Teorie del primo ordine

Come già fatto per il calcolo enunciativo ci proponiamo di dare veste formale al calcolo dei predicati, a tal fine consideriamo una classe di linguaggi formali, chiamati comunemente *teorie del primo ordine*.[32]
Tali linguaggi hanno una struttura ben definita, relativamente semplice pur essendo adeguata a moltissimi scopi.

La struttura di una teoria del primo ordine è quella di un sistema formale, ossia è costituita da quattro insiemi: l'alfabeto, l'insieme delle formule ben formate, quello degli assiomi e quello delle regole d'inferenza.
Dato che descriveremo un'intera classe di linguaggi, non possiamo specificare l'alfabeto di ogni singolo linguaggio, daremo quindi una classe di segni da cui dovrà essere scelto l'alfabeto di ogni singolo linguaggio.

1) L'alfabeto di una teoria del primo ordine può contenere:

a. una infinità numerabile di *variabili individuali* $x_1, x_2, \ldots$;
b. un insieme finito o numerabile, eventualmente vuoto, di *costanti individuali* a_i ($i \geq 1$);
c. un insieme finito o numerabile, eventualmente vuoto, di *lettere funzionali* f_j^n (n, $j \geq 1$) (dove l'apice indica il numero degli argomenti e l'indice distingue le lettere funzionali l'una dall'altra);
d. un insieme finito o numerabile, non vuoto, di *lettere predicative* A_j^n ($n, j \geq 1$) (per n e j vale quanto detto sopra);
e. i segni "$\neg$", "$\vee$", "(", ")" e "," .

Si esige quindi, che l'alfabeto di una qualunque teoria del primo ordine includa almeno tutte le variabili individuali ed almeno una lettera predicativa, mentre possono mancare alcune o tutte le costanti individuali e le lettere funzionali, alcune lettere predicative ma non tutte.

Le lettere funzionali applicate alle variabili e alle costanti individuali generano i termini, dove per *termine* di una teoria del primo ordine s'intende:

a. ogni costante individuale,
b. ogni variabile individuale,
c. ogni lettera funzionale $f_m^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ dove $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini
d. nient'altro è un termine.

[32] -L'espressione "primo ordine" si usa per distinguere le teorie che studieremo da quelle in cui vi sono predicati con altri predicati come argomenti o in cui è ammessa la quantificazione dei predicati.

Le lettere predicative applicate ai termini generano le formule ben formate.

2) Per *formula ben formata* (fbf) di una qualsiasi teoria del primo ordine s'intende:

a. una lettera predicativa A_m^n seguita da n termini $A_m^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ (formula atomica), e se X è una fbf, $(y)X$[33] con y variabile individuale e $\neg X$ sono fbf,
b. se X e Y sono fbf $X \vee Y$ è una fbf,
c. nient'altro è una fbf.

(Le espressioni $X \wedge Y$, $X \Rightarrow Y$, $X \Leftrightarrow Y$, $X \downarrow Y$, $X | Y$ e $X \Uparrow Y \Uparrow Z$ si definiscono come in L, si veda pag. 48)

Le fbf hanno senso solo quando viene assegnata un'interpretazione ai simboli. Facciamo dapprima delle considerazioni di carattere intuitivo ed in seguito daremo una definizione matematica precisa d'interpretazione.

L'interpretazione intuitiva di una teoria del primo ordine si basa sull'idea che le lettere predicative esprimano proprietà o relazioni a seconda del numero degli argomenti. Ad esempio se la lettera predicativa A_1^1 esprime la proprietà "rosso" la fbf $A_1^1(a_i)$, con a_i costante individuale che denota un certo oggetto, significa intuitivamente "l'oggetto denotato da a_i è rosso", ossia le lettere predicative monoargomentali esprimono proprietà. Diversamente le lettere predicative con più di un argomento esprimono relazioni tra gli argomenti stessi, ad esempio se la lettera predicativa A_1^2 esprime la relazione (binaria) "minore di" la fbf $A_1^2(a_1, a_2)$ viene interpretata intuitivamente come "a_1 è minore di a_2".

Abbiamo già detto che l'applicazione di una lettera predicativa a termini produce fbf che però in generale non si possono considerare enunciati. Se i termini di una fbf sono solo costanti individuali (ossia denotano oggetti) la fbf rappresenta un enunciato, come le due fbf dei precedenti esempi, se invece i termini di una fbf sono tutti o solo in parte variabili individuali la fbf non è un enunciato. Le variabili diversamente dalle costanti, infatti, non stanno per un oggetto particolare, ma variano in un insieme D detto universo o dominio, ossia indicano in modo ambiguo un elemento arbitrario di D. Ad esempio se A_1^1 esprime la proprietà "rosso" $A_1^1(x_i)$ significa "esso è rosso" oppure "la variabile x_i è rossa" che sicuramente non rappresenta un enunciato, bensì un predicato o enunciato aperto.

Come detto precedentemente ci sono due modi per ottenere un enunciato da un enunciato aperto.

[33] -(y) sta per $\forall y$ (ossia "per ogni y").

Un modo consiste nel fissare il significato delle variabili, ossia nella *sostituzione* di nomi al posto delle variabili; se per esempio in $A_1^1(x_i)$ sostituiamo la variabile x_i con “banana” otteniamo l’enunciato falso “la banana è rossa”, mentre se al posto di x_i mettiamo “fragola” otteniamo “la fragola è rossa” che è un enunciato vero.

Il secondo modo che permette di ottenere un enunciato da un enunciato aperto è rappresentato dalla *quantificazione* delle variabili, ad esempio se alla fbf $A_1^1(x_i)$ anteponiamo il quantificatore (x_i) la fbf $(x_i)\ A_1^1(x_i)$ significa “ogni cosa è rossa” che sarà un enunciato vero o falso a seconda del dominio D. Ancora se A_1^2 esprime la relazione “essere padre”, considerando come dominio l’insieme D={esseri umani}, la fbf $\neg(x_1)\ A_1^2(x_1,\ a_1)$ rappresenta l’enunciato vero: “non è vero che ogni essere umano è padre dell’essere umano denotato da a_1”.

Come già sappiamo la quantificazione è un’operazione logica che ha come argomenti enunciati aperti e come valori enunciati o predicati nel caso in cui non tutte le variabili vengono quantificate, come ad esempio la fbf $(x_1)\ A_1^2(x_1, x_2)$.

La logica delle teorie del primo ordine può essere pensata come una generalizzazione di quella del calcolo enunciativo. Il calcolo enunciativo analizza le operazioni corrette che si possono fare con gli enunciati usando i connettivi, il calcolo dei predicati del primo ordine sarà l’analisi delle operazioni corrette che si possono fare sia con i connettivi, che con la sostituzione e la quantificazione delle variabili.

