Alberi binari

Abbiamo già visto che il numero delle righe di una tavola di verità, e quindi la sua complessità, dipende dal numero delle c.a. dell'enunciato o fbf da esaminare, tale numero cresce rapidamente essendo una potenza di due, già con quattro c.a. si hanno ben sedici righe, con cinque c.a. trentadue righe e così via.

Un modo più semplice per determinare il valore di verità di una fbf consiste nel costruire un albero binario di formule ben formate, sfruttando un algoritmo dovuto a Quine.

Il procedimento da seguire per la costruzione di un albero binario è il seguente: si parte dalla fbf da esaminare, che viene detta vertice o radice dell’albero, e si fanno delle ramificazioni sostituendo, ordinatamente, ogni occorrenza di una componente atomica con **V** (vero) e **F** (falso); quindi si semplifica secondo, regole che discendono direttamente dal significato dei connettivi, ottenendo in tal modo fbf via via più semplici. Il procedimento termina quando si arriva a “fbf terminali” costituite di sole **V** o **F**.

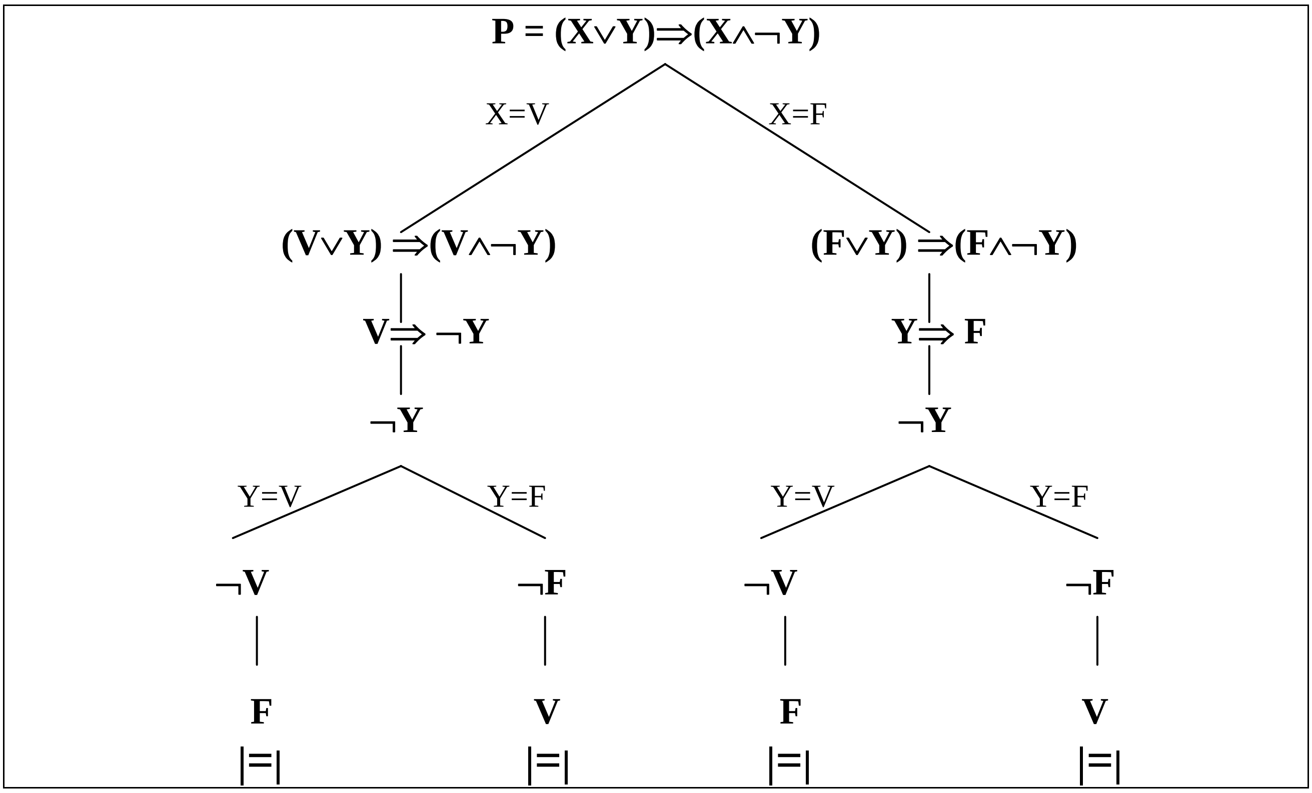
Alla fine della costruzione, se alla base dell’albero tutte le “fbf terminali” sono **V** la fbf è una tautologia, se sono tutte **F** è una contraddizione, altrimenti (non tutte **V** e non tutte **F**) si tratta di una fbf sintetica.

