离散数学

Discrete Mathematics

计算机与人工智能学院
国家超级计算郑州中心
安敏
18810118550
anmin@zzu.edu.cn

第二章 谓词逻辑

苏格拉底三段论：

（1）所有的人都是要死的

（2）苏格拉底是人

（3）苏格拉底是要死的

利用命题演算

设 P：所有的人都是要死的

Q：苏格拉底是人

R：苏格拉底是要死的

则 推理表示为：$P \wedge Q \Rightarrow R$

2-1 谓词的概念及表示

【例2-1.1】

(1) 小张是大学生	(1) 小张是大学生
(2) 小李是大学生	(2) 小李是大学生
(3) 小李喜欢跳舞	(3) 小李喜欢跳舞
(4) 3 是质数	(4) 3 是质数
(5) 2 < 3	(5) 2 < 3
(6) 6 = 2 * 3	(6) 6 = 2 * 3
(7) 郑州位于北京和武汉之间	(7) 郑州位于北京和武汉之间

个体、谓词

【定义2-1.1】客观世界中可以独立存在的具体或抽象对象称为**个体（客体）**，表示个体的词称为**个体词**。若个体词以常量的方式表示特定个体，则称之为**个体常量**；若个体词以变量的方式泛指不确定的个体，则称之为**个体变量**。

常用小写字母表示，如：

a: 小李　b:小张　c: 北京

个体常量

s: 学生　z: 桌子

个体变量

【定义2-1.2】表示个体（客体）特征、性质或关系的词，称为**谓词**。

常用大写字母表示，如：

F：喜欢跳舞　　S：是大学生　　G：…<…　　D：…=…*…

谓词与个体常量一起可以表示一个命题，如：

(1) a:小张　S：是大学生　则: S(a) 表示“小张是大学生”

(2) b:小李　S：是大学生　则: S(b) 表示“小李是大学生”

(3) a:小张　F：喜欢跳舞　则: F(a) 表示“小张喜欢跳舞”

(4) G(2,3)　2<3　　G(3,2) 3<2

2-2 谓词函数与量词

对于上述例子，若用个体变元取代个体常量，则可得到：

S(x): x是大学生

F(x): x喜欢跳舞”

G(x,y): x<y

【定义2-2.1】由一个谓词和一些个体变元组成的表达式，称为**简单谓词函数**。

如果一个函数包含n个个体变元，则称为**n元简单谓词函数**。

注意: 谓词函数不是命题，只有当所有的个体变元都用确定的个体代入时，才表示一个命题。

【定义2-2.2】由简单谓词函数和命题连结词组成的表达式，称为**复合谓词函数。**

如：$S(x)\wedge F(x)$： x是大学生，并且喜欢跳舞

$\neg S(x)$：x不是大学生

对于一个谓词函数，每个个体变元都有其取值范围，该取值范围，称为是该个体变元的**个体域（论域）**。

根据上述概念，一个命题被分为了个体与谓词两部分，但对于一些命题，这样的划分仍不能区分命题之间的不同，不能准确的表达命题的意义。

所有学生都喜欢跳舞

有些学生喜欢跳舞

【定义2-2.3】表示命题中数量的词称为**量词**。对于给定的谓词函数P(x)，若对x个体域中的每个元素都要求P(x)为真，则称P(x)得到**全称量化**，记为($\forall x$)P(x)，其中∀称为全称量词，x 称为其作用变量。若x在其个体域中至少存在一个元素使P(x)为真，则称P(x)得到**存在量化**，记为($\exists x$)P(x)，其中∃称为存在量词，x 称为其作用变量。

