

## **Cos'è la logica?**

La logica è lo studio dei metodi e dei principi usati per distinguere il ragionamento corretto da quello scorretto. In logica ciò che interessa non è il processo del ragionamento bensì il suo prodotto, l'argomento completo che esso produce. Non è corretto pertanto definire la logica come la "scienza del ragionamento", poiché una tale scienza si rivolgerebbe soprattutto al processo di pensiero con cui si compiono inferenze è ciò compete più alla psicologia che alla logica. Tantomeno non si può definire la logica come "la scienza delle leggi del pensiero" perché ci sono molti generi di pensieri, e il ragionamento è uno dei tanti: tutto il ragionamento è pensiero ma non tutto il pensiero è ragionamento.

Nel considerare gli argomenti che sono prodotti dal pensiero, il logico si chiede se la conclusione raggiunta "segue" dalle premesse assunte, se le premesse "forniscono buone ragioni" per accettare la conclusione. In altri termini il ragionamento è corretto se l'affermazione delle premesse garantisce che anche la conclusione è vera. Sarebbe sbagliato affermare che soltanto chi studia logica possa ragionare in maniera corretta, e d'altronde un tale studio non assicura che chi lo coltiva ragioni correttamente; tuttavia se una persona ha studiato logica, è più probabile che ragioni meglio rispetto ad un'altra con la stessa intelligenza di base, che non ha mai riflettuto sui principi che regolano il ragionamento.

La logica è una disciplina antichissima e nella letteratura è stata chiamata indifferentemente logica matematica, simbolica o formale. Fino all'ottocento si parlava di logica formale, Russell la chiamava simbolica, mentre per Peano e la comunità matematica era logica matematica. Nell'età contemporanea la logica ha assunto la forma di logica matematica in connessione allo sviluppo e alla maturazione del pensiero matematico.

Si parla di logica matematica per diversi motivi; uno consiste nel fatto che le problematiche logiche, quali ad esempio la correttezza del ragionamento e la sua natura, i problemi del pensiero matematico sull'infinito, sono affrontate attraverso lo studio di certe strutture matematiche che emergono appunto da quelle problematiche; ad esempio l'insieme delle leggi logiche proposizionali classiche è un'algebra di Boole. Un'altra ragione è che in logica si eseguono dei calcoli analoghi a quelli aritmetici ed algebrici.

Inoltre nelle dimostrazioni matematiche si applica la logica classica (la logica classica è la logica della matematica), e nello stesso tempo in logica si adopera spesso il metodo assiomatico (la logica adotta il metodo della matematica).

L'aggettivo simbolica si riferisce, invece, al fatto che, i linguaggi per mezzo dei quali si esprimono i ragionamenti in logica non sono quelli naturali, ma sono linguaggi artificiali costruiti su simboli. Questa denominazione era diffusa alla fine del 19° secolo e nella prima parte del 20°. Per Russell che adottò quest'aggettivo la simbolicità non costituiva una caratteristica essenziale della logica, ma l'uso dei linguaggi artificiali era ed è garanzia di semplicità, concisione e non ambiguità.

Il punto di partenza della logica formale è quello tradizionale della logica: il ragionamento, vale a dire il susseguirsi d'affermazioni legate da certe relazioni o da legami di consequenzialità che, se rispettati producono un ragionamento corretto. L'obiettivo della logica formale consiste proprio nell'indagare su tali legami, non tanto per spiegarne la natura, ma piuttosto per farne un catalogo ristretto, di poche e semplici regole (connessioni logiche) indipendenti dal contesto.

I ragionamenti si svolgono in una varietà senza fine di contesti scientifici e non, e la prima impressione è che ogni contesto caratterizzi in modo diverso i ragionamenti validi in esso; ad esempio l'induzione matematica è valida per i numeri naturali ma non per quelli razionali. La logica si occupa di particolari strutture chiamate sistemi o linguaggi formali, indipendenti da ogni situazione concreta, ma che opportunamente interpretati sono applicati in contesti diversi. Il vantaggio fornito dalla formalizzazione è di potere trasportare i risultati, in altri termini tutto ciò che si deduce in un sistema formale è vero in ogni sua interpretazione.

