Formalizzazione

Come già detto la logica matematica ha dato origine allo studio di quelle speciali strutture astratte che sono chiamate sistemi formali o linguaggi formali.

Si da la seguente:

Def.14- Un sistema formale F è costituito da

1) un insieme A finito o numerabile detto alfabeto, i cui elementi sono detti segni;

2) un insieme S, i cui elementi sono detti formule ben formate di F (fbf);

3) un insieme P di fbf, detto insieme degli assiomi;

4) un insieme finito R di relazioni su S di grado finito[10], i cui elementi sono detti regole di inferenza di F (dove per relazione su S s'intende un sottoinsieme di S^n che è l'insieme di tutte le n-ple ordinate di elementi di S).

Detto $\mathcal{M}$ (A) l'insieme di tutte le successioni finite di elementi di A, chiamate espressioni di A (a volte $\mathcal{M}$ (A) è chiamato insieme delle parole su A), i predetti insiemi sono così connessi: $P \subset S \subset \mathcal{M}(A)$

Ad ogni sistema formale F è associata una struttura deduttiva, descritta nel modo seguente:

Def.15- Dato un sistema formale F ed un insieme X di fbf di F ($X \subset S$), si dice che una fbf y è una *conseguenza immediata* dell'insieme di formule X, se:
a) esiste una regola di inferenza R_n di grado n,
b) esiste una successione finita $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ di elementi di X,
in modo tale che valga la relazione $R_n(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, y)$, o in altri termini la n-pla $<b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, y>$ è un elemento della relazione R_n.

[10] - Per grado di una relazione R_n in R si intende il numero naturale n per cui R_n è sottoinsieme di S^n.

Def.16- Dato un insieme $X \subset S$ di fbf , si dice che la fbf y è *deducibile dalle premesse* (o ipotesi) X se esiste una successione finita $b_1, b_2, \ldots, b_n$ di fbf tali che y è b_n ed inoltre ogni elemento della successione è:
a) o un elemento di X,
b) o un assioma di F,
c) o una conseguenza immediata rispetto ad una qualche regola di inferenza, di un insieme di elementi precedenti nella successione.

La successione finita $b_1, b_2, \ldots, b_n$ viene detta *dimostrazione formale* (o anche *deduzione formale*) *a partire dalle premesse* X.
Se X è l'insieme vuoto, ossia nella deduzione sono stati usati soltanto assiomi e regole di inferenza, allora la successione $b_1, b_2, \ldots, b_n$ è detta semplicemente *dimostrazione* (o *deduzione*) *formale* in F. In tal caso y è detta *fbf dimostrabile* o anche *teorema* di F.

Con K(X) si indica l'insieme di tutte le fbf deducibili a partire dall'insieme di premesse X, ed è chiamato *insieme delle conseguenze* di X.

L'*insieme dei teoremi* si indica quindi con K(P) (coincidente con $K(\emptyset)$).
Per indicare che $y \in K(X)$ si scrive $X \vdash y$, per indicare che y è un teorema , $y \in K(P)$, si scrive semplicemente $\vdash y$ (o $\vdash_F y$ se si vuole indicare il sistema formale in cui y è teorema).

In generale si suppone che gli insiemi A, S e P siano *decidibili*, ossia è possibile decidere in un numero finito di passi se un oggetto è un segno del sistema o meno, se data una qualunque espressione essa è o non è una fbf del sistema ed infine se data una fbf essa è o non è un assioma del sistema.

Si richiede inoltre che ogni regola di inferenza R_n sia *effettiva*, nel senso che per ogni n-pla $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ di elementi di S, sia possibile decidere in un numero finito di passi se vale o meno la relazione $R_n(x_1,x_2,\ldots, x_n)$.

Sotto queste condizioni la nozione di dimostrazione formale è *effettiva*, nel senso che data una qualunque successione finita di fbf è possibile decidere in un numero finito di passi se essa costituisce o meno una dimostrazione formale, si tenga presente però che da ciò non segue la decidibilità dell'insieme dei teoremi di un sistema formale.

Un *sistema formale F* si dice *decidibile* se lo è il suo insieme dei teoremi, in altri termini se esiste un procedimento meccanico per stabilire, data una fbf A, se esiste una dimostrazione di A.

Un *sistema formale F*, il cui insieme degli assiomi sia decidibile, è detto *assiomatizzato o assiomatico*.

Calcolo enunciativo come sistema formale

Come esempio di formalizzazione, presentiamo adesso il sistema formale L per il calcolo enunciativo[11].

1) L'alfabeto di L consiste dei seguenti segni: (,), $\neg$, $\vee$, e dalle lettere x_i con i naturale; i simboli $\neg$ ed $\vee$ sono detti connettivi primitivi, mentre le lettere $x_1, x_2, \dots$ sono dette lettere enunciative;

2) L'insieme S delle formule ben formate è così costituito:

   a) ogni lettera enunciativa è una fbf;
   b) se X e Y sono fbf lo sono anche $(\neg X)$ e $(X \vee Y)$;
   c) nient'altro è una fbf.

Introduciamo per definizione i connettivi (derivati) $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\downarrow$, $\mid$ e $\Uparrow$, prese comunque le fbf X, Y e Z si pone:

D1	$(X \wedge Y)$	sta per	$\neg(\neg X \vee \neg Y)$,
D2	$(X \Rightarrow Y)$	sta per	$(\neg X \vee Y)$,
D3	$(X \Leftrightarrow Y)$	sta per	$\neg(\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X))$,
D4	$(X \downarrow Y)$	sta per	$\neg(X \vee Y)$,
D5	$(X \mid Y)$	sta per	$(\neg X \vee \neg Y)$,
D6	$(X \Uparrow Y \Uparrow Z)$	sta per	$\neg(\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(X \vee Z))$.

3) L'insieme P degli assiomi di L è costituito da tutte le fbf che sono esempi dei seguenti schemi di assiomi[12]:

   A1 $(X \vee X) \Rightarrow X$
   A2 $X \Rightarrow (Y \vee X)$
   A3 $(X \vee Y) \Rightarrow (Y \vee X)$
   A4 $(X \Rightarrow Z) \Rightarrow ((Y \vee X) \Rightarrow (Y \vee Z))$,

   dove X, Y e Z sono fbf qualsiasi di L, si osservi che P è un insieme infinito dato che ogni schema sta per un numero infinito di assiomi.

[11] - Esistono altre formalizzazioni per il calcolo enunciativo.
[12] - Per esempio di uno schema si intende ciò che risulta da una sostituzione nello schema di espressioni formali al posto delle lettere maiuscole.