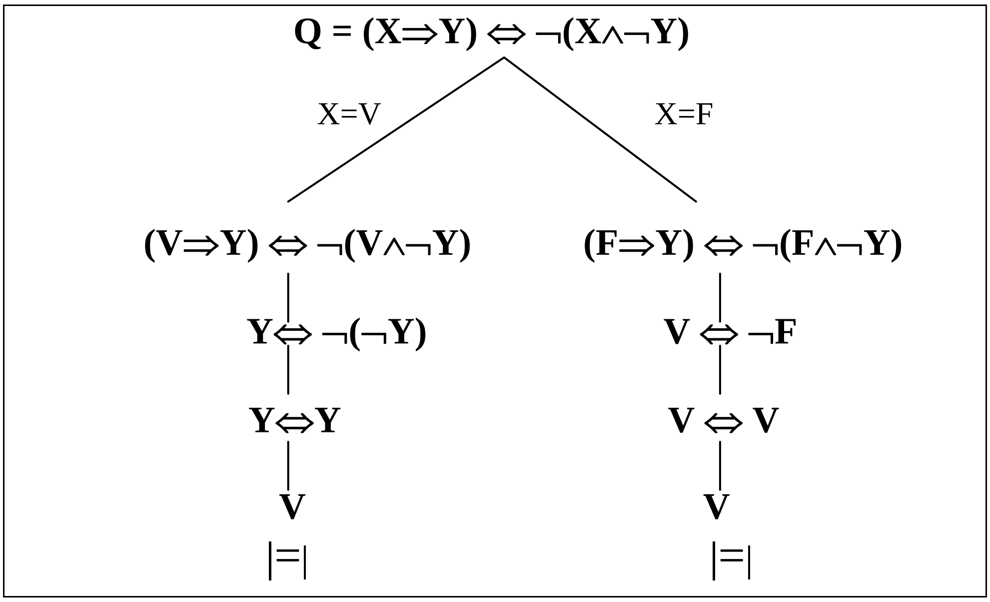
Dal significato attribuito ai connettivi, le fbf possono esse semplificate operando le sostituzioni riportate nella tabella che segue:

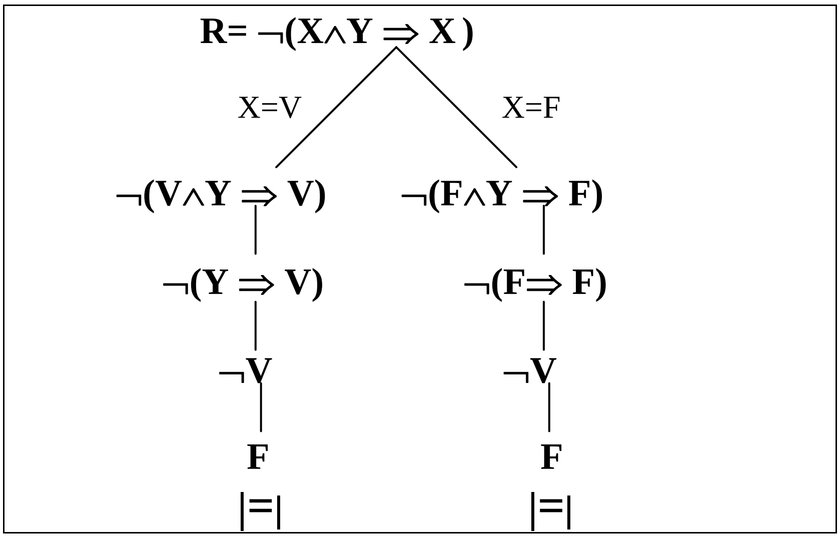
Regole di semplificazione

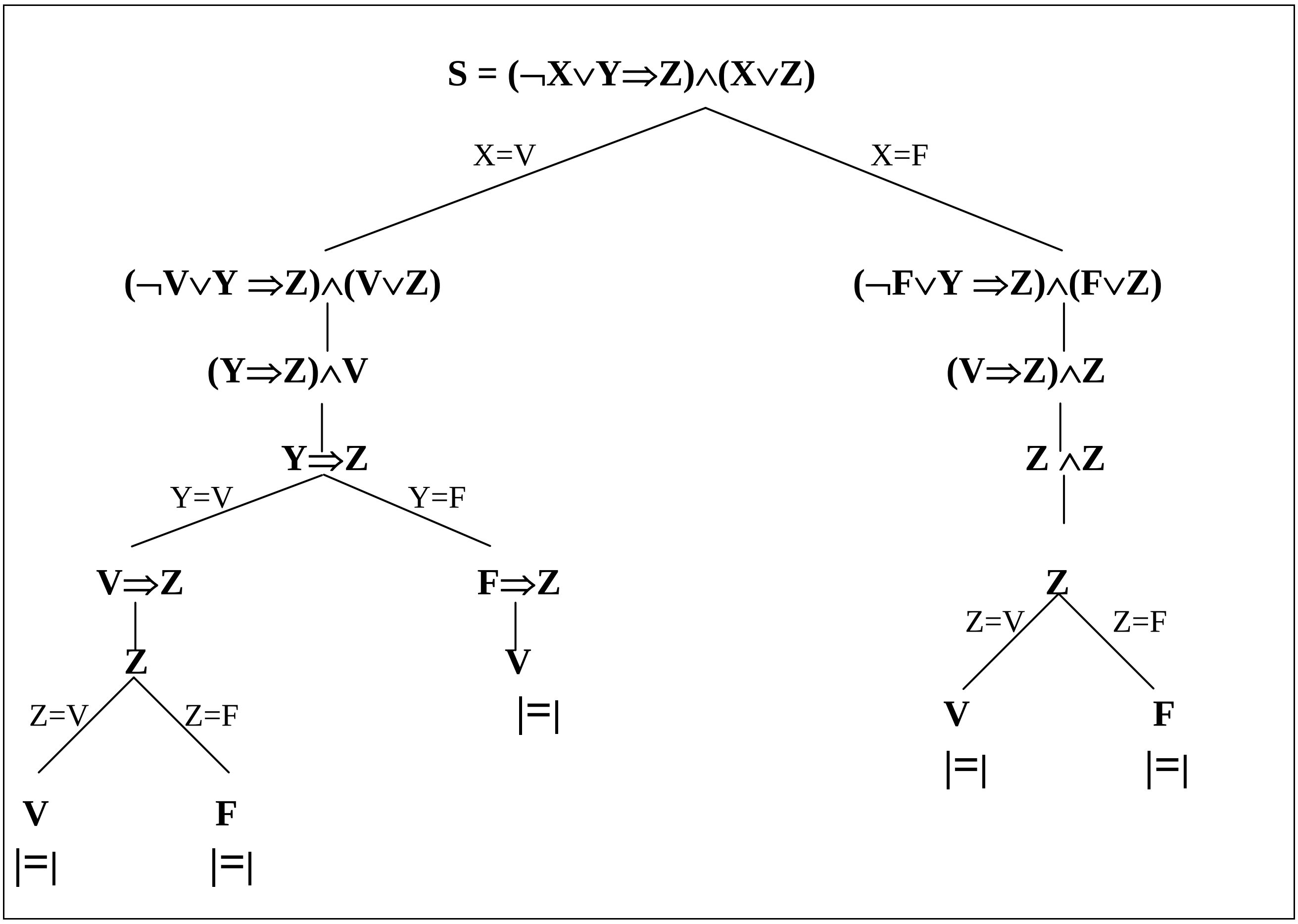
Connettivi	fbf	sostituzione
Negazione	$\neg\neg P$ $\neg V$ $\neg F$	**P** **F** **V**
Congiunzione	$V\wedge Q$ $P\wedge V$ $F\wedge Q$ $P\wedge F$ $P\wedge P$ $P\wedge\neg P$ $\neg P\wedge P$	**Q** **P** **F** **F** **P** **F** **F**
Disgiunzione	$V\vee Q$ $P\vee V$ $F\vee Q$ $P\vee F$ $P\vee P$ $P\vee\neg P$ $\neg P\vee P$	**V** **V** **Q** **P** **P** **V** **V**
Implicazione	$V\Rightarrow Q$ $P\Rightarrow V$ $F\Rightarrow Q$ $P\Rightarrow F$ $P\Rightarrow P$ $P\Rightarrow\neg P$ $\neg P\Rightarrow P$	**Q** **V** **V** $\neg P$ **V** $\neg P$ **P**
Coimplicazione	$V\Leftrightarrow Q$ $P\Leftrightarrow V$ $F\Leftrightarrow Q$ $P\Leftrightarrow F$ $P\Leftrightarrow P$ $P\Leftrightarrow\neg P$ $\neg P\Leftrightarrow P$	**Q** **P** $\neg Q$ $\neg P$ **V** **F** **F**