La definizione centrale della logica formale è questa:  $B$  è conseguenza logica di  $A$  se in ogni interpretazione in cui è vero  $A$  è vero anche  $B$ .

In conclusione la logica è simbolica per la necessità dell'uso dei simboli, è matematica perché le strutture sintattiche sono oggetti finiti su cui si ragiona matematicamente ed è innanzitutto formale nel senso che ha lo scopo di studiare la relazione di conseguenza logica. Le relazioni con la matematica sono molteplici: la matematica è strumento nella trattazione di strutture simboliche, ma è anche modello dato che ha fatto comprendere l'utilità della formalizzazione e la possibilità di trasferimento dei risultati da un dominio ad un altro.

# Logica enunciativa

## Calcolo enunciativo

La parte fondamentale e più elementare della logica è il calcolo enunciativo (o meno felicemente proposizionale), che studia le proprietà di certe locuzioni dette *connettivi* mediante cui si formano enunciati composti a partire da enunciati semplici.

**Def.1**-Per enunciato o proposizione s'intende ogni espressione linguistica alla quale si possa associare uno e uno solo dei due valori di verità: vero (in simboli V o 1) e falso (in simboli F o 0)

Facciamo due precisazioni:

1) In logica quando adoperiamo il termine “enunciato” intendiamo rilevare che ciò che maggiormente interessa è il valore di verità dell'asserto in questione; se usiamo invece il termine “proposizione” vogliamo rilevarne il valore concettuale. La relazione che c'è tra proposizione ed enunciato è la seguente: la proposizione ci dà il significato dell'enunciato, pertanto l'enunciato esprime o asserisce la proposizione.

In altri termini una stessa proposizione può essere espressa in modi diversi, ad esempio: “Mario vinse la partita” e “La partita fu vinta da Mario”, sono due enunciati distinti che però hanno lo stesso significato e quindi esprimono o asseriscono la stessa proposizione. Oppure i seguenti enunciati: “It's raining”, “Il pluit”, “Està lloviendo” e “Sta piovendo”, sono diversi perché formulati in lingue differenti, ma esprimono la stessa proposizione poiché hanno lo stesso significato.

Un enunciato è sempre un enunciato nel linguaggio in cui viene formulato, mentre le proposizioni non sono esclusive di alcun linguaggio, in altre parole una stessa proposizione può essere asserita in molti linguaggi.

Si può allora affermare che:

- a) proposizione è quello che viene asserito usando enunciati dichiarativi;
- b) enunciato è un'unità del linguaggio che esprime un pensiero completo, una proposizione, ma è distinto da essa.

2) Nella definizione iniziale si parla di enunciati come di espressioni che assumono solo i valori vero o falso; nei linguaggi naturali non tutte le espressioni possono considerarsi enunciati, ad esempio “non parlare” è un’espressione significativa ma non è un enunciato perché non le si può attribuire un valore di verità. In linea di massima gli enunciati che soddisfano la nostra definizione sono quelle espressioni che vengono formulate nel modo indicativo, presente e passato, ad esempio: “io mangio sempre la frutta”, “oggi non sono uscito” e così via.

La logica di cui ci occuperemo è detta logica bivalente o binaria, e in essa ciò che interessa di una frase è il valore di verità, a prescindere dal contenuto specifico di ciò che afferma.

Il calcolo enunciativo è fondato sui seguenti tre principi della logica aristotelica:

- 1) **Principio d’identità**- Ogni enunciato ha lo stesso valore di verità di se stesso.
- 2) **Principio di non contraddizione**- Uno stesso enunciato non può essere vero e falso contemporaneamente.
- 3) **Principio del terzo escluso**- Ogni enunciato può essere o vero o falso, non esiste una terza possibilità, “tertium non datur” come dicevano i latini.

Come già detto il calcolo enunciativo si occupa delle proprietà dei connettivi che non sono altro che delle locuzioni come: **non, e, o, se...allora, se e solo se**, che in grammatica sono chiamate congiunzioni proposizionali. Nel linguaggio naturale tali locuzioni hanno *significato variabile* secondo il contesto, nel calcolo enunciativo viene *fissato* uno dei diversi significati, tramite convenzioni che riguardano soltanto la verità e la falsità degli enunciati. Essi sono quindi degli *operatori vero-funzionali*, che agendo su uno o più enunciati, ne producono di nuovi, la verità dei quali dipende esclusivamente dai valori di verità degli enunciati componenti.