全称量词∀ 读作“任意的”，表示“所有的”、“每一个”、“任意的”等意义；存在量词 ∃ 读作“存在”，表示“存在”、“有一个”、“有一些”等意义。

则命题

(1) 所有学生都喜欢跳舞

(2) 有些学生喜欢跳舞

设F(x)：x喜欢跳舞

(1) $(\forall x)F(x)$

(2) $(\exists x)F(x)$

其中 x 的个体域为“学生”。

再如：

(1) 所有的整数都是实数

(2) 有些整数是偶数

设 R(x)：x是实数　　E(x)：x是偶数

则 (1) $(\forall x)R(x)$

(2) $(\exists x)E(x)$

其中 x 的个体域为“ 整数”。

在谓词函数中，每一个个体变元都有其个体域，个体域不同，表达的命题的真值就可能不同。若在一个谓词表达式中有多个谓词，每个变元都要说明其个体域，对研究谓词公式的性质及推理都是不方便的，因而引入全总个体域的概念。

全总个体域：包含宇宙中所有的研究对象，即所有个体的全体。

此时，每个变元的个体域用**特性谓词**表达。

(1) 所有的整数都是实数

(2) 有些整数是偶数

设 I(x): x是整数　R(x): x是实数　E(x):x是偶数

则：　$(\forall x)(I(x) \rightarrow R(x))$

$(\exists x)(I(x) \wedge E(x))$

2-3 谓词公式与翻译

【定义2-3.1】谓词公式（合式公式）

(1) 原子谓词公式是谓词公式；

(2) 如果A是谓词公式，则¬A也是谓词公式；

(3) 如果A、B是谓词公式，那么(A∧B)、(A∨B)、(A→B)、(A↔B)都是谓词公式；

(4) 如果A是谓词公式，x是A中的一个变元，则$(\forall x)$A、$(\exists x)$A都是谓词公式；

(5) 当且仅当能够有限次地应用(1),(2),(3),(4)所得到的式子是谓词公式。

【例2-3.1】用谓词公式表达下列命题。

（1）所有的人都是要呼吸的

（2）并非每个有理数都是实数

（3）没有不犯错误的人

（4）尽管有人聪明，但未必一切人都聪明

（5）每个实数都存在比它更大的实数。

【解】

(1) 设 $M(x)$：x是人 $H(x)$：x是要呼吸的

则 $(\forall x)(M(x)\rightarrow H(x))$

(2) 设 $Q(x)$：x是有理数 $R(x)$：x是实数

则 $\neg(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$

(3) 设 $M(x)$：x是人 $E(x)$：x犯错误

则 $\neg(\exists x)(M(x)\wedge\neg E(x))$ 或 $(\forall x)(M(x)\rightarrow E(x))$

(4) 设 $M(x)$：x是人 $C(x)$：x聪明

则 $(\exists x)(M(x)\wedge C(x))\wedge\neg(\forall x)(M(x)\rightarrow C(x))$

(5) 设 $R(x)$：x是实数 $G(x,y)$：$y>x$

则 $(\forall x)(R(x)\rightarrow(\exists y)(R(y)\wedge G(x,y)))$

【例2-3.2】设P(x)，L(x)，R(x,y,z)和E(x,y)分别表示“x是一个点”、“x是一条直线”、“z通过x和y”和“$x=y$”。符号化下面的句子：

对每两个点有且仅有一条直线通过该两点

【解】

$$(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge P(y)\wedge\neg E(x,y)\rightarrow$$

$$(\exists z)(L(z)\wedge R(x,y,z)\wedge$$

$$(\forall m)(L(m)\wedge R(x,y,m)\rightarrow E(m,z))))$$

2-4 变元的约束

对于 $(\forall x)P(x)$、$(\exists x)P(x)$， $\forall$、 $\exists$后的x称为量词的作用变元或指导变元， $P(x)$称为量词的作用域或辖域，在$P(x)$中出现的所有x称为约束出现，而其余的变元称为自由变元。

【例2-4.1】 说明下列各式的作用域及变元约束情况。

(1) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

(2) $(\exists x)\ P(x) \wedge Q(x)$

(3) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)\ Q(x,y))$

(4) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)\ Q(x,z) \rightarrow(\exists y)\ R(x,y)) \vee Q(x,y)$

