Regole della logica: la deduzione naturale.

La forma degli assiomi e delle regole d'inferenza del calcolo dei predicati non è particolarmente agevole per la tecnica della deduzione formale. Descriveremo adesso un sistema di deduzione per il calcolo dei predicati del primo ordine, in cui non si fa uso degli assiomi logici, tranne le tautologie. Per poter rinunciare agli assiomi di tipo **b.** e **c.**, bisogna tuttavia aumentare il numero delle regole d'inferenza; avremo pertanto una regola di introduzione ed una di eliminazione per entrambi i quantificatori, e sarà possibile introdurre ed eliminare ipotesi in ogni punto di una dimostrazione, così come si fa nei ragionamenti intuitivi.

Un tale sistema di deduzione viene generalmente chiamato *sistema di deduzione naturale*.

Prima di descrivere l'insieme delle nuove regole dobbiamo dare alcune definizioni.

Def.48- Sia F un qualunque sistema del primo ordine. Per *costante individuale apparente* di F intendiamo una qualunque costante individuale non appartenente all'alfabeto di F.

Le costanti individuali apparenti verranno introdotte nel nuovo sistema di regole quando si elimina un quantificatore esistenziale. Si noti che le costanti individuali apparenti non devono appartenere all'alfabeto di F, poiché gli assiomi del sistema possono fare delle ipotesi sulle costanti individuali ed in tal caso le costanti sono nomi di oggetti specifici. Usare costanti individuali non apparenti quando si elimina un quantificatore esistenziale sarebbe analogo al ragionamento secondo cui, una volta dimostrata l'esistenza di numeri irrazionali, si conclude che una particolare costante individuale, ad esempio zero, è irrazionale.

Def.49- Dato un sistema del primo ordine F, sia F' un sistema del primo ordine diverso da F solo perché contiene un certo numero finito non nullo di costanti individuali che non sono in F.
Per *formula ben formata apparente* di F (in breve fbfa) s'intende una fbf di F' che non sia una fbf di F.

Si osservi che una fbfa di F differisce da una fbf di F soltanto per il fatto che contiene almeno una costante individuale apparente.

Diamo ora una definizione precisa del concetto di dimostrazione in un sistema del primo ordine.

Def.50-Per *dimostrazione* in un sistema del primo ordine F s'intende una successione finita B_1, B_2, …, B_k di fbf o fbfa di F, dove ogni riga della dimostrazione è accompagnata da una giustificazione.

Per riga di una dimostrazione intendiamo una coppia ordinata $<n, B_n>$, dove B_n è l'elemento n-esimo della successione.

Ogni riga $<n, B_n>$ di una dimostrazione di F deve soddisfare una ed una sola delle seguenti condizioni:

1) B_n è un assioma specifico di F e la giustificazione della riga n-esima consiste nell'indicare di quale assioma si tratti;

2) B_n è una tautologia e, nel caso sia una fbfa, le sue costanti individuali apparenti occorrono tutte in una riga precedente della dimostrazione; la giustificazione della n-esima riga è che B_n è una tautologia (si scrive in breve Taut);

3) B_n è una fbf o una fbfa le cui costanti individuali apparenti occorrono in qualche riga precedente della dimostrazione, la giustificazione della n-esima riga è che $<n, B_n>$ è un'ipotesi (si scrive in breve I);

4) B_n è una conseguenza immediata di formule appartenenti a righe precedenti della dimostrazione tramite una delle regole d'inferenza, e la giustificazione della riga n-esima consiste nell'esplicitare le righe precedenti cui si fa riferimento e la regola che viene usata.
   Si dice che la riga $<n, B_n>$ è una *conseguenza immediata* delle righe precedenti cui si fa riferimento.

Descriviamo adesso il sistema di regole.

Premesso che uno schema della forma $\frac{X, Y, Z, \ldots}{T}$ significa che la formula T è una conseguenza immediata delle formule X, Y, Z,… si hanno le seguenti regole:

1) Modus Ponens

MP: $\frac{A \Rightarrow B, A}{B}$

2) Eliminazione del quantificatore esistenziale

eE: $\frac{(Ex)A(x)}{A(b)}$, dove b è una costante individuale apparente che non occorre in *(Ex)A(x)* e nemmeno in formule precedenti della dimostrazione, mentre *A(b)* rappresenta il risultato della sostituzione in *A(x)* di tutte le occorrenze libere di x con b.[48]

3) Eliminazione del quantificatore universale

e∀: $\frac{(x)A(x)}{A(t)}$, dove t è un termine qualunque di F libero per x oppure una costante individuale apparente che è stata introdotta precedentemente nella dimostrazione per applicazione della regola eE, mentre *A(t)* è il risultato della sostituzione in *A(x)* di tutte le occorrenze libere di x con t.[49]

4) Introduzione del quantificatore esistenziale

iE: $\frac{A(t)}{(Ex)A(x)}$, dove t è un termine qualunque di F libero per x oppure una costante individuale apparente, mentre *A(t)* rappresenta il risultato della sostituzione in *A(x)* di tutte le occorrenze libere di x con t.

[48] - Si tenga presente che soltanto la regola eE consente di introdurre per la prima volta, in una dimostrazione, una nuova costante individuale apparente.

[49] - La regola e∀ è giustificata dal MP e dall'assioma logico di tipo **b.**.

5) Introduzione del quantificatore universale

i∀: $\dfrac{A(x)}{(x)A(x)}$, dove la variabile *x* non è libera in nessuna delle ipotesi da cui *A(x)* dipende[50], e in nessuna fbf (apparente o no) *(Ey)B(y)* cui sia stata applicata la regola eE, a meno che *A(x)* non sia una fbf e dipenda da ipotesi che siano fbf (ossia né *A(x)* né le ipotesi da cui *A(x)* dipende possono contenere costanti individuali apparenti).

6) Eliminazione delle ipotesi

eI: $\dfrac{A, B}{A \Rightarrow B}$, dove *A* è un'ipotesi qualunque da cui *B* dipende e che compare nella dimostrazione prima di *B*.[51]

Per poter definire la nozione di teorema diamo prima la seguente definizione:

Def.51- Supposto che <n, B_n> occorra come ipotesi in una dimostrazione del sistema del primo ordine F, diciamo che la riga <i, B_i> della dimostrazione *dipende dall'ipotesi* <n, B_n> in due soli casi: 1) n=i oppure 2) <i, B_i> è una conseguenza immediata di righe precedenti di cui almeno una dipenda da <n, B_n>; se però B_i ha la forma $B_n \Rightarrow B_k$ con $n<k$, e la giustificazione di <i, B_i> è che si tratta di una riga ricavata a partire dalle righe <n, B_n> e <k, B_k> tramite la regola eI, allora <i, B_i> non dipende dall'ipotesi <n, B_n>.

