



Integrales inmediatas

$$\begin{aligned}
 \int k \, dx &= kx + C \\
 \int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\
 \int e^x \, dx &= e^x + C \\
 \int e^{kx} \, dx &= \frac{e^{kx}}{k} + C \\
 \int \frac{1}{x} \, dx &= \ln |x| + C \\
 \int a^x \, dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\
 \int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\
 \int \cos x \, dx &= \sin x + C \\
 \int \cos 2x \, dx &= \frac{\sin 2x}{2} + C \\
 \int \sin 2x \, dx &= -\frac{\cos 2x}{2} + C \\
 \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x + C \\
 \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\cot x + C \\
 \int \sec x \, dx &= \ln |\sec x + \tan x| + C \\
 \int \sec^2 x \, dx &= \tan x + C \\
 \int \sec x \tan x \, dx &= \sec x + C \\
 \int \ln x \, dx &= x \ln x - x + C \\
 \int \tan x \, dx &= -\ln |\cos x| + C \\
 &= \ln |\sec x| + C \\
 \int \tan^2 x \, dx &= \tan x - x + C \\
 \int x \sin x \, dx &= \sin x - x \cos x + C \\
 \int x \cos x \, dx &= \cos x + x \sin x + C
 \end{aligned}$$

Integral por partes

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Derivadas

	$(x)' = 1$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
Regla de la cadena:	$(nx)' = x$	$(\sin x)' = \cos x$	
$(f(g))' = f'g \cdot g'$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(x^{-2})' = -2x^{-3}$
	$(e^x)' = e^x$	$(\tan x)' = \sec^2 x$	$= -\frac{2}{x^3}$
Regla del producto	$(e^{kx})' = ke^{kx}$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$	
$(f \cdot g)' = f'g + fg'$		$(\sec x)' = \sec x \tan x$	
$(k)' = 0$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



Identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \csc x &= \frac{1}{\sin x} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \sin 2x &= 2 \sin x \cos x & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x & \tan^2 x + 1 &= \sec^2 x \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x} & \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 & \cot^2 x + 1 &= \csc^2 x \\ & & \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x & &\end{aligned}$$

Propiedades

$$\begin{aligned}\frac{u^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} &= \frac{5}{3} u^{\frac{3}{5}} & \frac{1}{u^{2/5}} &= u^{-2/5} & \ln(e^x) &= x \\ & & \sqrt[n]{u^m} &= u^{m/n} & e^{\ln x} &= x\end{aligned}$$

Teoremas de ecuaciones diferenciales

Teorema 1:

Resolución de una E.D. de variables separables:

Dada la E.D. de variables separables $M(x) dx + N(y) dy = 0$, la solución es:

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C$$

Teorema 2:

Resolución de una E.D. homogénea:

Dada la E.D. homogénea $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$, tomamos el cambio de variable $y=ux$, transformándola en una E.D. de variable separable.

$$\begin{aligned}y &= ux \\ dy &= u dx + x du\end{aligned}$$

Teorema 3:

Resolución de una E.D. exacta:

Dada la E.D. exacta $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$, existe una función $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

**Teorema 4:****Factores integrantes:**

Si la E.D. de la forma $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ no es exacta, entonces:

A: Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}$ sólo depende de "x", entonces el factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} dx}$$

B: Si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)}$ sólo depende de "y", entonces el factor integrante es:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)} dy}$$

Teorema 5:**Resolución de una E.D. lineal de primer orden:**

Dada la E.D. lineal de primer orden: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, La solución es:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right)$$

Teorema 6:**Resolución de una E.D. Bernoulli**

Dada la E.D. de Bernoulli: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$ ($n \neq 1$, $n \neq 0$)

Tomamos el cambio de variable: $u = y^{1-n}$

Esto transforma la E.D. de Bernoulli en una E.D. lineal de primer orden.

Teorema 7:**Resolución de una E.D. Riccati**

Dada la E.D. de Riccati: $\frac{dy}{dx} + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0$ ($a_0(x) \neq 0 \wedge a_2(x) \neq 0$)

siendo $y_{particular}(x)$ una solución, entonces:

A: Si tomamos el cambio de variable: $y = y_p(x) + u$

La E.D. de Riccati se transforma en una E.D. de Bernoulli.

