Punto 6 seccion 2.2.4

Se adopta la notacion

$$|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0|q_0\rangle + a^i|q_i\rangle, \qquad \alpha = 0,1,2,3,\ i = 1,2,3,$$

y la regla de multiplicacion para las partes imaginarias

$$|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = -\delta_{ij}\,|q_0\rangle + \varepsilon_{ijk}\,|q_k\rangle. \tag{1}$$

El conjugado se define por

$$|a\rangle^\star = a^0|q_0\rangle - a^i|q_i\rangle,$$

y la norma por

$$\|\,|a\rangle\|^2 \equiv |a\rangle^\star \odot |a\rangle.$$

(a) Comprobar que los cuaterniones forman un espacio vectorial

(a) *Definicion de suma y producto por escalares:* para $|a\rangle$ y $|b\rangle$,

$$|a\rangle + |b\rangle = (a^0+b^0)|q_0\rangle + (a^i+b^i)|q_i\rangle, \qquad \lambda|a\rangle = (\lambda a^0)|q_0\rangle + (\lambda a^i)|q_i\rangle,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) *Cierre:* las componentes resultantes son reales, por tanto $|a\rangle + |b\rangle$, $\lambda|a\rangle$ estan en el conjunto.

(c) *Axiomas verificable:*

- asociatividad y conmutatividad de la suma: se verifica componente a componente por propiedades de $\mathbb{R}$;
- elemento neutro aditivo: $|0\rangle = 0|q_0\rangle + 0|q_i\rangle$;
- inverso aditivo: $-|a\rangle = (-a^0, -a^i)$;
- compatibilidad con escalares: $\lambda(\mu|a\rangle) = (\lambda\mu)|a\rangle$, $\lambda(|a\rangle + |b\rangle) = \lambda|a\rangle + \lambda|b\rangle$, etc., se verifican componente a componente.

(d) *Conclusion:* existe un isomorfismo lineal con $\mathbb{R}^4$, por tanto los cuaterniones forman un espacio vectorial real de dimension 4.

(b) Producto entre dos cuaterniones

Sea

$$|b\rangle = b^0|q_0\rangle + b^i|q_i\rangle, \qquad |r\rangle = r^0|q_0\rangle + r^j|q_j\rangle.$$

Por bilinealidad del producto,

$$|b\rangle \odot |r\rangle = b^0r^0|q_0\rangle + b^0r^j|q_j\rangle + b^ir^0|q_i\rangle + b^ir^j\,(|q_i\rangle \odot |q_j\rangle). \tag{2}$$

Sustituir la regla (1) en el cuarto termino:

$$b^ir^j(|q_i\rangle \odot |q_j\rangle) = b^ir^j\big(-\delta_{ij}|q_0\rangle + \varepsilon_{ijk}|q_k\rangle\big).$$

Agrupando coeficientes de $|q_0\rangle$ y de $|q_k\rangle$:

$$\text{parte escalar } d^0 = b^0r^0 - b^ir^i = b^0r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r}, \tag{3}$$

$$\text{parte vectorial } d^k = r^0b^k + b^0r^k + \varepsilon^k{}_{ij}\,b^ir^j = r^0b^k + b^0r^k + (\mathbf{b}\times\mathbf{r})^k. \tag{4}$$

Resultado compacto:

$$|b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow \big(b^0r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r},\ r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}\big).$$

(c) Escritura con índices e identificacion de a, $S^{(ij)}$, $A^{[jk]i}$.

Se escribe

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a\,|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha\,|q_j\rangle + A^{[jk]i}\,b_jr_k\,|q_i\rangle.$$

Comparando con (3)–(4) se identifican

$$a = b^0r^0 - b^ir^i, \qquad S^{(0j)} = b^0r^j + r^0b^j, \qquad S^{(\alpha j)} = 0\ (\alpha \neq 0),$$

y

$$A^{[jk]i} = \varepsilon^i{}_{jk},$$

pues $A^{[jk]i}b_jr_k = \varepsilon^i{}_{jk}b^jr^k = (\mathbf{b}\times\mathbf{r})^i$.

(d) Naturaleza de a, $S^{(ij)}$, $A^{[jk]i}$

- a es un escalar real (combinacion de partes escalares y producto punto).