【解】

(1) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

(2) $(\exists x)\ P(x)\wedge Q(x)$

(3) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)\ Q(x,y))$

(4) $(\forall x)(P(x)\wedge(\exists x)\ Q(x,z)\rightarrow(\exists y)\ R(x,y))\vee Q(x,y)$

在(2)、（4）中，x 既以约束形式出现，又以自由形式出现，这容易引概念上的混乱。为此，我们需要对其进行改名，使得一个变元在一个谓词公式中只以一种形式出现。

若 $P(x)$： x喜欢唱歌， x的个体域为“我们班的所有学生”

则 $(\forall x)P(x)$与 $(\forall y)P(y)$ 都表示“我们班所有学生都喜欢唱歌”

因此，约束变元的改名不影响它所表达的句子意义。

- 约束变元如何改名呢？

(1) 范围　量词后的变元，以及量词作用域中出现的该变元。

(2) 名称　作用域中没有出现过的变元名称

如：(1) $(\exists x)\, P(x) \wedge Q(x)$　　　$(\exists y)\, P(y) \wedge Q(x)$

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x,z) \rightarrow (\exists y)\, R(x,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall w)(P(w) \wedge (\exists x)\, Q(x,z) \rightarrow (\exists y)\, R(w,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall w)(P(w) \wedge (\exists u)\, Q(u,z) \rightarrow (\exists y)\, R(w,y)) \vee Q(x,y)$

- 自由变元如何改名呢？

  (1) 范围　式子中所有同名的自由变元

  (2) 名称　式子中没有出现过的变元名称

如：(1) $(\exists x)P(x) \wedge Q(x)$　　$(\exists x)P(x) \wedge Q(y)$

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)Q(x,z) \rightarrow (\exists y)R(x,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)Q(x,z) \rightarrow (\exists y)R(x,y)) \vee Q(w,y)$

(3) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(y,z) \rightarrow (\exists y)R(x,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall x)(P(x) \wedge Q(u,z) \rightarrow (\exists y)R(x,y)) \vee Q(x,u)$

2-5 谓词演算的等价式与蕴含式

在谓词公式中常包含命题变元和客体变元，当个体变元由确定的个体所取代，命题变元用确定的命题所取代时，就称作对**谓词公式赋值**。 一个谓词公式经过赋值以后，就成为具有确定真值T或 F 的命题。

【定义2-5.1】给定任何两个谓词公式 A 和 B，设它们有共同的个体域 E，若对 A 和 B 的任一组变元进行赋值，所得命题的真值相同，则称谓词公式 A 和 B 在 E 上是等价的，并记作$A \Leftrightarrow B$。

【定义2-5.2】 一个谓词公式 A，如果至少在一种赋为真，则称该 A 为**可满足的**。若对E上所有的赋值，A的值都为真，则称A在E上是**有效的**或**永真的**。若对E上所有的赋值，A的值都为假，则称A在E上是**永假的**或**不可满足的**。

根据谓词公式等价的定义，当个体域E={a_1, a_2 , ……, a_n}时，可以得出：

$$(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots\ldots \wedge P(a_n)$$

$$(\exists x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots\ldots \vee P(a_n)$$

【例2-5.1】 设$P(x)$: $x < 4$， $Q(x)$: $x > 3$ E={1,2,3,4},试求$(\forall x)P(x)$、 $(\exists x)Q(x)$的值。

【解】

$$(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$$
$$\Leftrightarrow T \wedge T \wedge T \wedge F$$
$$\Leftrightarrow F$$

$$(\exists x)Q(x) \Leftrightarrow Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee Q(4)$$
$$\Leftrightarrow F \vee F \vee F \vee T$$
$$\Leftrightarrow T$$

- 命题公式的推广

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x))$

$(\exists x)\neg(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x)\wedge\neg Q(x))$

$\neg(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x)\wedge\neg Q(x))$ ×

- 量词与否定的关系

设 $P(x)$: x喜欢唱歌　　　$Q(x)$: x喜欢跳舞

x 的个体域为“我们班所有学生”