4) L’unica regola d'inferenza di L è quella del Modus Ponens (MP), ossia l’insieme R contiene una sola relazione di terzo grado e precisamente $R_3(X,Y,Z)$ se e solo se esistono due fbf A e B tali che X è $(A\Rightarrow B)$, Y è A e Z è B.

Abbiamo già detto che P è infinito, inoltre esso è un insieme decidibile, ossia data una fbf si può facilmente verificare se essa è o no un assioma, di conseguenza L è assiomatico.
Si noti inoltre che, tutti i teoremi di L sono tautologie, infatti, ogni esempio degli schemi di assiomi è una tautologia, per definizione i teoremi si ottengono a partire dagli assiomi per applicazioni successive dell’unica regola di inferenza di L che è il MP, e (per il **Teorema 1**) la regola del Modus Ponens fa passare da tautologie a tautologie.

Facciamo adesso un esempio di dimostrazione formale in L, mostrando che:

$$\vdash_L (\mathbf{x_1}\Rightarrow\mathbf{x_1})$$

1. $((x_1\vee x_1)\Rightarrow x_1)\Rightarrow((\neg x_1\vee(x_1\vee x_1))\Rightarrow(\neg x_1\vee x_1))$	sostituendo in **A4**, X con $\mathbf{x_1\vee x_1}$, Z con $\mathbf{x_1}$ e Y con $\neg\mathbf{x_1}$
2. $(x_1\vee x_1)\Rightarrow x_1$	**A1** sostituendo X con $\mathbf{x_1}$
3. $(\neg x_1\vee(x_1\vee x_1))\Rightarrow(\neg x_1\vee x_1)$	da **1.** e **2.** per MP
4. $\neg x_1\vee(x_1\vee x_1)$	
5. $x_1\Rightarrow (x_1\vee x_1)$	da **4.** per **D2**, **A2** sostituendo X e Y con $\mathbf{x_1}$
6. $\neg x_1\vee x_1$	da **3.** e **5.** per MP
7. $x_1\Rightarrow x_1$	da **6.** per **D2**, c.v.d.

Abbiamo detto che tutti i teoremi di L sono tautologie, è naturale chiedersi allora se tutte le tautologie sono teoremi di L. La risposta è affermativa vale, infatti, il seguente teorema, di cui non si fornisce la dimostrazione:

Teorema 8- (di completezza semantica per L) **-** Se una fbf di L è una tautologia, allora essa è un teorema di L.

Quindi L risulta essere un sistema formale decidibile, dato che una fbf è un teorema se e solo se è una tautologia[13].

Si hanno ancora i seguenti corollari:

Teorema 9- Il sistema formale L è *consistente* (o non contraddittorio), cioè non esiste alcuna fbf X tale che, tanto X quanto $\neg X$ siano teoremi di L.
Dim.
Infatti ogni teorema di L è una tautologia, la negazione di una tautologia non può essere a sua volta una tautologia, pertanto è impossibile che esiste una fbf X tale che sia X sia $\neg X$ siano contemporaneamente teoremi di L.

Si noti che in un sistema inconsistente esiste almeno una fbf X tale che la fbf $X \wedge \neg X$ è un teorema.

Teorema 10- Il sistema formale L è consistente se e solo se non tutte le sue fbf sono teoremi[14].
Dim.
Per quanto riguarda la prima implicazione basta osservare che se L è consistente esistono fbf che non sono teoremi, per esempio le negazioni dei teoremi che sono delle contraddizioni.
Per dimostrare l'implicazione inversa usiamo la legge di contrapposizione. Supponiamo che L sia inconsistente, ossia che esista qualche fbf X tale che $X \wedge \neg X$ è dimostrabile in L, allora dal fatto che $\vdash_L ((X \wedge \neg X) \Rightarrow Y)$ (in quanto si tratta di una tautologia), per MP, in L sarebbe dimostrabile qualsiasi fbf Y.

[13] - Non è particolarmente interessante dedicarsi allo studio delle deduzioni formali nel sistema L, dato che in tale sistema tautologie e teoremi coincidono, ed è più facile verificare che una certa fbf è una tautologia piuttosto che trovarne una dimostrazione formale.
[14] - Tale equivalenza vale in qualsiasi sistema formale che abbia il Modus Ponens come regola di inferenza.

Logica predicativa

Calcolo dei predicati

La logica enunciativa, come già visto, considera gli enunciati atomici come le entità logiche più elementari. In realtà, anche un enunciato atomico è abbastanza complesso, essendo costituito da entità ancora più elementari: il soggetto, il predicato ed un eventuale complemento.

È chiaro, allora, che il calcolo enunciativo, pur costituendo il fondamento di tutta la logica, rappresenta una schematizzazione riduttiva del linguaggio naturale, e a volte non è sufficiente per la trattazione di svariati temi di carattere scientifico-matematico. Esso risulta sicuramente inadeguato quando si vuole condurre un'indagine non su un enunciato atomico ma sui singoli elementi che lo compongono.

Gli elementi costitutivi di un enunciato sono nomi e verbi, questi ultimi hanno il compito di stabilire un legame tra i nomi, enunciando una proprietà o una relazione tra essi, ad esempio nell'enunciato "Gianni mangia le fragole" il verbo mangia stabilisce il legame tra i nomi Gianni e fragole.

In logica i nomi si chiamano **argomenti** e le forme verbali **predicati**. Quando un argomento di un'espressione non è specificato si dice che esso è una **variabile**.

Un'espressione del tipo "x è un numero pari" non è un enunciato, anche se ne ha la forma grammaticale, perché non conoscendo x non possiamo dire se è vera o falsa. La precedente espressione diventa un enunciato quando in essa sostituiamo un numero definito (una costante), si tratta quindi di un enunciato dipendente dalla variabile x.

In generale un'espressione dipendente da variabili, che diventa un enunciato quando esse sono sostituite da **costanti**, è detta formula predicativa, o meglio **predicato**, oppure enunciato aperto.

Si definiscono:

- **predicato unario** o, più semplicemente **predicato**, quello che contiene una sola variabile, ossia quello che esprime una *proprietà* del soggetto; ad esempio "x è un gatto";
- **predicato n-ario**, quello che contiene n variabili, ossia quello che esprime *una relazione tra più argomenti*; ad esempio "x è padre di y" è un predicato binario, mentre "x e y sono fratelli di z" è un predicato ternario, e così via.

È evidente che i valori che le variabili possono assumere dovranno appartenere a particolari insiemi se si vuole che l'espressione abbia senso. Ad esempio nel predicato "*x* è minore di 7", *x* potrà essere un elemento di un qualsiasi insieme numerico, ma non potrà essere un elemento dell'insieme dei giorni della settimana.

