Funzioni di verità e connettivi adeguati

I connettivi proposizionali $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, non sono indipendenti, cioè se ne possono scegliere due come connettivi base (uno dei quali deve essere la negazione $\neg$) e costruire gli altri a partire da questi.

Per esempio se scegliamo come connettivi base $\neg$ ed $\vee$ possiamo ricavare $\wedge$, infatti dato che la congiunzione $X\wedge Y$ è vera se e solo se X e Y sono contemporaneamente veri non è possibile che o X o Y o entrambi siano falsi, ciò significa che gli enunciati $\mathbf{(X\wedge Y)}$ e $\mathbf{\neg(\neg X\vee\neg Y)}$ *sono tautologicamente equivalenti*, si prova facilmente infatti che l'enunciato $(X\wedge Y) \Leftrightarrow\neg(\neg X\vee\neg Y)$[6] è una tautologia.

In modo analogo, dato che l'implicazione $X\Rightarrow Y$ è falsa se e solo se X è vero e Y è falso, l'enunciato $\neg(X\wedge\neg Y)$ è ad esso tautologicamente equivalente, trasformando l'enunciato $X\wedge\neg Y$ in $\neg(\neg X\vee Y)$, per quanto detto precedentemente, si ha la seguente catena di tautologie:

$$(X\Rightarrow Y)\Leftrightarrow\neg(X\wedge\neg Y) \Leftrightarrow (\neg X\vee Y)$$[7]

dalla quale segue che l'implicazione $\mathbf{X\Rightarrow Y}$ è *tautologicamente equivalente all'enunciato* $\mathbf{\neg X\vee Y}$.

Infine per la doppia implicazione si ha la seguente catena di tautologie:

$$\begin{gathered}(X\Leftrightarrow Y)\Leftrightarrow((X\Rightarrow Y)\wedge(Y\Rightarrow X))\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow(\neg(\neg(X\Rightarrow Y)\vee\neg(Y\Rightarrow X)))\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow(\neg(\neg(\neg X\vee Y)\vee\neg(\neg Y\vee X))),\end{gathered}$$

dalla quale segue che gli enunciati $\mathbf{(X\Leftrightarrow Y)}$ e $\mathbf{\neg(\neg(\neg X\vee Y)\vee\neg(\neg Y\vee X))}$ sono *tautologicamente equivalenti*.

Si procede in maniera analoga se si scelgono come connettivi base le coppie $(\neg, \wedge)$ e $(\neg, \Rightarrow)$.

Per definire in maniera più precisa il concetto di definibilità di alcuni connettivi in funzione di altri e dare quindi la nozione di adeguatezza di insiemi di connettivi abbiamo bisogno della definizione di funzione di verità.

---

[6] - Si veda n°15 di pag.20.
[7] - Si vedano n°17, n°4 e n°18 di pag.20.

Def.10- Dato l'insieme $E=\{V, F\}$ (insieme verità) dicesi *funzione di verità* un'applicazione $f: E^n \rightarrow E$, con E^n insieme delle n-ple ordinate di elementi dell'insieme E.

Si noti che esistono $(2^n)^2$ possibili funzioni di verità, mentre data una fbf esiste soltanto una funzione di verità espressa o associata alla fbf.
In altri termini, se X è un enunciato composto da n componenti atomiche $x_1, x_2, \ldots, x_n$, per ogni ordinamento possibile di tali componenti esiste esattamente una funzione di verità $f: E^n \rightarrow E$ associata ad X (o espressa da X).
Per una data n-pla di valori di verità $< a_1, a_2, \ldots, a_n>$, con $a_i \in E$ (per $i=1,2,\ldots,n$), la $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ è univocamente determinata nel seguente modo: si assegna il valore di verità a_1 alla prima componente atomica del nostro ordinamento, a_2 alla seconda, ed in generale a_i all'i-esima componente; completata tale assegnazione si ottiene una riga della tavola di verità per X, e si definisce $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uguale al valore di verità a_{n+1} che la X assume per quell'assegnazione di valori di verità alle sue componenti atomiche.
Fissando per convenzione l'ordine delle componenti atomiche di un enunciato come quello che va da sinistra a destra, per quanto detto, ogni enunciato esprime esattamente una funzione di verità, che può essere rappresentata (graficamente) dalla tavola di verità dell'enunciato stesso.

Ad esempio sia $X= P\Rightarrow Q$, dove $x_1=P$ e $x_2=Q$, la funzione di verità espressa da X, $f: E^2\rightarrow E$, è definita da:

[1]

a_1	a_2	$a_3=f(a_1, a_2)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

mentre $Y= Q\Rightarrow P$, se $x_1=P$ e $x_2=Q$, esprime la funzione di verità, $f: E^2 \rightarrow E$, definita da:

[2]

a_1	a_2	$a_3=f(a_1, a_2)$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Anche i connettivi definiscono delle funzioni di verità descritte dalle loro tavole di verità, ad esempio $f(a_1, a_2)$ degli esempi [1] o [2] è la funzione di verità del connettivo implicazione[8].

Possiamo adesso dare la seguente definizione:

Def.11- Si dice che l'insieme K di connettivi è *adeguato* (o K è una base), se e solo se, è possibile esprimere una qualsiasi funzione di verità mediante un enunciato composto X in cui occorrono soltanto connettivi appartenenti a K.

