Mohamed Thebti

# Résumé de cours
## de l’ingénierie

*A predictable tagline*

The Publisher $\boxed{\mathcal{PL}}$

# Contents

# 1 Introduction

cet oeuvrage est un résumé.
faire le lien entre différentes sciences.
Des résultats développés dans une partie sont utilisés dans d'autres parties.

# 2 Algèbre

## 2.1 Logarithme

### 2.1.1 Relations

Fonction et fonction inverse (réciproque)

$$e^n = x \tag{2.1.1}$$
$$ln(x) = n \tag{2.1.2}$$
$$ln(x^a) = a \cdot n \tag{2.1.3}$$

### 2.1.2 Changement de base

$$log_n(x) = \frac{ln(x)}{ln(n)} = a \tag{2.1.4}$$
$$n^a = x \tag{2.1.5}$$

## 2.2 Produits remarquables

Théorème de Binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \tag{2.2.1}$$

## 2.3 Equation de degré 2

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.3.1}$$

Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \tag{2.3.2}$$

3 possibilités :

1. $\Delta > 0$ : Il y a deux solutions réelles.
   $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
2. $\Delta = 0$ : Une solution réelle. $x = \frac{-b}{2a}$
3. $\Delta < 0$ : Il y deux solutions complexes.
   $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

## 2.4 Equation degré 3 : Méthode de Cardan

Inverse d'une matrice :
Produit de convolution

## 2.5 Suites & Séries

suite de finonesci// suite arithmétique

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(1+n)}{2} \tag{2.5.1}$$
$$\lim \frac{1-r^n}{1-r} \tag{2.5.2}$$

## 2.6 Nombres complexes

### 2.6.1 Utilité

résoudre des équations qui donne des réusltats impossible dans le domaine réel. exemple $\sqrt{-1}$.

### 2.6.2 Définition

Partie réelle, partie imaginaire,

Multiplication par le conjugué

### 2.6.3 Résolution d'équations imaginaires

## 2.7 Série et transformée de Fourier

Continue :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt \tag{2.7.1}$$

Discrète :

## 2.8 Transformée de Laplace

$$L(s) = \tag{2.8.1}$$

# 3 Equations différentielles

degré 1,2, solution homogène, solution particulière, coefficients constants/variables. equ diff partielle : résolution avec fourier/Laplace

# 4 Algèbre linéaire

$$A^{-1} = () \tag{4.0.1}$$

décomposition LU,
Equation caractéristique, vecteur propre, valeur propre

# 5 Analyse numérique

Dérivée numérique, intégrale numérique, equation différentielle partielle numérique (espace, temps), résolution , précision,

progressive, rétrograde

# 6 Cinématique multi-corps

Euler, Newton
quadrilatère article
Boucle vectorielle fermée
Méthode de Newton-Raphson
equilibrage des arbres

# 7 Cryptologie

cours Collège
Codage numérique :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_OU_exclusif

# 8 Systèmes de coordonnées

coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques, ....

## 8.1 Coordonnées cylindriques

$$r = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z \tag{8.1.1}$$
$$v = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\Phi} \cdot \vec{e}_\Phi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z \tag{8.1.2}$$
$$a = (\ddot{\rho} - \rho \cdot \Phi^2)\vec{e}_\rho + (\rho \cdot \ddot{\Phi} + 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\Phi})\vec{e}_\Phi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z \tag{8.1.3}$$

## 8.2 Coordonnées sphériques

$$r = r \cdot \vec{e}_r \tag{8.2.1}$$
$$v = r \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \Phi \cdot sin(\theta) \cdot \vec{e}_\Phi \tag{8.2.2}$$
$$a = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2 - r \cdot \dot{\Phi}^2 \cdot sin^2(\theta))\vec{e}_r + \tag{8.2.3}$$
$$(r \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot sin(\theta)cos(\theta))\vec{e}_\theta + \tag{8.2.4}$$
$$(r \cdot \ddot{\Phi} \cdot sin(\theta) + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\Phi} \cdot sin(\theta) + 2 \cdot r \cdot \dot{\Phi} \cdot \dot{\theta} \cdot cos(\theta)) \cdot \vec{e}_\Phi \tag{8.2.5}$$

