

离散数学

Discrete Mathematics

计算机与人工智能学院

徐江峰 教授

13523459178

jfxu@zzu.edu.cn

第二章 谓词逻辑

苏格拉底三段论：

- (1) 所有的人都是要死的
- (2) 苏格拉底是人
- (3) 苏格拉底是要死的

利用命题演算

设 P: 所有的人都是要死的

Q: 苏格拉底是人

R: 苏格拉底是要死的

则 推理表示为: $P \wedge Q \Rightarrow R$

2-1 谓词的概念及表示

【例2-1.1】

(1) 小张是大学生

(2) 小李是大学生

(3) 小李喜欢跳舞

(4) 3 是质数

(5) $2 < 3$

(6) $6 = 2 * 3$

(7) 郑州位于北京和武汉之间

(1) 小张是大学生

(2) 小李是大学生

(3) 小李喜欢跳舞

(4) 3 是质数

(5) $2 < 3$

(6) $6 = 2 * 3$

(7) 郑州位于北京和武汉之间

个体、谓词

【定义2-1.1】客观世界中可以独立存在的具体或抽象对象称为**个体（客体）**，表示个体的词称为**个体词**。若个体词以常量的方式表示特定个体，则称之为**个体常量**；若个体词以变量的方式泛指不确定的个体，则称之为**个体变量**。

常用小写字母表示，如：

a: 小李 b: 小张 c: 北京

个体常量

s: 学生 z: 桌子

个体变量

【定义2-1.2】表示个体（客体）特征、性质或关系的词，称为**谓词**。

常用大写字母表示，如：

F: 喜欢跳舞 S: 是大学生 G: $\dots < \dots$ D: $\dots = \dots * \dots$

谓词与个体常量一起可以表示一个命题，如：

(1) a:小张 S: 是大学生 则: $S(a)$ 表示 “小张是大学生”

(2) b:小李 S: 是大学生 则: $S(b)$ 表示 “小李是大学生”

(3) a:小张 F: 喜欢跳舞 则: $F(a)$ 表示 “小张喜欢跳舞”

(4) $G(2,3)$ $2 < 3$ $G(3,2)$ $3 < 2$

2-2 谓词函数与量词

对于上述例子，若用个体变元取代个体常量，则可得到：

$S(x)$: x 是大学生

$F(x)$: x 喜欢跳舞”

$G(x,y)$: $x < y$

【定义2-2.1】 由一个谓词和一些个体变元组成的表达式，称为**简单谓词函数**。

如果一个函数包含 n 个个体变元，则称为 **n 元简单谓词函数**。

注意：谓词函数不是命题，只有当所有的个体变元都用确定的个体代入时，才表示一个命题。

离散数学——谓词逻辑

【定义2-2.2】由简单谓词函数和命题连结词组成的表达式，称为**复合谓词函数**。

如： $S(x) \wedge F(x)$ ： x 是大学生，并且喜欢跳舞

$\neg S(x)$ ： x 不是大学生

对于一个谓词函数，每个个体变元都有其取值范围，该取值范围，称为是该个体变元的**个体域（论域）**。

根据上述概念，一个命题被分为了个体与谓词两部分，但对于一些命题，这样的划分仍不能区分命题之间的不同，不能准确的表达命题的意义。

所有学生都喜欢跳舞

有些学生喜欢跳舞

【定义2-2.3】表示命题中数量的词称为**量词**。对于给定的谓词函数 $P(x)$ ，若对 x 个体域中的每个元素都要求 $P(x)$ 为真，则称 $P(x)$ 得到**全称量化**，记为 $(\forall x)P(x)$ ，其中 \forall 称为全称量词， x 称为其作用变量。若 x 在其个体域中至少存在一个元素使 $P(x)$ 为真，则称 $P(x)$ 得到**存在量化**，记为 $(\exists x)P(x)$ ，其中 \exists 称为存在量词， x 称为其作用变量。

