$$\vec{L}_c = \vec{L}_G + \vec{C}G * m \cdot \vec{v} = \vec{L}'_G + \vec{C}G * m \cdot \vec{v}' = \vec{L}'_c \quad (15.1.11)$$

15.2 Lois de distribution

vitesse

$$\vec{v}_p = \vec{v}_G + \vec{\omega} * \vec{GP} \quad (15.2.1)$$

accélération

$$\vec{a}_p = \vec{a}_G + \vec{\omega} * \vec{GP} + \vec{\omega} * (\vec{\omega} * \vec{GP}) \quad (15.2.2)$$

15.3 Chocs

Chocs élastique : conservation des 3 lois.

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = 0 \quad (15.3.1)$$

Chocs inélastique/mou :

$$\frac{dE_{cin}}{dt} \neq 0 \quad (15.3.2)$$

$$\frac{dP^{tot}}{dr} = \vec{F}_{ext} \quad (15.3.3)$$

$$\frac{dL^{tot}}{dr} = \vec{M}_0^{ext} \quad (15.3.4)$$

16 Statistique

16.1 Combinatoire

Combinaison :

$$C(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x!}{(x-y)! \cdot y!} \quad (16.1.1)$$

Permutation

$$P(x) = x! \quad (16.1.2)$$

Répartition d'un groupe de x dans des groupes de y et z éléments.

$$x = y + z \quad (16.1.3)$$

$$P_{y,z}^x = \frac{x!}{y! \cdot z!} \quad (16.1.4)$$

16.2 *****

moyenne

$$\mu = \sum x_i \cdot P_i \quad (16.2.1)$$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (16.2.2)$$

variance

$$v = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot P_i \quad (16.2.3)$$

$$v = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2 \quad (16.2.4)$$

écart-type

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 \cdot P_i} \quad (16.2.5)$$

Espérance (cas discret)

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i \quad (16.2.6)$$

Jeu équitable si $E(X) = 0$. avec bénéfice $E(X) > 0$

17 Régulation

Laplace, Fonction de transfert, Boucle de régulation : ouverte, fermée

18 Thermodynamique

18.1 Définitions

Loi des gaz parfaits

$$PV = nRT \quad (18.1.1)$$

$$Pv = rT \quad (18.1.2)$$

P : Pression du gaz [Pa]

V : Volume du gaz [m^3]

v : Volume spécifique [$\frac{m^3}{kg}$]

n : nombre de mole [mol]

R : Constante des gaz 8.314 [$\frac{J}{K \cdot mol}$]

r : Constante massique d'un gaz

T : Température [K]

Equation de Van der Waals :

$$p \cdot (V - b) = nRT \quad (18.1.3)$$

Energie interne d'un gaz :

$$U = \frac{\nu}{2} nRT = \frac{\nu}{2} Nk_B T \quad (18.1.4)$$

ν : k_B : constante de Boltzmann

N : nombre de molécules

Travail et travail massique:

$$\delta W = \int_{min}^{max} p dV \quad (18.1.5)$$

$$\delta w = \frac{\delta W}{m} = \int_{min}^{max} p dv \quad (18.1.6)$$

$$(18.1.7)$$

Chaleur et chaleur massique:

$$\delta Q = m * C_p * \Delta T \quad (18.1.8)$$

$$\delta q = \frac{\delta Q}{m} C_p * \Delta T \quad (18.1.9)$$

Masse molaire :

$$M = \frac{m}{n} \quad (18.1.10)$$

Rapport isentropique : rapport des chaleurs spécifiques Lois de Meyer :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} \quad (18.1.11)$$

$$R = C_p - C_v \quad (18.1.12)$$

On peut en déduire :

$$r = c_p - c_v \quad (18.1.13)$$

$$c_p = \frac{C_p}{M} \quad (18.1.14)$$

$$c_v = \frac{C_v}{M} \quad (18.1.15)$$

Law of Dalton : Partial pressure and total pressure:

$$p_i \cdot V = n_i \cdot R \cdot T \quad (18.1.16)$$

$$p = \sum p_i \quad (18.1.17)$$

18.2 Laws of Thermodynamics

First law :

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (18.2.1)$$

Second law:

Third law :

18.3 Thermodynamic processes

Process	Formulas	δw	δq	U	Characteristics
polytropic	$p * V^n = const$ $T^n * p^{1-n} = const$ $T * V^{n-1} = const$				The value of n defines the type of process
isochoric	$\Delta v = 0, \frac{r*T}{p} = const$	0		$\delta W = 0$	
isobaric	$\Delta p = 0, \frac{r*T}{v} = const$	$-p_0 \cdot (v_1 - v_0)$			
isothermal	ρ	$7860 \frac{kg}{m^3}$			
adiabatic	$p * V^\gamma = const$ $T^\gamma * p^{1-\gamma} = const$ $T * V^{\gamma-1} = const$		$\delta Q = 0$		No heat exchange with exterior $\gamma = c_p/c_v$
isotropic	$p * V^\sigma = const$ $T^\sigma * p^{1-\sigma} = const$ $T * V^{\sigma-1} = const$		$\delta Q = 0$		Reversible adiabatic process $S = 0$ $\sigma = ...$

Each process is a special case derived from the polytropic process.

Facteur polytrophique : σ

18.4 Cycles

Carnot, Rankine, avec les rendements

18.4.1 Carnot

$$W_{cycle} = nRT_c \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nRT_f \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) \quad (18.4.1)$$

$$P = \frac{W_{cycle}}{t_{cycle}} \quad (18.4.2)$$

Arbre moteur : Inertie I + couple résistant $M = -C \cdot \omega$

18.5 Rendements isentropiques

Rendement de Carnot

Rendement isentropique d'un compresseur :

$$\eta_c = \frac{\Delta H_s}{\Delta H_r} = \frac{C_p * (T_s - T)}{C_p * (T_r - T)} \quad (18.5.1)$$

Rendement isentropique d'une turbine :

$$\eta_t = \frac{\Delta H_r}{\Delta H_s} \quad (18.5.2)$$

18.6 Rayonnement corps noir

Puissance rayonnée :

$$P = \sigma * T^4 \quad (18.6.1)$$

P : puissance rayonnée [W]

T : température [K]

σ :

18.7 Changement de phase

Energie de changement de phase

$$\delta Q = L \cdot \delta m \quad (18.7.1)$$

$$Q = L \cdot m \quad (18.7.2)$$

L : chaleur latente de fusion/évaporation [$\frac{J}{kg}$]

Remarque : lors du changement de phase, la température reste constante. Toute l'énergie absorbée est utilisée pour le changement de phase.

Hors des phases, l'énergie augmente la température. L'énergie interne change selon la relation suivante :

$$dU = \delta Q = m * C_x * \Delta T \quad (18.7.3)$$

19 Conversion d'unité

1mmHg=133.3 Pa

1 atm=1013.25 hPa = 760 torr

Équations conversion Kelvin (K), Celcius (C) et Fahrenheit (F).

$$K = C + 273.15 \tag{19.0.1}$$

20 Bibliographie

Liste des cours, avec le nom des profs

liste des livres

+ sources diverses