- $S^{(0j)}$ es un tensor simetrico que mezcla partes escalares con las vectoriales (lineal en b^0 y r^0).
- $A^{[jk]i} = \varepsilon^i{}_{jk}$ es un objeto antisimetrico (Levi-Civita) que genera el término $\mathbf{b} \times \mathbf{r}$.

Sobre paridad ($\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$): las componentes vectoriales $r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r}$ cambian de signo (son vectores polares), mientras que $\mathbf{b} \times \mathbf{r}$ es un axial (pseudovector) y *no* cambia de signo cuando se invierten ambos vectores (porque $(-\mathbf{b}) \times (-\mathbf{r}) = \mathbf{b} \times \mathbf{r}$). Por tanto la suma general no es puramente vector ni puramente pseudovector.

(e) Representacion mediante matrices de Pauli (verificacion algebraica).

Definir la correspondencia

$$|q_0\rangle \longleftrightarrow \mathbf{I}_2, \qquad |q_i\rangle \longleftrightarrow -i\sigma_i,$$

con las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usando $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{I} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$,

$$\begin{aligned}(-i\sigma_i)(-i\sigma_j) &= (-i)^2\sigma_i\sigma_j = -(\delta_{ij}\mathbf{I} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) \\ &= -\delta_{ij}\mathbf{I} - i\varepsilon_{ijk}\sigma_k = -\delta_{ij}\,|q_0\rangle + \varepsilon_{ijk}\,|q_k\rangle,\end{aligned}$$

que coincide con (1). Así, la coleccion $\{\mathbf{I}, -i\sigma_i\}$ es una representacion matricial de la base de cuaterniones.

(f) Representacion real 4×4 (comprobacion con multiplicaciones concretas).

Se proponen las matrices reales (se indican Q_1, Q_2, Q_3):

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculo de ejemplos:

Ejemplo 1: Q_1^2.

$$Q_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_4.$$

Ejemplo 2: $Q_1 Q_2$ (se obtiene Q_3)

$$Q_1 Q_2 = Q_3, \qquad Q_2 Q_3 = Q_1, \qquad Q_3 Q_1 = Q_2,$$

y asimismo $Q_i Q_j = -\delta_{ij} I_4 + \varepsilon_{ijk} Q_k$, coincidiendo con la estructura de cuaterniones.

(g) ¿Es $\langle a|b\rangle = |a\rangle^\star \odot |b\rangle$ un producto interno?

Calcular $X \equiv |a\rangle^\star \odot |b\rangle$ con

$$|a\rangle^\star = a^0 |q_0\rangle - a^i |q_i\rangle, \qquad |b\rangle = b^0 |q_0\rangle + b^j |q_j\rangle.$$

Expandir:

$$\begin{aligned} X &= a^0 b^0 |q_0\rangle + a^0 b^j |q_j\rangle - a^i b^0 |q_i\rangle - a^i b^j (|q_i\rangle \odot |q_j\rangle) \\ &= a^0 b^0 |q_0\rangle + a^0 b^j |q_j\rangle - a^i b^0 |q_i\rangle - a^i b^j \big(-\delta_{ij} |q_0\rangle + \varepsilon_{ijk} |q_k\rangle \big) \\ &= \big(a^0 b^0 + a^i b^i \big) |q_0\rangle + \big(a^0 b^k - a^k b^0 - a^i b^j \varepsilon_{ijk} \big) |q_k\rangle. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\mathrm{Scal}(X) = a^0 b^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathrm{Vec}(X) = a^0 \mathbf{b} - b^0 \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

X en general no es un escalar sino un cuaternion con parte vectorial no nula. Por tanto, *tal cual* $|a\rangle^\star \odot |b\rangle$ no sirve como producto interno.

$$\langle a|b\rangle_{\mathbb{R}} \equiv \mathrm{Scal}\big(|a\rangle^\star \odot |b\rangle\big) = a^0 b^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

(h) Modificacion que produce un producto interno

Tomar

$$\langle a|b\rangle \equiv \frac{1}{2}\Big(|a\rangle^\star \odot |b\rangle + \big(|a\rangle^\star \odot |b\rangle\big)^\star\Big).$$

Si $X = |a\rangle^\star \odot |b\rangle = S + V$ (con S parte escalar y V parte vectorial), entonces $X^\star = S - V$ y

$$\frac{1}{2}(X + X^\star) = S.$$

Por lo tanto

$$\langle a|b\rangle = \mathrm{Scal}\big(|a\rangle^\star \odot |b\rangle\big) = a^0 b^0 + a^i b^i,$$

que es bilineal real, simétrica y positiva definida. Así se obtiene un producto interno en el espacio real de cuaterniones (isomorfo a $\mathbb{R}^4$).