# 9 Géométrie

Pour vérifier qu'un triangle ABC est rectangle en un point C, on vérfie que le produit scalaire de AC et BC soit nulle

## 9.1 Triangle quleconque

Propriétés :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \tag{9.1.1}$$

Théorème d'Al-Kashi
Triangle avec cotés a,b,c et angles $\alpha$ $\beta$ $\gamma$. $\alpha$ opposé à a, $\beta$ à b, $\gamma$ à c.

$$\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha} .... \tag{9.1.2}$$

Théorème du sinus

$$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)} = 2 \cdot r \tag{9.1.3}$$

$r$ : rayon du cercle circonscrit. Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\alpha) \tag{9.1.4}$$

Aire du triangle

$$S = \frac{1}{2} \cdot absin(\gamma) = 2r^2 sin(\alpha) sin(\beta) sin(\gamma) \tag{9.1.5}$$

## 9.2 Trigonométrie

relations

$$cos^2(x) + sin^2(x) = 1 \tag{9.2.1}$$

$$\frac{cos(x)}{sin(x)} \tag{9.2.2}$$

$$tan(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)} \tag{9.2.3}$$

$$cotan(x) = \frac{1}{tan(x)} \tag{9.2.4}$$

## 9.3 Norme

Norme euclidienne, et les autres types de normes

## 9.4 Vecteurs

Une grandeur qui a une direction, un sens et une intensité

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix} \tag{9.4.1}$$

Norme vecteur
$$\|\vec{B}\| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} \tag{9.4.2}$$
Vecteur dimension n :
$$\|\vec{B}\| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} \tag{9.4.3}$$
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_1^n u_i^2} \tag{9.4.4}$$
normalisation d'un vecteur : on modifier un vecteur de façon à ce que sa norme valle 1 :
$$\vec{B}_{normalisé} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \tag{9.4.5}$$
Multiplication par un scalaire :
$$k \cdot \vec{B} = \begin{bmatrix} k \cdot x_B \\ k \cdot y_B \\ k \cdot z_B \end{bmatrix} \tag{9.4.6}$$
Distributivité
$$k \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = k \cdot \vec{A} + k \cdot \vec{B} = \tag{9.4.7}$$
Le vecteur $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$ s'il existe un scalaire $k$ tel que :
$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} \tag{9.4.8}$$
Combinaison linéaire
$$\vec{u} = \sum_1^n n_i \cdot \vec{x_i} \tag{9.4.9}$$
3 vecteurs coplanaires : un des vecteurs est la combinaison linéaire des deux autres

## 9.5 Base

des vecteurs forment une base s'ils sont linéairement indépendants. (non colinéaire)

## 9.6 Produit scalaire

Projection d'un vecteur sur un autre.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot cos(\theta) \tag{9.6.1}$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B \tag{9.6.2}$$
Si deux vercteurs sont perpendiculaires, $theta$ vaut 90° :
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \tag{9.6.3}$$

## 9.7 Volume

## 9.8 Produit vectoriel

### 9.8.1 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ résulte en un vecteur qui leur est perpendiculaire. La norme de ce vecteur est égale à l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. (schéma)

### 9.8.2 Relation

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \|A\|\|B\|sin(\theta) \tag{9.8.1}$$

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A z_B - z_A y_B \\ -x_A z_B + z_A x_B \\ x_A y_B - y_A x_B \end{bmatrix} \tag{9.8.2}$$

Pour connaître la direction du vecteur résultant, on utilise la règle des trois doigts.
Si les deux vecteurs sont parallèles, l'angle ,

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = 0 \tag{9.8.3}$$

### 9.8.3 Propriétés

pas commutatif,

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = -(\vec{B} \otimes \vec{A}) \tag{9.8.4}$$

$$\tag{9.8.5}$$

distributif par rapport à l'addition,

pas associatif

## 9.9 Equations dans l'espace

### 9.9.1 Dans le plan

Equation paramétrique d'une droite

$$ax + by + c = 0 \tag{9.9.1}$$

Equation paramétrique d'une droite

$$y = a \cdot x + b \tag{9.9.2}$$

Forme usuelle :

$$ax + by + c = 0 \tag{9.9.3}$$

Equation algébrique d'une droite :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by + c = 0\} \tag{9.9.4}$$

### 9.9.2 Dans l'espace

**Droite** Equation algébrique d'une droite :

$$D = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz + d = 0 \tag{9.9.5}$$

Equation vectorielle d'une droite :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & at + x_P \\ y & = & bt + x_P \\ z & = & ct + z_P \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R} \tag{9.9.6}$$

Avec $P = \begin{bmatrix} x_p \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}$ un point de la droite et $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vecteur directeur de la droite.

