Appunti del corso di Logica I
(dal corso del prof. Gianni Rigamonti)

Quali sono le definizioni della parola logica più utilizzata?

- Scienza delle verità *universali*, cioè di quelle verità che valgono per tutti gli oggetti possibilie, di qualsiasi natura.
- Scienza delle verità *formali*,cioè di quelle proposizioni che sono vere esclusivamente grazie alla loro forma, e non al contenuto.
- Scienza della *dimostrazione*.
- Analisi dei concetti di *conseguenza* e *contraddizione*, intese come relazioni tra proposizioni, e non tra fatti come avviene nel linguaggio comune.

Chi sono i protagonisti della logica?

- I nomi più importanti in questo ambito sono due: Aristotele (384-322 a.C.) e Gottlob Frege (1848-1925 d.C)

Qual'era l'idea di Aristotele?

- Secondo Aristotele una *proposizione* è «Un discorso che afferma o nega qualcosa rispetto a qualcosa» i predicati sono quindi nella forma *a=b* oppure *a!=b* dividendo di fatto la proposizione in due parti distine, il *predicato* (ciò che viene affermato o negato) ed il *soggetto (*ciò di cui il predicato è affermato o negato). La proposizione, secondo Aristotele, esprime l'unione o la separazione tra soggetto e predicato, rispettivamente quando questa è affermativa o negativa. Va sottolineato che il soggetto ed il predicato sono tali per posizione.

Qual'era l'idea di Frege?

Nella teoria Aristotelica Frege trovò due contraddizioni

1) Una proposizione può non ridursi a solo soggetto e predicato.

Per esemio *Mario mangia pesce* possiede soggetto predicato e complemento (nel senso grammaticale del termine).
C'è da dire a tal proposito che Aristotele si riferiva al termine predicato nel suo senso attuale, ma bensì il termine predicato indica tutto ciò che si dice del soggetto, quindi nell'esempio precedente, *mangia pesce* sarebbe tutto un unico predicato.
Si complica la faccenda con le preposizioni relazionali, quali *la tigre è più forte del leone* , *tre è minore di cinque* per accettare le quali bisognava allargare di parecchio i vincoli della teoria arisotelica, affermando che il predicato consisteva nell'intera preposizione *è più forte del leone* oppure *minore di cinque* .
Gottlob Frege trovò un controesempio, da queste premesse

I) *Tutte le proboscidi sono parti di elefante.*
II) *Tutti gli elefanti sono animali.*

Segue che

III) *Tutte le proboscidi sono parti di animale.*

Secondo la teoria aristotelica parti di è solo una componente di predicati più complessi, quindi i 3 predicati hanno questa forma:

Se tutte le A sono B
e tutti i C sono D
Allora tutte le A sono E

Perdendo completamente il senso della frase. Se consideriamo invece parte di come non riducibile ad una parte di un termine più complesso otteniamo:

Se tutte le X sono parti di Y
E tutte le Y sono Z
Allora tutte le X sono parti di Z.

Come si può notare il senso della frase si è mantenuto, ad indicare che questa è stata la sostituzione più corretta.
Quindi sarebbe più corretto dire che una proposizione afferma (o nega) una proprietà di un oggetto, o afferma (o nega) che una relazione ad *n* termini intercorre tra *n* oggetti.

2) I termini si dividono in due classi, i soggetti ed i predicati, e sono tali per propria natura, non per posizione.
Traendo spunto dal linguaggio matematico, Frege intui che i termini di una proposizione si dividono in due classi distinte, i termini saturi e quelli insaturi. Un termine si dice *instaturo* quando tolto dal predicato non ha senso compiuto. Ad esempio nella proposizione *Cesare conquistò la Gallia* possiamo trovare un termine instaturo conquistò la Gallia (a rigore sarebbero due

distinti..) perchè il suo senso compiuto lo acquista soltanto quando è completata dal termine *saturo* Cesare .
Quindi secondo Frege ogni enunciato ha ha questa struttura: un predicato, che può esprimere una proprietà (e quindi è un termine instaturo con un posto di argomento) o una relazione binaria,ternaria etc (e quindi con 2,3,..n posti da saturare) e di tanti nomi quanti sono i posti da saturare.