全称量词 \forall 读作“任意的”，表示“所有的”、“每一个”、“任意的”等意义；存在量词 \exists 读作“存在”，表示“存在”、“有一个”、“有一些”等意义。

离散数学——谓词逻辑

则命题

(1) 所有学生都喜欢跳舞

(2) 有些学生喜欢跳舞

设 $F(x)$: x 喜欢跳舞

(1) $(\forall x)F(x)$

(2) $(\exists x)F(x)$

其中 x 的个体域为“学生”。

再如：

(1) 所有的整数都是实数

(2) 有些整数是偶数

设 $R(x)$: x 是实数 $E(x)$: x 是偶数

则 (1) $(\forall x)R(x)$

(2) $(\exists x)E(x)$

其中 x 的个体域为“整数”。

离散数学——谓词逻辑

在谓词函数中，每一个个体变元都有其个体域，个体域不同，表达的命题的真值就可能不同。若在一个谓词表达式中有多个谓词，每个变元都要说明其个体域，对研究谓词公式的性质及推理都是不方便的，因而引入全总个体域的概念。

全总个体域：包含宇宙中所有的研究对象，即所有个体的全体。

此时，每个变元的个体域用**特性谓词**表达。

(1) 所有的整数都是实数

(2) 有些整数是偶数

设 $I(x)$: x 是整数 $R(x)$: x 是实数 $E(x)$: x 是偶数

则： $(\forall x)(I(x) \rightarrow R(x))$

$(\exists x)(I(x) \wedge E(x))$

2-3 谓词公式与翻译

【定义2-3.1】谓词公式（合式公式）

- (1) 原子谓词公式是谓词公式；
- (2) 如果A是谓词公式，则 $\neg A$ 也是谓词公式；
- (3) 如果A、B是谓词公式，那么 $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 、 $(A \leftrightarrow B)$ 都是谓词公式；
- (4) 如果A是谓词公式， x 是A中的一个变元，则 $(\forall x)A$ 、 $(\exists x)A$ 都是谓词公式；
- (5) 当且仅当能够有限次地应用(1),(2),(3),(4)所得到的式子是谓词公式。

【例2-3.1】用谓词公式表达下列命题。

- (1) 所有的人都是要呼吸的
- (2) 并非每个有理数都是实数
- (3) 没有不犯错误的人
- (4) 尽管有人聪明，但未必一切都聪明
- (5) 每个实数都存在比它更大的实数。

离散数学——谓词逻辑

【解】

(1) 设 $M(x)$: x 是人 $H(x)$: x 是要呼吸的

则 $(\forall x)(M(x) \rightarrow H(x))$

(2) 设 $Q(x)$: x 是有理数 $R(x)$: x 是实数

则 $\neg (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$

(3) 设 $M(x)$: x 是人 $E(x)$: x 犯错误

则 $\neg (\exists x)(M(x) \wedge \neg E(x))$ 或 $(\forall x)(M(x) \rightarrow E(x))$

(4) 设 $M(x)$: x 是人 $C(x)$: x 聪明

则 $(\exists x)(M(x) \wedge C(x)) \wedge \neg (\forall x)(M(x) \rightarrow C(x))$

(5) 设 $R(x)$: x 是实数 $G(x,y)$: $y > x$

则 $(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge G(x,y)))$

【例2-3.2】 设 $P(x)$, $L(x)$, $R(x,y,z)$ 和 $E(x,y)$ 分别表示“ x 是一个点”、“ x 是一条直线”、“ z 通过 x 和 y ”和“ $x=y$ ”。符号化下面的句子:

对每两个点有且仅有一条直线通过该两点

【解】

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x,y) \rightarrow \\ & \quad (\exists z)(L(z) \wedge R(x,y,z) \wedge \\ & \quad (\forall m)(L(m) \wedge R(x,y,m) \rightarrow E(m,z)))) \end{aligned}$$

2-4 变元的约束

对于 $(\forall x)P(x)$ 、 $(\exists x)P(x)$ ， \forall 、 \exists 后的 x 称为量词的作用变元或指导变元， $P(x)$ 称为量词的作用域或辖域，在 $P(x)$ 中出现的所有 x 称为约束出现，而其余的变元称为自由变元。

