Tautologie (schemi di ragionamento)

Le tautologie occupano un posto rilevante in logica, rappresentano "schemi di ragionamento" che sono sempre validi e per questo motivo sono dette anche leggi della logica o regole logiche. Importanti tautologie sono le seguenti:

1)	$X \Rightarrow X$	(principio di identità)
2)	$\neg(X \wedge \neg X)$	(principio di non contraddizione)
3)	$X \vee \neg X$	(principio del terzo escluso)
4)	$X \Leftrightarrow \neg\neg X$	(legge della doppia negazione)
5)	$X \wedge X \Leftrightarrow X$	(legge di idempotenza)
6)	$X \vee X \Leftrightarrow X$	(legge di idempotenza)
7)	$X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$	(commutatività per $\wedge$)
8)	$X \vee Y \Leftrightarrow Y \vee X$	(commutatività per $\vee$)
9)	$(X \wedge Y) \wedge Z \Leftrightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$	(associatività per $\wedge$)
10)	$(X \vee Y) \vee Z \Leftrightarrow X \vee (Y \vee Z)$	(associatività per $\vee$)
11)	$X \wedge (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	(distributività di $\wedge$ rispetto a $\vee$)
12)	$X \vee (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	(distributività di $\vee$ rispetto a $\wedge$)
13)	$\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$	(legge di De Morgan)
14)	$\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$	(legge di De Morgan)
15)	$X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$	(legge di De Morgan)
16)	$X \vee Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$	(legge di De Morgan)
17)	$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$	(legge di Crisippo)
18)	$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg (X \wedge \neg Y)$	(legge di Filone Megarico)
19)	$\neg X \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$	(ex falso sequitur quodlibet)
20)	$X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$	(verum sequitur a quodlibet)
21)	$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$	(legge del sillogismo ipotetico)
22)	$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$	(legge del sillogismo ipotetico)
23)	$((X \vee Y) \wedge \neg Y) \Rightarrow X$	(legge del sillogismo disgiuntivo)
24)	$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$	(legge di contrapposizione)
25)	$(\neg X \Rightarrow X) \Rightarrow X$	(legge di Cardano - Clavio)
26)	$(X \Rightarrow \neg X) \Rightarrow \neg X$	(legge di Cardano - Clavio)
27)	$(X \Rightarrow Y \wedge \neg Y) \Rightarrow \neg X$	(riduzione debole all'assurdo)
28)	$(\neg X \Rightarrow Y \wedge \neg Y) \Rightarrow X$	(riduzione forte all'assurdo)
29)	$(X \wedge \neg Y \Rightarrow Z \wedge \neg Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$	(riduzione all'assurdo)
30)	$(X \wedge \neg Y \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$	(riduzione all'assurdo)
31)	$(X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$	(riduzione all'assurdo)
32)	$(X \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow T) \Rightarrow (X \wedge Z \Rightarrow Y \wedge T)$	(legge di Leibniz)

Si dimostra facilmente che l'insieme delle tautologie è infinito. Basta infatti prenderne una qualsiasi e negarla un numero pari di volte, comunque grande, per ottenere nuove tautologie (per la **4)**), via via più complesse e tutte diverse tra loro; oppure presa una tautologia possiamo congiungerla (o disgiungerla) con se stessa e poi congiungere (o disgiungere) con se stessa la congiunzione (o disgiunzione) così ottenuta, in tal modo si hanno (per la **5)** e la **6)**) tautologie via via più complesse e diverse. Inoltre mediante apposite regole, dette d'inferenza, da tautologie si possono ricavare altre tautologie.

Dimostriamo adesso dei teoremi che sono alla base di due regole d'inferenza del calcolo enunciativo, tali regole sono quelle del Modus Ponens o del distacco, e di Sostituzione.

Teorema 1- Se X e Y sono enunciati, se $X\Rightarrow Y$ è una tautologia e X è una tautologia, allora Y è una tautologia.

Dim.

Supponiamo che esista qualche assegnazione di valori di verità che renda falso Y, in tal caso l'implicazione $X\Rightarrow Y$ risulterebbe falsa contro l'ipotesi, dato che sempre per ipotesi X è sempre vero. Pertanto non può esistere una tale assegnazione, in altre parole Y risulta sempre vera, ossia è una tautologia.

Da questo teorema discende la *regola del Modus Ponens* (nel seguito MP) per la quale si può inferire che Y è una tautologia se X e $X\Rightarrow Y$ sono tautologie.