Une autre forme de l'équation vectorielle :

$$(D_1) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \tag{9.9.7}$$

**Plan** Equation paramétrique d'un plan :

$$ax + bx + cz + d = 0 \tag{9.9.8}$$

Avec $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ verteur normale au plan.

Equation vectorielle :

$$(\Pi) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} ; (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R} \tag{9.9.9}$$

$\vec{m}$ et $\vec{n}$ appartiennent au plan $\Pi$.

**Cercle**

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{9.9.10}$$

Paramétrisation :

$$C = \begin{bmatrix} r \cdot cos(\theta) \\ r \cdot sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} \tag{9.9.11}$$

Equation cercle, sphère, couronne, solénoide, courbes, splines, ....

résumer le tout dans un tableau.

## 9.10 Allignements

pour vérifier si des points sont alignés, il y a deux méthodes :
Méthode 1 :

1. Calculer les vecteurs directeurs entre chaques deux points
2. Normaliser ces vecteurs
3. Comparer
4. Les vecteurs normalisés doivent être égaux

Méthode 2 :

1. Choisir deux points
2. Créer une droite avec une équation vectorielle
3. Vérifier que les autres points appartiennent à la droite

## 9.11 Intersections

Intersection entre deux éléments : égaliser les expressions.

Exemple : soit deux droites $D_1$ et $D_2$ :

$$(D_1) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \tag{9.11.1}$$

$$(D_2) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} ; \gamma \in \mathbb{R} \tag{9.11.2}$$

On trouve l'intersection en posant :

$$(D_1) \cap (D_2) : \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \tag{9.11.3}$$

en recherchant les solutions pour $\gamma$ et $\lambda$

Intersection entre deux plans donne une droite :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 & = & 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{9.11.4}$$

Intersection entre droite et plan donne un point :

## 9.12 Projections

calculer la distance entre deux éléments
Distance entre un point et une droite, droite et un plan, point à un plan, ....

## 9.13 Calculs volume

calculer volume surface, d'une fonction.
Volume (rotation de la fonction autour d'une droite, ...., avec une intégrale) : considérer la fonction comme un rayon et calculer le volume d'un cercle d'épaisseur $dx$.

**Autour de l'axe X**

$$V = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx \tag{9.13.1}$$

**Autour de l'axe Y** (à confirmer)

$$V = \int_a^b \pi \cdot x^2 \cdot dy \tag{9.13.2}$$

$$dy = \frac{df(x)}{dx} \cdot dx \tag{9.13.3}$$

**Autour d'un axe quelconque** .....

## 9.14 Calculs surface

**Surface** surface : délimité par deux fonctions $g(x)$ et $f(x)$.

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot dx \tag{9.14.1}$$

# 10 Mathématiques

moyenne : moyenne aritmétique, et autre type de moyenne ....

# 11 Matériaux

loi de Hooke :

$$\sigma = \epsilon \cdot E \tag{11.0.1}$$

Contrainte à la rupture

$$\sigma = \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi e}} \tag{11.0.2}$$

# 12 Mécanique

## 12.1 Cinématique

### 12.1.1 MRU

Mouvement rectiligne uniforme :

$$a(t) = 0 \tag{12.1.1}$$
$$v(t) = v = const \tag{12.1.2}$$
$$x(t) = v \cdot t + x_0 \tag{12.1.3}$$

### 12.1.2 MRUA

Mouvement rectiligne uniformément accéléré :

$$a(t) = a = const \tag{12.1.4}$$
$$v(t) = a \cdot t + v_0 \tag{12.1.5}$$
$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \tag{12.1.6}$$