2. Conseguenza e contraddizione

Conseguenza

Il rapporto di conseguenza di congura come impossibilità che una certa proposizione sia falsa nel caso che certe altre siano vere.
Per dimostrare una conseguenza abbiamo bisogno di alcune regole, che trasformano una o più proposizioni in un'altra, mantenendone inalterato il valore di verità.

Modus ponens

$$\frac{P \rightarrow Q \qquad P}{Q}$$

Se è vera una implicazione, ed è vero il suo antecedente è vero il suo conseguente.

Introduzione della congiunzione

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q}$$

Se sono veri due predicati qualsiasi è vera la sua congiunzione logica

introduciamo un esempio:
2a) Se eva parlerà col serpente, mangerà la mela
2b) Se Eva mangerà la mela, anche Adamo la mangerà
2c) Se Eva ed Adamo mangeranno la mela Dio si arrabbierà.
2d) Se Dio si arrabbierà, caccerà Adamo ed Eva.
2e) Eva parlerà con serpente
SEGUE CHE
2f) Dio Caccerà Adamo ed Eva

Proviamo a dimostrare che si tratta di una conseguenza logica esatta.
usiamo la regola del *modus ponens* tra 2a e 2e ottenendo
2a') Eva mangerà la mela
Usiamo la stessa regola tra 2a' e 2b ottenendo
2b') Adamo mangerà la mela
Usiamo la regola della *introduzione della congiunzione* tra 2a' e 2b' otteniamo:
2c') Eva mangerà la mela e Adamo mangerà la mela.
che possiamo trasformare tranquillamente in
2c'') Eva ed Adamo mangeranno la mela.
Applichiamo il *modus ponens a* 2c e 2c'' ottenendo
2d') Dio si arrabbierà.
Applichiamo il *modu ponens* a 2d' e 2d ottenendo 2f.

Contraddizione

Un insieme di proposizioni è contraddittorio se e solo se i suoi elementi non possno essere tutti veri.
Le contraddizioni posso essere divise in tre dicotomie
minimali e non minimali
Un insieme contraddittorio è minimale quando nessun suo sottoinsieme proprio e contraddittorio.
conclamate e non conclamate
Un insieme contraddittorio è conclamato quando contiene almeno una coppia del tipo { P , non P }
entimematiche e non entimematiche
Un insieme contraddittorio è eniematico se la sua contraddittorietà dipende da proposizioni ce non sono nell'insieme.

La logica estensionale

Studia solo i *connettivi estensionali,* ovvero quelli che producono enunciati il cui valore di verità dipende esclusivamente dal valore di verità degli enunciati sul quale agisce.

I connettivi estensionali fondamentali sono 4 e sono: NOT (¬); AND (⋀); *OR (⋁) ; Se..Allora (⇒)*

Si intendono *formule atomiche* le singole lettere, di solito P,Q,R...che rappresentano gli enunciati, mentre invece le formule come ¬P, ¬¬P,¬P⋀Q sono *formule composte.*

Ovviamente esiste una *grammatica* per scrivere le formule, una formula scritta rispettando le regole della grammatica sarà una *formula ben formata (fbf)* le altre non lo saranno. Ad esempio P⋀Q è una *fbf* mentre ¬PQ¬ non lo è. Le regole sono le seguenti.

1. Le variabili atomiche P,Q,R..sono fbf
2. Se a una fbf premettiamo il segno ¬, otteniamo una fbf.
3. Se fra due fbf interpoliamo il segno ⋀ oppure il segno ⋁ *o*ppure il segno ⇒ ottenieamo una fbf
4. Niente altro è una fbf.

La *sottoformula* in una fbf è una fbf in essa contenuta.

Regole di introduzione ed eliminazione

Nella deduzione naturale, quel processo che ci permette di stabilire se una particolare fbf è comunque vera quali che siano i valori di verità attribuiti alle variabili, si utilizzano delle regole di riscrittura, che permettono di *introdurre* ed *eliminare* connettivi.

Introduzione della congiunzione

Se abbiamo asserito due proposizioni H e K l'una indipendente dall'altra possiamo allora asseire (H ⋀ *K)*

$$\frac{H \qquad K}{H \land K}$$

Introduzione della disgiunzione

La disgiunzione che della logia classica è una *disgiunzione inclusiva,* cioè è vera quando è vero uno dei due disgiunti, ma anche quando sono veri entrambi.

