場の古典論 §101-103

目次

1 中心対称な重力場のなかでの運動

中心対称な重力場のなかでの物体の運動なので, 単一 “平面”$\theta = \pi/2$ 上を考えれば OK. Hamilton-Jacobi 方程式を使う:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0$$

Schwarzschild 解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right) - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{r_g}{r}} \tag{100.14}$$

(100.14) より,

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - \frac{r_g}{r} \\
g_{11} &= -\frac{1}{1 - \dfrac{r_g}{r}} \\
g_{22} &= -r^2 \\
g_{33} &= -r^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

$g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l$ なので,

$$g^{00} = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

$$g^{11} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

$$g^{22} = -\frac{1}{r^2}$$

$$g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

である．よって, Hamilton-Jacobi 方程式は,

$$\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{\partial S}{\partial ct}$$

2　球状物体の重力崩壊

3　塵状物質の球の重力崩壊