### 12.1.3 MCU

### 12.1.4 MCUA

## 12.2 Equations d'équilibre

1er loi de Newton

2ème loi de Newton,

$$\Sigma F = m * a \tag{12.2.1}$$

3ème loi de Newton :

action = réaction

Equation couple

$$\Sigma M = I * \alpha \tag{12.2.2}$$

## 12.3 Mécanique Lagrangienne

q : variables d'état d'un système

$$L(q, \dot{q}) = \sum E_{cin}(q, \dot{q}) - \sum E_{pot}(q, \dot{q}) \tag{12.3.1}$$

$E_{cin}$ : Energie cinétique de translation et de rotation.
$E_{pot}$ : Energie potentielle
Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}) - \frac{\delta L}{\delta q_i} = 0 \tag{12.3.2}$$

## 12.4 Centre de masse et moment d'inertie

Centre de masse d'un corps solide:

$$x_G = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm} \tag{12.4.1}$$

Pour un assemblage de plusieurs corps solides :

$$x_G = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i} \tag{12.4.2}$$

Centroïde d'une courbe

$$x_G = \frac{\int x \cdot dA}{A} \tag{12.4.3}$$

Centroïde d'une surface

$$x_G = \frac{\int x \cdot dl}{l} \tag{12.4.4}$$

Centroïde d'un volume

$$x_G = \frac{\int x \cdot dV}{V} \tag{12.4.5}$$

Moment d'inertie d'un corps solide :

$$I = \iiint d^2 dm = \iiint d^2 \rho dV \tag{12.4.6}$$

Assemblage

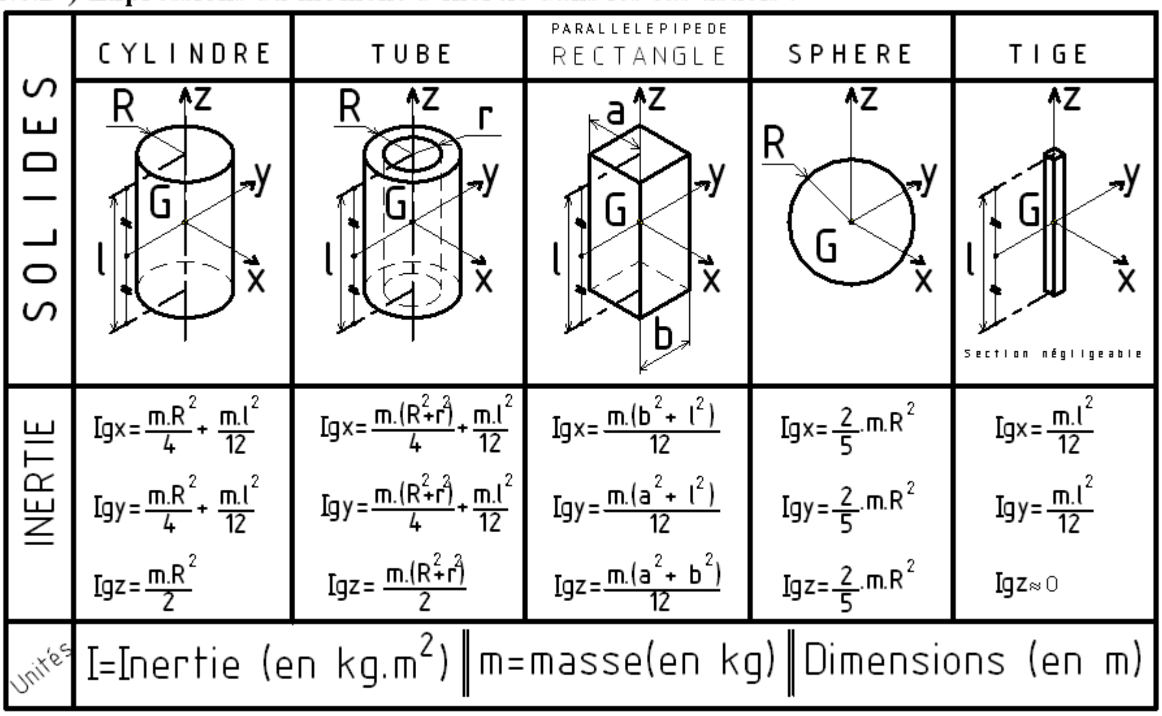
$$I = \sum r_i^2 \cdot m_i \tag{12.4.7}$$

Théorème de Huygens-Steiner :

$$I = I_G + m \cdot m^2 \tag{12.4.8}$$

Quelques formules d'inertie :

