

# **QUADRILATÈRE ARTICULÉ MÉCANISME À QUATRE BARRES**

Mohamed Thebtî

22 octobre 2023

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Définition d'un quadrilatère articulé</b>                   | <b>3</b>  |
| 2.1      | Quelques exemples . . . . .                                    | 3         |
| <b>3</b> | <b>Étude cinématique</b>                                       | <b>3</b>  |
| 3.1      | Schéma du mécanisme . . . . .                                  | 3         |
| 3.2      | Variables et degré de liberté . . . . .                        | 4         |
| 3.3      | Repère global . . . . .  | 4         |
| 3.4      | Matrice de rotation et repères locaux . . . . .                | 5         |
| 3.5      | Passage d'un repère à un autre . . . . .                       | 5         |
| 3.6      | Les vecteurs de position . . . . .                             | 6         |
| 3.7      | Positions des pivots exprimées dans le repère global . . . . . | 6         |
| <b>4</b> | <b>Résolution</b>  | <b>7</b>  |
| 4.1      | Boucle vectorielle fermée . . . . .                            | 7         |
| 4.2      | Choix de la variable pilotée . . . . .                         | 7         |
| 4.3      | Méthode de Newton-Raphson . . . . .                            | 7         |
| 4.3.1    | Méthode de Newton . . . . .                                    | 7         |
| 4.4      | Application de la méthode de Newton-Raphson . . . . .          | 8         |
| 4.5      | Algorithme d'itération . . . . .                               | 8         |
| 4.6      | Situations singulières . . . . .                               | 9         |
| <b>5</b> | <b>Approche A : exemple pratique</b>                           | <b>9</b>  |
| <b>6</b> | <b>Approche B : exemple pratique</b>                           | <b>10</b> |
| <b>7</b> | <b>Mouvement de quelques mécanismes à quatre barre</b>         | <b>10</b> |
| <b>8</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>10</b> |

## 1 Introduction

Le quadrilatère articulé est un mécanisme qui se trouve dans beaucoup d'applications.

Dans ce document, il s'agit de présenter des exemples de quadrilatère articulé et les méthodes mathématiques permettant de

- faire une étude cinématique
- établir les équations de mouvement
- et résoudre ces équations

## 2 Définition d'un quadrilatère articulé

Il s'agit d'un mécanisme formé de quatre barres reliées entre elles par des liaisons pivots. Dans la littérature, il est aussi appelé "mécanisme à 4 barres".

Ce mécanisme se trouve dans plusieurs applications, comme le cric d'une voiture, le système d'ouverture d'une barrière ou le mouvement du bras d'une pelle mécanique (qui se résume à plusieurs quadrilatères articulés assemblés ensemble).

L'objectif de ce document est de présenter une étude cinématique afin de prévoir le mouvement de ce mécanisme. Les méthodes mathématiques seront exposées et des exemples pratiques concluront le document.

Cette étude a aussi pour but d'avoir les outils nécessaires afin d'engager une étude dynamique plus complexe de type de mécanisme.

### 2.1 Quelques exemples

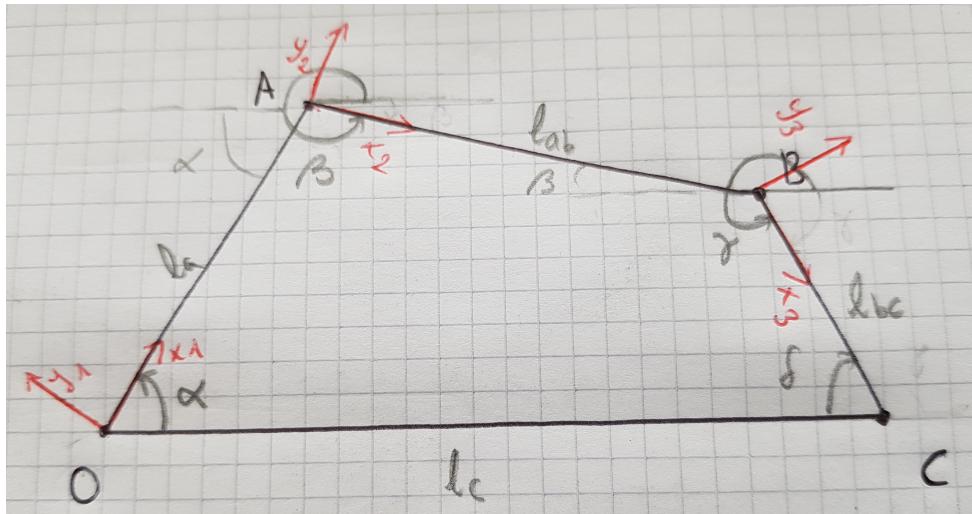
mettre photo :

cric voiture, bras pelle mécanique, système automatique de barrière,

## 3 Étude cinématique

### 3.1 Schéma du mécanisme

(mettre le schéma ici) une des barre est fixée et assimilée au bâti. Ainsi, ici c'est le bras  $OC$ .