Mediante la quantificazione e la negazione è possibile esprimere la nozione di esistenza, si ha la seguente definizione:

Def.29- Se X è una fbf e x_i una variabile individuale (Ex_i)X è un’abbreviazione per la fbf $\neg(x_i)$ ($\neg$X), ossia le affermazioni “ non è vero che per ogni x_i non vale X” e “esiste almeno un x_i tale che X vale”, sono equivalenti. Chiameremo (x_i) quantificatore universale e (Ex_i) quantificatore esistenziale.

Dalla definizione di fbf di una teoria del primo ordine risulta che ogni occorrenza di un quantificatore si applica ad una fbf che viene detta *campo d’azione* del quantificatore.
Ad esempio se consideriamo la fbf $(x_1)\ (E\ x_2)((E\ x_3)A_1^2(x_1, x_3)\Rightarrow A_1^2(x_1, x_2))$ il campo d’azione di (x_1) è la fbf $(E\ x_2)((E\ x_3)A_1^2(x_1, x_3)\Rightarrow A_1^2(x_1, x_2))$, quello di $(E\ x_2)$ è la fbf $((E\ x_3)A_1^2(x_1, x_3)\Rightarrow A_1^2(x_1, x_2))$, ed infine quello di $(E\ x_3)$ è la fbf $A_1^2(x_1, x_3)$.

Def.29- Un'occorrenza di una variabile x_i in una fbf X è detta *vincolata* se è posta nel campo d'azione di un quantificatore applicato a x_i, anche se si trova semplicemente all'interno delle parentesi di un quantificatore, altrimenti si dice *libera*. Si dice che una variabile è libera (vincolata) in una fbf se e solo se ha un'occorrenza libera (vincolata) nella fbf.
Ad esempio nella precedente fbf le occorrenze di tutte le variabili sono vincolate (non ci sono pertanto variabili libere); in $(x_1)A_1^2(x_1, x_2) \vee A_1^1(x_1)$, invece, la prima occorrenza di x_1 è vincolata, la seconda libera (ossia x_1 è contemporaneamente libera e vincolata), mentre l'unica occorrenza di x_2 è libera; in $A_1^2(x_1, x_2)$, infine, entrambe le variabili occorrono libere.

Def.30- Una fbf di una teoria del primo ordine si dice *chiusa* se non contiene variabili libere.
Ad esempio a fbf $(x_1)\ (E\ x_2)((E\ x_3)A_1^2(x_1, x_3) \Rightarrow A_1^2(x_1, x_2))$ è chiusa, mentre non lo sono $(x_1)A_1^2(x_1, x_2) \vee A_1^1(x_1)$ e $A_1^2(x_1, x_2)$.

L'insieme delle fbf chiuse di una teoria del primo ordine F è detto insieme degli enunciati di F, mentre le fbf che non sono chiuse (o aperte), ossia fbf che contengono variabili libere, rappresentano i predicati di F.

Prima di dare la definizione matematica d'interpretazione di una teoria del primo ordine, abbiamo bisogno di un'interpretazione intuitiva per le lettere funzionali f_m^n.

Scelto il dominio D, in cui variano le variabili individuali x_i, le lettere funzionali ad n posti rappresentano funzioni che hanno come argomenti n-ple ordinate di elementi di D e come valori elementi di D. In altri termini l'interpretazione di una lettera funzionale f_m^n è una funzione da D^n in D (f_m^n:$D^n \rightarrow D$), o per meglio dire una operazione a n posti in D. Per esempio, se il nostro dominio D è l'insieme dei numeri naturali, possiamo interpretare la lettera funzionale f_1^2 come l'operazione di addizione che associa ad ogni coppia di numeri naturali x_1 e x_2 la loro somma $f_1^2(x_1, x_2)$, ossia f_1^2: $\mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$; oppure se consideriamo come dominio l'insieme di numeri relativi, possiamo interpretare la lettera funzionale f_1^1come la funzione che associa al numero relativo x_1 il suo opposto $f_1^1(x_1)$, con f_1: $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$.

Diamo adesso una definizione matematica precisa del concetto d'interpretazione che costituisce il corrispondente rigoroso e formale dell'idea intuitiva d'interpretazione.

Def.31- Per *interpretazione* di una teoria del primo ordine F s'intende una coppia <D, g> costituita da un insieme non vuoto D (su cui variano le variabili individuali) e da una rappresentazione g.

Il dominio di g è l'insieme delle lettere funzionali, delle costanti individuali e delle lettere predicative di F, mentre il codominio di g è l'insieme $D \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}(D))$ dove $\mathcal{P}(\mathcal{M}(D))$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{M}(D)$ che è costituito da tutte le successioni finite di elementi di D.

L'applicazione g associa:

- ad ogni lettera predicativa A_m^n di F un sottoinsieme $g(A_m^n)$ di D^n [34];
- ad ogni lettera funzionale f_j^i di F un sottoinsieme $g(f_j^i)$ di D^{i+1} [35], dove $g(f_j^i)$ è una relazione funzionale, cioè un'applicazione di D^i in D;
- ad ogni costante individuale a_i un elemento $g(a_i)$ di D[36].

Per una data interpretazione <D, g> di un sistema formale F, le fbf chiuse, essendo gli enunciati di F, devono risultare o vere o false sotto quell'interpretazione; una fbf aperta, invece, può essere sia vera sia falsa, dato che essendo una relazione su D può essere soddisfatta per alcuni valori delle variabili libere ed in tal caso risulta vera, e non soddisfatta per altri risultando pertanto falsa.

Consideriamo ad esempio le seguenti fbf:

1) $A_1^2(x_1, x_2)$
2) $(x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$
3) $(Ex_1)\, (x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$

fissiamo un'interpretazione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali e sia A_1^2 la relazione "minore o uguale" ($g(A_1^2)$ è una relazione binaria, quindi $g(A_1^2) \subset \mathbf{N}^2$), in tal caso la 1) è la fbf aperta "$x_1 \leq x_2$" vera per tutte le coppie ordinate di numeri naturali (a, b) tali che $a \leq b$ e falsa altrimenti; la 2) è ancora una fbf aperta che significa " per tutti i naturali x_2, risulta $x_1 \leq x_2$" ed è soddisfatta solo se $x_1 = 1$; la 3) invece, è una fbf chiusa e rappresenta l'enunciato vero "esiste un naturale x_1 tale che $x_1 \leq x_2$ per ogni naturale x_2 "[37] Se avessimo scelto come dominio l'insieme degli interi relativi la 3) sarebbe risultata falsa.