**III-2.e.2°) Expressions du moment d'inertie dans les cas usuels :**



| | CYLINDRE | TUBE | PARALLELEPIPEDE RECTANGLE | SPHERE | TIGE |
|---|---|---|---|---|---|
| SOLIDES | | | | | Section négligeable |
| INERTIE | $Igx = \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ | $Igx = \frac{m.(R^2+r^2)}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ | $Igx = \frac{m.(b^2+l^2)}{12}$ | $Igx = \frac{2}{5}.m.R^2$ | $Igx = \frac{m.l^2}{12}$ |
| | $Igy = \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ | $Igy = \frac{m.(R^2+r^2)}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ | $Igy = \frac{m.(a^2+l^2)}{12}$ | $Igy = \frac{2}{5}.m.R^2$ | $Igy = \frac{m.l^2}{12}$ |
| | $Igz = \frac{m.R^2}{2}$ | $Igz = \frac{m.(R^2+r^2)}{2}$ | $Igz = \frac{m.(a^2+b^2)}{12}$ | $Igz = \frac{2}{5}.m.R^2$ | $Igz \approx 0$ |
| Unités | I=Inertie (en kg.m$^2$) ‖ m=masse(en kg) ‖ Dimensions (en m) | | | | |

http://www.bonne-mesure.com/moment_d_inertie.php

Rayon de giration

$$I_G = m \cdot k_g^2 \Rightarrow k_G = \sqrt{\frac{I_G}{m}} \tag{12.4.9}$$

$$k^2 = k_G^2 + d^2 \tag{12.4.10}$$

Thm du sinus + (schéma du triangle)

$$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)} \tag{12.4.11}$$

Thm cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma) \tag{12.4.12}$$

## 12.5 Quantité mouvement, moment cinétique

théorème quantité de mouvement : TAero, début Part 2

$$\iint_\Sigma [(\vec{p}\vec{n}) + \rho\vec{V}(\vec{V}\vec{n})]d\sigma \tag{12.5.1}$$

cette intégrale donne la force de poussée.
moment cinétique, théorème implusion
https://fr.wikipedia.org/wiki/Quantit%C3%A9_de_mouvement

# 13 Mécanique des structures

Loi de Hooke linéaire

$$F = k \cdot \Delta x \tag{13.0.1}$$

## 13.1 Traction/compression

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{13.1.1}$$

$$\epsilon = \frac{\delta L}{l} \tag{13.1.2}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{13.1.3}$$

## 13.2 Effort tranchant

## 13.3 Flexion

## 13.4 Torsion

Méthode flexion 3 points
Poutre encastrée

# 14 Mécanique vibratoire

modèle simple, pendule simple, amortissement, equation différentielle, solutions réelles, solutions complexes, .... exercice suspension vhc : système roue amortisseur/ressort -> fonction de transfert

## 14.1 Système à un degré de liberté

Ocillateur simple : une masse avec un ressort et un amortissement
Equation du mouvement :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{14.1.1}$$

qu'on peut écrire différemment.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{14.1.2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.1.3}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_r} \tag{14.1.4}$$

$$c_r = 2m\omega_0 = 2\sqrt{km} \tag{14.1.5}$$

$c_r$ : constante d'amortissement critique.
Solution : $x(t) = C\exp^{\lambda t}$

# 15 Physique

Force gravitationnelle

$$\vec{F_g} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}[N] \tag{15.0.1}$$

Gravité terrestre :

$$g = G \cdot \frac{m_{terre}}{(Rayon_{terre} + altitude)^2}[\frac{m}{s^2}] \tag{15.0.2}$$

Frottement sec

$$F = \mu \cdot F_n[N] \tag{15.0.3}$$

$\mu$ : coefficient de frottement $[-]$
La force normale $F_n$ est perpendiculaire à $F$.(schéma)

Pression d'Archimède :

$$P = \rho \cdot g \cdot h[Pa] \tag{15.0.4}$$

Dilatation unidirectionnelle :

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \tag{15.0.5}$$

$\alpha$ : coefficient de dilation thermique $[-]$
$\Delta T$ : Différence de température $[K]$