### 3.2 Variables et degré de liberté

Ce système possède huit variables :

- Quatre angles :  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Ces angles sont inter-dépendants avec la relation suivante :

$$2\pi = \alpha + (\beta - \pi - \alpha) + (\gamma - \pi - \beta) + \delta \quad (1)$$

L'angle  $\delta$  est négligé car il est exprimé par  $\delta = 2\pi - \gamma$

- Quatre longueurs de bras :  $l_a, l_{ab}, l_{bc}$  et  $l_c$

Au final, le système a sept variables. Calcul du nombre de ddl : (relations)....

Nombre de ddl : 1

Pour commander ce type de mécanisme, on commande une variable et on fixe les 6 autres.

### 3.3 Repère global

Il est placé à l'origine  $O$ , qui est un point fixe. Le repère global  $R$  est utilisé pour exprimer la position des points  $A, B$  et  $C$  durant le mouvement du quadrilatère.

$$R = \{x, y, z\} \quad (2)$$

FIGURE 1 – Vue de dessus

### 3.4 Matrice de rotation et repères locaux

Le quadrilatère se déplace dans le plan  $XZ$ , et la résolution du mécanisme se fait dans ce plan. les repères locaux sont définis par une rotation selon l'axe  $Y$  du repère global  $R$ .

La matrice de rotation d'un angle quelconque  $\alpha$  selon l'axe  $Y$  est la suivante :

$$Rot_Y(\alpha) = Rot(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3)$$

selon la figure ...., les repères locaux sont définis de la manière suivante : ce sont des repères mobiles, qui bougent avec les bras sur lesquels ils sont placés. Ainsi chacun dépend du repère précédent : le repère  $R_{i+1}$  se déplacent selon un axe du repère  $R_i$ .

— Repère 1 : placé en  $O$ , rotation de  $\alpha$  autour de l'axe  $Y$ .

$$R_1 = \{x_1, y_1, z_1\} \quad (4)$$

— Repère 2 : placé en  $A$ , rotation de  $\beta$  autour de l'axe  $Y$ .

$$R_2 = \{x_2, y_2, z_2\} \quad (5)$$

— Repère 3 : placé en  $B$ , rotation de  $\gamma$  autour de l'axe  $Y$ .

$$R_3 = \{x_3, y_3, z_3\} \quad (6)$$

— Repère 4 : placé en  $C$ , rotation de  $\delta$  autour de l'axe  $Y$ .

$$R_4 = \{x_4, y_4, z_4\} \quad (7)$$

### 3.5 Passage d'un repère à un autre

Matrice de transformation  $T_i$  du repère  $i + 1$  à  $i$  :

$$\vec{A}_{R_i i+1} = T_i \cdot \vec{A}_{R_i} \quad (8)$$

Pour la suite, nous avons besoin d'exprimer la position d'un point par rapport au repère global. En partant de la relation précédente, on peut en déduire :

$$\vec{A}_R = T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_i \cdot \vec{A}_{R_i} \quad (9)$$

### 3.6 Les vecteurs de position

définir les vecteurs qui expriment les barres de la pelle mécanique, selon les repères définis précédemment.

$$\vec{OA}_{R_1} = \begin{bmatrix} oa \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \quad \vec{AB}_{R_2} = \begin{bmatrix} ab \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} \quad \vec{BC}_{R_3} = \begin{bmatrix} bc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_3} \quad \vec{OC}_{R_4} = \begin{bmatrix} oc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_R \quad (10)$$