L'insieme in cui una variabile di un predicato può assumere i suoi valori è detto **dominio della variabile**, e può risultare implicito dal contesto, oppure essere specificato in modo esplicito. Dovrà però essere un insieme i cui elementi, sostituiti alla variabile presa in considerazione, rendono il predicato o vero o falso.

Il **dominio di un predicato** dipende dal numero delle sue variabili; quello di un predicato unario coincide con il dominio della variabile, mentre quello di un predicato n-ario è il prodotto cartesiano dei domini delle sue variabili.

Per esempio il dominio del predicato "*x* è un numero pari" con $x \in \mathbf{R}$ è proprio l'insieme dei numeri reali; se consideriamo invece il predicato "*x* vive a *y*" con $x \in A$ e $y \in B$, dove A è l'insieme dei cittadini italiani, e B è l'insieme dei comuni italiani, il dominio del predicato è l'insieme $A \times B$.

Gli elementi del dominio del predicato che lo rendono vero costituiscono l'**insieme di verità** del predicato stesso.

Ritornando al predicato "*x* è minore di 7", se consideriamo come dominio l'insieme dei numeri naturali l'insieme di verità sarà l'insieme $V=\{1,2,3,4,5,6\} \subset \mathbf{N}$, nel caso del predicato "*x* è un numero pari", con $x \in \mathbf{R}$, l'insieme di verità è invece $V=\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots\} \subset \mathbf{R}$. Mentre se consideriamo il predicato binario "*x* è minore di *y*" con $x \in A=\{0,1,2,3,4,5\}$ e $y \in B=\{-1,0,1,2\}$, si ha che l'insieme di verità è l'insieme $V=\{(0,1),(0,2),(1,2)\} \subset A \times B$[15].

Da quanto detto segue che dato un predicato X, il suo insieme di verità è un sottoinsieme, proprio o improprio, del suo dominio, ossia $V_X \subseteq D_X$, e si ha la seguente definizione concernente la verità di un dato predicato relativamente ad un dominio:

Def.17- Fissato un predicato X, esso è *vero*, se e solo se il suo insieme di verità coincide con il dominio ($V_X=D_X$), è *falso* se e solo se il suo insieme di verità è vuoto ($V_X=\emptyset$), è *soddisfacibile* se il suo insieme di verità, non vuoto, è contenuto propriamente nel suo dominio ($V_X \subset D_X$).

---

[15] - Nel seguito indicheremo il dominio e l'insieme di verità di un predicato X rispettivamente con D_X e V_X.

Ad esempio il predicato A: “x è un numero positivo”, con x numero naturale, ha come insieme di verità lo stesso insieme **N**, pertanto è vero. Invece, è falso il predicato B: “x è minore di –3”, con x numero naturale, dato che ha come insieme di verità l’insieme vuoto. Infine , il predicato C: “x è un numero maggiore di 10”, con x numero naturale, ha come insieme di verità un sottoinsieme proprio di **N**, ossia è soddisfacibile.

Dato che fissando il significato delle variabili i predicati diventano enunciati veri o falsi, é possibile estendere in modo naturale il calcolo logico e le leggi logiche, date precedentemente, dagli enunciati ai predicati.

Si hanno le seguenti definizioni analoghe a quelle date per il calcolo enunciativo:

Def.18- Un predicato si dice *atomico*, o formula atomica, se non è costruito a partire da altri predicati mediante connettivi.

Ad esempio è atomico il predicato “x è madre di Roberto”.

Def.19- Un’espressione W è detta *ben formata*, o formula ben formata (fbf) secondo il calcolo dei predicati, se è un predicato atomico o se esistono fbf X e Y tali che W ha una delle seguenti forme:$\neg X$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \Rightarrow Y$, $X \Leftrightarrow Y$.

Ad esempio, siano X il predicato “x è madre di y” e Y il predicato “x è sorella di z” l’espressione “x è madre di y e sorella di z” è ben formata.

Operazioni con i predicati

Nel calcolo enunciativo la verità degli enunciati composti, tramite i connettivi logici, dipende dai valori di verità degli enunciati componenti; nel calcolo dei predicati, analogamente, i connettivi generano predicati il cui insieme di verità dipende da quello dei predicati componenti.[16]

Nella tabella che segue si definisce l'azione dei singoli connettivi su predicati aventi lo stesso dominio D:

Connettivo	Simbolo	Definizione
Negazione	$\neg$	Si dice negazione di un predicato A e si indica con $\neg$**A**, quel predicato che ha come insieme di verità il complementare di $\mathbf{V_A}$ rispetto a **D**, $\mathbf{D\text{-}V_A}$.
Congiunzione	$\wedge$	Si dice congiunzione di due predicati A e B e si indica con $\mathbf{A \wedge B}$, il predicato che ha come insieme di verità $\mathbf{V_A \cap V_B}$.
Disgiunzione	$\vee$	Si dice disgiunzione di due predicati A e B e si indica con $\mathbf{A \vee B}$, il predicato che ha come insieme di verità $\mathbf{V_A \cup V_B}$.
Implicazione (materiale)	$\Rightarrow$	Si dice implicazione di due predicati A e B e si indica con $\mathbf{A \Rightarrow B}$, il predicato che ha come insieme di verità $\mathbf{(D\text{-}V_A) \cup V_B}$.[17]
Coimplicazione (materiale)	$\Leftrightarrow$	Si dice coimplicazione di due predicati A e B e si indica con $\mathbf{A \Leftrightarrow B}$, il predicato che, ha come insieme di verità $\mathbf{(V_A \cap V_B) \cup ((D\text{-}V_A) \cap (D\text{-}V_B))}$.[18]

La precedente tabella mostra un'evidente analogia tra le operazioni logiche tra predicati e le operazioni tra insiemi, come mostra la seguente tabella:

Operazioni logiche	**Operazioni insiemistiche**
$\neg$	complementazione
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$

[16] - Con il termine "predicato" si indicheranno indifferentemente sia i predicati atomici che le fbf.
[17] - Dato che $A \Rightarrow B$ è logicamente equivalente a $\neg A \vee B$.
[18] - Dato che $A \Leftrightarrow B$ è logicamente equivalente a $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Osservazione

a) Come nel calcolo enunciativo se la fbf $A \Rightarrow B$ è vera si dice che A *implica logicamente* B oppure che B è una *conseguenza* (o *deduzione*) *logica* di A. Se l'implicazione (materiale) $A \Rightarrow B$ è vera, come già detto, il suo insieme di verità coincide con il dominio, ossia $V_{A \Rightarrow B}=(D-V_A) \cup V_B=D$ e questo accade se e solo se $V_A \subseteq V_B$.

b) Se la fbf $A \Leftrightarrow B$ è vera, come nel calcolo enunciativo, si dice che A e B sono *logicamente equivalenti*. Se la coimplicazione (materiale) $A \Leftrightarrow B$ è vera, allora $V_{A \Leftrightarrow B}=D$ e questo accade se e solo se $V_A \subseteq V_B$ e $V_B \subseteq V_A$, ossia $V_A=V_B$.