Si dimostra il seguente:

Teorema 5- Ogni funzione di verità è espressa da un enunciato in cui occorrono i connettivi $\neg$, $\wedge$ ed $\vee$, cioè $K=\{\neg, \wedge, \vee\}$ è un insieme adeguato di connettivi.
Dim.
Sia $f: E^{n} \rightarrow E$ una funzione di verità, come gia detto f può essere rappresentata da una tavola di verità di 2^n righe, dove ciascuna riga rappresenta qualche assegnazione di valori di verità $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seguita dal corrispondente valore $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_{n+1}$.
Per $1 \leq i \leq 2^n$ indichiamo con $\mathbf{C_i}$ la congiunzione $\mathbf{X_1^i \wedge X_2^i \wedge \ldots \wedge X_n^i}$ dove $X_j^i = X_j$ se nella riga i-esima a_j è V, mentre $X_j^i = \neg X_j$ se a_j è F (con $1 \leq j \leq n$).
Sia adesso **D** la disgiunzione di tutte quelle $\mathbf{C_i}$, se esistono, tali che f ha il valore vero per la i-esima riga della tavola di verità.
<u>**D** esprime la funzione di verità f</u>.
Infatti data un'assegnazione di valori di verità a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ assumiamo che l'assegnazione corrispondente, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sia la k-esima riga della tavola di verità che rappresenta f, allora per costruzione $\mathbf{C_k}$ ha il valore V per quest'assegnazione, mentre ogni altro $\mathbf{C_i}$, con $i \neq k$, ha il valore F per la stessa assegnazione.
Se f ha il valore V alla riga k-esima, allora $\mathbf{C_k}$ è un disgiunto di **D** che per quest'assegnazione assumerà il valore V come f. Se invece f ha il valore F alla k-esima riga, $\mathbf{C_k}$ non è un disgiunto di **D** e poiché ogni $\mathbf{C_i}$, con $i \neq k$, assume il valore F, tutti i disgiunti di **D** sono falsi e quindi anche **D** è falso per quest'assegnazione così come f.
Infine se f ha il valore F per ogni assegnazione di valori di verità alle a_i, una qualsiasi contraddizione, $X \wedge \neg X$, la esprimerà.

[8] - Se il connettivo è n-ario, chiameremo funzione di verità del connettivo la funzione di verità della fbf ottenuta applicando il connettivo ad n c.a. distinte.

Per esempio consideriamo f: $E^2 \rightarrow E$ definita dalla seguente tavola di verità:

	a_1	a_2	$a_3=f(a_1, a_2)$
i=1	V	V	F
i=2	V	F	V
i=3	F	V	V
i=4	F	F	V

Per il **Teorema 5** si ha:

$C_1= X_1^1 \wedge X_2^1 = X_1 \wedge X_2$,
$C_2= X_1^2 \wedge X_2^2 = X_1 \wedge \neg X_2$,
$C_3= X_1^3 \wedge X_2^3 = \neg X_1 \wedge X_2$,
$C_4= X_1^4 \wedge X_2^4 = \neg X_1 \wedge \neg X_2$,

pertanto la disgiunzione D che esprime f sarà la seguente:

$$D= C_2 \vee C_3 \vee C_4 = (X_1 \wedge \neg X_2) \vee (\neg X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2);$$

Si ha infatti la seguente tavola di verità abbreviata:

(X_1	**$\wedge$**	**$\neg$**	**X_2)**	**$\vee$**	**($\neg$**	**X_1**	**$\wedge$**	**X_2)**	**$\vee$**	**($\neg$**	**X_1**	**$\wedge$**	**$\neg$**	**X_2)**
V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V	F	V	V	F
	2	**1**		**5**	**3**		**4**		**9**	**6**		**8**	**7**	

Corollario 1- Qualsiasi funzione di verità può essere espressa da un enunciato contenente come connettivi solo le coppie $(\neg, \vee)$, $(\neg, \wedge)$ e $(\neg, \Rightarrow)$. Cioè gli insiemi: $K_1=\{\neg, \vee\}$, $K_2=\{\neg, \wedge\}$ e $K_3=\{\neg, \Rightarrow\}$ sono adeguati.
Dim.
Dal teorema precedente si ha che l'insieme $K=\{\neg, \wedge, \vee\}$ è adeguato, inoltre si è già visto che l'enunciato $X \wedge Y$ è logicamente equivalente all'enunciato $\neg(\neg X \vee \neg Y)$. Per il **Teorema 3**, allora qualsiasi enunciato contenente soltanto i connettivi $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ è logicamente equivalente ad un enunciato contenente soltanto $\neg$ ed $\vee$, ottenuto sostituendo tutte le congiunzioni $X \wedge Y$ con $\neg(\neg X \vee \neg Y)$, pertanto l'insieme K_1 è adeguato dato che lo è K.

Analogamente dalla tautologia: $(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$ si ha che K_2 è adeguato, mentre l'adeguatezza di K_3 segue dalle seguenti tautologie:
$(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X \Rightarrow Y)$ e $(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)$.

In altri termini, un insieme di connettivi è adeguato se ogni altro connettivo può essere definito in funzione dei connettivi appartenenti all'insieme stesso.

Esistono due connettivi binari che da soli costituiscono un insieme adeguato, sono la *negazione congiunta* o NOR (da not or), e la *negazione alternativa* o NAND (da not and).

Il connettivo NOR, in simboli $\downarrow$, è definito dalla seguente tavola di verità:

X	**Y**	**X↓Y**
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

L'enunciato $X \downarrow Y$ sta per "né X né Y né entrambi", e si ha la tautologia $(X \downarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X \vee Y)$.

Per il connettivo NAND, in simboli $|$, si ha invece la seguente tavola di verità:

X	**Y**	**X|Y**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

L'enunciato $X | Y$ sta per "o è falso X o è falso Y o entrambi", e si ha la tautologia $(X | Y) \Leftrightarrow \neg(X \wedge Y)$.