Dalla precedente definizione segue che una riga di una dimostrazione può dipendere soltanto da una riga che sia un'ipotesi. Definiamo quindi la nozione di teorema:

Def.52- Un *teorema* di un sistema del primo ordine F è una fbf di F che può essere ottenuta come la formula dell'ultima riga <n B_n> di una dimostrazione di F ed è tale che <n, B_n> non dipenda da alcuna ipotesi.[52]

Si dimostra che in ogni sistema del primo ordine F una fbf X è un teorema secondo le vecchie regole se e solo se lo è secondo il sistema della deduzione naturale, in altre parole tale sistema risulta *adeguato*.

[50] - Tale restrizione è necessaria per assicurare il fatto che la successiva regola eI resti valida.
[51] - La regola eI non è altro che il Teorema di deduzione (Corollario 3).
[52] - Da questa definizione risulta che una fbfa non può essere un teorema anche se si tratta di una tautologia.

Osserviamo dapprima che le restrizioni su eE nella regola i∀ rendono il sistema della deduzione naturale più forte di quanto sia necessario, si può infatti ottenere un sistema adeguato di regole sostituendo i∀ con la seguente regola più debole:

5 bis) i∀*: $\dfrac{A(x)}{(x)A(x)}$, dove la variabile *x* non è libera in nessuna delle ipotesi da cui *A(x)* dipende e *A(x)* è una fbf che dipende soltanto da ipotesi che siano fbf.

La regola i∀* differisce dalla i∀ solo per il fatto che è stata eliminata una delle restrizioni alternative, abbiamo pertanto meno libertà d'azione cosicché i∀* è più debole di i∀.

Verifichiamo adesso che l'insieme di regole per la deduzione naturale fondato su i∀* è effettivamente adeguato. Cominciamo col dimostrare come teoremi gli assiomi logici (tipo **b.** e **c.**) del calcolo predicativo.

Teorema 23- In ogni sistema del primo ordine F, vale: $\vdash (x)A(x) \Rightarrow A(t)$, dove *t* è un termine qualunque libero per *x* in *A(x)*, e *A(t)* è il risultato della sostituzione in *A(x)* di tutte le occorrenze libere di *x* con *t*.
Dim.

1	$(x)A(x)$	I
2	$A(t)$	1, e∀
3	$(x)A(x) \Rightarrow A(t)$	1, 2, eI.

Teorema 24- In ogni sistema del primo ordine F vale: $\vdash (x)(A \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A \Rightarrow (x)B(x))$, dove *x* non è libera in *A*, e *A* e *B(x)* sono fbf qualsiasi.
Dim.

1	$(x)(A \Rightarrow B(x))$	I
2	$A \Rightarrow B(x)$	1, e∀
3	A	I
4	$B(x)$	2, 3, MP
5	$(x)B(x)$	4, i∀ o i∀*(*x* vincolata in 1 e 3)
6	$A \Rightarrow (x)B(x)$	3, 5, eI
7	$(x)(A \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A \Rightarrow (x)B(x))$	1, 6, Ei.

Nel sistema di assiomi logici e di regole avevamo, oltre ai due schemi di assioma che abbiamo dimostrato, tutte le tautologie (dimostrabili anche con la deduzione naturale) e le regole del MP e della GU che coincide con i$\forall$*, pertanto le regole della deduzione naturale sono in grado di generare tutti i teoremi derivati mediante gli assiomi logici e le regole del vecchio sistema.

Per completare la dimostrazione dell'adeguatezza del sistema della deduzione naturale dobbiamo fare vedere che il quantificatore esistenziale è esprimibile in termini del quantificatore universale e della negazione, dato che in questo sistema l'uso del quantificatore esistenziale è definito esplicitamente. In altre parole nel sistema della deduzione naturale "E " appartiene all'alfabeto, per cui la definizione di fbf deve essere data in modo tale da includere tra le fbf espressioni del tipo $(Ex)A$, con A fbf qualsiasi. È inoltre necessario dimostrare un teorema generale che assicuri la sostitutività dell'equivalenza logica, teorema che ci consenta di sostituire ogni occorrenza di un quantificatore esistenziale con il suo equivalente espresso in termini di negazione e quantificatore universale.

Teorema 25- In ogni sistema del primo ordine F, vale: $\vdash \neg(x)(\neg A(x)) \Rightarrow (Ex)A(x)$, dove $A(x)$ è una fbf qualunque.
Dim.

1	$A(x)$	I
2	$(Ex)A(x)$	1, iE
3	$A(x) \Rightarrow (Ex)A(x)$	1, 2, eI
4	$(A(x) \Rightarrow (Ex)A(x)) \Rightarrow (\neg(Ex)A(x) \Rightarrow \neg A(x))$	Taut
5	$\neg(Ex)A(x) \Rightarrow \neg A(x)$	3, 4, MP
6	$\neg(Ex)A(x)$	I
7	$\neg A(x)$	5, 6, MP
8	$(x)(\neg A(x))$	7, i$\forall$ o i$\forall$*(x vinc. in 6)
9	$\neg(Ex)A(x) \Rightarrow (x)(\neg A(x))$	6, 8, eI
10	$(\neg(Ex)A(x) \Rightarrow (x)(\neg A(x))) \Rightarrow (\neg(x)(\neg A(x)) \Rightarrow (Ex)A(x))$	Taut
11	$\neg(x)(\neg A(x)) \Rightarrow (Ex)A(x)$	9, 10, MP.

Completiamo la trattazione sul quantificatore esistenziale dimostrando il seguente teorema:

Teorema 26- In ogni sistema del primo ordine vale: $\vdash\neg(x)(\neg A(x))\Leftrightarrow(Ex)A(x)$, dove $A(x)$ è una fbf qualunque.
Dim.