【例2-4.1】 说明下列各式的作用域及变元约束情况。

(1) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

(2) $(\exists x) P(x) \wedge Q(x)$

(3) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y) Q(x, y))$

(4) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x) Q(x, z) \rightarrow (\exists y) R(x, y)) \vee Q(x, y)$

【解】

$$(1) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$(2) (\exists x) P(x) \wedge Q(x)$$

$$(3) (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y) Q(x, y))$$

$$(4) (\forall x)(P(x) \wedge (\exists x) Q(x, z) \rightarrow (\exists y) R(x, y)) \vee Q(x, y)$$

在(2)、(4)中， x 既以约束形式出现，又以自由形式出现，这容易引概念上的混乱。为此，我们需要对其进行改名，使得一个变元在一个谓词公式中只以一种形式出现。

离散数学——谓词逻辑

若 $P(x)$: x 喜欢唱歌, x 的个体域为“我们班的所有学生”

则 $(\forall x)P(x)$ 与 $(\forall y)P(y)$ 都表示“我们班所有学生都喜欢唱歌”

因此, 约束变元的改名不影响它所表达的句子意义。

■ **约束变元**如何改名呢?

(1) **范围** 量词后的变元, 以及量词作用域中出现的该变元。

(2) **名称** 作用域中没有出现过的变元名称

如: (1) $(\exists x) P(x) \wedge Q(x)$ $(\exists y) P(y) \wedge Q(x)$

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x) Q(x,z) \rightarrow (\exists y) R(x,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall w)(P(w) \wedge (\exists x) Q(x,z) \rightarrow (\exists y) R(w,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall w)(P(w) \wedge (\exists u) Q(u,z) \rightarrow (\exists y) R(w,y)) \vee Q(x,y)$

■ 自由变元如何改名呢？

(1) **范围** 式子中所有同名的自由变元

(2) **名称** 式子中没有出现过的变元名称

如：(1) $(\exists x) P(x) \wedge Q(x)$ $(\exists x) P(x) \wedge Q(y)$

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x) Q(x,z) \rightarrow (\exists y) R(x,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x) Q(x,z) \rightarrow (\exists y) R(x,y)) \vee Q(w,y)$

(3) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(y,z) \rightarrow (\exists y) R(x,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall x)(P(x) \wedge Q(u,z) \rightarrow (\exists y) R(x,y)) \vee Q(x,u)$

2-5 谓词演算的等价式与蕴含式

在谓词公式中常包含命题变元和客体变元，当个体变元由确定的个体所取代，命题变元用确定的命题所取代时，就称作对**谓词公式赋值**。一个谓词公式经过赋值以后，就成为具有确定真值T或F的命题。

【定义2-5.1】 给定任何两个谓词公式 A 和 B，设它们有共同的个体域 E，若对 A 和 B 的任一组变元进行赋值，所得命题的真值相同，则称谓词公式 A 和 B 在 E 上是等价的，并记作 $A \Leftrightarrow B$ 。

【定义2-5.2】 一个谓词公式 A，如果至少在一种赋为真，则称该 A 为**可满足的**。若对E上所有的赋值，A的值都为真，则称A在E上是**有效的**或**永真的**。若对E上所有的赋值，A的值都为假，则称A在E上是**永假的**或**不可满足的**。

离散数学——谓词逻辑

根据谓词公式等价的定义，当个体域 $E=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 时，可以得出：

$$(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

$$(\exists x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

【例2-5.1】 设 $P(x): x < 4$ ， $Q(x): x > 3$ $E=\{1,2,3,4\}$,试求 $(\forall x)P(x)$ 、 $(\exists x)Q(x)$ 的值。