Teorema 2 - Sia X una tautologia con n componenti atomiche a_1, a_2, …, a_n.
Se X' è il risultato della sostituzione in X di ogni componente atomica a_i con un enunciato qualsiasi, e la sostituzione è tale che ad ogni a_i venga sostituito sempre lo stesso enunciato, allora X' è una tautologia.

Dim.

X è una tautologia, vale a dire risulta vera per ogni assegnazione di valori di verità alle sue componenti atomiche. Consideriamo adesso X', le sue componenti atomiche sono quelle degli enunciati Y_i sostituiti alle a_i. Ora per ogni assegnazione di valori di verità alle componenti atomiche di X' si ottiene un'assegnazione di valori di verità per gli enunciati Y_i, una tale assegnazione per gli Y_i deve coincidere con qualche assegnazione di valori di verità per le a_i e quindi determinare, per ipotesi, sempre il valore vero per X', che risulta pertanto una tautologia.

Da questo teorema discende la *regola di Sostituzione* per la quale sostituzioni (corrette) in una tautologia producono sempre una tautologia.

Ad esempio consideriamo la tautologia $X=A\vee\neg A$ di componente atomica $a_1=A$, sia $X'=(B\Rightarrow C)\vee\neg(B\Rightarrow C)$ il risultato della sostituzione in X di a_1 con l'enunciato $Y_1= B\Rightarrow C$ (le componenti atomiche $b_1=B$ e $b_2=C$ di X' sono quelle di Y_1), X' risulta essere una tautologia come mostra la seguente tavola di verità:

B	**C**	**B⇒C**	**¬(B⇒C)**	**X'**
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Teorema 3- (Sostituitività dell'equivalenza tautologica)
Se A e B sono enunciati tautologicamente equivalenti e se in un enunciato X una o più occorrenze di A vengono sostituite con B, l'enunciato X' che si ottiene è tautologicamente equivalente a X.
Dim.
Dato che $A\Leftrightarrow B$ è una tautologia, A e B assumono entrambi o valore V o valore F, quindi X e X' o sono entrambi veri o entrambi falsi, poiché X' differisce da X solo perché contiene B in tutti o in alcuni posti dove X contiene A, pertanto $X\Leftrightarrow X'$ è una tautologia.

Consideriamo ad esempio $A=P\Rightarrow Q$ e $B=\neg P\vee Q$, tautologicamente equivalenti, e siano rispettivamente $X=(P\Rightarrow Q)\wedge\neg P$ e $X'=(\neg P\vee Q)\wedge\neg P$, risulta che $X\Leftrightarrow X'$ è una tautologia, si hanno infatti le seguenti tavole di verità:

P	**Q**	**P⇒Q**	**¬P**	**X**
V	V	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

P	**Q**	**¬P**	**¬P∨Q**	**X'**
V	V	F	V	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Correttezza di un’inferenza

Abbiamo già accennato che scopo della logica è l’analisi delle regole che si applicano quando concateniamo correttamente degli enunciati, ossia facciamo un’inferenza.

Il termine *inferenza* indica una sequenza finita di enunciati l’ultimo dei quali è ottenuto come *conclusione* dai rimanenti, che si assumono come *premesse*. A ciascuna inferenza si può associare una regola detta *regola d’inferenza*, che rappresenta il procedimento che si applica quando si passa dalle premesse alla conclusione.

Il concetto principale della logica è la relazione di *conseguenza logica* (in seguito c.l.) tra enunciati, che si definisce nel modo seguente:

Def.7- Un enunciato C è c.l. degli enunciati $P_1, P_2, \ldots, P_n$, se e solo se non può succedere che gli enunciati $P_1, P_2, \ldots, P_n$ siano veri e l’enunciato C sia falso (oppure, equivalentemente: se e solo se ogni volta che sono vere le premesse $P_1, P_2, \ldots, P_n$ è vera la conclusione C).

Il lettore dimostri che:

Teorema 4- L’enunciato X è c.l. degli enunciati $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ se e solo se l’enunciato $Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_n \Rightarrow X$ è una tautologia.