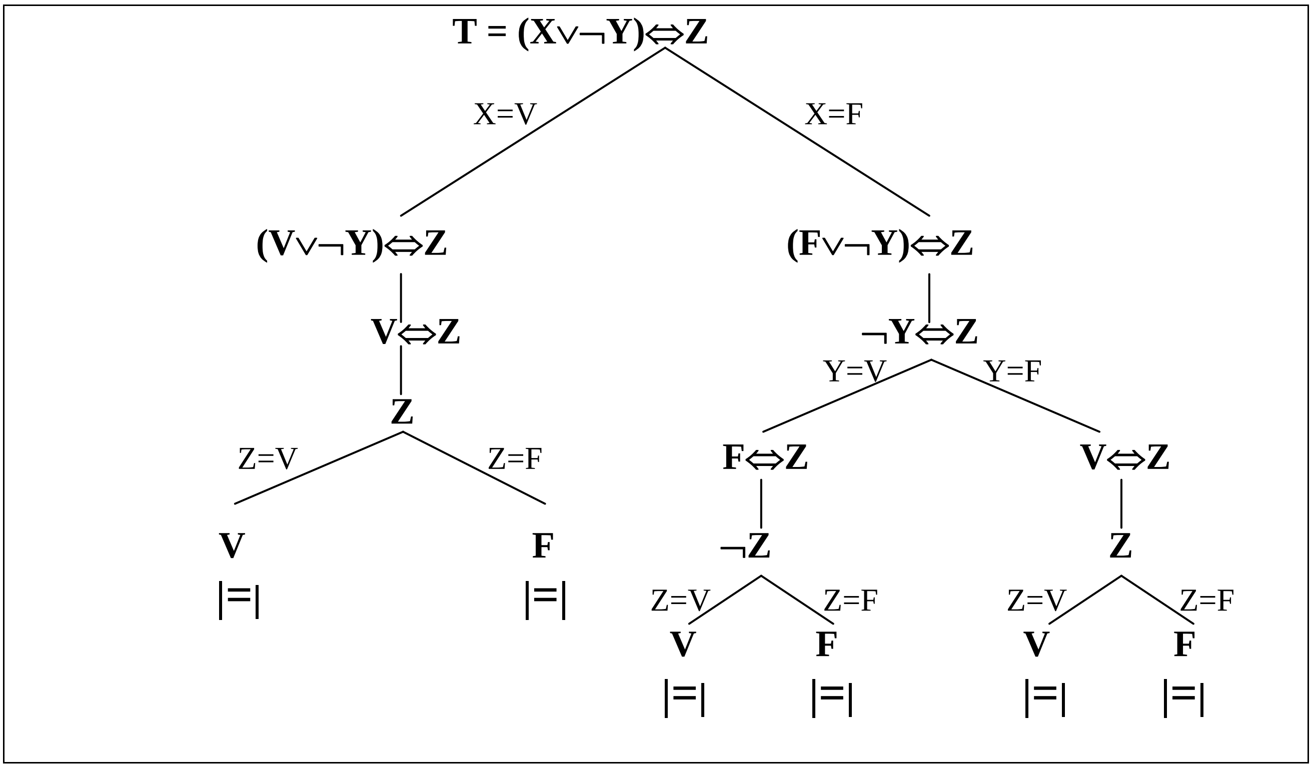
Consideriamo adesso le fbf delle quali abbiamo costruito le tavole di verità e costruiamo i corrispondenti alberi binari (le “fbf terminali” sono sottosegnate da |=|).