Per verificare l'adeguatezza di NOR basta osservare che l'enunciato $X \downarrow Y$ è vero se e solo se X e Y sono entrambi falsi, si hanno quindi le tautologie (la verifica delle quali si lascia al lettore): $\neg X \Leftrightarrow (X \downarrow X)$, $X \vee Y \Leftrightarrow (X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$ e $X \wedge Y \Leftrightarrow (X \downarrow X) \downarrow (Y \downarrow Y)$, da ciò segue che l'insieme $K_4 = \{\downarrow\}$ è adeguato dato che lo sono $K_1 = \{\neg, \vee\}$ e $K_2 = \{\neg, \wedge\}$.

Per quanto riguarda NAND si osserva, invece, che l'enunciato $X|Y$ è falso se e solo se X e Y sono entrambi veri, pertanto si hanno le seguenti tautologie (la verifica delle quali si lascia al lettore): $\neg X \Leftrightarrow (X|X)$, $X \wedge Y \Leftrightarrow (X|Y)|(X|Y)$ e $X \vee Y \Leftrightarrow (X|X)|(Y|Y)$, e dato che $K_2=\{\neg, \wedge\}$ e $K_1=\{\neg, \vee\}$ sono adeguati lo sarà $K_5=\{|\}$.

Si ha il seguente:

Teorema 6- I soli connettivi binari ciascuno dei quali da solo costituisce un insieme adeguato, ossia è adeguato alla costruzione di tutte le funzioni di verità, sono la negazione congiunta e quella alternativa.

Dim.

Supponiamo che h(X, Y) sia un connettivo adeguato, e costruiamone la tavola di verità. Se h(V,V) fosse V, qualsiasi enunciato formato usando solo h assumerebbe valore V quando tutte le sue componenti atomiche assumono il valore V, quindi l'enunciato $\neg X$ non sarebbe definibile in termini di h, contro l'ipotesi di adeguatezza dello stesso, pertanto h(V,V) deve risultare F. Analogamente se h(F,F) fosse F la negazione non sarebbe definibile, quindi h(F,F) deve essere V. Si ha allora la seguente tavola di verità:

X	**Y**	**h(X, Y)**
V	V	F
V	F	
F	V	
F	F	V

per completarla dobbiamo determinare h(V, F) e h(F, V); abbiamo quattro possibilità:

1) se h(V,F)=h(F,V)=V si ha che h è il connettivo NAND, cioè $h(X,Y) \Leftrightarrow (X|Y)$ è una tautologia,
2) se h(V,F)=h(F,V)=F si ha che h è il connettivo NOR, cioè $h(X,Y) \Leftrightarrow (X\downarrow Y)$ è una tautologia,
3) se invece h(V,F)=V e h(F,V)=F, si ha che $h(X,Y)\Leftrightarrow\neg Y$ è una tautologia,
4) infine se h(V,F)=F e h(F,V)=V, si ha che $h(X,Y)\Leftrightarrow\neg X$ è una tautologia.

Negli ultimi due casi h sarebbe definibile in termini di $\neg$, ma tale connettivo da solo non è adeguato, dato che le uniche funzioni di verità definibili in termini di $\neg$, sono la funzione d'identità (per la tautologia $X\Leftrightarrow\neg(\neg X)$) e la negazione stessa (per la tautologia $\neg X\Leftrightarrow\neg X$), mentre ad esempio la funzione di verità che è sempre vera non sarebbe definibile usando soltanto il connettivo $\neg$.

Consideriamo, adesso, un connettivo ternario che in coppia con la negazione risulta adeguato, si tratta del connettivo, che chiameremo *congiunzione condizionale*, “se…allora…altrimenti” (if…then…else), in simboli $\Uparrow$, il quale connette tre enunciati X, Y e Z, producendo l’enunciato $(X\Uparrow Y\Uparrow Z)$, che sta per “Se X allora Y altrimenti Z” ed equivale alla congiunzione di due implicazioni, $(X\Rightarrow Y)\wedge(\neg X\Rightarrow Z)$, pertanto resta definito dalla seguente tavola di verità:

X	**Y**	**Z**	**¬X**	**X⇒Y**	**¬X⇒Z**	**(X⇑Y⇑Z)**
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Per verificare adesso che $K_6=\{\neg, \Uparrow\}$ è adeguato, in base al **Corollario 1**, basta definire in termini di $\Uparrow$, il connettivo $\wedge$ (o $\vee$), oppure i connettivi $\Rightarrow, \downarrow, \mid$, in termini di $\neg$ e $\Uparrow$.
Per il connettivo $\wedge$ si ha che l’enunciato $(X\wedge Y)\Leftrightarrow(X\Uparrow Y\Uparrow X)$ è una tautologia, si ha, infatti, la seguente catena di tautologie, che può essere verificata dalla successiva tavola di verità:

$$(X\wedge Y) \Leftrightarrow (X\wedge Y) \vee (X\wedge\neg X) \Leftrightarrow X \wedge (Y\vee\neg X) \Leftrightarrow (\neg X\vee Y) \wedge (X\vee X) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (X\Rightarrow Y) \wedge (\neg X\Rightarrow X) \Leftrightarrow (X\Uparrow Y\Uparrow X)$$

X	**Y**	**¬X**	**X∧Y**	**X⇒Y**	**¬X⇒X**	**(X⇒Y)∧(¬X⇒X)**	**(X∧Y)⇔(X⇑Y⇑X)**
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V

Si lascia al lettore il compito di trovare e verificare le tautologie che permettono di provare l’adeguatezza dell’insieme $K_6=\{\neg, \Uparrow\}$ in base a quella degli insiemi K_1, K_3, K_4 e K_5.

