# CAPITOLO 4

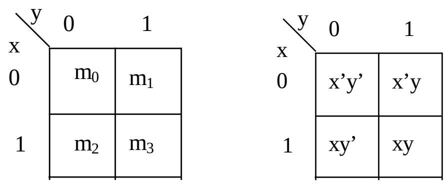
# SEMPLIFICAZIONE DELLE FUNZIONI BOOLEANE

## 4.1 Il metodo delle Mappe

Nel precedente Capitolo 3 abbiamo messo in evidenza che: la complessità della realizzazione di una funzione Booleana per mezzo di porte logiche dipende direttamente dalla complessità dell'espressione della funzione realizzata. Sebbene la tabella della verità rappresenta univocamente la funzione, la sua espressione algebrica può apparire in forme molto diverse. La espressione di una funzione Booleana può essere semplificata, come detto nel capitolo 3 algebricamente. Tuttavia, questa procedura di minimizzazione è non gradita perché essa è priva di regole precise che dicano cosa fare al passo successivo del processo di manipolazione. Il metodo delle mappe ci dota invece di un semplice procedimento di minimizzazione delle funzioni Booleane. Questo metodo può essere considerato sia come forma pittorica delle tabelle di verità, che come una estensione dei diagrammi di Venn che, nella forma in cui sono stati da noi proposti (fino a 4 variabili), prendono il nome di diagrammi di Veitch o di Karnaugh.
Possiamo ora aggiornare la terminologia dicendo che ogni quadratino rappresenta un minterm. Poiché ogni funzione Booleana può essere espressa come somma di minterm segue che la funzione Booleana è riconoscibile graficamente dall'area racchiusa da quei quadrati i cui minterm sono inclusi nella espressione canonica della funzione. Di fatto la mappa rappresenta una diagramma visivo di tutti i possibili modi in cui una funzione può essere espressa in una delle due forme standard: somma di prodotti (non necessariamente minterm) o prodotto di somme (non necessariamente maxterm). Riconoscendo le varie combinazione di quadratini l'utente può derivare espressioni algebriche alternative per la stessa funzione da cui trarre la più semplice.
Noi, come abbiamo già anticipato, considereremo la più semplice espressione algebrica, sia in forma di somma di prodotti che in prodotti di somme, come quella che contiene il minor numero di letterali. Notare che questa espressione potrebbe essere non unica.

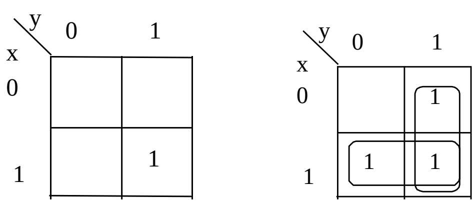
## 4.2 Mappe a due e tre variabili

La mappa a due variabili è mostrata in Fig. 4.1. Per due variabili ci sono quattro minterm, quindi la mappa consiste di 4 quadratini, uno per ogni minterm. La mappa è ridisegnata nella parte (b) per evidenziare le relazioni tra le variabili (si ricorda che nello scrivere un minterm le variabili che hanno il valore 0 compaiono complementate e le altre normali).



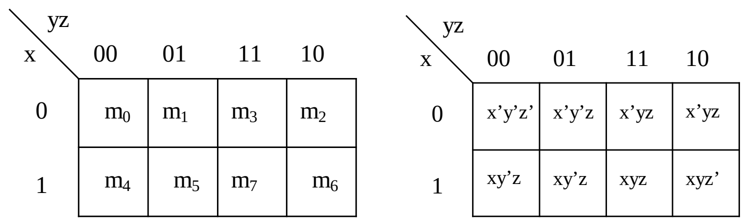
a Fig.4.1 b

Nella Fig. 4.2a abbiamo rappresentato la funzione xy che è formata dal solo minterm $m_3$ ponendo un 1 dentro quel quadrato, al posto dell'indicazione del minterm. Allo stesso modo abbiamo operato per rappresentare la funzione x + y nella parte (b) della stessa figura 4.2. In questa sono stati posti ad 1 i tre quadratini corrispondenti ai minterm $m_1$, $m_2$, ed $m_3$ che prendono il valore 1 per la funzione x + y.



a Fig. 4.2 b

La mappa a tre variabili è mostrata in Fig. 4.3. Per 3 variabili ci sono otto minterm, quindi la mappa consiste di 8 quadratini, uno per ogni minterm. La mappa è ridisegnata nella parte (b) per evidenziare le relazioni tra le variabili con la convenzione già richiamata.



a Fig. 4.3 b

Si ricordi che, per queste mappe, usiamo il codice riflesso (Gray) di modo che due quadratini che hanno un lato in comune (e già definiti *adiacenti*) corrispondano a due minterm che differiscono soltanto per la complementazione di una variabile. Si ricordi inoltre che la mappa si deve considerare avvolta su un cilindro con asse verticale in modo che i quadratini $m_0$, $m_4$ e $m_2$, $m_6$ risultano avere un lato in comune (differendo i relativi minterm per la complementazione di una sola variabile essi debbono essere adiacenti).

Per i postulati dell'algebra Booleana segue che *la somma di due minterm in quadratini adiacenti, in una mappa di tre variabili, può essere semplificata in un solo termine prodotto consistente di due solo letterali*. Per chiarire ciò consideriamo la somma di due quadrati adiacenti $m_5$, $m_7$ .

$$m_5 + m_7 = xy'z + xyz = xz(y' + y) = xz$$

In questo caso i quadratini differivano per la variabile y, che è stata rimossa dopo che è stata eseguita la somma. Così avviene per qualsiasi coppia di minterm in quadratini adiacenti: *la* *loro somma (OR) causerà la rimozione della variabile diversa*. I seguenti esempi spiegano la procedura da usare per minimizzare una funzione Booleana con una mappa.

**Es. 4.1**: *Semplificare la funzione Booleana*

$$F = x'yz + x'yz' + xy'z' + xy'z$$

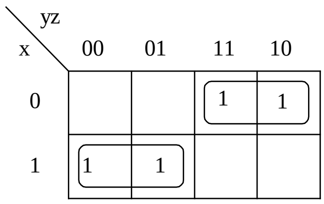


Fig. 4.4

Per prima cosa marchiamo con un 1 i quadratini di Fig. 4.4 che rappresentano la nostra funzione. La funzione è rappresentata da un'area contenente 4 quadratini marcati con un 1. Il prossimo passo è di suddividere la area trovata raggruppando quadratini adiacenti, questi sono indicati nella mappa con due rettangoli, ciascuno racchiudente due 1. Il rettangolo superiore rappresenta l'area racchiusa da x'y; quello a sinistra in basso l'area racchiusa da xy'. La somma di questi due termini fornisce la risposta: $F = x'y + xy' = x \oplus y$.