1	$(Ex)A(x)$	I
2	$A(b)$	1, eE (*b* c. i. app.)
3	$(x)(\neg A(x))$	I
4	$\neg A(b)$	3, e∀, *b* libera per *x*
5	$(x)(\neg A(x))\Rightarrow\neg A(b)$	3, 4, eI
6	$((x)(\neg A(x))\Rightarrow\neg A(b))\Rightarrow(A(b)\Rightarrow\neg(x)(\neg A(x)))$	Taut
7	$A(b)\Rightarrow\neg(x)(\neg A(x))$	5, 6, MP
8	$\neg(x)(\neg A(x))$	2, 7, MP
9	$(Ex)A(x)\Rightarrow\neg(x)(\neg A(x))$	1, 8, eI
10	$((\neg(x)(\neg A(x))\Rightarrow(Ex)A(x))\wedge[9])\Rightarrow(\neg(x)(\neg A(x))\Leftrightarrow(Ex)A(x))$	Taut
11	$\neg(x)(\neg A(x))\Leftrightarrow(Ex)A(x)$	T25, 9,10,MP.

Come già detto per potere sostituire *(Ex)* con $\neg(x)\neg$, bisogna dimostrare la sostitutività dell'equivalenza logica; dimostriamo a tale scopo due lemmi.

Lemma 1- In ogni sistema del primo ordine vale: $\vdash(x)(A\Leftrightarrow B)\Rightarrow((x)A\Leftrightarrow(x)B)$, dove *A* e *B* sono fbf qualsiasi.
Dim.

1	$(x)(A\Leftrightarrow B)$	I
2	$A\Leftrightarrow B$	1, e∀
3	$(x)A$	I
4	A	3, e∀
5	B	2, 4, Taut[53], MP
6	$(x)B$	5, i∀* (*x* vinc. in 1 o 3)
7	$(x)A\Rightarrow(x)B$	3, 6, eI
8	$(x)B$	I
9	B	8, e∀
10	A	2, 9, Taut (v. nota 53), MP
11	$(x)A$	10, i∀* (*x* vinc. in 1 e 8)
12	$(x)B\Rightarrow(x)A$	8, 11, eI
13	$((x)A\Rightarrow(x)B)\wedge((x)B\Rightarrow(x)A)$	7, 12, Taut[54], MP
14	$(x)A\Leftrightarrow(x)B$	13, Def. ⇔
15	$(x)(A\Leftrightarrow B)\Rightarrow((x)A\Leftrightarrow(x)B)$	1, 14, eI.

[53] - $(X\Leftrightarrow Y)\Rightarrow(X\Rightarrow Y)$.
[54] - $X\Rightarrow(Y\Rightarrow(X\wedge Y))$.

Lemma 2- In ogni sistema del primo ordine vale: $\vdash (x)(A(x)\Leftrightarrow B(x))\Rightarrow((Ex)A(x)\Leftrightarrow(Ex)B(x))$, dove *A(x)* e *B(x)* sono fbf qualsiasi.
Dim.

1	$(x)(A(x)\Leftrightarrow B(x))$	I
2	$(Ex)A(x)$	I
3	$A(b)$	2, eE, *b* c. i. app.
4	$A(b)\Leftrightarrow B(b)$	1, e∀
5	$B(b)$	4, 3, Taut[55] MP
6	$(Ex)B(x)$	5, iE
7	$(Ex)A(x)\Rightarrow(Ex)B(x)$	2, 6, eI
8	$(Ex)B(x)$	I
9	$B(c)$	8, eE, *c* c. i. app.
10	$A(c)\Leftrightarrow B(c)$	1, e∀
11	$A(c)$	10, 9, Taut (v. nota 53), MP
12	$(Ex)A(x)$	11, iE
13	$(Ex)B(x)\Rightarrow(Ex)A(x)$	8, 12, eI
14	$[7]\wedge[13]$	7, 13, Taut[56], MP
15	$(Ex)A(x)\Leftrightarrow(Ex)B(x)$	14, Def. ⇔
16	$(x)(A(x)\Leftrightarrow B(x))\Rightarrow((Ex)A(x)\Leftrightarrow(Ex)B(x))$	1, 15, eI.

A questo punto si può dimostrare la sostituitività dell'equivalenza logica, ossia il seguente teorema:

Teorema 27 (di sostituzione)- In ogni sistema del primo ordine, se $\vdash A\Leftrightarrow B$ (dove *A* e *B* sono fbf qualsiasi), allora $\vdash X\Leftrightarrow X'$, dove *X'* è ottenuta da *X* sostituendo con *B* zero, una o più occorrenze di *A* in *X*.
Dim.
La dimostrazione è per induzione sul numero **n** dei connettivi e dei quantificatori di *X*.
Se *X* non ha connettivi e quantificatori (**n**=0), è una formula atomica[57], pertanto *A*, essendo una fbf, coincide con *X*; segue allora che o *X'* è *B* oppure *X'* è *A*. In entrambi i casi il teorema è provato poiché da $\vdash A\Leftrightarrow B$, segue o $\vdash A\Leftrightarrow B$ o $\vdash A\Leftrightarrow A$, ossia $\vdash X\Leftrightarrow X'$.

[55] - Si veda nota 53.
[56] - Si veda nota 54.
[57] - Non esistono parti proprie di *X* che sono fbf.

Supponiamo ora che il teorema valga per ogni formula X che ha meno di **n** connettivi e quantificatori, e dimostriamo il teorema nel caso in cui X abbia **n** connettivi e quantificatori.
Se X coincide con A ritorniamo al caso precedente, supponiamo quindi che A sia una parte propria di X (non atomica). In tal caso X deve avere una delle seguenti forme:
1) $(x)C$, oppure 2) $(Ex)C$, oppure 3) $\neg C$, oppure 4) $C\vee D$,
dove C e D sono fbf con meno di **n** connettivi e quantificatori, per le quali, quindi, il teorema vale.
Esaminiamo adesso ciascuno di questi quattro casi.

1) Se X ha la forma $(x)C$, allora A è una parte (non necessariamente propria) di C, essendo una parte propria di X. Sia ora C' il risultato della sostituzione in C di zero, una o più occorrenze di A con B, in tal caso X' è $(x)C'$. Se $\vdash A\Leftrightarrow B$, allora per ipotesi di induzione si ha che $C\Leftrightarrow C'$ è un teorema e in quanto tale non dipende da alcuna ipotesi, possiamo allora applicare la regola i$\forall$ per ottenere $\vdash (x)(C\Leftrightarrow C')$, infine da quest'ultima e dal **Lemma 1** $(x)(C\Leftrightarrow C')\Rightarrow((x)C\Leftrightarrow(x)C')$, per MP si ottiene $\vdash (x)C\Leftrightarrow(x)C'$, ossia $\vdash X\Leftrightarrow X'$.