Forme normali congiuntive e disgiuntive

È spesso utile trasformare una fbf in un'altra ad essa logicamente equivalente che ha una qualche forma canonica prestabilita. In particolare, ciò si realizza sostituendo una sotto formula della formula data con altre formule ad essa equivalenti fino al raggiungimento della forma desiderata. Tale forma canonica, di solito, è detta *forma normale*, poiché il procedimento di sostituzione delle sotto formule non è applicabile ulteriormente.
Le forme normali che considereremo sono le cosiddette forme normali congiuntive e disgiuntive.

Def.12- Una fbf si dice in *forma normale congiuntiva*, in breve FNC (*disgiuntiva*, FND), se è una congiunzione (disgiunzione) di uno o più congiunti (disgiunti) ciascuno dei quali è una disgiunzione (congiunzione) di *letterali,* cioè di formule atomiche o di negazioni di formule atomiche.

Ad esempio sono FNC gli enunciati $(A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$ e $(A\vee B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee C)$, mentre $(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge C)$ e $(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge C)$ sono due FND. I letterali, per le leggi d'idempotenza $A\Leftrightarrow(A\wedge A)\Leftrightarrow(A\vee A)$ e $\neg A\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg A)\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg A)$, sono considerati congiunzioni o disgiunzioni degeneri.

Ogni fbf è logicamente equivalente ad una FNC o FND, infatti ogni funzione di verità è espressa, per il **Teorema 5**, da una fbf in cui occorrono i connettivi $\neg$, $\wedge$ ed $\vee$, e la fbf costruita nella dimostrazione è proprio una FND; inoltre da una FND applicando le leggi di De Morgan, quelle distributive e della doppia negazione si può passare alla FNC della stessa fbf.
Costruiamo per esempio la FNC logicamente equivalente alla seguente FND:

$$\mathbf{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)},$$

per la legge distributiva di $\wedge$ rispetto ad $\vee$, considerando le prime due congiunzioni, si ha: $(\underline{(A\vee\neg A)}\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$,
cancellando la tautologia (sottolineata nel testo) si ottiene: $B\vee(\neg A\wedge\neg B)$,
distribuendo, quindi, $\vee$ rispetto ad $\wedge$, si ha: $(B\vee\neg A)\wedge(B\vee\neg B)$,
questa cancellando la tautologia $B\vee\neg B$ diventa $B\vee\neg A$,
infine, per la legge di idempotenza per $\wedge$, si ottiene la FNC:

$$\mathbf{(B\vee\neg A)\wedge(B\vee\neg A)}.$$

Data una qualsiasi fbf tramite il **Teorema 5** o altre trasformazioni si può ottenere una FND che si può poi trasformare in FNC o viceversa.

Consideriamo, infatti, la seguente fbf:

$$\mathbf{X=((A\Rightarrow\neg B)\wedge C)\vee(\neg A\Leftrightarrow C)},$$

trasformando i connettivi $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ si ottiene:
$((\neg A\vee\neg B)\underline{\wedge}C)\vee((\neg A\Rightarrow C)\wedge(C\Rightarrow\neg A))$,
e da questa distribuendo $\underline{\wedge}$ rispetto ad $\vee$ e trasformando $\Rightarrow$ si ha: $((\neg A\wedge C)\vee(\neg B\wedge C))\vee((A\vee C)\underline{\wedge}(\neg C\vee\neg A))$,
distribuendo ancora due volte $\underline{\wedge}$ rispetto ad $\vee$ si ottengono le due fbf: $((\neg A\wedge C)\vee(\neg B\wedge C))\vee((A\vee C)\underline{\wedge}\neg C)\vee(A\vee C)\underline{\wedge}\neg A))$ e
$((\neg A\wedge C)\vee(\neg B\wedge C))\vee((A\wedge\neg C)\vee(C\wedge\neg C))\vee((A\wedge\neg A)\vee(C\wedge\neg A))$;
sostituendo quindi, gli ultimi disgiunti rispettivamente con $(A\wedge\neg C)$ e $(C\wedge\neg A)$ che sono ad essi logicamente equivalenti si ha:
$(\neg A\wedge C)\vee(\neg B\wedge C)\vee(A\wedge\neg C)\vee(C\wedge\neg A)$,
ed infine, cancellando la ripetizione $(C\wedge\neg A)$, si ottiene la FND:

$$\mathbf{(\neg A\wedge C)\vee(\neg B\wedge C)\vee(A\wedge\neg C)}.$$

Da questa per la legge distributiva di $\wedge$ rispetto ad $\vee$, considerando le prime due congiunzioni, si ha:
$((\neg A\vee\neg B)\wedge C)\underline{\vee}(A\wedge\neg C)$,
da cui distribuendo due volte $\underline{\vee}$ rispetto ad $\wedge$ si ottiene:
$(((\neg A\vee\neg B)\wedge C)\underline{\vee}A)\wedge(((\neg A\vee\neg B)\wedge C)\underline{\vee}\neg C)$,
$(\underline{\neg A\vee\neg B\vee A})\wedge(C\vee A)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(\underline{C\vee\neg C})$,
ed infine, cancellando le tautologie si ha la FNC:

$$\mathbf{(C\vee A)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)}.$$

Costruzione di FNC e FND tramite tavole di verità

Con il procedimento indicato nella dimostrazione del **Teorema 5**, come già detto, si può costruire la FND di una fbf, in modo analogo si può costruire la FNC della stessa fbf, scambiando tra loro i ruoli di V e F e quelli della disgiunzione e della congiunzione.
In altre parole, data una fbf composto da n c.a., per ottenere la FNC si prendono in considerazione quelle righe della tavola di verità in cui la fbf assume valore F e per ognuna di esse si costruisce una disgiunzione di n letterali determinati nel seguente modo: se nell'assegnazione a_1, a_2,…, a_n di valori di verità relativa alla riga considerata a_i=V nella disgiunzione viene inserito il letterale $\neg X_i$, invece, se a_i=F nella disgiunzione viene inserito il letterale X_i. La congiunzione delle disgiunzioni così ottenute è la FNC della fbf data.
Se la fbf è una tautologia, ossia non esistono righe in cui la fbf assume valore F, come sua FNC si può considerare qualsiasi congiunzione di disgiunzioni tautologiche costruite con due c.a. della fbf stessa.

Come esempio costruiamo la FNC e la FND della fbf **$X= (A\Rightarrow\neg B)\wedge C\vee(\neg A\Leftrightarrow C)$**, già considerata, a partire dalla tavola di verità della stessa che è la seguente:

A	**B**	**C**	**¬B**	**¬A**	**A⇒¬B**	**(A⇒¬B)∧C**	**¬A⇔C**	**X**
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F	F

Per costruire la FNC consideriamo le righe nelle quali X assume valore F e costruiamo le disgiunzioni corrispondenti, si ha:

$D_1= \neg A\vee\neg B\vee\neg C$,
$D_6= A\vee\neg B\vee C$,
$D_8= A\vee B\vee C$,

pertanto la FNC è:

$$(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(A\vee\neg B\vee C)\wedge(A\vee B\vee C).$$

Per costruire la FND consideriamo le righe nelle quali X assume valore V e costruiamo le congiunzioni corrispondenti, si ha:

$\mathbf{C_2 = A \wedge B \wedge \neg C}$,
$\mathbf{C_3 = A \wedge \neg B \wedge C}$,
$\mathbf{C_4 = A \wedge \neg B \wedge \neg C}$,
$\mathbf{C_5 = \neg A \wedge B \wedge C}$,
$\mathbf{C_7 = \neg A \wedge \neg B \wedge C}$,

pertanto la FND è:

$$(\mathbf{A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C).}$$

Si noti che le formule costruite con tale metodo non sono necessariamente le più brevi, ma possono essere semplificate applicando le leggi distribuitive e cancellando, a seconda dei casi, eventuali contraddizioni e tautologie.
Ad esempio applicando la legge distribuitiva di $\vee$ rispetto a $\wedge$ agli ultimi due congiunti della precedente FNC: $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C)$ si ottiene: $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge ((A \vee C) \vee (\neg B \wedge B))$,
da cui cancellando la contraddizione $\neg B \wedge B$ si ha:

$$\mathbf{(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee C)},$$

che quella trovata a pag.37. (come esercizio, il lettore semplifichi la precedente FND riportandola a quella di pag. 37).

FNC e FND di tautologie e contraddizioni

Per una FNC è facile assicurarsi se si tratta o meno di una tautologia, poiché una congiunzione è una tautologia se e solo se lo sono tutte le sue componenti. Si osservi che nessuna delle due FNC costruite negli esempi precedenti è una tautologia, in quanto una FNC è una tautologia se e solo se tutti i congiunti contengono una coppia complementare del tipo X, $\neg$X.

Come esempio costruiamo (senza ricorrere alla tavola di verità) la FNC della tautologia $\mathbf{(A \Rightarrow B) \underline{\Rightarrow} (\neg B \Rightarrow \neg A)}$, trasformando $\underline{\Rightarrow}$, mediante $\neg$ e $\vee$, si ha: $\neg(A \Rightarrow B) \vee (\neg B \Rightarrow \neg A)$, trasformando adesso la prima implicazione mediante $\neg$ e $\wedge$, e la seconda mediante $\neg$ e $\vee$, otteniamo $\neg\neg(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$, ossia $(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$[9], infine da questa distribuendo $\wedge$ rispetto a $\vee$ si ha la FNC $\mathbf{(A \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee B \vee \neg A)}$, che è una tautologia in quanto presenta in entrambi i congiunti le coppie complementari A, $\neg$A e B, $\neg$B.

[9] -.Tale fbf può essere scritta come $(A \wedge \neg B) \vee B \vee \neg A$ ed è la FND della fbf di partenza.

Per una FND, invece, è facile accertare la soddisfacibilità o meno, dato che una disgiunzione è soddisfacibile (vera per qualche assegnazione di valori di verità) se lo è almeno una sua componente, quindi una FND è soddisfacibile se almeno un suo disgiunto non contiene una coppia complementare X, $\neg$X, ad esempio entrambe le FND dei primi due esempi sono soddisfacibili; una FND è, invece, una contraddizione se e solo se tutti i disgiunti contengono coppie complementari X, $\neg$X.

Come esempio costruiamo (senza ricorrere alla tavola di verità) la FND della contraddizione $\mathbf{(A\wedge B)\underline{\wedge}(\neg A\vee\neg B)}$, distribuendo la $\wedge$ sottolineata nel testo rispetto a $\vee$ si ottiene la FND $\mathbf{(A\wedge B\wedge\neg A)\vee(A\wedge B\wedge\neg B)}$, che è una contraddizione in quanto presenta in entrambi i disgiunti le coppie complementari A, $\neg$A e B, $\neg$B.