【解】 $(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$

$$\Leftrightarrow T \wedge T \wedge T \wedge F$$

$$\Leftrightarrow F$$

$$(\exists x)Q(x) \Leftrightarrow Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee Q(4)$$

$$\Leftrightarrow F \vee F \vee F \vee T$$

$$\Leftrightarrow T$$

离散数学——谓词逻辑

■ 命题公式的推广

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)\neg(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\neg(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad \times$$

■ 量词与否定的关系

设 $P(x)$: x 喜欢唱歌

$Q(x)$: x 喜欢跳舞

x 的个体域为“我们班所有学生”

则：所有学生都不喜欢唱歌

$$(\forall x)\neg P(x)$$

没有一个学生喜欢唱歌

$$\neg(\exists x)P(x)$$

离散数学——谓词逻辑

有学生不喜欢唱歌

$$(\exists x)\neg P(x)$$

不是所有学生都喜欢唱歌

$$\neg(\forall x)P(x)$$

$$(\forall x) \neg P(x) \Leftrightarrow \neg (\exists x) P(x)$$

$$(\exists x) \neg P(x) \Leftrightarrow \neg (\forall x) P(x)$$

■ 量词与析取、合取的关系

所有学生都喜欢唱歌和跳舞

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$$

所有学生都喜欢唱歌，所有学生都喜欢跳舞

$$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

有学生喜欢唱歌或跳舞

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

有学生喜欢唱歌或有学生喜欢跳舞

$$(\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

离散数学——谓词逻辑

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x) P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

当 x 的个体域为有限时，很容易验证上述式子成立。

设 x 的个体域为 $\{a, b, c\}$ ，则

$$(\forall x) \neg P(x) \Leftrightarrow \neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\exists x)P(x)$$

$$(\exists x) \neg P(x) \Leftrightarrow \neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x)P(x)$$

离散数学——谓词逻辑

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (P(a) \wedge Q(a)) \wedge (P(b) \wedge Q(b)) \wedge (P(c) \wedge Q(c))$$

$$\Leftrightarrow (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \wedge (Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (P(a) \vee Q(a)) \vee (P(b) \vee Q(b)) \vee (P(c) \vee Q(c))$$

$$\Leftrightarrow (P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \vee (Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

离散数学——谓词逻辑

当 $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ 中的 \wedge 换成 \vee ，等价式是否还成立呢？

$(\forall x) (P(x) \vee Q(x))$ 所有学生都喜欢唱歌或跳舞

$(\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x)$ 所有学生都喜欢唱歌或所有学生都喜欢跳舞

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

同样的，当 $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$ 中的 \vee 换成 \wedge ，情况是怎么样呢？

$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ 有学生喜欢唱歌和跳舞

$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$ 有学生喜欢唱歌，且有学生喜欢跳舞

$$(\exists x) (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

离散数学——谓词逻辑

对于条件和双条件式，存在如下关系：

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$$

如： $P(x)$: x 是奇数 $Q(x)$: x 是偶数 x 的个体域为 $\{1, 2\}$ ，则：

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (P(1) \wedge P(2)) \rightarrow (Q(1) \wedge Q(2))$$

$$\Leftrightarrow (P(1) \rightarrow Q(1)) \wedge (P(2) \rightarrow Q(2))$$

$$\Leftrightarrow (T \wedge F) \rightarrow (F \wedge T)$$

$$\Leftrightarrow (T \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow T)$$

$$\Leftrightarrow F \rightarrow F$$

$$\Leftrightarrow F \wedge T$$

$$\Leftrightarrow T$$

$$\Leftrightarrow F$$

■ 量词作用域的扩张与收缩

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge Q(y)$$

$$(\forall x)(P(x) \vee Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee Q(y)$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \wedge Q(y)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee Q(y)$$