E' facile quindi comprendere che il valore di verità della disgiunzione non dipenda da *entrambi* i disgiunti, ma è sufficiente che sia stato asserito as esemio H per asserire H ⋁ K.

$$\frac{H}{K \lor K} \qquad\qquad \frac{K}{K \lor H}$$

Introduzione dell'implicazione

Supponiamo, in una nostra deduzione naturale di aver asserito H ed essere arrivati, tramire un ragionamento formale a concludere K. in questo caso possiamo *scaricare* H chiudendola tra parentesi quadre e introdurre l'implicazione H⇒*K*

$$\begin{array}{c} [H] \\ . \\ . \\ \hline H \Rightarrow K \end{array}$$

un caso particolare dell'introduzione della implicazione e quando il percorso deduttivo è vuoto. Quindi

$$\frac{[H]}{H \Rightarrow K}$$

Introduzione della negazione

Possiamo introdurre il simbolo di negazione quando da un'assunzione arriviamo ad una contraddizione. In questo caso si scrive il simbolo del *falsum* e si scarica l'assunzione introducendo la negazione.

$$\begin{array}{c} [H] \\ . \\ \Delta \\ \hline \neg H \end{array}$$

Eliminazione della congiunzione

Se abbiamo asserito H⋀K possiamo ugualmente concludere sia H sia K separatamente.

Eliminazinoe delle disgiunzione

La sola disgiunzione non ci permette di asserire la verità di uno dei congiunti...ma...se abbiamo aserito la disgiunzione e dedotto che i due disgiunti implicano entrambi uno stesso conseguente, possiamo asserire il conseguente e scaricare i due disgiunti

$$\frac{H \vee K \qquad \begin{matrix}[H] \\ L\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[K] \\ L\end{matrix}}{L}$$

Eliminazione della implicazione (Modus Ponens)

Anche in questo caso non possiamo asserire nulla sulla verità di H e K se non abbiamo qualche premessa aggiuntiva, usiamo come premessa aggiuntiva proprio H. Se è vero che H->K ed è vero anche H allora sarà sicuramente vero anche K

$$\frac{H \Rightarrow K \quad H}{K}$$

Eliminazione della negazione

Possiamo eliminare una negazione nello stesso modo in cui possiamo inserirla, quando partendo da una assunzione arriviamo ad una contraddizione.

$$\frac{\begin{matrix}[\neg H] \\ . \\ \Delta\end{matrix}}{H}$$

Tavole di verità

Un altro metodo per la verificare se una fbf sia o meno una tautologia è l'utilizzo delle tavole di verità.
Un breve riepilogo

P	Q	**P⋀Q**
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

P	Q	**P⋁Q**
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

P	Q	*P⇒Q*
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Le tavole di verità per la congiunzione e per la disgiunzione sono piuttosto famose, mentre quella della implicazione può apparire strana soprattutto nella terza riga, ma non dimentichiamo che l'implicazione non è simmetrica, l'implicazione afferma soltanto che il conseguente non può essere falso se l'antecedente è vero, può quindi essere vero quando il conseguente è falso, ciò è legittimo.

Principali Tautologie

Segue un elenco di alcune tautologie, ovvero di fbf che sono vere in qualsiasi situazione di fatto.

Legge della doppia negazione	P⇔¬¬P
Commutatività della congiunzione	(P⋁ Q)⇔(Q⋁ P)
Associatività della congiunzione	(P⋀(Q⋀R))⇔((P⋀Q)⋀R)
Commutatività della disgiunzione	(P⋁Q)⇔(Q⋁P)
Associatività della disgiunzione	(P⋁(Q⋁R)⇔((P⋁Q)⋁R)
Terzo escluso	P⋁¬P
Distributiva di AND su OR	P⋀(Q⋁R)⇔(P⋀Q)⋁(P⋀R)
Distributività di OR su AND	P⋁(Q⋀R)⇔(P⋁Q)⋀(Q⋁R)
I legge di De Morgan	¬(P⋀Q)⇔(¬P⋁¬Q)
II legge di De Morgan	¬(P⋁Q)⇔(¬P⋀¬Q)
Legge di Crisippo	(P⇒Q)⇔(¬P⋁Q)
Legge di Filone Megarico	(P⇒Q)⇔¬(P⋀¬Q)
Sillogismo ipotetico	(P⇒Q)⇒((Q⇒R)⇒(P⇒R))