[34] - ossia una relazione in D.
[35] - ossia un'operazione a i posti in D.
[36] - $g(a_i)$ è chiamato oggetto denotato da a_i .
[37] - Esistenza di un minimo intero positivo.

Definiamo adesso rigorosamente il concetto di verità e falsità di una fbf di una teoria del primo ordine relativamente ad un'interpretazione data. Diamo innanzi tutto la seguente

Def.32- Sia F un sistema formale e <D,g> una sua interpretazione, per ogni successione $s=\{s_1, s_2,\dots, s_n,...\}$ di elementi di D sia $g_s:T_F \rightarrow D$ una funzione (con T_F insieme dei termini di F) così definita:

1) $g_s(t)=g(a_i)\in D$ se t è una costante individuale,
2) $g_s(t)=s_i$ (i-esimo termine della successione s) se t è la variabile individuale x_i,
3) infine se t ha la forma $f_j^n(t_1, t_2,\dots,t_n)$ allora $g_s(t)=g(f_j^n(g_s(t_1),g_s(t_2),\dots,g_s(t_n)))$

Ad esempio se t è $f_2^2(x_3, f_1^2(x_1, a_1))$, D è l'insieme dei numeri relativi, f_1^2 e f_2^2 sono interpretate rispettivamente come le operazioni di addizione e moltiplicazione, ed a_1 denota il numero 2, allora $g_s(t)=s_3\times(s_1+2)$.

Definiamo adesso cosa vuol dire che una successione soddisfa una fbf.

Def.33- Siano A una fbf e s una successione di elementi del dominio D di una data interpretazione:

1) se A è una formula atomica, ossia ha la forma $A_k^n(t_1,t_2,\dots,t_n)$ e se la n-pla $\langle g_s(t_1),g_s(t_2),\dots,g_s(t_n)\rangle$ appartiene all'insieme $g(A_k^n)$, si dice che la successione s *soddisfa* A;
2) se A ha la forma $\neg X$, s soddisfa A se e solo se non soddisfa X;
3) se A ha la forma $X\vee Y$, s soddisfa A se e solo se soddisfa X, oppure Y, oppure entrambe;
4) se A ha la forma $(x_i)X$, s soddisfa A se e solo se ogni successione di elementi di D, che differisce da s al massimo per l'i-esimo elemento, soddisfa X.

Facciamo un esempio: se D è l'insieme dei numeri reali, $A_1^4(x, y, u ,v)$ è la relazione "$xv= yu$" e l'interpretazione di a_1 è 2, allora la successione di reali $s=\{s_1, s_2,\dots\}$ soddisfa $A_1^4(x_3, a_1, x_1 ,x_3)$ se e solo se $s_3^2=2s_1$; se invece consideriamo la fbf $\neg A_1^4(x_3, a_1,x_1 ,x_3)$ la successione s tale che $s_3^2=2s_1$ non la soddisfa, dato che deve risultare $s_3^2\neq 2s_1$.

Intuitivamente possiamo dire che una successione s={s_1, s_2,…}soddisfa una fbf A, se e solo se, quando sostituiamo per ogni i, s_i a tutte le occorrenze libere di x_i in A, l'enunciato risultante è vero sotto l'interpretazione data.
Possiamo dare ora la seguente:

Def.34- Una fbf A è *vera*, sotto una data interpretazione, se e solo se *ogni successione* di elementi del dominio la soddisfa, è falsa se *nessuna successione* la soddisfa.

Dalla precedente definizione di verità risulta, come già accennato, che è possibile che una fbf sia né vera né falsa, sotto una data interpretazione, può accadere infatti che sia soddisfatta da alcune successioni ma non da tutte, se riconsideriamo l'esempio di pag.93 si ha che $A_1^2(x_1, x_2)$, dove A_1^2 è la relazione "minore o uguale", è soddisfatta solo da quelle successioni di naturali in cui $s_1 \leq s_2$, quindi per esempio la successione s={2, 1, 2, 1, 2,…} non la soddisfa.
Si ha invece che, *una fbf chiusa X risulta o vera o falsa sotto una data interpretazione*. Ad esempio la fbf $(x_1)(x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \vee A_1^2(x_2, x_1))$, dove A_1^2 è la relazione "minore o uguale", è soddisfatta da ogni successione di numeri naturali, dato che l'insieme dei naturali è totalmente ordinato.
La dimostrazione rigorosa della precedente affermazione va fatta per induzione sul numero dei connettivi e dei quantificatori della fbf X, noi ci limitiamo a schizzarla.

Per fare ciò definiamo innanzitutto i concetti di chiusura universale ed esistenziale.

Def.35- Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le variabili libere di una fbf X, in ordine crescente di indice, la *chiusura universale* di X è la fbf $\overline{X}=(x_n)(x_{n-1})\ldots(x_1)X$, ottenuta quantificando universalmente all'inizio tutte le variabili libere di X nell'ordine indicato. Analogamente, la *chiusura esistenziale* di X è quella fbf ottenuta quantificando esistenzialmente tutte le variabili libere, ossia $(Ex_n)(Ex_{n-1})\ldots(Ex_1)X$ nell'ordine indicato.

Facciamo inoltre le seguenti osservazioni:

a) Una fbf chiusa coincide sia con la sua chiusura universale che con quella esistenziale.

b) Una qualsiasi fbf X è vera se e solo se lo è la sua chiusura universale. Infatti, per definizione una successione s soddisfa (x_i)X, se e solo se ogni successione che differisce da s al massimo per l'i-esimo elemento soddisfa X; pertanto se X è vera ogni successione soddisfa X e quindi (x_i)X, viceversa se ogni successione s soddisfa (x_i)X (ossia (x_i)X è vera) allora sicuramente ogni successione soddisfa X, dato che due successioni che differiscono per un elemento si possono considerare uguali. Reiterando questo ragionamento, per tante volte quanti sono i quantificatori, si ottiene che la chiusura universale di X è vera se e solo se lo è X.

Pertanto la verità di una fbf di un sistema formale F, sotto una data interpretazione, equivale alla verità di una fbf chiusa di F. Una fbf aperta, invece, può essere né vera né falsa, ed in tal caso la sua chiusura universale è falsa, dato che se fosse vera sarebbe vera la fbf.