由此可以得出：

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow Q(y)$$

$$(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow Q(y)$$

$$(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow P(x) \rightarrow (\forall y)Q(y)$$

$$(\exists y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y)$$

■ 多个量词的使用

设 $P(x,y)$ 是二元谓词函数，对于两个量词，存在8种情况，关系如下：

$$(\forall x) (\forall y)$$

$$(\forall y) (\forall x)$$

$$(\exists x) (\forall y)$$

$$(\exists y) (\forall x)$$

$$(\forall x) (\exists y)$$

$$(\forall y) (\exists x)$$

$$(\exists x) (\exists y)$$

$$(\exists y) (\exists x)$$

$$(\forall x) (\forall y) P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y) (\forall x) P(x,y)$$

$$(\exists x) (\exists y) P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y) (\exists x) P(x,y)$$

$$(\forall x) (\forall y) P(x,y) \Rightarrow (\exists y) (\forall x) P(x,y)$$

$$(\exists y) (\forall x) P(x,y) \Rightarrow (\forall x) (\exists y) P(x,y)$$

$$(\forall x) (\exists y) P(x,y) \Rightarrow (\exists y) (\exists x) P(x,y)$$

离散数学——谓词逻辑

设 $P(x,y)$: x 与 y 年龄一样, x 的个体域是计算机的所有学生, y 的个体域是软件工程的所有学生。

解释下列式子的意义:

$$(\forall x) (\forall y) P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y) (\forall x) P(x,y)$$

$$(\exists x) (\exists y) P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y) (\exists x) P(x,y)$$

$$(\forall x) (\forall y) P(x,y) \Rightarrow (\exists y) (\forall x) P(x,y)$$

$$(\exists y) (\forall x) P(x,y) \Rightarrow (\forall x) (\exists y) P(x,y)$$

$$(\forall x) (\exists y) P(x,y) \Rightarrow (\exists y) (\exists x) P(x,y)$$

离散数学——谓词逻辑

【例2-5.1】 设 $P(x,y)$: x 整除 y , $E=\{1,2,3\}$, 试求 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$, $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$ 的值。

【解】 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x,1) \vee P(x,2) \vee P(x,3))$$

$$\Leftrightarrow (P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3)) \wedge$$

$$(P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3)) \wedge$$

$$(P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3))$$

$$\Leftrightarrow (T \vee T \vee T) \wedge (F \vee T \vee F) \wedge (F \vee F \vee T)$$

$$\Leftrightarrow T \wedge T \wedge T$$

$$\Leftrightarrow T$$

$(\exists y)(\forall x)P(x,y)$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(P(1,y) \wedge P(2,y) \wedge P(3,y))$$

$$\Leftrightarrow (P(1,1) \wedge P(2,1) \wedge P(3,1)) \vee$$

$$(P(1,2) \wedge P(2,2) \wedge P(3,2)) \vee$$

$$(P(1,3) \wedge P(2,3) \wedge P(3,3))$$

$$\Leftrightarrow (T \wedge F \wedge F) \vee (T \wedge T \wedge F) \vee (T \wedge F \wedge T)$$

$$\Leftrightarrow F \vee F \vee F$$

$$\Leftrightarrow F$$

2-6 前束范式

【定义2-6.1】一个公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾，则该公式叫做**前束范式**。

【例2-6.1】把公式 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x) Q(x)$ 转化为前束范式。

【解】

$$\begin{aligned} & (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x) Q(x) \\ \Leftrightarrow & \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x) Q(x) \\ \Leftrightarrow & (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x) Q(x) \\ \Leftrightarrow & (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ \Leftrightarrow & (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \end{aligned}$$

【例2-6.2】 把公式 $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y) Q(x,y))$ 转化为前束范式。

【解】

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y) Q(x,y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y) Q(x,y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (\exists y) (\neg P(x) \vee Q(x,y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (\exists y) (P(x) \rightarrow Q(x,y))$$

2-7 谓词演算的推理理论

命题推理的基本元素：

推理规则： P规则、T规则、CP规则

推理方法： 真值表法、直接证法、间接证法

推理依据： 等价式、蕴含式

在谓词演算中，由于在前提和结论中的谓词公式常带有量词，因而要使用命题演算的等价式和蕴含式需要消去和添加量词。

谓词演算的推理规则：**全称指定、存在指定、全称推广、存在推广。**

■ 全称指定 US (Universal Specification)