Principio di dualità

Per passare da una FND ad una FNC e viceversa si può applicare il seguente teorema di cui si omette la dimostrazione:

Teorema 7- Se X è una fbf in cui occorrono solo i connettivi $\neg$, $\wedge$ ed $\vee$, e X_d (fbf duale) si ottiene da X scambiando tra loro $\wedge$ ed $\vee$ e rimpiazzando ogni componente atomica con la sua negazione, allora X_d è logicamente equivalente a $\neg$X, cioè $\neg X_d \Leftrightarrow X$ è una tautologia.

Considerata ad esempio la FND $X=\mathbf{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)}$ del primo esempio (v. pag. 36), procedendo secondo il teorema precedente la fbf duale è: $X_d=(\neg A\vee\neg B)\wedge(A\vee\neg B)\wedge(A\vee B)$, per la legge distributiva di $\wedge$ rispetto ad $\vee$, considerando le ultime due disgiunzioni, si ha: $X_d=(\neg A\vee\neg B)\wedge(A\vee(\neg B\wedge B))$, sostituendo il secondo congiunto con A, che è ad esso equivalente, si ha $X_d=(\neg A\vee\neg B)\wedge A$, da cui distribuendo $\vee$ rispetto ad $\wedge$, risulta $X_d=(\neg A\wedge A)\vee(\neg B\wedge A)$, ossia $X_d=\neg B\wedge A$, pertanto $\neg X_d=\neg(\neg B\wedge A)$, da questa per le leggi di De Morgan e per quella della doppia negazione si ottiene $\neg X_d=B\vee\neg A$, logicamente equivalente, per il teorema precedente, a X e, per la legge di idempotenza di $\wedge$, alla FNC: $\mathbf{(B\vee\neg A)\wedge(B\vee\neg A)}$ trovata proprio nel primo esempio.

Algoritmo di Fitting

Per trasformare una fbf in FNC o FND esiste un algoritmo, dovuto a Melvin Fitting, basato sull'osservazione che ogni fbf non atomica o è una doppia negazione (ossia del tipo $\neg\neg X$ per qualche fbf X), oppure è equivalente ad una congiunzione o ad una disgiunzione.
Per formulare quest'osservazione introduciamo la seguente definizione:

Def.13- Una fbf W è di tipo α, se esistono fbf X e Y tali che W è di uno dei tipi che compaiono nella colonna sinistra della prima delle seguenti tabelle. Una fbf W è di tipo β, se esistono fbf X e Y tali che W è di uno dei tipi che compaiono nella colonna sinistra della seconda delle seguenti tabelle. In entrambi i casi i *ridotti* di una fbf di tipo α o β (rispettivamente α_1 e α_2 congiunti, e β_1 e β_2 disgiunti) sono le fbf che compaiono nelle due colonne più a destra.

α	α_1	α_2
$X\wedge Y$	X	Y
$\neg(X\vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X\Rightarrow Y)$	X	$\neg Y$

β	β_1	β_2
$X\vee Y$	X	Y
$\neg(X\wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$X\Rightarrow Y$	$\neg X$	Y

Osservazioni

1) Ogni fbf di tipo α è logicamente equivalente alla congiunzione dei suoi ridotti, mentre ogni fbf di tipo β è logicamente equivalente alla disgiunzione dei suoi ridotti. L'equivalenza è ovvia per le formule contenute nelle prime due righe di ogni tabella, per quelle contenute nelle altre righe basta ricordare le leggi di De Morgan e l'adeguatezza degli insiemi $K_2=\{\neg,\wedge\}$ e $K_1=\{\neg,\vee\}$ oppure le leggi di Filone Megarico e di Crisippo (v. pag.20).

2) Ogni fbf non atomica si può trasformare in modo che risulti di uno e di uno solo dei seguenti tipi:
   - doppia negazione,
   - formula di tipo α,
   - formula di tipo β.

   Dato che i connettivi: $\Leftrightarrow$, $\downarrow$, $|$ e $\Uparrow$,come già visto, si possono esprimere in termini di $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\Rightarrow$.

Per descrivere l'algoritmo di Fitting usiamo la seguente notazione:

1) La fbf $((\ldots(C_1 \wedge C_2) \wedge \ldots \wedge C_{n-1}) \wedge C_n)$, detta *congiunzione generalizzata* si indica con **$<C_1, C_2, \ldots, C_n>$**;
2) la fbf $((\ldots(D_1 \vee D_2) \vee \ldots \vee D_{n-1}) \vee D_n)$, detta *disgiunzione generalizzata* si indica con **$[D_1, D_2, \ldots, D_n]$**.

Usando congiunzioni e disgiunzioni generalizzate una fbf in forma normale congiuntiva e disgiuntiva ha la forma:

FNC $$<[D_{11}, D_{12}, \ldots, D_{1h_1}], \ldots, [D_{n1}, D_{n2}, \ldots, D_{nh_n}]>$$

FND $$[<C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1h_1}>, \ldots, <C_{n1}, C_{n2}, \ldots, C_{nh_n}>],$$

dove ogni D_{ij} o C_{ij} è un letterale.

a. Algoritmo per FNC

L'algoritmo di Fitting per la trasformazione in FNC prende in entrata una fbf W e la considera come una congiunzione generalizzata di disgiunzioni generalizzate: <[W]>. Se tutti gli elementi di queste disgiunzioni sono letterali, la fbf è una FNC e l'algoritmo si arresta. Se, invece, esistono elementi di queste disgiunzioni che non sono letterali se ne sceglie uno, che indichiamo con K. Per la **Def.13** ci sono tre possibilità:

1. K è una doppia negazione $\neg\neg H$, si sostituisce allora K con H nel congiunto in cui appare K, mentre si lasciano immutati gli altri congiunti;
2. K è di tipo β e i suoi ridotti sono K_1 e K_2, in questo caso si sostituisce K con K_1, K_2 nel congiunto in cui appare K; gli altri congiunti restano immutati;
3. K è di tipo α e i suoi ridotti sono K_1 e K_2, in questo caso si sostituisce K con due nuovi congiunti, nel primo congiunto K è sostituito da K_1, nel secondo da K_2, e in entrambi i casi gli altri disgiunti restano immutati; gli altri congiunti restano immutati.