2) Se X ha la forma $(Ex)C$ si procede come nel caso precedente sfruttando alla fine il **Lemma 2**.

3) Se, invece, X ha la forma $\neg C$, X' avrà la forma $\neg C'$, per ipotesi di induzione da $\vdash A\Leftrightarrow B$ segue $\vdash C\Leftrightarrow C'$ e dalla tautologia $\vdash (C\Leftrightarrow C')\Rightarrow(\neg C\Leftrightarrow\neg C')$, per MP si ottiene $\vdash \neg C\Leftrightarrow\neg C'$, ossia $\vdash X\Leftrightarrow X'$.

4) Se infine X ha la forma $C\vee D$, X' ha la forma $C'\vee D'$, dove C' e D' sono ottenute da C e D nel solito modo; da $\vdash A\Leftrightarrow B$ per ipotesi di induzione valgono $\vdash C\Leftrightarrow C'$ e $\vdash D\Leftrightarrow D'$, considerando pertanto la tautologia $\vdash (C\Leftrightarrow C')\Rightarrow((D\Leftrightarrow D')\Rightarrow((C\vee D)\Leftrightarrow(C'\vee D')))$, applicando due volte il MP si ottiene $\vdash (C\vee D)\Leftrightarrow(C'\vee D')$, cioè $\vdash X\Leftrightarrow X'$.

Teorie del primo ordine con identità e con identità definibile

Abbiamo usato la notazione $A(x)$ per rappresentare una fbf in cui può occorrere libera la variabile x; analogamente la notazione $A(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ rappresenterà una fbf in cui possono occorrere libere le variabili x_i.

Def.53- Per teoria del primo ordine con *identità* s'intende una teoria del primo ordine F contenente un predicato a due posti A_i^2 che soddisfi le seguenti condizioni:

R₁ $(x)A_i^2(x, x)$ è un assioma, dove x è una variabile qualunque;

S₂ $(x)(y)(A_i^2(x, y)\Rightarrow(X\Leftrightarrow X'))$ è un assioma, dove x e y sono variabili mentre X' è ottenuta da X sostituendo in essa zero, una o più occorrenze libere di x con y, purché y sia libera per x nelle occorrenze in cui viene operata la sostituzione.

Di solito per il predicato A_i^2 si adopera il simbolo "=", ossia si scrive "$x=y$" al posto di $A_i^2(x, y)$.

Il principio **R₁** afferma la riflessività dell'identità $(x)x=x$, mentre il principio **S₂** la sostituitività dell'identità, $(x)(y)(x=y\Rightarrow(X\Leftrightarrow X'))$, del tutto analoga a quella dell'equivalenza logica.
Si dimostra il seguente teorema:

Teorema 28- In ogni teoria de primo ordine F con identità valgono:

a. $\vdash_F x=y\Rightarrow y=x$ (simmetria dell'identità)

b. $\vdash_F x=y\Rightarrow(y=z\Rightarrow x=z)$ (transitività dell'identità)

dove x, y e z sono termini qualunque.

Dim.

a.

1	$x=y\Rightarrow(x=x\Rightarrow y=x)$	**S₂**, e∀
2	$x=x$	**R₁**, e∀
3	$x=x\Rightarrow((x=y\Rightarrow(x=x\Rightarrow y=x))\Rightarrow(x=y\Rightarrow y=x))$	Taut
4	$(x=y\Rightarrow(x=x\Rightarrow y=x))\Rightarrow(x=y\Rightarrow y=x)$	2, 3, MP
5	$x=y\Rightarrow y=x$	1, 4, MP.

b.

1	$y=x\Rightarrow(y=z\Rightarrow x=z)$	**S₂**, e∀
2	$(x=y\Rightarrow y=x)\Rightarrow((y=x\Rightarrow(y=z\Rightarrow x=z))\Rightarrow(x=y\Rightarrow(y=z\Rightarrow x=z)))$	Taut
3	$(y=x\Rightarrow(y=z\Rightarrow x=z))\Rightarrow(x=y\Rightarrow(y=z\Rightarrow x=z))$	**a.**, 2, MP
4	$x=y\Rightarrow(y=z\Rightarrow x=z)$	1, 3, MP.

Def.54- F è una teoria del primo ordine nella quale l'*identità* è *definibile* quando esiste una fbf $A(x, y)$ di F contenente esattamente due variabili libere x e y tale che:

1) $\vdash_F (x)A(x, x)$, dove $A(x, x)$ è ottenuta sostituendo in $A(x, y)$ tutte le occorrenze libere di y con x;
2) $\vdash_F (x)(y)(A(x, y)\Rightarrow(X\Leftrightarrow X'))$, dove X e X' sono tra loro correlate come stabilito in **Def.53**.

Il lettore provi che ogni teoria del primo ordine con identità, che ha come assiomi specifici soltanto $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{S_2}$, è consistente.[58]

Dalla **Def.53** e dal successivo teorema segue che l'interpretazione della lettera predicativa A_i^2, cioè di "=", è una relazione di equivalenza sul dominio D di ogni modello <D, g>. Se l'interpretazione di "=" è proprio la relazione d'identità su D, si dice che <D, g> è un *modello normale*.

È importante osservare che ogni modello <D, g> di una teoria del primo ordine F con identità determina un modello normale di F, in altri termini ogni modello di F può essere ridotto ad uno normale.

Infatti, se <D,g> è un modello di F l'interpretazione di "=" è una relazione di equivalenza E sul dominio D, inoltre per $\mathbf{S_2}$ deve valere la sostituitività dell'identità. Ciò significa che la relazione di equivalenza E deve essere una relazione di congruenza rispetto alle operazioni e alle relazioni della struttura <D, g>.
Ossia, dati gli elementi $d_1, d_2,\ldots, d_n$ e $b_1, b_2,\ldots, b_n$ di D, se d_iEb_i allora g($f_m^n(d_1, d_2,\ldots, d_n)$) E g(($f_m^n(b_1, b_2,\ldots, b_n)$) ed inoltre g($A_m^n(d_1, d_2,\ldots, d_n)$) vale se e solo se vale g($A_m^n(b_1, b_2,\ldots, b_n)$) per ogni lettera funzionale a n posti f_m^n e per ogni lettera predicativa A_m^n a n posti. Possiamo allora prendere in considerazione l'insieme quoziente D/E costituito dalle classi di equivalenza su D modulo la relazione E, assumere quindi D/E come nuovo dominio e usare le operazioni e le relazioni che restano così indotte su D/E per costruire un nuovo modello <D/E, g*> di F. Il modello così ottenuto è normale, dato che in esso l'interpretazione di "=" è l'identità, infatti, detta E' la relazione corrispondente ad E in <D/E, g*> si ha che [d_i] E'[b_i] se e solo se d_i Eb_i, cioè se e solo se [d_i]=[b_i].