**Es. 4.2**: *Semplificare la funzione Booleana*

$$F = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$$

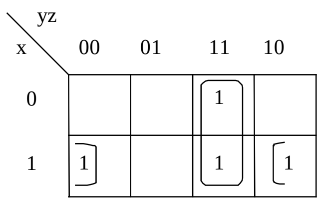


Fig. 4.5

La mappa di questa funzione è rappresentata in Fig. 4.5. Ci sono 4 quadratini marcati con un 1, uno per ogni minterm della funzione. I due quadrati adiacenti sono combinati nella terza colonna per dare il termine a due letterali yz. I rimanenti quadratini sono pure adiacenti (mappa adagiata su cilindro con asse verticale) e danno il termine a due letterali xz'. La funzione semplificata diventa: $F = yz + xz'$.

Consideriamo ora una qualsiasi combinazione di 4 quadrati adiacenti nella mappa di 3 variabili. Ciascuna di tali combinazioni rappresenta l'OR di quattro minterm adiacenti e viene espresso con un solo letterale. Consideriamo l'esempio della somma dei 4 minterm adiacenti $m_0$, $m_2$ $m_4$, $m_6$ che si riduce al solo letterale $z'$ come, di seguito, è mostrato algebricamente:

$$x'y'z' + x'yz' + xy'z' + xyz' = x'z' (y' + y) + xz' (y + y') = x'z' + x z' = z'(x' +x) = z'$$

**Es. 4.3**: *Semplificare la funzione Booleana*

$$F = A'C + A'B + AB'C + BC$$

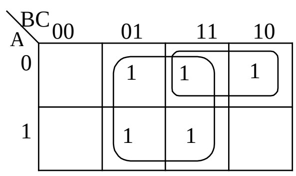


Fig. 4.6

La mappa per semplificare la funzione è rappresentata in Fig. 4.6. Notare che alcuni termini che hanno meno letterali sono rappresentati nella mappa da più di un quadratino. Notare inoltre che quando si tenta di marcare con un 1 un quadratino può accadere che questo risulti già marcato a causa di un termine considerato precedentemente. In questo esempio, il secondo termine A'B ha un 1 nei quadrati 011 e 010, ma il quadratino 011 è comune al primo termine A'C e quindi viene marcato soltanto una volta. La funzione di questo esempio è semplificata raggruppando i quattro quadratini al centro che fornisce il

letterale C. Il rimanente quadratino marcato con 1 si combina con quello adiacente (anche se è già stato usato), per dare il termine con due letterali A'B. Questo è non solo ammesso ma anzi voluto poiché ci fornisce un termine con un letterale in meno.
La funzione semplificata è F = C + A'B

**Es. 4.4**: *Semplificare la funzione Booleana*

$$F(x,y,z) = m_0 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6$$

In questo caso sono stati dati i minterm indiciati con numeri decimali. La mappa per semplificare la funzione è rappresentata in Fig. 4.7. Dalla mappa si ottiene la funzione semplificata:

F= z'+ xy'

| x \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | | 1 |

Fig. 4.7

## 4.3 Mappe a quattro variabili

La mappa a quattro variabili è mostrata in Fig. 4.8. Nella parte (a) sono mostrati i 16 minterm e la loro assegnazione. Nella parte b viene mostrata la relazione tra i quadratini e le 4 variabili. Come al solito le righe e le colonne sono targate con il codice Gray in modo che i quadratini con un lato in comune risultano contenere minterm che differiscono per il complemento di una sola variabile.

| wx \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ |
| 01 | $m_4$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_6$ |
| 11 | $m_{12}$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | $m_{14}$ |
| 10 | $m_8$ | $m_9$ | $m_{11}$ | $m_{10}$ |

a

| wx \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | w’x’y’z | w’x’y’z | w’x’yz | w’x’yz’ |
| 01 | w’xy’z’ | w’xy’z | w’xyz | w’xyz’ |
| 11 | wxy’z’ | wxy’z | wxyz | wxyz’ |
| 10 | wx’y’z’ | wx’y’z | wx’yz | wx’yz’ |

b

Fig. 4.8

Si ricorda che la ricerca dei quadratini adiacenti va fatta pensando che la mappa sia adagiata sia su un cilindro con asse verticale (ciò rende adiacenti i minterm $m_0$, $m_4$, $m_{12}$, $m_8$ rispettivamente ai minterm $m_2$, $m_6$, $m_{14}$, $m_{10}$), sia su un cilindro con asse orizzontale (ciò rende adiacenti i minterm $m_0$, $m_1$, $m_3$, $m_2$ rispettivamente ai minterm $m_8$, $m_9$, $m_{11}$, $m_{10}$).
Il metodo di minimizzazione di una funzione a 4 variabili è simile a quello usato per minimizzare le funzioni a 3 variabili. La combinazione dei quadrati adiacenti utili al processo di semplificazione sono facilmente individuabili per ispezione della mappa a 4 variabili ricordando che:

Un quadratino rappresenta un minterm con 4 letterali.
Due quadratini adiacenti rappresenta un minterm con 3 letterali.
Quattro quadratini adiacenti rappresenta un minterm con 2 letterali.
Otto quadratini adiacenti rappresenta un minterm con 1 letterale.
Sedici quadratini adiacenti rappresenta la funzione uguale ad 1.

Nessun altra combinazioni di quadratini può semplificare la funzione. I seguenti esempi mostrano la procedura usata per semplificare le funzioni Booleane con 4 variabili.

**Es. 4.5** *Semplificare la funzione Booleana*

$$F(w,x,y,z) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{12} + m_{13} + m_{14}$$

Nella mappa di Fig. 4.9 sono stati marcati con un 1 i quadratini i cui minterm appaiono nella lista che definisce la funzione. Gli 8 quadratini adiacenti marcati con uno danno un termine con il solo letterale *y'*. I 3 quadratini restanti dell'ultima colonna non possono essere combinati per dare un termine semplificato. Possono essere combinati soltanto prendendo 2 o 4 quadratini. Poiché più grande è il numero di quadratini combinati minore è il numero di letterali, conviene combinare due quadratini adiacenti della quarta colonna con i loro adiacenti in prima colonna. La coppia nei righi 1 e 2 e dette colonne danno il termine *w'z'*, mentre la coppia nei righi 2 e 3 e stesse colonne danno il termine xz'. Notare che non solo è permesso ma utile considerare lo stesso quadratino o gruppo di quadratini più di una volta. La funzione semplificata è :

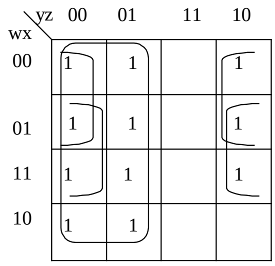



Fig. 4.9

$$F = y' + w'z' + xz'.$$

**Es. 4.6** *Semplificare la funzione Booleana*

$$F= A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$$

Nella mappa di Fig. 4.10 sono stati marcati con un 1 i quadratini i cui minterm risultano inclusi nella nostra funzione. Notare che ciascun termine con 3 letterali è rappresentato nella mappa con 2 quadratini. La funzione si semplifica prendendo i quattro quadratini agli angoli che producono il termine B'D'. I quattro quadratini, di righi 1 e 4 e colonne 1 e 2, si combinano per dare il termine B'C'. I due 1, in colonna 4, righi 1 e 2, si combinano per dare il termine A'CD'. La funzione semplificata è quindi:

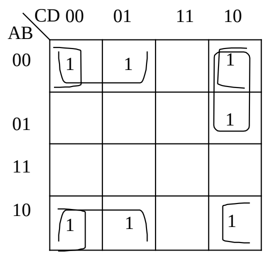



Fig. 4.10

$$F = B'D' + B'C' + A'CD'.$$

## 4.4 Semplificazione in prodotto di somme

Il processo di semplificazione di funzioni Booleane (utilizzando le mappe come spiegato nei precedenti paragrafi), fornisce il risultato espresso come somma di prodotti. Con piccole modifiche al metodo già esposto possiamo ottenere la semplificazione in prodotto di somme.
Il procedimento segue dalle proprietà stesse delle funzioni Booleane. Gli 1 nelle mappe rappresentano i minterm della funzione. I minterm non inclusi nella funzione appartengono al complemento della funzione. Da ciò è evidente che il complemento di una funzione è rappresentato nella mappa dai quadratini non marcati con un 1. Se noi marchiamo i quadratini con uno 0 e combiniamo i quadratini adiacenti otterremo una espressione semplificata del complemento della funzione. Usando il teorema di De Morgan, generalizzato a più variabili, possiamo ottenere la funzione come prodotto di somme. Un esempio chiarirà meglio il concetto.

**Es. 4.7** *Semplificare la seguente funzione Booleana in (a) somma di prodotti, (b) prodotti di somme*: $F(A, B, C, D)= m_0 + m_1 + m_2 + m_5 + m_8 + m_9 + m_{10}$

Gli 1 marcati in Fig. 4.11 rappresentano tutti i minterm della funzione. I quadrati marcati con 0 rappresentano tutti i minterm non inclusi nella F e quindi inclusi in F'.

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Fig. 4.11

Combinando i quadratini con gli 1 troviamo la funzione semplificata come:

$$F = B'C' + B'D' + A'C'D$$

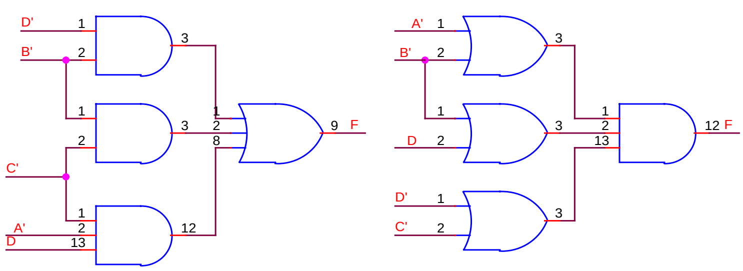
Se combiniamo i quadratini marcati con 0 troviamo la semplificazione del complemento della funzione:

$$F' = CD + AB + BD'$$

Complementando F' ed applicando il teorema di De Morgan otteniamo:

$$F = (CD + AB + BD')'= (C' + D') (A' + B') (B' + D)$$

La realizzazione con porte logiche, delle espressioni semplificate nell'esempio 4.7, è rappresentato nella Fig. 4.12. L'espressione per la somma di prodotti è presentata nella parte (a) con un gruppo di porte AND, uno per ogni termine. Le uscite delle AND sono connesse ciascuna ad uno dei 3 ingressi di una porta OR. La stessa funzione, realizzata con il prodotto di somme, è rappresentata nella parte (b) ed è realizzata con 3 porte OR, una per ciascun termine




F=B'D'+B'C'+A'C'D F=(A'+B')(B'+D)(D'+C')

Fig. 4.12

somma. Le uscite delle porte OR sono connesse ciascuna ad uno dei tre ingressi di una porta logica AND. In entrambi i casi si suppone che siano disponibili sia le variabili che i rispettivi complementi; in tal modo non è necessario l'uso di inverter.

La configurazione di Fig. 4.12 rappresenta come, in generale, una qualsiasi funzione Booleana può essere realizzata, quando è espressa in una delle due forme standard. Più porte AND sono connesse ad una singola porta OR per realizzare la somma di prodotti, oppure più porte OR sono connesse ad una singola porta AND per realizzare il prodotto di somme. Entrambe le configurazioni danno luogo a due livelli di porte. Così *la realizzazione di una qualsiasi funzione Booleana espressa in forma standard si dice essere una realizzazione a **due livelli***.

L'esempio 4.7 ha dimostrato come ottenere la semplificazione in prodotto di somme, a partire da una funzione espressa in forma canonica come somme di minterm. Questo procedimento resta valido anche quando l'espressione originaria della funzione è nella forma canonica di prodotto di maxterm. Consideriamo per esempio la Tab. 4.1 che è una tabella di verità che definisce la funzione F.

| x | y | z | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Tab. 4.1

Come somma di minterm questa funzione è espressa da:

$$F(x, y, z) = m_1 + m_3 + m_4 + m_6$$

Come prodotto di maxterm è espressa da:

$$F(x, y, z) = M_0\, M_2\, M_5\, M_7$$

In altre parole gli 1 della funzione rappresentano i minterm, mentre gli 0 rappresentano i maxterm.

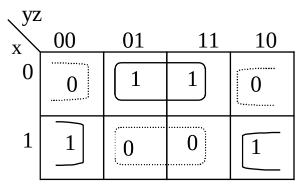



Fig. 4.13

La mappa di questa funzione è rappresentata in Fig. 4.13. Uno può partire a semplificare la funzione prima marcando i quadratini i cui minterm sono 1 per la funzione; i rimanenti quadratini saranno 0. Se, d'altra parte, è dato inizialmente il prodotto di maxterm, uno può partire marcando i quadratini con gli zeri della funzione; i rimanenti quadratini saranno marcati 1. Una volta che sono stati marcati gli 1 e gli 0 la funzione può essere semplificata in entrambe le forme standard.

Per la somma di prodotti, combiniamo gli 1 ottenendo:

$$F = x'z + xz' = x \oplus z$$

Per il prodotto di somme, combiniamo gli 0 otteniamo la semplificazione della funzione complementata:

$$F' = xz + x'z' = x \odot z$$

Questo mostra che la funzione Exclusive-or è il complemento della funzione equivalenza. Prendendo il complemento di F', otteniamo la funzione semplificata in prodotto di somme:

$$F = (x' + z')(x + z)$$

Per entrare nella mappa una funzione espressa in prodotti di somme, prendere il complemento della funzione e da esso trovare i quadratini marcati con 0. Per es. la funzione:

$$F = (A' + B' + C)(B + D)$$

può essere entrata nella mappa facendo prima il complemento

$$F' = ABC' + B'D'$$

e marcando gli 0 nei quadrati che rappresentano i minterm di F'. I rimanenti quadrati saranno marcati con 1.