则：所有学生都不喜欢唱歌　　$(\forall x)\neg P(x)$

没有一个学生喜欢唱歌　　$\neg(\exists x)P(x)$

有学生不喜欢唱歌 $(\exists x)\neg P(x)$

不是所有学生都喜欢唱歌 $\neg(\forall x)P(x)$

$$(\forall x)\neg P(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x)P(x)$$

$$(\exists x)\neg P(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x)$$

- 量词与析取、合取的关系

所有学生都喜欢唱歌和跳舞 $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$

所有学生都喜欢唱歌，所有学生都喜欢跳舞 $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

有学生喜欢唱歌或跳舞 $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$

有学生喜欢唱歌或有学生喜欢跳舞 $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

$$(\forall x)(P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \lor Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x) P(x) \lor (\exists x)Q(x)$$

当 x 的个体域为有限时，很容易验证上述式子成立。

设 x 的个体域为$\{a,b,c\}$，则

$$(\forall x) \neg P(x) \Leftrightarrow \neg P(a) \land \neg P(b) \land \neg P(c)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P(a) \lor P(b) \lor P(c))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\exists x)P(x)$$

$$(\exists x) \neg P(x) \Leftrightarrow \neg P(a) \lor \neg P(b) \lor \neg P(c)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P(a) \land P(b) \land P(c))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x)P(x)$$

$(\forall x)(P(x) \land Q(x))$

$\Leftrightarrow (P(a) \land Q(a)) \land (P(b) \land Q(b)) \land (P(c) \land Q(c))$

$\Leftrightarrow (P(a) \land P(b) \land P(c)) \land (Q(a) \land Q(b) \land Q(c))$

$\Leftrightarrow (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$

$(\exists x)(P(x) \lor Q(x))$

$\Leftrightarrow (P(a) \lor Q(a)) \lor (P(b) \lor Q(b)) \lor (P(c) \lor Q(c))$

$\Leftrightarrow (P(a) \lor P(b) \lor P(c)) \lor (Q(a) \lor Q(b) \lor Q(c))$

$\Leftrightarrow (\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x)$

当 $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ 中的 $\wedge$ 换成$\vee$，等价式是否还成立呢？

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 所有学生都喜欢唱歌或跳舞

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ 所有学生都喜欢唱歌或所有学生都喜欢跳舞

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

同样的，当$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$中的 $\vee$ 换成$\wedge$，情况是什么样呢？

$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ 有学生喜欢唱歌和跳舞

$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ 有学生喜欢唱歌，且有学生喜欢跳舞

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

对于条件和双条件式，存在如下关系：

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$$

如：P(x): x是奇数 Q(x): x是偶数 x 的个体域为{1，2}，则：

$$(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow (P(1)\wedge P(2)) \to (Q(1) \wedge Q(2))$$
$$\Leftrightarrow (T\wedge F)\to(F\wedge T)$$
$$\Leftrightarrow F \to F$$
$$\Leftrightarrow T$$

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$
$$\Leftrightarrow (P(1)\to Q(1)) \wedge (P(2)\to Q(2))$$
$$\Leftrightarrow (T\to F) \wedge (F\to T)$$
$$\Leftrightarrow F \wedge T$$
$$\Leftrightarrow F$$

- 量词作用域的扩张与收缩

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge Q(y)$$

$$(\forall x)(P(x) \vee Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee Q(y)$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \wedge Q(y)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee Q(y)$$

由此可以得出：

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow Q(y)$$

$$(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow Q(y)$$

$$(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow P(x) \rightarrow (\forall y)Q(y)$$

$$(\exists y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y)$$

多个量词的使用

设 $P(x,y)$是二元谓词函数，对于两个量词，存在8种情况，关系如下：

$(\forall x)(\forall y)$

$(\forall y)(\forall x)$

$(\exists x)(\forall y)$

$(\exists y)(\forall x)$

$(\forall x)(\exists y)$

$(\forall y)(\exists x)$

$(\exists x)(\exists y)$

$(\exists y)(\exists x)$

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

设 P(x,y): x与y年龄一样，x的个体域是计算机的所有学生， y的个体域是软件工程的所有学生。

解释下列式子的意义：

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

【例2-5.1】设$P(x,y)$: x 整除 y， $E=\{1,2,3\}$,试求$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$， $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$的值。