Osservazione

Tutte le tautologie che sono delle implicazioni stabiliscono la c.l. del conseguente dall’antecedente; ad esempio per la legge del sillogismo ipotetico (v. 21) di pag. 20) si ha che l’enunciato $X \Rightarrow Z$ è c.l. delle premesse $X \Rightarrow Y$ e $Y \Rightarrow Z$. È evidente inoltre che, se due enunciati sono logicamente equivalenti, allora ciascuno dei due è c.l. dell’altro; ad esempio dalla legge distributiva di $\wedge$ rispetto a $\vee$ (v. 11) di pag.20) si deduce che $X \wedge (Y \vee Z)$ è c.l. di $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ e viceversa $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ è c.l. di $X \wedge (Y \vee Z)$.

La correttezza di un’inferenza è strettamente legata alla nozione di c.l. si ha, infatti, la seguente definizione

Def.8- Si dice che un’inferenza è corretta se e solo se la conclusione è c.l. delle premesse.

Consideriamo, ad esempio, gli enunciati:

P_1: “Carlo è un operaio o Stefano è un commerciante”
P_2: “Stefano non è un commerciante”
da essi segue logicamente che:
C: “Carlo è un operaio”.

Infatti, se supponiamo vere le premesse P_1 e P_2, ossia vera una disgiunzione con un disgiunto falso, segue che necessariamente deve essere vero l’altro disgiunto, ossia la conclusione C.

Ponendo A= “Carlo è un operaio” e B= “Stefano è un commerciante” si può affermare che A è c.l. di $A \vee B$ e di $\neg B$.
Rappresentiamo allora l’inferenza nella forma seguente:

$$[1] \qquad \begin{array}{l} A \vee B \\ \underline{\neg B \quad} \\ A \end{array}$$

Dove gli enunciati al di sopra della linea orizzontale sono le premesse e quello al di sotto la conclusione.

Lo schema [1] è la regola d’inferenza associata all’inferenza data, e si tratta in particolare della legge del sillogismo disgiuntivo (v. 23) di pag.20). Una regola d’inferenza comprende tutte le inferenze che si ottengono sostituendo con enunciati le lettere che figurano in essa (ovviamente alla stessa lettera va ovunque sostituito lo stesso enunciato) in altri termini la *regola associata ad un’inferenza costituisce la formalizzazione dell’inferenza stessa*.

In generale una scrittura del tipo:

$$\begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots\ldots \\ Y_n \\ \hline X \end{array}$$

rappresenta una regola d’inferenza, dove Y_1, Y_2,…, Y_n sono le premesse e X la conclusione.

Si ha la seguente definizione:

Def. 9- Una regola d'inferenza è corretta se e solo se X è c.l. di Y_1, Y_2,…, Y_n, o equivalentemente per il **Teorema 4**, se e solo se l'enunciato $Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_n \Rightarrow X$ è una tautologia.

Ritornando allo schema [1], essendo $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ una tautologia (v. 23) di pag.20) la regola d'inferenza è corretta, pertanto saranno corrette tutte le inferenze che si ottengono sostituendo, correttamente, con enunciati le lettere presenti in essa, ossia la correttezza dell'inferenza segue dalla correttezza della regola che lo formalizza.

Quanto detto si verifica in generale: *se un'inferenza è corretta, sono corrette tutte le inferenze che si ottengono applicando la regola d'inferenza che la formalizza*.

In altre parole si può dire che:

a. *La correttezza di un'inferenza non dipende dai particolari contenuti delle premesse e della conclusione*.

Ad esempio, la seguente inferenza:

"Marcello è un matematico o un fisico"
"Marcello non è un fisico"
———————————————
"Marcello è un matematico"

è corretta essendo un'applicazione della regola [1].

b. *La conclusione può seguire logicamente dalle premesse anche se è falsa*.

Ad esempio, la seguente inferenza:

"3 è un numero pari o 3 è un numero primo"
"3 non è un numero primo"
———————————————
"3 è un numero pari"

è corretta essendo un'applicazione della regola [1], anche se la conclusione è falsa. Si noti che la seconda premessa è falsa.

Consideriamo adesso la seguente inferenza:
Socrate afferma. "Se sono colpevole, allora devo essere punito. Ma io non sono colpevole. Quindi non devo essere punito."

A prima vista l'inferenza di Socrate appare convincente, ma non è corretta da un punto di vista logico.
Ponendo A= "Sono colpevole" e B= "Devo essere punito", la regola applicata da Socrate è la seguente:

$$[2] \qquad \frac{\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \neg A \end{array}}{\neg B}$$

tale regola non è corretta, dato che si verifica facilmente che l'enunciato $(A \Rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow \neg B$ non è una tautologia, pertanto l'inferenza di Socrate non è corretta.