## 4.5 Condizioni don't-care

Gli 1 e 0 in una mappa corrispondono alle combinazioni di variabili che rendono la funzione uguale ad 1 e 0 rispettivamente. Le combinazioni sono usualmente ottenute dalla tabella di verità che lista le condizioni per cui la funzione è 1. Si assume che la funzione sia uguale a 0 in tutte le altre combinazioni. Questa ipotesi è non sempre vera poiché esistono dei casi in cui certe combinazioni di variabili di ingresso non si verificano mai. Un codice decimale a 4 bit, per es., ha sei combinazioni che non vengono usate. Qualsiasi circuito digitale che usa questo codice lavora sotto l'ipotesi che queste combinazioni non usate non si verifichino mai (fino a che il sistema lavora correttamente). Da ciò ne risulta che noi non siamo interessati al valore che la funzione assume per queste combinazioni perché è garantito che queste non si verificano. Queste condizione di don't-care possono essere usate nella mappa per semplificare ulteriormente la funzione.

Dovrebbe essere, a questo punto, chiaro che una combinazione don't-care non può essere marcata nella mappa con un 1 perché ciò richiederebbe che la funzione, per questa combinazione, assumi sempre il valore 1. Allo stesso modo, ponendo uno 0 nel quadratino si richiede che la funzione assuma il valore 0. Per distinguere le condizioni di don't-care dall' 1 e dallo 0, si usa il simbolo X.

Quando, per la semplificazione della funzione, si scelgono i quadratini adiacenti nella mappa che la rappresenta, l'X può essere pensato essere sia 1 che 0, a seconda di quale scelta conduce alla espressione più semplice. Inoltre non è necessario usare le X che non contribuiscono alla copertura di una area più grande. In ogni caso la scelta dipende soltanto dalle semplificazioni che si possono ottenere.

**Es. 4.8** Semplificare la funzione Booleana

$$F(w, x, y, z) = m_1 + m_3 + m_7 + m_{11} + m_{15}$$

con le condizioni di don't-care

$$d(w, x, y, z) = m_0 + m_2 + m_5$$

I minterm di F sono le combinazioni delle variabili che rendono la funzione uguale a 1. I minterm di *d* sono le combinazioni don't-care che non si verificano mai. La minimizzazione è mostrata in Fig. 4.14. I minterm di F sono marcati con 1 quelli di *d* con X e i restanti quadratini con 0. In (a), gli 1 sono stati raggruppati con le X in modo da includere il massimo numero di quadratini adiacenti. Non è necessario includere tutti le X, ma soltanto quelle utili alla semplificazione. Una combinazione che minimizza l'espressione racchiude una X e ne lascia fuori 2. Questo risultato porta alla seguente funzione semplificata:

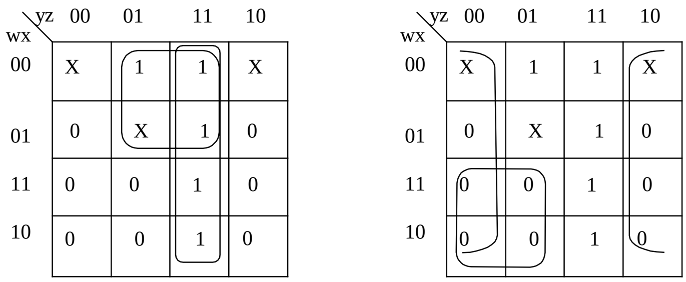
$$F = w'z + yz$$

In (b) sono stati gli 0 ad essere combinati in modo conveniente con le X per la semplificazione della funzione. Il miglior risultato è ottenuto includendo le due X come mostrato in Fig. 4.14(a). Il complemento della funzione

$$F' = z' + wy'$$

che complementata fornisce F in forma di prodotto di somme:

$$F = z(w' + y)$$




(a) F=w’z+yz; da 1 Fig. 4.14 (b) F=z(w’+y); da 0

Le due espressioni ottenute nell'es. 4.8 danno due funzioni che sono algebricamente uguali. Però, quando ci sono di mezzo condizioni di don't-care, non è sempre così. In realtà, se una stessa X è usata come un 1 quando si combina con gli 1 e come 0 quando si combina con gli 0, le due funzioni risultanti non saranno algebricamente uguali. La scelta della condizione di don't-care come 1 nel primo caso e come 0 nel secondo provoca che i minterm che definiscono la funzione sono diversi e quindi il risultato sarà algebricamente diverso. Questo lo possiamo vedere dalla soluzione di minimizzazione della funzione dell'es. 4.8. In entrambi i casi la minimizzazione è stata fatta in modo che le X assumessero lo stesso valore. Se nella Fig. 4.14(a), scegliamo il termine w'x' (che viene dai quattro quadratini del primo rigo) invece di w'z, otterremo ancora una forma semplificata e cioè

$$F = w'x' + yz$$

che non è algebricamente uguale a quella ottenuta in forma di prodotto di somme. Infatti, in questo caso la stessa X è stata usata, nella minimizzazione, una volta con il valore 1 e un'altra volta con il valore 0.

Questo esempio dimostra anche che l’espressione con il minimo numero di letterali non è necessariamente unica.

## 4.6 Il Metodo Tabulare

Il metodo di semplificazione con l'uso delle mappe è conveniente quando il numero delle variabili non supera 4. Quando il numero delle variabili aumenta, il numero eccessivo di quadratini non rende evidente la migliore scelta dei quadratini adiacenti.
Il metodo tabulare supera questa difficoltà. Questo è un procedimento passo passo che garantisce il raggiungimento di una espressione semplificata in forma standard. Può essere applicato a problemi con molte variabili ed ha il vantaggio di poter essere automatizzato con un programma di calcolatore. Tuttavia per le persone risulta tedioso e quindi la probabilità di commettere errori elevata. Il metodo tabulare è stato per prima formulato da Quine e più tardi è stato migliorato da McCluskey. Per cui è anche conosciuto come metodo Quine-McCluskey.
Il metodo di semplificazione tabulare consta di due parti. La prima consiste nella ricerca, in modo sistematico, di tutti i termini che sono candidati ad essere inclusi nella funzione semplificata. Questi termini sono chiamati *primi implicanti*. La seconda parte consiste nella scelta di alcuni dei primi implicanti in modo da ottenere una espressione con il minimo numero di letterali.

## 4.6. Determinazione dei primi implicanti

Il punto di partenza del metodo tabulare e di ottenere la lista dei minterm che determinano la funzione. La prima operazione è quella di trovare i primi implicanti usando un processo per cui ogni minterm viene paragonato con tutti gli altri. Se due minterm differiscono per una sola variabile (il che corrisponde nel metodo della mappa all'adiacenza dei due quadratini) quella variabile è rimossa e così viene trovato un termine con un letterale in meno. Questo processo è ripetuto per ogni minterm finché la ricerca non è completamente terminata. Il ciclo di processo di paragone è ripetuto per i nuovi termini così ottenuti. Si continua ancora con un terzo ciclo ed altri ancora finché, avendo completato un passo, non si è riusciti ad eliminare letterali. Tutti i termini per cui non è stato possibile fare un paragone con eliminazione di variabili costituiscono la lista dei primi implicanti. Questo metodo è meglio illustrato da un esempio.