Due enunciati si possono collegare tra loro (connettere) tramite i connettivi: **e, o, se...allora, se e solo se**; ad ognuno di questi, pertanto, corrisponde un’*operazione binaria*, interna all’insieme di tutti gli enunciati, che associa ad una coppia ordinata di enunciati (X, Y), un nuovo enunciato Z; mentre al connettivo **non** corrisponde un’*operazione unaria*, interna all’insieme di tutti gli enunciati, che associa ad ogni enunciato la sua negazione.

Il significato dei connettivi è fissato secondo le seguenti definizioni:

Connettivo	Simbolo	Definizione
<b>Negazione</b> logica	$\neg$	Si dice negazione di un enunciato $X$ e si indica con $\neg X$ , quell'enunciato che è falso se $X$ è vero e vero se $X$ è falso.
<b>Congiunzione</b> logica	$\wedge$	Si dice congiunzione di due enunciati $X$ e $Y$ e si indica con $X \wedge Y$ , l'enunciato che è vero se e solo se $X$ e $Y$ sono entrambi veri.
<b>Disgiunzione</b> logica	$\vee$	Si dice disgiunzione di due enunciati $X$ e $Y$ e si indica con $X \vee Y$ , l'enunciato che è vero se almeno uno dei due enunciati $X$ e $Y$ è vero.
<b>Implicazione</b> logica (materiale)	$\Rightarrow$	Si dice implicazione di due enunciati $X$ e $Y$ e si indica con $X \Rightarrow Y$ <sup>1</sup> , l'enunciato che è falso solo nel caso in cui $X$ è vero e $Y$ è falso.
<b>Coimplicazione</b> logica (materiale)	$\Leftrightarrow$	Si dice coimplicazione di due enunciati $X$ e $Y$ e si indica con $X \Leftrightarrow Y$ , l'enunciato che è vero se e solo se $X$ e $Y$ sono entrambi veri o entrambi falsi.

### *Osservazioni:*

- 1) In logica il connettivo  $\neg$  si antepone all'enunciato, ciò equivale ad anteporre la negazione al verbo oppure ad anteporre "non è vero che" all'enunciato. La negazione nel linguaggio comune non è così semplice come in logica, ad esempio consideriamo l'enunciato "Quattro è un numero pari", possibili negazioni corrette sono: "Quattro non è un numero pari" oppure "Quattro è un numero dispari"; oppure per l'enunciato "Qualche volta mi sveglio tardi", possibili negazioni sono: "Non è vero che qualche volta mi sveglio tardi", oppure "Mi sveglio sempre presto", ma certamente non è corretto dire: "Qualche volta non mi sveglio tardi".

<sup>1</sup> - L'enunciato  $X$  è chiamato antecedente, mentre  $Y$  è detto conseguente.

- 2) Nel linguaggio comune la congiunzione viene usata anche in senso temporale e aggiuntivo, cioè nel senso di: e poi, anche, pure, ...., ad esempio “mangio e vado a dormire”, oppure “mi piace la pizza e il gelato”. In logica è usata solo nel senso di: *e contemporaneamente*. Nell’uso temporale la verità della congiunzione dipende sia dalla verità degli enunciati componenti sia dal loro succedersi temporale, ad esempio se diciamo: “Sono andato all’aeroporto e ho preso l’aereo” affermiamo una cosa diversa da: “Ho preso l’aereo e sono andato all’aeroporto”, in tal caso la “e” non è vero-funzionale. In altri casi ancora la “e” del linguaggio comune non corrisponde alla congiunzione logica, ad esempio l’enunciato: “Antonio e Giuseppe sono fratelli” esprime una relazione tra due individui e non la congiunzione tra due enunciati: “Antonio è fratello e Giuseppe è fratello”. Inoltre non sempre nel linguaggio comune la congiunzione viene espressa con “e”, ad esempio invece di dire “Gianni è siciliano e Anna è polacca”, diciamo “Gianni è siciliano, ma Anna è polacca”.
- 3) Nel linguaggio naturale la locuzione **o** ha per lo meno due significati, uno inclusivo (o X o Y o entrambi), ad esempio come nell’enunciato: “Maria ha gli occhi verdi o i capelli castani”; ed uno esclusivo (o X o Y ma non entrambi), come per esempio nell’enunciato “stasera vado al cinema oppure guardo la televisione”<sup>2</sup>.  
Generalmente il significato adottato in logica è quello *inclusivo*.
- 4) Nel linguaggio comune quando si afferma: “Se X allora Y”, si intende esprimere una dipendenza casuale fra X e Y, ossia si assume la verità di Y condizionatamente a quella di X, per questa ragione, di solito, non si prende in considerazione il caso in cui X possa essere falso. Ad esempio quando diciamo: “se piove esco con l’ombrello”, intendiamo che “piove” è la causa che determina l’effetto “esco con l’ombrello”, ed è implicito che se non piove non prenderò l’ombrello.  
In logica si è stabilito invece di considerare falso il suddetto enunciato solo nel caso in cui *X sia vero e Y sia falso*, in altri termini il valore di verità dell’implicazione  $X \Rightarrow Y$  dipende materialmente da quello di X e Y, per questo motivo l’implicazione logica è chiamata anche implicazione materiale.