### 3.7 Positions des pivots exprimées dans le repère global

$$\vec{OA}_R = \text{Rot}(\alpha) \cdot \vec{OA}_{R_1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} oa \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} oa \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \\ oa \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix}_R \quad (11)$$

$$\vec{AB}_R = \text{Rot}(\beta) \cdot \vec{AB}_{R_2} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} ab \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ ab \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix}_R \quad (12)$$

$$\vec{BC}_R = \text{Rot}(\gamma) \cdot \vec{BC}_{R_3} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_3} = \begin{bmatrix} bc \cdot \cos(\gamma) \\ 0 \\ bc \cdot \sin(\gamma) \end{bmatrix}_R \quad (13)$$

$$\vec{OC}_R = \text{Rot}(\delta) \cdot \vec{OC}_{R_4} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\sin(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} oc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} oc \cdot \cos(\delta) \\ 0 \\ oc \cdot \sin(\delta) \end{bmatrix}_R \quad (14)$$

Une fois que le système est résolu, il est possible de connaître la position de chaque articulation du mécanisme grâce aux relations suivantes :

$$\vec{OA}_R = \begin{bmatrix} oa \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \\ oa \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix}_R \quad (15)$$

$$\vec{OB}_R = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R = \begin{bmatrix} oa \cdot \cos(\alpha) + ab \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ oa \cdot \sin(\alpha) + ab \cdot \sin(\beta) \end{bmatrix}_R \quad (16)$$

$$\vec{OC}_R = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R + \vec{BC}_R = \begin{bmatrix} oa \cdot \cos(\alpha) + ab \cdot \cos(\beta) + bc \cdot \cos(\gamma) \\ 0 \\ oa \cdot \sin(\alpha) + ab \cdot \sin(\beta) + bc \cdot \sin(\gamma) \end{bmatrix}_R \quad (17)$$

$$\vec{OC}_R = \begin{bmatrix} oc \cdot \cos(\delta) \\ 0 \\ oc \cdot \sin(\delta) \end{bmatrix}_R \quad (18)$$

## 4 Résolution

### 4.1 Boucle vectorielle fermée

Départ en  $O$ , on fait le tour. évidemment, la fonction est nulle, normalement. on résoud ce système d'équation pour minimiser la fonction fonction  $\vec{\Phi}$  et atteindre  $\vec{\Phi} = \vec{0}$ .

$$\vec{\Phi} = \vec{0} = \vec{OA}_R + \vec{AB}_R + \vec{BC}_R - \vec{OC}_R \quad (19)$$

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} oa \cdot \cos(\alpha) + ab \cdot \cos(\beta) + bc \cdot \cos(\gamma) - oc \cdot \cos(\delta) \\ 0 \\ oa \cdot \sin(\alpha) + ab \cdot \sin(\beta) + bc \cdot \sin(\gamma) - oc \cdot \sin(\delta) \end{bmatrix}_R \quad (20)$$

### 4.2 Choix de la variable pilotée

Pour résoudre ce système, quatre variables sont fixées et une variable  $q_1$  est pilotée. Il y a deux approches pour contrôler le mouvement du quadrilatère articulé :

- Approche A : piloter un angle. Exemple : quadrilatère de direction de véhicule. (photo)
- Approche B : piloter la longueur de bras. Exemple, mouvement du bras d'une pelle mécanique à travers des vérins. (photo)

Il reste donc deux inconnues à déterminer. On définit  $\vec{q}$  le vecteur qui les contient :

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

### 4.3 Méthode de Newton-Raphson

Résoudre le système  $\vec{\Phi}$  revient à chercher la combinaison de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  qui satisfait la condition  $\vec{\Phi} = \vec{0}$ .

La méthode à utiliser est celle de Newton-Raphson (fonction à plusieurs variables  $\vec{\Phi}(x, y, \dots)$ ), adaptée à partir de la méthode de Newton (fonction à une variable  $\Phi(x)$ ).

#### 4.3.1 Méthode de Newton

on cherche le zéro d'une fonction :  $\Phi(x) = 0$ . Méthode de la tangente :

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (22)$$

$$\Delta x = (x_{i+1} - x_i) = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (23)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (24)$$

Pour que la méthode converge, il faut que le point de départ des itérations soit assez proche du vrai zéro. En pratique, une simple étude de fonction permet de situer le zéro cherché. Ensuite, la valeur de départ est choisie assez proche de ce zéro.