Schizziamo adesso la dimostrazione induttiva del fatto che ogni fbf chiusa X di un sistema formale F è vera oppure falsa sotto una data interpretazione <D, g>. Come già detto l'induzione è sul numero **n** dei connettivi e dei quantificatori di X.
Se **n**=0, X è priva di connettivi e quantificatori, pertanto è una formula atomica, e poiché è chiusa contiene solo costanti individuali, cioè è della forma $A_j^i(a_1, a_2,\ldots, a_n)$. In questo caso X risulta vera se la n-pla $<g(a_1),g(a_2),\ldots,g(a_n)>$ appartiene alla relazione $g(A_j^i)$ e falsa altrimenti, quindi il teorema vale.
Supponiamo adesso che il teorema valga per le fbf che abbiano meno di **n** connettivi e quantificatori e che X abbia esattamente **n** connettivi e quantificatori, in tal caso X ha una delle seguenti forme: (x_i)B, $(B\vee C)$ o $(\neg B)$, dove B e C sono fbf che hanno meno di **n** connettivi e quantificatori. Ragionando separatamente per ogni singolo caso, applicando l'ipotesi di induzione e la definizione di verità si dimostra il teorema per X; nel caso in cui X ha la forma (x_i)B si usa la condizione per cui la chiusura universale è vera se e solo se lo è la fbf (il completamento della dimostrazione si lascia al lettore).

Diamo infine la seguente definizione:

Def.36- Una fbf X di una teoria del primo ordine F è *logicamente valida* o *universalmente valida*, se e solo se X è vera sotto ogni interpretazione di F.
Una fbf X è *soddisfacibile* se e solo se esiste almeno un'interpretazione per la quale X è soddisfatta da almeno una successione di elementi del dominio.

È evidente l'analogia tra la nozione di validità logica per una teoria del primo ordine e quella di tautologia per il sistema L del calcolo enunciativo, anzi tale nozione rappresenta una generalizzazione di quella di tautologia.
Fra la definizione di validità logica e quella di tautologia esiste una differenza qualitativa, nel senso che per le tautologie disponiamo di metodi meccanici che ci consentono di decidere, data una qualsiasi fbf, se si tratta o no di una tautologia; mentre i concetti di validità e verità dipendono essenzialmente da nozioni di teoria degli insiemi e non si dispone di un metodo semplice che consenta di decidere se una data fbf è valida o meno. Soltanto in alcuni casi si dispone di una procedura di decisione e Church ha dimostrato che non esiste un metodo generale di decisione capace di stabilire, data una qualsiasi fbf di un qualunque sistema formale, se si tratti o no di una formula logicamente valida.

Affrontiamo adesso il problema della formulazione degli assiomi e delle regole d'inferenza del calcolo dei predicati.
Premettiamo due definizioni:

Def.37- Data una fbf *A(x)*[38] si dice che un termine *t* è *libero per x* se nessuna variabile occorrente in *t* diventa vincolata da un quantificatore in *A(t)*[39].

Def.38- Data una fbf *A(x)* ed un'occorrenza libera di *x* in *A(x)*, si dice che un termine *t* è *libero per quella occorrenza* di *x*, quando nessuna variabile contenuta in *t* diventa vincolata da un quantificatore in *A(x)* nel caso in cui *t* venga sostituito al posto di quell'occorrenza di *x*.

Il termine *t* risulta libero per *x* nel senso della **Def.37** quando è libero per ogni occorrenza di *x* in *A(x)*. È possibile che un termine *t* sia libero per certe occorrenze di *x* e non per altre.

Facciamo qualche esempio. In $X=(x_2)A_1^2(x_1, x_2)$, il termine x_2 non è libero per x_1, poiché se sostituiamo in X x_1 con x_2, x_2 diventa vincolato; analogamente il termine $f_1^2(x_2, x_3)$ non è libero per x_1, dato che x_2 diventa vincolata se lo sostituiamo in X al posto di x_1; nella fbf $Y=(x_2)A_1^2(x_1, x_2)\Rightarrow A_1^1(x_1)$ il termine $f_1^2(x_1, x_3)$ risulta libero per x_1, ma lo stesso termine non è libero per x_1 nella fbf $Z=(Ex_3)(x_2)A_1^2(x_1, x_2)\Rightarrow A_1^1(x_1)$, anche se lo è per la seconda occorrenza di x_1.

38 - *A(x)* indica una fbf arbitraria che può contenere libera la variabile *x*.
39 - *A(t)* è ottenuta da *A(x)* sostituendo in essa tutte le occorrenze libere di *x* con *t*.

In particolare si ha che:

a. ogni termine che non contiene variabili è libero per ogni variabile in qualunque fbf;
b. un termine *t* è libero per ogni variabile di una fbf X se nessuna delle variabili di *t* è vincolata in X;
c. ogni variabile risulta libera per se stessa;
d. ogni termine è libero per una variabile *x* di una fbf X se X non contiene alcuna occorrenza libera di *x*.

3) L'insieme degli assiomi (logici) di una qualunque teoria del primo ordine F deve soddisfare le condizioni seguenti:

a. tutte le fbf di F che sono tautologie sono assiomi;
b. se $A(x)$ è una fbf e x una variabile, allora ogni fbf della forma $(x)A(x)\Rightarrow A(t)$[40] è un assioma purché t sia un termine libero per x;
c. ogni fbf avente la forma $(x)(B\Rightarrow A(x))\Rightarrow(B\Rightarrow(x)A(x))$ è un assioma, con x variabile qualsiasi che non sia libera nella fbf B e con $A(x)$ fbf qualunque;
d. nient'altro è un assioma logico.

4) Le regole d'inferenza di una teoria del primo ordine qualunque sono le seguenti:

a. *Modus ponens* (MP), ossia da A e A⇒B si può inferire B, con A e B fbf qualsiasi;
b. *Generalizzazione universale* (GU), ossia da una fbf A qualsiasi si può inferire la fbf *(x)*A.

In generale, un sistema del primo ordine avrà altri assiomi oltre quelli logici; tali assiomi sono detti specifici o propri (poiché dipendono dalla teoria cui si sta facendo riferimento), mentre le regole d'inferenza rimangono, in ogni sistema, sempre le stesse.

Un sistema del primo ordine i cui soli assiomi sono quelli logici viene detto *calcolo predicativo* e costituisce la teoria della deduzione formale che fa uso esclusivamente di assiomi logici e di regole.

[40] - Si veda la nota 39.

In ogni calcolo predicativo vale il seguente teorema:

Teorema 11- I teoremi di un calcolo predicativo qualunque sono fbf logicamente valide.