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$$

注意: c 代表个体域中的任意元素

■ 存在指定 ES (Universal Specification)

$$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$$

注意: (1) c 代表个体域中的部分元素

(2) 在每次使用时都要引入不同的个体

如: $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$

$$(\exists x)Q(x) \Rightarrow Q(d)$$

离散数学——谓词逻辑

■ 全称推广 UG (Universal Generalization)

$$P(c) \Rightarrow (\forall x)P(x)$$

注意: c 要能够代表个体域中的所有元素

■ 存在推广 EG (Existential Generalization)

$$P(c) \Rightarrow (\exists x)P(x)$$

【例2-7.1】 验证苏格拉底三段论的有效性。

【证】 设 $M(x)$: x 是人 $D(x)$: x 是要死的 s : 苏格拉底
苏格拉底三段论可表示为:

$$(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x)) \wedge M(s) \Rightarrow D(s)$$

- | | |
|--|-----------|
| (1) $(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x))$ | P |
| (2) $M(s) \rightarrow D(s)$ | US(1) |
| (3) $M(s)$ | P |
| (4) $D(s)$ | T I(2)(3) |

【例2-7.2】证明 $(\forall x)(C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x)) \wedge (\exists x)(C(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$

【证】

(1)	$(\forall x)(C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x))$	P
(2)	$C(a) \rightarrow W(a) \wedge R(a)$	US (1)
(3)	$(\exists x)(C(x) \wedge Q(x))$	P
(4)	$C(b) \wedge Q(b)$	ES(3)
(5)	$C(b)$	TI(4)
(6)	$Q(b)$	TI(4)
(7)	$W(a) \wedge R(a)$	TI(2)(5)
(8)	$R(a)$	TI(7)
(9)	$Q(a) \wedge R(a)$	TI(6)(8)
(10)	$(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$	EG(9)

(1)	$(\exists x)(C(x) \wedge Q(x))$	P
(2)	$C(a) \wedge Q(a)$	ES (1)
(3)	$(\forall x)(C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x))$	P
(4)	$C(a) \rightarrow W(a) \wedge R(a)$	US(3)
(5)	$C(a)$	TI(4)
(6)	$Q(a)$	TI(4)
(7)	$W(a) \wedge R(a)$	TI(2)(5)
(8)	$R(a)$	TI(7)
(9)	$Q(a) \wedge R(a)$	TI(6)(8)
(10)	$(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$	EG(9)

离散数学——谓词逻辑

【例2-7.3】证明 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

【证】 反证法

(1)	$\neg((\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$	P 附加前提		
(2)	$\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)Q(x)$	T E(1)		
(3)	$(\exists x)\neg P(x) \wedge (\forall x) \neg Q(x)$	T E(2)		
(4)	$(\exists x)\neg P(x)$	T I(3)	(8)	$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ P
(5)	$(\forall x) \neg Q(x)$	T I(3)	(9)	$P(c) \vee Q(c)$ US(8)
(6)	$\neg P(c)$	ES(4)	(10)	$P(c)$ T I(7)(9)
(7)	$\neg Q(c)$	US(5)	(11)	$P(c) \wedge \neg P(c)$ T I(6)(10)

方法二： CP 规则

由于 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

(1) $\neg (\forall x)P(x)$ P 附加前提

(2) $(\exists x)\neg P(x)$ T E(1)

(3) $\neg P(c)$ ES(2)

(4) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ P

(5) $P(c) \vee Q(c)$ US(4)

(6) $Q(c)$ T I(5)(6)

(7) $(\exists x)Q(x)$ EG(6)

(8) $\neg (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$ CP

【例2-7.4】判断下列推理是否正确。

【解】

- | | |
|-------------------------------------|-------|
| (1) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ | P |
| (2) $(\exists y)P(a,y)$ | US(1) |
| (3) $P(a,b)$ | ES(2) |
| (4) $(\forall x)P(x,b)$ | UG(3) |
| (5) $(\exists y) (\forall x)P(x,y)$ | EG(4) |