Il modello normale <D/E, g*> si dice modello *contratto* o *ridotto* di <D,g>.

[58] - Suggerimento: sia X una fbf, si eliminino tutti i quantificatori, si rimpiazzi ogni fbf $x=y$ con Y∨¬Y, dove Y è una fbf, si cancellino tutti i termini e le relative parentesi. Se X è un teorema, dimostrare che il procedimento indicato conduce ad un esempio di tautologia. Ma $\neg(x_1=x_1)$ si trasforma in ¬(Y∨¬Y) e quindi…..

Dato che le classi di equivalenza di una relazione di equivalenza definita su un insieme D partiscono D in classi disgiunte, la cardinalità del modello contratto è minore o uguale alla cardinalità del modello originario.

Il fenomeno della contrazione dei modelli si verifica anche nel caso delle teorie con identità definibile, poiché anche tali teorie godono della proprietà $\mathbf{S_2}$ (la 2) di **Def.54**).

Si deve osservare che mentre ogni sistema del primo ordine consistente possiede modelli di cardinalità arbitraria, la stessa cosa non sussiste per i modelli normali.

Consideriamo infatti, per esempio, un sistema del primo ordine F_i privo di simboli funzionali, avente come unica lettera predicativa "=" e come assiomi specifici $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{S_2}$ e l'assioma $(Ex_1)(x_2)(x_2=x_1)$. Tale sistema, che non è contraddittorio[59], potrà avere come modelli normali soltanto modelli il cui dominio è costituito da un solo elemento, cioè modelli finiti. Esistono dunque sistemi formali consistenti che ammettono soltanto modelli normali finiti. Tarski, tuttavia, ha dimostrato che se un sistema del primo ordine ha un modello normale infinito, allora ha modelli normali infiniti di cardinalità arbitraria[60]; pertanto se un sistema del primo ordine consistente non ammette modelli normali finiti deve avere modelli normali di cardinalità infinita arbitraria.

[59] - Per provarlo si segua il suggerimento della nota 58.

[60] - Questo risultato rappresenta un'estensione del Teorema di Löwenheim-Skolem.

Esempi di teorie del primo ordine

1) Teoria elementare[61] dei numeri

Il primo esempio di teoria del primo ordine è la teoria S, nota come *teoria dei numeri del primo ordine* detta anche *aritmetica del primo ordine*. Tale teoria costituisce il primo tentativo di formalizzazione della matematica e fu sviluppata per la prima volta da Dedekind (nel 1901).

L'interpretazione intuitiva di tale sistema formale è costituita dai numeri naturali compreso lo 0 (interi non negativi). La difficoltà che s'incontra nella formalizzazione di tale sistema numerico consiste nel fatto che esso è infinito e bisogna quindi poter esprimere attraverso il linguaggio formale il Principio di induzione. Questo problema si può risolvere ricorrendo agli assiomi di Peano, che in modo informale possono essere espressi nel seguente modo[62]:

P_1 0 è un numero.
P_2 Se n è un numero, il successivo di n (n') è un numero.
P_3 0 non è successivo di alcun numero ($0 \neq n'$, $\forall n$).
P_4 I successivi di due numeri distinti sono distinti (se $n \neq m$ allora $n' \neq m'$).
P_5 Se I è un insieme di numeri, che contiene lo 0 ed il successivo di ogni suo elemento, allora I contiene ogni numero.

L'ultimo postulato che è il Principio di induzione può essere formulato anche nel seguente modo:

P_5' Se Q è una proprietà che può valere o meno per una classe di numeri contenente lo 0 e se a) Q vale per lo 0 e b) ogni volta che vale per n vale per n', allora Q vale per tutti i numeri della classe.

Costruiamo adesso una teoria del primo ordine S basata sui postulati di Peano, adeguata per dimostrare tutti i risultati fondamentali della teoria elementare dei numeri.

[61] - Nella letteratura spesso si usa "elementare" come sinonimo di "primo ordine".
[62] - Per Peano 0, numero e successivo sono concetti primitivi.

L' alfabeto di S contiene, oltre che tutte le variabili individuali, una lettera predicativa a due posti $A_1^2(t, s)$ denotata con "t=s", due lettere funzionali a due posti $f_1^2(t, s)$ e $f_2^2(t, s)$ denotate rispettivamente con "t+s" e "$t \cdot s$", una lettera funzionale ad un posto $f_1^1(t)$ denotata con "t ' " ed infine una costante individuale a_1 denotata con "0".

Per termine di S intendiamo un'espressione t che soddisfi una delle seguenti condizioni:

1) t è una variabile individuale;
2) t è la costante individuale 0;
3) t ha la forma $x+y$, $x \cdot y$ o x', dove x e y sono termini;
4) nient'altro è un termine di S.

Per fbf di S intendiamo un'espressione X di una delle seguenti forme:

1) $t=s$, dove t e s sono termini;
2) $(x)A$, $(Ex)A$ dove A è una fbf e x una variabile;
3) $\neg A$, $A \vee B$ dove A e B sono fbf;
4) nient'altro è una fbf.