Esempi

1) Dato il predicato A: "*x* è minore di 7" se consideriamo $D_A= \mathbf{N}$ risulta $V_A= \{1,2,3,4,5,6\}$, la sua negazione è il predicato $\neg A$: "*x* è maggiore o uguale a 7" che ha come insieme di verità $V_{\neg A} = \mathbf{N}-V_A$.

2) Dati i predicati A: "*x* è pari" e B: "*x* è primo" con $D_A = D_B= \mathbf{N}$, il predicato congiunzione $A \wedge B$: "*x* è sia pari che primo", ha come insieme di verità $V_{A \wedge B} = V_A \cap V_B =\{2\}$.

3) Siano A il predicato: "*x* è minore di 3" e B il predicato: "*x* è compreso tra 2 e 6", se $D_A = D_B= \mathbf{N}$, il predicato disgiunzione $A \vee B$: " *x* è minore di 3 oppure è compreso tra 2 e 6", ha come insieme di verità $V_{A \vee B}=V_A \cup V_B=\{1,2,3,4,5\}$.

(Si noti che i predicati degli esempi precedenti sono tutti soddisfacibili.)

4a) Considerati i predicati A: "*x* è divisibile per 9" e B: "*x* è divisibile per 3", con $D_A = D_B=\mathbf{N}$, si ha $V_A \subset V_B$, chiaramente l'implicazione (materiale) $A \Rightarrow B$: "se *x* è divisibile per 9 allora è divisibile per 3" risulta vera dato che ha come insieme di verità $(\mathbf{N}-V_A) \cup V_B=\mathbf{N}$, e pertanto B è una conseguenza logica di A.

4b) Siano A e B rispettivamente i predicati: "*x* è un quadrupede" e "*x* è un cavallo", con *x* appartenente all'insieme degli animali, si ha evidentemente $V_B \subset V_A$, quindi l'implicazione $B \Rightarrow A$: "se *x* è un cavallo allora è un quadrupede", è vera, e B implica logicamente A.

Consideriamo adesso l'implicazione $A \Rightarrow B$: "se x è un quadrupede allora è un cavallo", essa risulta vera se x è un cavallo, cioè se $x \in V_B \subset V_A$, oppure se x non è un quadrupede (ad esempio se è un canarino) ossia se $x \in (D-V_A) \not\subset V_B$; mentre risulta falsa se $x \in (V_A-V_B) \subset V_A$, per esempio se x è un gatto; in questo caso B non si può dedurre logicamente da A, ed il predicato $A \Rightarrow B$ è soddisfacibile.

4c) Dati i predicati A: "x è maggiore di 10" e B: "x è pari", con $D_A=D_B=\{2,3,6,7,8\}$, si ha che $V_A \subset V_B$, dato che $V_A=\varnothing$, pertanto il predicato $A \Rightarrow B$: "se x è maggiore di 10, allora è pari" è vero, ossia B è una conseguenza logica di A. Si noti anche si tratta di un'implicazione con antecedente falso e pertanto è vera.

5a) Con x elemento dell'insieme dei triangoli, siano A il predicato: "x ha due lati uguali" e B il predicato: "x ha due angoli uguali", si ha evidentemente che $A \Rightarrow B$, con $V_A \subseteq V_B$, e $B \Rightarrow A$, con $V_B \subseteq V_A$, ossia $V_{A \Leftrightarrow B}=D$, pertanto la coimplicazione (materiale) $A \Leftrightarrow B$: "x ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali" è vera, e A e B sono logicamente equivalenti.

5b) Dati i predicati A: "x è divisibile per 9" e B: "x è divisibile per 3", con $D_A = D_B = \mathbf{N}$, si ha $V_A \subset V_B$ e $V_B \not\subset V_A$, il predicato $A \Leftrightarrow B$ ha come insieme di verità $V_{A \Leftrightarrow B}=V_A \cup (\mathbf{N}-V_B) \subset \mathbf{N}$, ossia è vero se $x \in V_A$, ad esempio se $x=27$, oppure se $x \in (\mathbf{N}-V_B)$, ad esempio se $x=38$, mentre è falso, per esempio se $x=15$, cioè se $x \in (V_B-V_A)$. In questo caso A e B non sono logicamente equivalenti dato che la coimplicazione $A \Leftrightarrow B$ non risulta vera, ma soddisfacibile.

5c) Siano A e B rispettivamente i predicati: "x è compreso tra 2 e 6" e " x è primo", con $D_A=D_B=\{6,8,10,12,14\}$, si ha che $V_A=V_B=\varnothing$, quindi il predicato $A \Leftrightarrow B$: "x è compreso tra 2 e 6 se e solo se è primo" è vero, ossia A e B sono logicamente equivalenti. Si noti anche che si tratta di una doppia implicazione tra predicati entrambi falsi, pertanto è vera.

Quantificazione

Abbiamo detto che per ottenere un enunciato da un predicato, bisogna fissare il significato delle variabili, ma tale procedimento non è l'unico. Un altro modo per costruire un enunciato da un predicato consiste nella *quantificazione* delle variabili da cui esso dipende. La quantificazione è un'operazione logica, che serve a specificare una certa quantità degli elementi del dominio del predicato, e che ha come argomenti predicati (o enunciati aperti) e come valori enunciati o predicati nel caso in cui non tutte le variabili sono quantificate.

Esistono due tipi di quantificatori:

- il ***quantificatore universale***, in simboli $\forall$, che si legge "per ogni", "ogni" o "tutti";
- il ***quantificatore esistenziale***, in simboli $\exists$, che si legge "esiste (almeno un)" o "qualche".

Consideriamo ad esempio le espressioni: P: "ogni numero *x* è pari" e Q: "esiste un numero *x* pari", esse si ottengono dal predicato "il numero *x* è pari" con $x \in \mathbf{N}$, applicando una volta il quantificatore universale ed un'altra volta quello esistenziale; si hanno così due enunciati, ed in particolare il primo falso ed il secondo vero.