#### 4.4 Application de la méthode de Newton-Raphson

Pour passer de 1D à plusieurs dimensions, la conversion suivante est appliquée :

$$x_{i+1} \rightarrow \vec{q}_{i+1} \quad (25)$$

$$x_i \rightarrow \vec{q}_i = \begin{bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$f(x_i) \rightarrow \vec{\Phi}(\vec{q}_i) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\vec{q}_i) \\ \Phi_2(\vec{q}_i) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$f'(x_i) \rightarrow J(\vec{q}_i) \quad (28)$$

Le jacobien  $J(\vec{q}_i)$  est défini par les dérivées partielles de la fonction  $\vec{\Phi}$  par rapport aux inconnues  $q_1$  et  $q_2$  :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta \Phi_1}{\delta q_2} & \frac{\delta \Phi_1}{\delta q_3} \\ \frac{\delta \Phi_2}{\delta q_2} & \frac{\delta \Phi_2}{\delta q_3} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Ainsi, résoudre ce système de plusieurs équations se fait de la manière suivante :

$$\vec{0} = \vec{\Phi}(\vec{q}_i) + J(\vec{q}_i)(\vec{q}_{i+1} - \vec{q}_i) \quad (30)$$

$$\Delta \vec{q} = \vec{q}_{i+1} - \vec{q}_i = -J^{-1}(\vec{q}_i) \cdot \vec{\Phi}(\vec{q}_i) \quad (31)$$

$$\vec{q}_{i+1} = \vec{q}_i - J^{-1}(\vec{q}_i) \cdot \vec{\Phi}(\vec{q}_i) \quad (32)$$

#### 4.5 Algorithme d'itération

L'intervalle de la variable pilotée  $q_1$  est connue. Pour chaque valeur, des valeurs de départ pour le vecteur des inconnues sont données, ce qui permet de calculer :

$$\vec{q}_0 = \begin{bmatrix} q_{20} \\ q_{30} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\vec{\Phi}(\vec{q}_0) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\vec{q}_0) \\ \Phi_2(\vec{q}_0) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\vec{J}(\vec{q}_0) \quad (35)$$

$$\vec{q}_1 = \vec{q}_0 - \vec{J}(\vec{q}_0) \cdot \vec{\Phi}(\vec{q}_0) \quad (36)$$

Ensuite, il s'agit d'effectuer les itérations suivantes :

1. Calculer  $\vec{q}_i$
2. Calculer  $\vec{\Phi}(\vec{q}_i)$
3. Calculer  $J(\vec{q}_i)$
4. Calculer l'inverse du jacobien  $J^{-1}(\vec{q}_i)$
5. Calculer le vecteur  $\vec{q}$  suivant avec :

$$\Delta \vec{q} = -J^{-1}(\vec{q}_i) \cdot \vec{\Phi}(\vec{q}_i) \quad (37)$$

$$\vec{q}_{i+1} = \Delta \vec{q} + \vec{q}_i \quad (38)$$

6. Stopper les itérations si :

$$\vec{\Phi}(\vec{q}_i) < \epsilon \quad (39)$$

ou

$$n_{itération} = max(i) = N_{max} \quad (40)$$

Le résultat est un tableau qui donne les valeurs de  $q_2$  et  $q_3$  selon  $q_1$ .

#### 4.6 Situations singulières

selon les longueurs des bras et des angles, il y a des positions singulières, des positions où le mouvement ne peut plus être déterminées. (exemple de situations singulières), Mathématiquement, Méthode de Newton : dérivée nulle. Newton-Raphson : le jacobien n'est pas inversible.

Quand on dimensionne le système, il faut étudier les situations singulières. Soit on les évite, soit on assure que le système ne s'arrête pas dans ces positions.

### 5 Approche A : exemple pratique

Les longueurs des quatre barres sont connues. L'angle  $\alpha$  est piloté :

Les deux inconnues sont les angles  $\beta$  et  $\gamma$ . On définit  $\vec{q}$  le vecteur des inconnues :

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (41)$$

valeur numérique :  $q_1 : \pi/4$  à  $\pi/2$ .

graphique  $q_2$  et  $q_3$  selon  $q_1$

## 6 Approche B : exemple pratique

Les longueurs  $l_a$ ,  $l_{bc}$  et  $l_c$  et l'angle  $\alpha$  sont connus. La longueur  $l_{ab}$  est pilotée : godet pelle mécanique.

Les deux inconnues sont les angles  $\beta$  et  $\gamma$ . On définit  $\vec{q}$  le vecteur des inconnues :

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (42)$$

## 7 Mouvement de quelques mécanismes à quatre barre

## 8 Conclusion

ici, problème plan en deux dimensions.

il est bien sûr possible d'imaginer un mécanisme à quatre barres dans l'espace 3D.  
dans ce cas, il y aura plus de ddl et donc, plus de variable à pilotés.