Gli assiomi specifici di S sono i seguenti:

S_1 $(x_1)(x_1=x_1)$

S_2 $(x_1)(x_2)(x_1=x_2 \Rightarrow x_2=x_1)$

S_3 $(x_1)(x_2)(x_3)(x_1=x_2 \Rightarrow (x_2=x_3 \Rightarrow x_1=x_3))$

S_4 $(x_1)(x_2)(x_1=x_2 \Rightarrow x'_1=x'_2)$

S_5 $(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(x_1=x_2 \wedge x_3=x_4 \Rightarrow (x_1+x_3=x_2+x_4 \wedge x_1 \cdot x_3=x_2 \cdot x_4))$

S_6 $(x_1)\neg(x'_1=0)$

S_7 $(x_1)(x_2)(x'_1=x'_2 \Rightarrow x_1=x_2)$

S_8 $(x_1)(x_1+0=x_1)$

S_9 $(x_1)(x_2)(x_1+x'_2=(x_1+x_2)')$

S_{10} $(x_1)(x_1 \cdot 0=0)$

S_{11} $(x_1)(x_2)(x_1 \cdot x'_2=(x_1 \cdot x_2+x_1)$

S_{12} Per ogni fbf $A(x)$ di S la fbf $(A(0) \wedge (x)(A(x) \Rightarrow A(x'))) \Rightarrow (x)A(x)$ è un assioma, dove x è una variabile mentre $A(0)$ e $A(x')$ sono ottenute rispettivamente sostituendo con 0 e con x' tutte le occorrenze libere di x in $A(x)$.

Tale sistema di assiomi è infinito in quanto S_{12} è uno schema di assiomi e sta per un numero infinito di assiomi.

I primi tre assiomi affermano le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva dell'identità.

Gli assiomi S_4 e S_5 esprimono invece il principio della sostituitività dell'identità rispetto alle tre lettere funzionali del sistema.

Gli assiomi S_6 e S_7 sono i corrispondenti formali di P_3 e P_4, mentre i corrispondenti formali di P_1 e P_2 non figurano tra gli assiomi specifici, in quanto fanno parte del nostro sistema per il fatto che questo include lo "0" come costante individuale e la funzione successivo come simbolo funzionale.

Gli assiomi S_8 e S_9 costituiscono la definizione ricorsiva della somma, mentre S_{10} e S_{11} costituiscono quella del prodotto. In realtà, in S la somma ed il prodotto sono definiti per il semplice fatto che disponiamo di un simbolo funzionale per entrambe le operazioni; pertanto, i predetti assiomi hanno piuttosto lo scopo di stabilire certe proprietà fondamentali della somma e del prodotto.

Lo schema S_{12} infine, è il corrispondente formale dell'ultimo postulato di Peano, il Principio di induzione, nella formulazione $\mathbf{P_5'}$, esso rappresenta tuttavia una formulazione più debole di tale postulato.
L'ultimo postulato di Peano, infatti, si riferisce intuitivamente a tutte le proprietà dei numeri naturali e quindi a tutti i possibili sottoinsiemi di $\boldsymbol{N}$; ora l'insieme delle parti di $\boldsymbol{N}$ ha la potenza del continuo, $\mathbf{P_5'}$ dunque si riferisce ad un insieme di proprietà che ha potenza superiore al numerabile. Lo schema S_{12} costituisce, invece, un'infinità numerabile di assiomi e si riferisce quindi soltanto ad un'infinità numerabile di proprietà dei numeri naturali. Risulta pertanto che da S_{12} rimane escluso un insieme non numerabile di sottoinsiemi di $\boldsymbol{N}$, ossia esso costituisce il corrispondente formale di un principio di induzione più debole di $\mathbf{P_5'}$.

Come conseguenza immediata degli assiomi si dimostra che le proprietà espresse dai primi undici assiomi valgono per termini qualsiasi di S; ad esempio quelli che seguono sono teoremi del sistema S, $\vdash_S (t_1=t_2 \Rightarrow (t_2=t_3 \Rightarrow t_1=t_3))$ (S'_3), $\vdash_S t'_1=t'_2 \Rightarrow t_1=t_2$ (S'_7), dove t_1, t_2 e t_3 sono termini qualunque; in seguito S'_i, con $1 \leq i \leq 11$, denoterà il teorema corrispondente all'assioma S_i.

Abbiamo già visto che S_4 e S_5 affermano il principio della sostitutività dell'identità rispetto alle tre lettere funzionali, la sostitutività generale dell'identità si dimostra eseguendo un'induzione sul numero dei simboli funzionali occorrenti nei termini considerati.

Risulta pertanto che S è un sistema formale con identità definibile, ossia vale: $\vdash_S (x)(y)(x=y \Rightarrow (X \Leftrightarrow X'))$, dove X' è ottenuta da X sostituendo in essa zero, una o più occorrenze libere di x con y, purché y sia libera per x nelle occorrenze in cui viene operata la sostituzione.

Si noti che l'interpretazione nella quale:

a. il dominio è l'insieme degli interi non negativi;
b. il numero 0 è l'interpretazione del simbolo "0";
c. l'operazione di successore è l'interpretazione della lettera funzionale ad un posto "f_1^1";
d. le ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione sono le interpretazioni rispettivamente di "f_1^2" e "f_2^2";
e. l'interpretazione della lettera predicativa "A_1^2" è la relazione di identità;

è un modello normale di S, ed è chiamato modello *standard*.

Qualsiasi modello di S che non sia isomorfo al modello standard viene detto *non-standard*, è stato dimostrato che esistono $2^{\aleph_0}$ modelli non-standard di S distinti tra loro.

Diamo adesso qualche esempio di deduzione in S.
Ci proponiamo, dapprima, di dimostrare la proprietà commutativa dell'addizione, per fare ciò dimostriamo dapprima alcuni lemmi.

Il primo è il seguente teorema:

T_1- $\vdash_S (x_1)(x_1=0+x_1)$
Dim.

1	$0+0=0$	S_8, e∀
2	$0+0=0\Rightarrow 0=0+0$	S_2, e∀
3	$0=0+0$	1, 2, MP
4	$x_1=0+x_1$	I
5	$x_1=0+x_1\Rightarrow x'_1=(0+x_1)'$	S'_4
6	$x'_1=(0+x_1)'$	4, 5, MP
7	$0+x'_1=(0+x_1)'$	S_9, e∀
8	$0+x'_1=(0+x_1)'\Rightarrow(0+x_1)'=0+x'_1$	S'_2
9	$(0+x_1)'=0+x'_1$	7, 8, MP
10	$x'_1=(0+x_1)'\Rightarrow((0+x_1)'=0+x'_1\Rightarrow x'_1=0+x'_1)$	S'_3
11	$x'_1=0+x'_1$	6, 9, 10, MP
12	$x_1=0+x_1\Rightarrow x'_1=0+x'_1$	4, 11, eI
13	$(x_1)(x_1=0+x_1\Rightarrow x'_1=0+x'_1)$	12, i∀
14	$[3]\wedge[13]$	3, 13, Taut[63], MP
15	$(0=0+0\wedge(x_1)(x_1=0+x_1\Rightarrow x'_1=0+x'_1))\Rightarrow(x_1)(x_1=0+x_1)$	S'_{12}
16	$(x_1)(x_1=0+x_1)$	14, 15, MP.