**Es. 4.9** *Semplificare la seguente funzione Booleana con il metodo tabulare*:

$$F(w, x, y, z) = m_0 + m_1 + m_2 + m_8 + m_{10} + m_{11} + m_{14} + m_{15}$$

*Passo 1*: Raggruppare i minterm a seconda del numero di 1 presenti nella sua rappresentazione binaria. Questo è mostrato nella Tab. 4.2 colonna (a). Sono individuati 5 gruppi, uno separato dall'altro da una linea orizzontale: nel primo gruppo sono raggruppati tutti i minterm il cui codice binario non contiene alcun 1, nel secondo quelli che hanno un solo 1, nel terzo quelli che ne hanno due 1 e così via. Accanto a questi numeri è stato scritto l'equivalente decimale

Per avere una tabella completa, indipendente dalla funzione e quindi trovare, per ricerca, in quale gruppo un certo minterm della funzione va collocato, forniamo una regola di costruzione dei raggruppamenti (supponiamo che il numero di variabili sia 4, la regola è facilmente estendibile ad un numero di variabili qualsiasi).

| Gruppo con Num. di 1 | Proveniete da | Valore Decimale | Configu-razione | Regola |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0+0 | 0 | 0000 | Scrivere tutti 0 |
| 1 | 0+1 | 1 | 0001 | Disporre un solo uno in tutte le posizioni disponibili dalla meno alla più significativa |
| | 0+2 | 2 | 0010 | |
| | 0+4 | 4 | 0100 | |
| | 0+8 | 8 | 1000 | |
| 2 | 1+2 | 3 | 0011 | Partendo da ogni entrata del gruppo 1 aggiungere un 1 in posizione più significativa di quella occupata dall'unico uno presente, fino ad esaurimento delle posizioni disponibili |
| | 1+4 | 5 | 0101 | |
| | 1+8 | 9 | 1001 | |
| | 2+4 | 6 | 0110 | |
| | 2+8 | 10 | 1010 | |
| | 4+8 | 12 | 1100 | |
| 3 | 3+4 | 7 | 0111 | Per ogni entrata del gruppo precedente determinare la posizione più significativa in cui si trova un 1. Aggiungere un 1 in posizione più significativa a quella trovata fino ad esaurimento delle posizioni |
| | 3+8 | 11 | 1011 | |
| | 5+8 | 13 | 1101 | |
| | 6+8 | 14 | 1110 | |
| 4 | 7+8 | 15 | 1111 | Procedere come per il gruppo 3. |

Tab.4.1a

*Passo 2:* Ogni coppia di minterm, che differisce uno dall'altro per una sola variabile, viene combinata, e la variabile diversa viene rimossa. Due minterm appartengono a questa categoria se hanno lo stesso valore di bit in tutte le posizioni ad eccezione di una. I minterm di un gruppo sono paragonati soltanto con i minterm del gruppo successivo, in quanto quelli appartenenti a tutti gli altri gruppi differiranno in più di una posizione. I minterm del primo gruppo vengono paragonati con tutti i minterm del secondo. Se qualsiasi coppia di numeri sono uguali ad eccezione di una sola posizione, un segno di spunta è posto a destra di entrambi i termini per segnalare che essi sono stati usati. Il termine risultante insieme con il suo equivalente decimale, viene listato in colonna (b) della tabella. Ci si ricorda della variabile eliminata inserendo un trattino nella posizione. In questo caso, $m_0$ (0000) si combina con $m_1$ (0001) e forma (000-). Questa combinazione è equivalente alla operazione algebrica:

$$m_0 + m_1 = w'x'y'z' + w'x'y'z = w'x'y'(z + z') = w'x'y'$$

Il minterm $m_0$ si combina anche con $m_2$ per formare (00-0) e con $m_8$ per formare (-000). Il risultato di questi confronti è listato nel primo gruppo di colonna (b). Tutte gli altri gruppi di (a) sono paragonati allo stesso modo ed i risultati scritti nei 4 gruppi di colonna (b).

(a)

| | w | x | y | z | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | * |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | * |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | * |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | * |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | * |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | * |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | * |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | * |

(b)

| | w | x | y | z | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0 | 0 | 0 | - | |
| 0,2 | 0 | 0 | - | 0 | * |
| 0,8 | - | 0 | 0 | 0 | * |
| 2,10 | - | 0 | 1 | 0 | * |
| 8,10 | 1 | 0 | - | 0 | * |
| 10,11 | 1 | 0 | 1 | - | * |
| 10,14 | 1 | - | 1 | 0 | * |
| 11,15 | 1 | - | 1 | 1 | * |
| 14,15 | 1 | 1 | 1 | - | * |

(c)

| | w | x | y | z |
|---|---|---|---|---|
| 0,2,8,10 | - | 0 | - | 0 |
| 0,2,8,10 | - | 0 | - | 0 |
| 10,11,14,15 | 1 | - | 1 | - |
| 10,11,14,15 | 1 | - | 1 | - |

Tab. 4.2 Determinazione dei primi implicanti dell'es. 4.9

*Passo 3*: I termini della colonna (b) contengono solo tre variabili. Un 1 sotto una variabile significa che è non complementata. Uno 0 significa che è complementata, ed un trattino significa che la variabile non è inclusa nel termine. Il processo di ricerca e confronto viene ripetuto per i termini in colonna (b) per formare i termini con due variabili di colonna (c). I termini di ciascun gruppo debbono essere paragonati solo con i termini del gruppo successivo che hanno il trattino nella stessa posizione. Notare che il termine (000-) non si combina con nessun altro termine. Quindi non ha nessun segno di spunta alla sua destra. Gli equivalenti decimali vengono scritti sul lato sinistro di ciascun termine allo scopo di identificazione. Il processo di confronto dovrebbe continuare anche per la colonna (c) e successive colonne fino a che non è possibile fare alcuna combinazione. In questo esempio, l'operazione si ferma al terzo confronto.

*Passo 4*: I termini che non hanno segno di spunta nella tabella formano i primi implicanti. In questo esempio abbiamo il termine w'x'y' (000-) in colonna (b), ed i termini x'z' (-0-0) ed wy (1-1-) in colonna(c). Notare che ciascun termine in colonna (c) appare due volte nella tabella ma non è necessario usarlo più di una volta. La somma dei primi implicanti rappresenta l'espressione semplificata per la funzione. Questo è perché ciascun termine con un segno di spunta è incluso in un termine più semplice nella successiva colonna. Quindi i termini senza spunta (primi implicanti) sono i termini rimasti e da utilizzare per la formulazione della funzione. Per il presente esempio la somma dei primi implicanti è la funzione minimizzata in forma di somma di prodotti.:

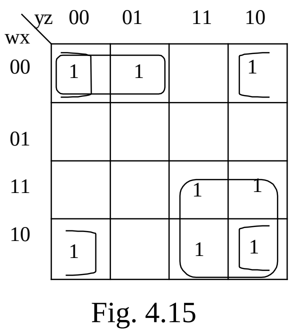



Fig. 4.15

$$F = w'x'y' + x'z' + wy.$$

È istruttivo paragonare questa soluzione con quella ricavabile con il metodo della mappa. La Fig. 4.15 mostra la semplificazione con la mappa di questa funzione. La combinazione dei quadratini adiacenti corrispondono ai tre primi implicanti della funzione, così che la somma dei tre termini è l'espressione semplificata in somma di prodotti.
È importante evidenziare che nell'es. 4.9 la funzione è stata opportunamente scelta in modo da dare l'espressione semplificata con la somma dei primi implicanti. In tutti gli altri casi, la somma dei primi implicanti non necessariamente forma l'espressione con il minimo numero di termini come si verificherà con l'es. 4.10.
La tediosa operazione, che una persona deve eseguire quando usa il metodo tabulare, si semplifica se si paragonano i numeri decimali anziché quelli binari. Il metodo, che ora mostreremo, usa l'operazione di sottrazione di numeri decimali anziché il confronto bit a bit dei numeri binari. Notiamo che ciascun 1 in un numero binario rappresenta un coefficiente che deve essere moltiplicato per una potenza di 2. Quando due minterm sono identici in tutte le posizioni ad eccezione di una, il minterm con l'uno in più deve essere più grande, del numero corrispondente, all'altro minterm di una potenza di 2. Quindi, *due minterm possono essere combinati se il numero del primo differisce per una potenza di due da un secondo numero più grande che si trova nel gruppo successivo*. Illustreremo ciò ripetendo l'es. 4.9.
Come mostrato in Tab. 4.3, colonna (a), i minterm sono disposti, come prima, a gruppi, ora però, sono listati soltanto gli equivalenti decimali. Il processo di confronto dei minterm è fatto confrontando tutte le coppie di numeri decimali in gruppi adiacenti. Se il numero del gruppo più in basso (con un numero maggiore di 1) è *maggiore* del numero del gruppo più in alto (con un numero minore di 1) di una potenza di 2 (cioè 1, 2, 4, 8, 16 etc.), fare un segno di spunta su entrambi i numeri, per ricordarsi che sono già stati usati, e scriverli in colonna (b). La coppia di numeri trasferiti in colonna (b) includono un terzo numero, in parentesi, che identifica la potenza di due per cui la coppia di numeri differiscono. I numeri in parentesi ci indicano la posizione del trattino nella notazione binaria. Il risultato di tutti i confronti in colonna (a) è riportato in colonna (b). Il confronto tra gruppi adiacenti in colonna (b) è fatto in modo simile eccetto che vengono paragonati solo quei termini che hanno lo stesso numero in parentesi. Perché la coppia di numeri in un gruppo possa essere combinata deve essere inferiore, di una potenza di due, dalla coppia di numeri nel gruppo successivo.

(a)

| | |
|---|---|
| 0 | * |
| 1 | * |
| 2 | * |
| 8 | * |
| 10 | * |
| 11 | * |
| 14 | * |
| 15 | * |

(b)

| | | |
|---|---|---|
| 0,1 | (1) | |
| 0,2 | (2) | * |
| 0,8 | (8) | * |
| 2,10 | (8) | * |
| 8,10 | (2) | * |
| 10,11 | (1) | * |
| 10,14 | (4) | * |
| 11,15 | (4) | * |
| 14,15 | (1) | * |

(c)

| | |
|---|---|
| 0,2,8,10 | (2,8) |
| 0,2,8,10 | (2,8) |
| 10.11,14,15 | (1,4) |
| 10.11,14,15 | (1,4) |

Tab. 4.3 Determinazione dei primi implicanti Es. 4.9 con i numeri decimali

In colonna (c), scriviamo tutte e quattro i numeri decimali con due numeri in parentesi che individuano la posizione dei trattini. Il paragonane delle tabelle 4.4 e 4.5 può aiutare alla comprensione della derivazione della tabella 4.5.
I primi implicanti sono quei termini che non posseggono il segno di spunta in tabella. Questi sono identici a quelli di prima ad eccezione che ora sono scritti in decimale anziché in binario. Per convertire la notazione decimale in binaria: convertire in binario il numero decimale maggiore e quindi inserire un trattino nelle posizioni il cui peso è individuato dai numeri in parentesi. In tal modo 0, 1 (1) è convertito in binario come (000-). In modo simile nella quaterna di numeri: 0, 2, 8, 10 (2, 8) il numero maggiore, 10, è convertito in binario come 1010, ed in posizione con peso 2 ed 8 si inserisce un trattino, il risultato è (-0-0).

**Es. 4.10** *Determinare i primi implicanti della funzione*

$$F(w, x, y, z) = m_1 + m_4 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{15}$$

In Tab. 4.4 i minterm della funzioni sono presentati raggruppati in colonna (a). L'equivalente binario dei termini è pure riportato per permettere di controllare il numero di 1 presenti. I numeri binari del primo gruppo hanno un solo 1; del secondo gruppo 2 e così via. I numeri corrispondenti ai minterm sono confrontati con il metodo decimale; una possibilità di combinazione viene ricercata con i numeri del gruppo più in basso che sono più grandi di quelli del gruppo più in alto di una potenza di due. Se il numero del gruppo più in basso è minore di quello del gruppo più in alto, anche se i due numeri differiscono di una potenza di due, non possono essere combinati. La ricerca nella colonna (a) produce i termini in colonna (b) e tutti i termini in colonna (a) risultano spuntati. In colonna (b) ci sono due sole possibilità di combinazione. Ogni uno dei quali fornisce lo stesso termine con due letterali indicato in colonna (c). I primi implicanti consistono in tutti i termini non spuntati. La conversione dalla notazione decimale alla binaria è mostrato nella Tab. 4.5.I primi implicanti trovati sono:

x'y'z, w'xz', w'xy, xyz, wyz, e wx'.

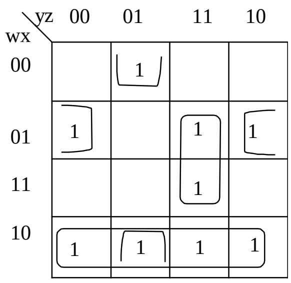


Fig. 4.16

(a)

| | | |
|---|---|---|
| 0001 | 1 | * |
| 0100 | 4 | * |
| 1000 | 8 | * |
| 0110 | 6 | * |
| 1001 | 9 | * |
| 1010 | 10 | * |
| 0111 | 7 | * |
| 1011 | 11 | * |
| 1111 | 15 | * |

(b)

| | | |
|---|---|---|
| 1,9 | (8) | |
| 4,6 | (2) | |
| 8,9 | (1) | * |
| 8,10 | (2) | * |
| 6,7 | (1) | |
| 9,11 | (2) | * |
| 10,11 | (1) | * |
| 7,15 | (8) | |
| 11,15 | (4) | |

(c)

| | |
|---|---|
| 8,9,10,11 | (1,2) |
| 8,9,10,11 | (1,2) |

Tab. 4.4 Determinazione dei primi implicanti Es. 4.10

La somma dei primi implicanti fornisce una espressione algebrica valida per la funzione. Tuttavia non è necessariamente quella con il minimo numero di termini. Questo può essere visto dalla mappa di Fig. 4.16. Da cui risulta che la funzione minimizzata ha l'espressione:

$$F = x'y'z + w'xz' + xyz + wx'$$

che consiste nella somma di alcuni dei primi implicanti, manca il termine wyz.

| Decimale | | Binario | Termine |
|---|---|---|---|
| | | wxyz | |
| 1,9 | (8) | -001 | x'y'z |
| 4,6 | (2) | 01-0 | x'y'z |
| 6,7 | (1) | 011- | w'xz' |
| 7,15 | (8) | -111 | xyz |
| 11,15 | (4) | 1-11 | wyz |
| 8,9,10,11 | (1,2) | 10-- | wx' |

Tab. 4.5 Primi implicanti dell'Es. 4.10

## 4.7 Scelta dei primi implicanti

La scelta dei primi implicanti, che formano la funzione minimizzata, viene fatta ancora a partire da una tabella. In questa tabella, ciascun primo implicante è rappresentato in una riga e ciascun minterm in una colonna. Delle X vengono poste in ciascuna riga per evidenziare i minterm che hanno contribuito alla determinazione dei primi implicanti. Da questa tabella viene scelta un minimo insieme di primi implicanti in modo che tutti i minterm della funzioni restino coperti.