La FNC così ottenuta è logicamente equivalente alla fbf di partenza.

Esempi

1) Trasformiamo in FNC la fbf $(\mathbf{Z}\wedge\neg\mathbf{T})\vee\neg(\mathbf{X}\Rightarrow\neg\mathbf{Y})$ utilizzando l'algoritmo **a.**; nello schema seguente indichiamo: nella colonna di sinistra la fbf (congiunzione generalizzata di disgiunzioni generalizzate di fbf) a cui siamo arrivati ad ogni passo dell'applicazione dell'algoritmo, in quella centrale la fbf su cui agiamo per effettuare il passo successivo, infine nella colonna di destra il tipo di formula (α, β o doppia negazione, indicata con$\neg\neg$).

$<[(Z\wedge\neg T)\vee\neg(X\Rightarrow\neg Y)]>$	$(Z\wedge\neg T)\vee\neg(X\Rightarrow\neg Y)$	β
$<[Z\wedge\neg T,\neg(X\Rightarrow\neg Y)]>$	$(Z\wedge\neg T)$	α
$<[Z,\neg(X\Rightarrow\neg Y)],[\neg T,\neg(X\Rightarrow\neg Y)]>$	$\neg(X\Rightarrow\neg Y)$	α
$<[Z,X],[Z,\neg\neg Y],[\neg T,\neg(X\Rightarrow\neg Y)]>$	$\neg\neg Y$	$\neg\neg$
$<[Z,X],[Z,Y],[\neg T,\neg(X\Rightarrow\neg Y)]>$	$\neg(X\Rightarrow\neg Y)$	α
$<[Z,X],[Z,Y],[\neg T,X],[\neg T,\neg\neg Y]>$	$\neg\neg Y$	$\neg\neg$
$<[Z,X],[Z,Y],[\neg T,X],[\neg T,Y]>$		

La fbf di partenza è quindi equivalente alla formula $<[\mathbf{Z},\mathbf{X}],[\mathbf{Z},\mathbf{Y}],[\neg\mathbf{T},\mathbf{X}],[\neg\mathbf{T},\mathbf{Y}]>$, ossia la sua FNC è la seguente:

$$(\mathbf{Z}\vee\mathbf{X})\wedge(\mathbf{Z}\vee\mathbf{Y})\wedge(\neg\mathbf{T}\vee\mathbf{X})\wedge(\neg\mathbf{T}\vee\mathbf{Y}).$$

2) Trasformiamo in FNC la fbf $(\mathbf{X}\Rightarrow\neg\mathbf{Y})\vee\neg(\mathbf{Z}\wedge\mathbf{T}\Rightarrow\neg(\neg\mathbf{Z}\vee\mathbf{U}))$, questa volta nello schema omettiamo l'indicazione della formula su cui si effettua la sostituzione.

$<[(X\Rightarrow\neg Y)\vee\neg(Z\wedge T\Rightarrow\neg(\neg Z\vee U))]>$	β
$<[X\Rightarrow\neg Y,\neg(Z\wedge T\Rightarrow\neg(\neg Z\vee U))]>$	β
$<[\neg X,\neg Y,\neg(Z\wedge T\Rightarrow\neg(\neg Z\vee U))]>$	α
$<[\neg X,\neg Y,Z\wedge T],[\neg X,\neg Y,\neg\neg(\neg Z\vee U)]>$	$\neg\neg$
$<[\neg X,\neg Y,Z\wedge T],[\neg X,\neg Y,\neg Z\vee U]>$	α
$<[\neg X,\neg Y,Z],[\neg X,\neg Y,T],[\neg X,\neg Y,\neg Z\vee U]>$	β
$<[\neg X,\neg Y,Z],[\neg X,\neg Y,T],[\neg X,\neg Y,\neg Z,U]>$	

La FNC richiesta è pertanto la seguente:

$$(\neg\mathbf{X}\vee\neg\mathbf{Y}\vee\mathbf{Z})\wedge(\neg\mathbf{X}\vee\neg\mathbf{Y}\vee\mathbf{T})\wedge(\neg\mathbf{X}\vee\neg\mathbf{Y}\vee\neg\mathbf{Z}\vee\mathbf{U}).$$

L’algoritmo di Fitting per la trasformazione in FND è duale rispetto a quello per la FNC: congiunzioni e disgiunzioni generalizzate sono scambiate e il ruolo delle formule di tipo α e β è invertito. Si ha pertanto il seguente:

b. Algoritmo per FND

L’algoritmo di Fitting per la trasformazione in FND prende in entrata una fbf W e la considera come una disgiunzione generalizzata di congiunzioni generalizzate: [<W>]. Se tutti gli elementi di queste congiunzioni sono letterali, la fbf è una FND e l’algoritmo si arresta. Se, invece, esistono elementi di queste congiunzioni che non sono letterali se ne sceglie uno, che indichiamo con K. Per la **Def.13** ci sono tre possibilità:

1. K è una doppia negazione $\neg\neg$H, si sostituisce allora K con H nel disgiunto in cui appare K, mentre si lasciano immutati gli altri disgiunti;
2. K è di tipo α e i suoi ridotti sono K_1 e K_2, in questo caso si sostituisce K con K_1, K_2 nel disgiunto in cui appare K; gli altri disgiunti restano immutati;
3. K è di tipo β e i suoi ridotti sono K_1 e K_2, in questo caso si sostituisce K con due nuovi disgiunti, nel primo disgiunto K è sostituito da K_1, nel secondo da K_2, e in entrambi i casi gli altri congiunti restano immutati; gli altri disgiunti restano immutati.