Consideriamo adesso, il predicato "*x* è padre di *y*" con *x* e *y* appartenenti all'insieme degli uomini, applicando alla variabile *x* il quantificatore esistenziale ed alla variabile *y* quello universale otteniamo l'enunciato vero: R: "per ogni uomo *y* esiste un padre *x*" o per meglio dire "tutti gli uomini hanno un padre".

Se invece nel predicato precedente applichiamo alla variabile *y* il quantificatore esistenziale e lasciamo la variabile *x* non quantificata otteniamo l'espressione: S: "esiste un uomo *y* che ha per padre l'uomo *x*", la cui verità dipende da *x*, ossia è vera solo se *x* ha figli.

Con l'introduzione dei quantificatori possiamo completare la definizione di fbf secondo il calcolo dei predicati, si hanno le seguenti definizioni:

Def.20- Si dice che una variabile di un predicato è *vincolata* se ad essa è applicato un quantificatore, in caso contrario si dice *libera*.
Ad esempio in P, Q e R le variabili sono vincolate, mentre in S la *y* è vincolata e la *x* è libera.

Def.21- Se X è una fbf e x una sua variabile libera, allora $\forall x$X e $\exists x$X sono fbf.[19]

Def.22- Una fbf si dice *chiusa* se non contiene variabili libere.

È importante notare che il valore di verità di una fbf chiusa non dipende da alcuna variabile, essa o è vera o è falsa, può quindi essere considerata un enunciato.
Ritornando agli esempi precedenti si ha che, P, Q e R sono fbf chiuse, mentre non lo è S, che quindi non può essere considerata un enunciato.

Se X un predicato n-ario di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le fbf $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n$ **X**, $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n$**X** si dicono rispettivamente *chiusura universale* e *chiusura esistenziale* di X.
Consideriamo ad esempio il predicato X: "$x+y=5$", con x e y interi relativi, la chiusura universale di X è l'enunciato (falso) $\forall x \forall y(x+y=5)$, mentre la chiusura esistenziale di X è l'enunciato (vero) $\exists x \exists y(x+y=5)$.

Definiamo adesso il valore di verità di un predicato con quantificatori.

Def.23- Se X è un predicato unario si dice che:

- $\forall x$**X** è vero se e solo se $\mathbf{V_X=D_X}$
- $\exists x$**X** è vero se e solo se $\mathbf{V_X}\neq\emptyset$

Le fbf della definizione sono chiuse, pertanto o sono vere o sono false.

Esempi

1) Sia X il predicato "x è un triangolo equilatero", con x elemento dell'insieme dei triangoli, si ha V_X={triangoli equilateri}$\neq\emptyset$, quindi il predicato $\exists x$X è vero , mentre il predicato $\forall x$X è falso poiché non tutti i triangoli sono equilateri, ossia $V_X \neq D_X$.

2) Consideriamo invece il predicato X: "x^2 è maggiore di -1", con x numero reale, si ha che $V_X= D_X=\mathbf{R}$, pertanto i predicati $\forall x$X e $\exists x$X sono entrambi veri.

[19] - Se una fbf inizia con $\forall$ si dice universale, se inizia con $\exists$ si dice esistenziale.

Se X è un predicato n-ario, contenente x come variabile libera, il valore di verità dei predicati $\forall x$X e $\exists x$X dipende dalle n-1 variabili libere, e per poterlo definire si devono fissare per esse dei valori. Si ha la seguente:

Def.24- Sia X un predicato n-ario di variabili x, y_1, y_2,…, y_{n-1}, con $x \in D_0$, $y_1 \in D_1$, $y_2 \in D_2$,…, $y_{n-1} \in D_{n-1}$, siano $c_1 \in D_1$, $c_2 \in D_2$,…, $c_{n-1} \in D_{n-1}$ delle costanti, e sia X' il predicato unario che si ottiene da X sostituendo alle variabili y_1, y_2,…, y_{n-1} le costanti c_1, c_2,…, c_{n-1}. Si dice che:

- **$\forall x$X'** è vero se e solo se $\mathbf{V_{X'}=D_0}$
- **$\exists x$X'** è vero se e solo se $\mathbf{V_{X'}} \neq \emptyset$.

Esempi

1) Si consideri il predicato X in tre variabili " x-y=z", con x, y e z numeri razionali. Il valore di verità di $\forall x$X dipende dalle variabili libere y e z, se si pone y=1 e z=2/3 si ottiene il predicato unario X' "x-1=2/3". Il predicato $\forall x$X' risulta falso dato che $V_{X'}=\{5/3\} \neq \mathbf{Q}$, mentre $\exists x$X' è vero.

2) Sia X il predicato "x+y=3", con x e y interi relativi, il predicato $\forall x \exists y$X (fbf chiusa) risulta vero, dato che l'insieme di verità del predicato X': $\exists y(x+y=3)$ è $V_{X'}=\{x \in \mathbf{Z}: x=3-y\}$, ossia l'insieme degli interi relativi.

3) Consideriamo il predicato X: "x+y=z", con x, y, z numeri naturali, il valore di verità del predicato $\exists x(x+y=z)$ dipende dalle variabili libere y e z. Se si prendono i valori y=1 e z=3 si ottiene il predicato X': "x+1=3", con $x \in \mathbf{N}$, ed il predicato $\exists x(x+1=3)$ risulta vero in quanto $V_{X'}=\{2\} \neq \emptyset$. Se si prendono, invece, i valori y=5 e z=2 si ottiene $\exists x(x+5=2)$ che risulta falso dato che X' è il predicato "x+5=2", con $x \in \mathbf{N}$ e $V_{X'}=\emptyset$. In generale il predicato $\exists x(x+y=z)$, con x, y, $z \in \mathbf{N}$, è vero se $y<z$ ed è falso se $y \geq z$, ossia è soddisfacibile

4) Sia X il predicato in tre variabili "x+y=z", con x, y e z numeri naturali, il valore di verità del predicato $\forall y \exists x$X dipende dalla variabile libera z al posto della quale si deve sostituire una costante c naturale che consente la determinazione del valore di verità del predicato. Il predicato $\forall y \exists x(x+y=c)$ è una fbf chiusa ed è falso, dato che l'insieme di verità del predicato X': $\exists x(x+y=c)$ è $V_{X'}=\{y \in \mathbf{N}: y<c\} \neq \mathbf{N}$.