Per provare il teorema facciamo le seguenti osservazioni:

a) Ogni tautologia è universalmente valida.

b) Ogni fbf avente la forma $(x_i)A(x_i)\Rightarrow A(t)$ (assioma logico di tipo b.) è universalmente valida. Ciò si verifica se, fissata una qualsiasi interpretazione, ogni successione che soddisfa $(x_i)A(x_i)$ soddisfa $A(t)$.
Considerata pertanto, un'interpretazione qualunque <D, g>, se s è una successione che soddisfa $(x_i)A(x_i)$, ogni successione che differisce al massimo per l'i-esimo elemento da s soddisfa $A(x_i)$, pertanto, qualunque sia l'oggetto $g_s(t)$, la successione s deve soddisfare $A(t)$, quindi la fbf della forma $(x_i)A(x_i)\Rightarrow A(t)$ è vera sotto ogni interpretazione (una dimostrazione rigorosa dovrebbe procedere per induzione sul numero delle lettere funzionali occorrenti in ogni termine t).

c) Ogni fbf avente la forma $(x_i)(B\Rightarrow A(x_i))\Rightarrow(B\Rightarrow(x_i)A(x_i))$ (assioma logico di tipo c.) è universalmente valida.
Supponiamo, infatti per assurdo, che esista un'interpretazione <D, g> sotto la quale $(x_i)(B\Rightarrow A(x_i))\Rightarrow(B\Rightarrow(x_i)A(x_i))$ non sia vera, deve esistere quindi una successione s di elementi di D che soddisfa $(x_i)(B\Rightarrow A(x_i))$ e non soddisfa $(B\Rightarrow(x_i)A(x_i))$, dato che $(x_i)(B\Rightarrow A(x_i))\Rightarrow(B\Rightarrow(x_i)A(x_i))$ si può scrivere come $\neg(x_i)(B\Rightarrow A(x_i))\vee(B\Rightarrow(x_i)A(x_i))$ che è soddisfatta da s se s soddisfa $(B\Rightarrow(x_i)A(x_i))$. Analogamente se s non soddisfa $(B\Rightarrow(x_i)A(x_i))$, s soddisfa B e non soddisfa $(x_i)A(x_i)$, allora esiste una successione s' che differisce da s al massimo per l'i-esimo elemento che non soddisfa $A(x_i)$. D'altra parte, dato che x_i non è libera né in $(x_i)(B\Rightarrow A(x_i))$ né in B s' le soddisfa entrambi, dato che sono soddisfatte da s[41], quindi per definizione s', soddisfacendo $(x_i)(B\Rightarrow A(x_i))$, soddisfa $B\Rightarrow A(x_i)$, e soddisfacendo B soddisfa $A(x_i)$ (altrimenti l'implicazione non sarebbe soddisfatta) contraddicendo il fatto che s′ non soddisfa $A(x_i)$.

[41] - Le due successioni differiscono al massimo per l'i-esimo elemento.

d) Inoltre le regole d'inferenza conservano la validità universale; nel caso del MP ciò è un'immediata conseguenza della tavola di verità per l'implicazione; nel caso della GU basta ricordare che una fbf è vera se e solo se è vera la sua chiusura universale.

Pertanto poiché un teorema del calcolo predicativo si ottiene dagli assiomi logici mediante applicazione delle regole d'inferenza che conservano la validità universale, tutti i teoremi di un tale calcolo risultano universalmente validi (anche in questo caso una dimostrazione rigorosa richiederebbe un'induzione sulla lunghezza della dimostrazione del teorema).

Questa situazione è analoga a quella che si verifica nel sistema L, in cui tutti i teoremi sono tautologie. Nel sistema L, inoltre, tutte le tautologie sono teoremi (completezza semantica), analogamente nelle teorie del primo ordine vale il seguente:

Teorema 12- In ogni teoria del primo ordine F le fbf universalmente valide sono esattamente i teoremi di F.

La dimostrazione di questo teorema, che è un risultato tutt'altro che banale, fu data per la prima volta da Gödel nel 1930, noi ne dimostreremo una parte in seguito (v. Teorema 19).

Nel calcolo proposizionale, la completezza semantica del sistema L ha portato alla soluzione del problema della decidibilità, ciò non accade, invece, per le teorie del primo ordine, come già detto, infatti, Church ha dimostrato che le fbf valide di una teoria del primo ordine, e quindi i teoremi di un calcolo predicativo, non costituiscono un insieme decidibile. Non esiste in pratica una procedura di decisione per la validità logica, o equivalentemente, per la dimostrabilità in un calcolo predicativo.

Diamo adesso due definizioni che costituiscono una generalizzazione dei concetti d'implicazione ed equivalenza tautologica.

Def.39- Date due fbf A e B di una teoria del primo ordine F, diciamo che A implica B in F, se e solo se $\vdash_F A \Rightarrow B$. Se F è un calcolo predicativo, diciamo che A implica logicamente B.

Per il **Teorema 12** A implica B significa che il condizionale $A \Rightarrow B$ è logicamente valido.
Il concetto d'implicazione logica costituisce una generalizzazione di quello d'implicazione tautologica (**Def.5**). Poiché le tautologie sono teoremi di ogni calcolo predicativo, ogni implicazione tautologica è anche un'implicazione logica, ma in generale non vale il viceversa, pertanto l'implicazione logica rappresenta una relazione più forte dell'implicazione tautologica.

Def.40- Date due fbf A e B di una teoria del primo ordine F, diciamo che A è equivalente a B in F, se e solo se $\vdash_F A \Leftrightarrow B$. Se F è un calcolo predicativo, diciamo che A è logicamente equivalente a B.

Per il **Teorema 12** ciò significa che la doppia implicazione $A \Leftrightarrow B$ è logicamente valida.
Anche in questo caso l'equivalenza logica rappresenta una generalizzazione dell'equivalenza tautologica (**Def.6**), ed è una relazione più forte rispetto a quest'ultima.

Modelli delle teorie del primo ordine

Come abbiamo già detto gli assiomi specifici di una teoria del primo ordine F sono gli assiomi della teoria diversi da quelli logici, e differenti pertanto da teoria a teoria. Gli assiomi logici sono universalmente validi, quindi veri rispetto ad ogni interpretazione, questo non accade, invece, per gli assiomi specifici che possono, in ogni modo, risultare veri rispetto a qualche interpretazione.
Si ha la seguente definizione:

Def.41- Sia F un sistema del primo ordine, per *modello* di F s'intende un'interpretazione di F in cui gli assiomi specifici sono tutti veri.

In generale non è detto che un sistema del primo ordine abbia un modello; il problema dell'esistenza di modelli per un sistema del primo ordine è connesso a quello della coerenza del sistema stesso.
Diamo la seguente definizione:

Def.42- Un sistema del primo ordine F è detto *incoerente* o *inconsistente* se esiste in esso una fbf A tale che la fbf $(A\wedge\neg A)$, che è una contraddizione, è un teorema di F. Un sistema formale è detto *coerente* o *consistente* se non è inconsistente.