**Es. 4.11** *Minimizzare la funzione dell'Es. 4.10.*
La Tab. 4.6 mostra i primi implicanti trovati dalla soluzione dell'Es. 4.10. Ci sono 6 righe, una per ogni primo implicante e 9 colonne, uno per ogni minterm della funzione. Delle X sono poste all'incrocio di ogni riga-colonna che ha contribuito alla determinazione del primo implicante mostrato nella riga e indicati in seconda colonna. Per es. le due X nella prima riga indicano che i minterm 1 e 9 sono contenuti nel primo implicante x'y'z. Dopo aver piazzato tutte le X si procede a scegliere il minimo numero di implicanti.
La tabella dei primi implicanti viene controllata per colonna e un segno di spunta viene posto in fondo ad essa se c'è una sola X. In questo esempio si sono 4 colonne con una sola X: 1, 4, 8, 10. Il minterm 1 è coperto dal primo implicante x'y'z: cioè la scelta del primo implicante x'y'z garantisce che il minterm 1 resta incluso nella funzione finale. Allo stesso modo, il minterm 4 è coperto da w'xz'; e i minterm 8 e 10 dal primo implicante wx'.
I primi implicanti che coprono minterm con una sola X sono detti *primi implicanti essenziali*. Perché l'espressione finale contenga tutti i minterm non c'è altra alternativa che includere tutti

i primi implicanti essenziali. Un segno di spunta è posto a sinistra di ogni primo implicante essenziale per ricordare che esso è stato già selezionato.

Successivamente, si fa un segno di spunta su ogni colonna il cui minterm è coperto da uno dei primi implicanti essenziali. Per es. la scelta del primo implicante x'y'z copre anche il minterm 9 pertanto si mette un segno di spunta in fondo alla colonna. Allo stesso modo il primo implicante essenziale w'xz' copre anche il minterm 6 e wx' copre anche i minterm 9, 11. Restano non coperti i minterm 7 e 15. Questi due minterm debbono essere coperti con la scelta di uno o più implicanti. In questo esempio è chiaro che il primo implicante xyz copre entrambi i minterm ed è quindi quello da scegliere.

| I° Implic. | Contr.\ minter | 1 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * x'y'z | 1,9 | X | | | | | X | | | |
| * w'xz' | 4,6 | | X | X | | | | | | |
| w'xy | 6,7 | | | X | X | | | | | |
| xyz | 7,15 | | | | X | | | | | X |
| wyz | 11,15 | | | | | | | | X | X |
| * wx' | 8,9,10,11 | | | | | X | X | X | X | |
| | | * | * | √ | | * | √ | * | √ | |

Tab. 4.6 Determinazione degli implicanti essenziali

Abbiamo così trovato il minimo insieme di primi implicanti la cui somma fornisce la funzione richiesta.

$$F = x'y'z + w'xz' + wx' + xyz$$

Le espressioni semplificate che abbiamo derivato nei precedenti esempi sono tutti nella forma di somma di prodotti. Il metodo tabulare può anche essere adattato per fornire espressioni semplificate come prodotto di somme. Come con il metodo della mappa dobbiamo partire con il complemento della funzione (prendendo gli zeri come minterm iniziali). Questa lista contiene i minterm non inclusi nella originale funzione che sono numericamente uguali ai maxterm della funzione. Il processo di tabulazione inizia con i 0 della funzione e termina con una espressione semplificata in somma di prodotti del complemento della funzione. Prendendo poi ancora il complemento, si ottiene l'espressione semplificata della funzione in prodotto di somme.

Una funzione con condizioni di don't care può essere semplificata con il metodo tabulare apportando, a quanto finora detto una leggera modifica. I termini don't care sono inclusi nella lista dei minterm quando vengono determinati i primi implicanti con il minimo numero di letterali. I termini don't care **non** vengono inclusi nella lista dei minterm al momento di determinare i primi implicanti essenziali. Questo perché i termini don't care non debbono essere coperti dai primi implicanti essenziali.

## 4.8 Osservazioni conclusive

In questo capitolo abbiamo spiegato come minimizzare funzioni Booleane con il metodo delle mappe e tabulare. Osserviamo innanzi tutto che la scelta del codice Gray per la identificazione dei quadratini può anche essere sostituito con altri codici riflessi che si possono trovare il letteratura. Fondamentale resta il fatto che quadratini adiacenti debbono corrispondere a minterm che differiscono per il valore diverso di un solo letterale.
In tutti i nostri esempi siamo sempre partiti da funzioni da minimizzare espresse in forma canonica. Ovviamente se questo non è il caso bisogna prima procedere alla trasformazione in forma canonica, nei modi spiegati, e poi applicare il metodo tabulare.
L'espressione che si ricava, con i metodi spiegati, presuppone sempre una realizzazione a due livelli. Metodi di minimizzazione a più livelli sono disponibili. Essi sono basati soprattutto sul metodo delle mappe e potrebbero fornire minimizzazioni più spinte. Ricordare comunque che la realizzazione di funzioni Booleane a più di due livelli comporta sempre un maggior tempo di propagazione e quindi una minore velocità del circuito finale.
In questo capitolo abbiamo sempre considerato la semplificazione di funzioni con molti ingressi ma con una sola uscita. Parecchi circuiti digitali hanno più di una variabile di uscita. Tali circuiti vengono descritti come un insieme di funzioni Booleane, una per ogni variabile di uscita. Un circuito con molte uscite può avere in comune tra le varie funzioni uno o più termini che possono essere utilizzate come termini comuni durante la realizzazione. Ciò permette una semplificazione più spinta che non può essere ottenuta considerando le funzioni separatamente.