5) Dati i predicati X: "x è pari" e Y: "$x+y=6$", con x e y numeri naturali. La fbf chiusa $\forall x X \Rightarrow \forall y \exists x Y$ è vera , in quanto si tratta di un'implicazione con antecedente e conseguente falsi ($V_X \neq \mathbf{N}$ e $V_{Y'}=\{y\in \mathbf{N}: y<6\}\neq \mathbf{N}$, dove Y' è il predicato "$\exists x(x+y=6)$"). In altri termini, $\forall y \exists x Y$ è c.l. di $\forall x X$. Si noti che è vera anche la doppia implicazione, ossia $\forall y \exists x Y$ e $\forall x X$ sono logicamente equivalenti.

6) Siano X e Y rispettivamente i predicati "$x+y=3$" e "x è minore di 10" , con x e y interi relativi, la fbf chiusa $\forall x \exists y X \Leftrightarrow \forall x Y$ è falsa. Infatti si tratta di una doppia implicazione con $\forall x \exists y X$ vero (si veda esempio 2)), e $\forall x Y$ falso, dato che $V_Y \neq \mathbf{Z}$, pertanto la fbf non è una equivalenza logica.

Osservazione

È importante analizzare il caso in cui due quantificatori diversi precedono un predicato, poiché un quantificatore esistenziale ed uno universale di solito non si possono commutare, cosa possibile invece, se i quantificatori sono dello stesso tipo.
Si consideri, ad esempio, il predicato X: " $x<y$", con x e y numeri reali; l'enunciato $\forall x \exists y X$ è vero, in quanto, comunque si scelga un numero reale x, esiste un numero reale y maggiore di esso; l'enunciato $\exists y \forall x X$, invece, risulta falso, dato che l'insieme dei numeri reali è illimitato superiormente.
Consideriamo, invece, il predicato X: "x è un divisore di y", con x e y elementi dell'insieme D={1,3,5,12}, gli enunciati $\forall y \exists x X$ e $\exists x \forall y X$ sono entrambi veri ma non hanno lo stesso significato.

Validità di una formula ben formata chiusa

Per le fbf chiuse s'introduce il concetto di *validità*. Consideriamo il predicato X: "x è pari" e la sua negazione $\neg$X: "x è dispari", con x numero naturale, la fbf chiusa $\forall x(X\vee\neg X)$: "Ogni numero naturale o è pari o è dispari" è vera, dato che $V_{X\vee\neg X}=\mathbf{N}$. In generale, se X è una fbf contenente al più x come variabile libera, la fbf chiusa $\forall x(X\vee\neg X)$ è vera in qualunque dominio D e qualunque sia il significato attribuito in D a X, in quanto $V_{X\vee\neg X}=V_X\cup(D-V_X)=D$.

Si ha la seguente definizione:

Def.25-Si dice che una fbf chiusa è *valida* se e solo se è vera per ogni dominio D e per ogni interpretazione su D.

Facciamo un altro esempio, sia X: "x è un numero primo", dove x è un numero naturale, l'enunciato (falso) Y: "3 non è un numero primo" è una fbf chiusa e tale è la fbf $\neg(Y\wedge\neg Y)$, tale fbf è vera, dato che $V_{\neg(Y\wedge\neg Y)}=\mathbf{N}-(V_Y\cap V_{\neg Y})=\mathbf{N}-\varnothing=\mathbf{N}$.
In generale la fbf $\neg(X\wedge\neg X)$, con X fbf chiusa, è valida.

Le fbf valide sono le corrispettive delle tautologie del calcolo enunciativo, e sono valide tutte le fbf che si ottengono sostituendo le lettere enunciative di una tautologia con una fbf chiusa (a lettere uguali va sostituita la stessa fbf).

Diamo, inoltre le seguenti definizioni:

Def.26- Si dice che la fbf chiusa Y è *conseguenza logica* della fbf chiusa X, se e solo se la fbf $X\Rightarrow Y$ è valida.

Def.27- Due fbf chiuse X e Y si dicono *logicamente equivalenti* se e solo se la fbf $X\Leftrightarrow Y$ è valida.

Regole d'inferenza per i quantificatori

Nel calcolo dei predicati continuano a valere le regole del calcolo enunciativo, basta considerare al posto delle lettere enunciative fbf chiuse qualsiasi, dato che quest'ultime o sono vere o sono false.
Introduciamo adesso quattro regole logiche relative ai quantificatori, dette *regole di eliminazione ed introduzione del quantificatore universale ed esistenziale*, le quali consentono di giustificare altre regole logiche per il calcolo dei predicati.
Nel seguito A(x), B(x),… denoteneranno fbf contenenti al più la variabile libera x (in modo che $\forall x$ A(x), $\exists x$ A(x)…siano fbf chiuse), mentre, A(a), B(a),…denoteranno le fbf ottenute da A(x), B(x),…sostituendo la variabile x con una qualsiasi costante a.

1. Regola di eliminazione del quantificatore universale

[a] $$\frac{\forall x\, \mathrm{A}(x)}{\mathrm{A}(a)}$$

La correttezza di tale regola appare evidente: se è vera la fbf $\forall x$ A(x), allora saranno veri tutti i casi particolari, ossia gli enunciati A(a).
Ad esempio dalla verità del predicato: "Ogni uomo è mortale" (che denotiamo in simboli $\forall x(\mathrm{U}(x)\Rightarrow\mathrm{M}(x))$) segue quella di tutti i suoi casi particolari $\mathrm{U}(a)\Rightarrow\mathrm{M}(a)$, come i seguenti:

"Se Socrate è un uomo, allora Socrate è mortale"
"Se Filippo è un uomo, allora Filippo è mortale"
"Se il Colosseo è un uomo, allora il Colosseo è mortale".

Analizziamo adesso un tipo d'inferenza che si usa frequentemente: "Tutti i partecipanti alla gara sono maggiorenni. Angelo partecipa alla gara. Quindi Angelo è maggiorenne".
L'inferenza contiene due premesse: $\forall x\, (\mathrm{P}(x)\Rightarrow\mathrm{M}(x))$ ("tutti i partecipanti alla gara sono maggiorenni), e P(a) ("Angelo partecipa alla gara"); la conclusione è M(a) che sta per "Angelo è maggiorenne".

Tale inferenza si basa sulla seguente regola:

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x\, (\mathrm{P}(x)\Rightarrow\mathrm{M}(x))\\ \mathrm{P}(a)\end{array}}{\mathrm{M}(a)}$$

Questa regola è corretta (e così anche l'inferenza data), in quanto dalla prima premessa $\forall x\ (P(x) \Rightarrow M(x))$ segue, per la regola [a], $P(a) \Rightarrow M(a)$, da questo predicato e dalla seconda premessa $P(a)$ segue la conclusione $M(a)$ per la regola del Modus Ponens.