La seguente inferenza è un'applicazione della stessa regola:

"Se Fabio è genovese, allora Fabio è ligure"
"Fabio non è genovese"
___
"Fabio non è ligure"

La prima premessa è sicuramente vera, dato che tutti i genovesi sono liguri. Tuttavia, se Fabio è nato in una provincia ligure diversa da Genova, anche la seconda premessa è vera ma la conclusione è falsa. Dato che la verità delle premesse non garantisce quella della conclusione, quest'ultima non può essere c.l. delle premesse, quindi l'inferenza non è corretta.

Dagli esempi d'inferenze esaminati emerge che *la correttezza di un'inferenza non è legata alla verità della conclusione*.
Prima si è visto che, applicando una regola corretta, si può pervenire ad una conclusione falsa ("3 è un numero pari"). Negli ultimi due esempi, invece, una conclusione che si può ritenere vera ("Socrate non deve essere punito", "Fabio non è ligure") è ottenuta applicando una regola scorretta.

Consideriamo adesso l'inferenza che segue:

"Se nevica a Cortina, allora Claudia va a sciare"
"Nevica a Cortina"
―――――――――――――――――
"Claudia va a sciare"

in questo caso la conclusione segue logicamente dalle premesse, in quanto se si assumono veri un'implicazione e il suo antecedente, necessariamente è vero il conseguente.

Posto A= "Nevica a Cortina" e B= "Claudia va a sciare", la regola che formalizza l'inferenza è la seguente:

$$[3] \quad \frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

tale regola è quella del Modus Ponens (v. pag.21), ed è una regola d'inferenza corretta dato che l'enunciato $(A\Rightarrow B)\wedge A\Rightarrow B$ è una tautologia.

Consideriamo ora la seguente inferenza:

"Se manca la benzina, allora l'auto non parte"
"L'auto non parte"
―――――――――――――――――
"Manca la benzina"

questa inferenza non è corretta, poiché entrambe le premesse possono essere vere e la conclusione falsa. La prima premessa è sicuramente vera, mentre la seconda può essere vera pur essendo falsa la conclusione, ossia l'auto non parte anche se non manca la benzina, ma ad esempio la batteria è scarica.

Esaminiamo la regola che formalizza l'inferenza; posto A= "Manca la benzina" e B= "L'auto non parte" si ottiene:

$$[4] \quad \frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ B \end{array}}{A}$$

Quest'ultima regola non è corretta, infatti, l'enunciato $(A\Rightarrow B)\wedge B\Rightarrow A$ non è una tautologia.

Vediamo, infine, due esempi d'inferenze più complesse.

1. "Se giochi e studi supererai gli esami, ma se giochi e non studi non supererai gli esami. Pertanto, se giochi, allora o studi e supererai gli esami o non studi e non supererai gli esami."

Posto

A= "Tu giochi"
B= "Tu studi"
C= "Tu supererai gli esami"

la formalizzazione dell'inferenza è la seguente:

$$\begin{array}{l} A\wedge B\Rightarrow C \\ \underline{A\wedge\neg B\Rightarrow\neg C\qquad\qquad} \\ A\Rightarrow(B\wedge C)\vee(\neg B\wedge\neg C) \end{array}$$

Si verifica che l'inferenza è corretta dato che l'enunciato $(A\wedge B\Rightarrow C)\wedge(A\wedge\neg B\Rightarrow\neg C)\Rightarrow(A\Rightarrow(B\wedge C)\vee(\neg B\wedge\neg C))$ è una tautologia.

2. "Se Carlo ha vinto la gara, allora Mario è arrivato secondo oppure Sergio è arrivato terzo. Mario è arrivato secondo. Quindi, se Carlo ha vinto la gara, Sergio non è arrivato terzo."

Ponendo:

A= "Carlo ha vinto la gara"
B= "Mario è arrivato secondo"
C= "Sergio è arrivato terzo"

la regola che formalizza l'inferenza è la seguente:

$$\begin{array}{l} A\Rightarrow B\vee C \\ \underline{B\qquad\quad} \\ A\Rightarrow\neg C \end{array}$$

L'inferenza non è corretta in quanto l'enunciato $(A\Rightarrow B\vee C)\wedge B\Rightarrow(A\Rightarrow\neg C)$ non è una tautologia.