---

<sup>2</sup> - In latino rispettivamente “vel” e “aut...aut”.

Un'altra differenza con il linguaggio comune è che, in logica, l'implicazione indica soltanto  $X \Rightarrow Y$  e non il viceversa come si sottintende a volte, ossia nell'esempio precedente si può sottintendere l'implicazione inversa: "se prendo l'ombrello allora piove".

Non si deve confondere, inoltre, il concetto dell'implicazione con quello della deduzione logica; la prima è un'operazione che si applica alla coppia  $(X, Y)$  di enunciati non necessariamente correlati; la deduzione logica invece è la successione di ragionamenti corretti che a partire dall'ipotesi  $X$  conducono ad affermare vera la tesi  $Y$ , si suppone  $X$  *sempre vera* e  $X$  *sempre correlata a Y*.

Il condizionale, ossia l'enunciato  $X \Rightarrow Y$ , è molto usato nei ragionamenti matematici (in generale scientifici), infatti, gran parte delle proposizioni matematiche (e non solo) ha questa forma logica. In altri termini, i teoremi e le proposizioni che vogliamo ottenere come conclusione di un'inferenza, molto spesso hanno un enunciato del tipo: "Se  $X$  (ipotesi), allora  $Y$  (tesi)". Talvolta si usano con lo stesso significato altre espressioni equivalenti come le seguenti:

"Y se X"

"X solo se Y"

"Da X segue Y"

"X implica Y"

"X è condizione sufficiente per Y"

"Y è condizione necessaria per X".

- 5) La coimplicazione a differenza dell'implicazione è commutativa, cioè se due proposizioni s'implicano a vicenda la verità (falsità) dell'una è sia condizione necessaria sia sufficiente per la verità (falsità) dell'altra. Per esempio l'enunciato "se piove allora prendo l'ombrello e se prendo l'ombrello allora piove" è vero sia quando "piove e prendo l'ombrello" che quando "non piove e non prendo l'ombrello". L'enunciato  $X \Leftrightarrow Y$  si legge solitamente "X se e solo se Y, talvolta (soprattutto in matematica) si dice equivalentemente "X è condizione necessaria e sufficiente per Y", tale enunciato, infatti, congiunge gli enunciati "X è condizione necessaria per Y" ( $Y \Rightarrow X$ ) e "X è condizione sufficiente per Y" ( $X \Rightarrow Y$ ).

Analogamente a quanto già osservato per l'implicazione non si deve confondere il concetto della coimplicazione materiale con quello di equivalenza logica.

Diamo adesso qualche definizione:

**Def.2-** Un enunciato si dice *atomico* (o formula atomica o componente atomica, nel seguito c.a.) se non è costruito a partire da altri enunciati mediante connettivi. Ad esempio “Oggi piove” è un enunciato atomico, mentre non sono enunciati atomici “Oggi non piove” oppure “Oggi piove e rimango in casa”.

**Def.3-** Un'espressione  $W$  è detta *ben formata* o formula ben formata (nel seguito fbf) secondo il calcolo enunciativo, se è atomica o se esistono fbf  $X$  e  $Y$  tali che  $W$  ha una delle seguenti forme:  $\neg X$ ,  $X \wedge Y$ ,  $X \vee Y$ ,  $X \Rightarrow Y$ ,  $X \Leftrightarrow Y$ <sup>3</sup>.