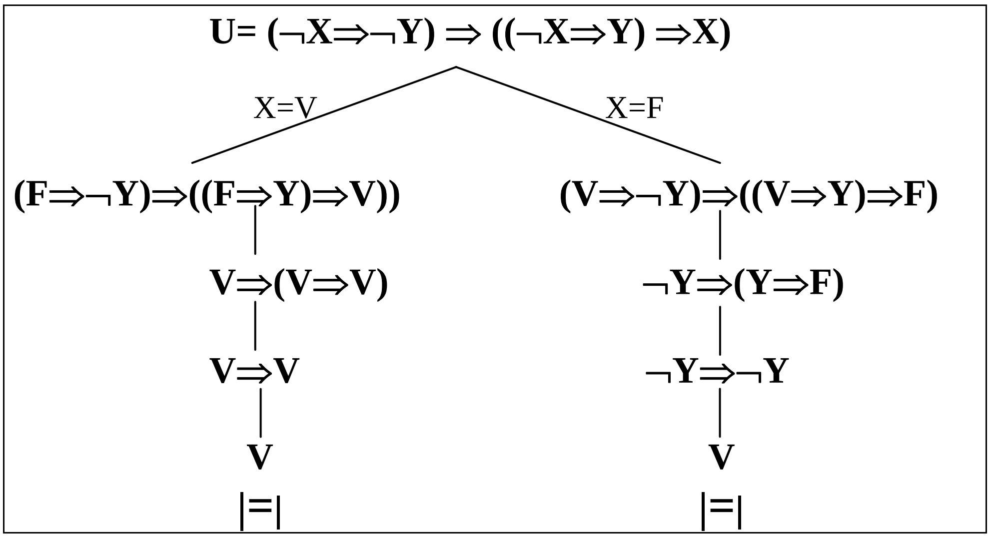





R= ¬(X∧Y ⇒ X)
X=V
X=F
¬(V∧Y ⇒ V)
¬(F∧Y ⇒ F)
¬(Y ⇒ V)
¬(F⇒ F)
¬V
¬V
F
F
|=|
|=|

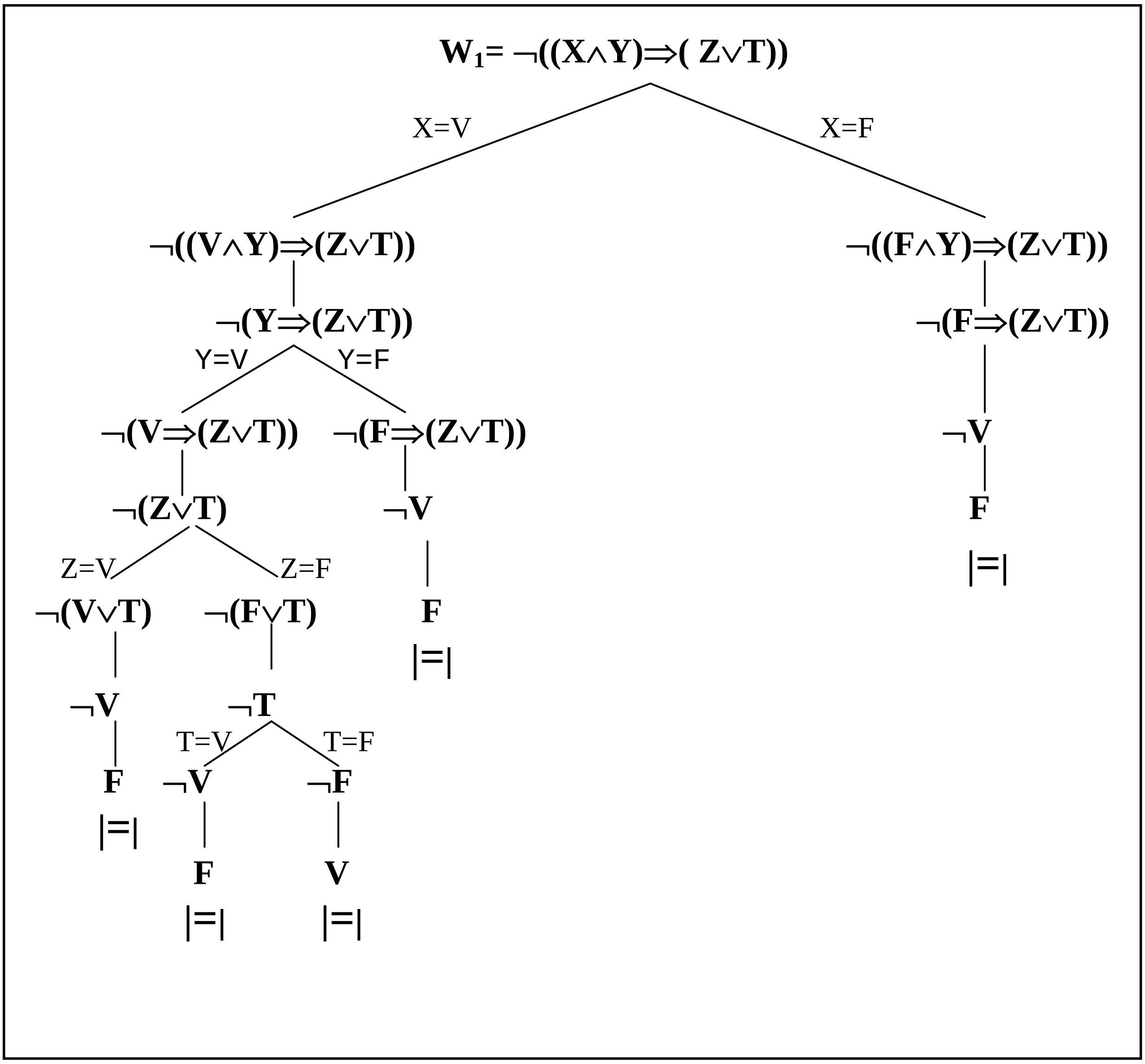

S = (¬X∨Y⇒Z)∧(X∨Z)
X=V
X=F
(¬V∨Y ⇒Z)∧(V∨Z)
(¬F∨Y ⇒Z)∧(F∨Z)
(Y⇒Z)∧V
(V⇒Z)∧Z
Y⇒Z
Z ∧Z
Y=V
Y=F
V⇒Z
F⇒Z
Z
Z
V
Z=V
Z=F
Z=V
Z=F
|=|
V
F
V
F
|=|
|=|
|=|
|=|