La regola può essere così generalizzata:

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x\ (A(x) \Rightarrow B(x)) \\ A(a)\end{array}}{B(a)}$$

2. Regola di introduzione del quantificatore universale

[b] $$\frac{A(a)}{\forall x A(x)}$$

Questa regola richiede una precisazione, in quanto, così come è formulata non appare corretta: dalla verità di $A(a)$ non segue, quella di $\forall x\ A(x)$. Ad esempio, da "3 è un numero primo" non si può dedurre che "tutti i numeri sono primi". Essa va interpretata nel senso che, se si è dedotto correttamente $A(a)$ e non si è usata alcuna ipotesi relativa ad a, allora si può correttamente dedurre $\forall x\ A(x)$.

Per chiarire quanto detto facciamo un esempio, considerando il seguente teorema di geometria:
"Ogni triangolo isoscele ha gli angoli alla base uguali".
Per dimostrare il teorema si traccia un triangolo isoscele ABC (con ad esempio AB=AC), e, dopo una serie di passaggi, si arriva a concludere che gli angoli alla base (ossia quelli di vertice B e C) sono uguali.
In sostanza si dimostra che:
" se ABC è isoscele, allora ABC ha gli angoli alla base uguali". In altri termini, ponendo a= "il triangolo ABC", $A(x)$= "x è isoscele" e $B(x)$= "x ha gli angoli alla base uguali", ciò che si dimostra in formula è: $A(a) \Rightarrow B(a)$.
Dato che nella dimostrazione non si adopera alcuna proprietà particolare del triangolo isoscele ABC che si è tracciato (ossia non si usa alcuna ipotesi relativa ad esso), si può applicare la regola [b], ottenendo: $\forall x\ (A(x) \Rightarrow B(x))$, ossia il teorema dato.

3. Regola di introduzione del quantificatore esistenziale

[c] $$\frac{A(a)}{\exists x A(x)}$$

La correttezza di questa regola è del tutto evidente: dalla verità di $A(a)$ segue quella di $\exists xA(x)$, ad esempio, per $a=2$, $A(a)$="2 è un numero pari" è una fbf vera, da ciò segue la verità di $\exists xA(x)$="Esiste un numero pari".

Molto spesso, per dimostrare un enunciato esistenziale $\exists xA(x)$, ad esempio "Esiste un triangolo equilatero" (in cui $A(x)$= "x è un triangolo equilatero"), si costruisce in modo opportuno un triangolo ABC e si dimostra che è equilatero. In altri termini si dimostra $A(a)$= "il triangolo ABC è equilatero" e da ciò per la regola [c] si deduce $\exists xA(x)$= "Esiste un triangolo equilatero".

4. Regola di eliminazione del quantificatore esistenziale

[d] $$\frac{\exists x A(x)}{A(a)}$$

Questa regola, al pari di [b], va applicata con una precisazione in quanto, così come è formulata, non sembra corretta. Ad esempio da "Esiste un numero pari" non si può dedurre " 3 è un numero pari". La regola [d] va applicata nel seguente modo: se si è dedotto correttamente $\exists xA(x)$, allora si può indicare con a l'individuo di cui si è dimostrata l'esistenza e scrivere $A(a)$, a patto che su a non si sia formulata, in precedenza, alcuna ipotesi.

Chiariamo quanto detto con un esempio. In geometria vale il seguente teorema: "Esiste il punto medio di un segmento".
L'applicazione di questo teorema ha solitamente questa forma: "Sia AB un segmento. Indichiamo con M il suo punto medio e quindi AM=MB…".
Quando si dice "Indichiamo con M il punto medio" si applica proprio la regola [d], ossia si passa da "Esiste il punto medio di AB" ($\exists xA(x)$) a "M è il punto medio di AB" ($A(a)$). Dato che sulla costante a non deve essere stata formulata alcuna ipotesi, sarebbe scorretto scrivere "A (o B) è il punto medio di AB", dato che A (o B) ha già la proprietà di essere estremo del segmento AB, e allo stesso modo non si può indicare con M il punto medio di AB se M è già un punto considerato nella figura (in entrambi i casi si formulerebbero ipotesi sulla costante a). In sostanza, bisogna avere l'accortezza di usare un nome (ossia una costante) nuovo.

Osservazione

Per meglio chiarire la differenza tra le regole [a] e [c] (di eliminazione del quantificatore universale e di introduzione di quello esistenziale) e le due regole [b] e [d] (di introduzione del quantificatore universale e di eliminazione di quello esistenziale) si può osservare quanto segue.

Nelle prime due la conclusione è c.l. della premessa, ossia sono valide le seguenti fbf:

- $\boldsymbol{\forall x\, A(x) \Rightarrow A(a)}$
- $\boldsymbol{A(a) \Rightarrow \exists x A(x)}$

Nelle seconde due la conclusione non è c.l. della premessa:

- $\boldsymbol{\forall x A(x)}$ non è c.l. di$\boldsymbol{A(a)}$

Infatti, $A(a) \Rightarrow \forall x A(x)$ non è in generale una fbf valida. Ad esempio se $A(x)$ sta per "x è ligure" e a sta per "Giuseppe Mazzini", è vera $A(a)$= "Giuseppe Mazzini è ligure", ma se nel dominio dell'interpretazione vi sono, oltre a Mazzini, persone non nate in Liguria (ad esempio Bill Clinton), non è vera $\forall x A(x)$= "Tutti sono liguri". Pertanto l'implicazione $A(a) \Rightarrow \forall x A(x)$ non è vera, dato che ha antecedente vero e conseguente falso.

Analogamente

- $\boldsymbol{A(a)}$ non è c.l. di$\boldsymbol{\exists x A(x)}$

Infatti, $\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$ non è in generale una fbf valida. Ad esempio se $A(x)$ sta per "x è ligure" e a sta per "Bill Clinton "e nel dominio vi è, oltre a Bill Clinton, Giuseppe Mazzini, allora è vera $\exists x A(x)$: "Qualcuno è ligure" (Giuseppe Mazzini è ligure), ma è falsa $A(a)$= "Bill Clinton è ligure". Quindi l'implicazione $\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$, avendo antecedente vero e conseguente falso, è falsa.

Affinché le regole [b] e [d] risultino corrette, vanno rispettate le clausole illustrate precedentemente.