Dato che l'insieme dei teoremi di una teoria del primo ordine non è decidibile, la teoria può essere incoerente senza che noi lo sappiamo e ciò può essere fonte di difficoltà, come mostra il seguente teorema (analogo a quello valido nel sistema L[42]):

Teorema 13- Un sistema F è inconsistente se e solo se ogni sua fbf è un teorema.
Dim.
Supponiamo che F sia inconsistente e sia $(A\wedge\neg A)$ la contraddizione dimostrabile in F. Sia X una fbf qualsiasi, vale allora $\vdash_F (A\wedge\neg A)\Rightarrow X$, per il **Teorema 12** dato che $(A\wedge\neg A)\Rightarrow X$ è una tautologia, quindi per MP si ricava $\vdash_F X$, ossia ogni fbf è dimostrabile. Viceversa supponiamo che ogni fbf di F sia un teorema, e sia X una fbf qualsiasi; in tal caso anche $(X\wedge\neg X)$ è una fbf e quindi dimostrabile in F, quindi per definizione F è inconsistente.

[42] - Si veda il Teorema 9.

In un sistema formale incoerente, pertanto ogni cosa risulta dimostrabile.

Dalla definizione di modello e dal fatto che le regole d'inferenza conservano, rispetto ad una data interpretazione, la verità delle fbf cui sono applicate, discende che *tutti i teoremi di un sistema formale sono veri in ogni modello del sistema*; da ciò segue il seguente teorema:

Teorema 14- Un sistema incoerente F non ammette modello.
Dim.
Supponiamo che F sia inconsistente e sia $(A\wedge\neg A)$ la contraddizione dimostrabile in F, la fbf $\neg(A\wedge\neg A)$ è una tautologia ed essendo universalmente valida è vera in ogni interpretazione, ma ciò succede se e solo se $(A\wedge\neg A)$ è falsa sotto ogni interpretazione. Se F avesse un modello <D,g>, allora ogni teorema di F, e quindi la contraddizione $(A\wedge\neg A)$, sarebbe vero in <D,g>, ma $(A\wedge\neg A)$ è falsa sotto ogni interpretazione e quindi in particolare in <D,g>. La fbf $(A\wedge\neg A)$ dovrebbe dunque essere sia vera sia falsa in <D, g>. Ma nessuna fbf X può essere contemporaneamente vera e falsa sotto una data interpretazione, dato che è impossibile che ogni successione di elementi di D soddisfi X e nello stesso tempo nessuna successione la soddisfi. Pertanto l'ipotesi che F abbia un modello conduce ad una contraddizione e dobbiamo concludere che F non ha modelli.

Per contrapposizione dal **Teorema 14** si ottiene il seguente:

Corollario 2-Se F ha un modello, allora è coerente.

Per determinare, quindi se un sistema formale è coerente, in base al precedente corollario, basta trovarne un modello.

Si dimostra che qualunque calcolo predicativo è coerente, per farlo dobbiamo definire la *forma enunciativa associata* (in breve fea) di una fbf di una teoria del primo ordine.

Def.43- Per *forma enunciativa associata* di una fbf X s'intende l'espressione ottenuta eliminando tutti i quantificatori e tutti i termini (assieme alle relative parentesi e virgole), e sostituendo, in modo uniforme, ogni lettera predicativa con una lettera enunciativa del sistema L.

Ad esempio la fea della fbf $(x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_3))$ è $(x_1\Rightarrow x_2)$, e quella di $(x_1)(x_2)(A_1^2(f_1^1(x_1),x_2)\Rightarrow A_2^1(x_3))\wedge(A_1^2(x_1, x_2)\vee A_3^1(x_1))$ è $(x_1\Rightarrow x_2)\wedge(x_1\vee x_3)$.

Dimostriamo adesso il teorema:

Teorema 15- Ogni calcolo predicativo è consistente.
Dim.
Osserviamo innanzi tutto che la fea degli assiomi logici è una tautologia. Per gli assiomi che già sono tautologie la cosa è ovvia; per gli assiomi di secondo e terzo tipo otteniamo come fea rispettivamente le tautologie $X \Rightarrow X$ e $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$, con X e Y fbf di L.
Inoltre se le fbf A e $A \Rightarrow B$ hanno per fea una tautologia, anche la fbf B avrà per fea una tautologia[43], quindi la regola del Modus Ponens conserva la proprietà di avere come fea una tautologia.
Analogamente la regola di generalizzazione universale conserva la proprietà della fea tautologica, dato che la fea di A coincide con quella di (x)A.
Da quanto detto segue che tutti i teoremi di un calcolo predicativo qualunque hanno come fea una tautologia. La fea di una contraddizione non può essere una tautologia, quindi una contraddizione non potrà mai essere un teorema di un qualsiasi calcolo predicativo, che pertanto risulta consistente.

Come abbiamo già detto una fbf chiusa di un sistema del primo ordine risulta o vera o falsa sotto una data interpretazione, è naturale allora chiedersi se i teoremi di un sistema del primo ordine coincidono con l'insieme delle formule del sistema che sono vere rispetto a una certa interpretazione. Risulta che ciò è possibile solo nel caso in cui si tratti di un sistema *completo* secondo la seguente definizione:

Def.44-Un sistema del primo ordine F è *completo* se e solo se per ogni fbf chiusa di F vale $\vdash_F X$ oppure $\vdash_F \neg X$.

Naturalmente ogni sistema inconsistente è banalmente completo, dato che in esso ogni fbf è un teorema.

In un calcolo predicativo qualunque vale il seguente teorema:

Teorema 16- Nessun calcolo predicativo è completo.
Dim.
Sia A_m^n una lettera predicativa del calcolo predicativo F e consideriamo la fbf chiusa $X=(x_1)(x_2)\ldots(x_n)A_m^n(x_1, x_2,\ldots, x_n)$. La fea di X è x_1 che non è una tautologia e quindi X non è un teorema di F; d'altra parte la fea di $\neg X$ è $\neg x_1$, ed anch'essa non è una tautologia ossia neppure $\neg X$ e teorema di F.

[43] - Per la regola del MP in L.

Da ciò segue allora, che F non è completo e poiché si trattava di un calcolo predicativo qualunque, nessun calcolo predicativo è completo.

Le dimostrazioni degli ultimi due teoremi si basano sul fatto che, *condizione necessaria* affinché una formula sia un teorema di un calcolo predicativo è che la sua fea sia una tautologia. Si tenga presente però che questa condizione non è *sufficiente*; se così fosse avremmo a disposizione un metodo di decisione per il calcolo predicativo. Risulta pertanto che certe fbf, pur avendo fea tautologica non sono teoremi, ossia fbf universalmente valide.[44] Ad esempio la fbf $A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^2(x_2, x_1)$ ha per fea $x_1 \Rightarrow x_1$ che è una tautologia, ma se consideriamo l'interpretazione con D=**N** e dove $A_1^2(y,z)$ sta per $y \geq z$, la fbf risulta né vera né falsa.