Questa definizione è ricorsiva, nel senso che implica un procedimento induttivo o iterativo che, in questo caso, consiste nel costruire enunciati composti a partire da enunciati atomici.

**Def.4-** Dato un enunciato, per *connettivo principale*, s'intende l'ultimo connettivo usato nella sua costruzione a partire dalle sue c.a.

Ad esempio nell'enunciato  $W = ((X \vee Y) \Rightarrow (X \wedge \neg Y))$ , “ $\Rightarrow$ ” è il connettivo principale.

### Regola per le parentesi

Per eliminare le parentesi si segue la seguente convenzione:

- 1) Se l'enunciato contiene un solo connettivo binario le parentesi vengono eliminate per associazione a sinistra.  
Per esempio si può scrivere  $X \Rightarrow Y \Rightarrow Z \Rightarrow T$  al posto di  $((((X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z) \Rightarrow T))$ .
- 2) Si stabilisce una gerarchia dei connettivi:  $\neg$  precede  $\wedge$  che precede  $\vee$  che precede  $\Rightarrow$  che precede  $\Leftrightarrow$ , ossia le parentesi si eliminano secondo la seguente regola:
  - a) il connettivo  $\neg$  si applica alla c.a. seguente;
  - b) i connettivi binari  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ , connettono le componenti più piccole poste ai loro lati, se si incontra lo stesso connettivo si procede da sinistra a destra.

Ad esempio l'enunciato  $X \vee \neg Y \Rightarrow Z \Leftrightarrow X$  sta per  $((((X \vee (\neg Y)) \Rightarrow Z) \Leftrightarrow X))$ .

Non tutte le parentesi però si possono eliminare, per esempio  $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$  e  $X \Rightarrow Y \Rightarrow Z$  non sono lo stesso enunciato, oppure  $X \wedge (Y \Rightarrow Z)$  è diverso da  $X \wedge Y \Rightarrow Z$  che, per quanto detto, sarebbe  $(X \wedge Y) \Rightarrow Z$ .

---

<sup>3</sup> - $X$  e  $Y$  si dicono *sotto formule* di  $W$ .



## Tavole di verità

Per definire i connettivi (vero-funzionali) si possono usare le seguenti tabelle dette *Tavole di verità fondamentali*, che si costruiscono considerando tutte le possibili combinazioni dei valori di verità delle c.a..

### 1) Negazione

X	$\neg X$
V	F
F	V

### 2) Congiunzione<sup>4</sup>

X	Y	$X \wedge Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

### 3) Disgiunzione<sup>5</sup>

X	Y	$X \vee Y$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

### 4) Implicazione

X	Y	$X \Rightarrow Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

### 5) Coimplicazione

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Da queste si possono ricavare le tavole di verità di qualsiasi enunciato composto. Il numero delle righe di una Tavola di verità è pari a  $2^n$  dove  $n$  è il numero delle c. a. dell'enunciato dato, poiché i valori di verità sono 2 ed il numero delle possibili assegnazioni di tali valori è uguale al numero delle disposizioni con ripetizione di due elementi a  $n$  a  $n$ .

<sup>4</sup> - Detta anche prodotto logico per la sua somiglianza con il prodotto tra numeri.

<sup>5</sup> - Detta anche somma logica per la sua somiglianza con la somma tra numeri.

## *Esempi*

- 1) Per l'enunciato  $P = (X \vee Y) \Rightarrow (X \wedge \neg Y)$  si ha la seguente:

<b>X</b>	<b>Y</b>	<b><math>\neg Y</math></b>	<b><math>X \vee Y</math></b>	<b><math>X \wedge \neg Y</math></b>	<b>P</b>
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V

- 2) Per  $Q = (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$  si ha:

<b>X</b>	<b>Y</b>	<b><math>\neg Y</math></b>	<b><math>X \Rightarrow Y</math></b>	<b><math>X \wedge \neg Y</math></b>	<b><math>\neg(X \wedge \neg Y)</math></b>	<b>Q</b>
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

- 3) Per  $R = \neg((X \wedge Y) \Rightarrow X)$  si ha:

<b>X</b>	<b>Y</b>	<b><math>X \wedge Y</math></b>	<b><math>(X \wedge Y) \Rightarrow X</math></b>	<b>R</b>
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

- 4) Infine per  $S = ((\neg X \vee Y) \Rightarrow Z) \wedge (X \vee Z)$  si ha:

<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>	<b><math>\neg X</math></b>	<b><math>\neg X \vee Y</math></b>	<b><math>(\neg X \vee Y) \Rightarrow Z</math></b>	<b><math>X \vee Z</math></b>	<b>Q</b>
V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	F

Una tavola di verità può essere abbreviata partendo direttamente dalla fbf completa, mettendo sotto ogni c.a. i valori di verità in tutti i modi possibili, e scrivendo quindi, passo per passo, il valore di verità di ciascuna sotto formula che compare nella fbf sotto il connettivo principale della sotto formula in esame. Come esempio consideriamo le tavole di verità delle seguenti fbf  $T = (X \vee \neg Y) \Leftrightarrow Z$  e  $U = (\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow ((\neg X \Rightarrow Y) \Rightarrow X)$  (i numeri posti sotto le colonne di ogni connettivo indicano l'ordine di successione della costruzione della tavola, che entro certi limiti può essere diverso).

1) Tavola di verità abbreviata per la fbf T:

$(X$	$\vee$	$\neg$	$Y)$	$\Leftrightarrow$	$Z$
V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	V	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V
F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F
	<b>2</b>	<b>1</b>		<b>3</b>	

2) Tavola di verità abbreviata per la fbf U:

$(\neg$	$X$	$\Rightarrow$	$\neg$	$Y)$	$\Rightarrow$	$((\neg$	$X$	$\Rightarrow$	$Y)$	$\Rightarrow$	$X)$
F	V	V	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V	F	F	F	V	F
<b>1</b>		<b>3</b>	<b>2</b>		<b>7</b>	<b>4</b>		<b>5</b>		<b>6</b>	

Secondo il valore di verità assunto un enunciato (o una fbf) si definisce:

- 1) **tautologia** se è vero (vera) per qualsiasi assegnazione di valori di verità alle sue c. a., per esempio Q e U.
- 2) **contraddizione** se è falso (falsa) per qualsiasi assegnazione di valori di verità alle sue c.a., per esempio R.
- 3) **sintetico** (sintetica) se non è né una tautologia né una contraddizione, per esempio P, S e T.

Esiste un'evidente analogia tra le tautologie e le identità algebriche, tra le proposizioni sintetiche e le equazioni possibili e tra le contraddizioni e le equazioni impossibili.

Inoltre

**Def.5-** Dati due enunciati X e Y, si dice che X implica tautologicamente (o logicamente) Y, oppure Y è conseguenza logica di X, se  $X \Rightarrow Y$  è una tautologia.

**Def.6-** Due enunciati X e Y si dicono tautologicamente (o logicamente) equivalenti se  $X \Leftrightarrow Y$  è una tautologia.

In altri termini X e Y sono tautologicamente equivalenti se hanno la stessa tavola di verità, ad esempio dalla tavola di verità di  $Q = (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$  si ha che  $(X \Rightarrow Y)$  e  $\neg(X \wedge \neg Y)$  sono tautologicamente equivalenti.

Consideriamo adesso l'implicazione  $X \Rightarrow Y$ , detto enunciato *diretto*, se si scambiano tra loro antecedente e conseguente si ottiene l'enunciato *inverso*  $Y \Rightarrow X$ , negando, invece, antecedente e conseguente si ottiene l'enunciato *contrario*  $\neg X \Rightarrow \neg Y$ , infine invertendo quest'ultimo si ottiene l'enunciato *contronominale* o *contrapposto*  $\neg Y \Rightarrow \neg X$ .

Il lettore verifichi che:

- a. Se è vero l'enunciato diretto è vero l'enunciato contrapposto, ossia gli enunciati diretto e contrapposto sono logicamente equivalenti;
- b. Se è vero l'enunciato inverso è vero l'enunciato contrario, ossia gli enunciati inverso e contrario sono logicamente equivalenti;
- c. Se è vero l'enunciato diretto non è detto che sia vero quello inverso.