【解】 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x,1) \vee P(x,2) \vee P(x,3))$

$\Leftrightarrow (P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3)) \wedge$

$(P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3)) \wedge$

$(P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3))$

$\Leftrightarrow (T \vee T \vee T) \wedge (F \vee T \vee F) \wedge (F \vee F \vee T)$

$\Leftrightarrow T \wedge T \wedge T$

$\Leftrightarrow T$

$(\exists y)(\forall x)P(x,y)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(P(1,y) \wedge P(2,y) \wedge P(3,y))$

$\Leftrightarrow (P(1,1) \wedge P(2,1) \wedge P(3,1)) \vee$

$(P(1,2) \wedge P(2,2) \wedge P(3,2)) \vee$

$(P(1,3) \wedge P(2,3) \wedge P(3,3))$

$\Leftrightarrow (T \wedge F \wedge F) \vee (T \wedge T \wedge F) \vee (T \wedge F \wedge T)$

$\Leftrightarrow F \vee F \vee F$

$\Leftrightarrow F$

2-6 前束范式

【定义2-6.1】一个公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾，则该公式叫做**前束范式**。

【例2-6.1】把公式$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x) Q(x)$转化为前束范式。

【解】

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x) Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

【例2-6.2】 把公式$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)\,Q(x,y))$转化为前束范式。

【解】

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)\,Q(x,y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)\,Q(x,y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)\,(\exists y)\,(\neg P(x) \vee Q(x,y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \rightarrow Q(x,y))$$

2-7 谓词演算的推理理论

命题推理的基本元素：

推理规则：P规则、T规则、CP规则

推理方法：真值表法、直接证法、间接证法

推理依据：等价式、蕴含式

在谓词演算中，由于在前提和结论中的谓词公式常带有量词，因而要使用命题演算的等价式和蕴含式需要消去和添加量词。

谓词演算的推理规则：**全称指定、存在指定、全称推广、存在推广**。

- **全称指定 US （Universal Specification ）**

  $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$

  注意: c 代表个体域中的任意元素

- **存在指定 ES （Universal Specification）**

  $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$

  注意: (1) c 代表个体域中的部分元素

  (2) 在每次使用时都要引入不同的个体

  如： $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$

  $(\exists x)Q(x) \Rightarrow Q(d)$

- **全称推广 UG （Universal Generalization）**

$P(c) \Rightarrow (\forall x)P(x)$

注意: c 要能够代表个体域中的所有元素

- **存在推广 EG （Existential Generalization ）**

$P(c) \Rightarrow (\exists x)P(x)$

【例2-7.1】验证苏格拉底三段论的有效性。

【证】设$M(x)$: x 是人 $D(x)$: x是要死的 s: 苏格拉底

苏格拉底三段论可表示为:

$(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x)) \wedge M(s) \Rightarrow D(s)$

(1)	$(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x))$	P
(2)	$M(s) \rightarrow D(s)$	US(1)
(3)	$M(s)$	P
(4)	$D(s)$	T I(2)(3)

【例2-7.2】 证明 $(\forall x)(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))\wedge(\exists x)(C(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$

【证】

(1)	$(\forall x)(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))$	P
(2)	$C(a)\rightarrow W(a)\wedge R(a)$	US (1)
(3)	$(\exists x)(C(x)\wedge Q(x))$	P
(4)	$C(b)\wedge Q(b)$	ES(3)
(5)	$C(b)$	T I(4)
(6)	$Q(a)$	T I(4)
(7)	$W(a)\wedge R(a)$	T I(2)(5)
(8)	$R(a)$	T I(7)
(9)	$Q(a)\wedge R(a)$	T I(6)(8)
(10)	$(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$	EG(9)