Dilatation volumique :

$$\Delta V = V_0 \cdot \beta \cdot \Delta T \tag{15.0.6}$$

$\beta \approx 3 \cdot \alpha$

## 15.1 Lois de conservation

### 15.1.1 Quatité de mouvement

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} \tag{15.1.1}$$

$$\sum P_i = \sum m_i \cdot v_i = \sum P'_i = \sum m'_i \cdot v'_i \tag{15.1.2}$$

### 15.1.2 Energie

$$\sum E_{initiale} = \sum E_{finale} \tag{15.1.3}$$

$$E_{cin}^{translation} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{15.1.4}$$

$$E_{cin}^{rotation} = \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \omega^2 \tag{15.1.5}$$

$$E_{pot}^{gravité} = m \cdot g \cdot h \tag{15.1.6}$$

$$E_{pot}^{élastique} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \tag{15.1.7}$$

### 15.1.3 Moment cinétique

Corps solide

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \tag{15.1.8}$$

Pt matériel

$$\vec{L} = \sum \vec{GP_i} * m \cdot \vec{r_i} \tag{15.1.9}$$

Théorème de Huygens-Steiner

$$I = I_G + M \cdot d^2 \tag{15.1.10}$$

$$\vec{L_c} = \vec{L_G} + \vec{CG} * m \cdot \vec{v} = \vec{L'_G} + \vec{CG} * m \cdot \vec{v'} = \vec{L'_c} \tag{15.1.11}$$

## 15.2 Lois de distribution

vitesse

$$\vec{v_p} = \vec{v_G} + \vec{\omega} * \vec{GP} \tag{15.2.1}$$

accélération

$$\vec{a_p} = \vec{a_G} + \vec{\dot{\omega}} * \vec{GP} + \vec{\omega} * (\vec{\omega} * \vec{GP}) \tag{15.2.2}$$

## 15.3 Chocs

Chocs élastique : conservation des 3 lois.

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = 0 \tag{15.3.1}$$

Chocs inélastique/mou :

$$\frac{dE_{cin}}{dt} \neq 0 \tag{15.3.2}$$

$$\frac{dP^{tot}}{dr} = \vec{F}_{ext} \tag{15.3.3}$$

$$\frac{dL^{tot}}{dr} = \vec{M}_0^{ext} \tag{15.3.4}$$

# 16 Statistique

## 16.1 Combinatoire

Combinaison :

$$C(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x!}{(x-y)! \cdot y!} \tag{16.1.1}$$

Permutation

$$P(x) = x! \tag{16.1.2}$$

Répartition d'un groupe de x dans des groupes de y et z éléments.

$$x = y + z \tag{16.1.3}$$

$$P^x_{y,z} = \frac{x!}{y! \cdot z!} \tag{16.1.4}$$

## 16.2 ***********

moyenne

$$\mu = \sum x_i \cdot P_i \tag{16.2.1}$$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum x_i \tag{16.2.2}$$

variance

$$v = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot P_i \tag{16.2.3}$$

$$v = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2 \tag{16.2.4}$$

écart-type

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 \cdot P_i} \tag{16.2.5}$$

Espérance (cas discret)

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i \tag{16.2.6}$$

Jeu équitable si $E(X) = 0$. avec bénifice $E(X) > 0$

# 17 Régulation

Laplace, Fonction de transfert, Boucle de régulation : ouverte, fermée

# 18 Thermodynamique

## 18.1 Définitions

Loi des gaz parfaits

$$PV = nRT \tag{18.1.1}$$
$$Pv = rT \tag{18.1.2}$$

$P$ : Pression du gaz $[Pa]$
$V$ : Volume du gaz $[m^2]$
$v$ : Volume spécifique $[\frac{m^2}{kg}]$
$n$ : nombre de mole $[mol]$
$R$ : Constante des gaz 8.314 $[\frac{J}{K \cdot K}]$
$r$ : Constante massique d'un gaz
$T$ : Température $[K]$

Equation de Van der Waals :

$$p \cdot (V-) = nRT \tag{18.1.3}$$

Energie interne d'un gaz :

$$U = \frac{\nu}{2} nRT = \frac{\nu}{2} N k_B T \tag{18.1.4}$$

$\nu$ : $k_B$ : constante de Bolzmann
$N$ : nombre de molécules

Travail et travail massique:

$$\delta W = \int_{min}^{max} pdV \tag{18.1.5}$$
$$\delta w = \frac{\delta W}{m} = \int_{min}^{max} pdv \tag{18.1.6}$$
$$\tag{18.1.7}$$