# PROBLEMI

P4.1) Ottenere le espressioni semplificate in somma di prodotti delle seguenti funzioni Booleane

a) $F(x,y,z)= m_2+m_3+m_6+m_7$ b) $F(A,B,C,D)= m_7+ m_{13}+ m_{14}+ m_{15}$

c) $F(A,B,C,D)= m_4+ m_6+ m_7+ m_{15}$ d) $F(w,x,y,z)= m_2+m_3+ m_{12}+m_{13}+ m_{14}+m_{15}$

P4.2) Ottenere le espressioni semplificate in somma di prodotti delle seguenti funzioni Booleane

a) xy+x’y’z’+x’yz’ b) A’B+BC’+B’C’

c) a’b’+bc+a’b’c’ d) xy’z +xyz’+ x’yz+xyz

P4.3) Ottenere le espressioni semplificate in somma di prodotti delle seguenti funzioni Booleane

a) D(A’+B) +B’(C+AD) b) ABD+A’C’D’+A’B+A’CD’+AB’D’

c) k’lm’+k’m’n+klm’n’+lmn’ d) A’B’C’D’ + AC’D’+ B’CD’ + A’BCD + BC’D

e) x’z+w’xy’+w(x’y+xy’)

P4.4) Ottenere le espressioni semplificate in somma di prodotti delle seguenti funzioni Booleane

a) $F(A,B,C,D,E)= m_0+ m_1+ m_4+ m_5+m_{16}+ m_{17}+ m_{21}+ m_{25} + m_{29}$

b) BDE+B’C’D+ CDE+ A’B’CE+ A’B’C+ B’C’D’E’

c) A’B’CE’+A’B’C’D’+B’D’E’+B’CD’ +CDE’+BDE’

P4.5) Data la tabella di verità Tab. P4.1:

a) esprimere $F_1$ e $F_2$ in prodotti di maxterm

b) ottenere l’espressione semplificata in somma di prodotti

c) ottenere l’espressione semplificata in prodotti di somme

| x | y | z | $F_1$ | $F_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tab. P41

P4.6) Ottenere le espressioni semplificate in somma di prodotti delle seguenti funzioni Booleane

a) $F(x,y,z)= M_0 M_1 M_4 M_5$ b) $F(A,B,C,D)= M_0 M_1 M_2 M_3 M_4 M_{10} M_{11}$

c) $F(w,x,y,z)= M_1 M_3 M_5 M_7 M_{13} M_{15}$

P4.7) Ottenere le espressioni semplificate in (1) somma di prodotti e (2) prodotti di somme delle seguenti funzioni Booleane

a) x’z’+y’z’+yz’+xyz b) (A+B’+D)(A’+B+D)(C+D)(C’+D’)

c) (A’+B’+D’)(A+B’+C’)(A’+B+D’)(B+C’+D’) d)(A’+B’+D)(A’+D’)(A+B+D’)(A+B’+C+D)

e) w’yz’+vw’z’+vw’x+v’wz+v’w’y’z’

P4.8) Disegnare (usando porte logiche) lo schema logico delle funzioni ottenute dalla soluzione di P4.7.

P4.9) Semplificare le seguenti funzioni Booleane F usando le espressioni di don’t care d

a) F=y’+x’z’ d=yz+xy

b) F= B’C’D’+ BCD’+ ABC’D d=B’CD’+A’BC’D’

P4.10) Semplificare le seguenti funzioni Booleane F usando le espressioni di don’t care d in 1) somma di prodotti e 2) in prodotti di somme

a) F=AB’D’+A’CD+A’BC d=A’BC’D+ACD+AB’D’

b) F= w’(x’y+x’y’+xyz)+x’z’(y+w) d=w’x(y’z+yz’) +wyz

c) F= ACE+ A’CDE’+A’C’DE d= DE’+A’D’E+AD’E’

d) F= B’DE’+A’BE+B’C’E’+A’BC’D’ d=BDE’+CD’E’

P4.11) Date le funzioni Booleane $F_1$ e $F_2$ :

a) mostrare che la funzione Booleana G ottenuta facendo l’operazione AND di $F_1$ e $F_2$ (cioè $G=F_1$ x $F_2$) contiene tutti i minterm che sono comuni sia a $F_1$ sia a $F_2$

b) mostrare che la funzione Booleana H ottenuta facendo l’operazione OR di $F_1$ e $F_2$ (cioè $H=F_1 + F_2$) contiene tutti i minterm sia di $F_1$ sia di $F_2$

d) Spiegare come le mappe di $F_1$ e $F_2$ possono essere usate per trovare G ed H

P4.12) La seguente espressione Booleana: BE+B’DE’ è una versione semplificata della espressione: A’BE+BCDE+BC’D’E+A’B’DE’+B’C’DE’. Ci sono condizioni di don’t care? Se si quali sono?

P4.13) Dare tre possibili modi di esprimere la funzione F=A’B’D’+AB’CD’+A’BD+ABC’D con un numero di letterali pari ad 8 o inferiore

P4.14) Con l'uso delle mappe trovare la più semplice espressione in somma di prodotti della funzione

F=f x g, dove f e g sono date dalle

f= wxy'+y'z+w'yz'+x'yz' g= (w+x+y'+z')(x'+y'+z)(w'+y+z')

Suggerimento: usare la soluzione del problema P4.11

P4.15) Semplificare la seguente Funzione Booleana usando il metodo tabulare:

a) F(A,B,C,D,E,F,G)= $m_{20}+ m_{28}+ m_{52}+ m_{60}$

b) F(A,B,C,D,E,F,G)= $m_{20}+ m_{28}+ m_{38}+ m_{39} +m_{52}+ m_{60}+ m_{102}+ m_{103} +m_{127}$

c) F(A,B,C,D,E,F)= $m_{6}+ m_{9}+ m_{13}+ m_{18} +m_{19}+ m_{25}+ m_{27}+ m_{29}+ m_{41} +m_{45}+ m_{57} +m_{61}$

P4.16) Ripetere il Problema P4.6 usando il metodo tabulare

P4.17) Ripetere il Problema P4.10a e (d) usando il metodo tabulare.

P4.1) Semplificare la seguente Funzione Booleana in somma di prodotti e disegnare lo schema logico utilizzando soltanto porte NAND: F= $m_0+ m_1+ m_3+ m_7+ m_8+ m_{10}+ m_{14}+ m_{15}$

P4.2) Semplificare la seguente Funzione Booleana in prodotti di somme e disegnare lo schema logico utilizzando soltanto porte NAND. F= $m_0+ m_1+ m_3+ m_7+ m_8+ m_{10}+ m_{14}+ m_{15}$

## BIBLIOGRAFIA


1. Veitch, E. W., " A Chart Method for simplifying Truth Functions" Proc. Of the ACM (May 1052), 127-33
2. Karnaugh, M., " A Map Method for synthesis of Combinational Logic Circuits" Trans. AIEE, Comm. And Electronics, Vol. 72, Prt I (November 1953), 593-99
3. Quine, W.V., " The Problem of Simplifying Truth Functions" Am. Math. Monthly, Vol. 59, No 8 (October 1952), 521-31
4. McCluskey, E. J., Jr., "Minimization of Boolean Fuctions" Bell System Tech., Vol 35, No 6 (November 1956), 1417-44
5. Hunphrey, W. S., Jr., "Switching Circuits whit Computer Applications" New York: McGraw-Hill Book Co., 1958, Ch. 4.
6. Hill, F. J., and G. R. Peterson, , "Introduction Switching Theory and Logical Design" New York: Jhon Wiley& Sons, Inc., 1968. Chs. 6 and 7.
7. McCluskey, E. J., Jr., "Introduction to the Theory of Switching Circuits" New York: McGraw-Hill Book Co., 1965, Ch. 4.

NLOGCAP5.DOC