B: Si tomamos el cambio de variable $y = y_p(x) + \frac{1}{u}$

La E.D. de Riccati se transforma en una E.D. lineal de primer orden.



Ecuaciones diferenciales de orden superior

Teorema 1:

Teorema de existencia y unicidad

Dada la E.D. P.V.I.

$$a_n(x)y^n + \dots + a_0(x)y = h(x) \quad \text{con}$$

$$y(x_0) = y_1,$$

$$y'(x_0) = y_2,$$

$$y''(x_0) = y_3,$$

...

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_n$$

Si las funciones $a_n(x), \dots, a_0(x)$ son continuas en un intervalo abierto que contiene a x_0 , entonces existe una única solución de la E.D. en ese intervalo.

Teorema 2:

La solución del caso homogéneo es n-dimensional

Dada la E.D. homogénea de orden n:

$$a_n(x)y^n + \dots + a_0(x)y = 0$$

Si $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la E.D. homogénea, entonces la solución general de la E.D. homogénea es:

$$y(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

donde c_1, \dots, c_n son constantes arbitrarias.

**Teorema 3:****Solución de ecuaciones diferenciales homogéneas a coeficientes constantes**

Dada la E.D. homogénea de orden 2:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

con polinomio característico:

$$p(m) = m^2 + am + b = 0$$

Entonces se cumple que:

A: Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ con α_1, α_2 siendo raíces reales y distintas, entonces la solución general es:

$$y_H(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$$

B: Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ con α siendo raíz real y doble, entonces la solución general es:

$$y_H(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}$$

C: Si $\alpha = \beta + -i$ (complejo "i") entonces la solución general homogénea es:

$$y_H(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Nota:

Respecto al siguiente discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se cumple que:

A: Si $\Delta > 0$ entonces las raíces son reales y distintas.

B: Si $\Delta = 0$ entonces las raíces son reales y dobles.

C: Si $\Delta < 0$ entonces las raíces son complejas conjugadas.

Teorema 4:**Wronskiano**

Dadas las soluciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ de una E.D. homogénea de orden n, el Wronskiano de estas soluciones es:

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \text{Det} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si $W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \neq 0$ entonces las soluciones son linealmente independientes.

**Teorema 5:****Fórmula de Abel (para comprobar/comparar)**

Dada la E.D. homogénea de orden "n":

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = 0 \quad \text{NORMALIZADA, entonces:}$$

Si $[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ son soluciones de la E.D. se cumple:

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = C_0 e^{-\int a_{n-1}(x) dx}$$

Corolario (Teorema 5:)

Para $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Si $y_1(x)$ es solución de la E.D. entonces:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx$$

$y_1(x), y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes.

Además la solución general de la E.D es:

$$y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Teorema 6:**Método de variación de parámetros**

Dada la E.D. homogénea de orden 2:

$$ay'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$$

Si $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ es la solución general de la E.D. homogénea, entonces:

Diremos que:

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

es una solución particular de la E.D. donde:

$$v_1(x) = - \int \frac{y_2(x)h(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx, \quad v_2(x) = \int \frac{y_1(x)h(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx$$

**Teorema 7:****Método de coeficientes variables**

El caso más conocido es la E.D de Euler

$$a_n x^n y^{(n)} + a_1 x y^{(1)} + \dots + a_0 y = 0$$

$$a_n (\alpha x + \beta)^n y^{(n)} + a_1 (\alpha x + \beta) y^{(1)} + \dots + a_0 y = 0$$

$$u = \ln \alpha x + \beta$$

La idea es usar el cambio de variable para transformar la E.D. en una E.D. de coeficientes constantes.

$$u = \ln x \quad (\text{es el cambio de variable más común})$$

Teorema 8:

Método de coeficientes indeterminados: Usaremos la siguiente tabla para apoyarnos:

Función	Término de la solución particular
1	D
x	D^2
x^n	D^{n+1}
$e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
$x^n e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^{n+1}$
$\cos \beta x, \sin \beta x$	$(D^2 + \beta^2)$
$x^n \cos \beta x, x^n \sin \beta x$	$(D^2 + \beta^2)^{n+1}$
$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$	$(D - \alpha)^2 + \beta^2$
$x^n e^{\alpha x} \cos \beta x, x^n e^{\alpha x} \sin \beta x$	$(D - \alpha)^{n+2} + \beta^2$