[63] - $X\Rightarrow(Y\Rightarrow(X\wedge Y))$

Dal precedente teorema si ricava il seguente teorema, che costituisce la base per una dimostrazione induttiva della proprietà commutativa dell'addizione:

T_2- $\vdash_S x_1+0=0+x_1$
Dim.

1	$x_1+0=x_1$	S_8, e$\forall$
2	$x_1=0+x_1$	$\mathbf{T_1}$, e$\forall$
3	$x_1+0=x_1\Rightarrow(x_1=0+x_1\Rightarrow x_1+0=0+x_1))$	S'_3
4	$x_1+0=0+x_1$	1, 2, 3, MP.

Dimostriamo ancora il seguente teorema:

T_3- $\vdash_S x'_2+x_1=(x_2+x_1)'$
Dim.

1	$x'_2+0=x'_2$	S_8, e$\forall$
2	$x_2+0=x_2$	S_8, e$\forall$
3	$(x_2+0)'=x'_2$	2, S'_4, MP
4	$x'_2=(x_2+0)'$	3, S'_2, MP
5	$x'_2+0=(x_2+0)'$	1, 4, S'_3, MP
6	$x'_2+x_1=(x'_2+x_1)'$	I
7	$x'_2+x'_1=(x_2+x_1)'$	S_9, e$\forall$
8	$(x'_2+x_1)'=(x_2+x_1)''$	6, S'_4, MP
9	$x'_2+x'_1=(x_2+x_1)''$	7, 8, S'_3, MP
10	$x_2+x'_1=(x_2+x_1)'$	S_9, e$\forall$
11	$(x_2+x'_1)'=(x_2+x_1)''$	10, S'_4, MP
12	$(x_2+x_1)''=(x_2+x'_1)'$	11, S'_2, MP
13	$x'_2+x'_1=(x_2+x'_1)'$	9, 12, S'_3, MP
14	$x'_2+x_1=(x_2+x_1)'\Rightarrow x'_2+x'_1=(x_2+x'_1)'$	6, 13, eI
15	$(x_1)(x_2)[14]$	14, i$\forall$
16	$[5]\wedge[15]$	5, 15, Taut[64], MP
17	$x'_2+0=(x_2+0)'\wedge(x_1)(x_2)(x'_2+x_1=(x_2+x_1)'\Rightarrow x'_2+x'_1=(x_2+x'_1)')\Rightarrow$ $\Rightarrow(x_1)(x_2)(x'_2+x_1=(x_2+x_1)')$	S'_{12}
18	$(x_1)(x_2)(x'_2+x_1=(x_2+x_1)')$	16, 17, MP
19	$x'_2+x_1=(x_2+x_1)'$	18, e$\forall$.

[64] - $X\Rightarrow(Y\Rightarrow(X\wedge Y))$

Siamo ora in grado di dimostrare la proprietà commutativa dell'addizione, ossia il seguente teorema:

T_4- $\vdash_S (x_1)(x_2)(x_1+x_2=x_2+x_1)$
Dim.

1	$x_1+0=x_1$	$\mathbf{T_2}$
2	$x_1+x_2=x_2+x_1$	I
3	$x_1+x'_2=(x_1+x_2)'$	S_9, e$\forall$
4	$x'_2+x_1=(x_2+x_1)'$	$\mathbf{T_3}$
5	$(x_1+x_2)'=(x_2+x_1)'$	2, S'_4, MP
6	$x_1+x'_2=(x_2+x_1)'$	3, 5, S'_3, MP
7	$(x_2+x_1)'=x_1+x'_2$	6, S'_2, MP
8	$x'_2+x_1=x_1+x'_2$	4, 7, S'_3, MP
9	$x_1+x'_2=x'_2+x_1$	8, S'_2, e$\forall$, MP
10	$x_1+x_2=x_2+x_1\Rightarrow x_1+x'_2=x'_2+x_1$	2, 9, eI
11	$(x_1)(x_2)[10]$	10, i$\forall$
12	$[1]\wedge[11]$	1, 11, Taut[65], MP
13	$[1]\wedge[11]\Rightarrow(x_1)(x_2)(x_1+x_2=x_2+x_1)$	S'_{12}
14	$(x_1)(x_2)(x_1+x_2=x_2+x_1)$	12, 13, MP.

Prima di fare altri due esempi di deduzione in S, introduciamo la seguente definizione:

Def.1- 1 sta per 0', 2 sta per 0'', in generale n sta per 0''$\cdots$', ossia 0 seguito da n apici.

Dimostriamo adesso che l'operazione di successore coincide con la somma dell'unità, ossia il seguente teorema:

T_5- $\vdash_S x_1+1=x'_1$
Dim.

1	$x_1+0'=(x_1+0)'$	S_9, e$\forall$
2	$x_1+0=x_1$	S_8, e$\forall$
3	$(x_1+0)'= x'_1$	2, S'_4, MP
4	$x_1+0'= x'_1$	1, 3, S'_3, MP
5	$x_1+1=x'_1$	4, **Def.1**.

[65] - $X\Rightarrow(Y\Rightarrow(X\wedge Y))$

Il seguente teorema, invece, mostra che l'unità è l'elemento neutro per la moltiplicazione:

T_6- $\vdash_S x_1 \cdot 1 = x_1$
Dim.

1	$x_1 \cdot 0' = x_1 \cdot 0 + x_1$	S_{11}, e∀
2	$x_1 \cdot 0 = 0$	S_{10}, e∀
3	$x_1 = x_1$	S_1, e∀
4	$(x_1 \cdot 0 = 0 \wedge x_1 = x_1) \Rightarrow (x_1 \cdot 0 + x_1 = 0 + x_1 \wedge (x_1 \cdot 0)\ x_1 = 0 \cdot x_1)$	S'_5
5	$x_1 \cdot 0 = 0 \wedge x_1 = x_1$	2, 3, Taut[66], MP
6	$x_1 \cdot 0 + x_1 = 0 + x_1$	4, 5, Taut[67], MP
7	$x_1 \cdot 0' = 0 + x_1$	1, 6, S'_3, MP
8	$0 + x_1 = x_1$	**T_1**, S'_2, e∀, MP
9	$x_1 \cdot 0' = x_1$	7, 8, S'_3, MP
10	$x_1 \cdot 1 = x_1$	9, **Def.1**.