(i) Comprobar que $n(|a\rangle) = \sqrt{\langle a|a\rangle}$ es una norma.

Calculo:

$$\langle a|a\rangle = a^0 a^0 + a^i a^i = (a^0)^2 + \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0,$$

y $\langle a|a\rangle = 0 \iff a^0 = 0$ y $\mathbf{a} = \mathbf{0} \iff |a\rangle = 0$. Homogeneidad:

$$\|\lambda|a\rangle\|^2 = (\lambda a^0)^2 + (\lambda a^i)^2 = \lambda^2 \|a\|^2.$$

Desigualdad triangular: se obtiene de la desigualdad de Cauchy–Schwarz en $\mathbb{R}^4$ aplicada al producto interior definido. Por tanto $\|\cdot\|$ es norma.

(j) Inverso multiplicativo explicito.

Calcular $|a\rangle \odot |a\rangle^\star$:

$$|a\rangle \odot |a\rangle^\star = (a^0|q_0\rangle + a^i|q_i\rangle) \odot (a^0|q_0\rangle - a^j|q_j\rangle).$$

Expandir y agrupar:

$$\begin{aligned}
|a\rangle \odot |a\rangle^\star &= a^0 a^0|q_0\rangle - a^0 a^j|q_j\rangle + a^i a^0|q_i\rangle - a^i a^j(|q_i\rangle \odot |q_j\rangle) \\
&= a^{02}|q_0\rangle + (a^i a^0 - a^0 a^i)|q_i\rangle - a^i a^j(-\delta_{ij}|q_0\rangle + \varepsilon_{ijk}|q_k\rangle) \\
&= \left(a^{02} + a^i a^i\right)|q_0\rangle - a^i a^j \varepsilon_{ijk}\,|q_k\rangle.
\end{aligned}$$

Pero $a^i a^j \varepsilon_{ijk} = 0$ (producto de simétrico por antisimétrico), así

$$|a\rangle \odot |a\rangle^\star = \left((a^0)^2 + \|\mathbf{a}\|^2\right) |q_0\rangle = \|a\|^2 \, |q_0\rangle.$$

Entonces, para $|a\rangle \neq 0$,

$$|a\rangle^{-1} = \frac{|a\rangle^\star}{\|a\|^2}$$

es inverso, pues

$$|a\rangle \odot |a\rangle^{-1} = \frac{|a\rangle \odot |a\rangle^\star}{\|a\|^2} = |q_0\rangle.$$

(k) Estructura de grupo multiplicativo y tabla de multiplicacion.

- *Cierre:* producto de cuaterniones es cuaternion (ver (b)).
- *Asociatividad:* la multiplicacion de cuaterniones es asociativa (propiedad algebraica conocida).
- *Elemento unidad:* $|q_0\rangle$.
- *Inversos:* para $|a\rangle \neq 0$ existe $|a\rangle^{-1}$ dado en (j).

Por tanto el conjunto $\mathbb{H}^\times$ de cuaterniones no nulos es un grupo multiplicativo. La tabla para la base $\{1, i, j, k\} \equiv \{|q_0\rangle, |q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle\}$ es

$\odot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

.

(l) Vectores de $\mathbb{R}^3$ como cuaterniones y conservacion de la norma

Identificacion: $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow |v\rangle = 0|q_0\rangle + v^i|q_i\rangle$ (cuaternion).

Conservacion de la norma por conjugacion. Sea $|a\rangle$ arbitrario y defínase

$$|v'\rangle = |a\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle^{-1}.$$

Usando la multiplicatividad de la norma:

$$\|x \odot y\|^2 = (x \odot y)^\star \odot (x \odot y) = y^\star \odot x^\star x \odot y = \|x\|^2 \, (y^\star \odot y) = \|x\|^2 \|y\|^2,$$

se tiene

$$\|v'\| = \|a\| \; \|v\| \; \|a^{-1}\| = \|a\| \; \|v\| \; \frac{1}{\|a\|} = \|v\|.$$

Luego la conjugacion por a preserva la norma; si $\|a\| = 1$ es una rotacion ortogonal en $\mathbb{R}^3$.