Alcune regole relative ai rapporti tra quantificatori e connettivi

a. Quantificatori e negazione

Consideriamo il predicato A(x): "x è bianco", con x appartenente all'insieme degli orsi polari. Il predicato $\forall x$A(x)sta per "tutti gli orsi polari sono bianchi", se neghiamo quest'affermazione otteniamo "non tutti gli orsi polari sono bianchi", ossia "esiste qualche orso polare che non è bianco", che in simboli diventa $\exists\, x \neg$A(x), in altre parole $\neg \forall x$A(x) equivale a $\exists\, x \neg$A(x). Analogamente sia A(x) il predicato "x ama studiare la logica", con x elemento dell'insieme degli studenti, la formula $\exists\, x$A(x) sta per "esiste qualche studente che ama studiare la logica", e la sua negazione sarà "non esiste alcuno studente che ama studiare la logica", ossia in simboli $\forall x \neg$ A(x), ossia $\neg \exists\, x$A(x) equivale a $\forall x \neg$A(x). Dalle due equivalenze precedenti, negando ambo i membri e applicando la legge della doppia negazione, si ottengono le seguenti equivalenze logiche:

- $\boldsymbol{\forall x\ \mathrm{A}(x) \Leftrightarrow \neg(\exists\, x)\neg\ \mathrm{A}(x)}$
- $\boldsymbol{\exists\, x\ \mathrm{A}(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\ \mathrm{A}(x)}$.

Quindi, ad esempio "Tutti gli italiani sono europei" equivale a "Non esiste un italiano che non è europeo", e "Esistono dei siciliani che non sono palermitani" equivale a "Non tutti i siciliani sono palermitani".
Le due equivalenze precedenti stabiliscono che si può definire uno dei due quantificatori in funzione dell'altro.

Le relazioni tra quantificatori e negazione si possono scrivere sotto forma di regole logiche nel modo seguente:

[e] $\dfrac{\neg \forall x \mathrm{A}(x)}{\exists x \neg \mathrm{A}(x)}$ [f] $\dfrac{\exists x \neg \mathrm{A}(x)}{\neg \forall x \mathrm{A}(x)}$

[g] $\dfrac{\neg \exists x \mathrm{A}(x)}{\forall x \neg \mathrm{A}(x)}$ [h] $\dfrac{\forall x \neg \mathrm{A}(x)}{\neg \exists x \mathrm{A}(x)}$

b. Quantificatori e congiunzione

Consideriamo i due predicati A(x): "x ha le branchie" e B(x): "x ha le squame", con x appartenente all'insieme dei pesci. Dalla verità del predicato $\forall x(A(x)\wedge B(x))$ che sta per "tutti i pesci hanno le branchie e le squame", segue quella del predicato $\forall x\ A(x)\wedge \forall x\ B(x)$ che sta per "tutti i pesci hanno le branchie e tutti i pesci hanno le squame", e così viceversa.

In altri termini il *quantificatore universale è distributivo rispetto alla congiunzione*, si ha pertanto la seguente equivalenza logica:

- $\boldsymbol{\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow(\forall xA(x)\wedge \forall xB(x))}$.

Le seguenti regole sono corrette:

[i] $$\frac{\forall x(A(x)\wedge B(x))}{\forall xA(x)\wedge \forall xB(x)}$$

[l] $$\frac{\forall xA(x)\wedge \forall xB(x)}{\forall x(A(x)\wedge B(x))}$$

Consideriamo adesso i due predicati A(x): "x è uno studente" e B(x): "x è siciliano" con x appartenente all'insieme degli uomini. La verità del predicato $\exists x\ (A(x)\wedge B(x))$ che sta per "esiste uno studente siciliano" implica la verità del predicato $\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$ che sta per "esiste uno studente ed esiste un siciliano", si ha cioè l'implicazione logica:

- $\boldsymbol{\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)}$.

Non vale però il viceversa, ad esempio se A(x) è il predicato "x è pari" e B(x) è il predicato "x è dispari", con x numero naturale, il predicato $\exists\ xA(x)\wedge\exists\ xB(x)$ che sta per "esiste un numero naturale pari ed esiste un numero naturale dispari" è vero, mentre è falso il predicato $\exists x\ (A(x)\wedge B(x))$ che sta per "esiste un numero naturale sia pari sia dispari". Il *quantificatore esistenziale* pertanto *non è distributivo rispetto alla congiunzione*, o meglio *lo è solo in un senso*.

Da quanto detto segue che è corretta la regola:

[m] $\dfrac{\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)}$

ma non è corretta la regola inversa:

[n] $\dfrac{\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)}{\exists x(A(x)\wedge B(x))}$

c. Quantificatori e disgiunzione

Rispetto alla disgiunzione i quantificatori si comportano in maniera duale rispetto a come si comportano rispetto alla congiunzione.

Il *quantificatore esistenziale è distributivo rispetto alla disgiunzione*, cioè vale l'equivalenza logica:

- $\boldsymbol{\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)}$.

Dati ad esempio i predicati A(x): "x è pari" e B(x): "x è primo", con x numero naturale, dalla verità del predicato $\exists x(A(x)\vee B(x))$ segue quella del predicato $\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$ e viceversa. In altri termini da "esiste un numero naturale che è pari o primo" segue che "esiste un numero naturale pari o esiste un numero naturale primo" e da "esiste un numero naturale pari o esiste un numero naturale primo" segue che "esiste un numero naturale che è pari o primo".
Le seguenti regole sono corrette:

[o] $\dfrac{\exists x(A(x)\vee B(x))}{\exists xA(x)\vee\exists xB(x)}$

[p] $\dfrac{\exists xA(x)\vee\exists xB(x)}{\exists x(A(x)\vee B(x))}$

Il *quantificatore universale è distributivo rispetto alla disgiunzione in un solo senso*, infatti vale l'implicazione logica:

- $\boldsymbol{\forall xA(x)\vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))}$,

mentre non vale l'inversa.

Siano $A(x)$ il predicato "x è biondo" e $B(x)$ il predicato "x è alto", con x cittadino danese; la verità del predicato $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ che sta per "tutti i danesi sono biondi o tutti i danesi sono alti" implica la verità del predicato $\forall x(A(x) \vee B(x))$ che sta per "tutti i danesi sono biondi oppure alti".
Da $\forall x(A(x) \vee B(x))$, invece, non segue $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$, ad esempio siano $A(x)$ e $B(x)$ rispettivamente i predicati "x è pari" e "x è dispari", con x numero naturale, il predicato $\forall x(A(x) \vee B(x))$ che sta per "tutti i numeri naturali sono pari o dispari" è vero, mentre è falso il predicato $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ che sta per "tutti i numeri naturali sono pari o tutti i numeri naturali sono dispari".

Da quanto detto segue che è corretta la regola:

$$[q] \quad \frac{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)}{\forall x(A(x) \vee B(x))}$$

ma non è corretta la regola inversa:

$$[r] \quad \frac{\forall x(A(x) \vee B(x))}{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)} \ .$$