【例2-7.5】有些病人喜欢所有的医生，任何病人都不喜欢庸医，所以没有医生是庸医。

【解】设 $P(x)$: x 是病人 $Q(x)$: x 是医生 $R(x)$: x 是庸医 $L(x,y)$: x 喜欢 y

则 推理可表示为:

$$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \rightarrow L(x,y))) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(R(y) \rightarrow \neg L(x,y))) \Rightarrow \neg(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$$

$$(1) (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \rightarrow L(x,y))) \quad P$$

$$(2) P(a) \wedge (\forall y)(Q(y) \rightarrow L(a,y)) \quad ES(1)$$

$$(3) P(a) \quad TI(2)$$

$$(4) (\forall y)(Q(y) \rightarrow L(a,y)) \quad TI(2)$$

$$(5) Q(b) \rightarrow L(a,b) \quad US(4)$$

离散数学——谓词逻辑

- | | |
|---|-----------|
| (6) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(R(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$ | P |
| (7) $P(a) \rightarrow (\forall y)(R(y) \rightarrow \neg L(a,y))$ | US(6) |
| (8) $(\forall y)(R(y) \rightarrow \neg L(a,y))$ | TI(3)(8) |
| (9) $R(b) \rightarrow \neg L(a,b)$ | US(7) |
| (10) $L(a,b) \rightarrow \neg R(b)$ | TE(9) |
| (11) $Q(b) \rightarrow \neg R(b)$ | TI(5)(10) |
| (12) $\neg Q(b) \vee \neg R(b)$ | TE(11) |
| (13) $\neg(Q(b) \wedge R(b))$ | TE(12) |
| (14) $(\forall x)\neg(Q(x) \wedge R(x))$ | UG(13) |
| (15) $\neg(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$ | TE(14) |

Prolog 语言

Prolog 是一种与众不同的语言，不用来开发软件，专门解决逻辑问题。比如，"苏格拉底是人，人都会死，所以苏格拉底会死"这一类的问题。

入门教程：

- 安装程序下载： SWI-Prolog
- Prolog 语言入门教程

<https://ruanyifeng.com/blog/2019/01/prolog.html>

https://blog.csdn.net/qq_33017507/article/details/109502720

https://blog.csdn.net/qq_38237214/article/details/73613903

【例】某单位要从A， B， C这三名科研骨干中挑选1到2名出国进修，根据工作业务上的需要，选派人员需满足如下条件：（1）若A去，则C必须去；（2）若B去，则C不能去；（3）若C不去，则A或B都可以去。问如何选派？

【解】利用真值表法，求出其主析取范式

（1）A去，C去，B不去

（2）B去，A不去，C不去

（3）C去，A不去，B不去

编写prolog程序，给出人员选派的所有方案。

数理逻辑 程序设计题

1.实验目的

通过实验理解命题、命题公式及真值表的概念和正确表示方法，掌握范式的定义，学会利用真值表求出命题的主析取范式和主合取方式。能够利用真值表判断命题是否为永真式、永假式，判断两个命题是否是蕴含的或等价的。在此基础上，实现对命题推理的正确性进行判断，解决一些实际推理问题。

2.实验要求

(1) 测试用例要包含以下多种情况：

- (a) 对命题表达式正确性的判断
- (b) 至少包含否定、合取、析取、条件4个基本逻辑联结词
- (c) 根据真值表求出命题的主析取范式和主合取方式
- (d) 输入两个命题公式，判断其逻辑关系
- (e) 输入一个逻辑推理式子，判断其正确性。

离散数学——集合论

- (2) 实验报告中给出算法设计思想及流程图
- (3) 给出测试结果截图
- (4) 写出实验总结、分析及心得

3.实验内容

输入：

命题公式

输出：

- (1) 命题真值表
- (2) 命题的类别
- (3) 命题的主析取范式与主合取范式
- (4) 两个命题公式的逻辑关系
- (5) 判断命题推理的正确性