In maniera analoga si possono dimostrare altre importanti proprietà dell'addizione e della moltiplicazione.

Per definizione inoltre, si può introdurre in S una relazione d'ordine, si danno, infatti, le seguenti:

Def.2- $x \neq y$ sta per $\neg(x=y)$, dove x e y sono termini qualsiasi.

Def.3- $x<y$ sta per $(Ez)\ (z \neq 0 \wedge y = x+z)$, dove z è la variabile di indice più basso non occorrente nei termini x e y.

Def.4- $x \leq y$ sta per $(x<y \vee x=y)$, $x>y$ per $y<x$ e $x \geq y$ per $y \leq x$.

66 - $X \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Y))$
67 - $(X \wedge Y) \Rightarrow X$

2) <u>Teoria elementare dei gruppi</u>

Sia G una teoria del primo ordine, il cui alfabeto è costituito, oltre che da tutte le variabili individuali, da un'unica lettera predicativa a due posti $A_1^2\ (t, s)$ che denoteremo con "t=s", da una lettera funzionale a due posti $f_1^2\ (t, s)$ che denoteremo con "$t\ \tau\ s$" e da una costante individuale a_1 che sarà denotata da "e".

Per termine di G intendiamo un'espressione t che soddisfi una delle seguenti condizioni:

1) t è una variabile individuale;
2) t è la costante individuale e;
3) t ha la forma $x\ \tau\ y$, dove x e y sono termini;
4) nient'altro è un termine di G.

Per fbf di G intendiamo un'espressione X di una delle seguenti forme:

1) t=s, dove t e s sono termini;
2) $(x)A$, $(Ex)A$, dove A è una fbf e x una variabile;
3) $\neg A$, $A \vee B$, dove A e B sono fbf;
4) nient'altro è una fbf.

Gli assiomi specifici di G sono i seguenti:

G_1 $(x_1)(x_2)(x_3)(x_1\ \tau\ (x_2\ \tau\ x_3)=(x_1\ \tau\ x_2)\ \tau\ x_3)$
G_2 $(x_1)(x_1\ \tau\ \mathrm{e}=x_1)$
G_3 $(x_1)(Ex_2)(x_1\ \tau\ x_2=\mathrm{e})$
G_4 $(x_1)(x_1=x_1)$
G_5 $(x_1)(x_2)(x_1=x_2 \Rightarrow x_2=x_1)$
G_6 $(x_1)(x_2)(x_3)(x_1=x_2 \Rightarrow (x_2=x_3 \Rightarrow x_1=x_3))$
G_7 $(x_1)(x_2)(x_3)(x_1=x_2 \Rightarrow (x_3\ \tau\ x_1=x_3\ \tau\ x_2 \wedge x_1\ \tau\ x_3=x_2\ \tau\ x_3)$

I primi tre assiomi definiscono le proprietà della lettera funzionale, e precisamente: l'associatività, l'esistenza dell'elemento neutro e del simmetrico a destra (l'esistenza dell'elemento neutro e del simmetrico a sinistra si dimostra come teorema).

Gli assiomi G_4, G_5 e G_6 definiscono rispettivamente la riflessività, la simmetria e la transitività dell'identità.

L'ultimo assioma infine, definisce la sostitutività dell'identità rispetto alla lettera funzionale sia a sinistra sia a destra.

Si prova che G è una teoria del primo ordine con identità definibile, procedendo da G_4 e G_7, per induzione sul numero dei simboli funzionali.

Se agli assiomi di G si aggiunge come assioma la seguente fbf:

G_8 $\quad (x_1)(x_2)(x_1 \tau x_2 \Rightarrow x_2 \tau x_1)$

Si ottiene la teoria G_c dei gruppi abeliani, che costituisce un'estensione propria di G.

3) Teoria elementare degli insiemi densamente ordinati senza primo né ultimo elemento

Sia K una teoria del primo ordine, il cui alfabeto contiene, oltre che tutte le variabili individuali, due lettere predicative a due posti $A_1^2(t, s)$ e $A_2^2(t, s)$ che denoteremo, rispettivamente con "$t=s$" e "$t<s$", nessuna lettera funzionale e nessuna costante individuale. I termini di K pertanto, sono solo le variabili individuali.

Per fbf di G intendiamo un'espressione X di una delle seguenti forme:

1) $t=s$ e $t<s$, dove t e s sono termini;
2) $(x)A$, $(Ex)A$, dove A è una fbf e x una variabile;
3) $\neg A$, $A \vee B$, dove A e B sono fbf;
4) nient'altro è una fbf.

Gli assiomi specifici di G sono i seguenti:

K_1 $\quad (x_1)(x_1=x_1)$
K_2 $\quad (x_1)(x_2)(x_1=x_2 \Rightarrow x_2=x_1)$
K_3 $\quad (x_1)(x_2)(x_3)(x_1=x_2 \Rightarrow (x_2=x_3 \Rightarrow x_1=x_3))$
K_4 $\quad (x_1)(Ex_2)(Ex_3)(x_1<x_2 \wedge x_3<x_1)$
K_5 $\quad (x_1)(x_2)(x_3)((x_1<x_2 \wedge x_2<x_3) \Rightarrow x_1<x_3)$
K_6 $\quad (x_1)(x_2)(x_1=x_2 \Rightarrow \neg(x_1<x_2))$
K_7 $\quad (x_1)(x_2)(x_1<x_2 \vee x_1=x_2 \vee x_2<x_1)$
K_8 $\quad (x_1)(x_2)(x_1<x_2 \Rightarrow (Ex_3)(x_1<x_3 \wedge x_3<x_2))$

I primi tre assiomi definiscono rispettivamente la riflessività, la simmetria e la transitività dell'identità. L'assioma K_4 definisce l'assenza di un primo e di un ultimo elemento, K_5 la transitività dell'ordinamento, K_6 l'incompatibilità tra le relazioni d' identità e d' ordine, K_7 la tricotomia[68], ed infine l'assioma K_8 esprime la densità.

[68] - Per gli assiomi K_5, K_6 e K_7 la relazione d'ordine è totale.