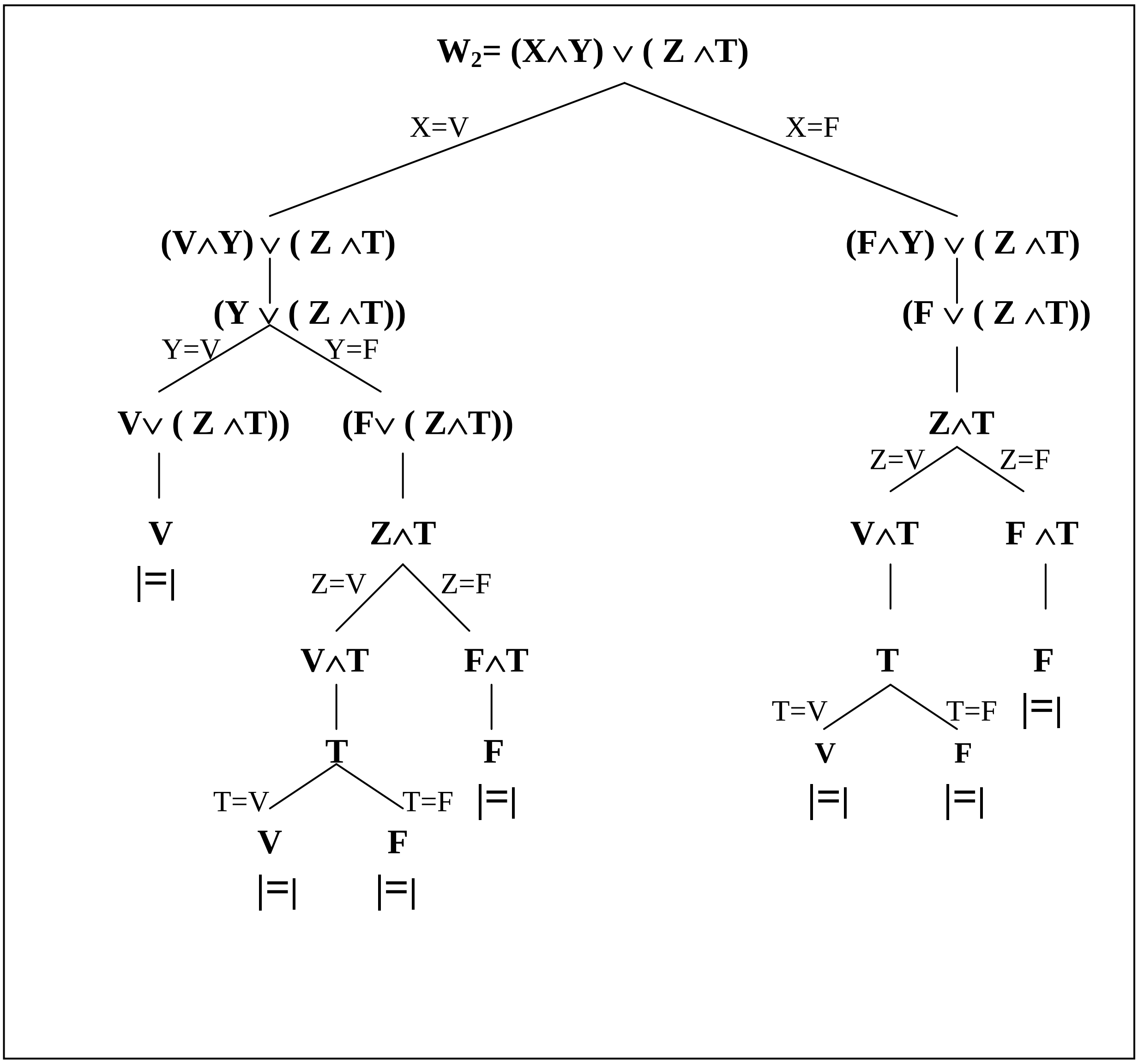




Dall’esame degli alberi si deduce che le fbf P, S e T sono sintetiche, Q e U sono tautologie mentre R è una contraddizione.

Costruiamo adesso gli alberi binari di due fbf con quattro componenti atomiche.





Dall'esame degli alberi si deduce che le fbf W_1 e W_2 sono entrambe sintetiche.

Se costruendo una parte dell'albero si incontrano sia V che F, ci si può fermare, dato che la fbf sarà sintetica; ad esempio per P bastava costruire una sola delle due parti, per W_1, S e T bastava solo la parte sinistra, per W_2 la parte destra.