(1)	$(\exists x)(C(x)\wedge Q(x))$	P
(2)	$C(a)\wedge Q(a)$	ES (1)
(3)	$(\forall x)(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))$	P
(4)	$C(a)\rightarrow W(a)\wedge R(a)$	US(3)
(5)	$C(a)$	T I(4)
(6)	$Q(a)$	T I(4)
(7)	$W(a)\wedge R(a)$	T I(2)(5)
(8)	$R(a)$	T I(7)
(9)	$Q(a)\wedge R(a)$	T I(6)(8)
(10)	$(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$	EG(9)

【例2-7.3】证明 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

【证】 反证法

(1) $\neg((\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$	P 附加前提		
(2) $\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)Q(x)$	T E(1)		
(3) $(\exists x)\neg P(x) \wedge (\forall x)\neg Q(x)$	T E(2)		
(4) $(\exists x)\neg P(x)$	T I(3)	(8) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$	P
(5) $(\forall x)\neg Q(x)$	T I(3)	(9) $P(c) \vee Q(c)$	US(8)
(6) $\neg P(c)$	ES(4)	(10) $P(c)$	T I(7)(9)
(7) $\neg Q(c)$	US(5)	(11) $P(c) \wedge \neg P(c)$	T I(6)(10)

方法二： **CP 规则**

由于 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P 附加前提
(2)	$(\exists x)\neg P(x)$	T E(1)
(3)	$\neg P(c)$	ES(2)
(4)	$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$	P
(5)	$P(c) \vee Q(c)$	US(4)
(6)	$Q(c)$	T I(5)(6)
(7)	$(\exists x)Q(x)$	EG(6)
(8)	$\neg (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$	CP

【例2-7.4】判断下列推理是否正确。

【解】

(1) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	P
(2) $(\exists y)P(a,y)$	US(1)
(3) $P(a,b)$	ES(2)
(4) $(\forall x)P(x,b)$	UG(3)
(5) $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$	EG(4)

【例2-7.5】有些病人喜欢所有的医生，任何病人都不喜欢庸医，所以没有医生是庸医。

【解】设 $P(x)$: x是病人　$Q(x)$: x是医生　$R(x)$: x是庸医　$L(x,y)$: x喜欢y

则 推理可表示为：

$$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \rightarrow L(x,y)) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(R(y) \rightarrow \neg L(x,y)) \Rightarrow \neg(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$$

(1)	$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \rightarrow L(x,y))$	P
(2)	$P(a) \wedge (\forall y)(Q(y) \rightarrow L(a,y))$	ES(1)
(3)	$P(a)$	T I(2)
(4)	$(\forall y)(Q(y) \rightarrow L(a,y))$	T I(2)
(5)	$Q(b) \rightarrow L(a,b)$	US(4)

(6) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)(R(y)\rightarrow\neg L(x,y))$	P
(7) $P(a)\rightarrow(\forall y)(R(y)\rightarrow\neg L(a,y))$	US(6)
(8) $(\forall y)(R(y)\rightarrow\neg L(a,y))$	T I(3)(8)
(9) $R(b)\rightarrow\neg L(a,b)$	US(7）
(10) $L(a,b)\rightarrow\neg R(b)$	T E(9)
(11) $Q(b)\rightarrow\neg R(b)$	T I(5)(10)
(12) $\neg Q(b)\vee\neg R(b)$	T E(11)
(13) $\neg(Q(b)\wedge R(b))$	T E(12)
(14) $(\forall y)\neg(Q(y)\wedge R(y))$	UG(13)
(15) $\neg(\exists y)(Q(y)\wedge R(y))$	T E(14)

数理逻辑 程序设计题

输入： 一个命题公式

输出： （1）真值表

（2）主析取范式、主合取范式

（3）给出命题公式的类别（永真、永假、可满足）

提交报告：

（1）源程序

（2）程序运行截图

（3）算法描述 算法思想、流程图等