La FND così ottenuta è logicamente equivalente alla fbf di partenza.

Esempi

3) Trasformiamo in FND la fbf dell’esempio 1), $\mathbf{(Z\wedge\neg T)\vee\neg(X\Rightarrow\neg Y)}$, utilizzando l’algoritmo **b.**; nello schema seguente indichiamo: nella colonna di sinistra la fbf (disgiunzione generalizzata di congiunzioni generalizzate di fbf) a cui siamo arrivati ad ogni passo dell’applicazione dell’algoritmo, in quella centrale la fbf su cui agiamo per effettuare il passo successivo, infine nella colonna di destra il tipo di formula (α, β o doppia negazione, indicata con$\neg\neg$).

$\mathbf{[<(Z\wedge\neg T)\vee\neg(X\Rightarrow\neg Y)>]}$	$\mathbf{(Z\wedge\neg T)\vee\neg(X\Rightarrow\neg Y)}$	β
$\mathbf{[<Z\wedge\neg T>,<\neg(X\Rightarrow\neg Y)>]}$	$\mathbf{(Z\wedge\neg T)}$	α
$\mathbf{[<Z,\neg T>,<\neg(X\Rightarrow\neg Y)>]}$	$\mathbf{\neg(X\Rightarrow\neg Y)}$	α
$\mathbf{[<Z,\neg T>,<X,\neg\neg Y)>]}$	$\mathbf{\neg\neg Y}$	$\neg\neg$
$\mathbf{[<Z,\neg T>,<X,Y)>]}$		

La fbf di partenza è quindi equivalente alla formula $[\langle Z,\neg T\rangle,\langle X,Y\rangle]$, ossia la sua FND è la seguente:

$$(Z\wedge\neg T)\vee(X\wedge Y).$$

4) Trasformiamo adesso in FND $(X\Rightarrow\neg Y)\vee\neg(Z\wedge T\Rightarrow\neg(\neg Z\vee U))$, ossia la fbf dell'esempio 2), questa volta nello schema omettiamo l'indicazione della formula su cui si effettua la sostituzione.

$$\begin{array}{c|l}
[\langle (X\Rightarrow\neg Y)\vee\neg(Z\wedge T\Rightarrow\neg(\neg Z\vee U)) \rangle] & \beta \\
[\langle X\Rightarrow\neg Y\rangle,\langle\neg(Z\wedge T\Rightarrow\neg(\neg Z\vee U))\rangle] & \beta \\
[\langle\neg X\rangle,\langle\neg Y\rangle,\langle\neg(Z\wedge T\Rightarrow\neg(\neg Z\vee U))\rangle] & \alpha \\
[\langle\neg X\rangle,\langle\neg Y\rangle,\langle Z\wedge T,\neg\neg(\neg Z\vee U)\rangle] & \neg\neg \\
[\langle\neg X\rangle,\langle\neg Y\rangle,\langle Z\wedge T,\neg Z\vee U\rangle] & \alpha \\
[\langle\neg X\rangle,\langle\neg Y\rangle,\langle Z,T,\neg Z\vee U\rangle] & \beta \\
[\langle\neg X\rangle,\langle\neg Y\rangle,\langle Z,T,\neg Z\rangle,\langle Z,T,U\rangle] &
\end{array}$$

La FND richiesta è pertanto la seguente:

$$\neg X\vee\neg Y\vee(Z\wedge T\wedge\neg Z)\vee(Z\wedge T\wedge U).$$

Osservazione

Per ridurre il numero di passi necessari per l'esecuzione dell'algoritmo **a.** è opportuno operare su formule di tipo β, ogni volta che ciò è possibile; dualmente per quanto riguarda l'algoritmo **b.** è opportuno operare, ove possibile, su formule di tipo α. Consideriamo, infatti, ad esempio la seguente tabella che presenta due diverse applicazioni dell'algoritmo **a.** alla fbf $(X\wedge Y)\vee\neg(Z\wedge T)$:

$\langle[(X\wedge Y)\vee\neg(Z\wedge T)]\rangle$	$\langle[(X\wedge Y)\vee\neg(Z\wedge T)]\rangle$
$\langle[(X\wedge Y),\neg(Z\wedge T)]\rangle$	$\langle[(X\wedge Y),\neg(Z\wedge T)]\rangle$
$\langle[(X\wedge Y),\neg Z,\neg T]\rangle$	$\langle[X,\neg(Z\wedge T)],[Y,\neg(Z\wedge T)]\rangle$
$\langle[(X,\neg Z,\neg T],[Y,\neg Z,\neg T]\rangle$	$\langle[X,\neg Z,\neg T)],[Y,\neg(Z\wedge T)]\rangle$
	$\langle[X,\neg Z,\neg T)],[Y,\neg Z,\neg T)]\rangle$

La FNC ottenuta è la stessa in entrambi i casi , ma nella prima colonna al secondo passo si è operato sulla formula (di tipo β) $\neg(Z\wedge T)$, mentre nella seconda colonna si è operato sulla formula (di tipo α) $X\wedge Y$; ciò a portato ad ottenere il risultato finale rispettivamente in tre e quattro passi.