Problema 10 seccion 2.1.5

Sea

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \ : \ a_i \in \mathbb{R} \right\},$$

es decir, el conjunto de polinomios en x de grado menor o igual a $n-1$ con coeficientes reales.

(a) Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Para $p, q \in \mathcal{P}_n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se definen

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i, \qquad (\lambda p)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda a_i) x^i.$$

Como $a_i + b_i$ y λa_i son reales, $p + q \in \mathcal{P}_n$ y $\lambda p \in \mathcal{P}_n$ (cierre). Las propiedades de conmutatividad, asociatividad, neutro $0(x) \equiv 0$, inverso aditivo $-p$, y las compatibilidades con escalares

$$\lambda(p+q) = \lambda p + \lambda q, \quad (\lambda + \mu)p = \lambda p + \mu p, \quad (\lambda\mu)p = \lambda(\mu p), \quad 1 \cdot p = p,$$

se verifican coeficiente a coeficiente en $\mathbb{R}$. Luego $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial real (isomorfo a $\mathbb{R}^n$ via $p \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$).

(b) Si los coeficientes a_i son enteros, $\mathcal{P}_n$ sera un espacio vectorial? Por que?

Considere

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{Z}) = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i : \ a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ no hay cierre: si $p(x) = 1 \in \mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ y $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda p(x) = \frac{1}{2} \notin \mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$. Ademas $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo, por lo que tampoco se puede tomar $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}$. Conclusion: *no* es un espacio vectorial (es un modulo sobre $\mathbb{Z}$).

(c) (c) Cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ son subespacios vectoriales?

(a) Polinomios de grado menor o igual que $n-1$.

Sea

$$P_{n-1} = \left\{ a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} : a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

- El polinomio cero pertenece a P_{n-1}.
- Sean
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i.$$
Entonces
$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i \in P_{n-1}.$$
Se cumple el cierre por suma.
- Para $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\lambda p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda a_i) x^i \in P_{n-1}.$$
Se cumple el cierre por producto con escalares.

Por lo tanto P_{n-1} es subespacio de P_n.

(b) Polinomios de grado par.

Sea
$$S = \{p \in P_n : \deg(p) \text{ es par}\} \cup \{0\}.$$
Para verificar si es subespacio, se debe revisar:

- **Cerradura aditiva:** Sea $p(x) = x^2 + x$ y $q(x) = -x^2 + 1$. Ambos tienen grado 2 (par), por lo tanto $p, q \in S$. Sumando:
$$p(x) + q(x) = (x^2 + x) + (-x^2 + 1) = x + 1,$$
que es de grado 1 (impar). Entonces $p + q \notin S$.
- **Cerradura escalar:** Si $p(x) = x^2 + x \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\lambda p(x) = \lambda(x^2 + x),$$
que tiene grado 2 siempre que $\lambda \neq 0$. Por lo tanto esta condicion se cumple.
- **Polinomio cero:** $0(x)$ pertenece por definicion al conjunto.

Como falla la cerradura aditiva, S no es subespacio de P_n (salvo casos triviales como $n = 0$).