Possiamo usare queste tautologie per trasformare le fbf in *Forma normale congiuntiva* (FNC) in qui sono presenti solo congiunzioni di disgiunzioni di letterali.
Le implicazioni possono essere rimpiazzate tramite le leffi di Crisippo e Filone Megarico, le negazioni di formule non atomiche si semplificano con DeMorgan
Quando una fbf viene portata in FNC è più semplice verificarne la tautologicità o la sua contraddittorietà perchè si può usare il *metodo di risoluzione.*
Ogni singola disgiunzione si chiama *clausola.* La regola è solo una..se abbiamo due clausole uguali con l'unica differenza che una variabile appare in una clausola affermata e nell'altra negata possiamo eliminarla e asserire la restante parte delle clausole.
Se iterando questo procedimento si arriva alla *clausola vuota* allora la formula è contraddittoria.
Es. - Le due clausole sono: (H or not P); e (P or K). Da queste due clausole possiamo affermare (H or K)

Il risultato è interessante...ma ha bisogno di essere dimostrato. Bisogna dimostrare la sua *plausibilità* e la sua *completezza.*
Plausibilità:
Se risolvendo M si ottiene una clausola vuota allora M è contraddittorio.
Dim:
Un insieme di clausole non è contraddittorio quando esiste almeno un'interpretazione delle variabili che rende vere tutte le clausole.
Supponiamo per assurdo che esista una configurazione tale che renda vere tutte le clausole di M. La regola di risoluzione mantiene il valore di verità delle clausole..quindi tale configurazione continuerà a rendere vere tutte le clausole anche dopo aver applicato la

regola una volta. Ma così facendo non posso mai arrivare alla clausola vuota, perchè l'unico modo è avere due variabili del tipo P e non P e una tale configurazione non può essere derivata da un'insieme non contraddittorio.Quindi se si arriva alla clausola vuota [ ] l'insieme di partenza è contraddittorio.

Completezza:
Se un insieme di clausole è contraddittorio, risolvendolo otteniamo la clausola vuota.
Dim:
Supponiamo per assurdo di aver raggiunto la fine della risoluzione ottenendo 2 simboli non terminali. Tipo (P or not Q); (R or S).
Per questo tipo di insieme di clausole esiste sempre un'interpretazione che li soddisfa..basta assegnare Vero alle variabili e Falso alle variabili negate.
Ma la soddisfacibilità si mantiene verso l'alto nel processo di risoluzione? si. perchè in un passo della risoluzione le clausole madre saranno nella forma

$$\frac{(H \vee P) \quad \neg P \vee K}{H \vee K}$$

Se né H né K sono vuote non dobbiamo preoccuparci del valore di P. Se H è vuota allora P=VERO, se K è vuota allora P = FALSO
Quindi ad ogni passo della risoluzione abbiamo mantenuto la soddisfacibilità. In un numero finito di passi si giunge alle clausole iniziali che quindi risulterebbero soddisfacibili, contraddicendo l'ipotesi. Quindi se un insieme è contraddittorio DEVE arrivare alla clausola vuota.

Clausole di HORN

Alcune clausole si possono presentare in una forma particolare, si parla di Forma di Horn se tutti i letterali appaiono negati ed al massimo uno solo è affermato.
Qualora tutte le clausole di un'insieme siano nella forma di Horn si può verificare la soddisfacibilità con un metodo molto semplice, si tratta di *guardare* la formula alla ricerca di variabili il cui valore di verità sia obbligatorio per un'eventuale intrepretazione soddisfacibile dell'intera formula.
Quando ancora non abbiamo *marcato* nulla, le unica variabili che possiamo marcare sono quelle che appaiono da sole e affermate..per quelle l'unico valore possibile è VERO. Marchiamo quindi tali variabili e li togliamo dall'insieme.
Ri-ispezioniamo l'insieme alla ricerca di clausole dove appaiano negate le variabili che abbiamo segnato e affermata un'altra variabile. (es: al primo giro abbiamo segnato P al secondo giro cerchiamo una clausola tipo $\neg P \vee Q$ nella quale il valore di Q è necessariamente VERO, quindi possiamo segnarlo e toglierlo dall'insieme.
Reiterando il procedimento arriverò a due possibili configurazioni..se non posso più marcare nulla l'insieme è soddisfacibile ma se trovo una clausola che contiene solo variabili già marcate, e negate (es: supporsto di aver già marcato P,Q,R troviamo la clausola $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$) possiamo affermare che l'insieme è contraddittorio.