Chaleur et chaleur massique:

$$\delta Q = m * C_p * \Delta T \tag{18.1.8}$$
$$\delta q = \frac{\delta Q}{m} C_p * \Delta T \tag{18.1.9}$$

Masse molaire :

$$M = \frac{m}{n} \tag{18.1.10}$$

Rapport isentropique : rapport des chaleurs spécifiques Lois de Meyer :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} \tag{18.1.11}$$

$$R = C_p - C_v \tag{18.1.12}$$

On peut en déduire :

$$r = c_p - c_v \tag{18.1.13}$$

$$c_p = \frac{C_p}{M} \tag{18.1.14}$$

$$c_v = \frac{C_v}{M} \tag{18.1.15}$$

Pression partielle et pression totale (lois de Dalton):

$$p_i \cdot V = n_i \cdot R \cdot T \tag{18.1.16}$$

$$p = \sum p_i \tag{18.1.17}$$

## 18.2 Principes de la thermodynamique

Premier principe :

$$dU = \delta Q + \delta W \tag{18.2.1}$$

1er, 2ème, 3ème principe

## 18.3 Processus thermodynamique

| Processus | Formules | $\delta w$ | $\delta q$ | U | |
|---|---|---|---|---|---|
| isochore | $\Delta v = 0$, $\frac{r*T}{p} = const$ | 0 | | | |
| isobare | $\Delta p = 0, \frac{rT}{v} = const$ | $-p_0 \cdot (v_1 - v_0)$ | | | |
| isotherme | $\rho$ | 7860 $\frac{kg}{m^3}$ | | | |
| adiabatique | $\alpha$ | | | | Un p |
| isentrope | $p * V^\gamma = const$, $T^\gamma * p^{1-\gamma} = const$, $T * V^{\gamma-1} = const$ | | $\delta Q = 0$ | | |
| polytropique | $\sigma = ...$ | | | | |

Facteur polytroqique : $\sigma$

## 18.4 Cycles

Carnot, Rankine, .... avec les rendements

### 18.4.1 Carnot

$$W_{cycle} = nRT_c ln(\frac{V_2}{V_1}) + nRT_f ln(\frac{V_4}{V_3}) \tag{18.4.1}$$

$$P = \frac{W_{cycle}}{t_{cycle}} \tag{18.4.2}$$

Arbre moteur : Inertie I + couple résistant $M = -C \cdot \omega$

## 18.5 Rendements isentropiques

Rendement de Carnot
Rendement isentropique d'un compresseur :

$$\eta_c = \frac{\Delta H_s}{\Delta H_r} = \frac{Cp * (T_s - T)}{Cp * (T_r - T)} \tag{18.5.1}$$

Rendement isentropique d'une turbine :

$$\eta_t = \frac{\Delta H_r}{\Delta H_s} \tag{18.5.2}$$

## 18.6 Rayonnement corps noir

Puissance rayonnée :

$$P = \sigma * T^4 \tag{18.6.1}$$

$P$ : puissance rayonnée $[W]$
$T$ : température $[T]$
$\sigma$ :

## 18.7 Changement de phase

Energie de changement de phase

$$\delta Q = L \cdot \delta m \tag{18.7.1}$$

$$Q = L \cdot m \tag{18.7.2}$$

$L$ : chaleur latente de fusion/évaporation $[\frac{J}{kg}]$
Remarque : lors du changement de phase, la température reste constante. Toute l'énergie absorbe est utilisée pour le changement de phase.
Hors des phases, l'énergie augmente la température. L'énergie interne change selon la relation suivante :

$$dU = \delta Q = m * C_x * \Delta T \tag{18.7.3}$$

# 19 Conversion d'unité

1mmHg=133.3 Pa
1 atm=1013.25 hPa = 760 torr

Équations conversion Kelvin (K), Celcius (C) et Fahrenheit (F).

$$K = C + 273.15 \tag{19.0.1}$$

## 20 Bibliographie

Liste des cours, avec le nom des profs
liste des livres
+ sources diverses