Abbiamo già detto che un sistema formale si dice assiomatico se l'insieme dei suoi assiomi è decidibile, in particolare un *sistema del primo ordine* è *assiomatico* quando è decidibile l'insieme dei suoi *assiomi specifici*, dato che gli assiomi logici di una qualsiasi teoria del primo ordine sono sempre decidibili.
Si ha inoltre la seguente definizione:

Def.45- Un sistema del primo ordine F si dice *assiomatizzabile* se esiste un altro sistema del primo ordine F' con le stesse fbf e con gli stessi assiomi di F, che abbia un insieme di assiomi specifici decidibile.

In altre parole, un sistema del primo ordine è assiomatizzabile quando esiste un'assiomatizzazione che determina il suo stesso insieme di teoremi.

Il **Corollario 2** ha stabilito che ogni teoria del primo ordine che ha un modello è consistente, l'inverso di questo corollario costituisce il teorema di "completezza" per la logica del primo ordine, dimostrato per la prima volta da Gödel (1930), che enunciamo senza darne la dimostrazione.[45]

Teorema 17- Ogni teoria del primo ordine consistente ha un modello.

Questo teorema è molto importante perché da esso si può dimostrare che ogni fbf universalmente valida di una teoria del primo ordine è un teorema di quella teoria. Per dimostrare quest'affermazione abbiamo bisogno di alcuni lemmi. Introduciamo dapprima la seguente definizione:

[44] - Si veda Teorema 11.
[45] - Per la dimostrazione si veda Mendelson (1964).

Def.46- Se F è un sistema del primo ordine e se $A \vdash_F B$, diciamo che una formula X *dipende* da A nella dimostrazione di B a partire da A quando X è A oppure X è inferita da altre formule di cui almeno una dipende da A.

Si ha allora il seguente teorema:

Teorema 18- Sia F un sistema del primo ordine, se $A \vdash_F B$ e se B non dipende da A, allora $\vdash_F B$.
Dim.
Se A è un assioma di F allora si ha $\vdash_F B$.
Supponiamo che A non sia un assioma di F e ragioniamo per induzione sulla lunghezza **n** della dimostrazione di B dall'ipotesi A.
Se **n**=1, B è l'unica riga della dimostrazione, quindi o B coincide con A o B è un assioma di F; ma B non può essere A, perché per ipotesi non dipende da A, allora è un assioma e dunque un teorema di F.
Supponiamo ora che il teorema valga per tutte le dimostrazioni di lunghezza minore di **n** e consideriamo il caso di una dimostrazione di lunghezza **n**. La formula B non può essere A e se B è un assioma è anche un teorema. Supponiamo ora che B sia inferita da elementi precedenti della dimostrazione; questi elementi sono tutti l'ultima riga di una dimostrazione di lunghezza minore di **n** a partire da A, e per ipotesi d'induzione sono teoremi di F. Allora B è inferita da teoremi e pertanto è essa stessa un teorema.

Questo teorema ci dice che se la fbf B, in una deduzione a partire da A, non dipende da questa, l'ipotesi A non ha contribuito in alcun modo alla deduzione di B.

Un importante corollario del precedente teorema è il **Teorema di deduzione**, ossia il seguente:

Corollario 3- Sia F un sistema del primo ordine, se $A \vdash_F B$ e se nella deduzione non è mai stata applicata la regola di GU a formule dipendenti da A e nelle quali la variabile quantificata era libera in A, allora $\vdash_F A \Rightarrow B$.
Dim.
Anche in questo caso procediamo per induzione sulla lunghezza **n** della dimostrazione di B dall'ipotesi A.
Se **n**=1, la dimostrazione consiste di una sola riga B. Se B coincide con A, essendo $A \Rightarrow A$ una tautologia e dunque un teorema di F, risulta $\vdash_F A \Rightarrow B$.
Se, invece, B è un assioma, dalla tautologia $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ per MP si deduce che $\vdash_F A \Rightarrow B$.

Supponiamo ora che il teorema valga per dimostrazioni di lunghezza minore di **n** e consideriamo una dimostrazione di lunghezza **n**.
Se B è A oppure un assioma ragioniamo come prima.
Se B è inferita per MP da elementi precedenti della dimostrazione, C e $C\Rightarrow B$, dato che C e $C\Rightarrow B$ sono l'ultima riga di una dimostrazione di lunghezza minore di **n** a partire da A, per ipotesi d'induzione risulta $\vdash_F A\Rightarrow C$ e $\vdash_F A\Rightarrow(C\Rightarrow B)$, e poiché $(A\Rightarrow C)\Rightarrow((A\Rightarrow(C\Rightarrow B))\Rightarrow(A\Rightarrow B))$ è una tautologia applicando due volte il MP si ottiene $\vdash_F A\Rightarrow B$.
Se infine B è ottenuta da una formula precedente C mediante GU, in tal caso B ha la forma $(x)C$, dove x è una variabile. Una delle ipotesi del corollario è che C non dipenda da A e quindi per il **Teorema 18** $\vdash_F C$ e per GU $\vdash_F (x)C$, ossia $\vdash_F B$ e dalla tautologia $B\Rightarrow(A\Rightarrow B)$ per MP si ottiene $\vdash_F A\Rightarrow B$. Se C dipende da A per l'altra ipotesi x non è libera in A. Dato che C è l'ultima riga di una dimostrazione di lunghezza minore di **n** a partire dall'ipotesi A, allora per ipotesi d'induzione si ha $\vdash_F A\Rightarrow C$ e per GU $\vdash_F (x)(A\Rightarrow C)$, dove x non è libera in A. Ora per l'assioma logico $(x)(A\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow(x)C)$ e per MP risulta $\vdash_F A\Rightarrow(x)C$ e cioè $\vdash_F A\Rightarrow B$.

L'ipotesi del precedente corollario è alquanto complessa e impegnativa, il seguente corollario, più debole, si dimostra spesso di maggiore utilità.

Corollario 4- Sia F un sistema del primo ordine, se $A\vdash_F B$ e se A è chiusa, allora $\vdash_F A\Rightarrow B$.
Dim.
La dimostrazione è immediata dato che A non ha variabili libere essendo chiusa per ipotesi, pertanto sono soddisfatte le ipotesi del precedente corollario, dato che non si applica la regola di GU a fbf dipendenti da A contenenti variabili libere in A.

Un altro importante risultato è stabilito dal teorema che segue:

Teorema 19- Sia F un qualunque sistema del primo ordine e X una fbf chiusa che non sia un teorema di F. Allora se si aggiunge ad F $\neg X$ come nuovo assioma, si ottiene un sistema F' coerente.
Dim.
Supponiamo per assurdo che F' sia incoerente, in tal caso ogni fbf e quindi in particolare X è dimostrabile in F', in altri termini X è dimostrabile in F a partire dall'ipotesi $\neg X$, cioè $\neg X\vdash_F X$. Ma $\neg X$ è chiusa dato che lo è per ipotesi X, allora per il precedente corollario si ha $\vdash_F \neg X\Rightarrow X$, e dalla tautologia $(\neg X\Rightarrow X)\Rightarrow X$ per MP otteniamo che $\vdash_F X$, cosa che contraddice l'ipotesi. Il sistema F' pertanto deve essere coerente.

Si osservi che il sistema F del precedente teorema è coerente dato che esiste una fbf, la X, che non è teorema di F.

Come anticipato a pag. 105 facciamo vedere che il teorema di “completezza” per la logica del primo ordine implica il seguente teorema:

Teorema 20-Tutte le fbf universalmente valide di un qualunque sistema del primo ordine F sono teoremi di F.

Dim.

Sia F un qualsiasi sistema del primo ordine e sia X una qualunque fbf di F universalmente valida e non dimostrabile in F. In tal caso non sarà dimostrabile nemmeno la sua chiusura universale $\overline{X}$, dato che una fbf è vera se e solo se lo è la sua chiusura universale e i teoremi sono fbf vere in ogni modello di F.

Ma $\overline{X}$ è chiusa, quindi per il **Teorema 19**, possiamo aggiungere a F come nuovo assioma $\neg\overline{X}$ ed ottenere un sistema F' coerente. Come sistema coerente F' ha un modello[46] in cui risultano veri tutti i suoi assiomi ed in particolare $\neg\overline{X}$, pertanto $\overline{X}$ deve risultare falsa in tale modello. Da ciò segue che anche X, in quel modello, deve essere falsa. Ma X per ipotesi è universalmente valida, pertanto sarebbe contemporaneamente vera e falsa nel modello di F', il che è assurdo; X deve dunque essere un teorema di F.

Dato che X è una fbf qualunque, resta dimostrato che tutte le fbf universalmente valide sono teoremi di F.

Un’importante conseguenza del precedente teorema è il seguente corollario:

Corollario 5- Sia F una teoria del primo ordine e sia X una qualunque fbf di F vera in ogni modello di F, allora $\vdash_F X$.[47]

Dim.

Supponiamo che X sia vera in ogni modello di F ma non sia dimostrabile in F. Se X non è dimostrabile in F non lo sarà neanche la sua chiusura universale $\overline{X}$. Da ciò segue che possiamo aggiungere a F come nuovo assioma $\neg\overline{X}$ ed ottenere un sistema F' coerente. Come sistema coerente F' deve avere un modello <D,g>, in cui $\neg\overline{X}$ è vera. D’altra parte ogni assioma di F è anche assioma di F', cosicché <D, g> deve essere un modello di F. Per ipotesi X e quindi $\overline{X}$ è vera in ogni modello di F, ed in particolare in <D, g>; pertanto $\neg\overline{X}$ deve essere falsa in <D, g> contrariamente alla nostra precedente conclusione. Dobbiamo dunque respingere l’ipotesi d’assurdo che X non sia dimostrabile in F e concludere che $\vdash_F X$.

[46] - Si veda Teorema 17.

[47] - Affermazione inversa di quella riportata a pag.103.

Il **Teorema 19** sta alla base di un'importante nozione, quella di *estensione* di un sistema formale, secondo la seguente definizione:

Def.47- Un sistema del primo ordine F' è un'*estensione* del sistema del primo ordine F, quando i due sistemi hanno lo stesso alfabeto, le stesse fbf e gli stessi assiomi. L'estensione è detta propria se F' ha degli assiomi che non sono in F.

Un importante teorema è il seguente:

Teorema 21 (di Lindenbaum) -Ogni teoria del primo ordine F coerente ha un'estensione coerente e completa.
Dim.
Dato che l'insieme delle fbf di qualunque teoria del primo ordine è numerabile, possiamo enumerare le fbf chiuse; sia B_1, B_2,…, B_n,… una tale enumerazione.
Consideriamo B_1, essa è dimostrabile o non dimostrabile; se B_1 non è dimostrabile aggiungiamo $\neg B_1$ come nuovo assioma ad F e otteniamo F_1 estensione coerente di F, se B_1 è dimostrabile poniamo $F_1=F$ e passiamo a considerare B_2.
Se B_2 non è dimostrabile aggiungiamo $\neg B_2$ come nuovo assioma ad F_1 e otteniamo F_2 estensione coerente di F_1, se B_2 è dimostrabile poniamo $F_2=F_1$ e passiamo a considerare B_3.
In generale sia F_n il sistema formale ottenuto applicando il nostro procedimento a B_n, ossia per ogni n, o F_n è estensione coerente di F_{n-1} oppure $F_n=F_{n-1}$.
Sia infine $F_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$; F_∞, estensione di F, deve essere coerente. Infatti, se non lo fosse, ci sarebbe una derivazione formale in F_∞ di una contraddizione. Ogni derivazione ha lunghezza finita e coinvolge quindi solo un numero finito di assiomi di F_∞; tali assiomi devono allora essere contenuti in qualche F_i, in tal modo dovrebbe essere dimostrabile una contraddizione in F_i. Ciò è assurdo poiché, per costruzione, tutti gli F_i sono coerenti, pertanto F_∞ è coerente.
Inoltre F_∞ è un sistema completo; infatti come estensione di F ha le stesse fbf di F e per ogni fbf chiusa B_n di F_∞, o si ha $\vdash_{F_n} B_n$ oppure $\neg B_n$ è stata aggiunta come nuovo assioma a F_n. In ogni caso dunque in F_∞, estensione di ogni F_n, o è dimostrabile B_n oppure lo è $\neg B_n$.

Diamo infine senza dimostrazione un importante teorema sulla cardinalità dei modelli di un sistema del primo ordine.

Teorema 22 (di Löwenheim-Skolem) - Se un sistema del primo ordine F ha un modello, allora ha sempre anche un modello finito o numerabile, ossia un modello in cui il dominio D è un insieme finito o numerabile. Inoltre, se D' è un insieme qualunque di cardinalità maggiore o uguale a quella di D e se F ha un modello di dominio D, allora ha anche un modello di dominio D'.

Si hanno inoltre i seguenti corollari, la cui semplice dimostrazione si lascia al lettore.

Corollario 6- Ogni teoria del primo ordine coerente ha un modello numerabile.

Corollario 7- Fissata una qualunque cardinalità infinita, ogni teoria del primo ordine coerente ha un modello avente quella cardinalità.