

第二篇 集合论

集合论是现代各科数学的基础，它的起源可以追溯到十九世纪末期。开始时为了追寻微积分的坚实的基础，人们仅进行了有关数集的研究。直到1876~1883年，康托尔(Georg Cantor)发表一系列有关集合论的文章，对任意元素的集合进行了深入的探讨，提出了关于基数、序数和良序集等理论，奠定了集合论的基础。但是随着集合论的发展，以及它与数学哲学密切联系所做的讨论，在1900年前后出现了各种悖论，使集合论的发展一度陷入僵滞的局面。1904~1908年，策墨罗(Zermelo)列出了第一个集合论的公理系统，他的公理，使数学哲学中产生的一些矛盾基本上得到统一，在此基础上以后就逐步形成了公理化集合论和抽象集合论，使该学科成为在数学中发展最为迅速的一个分支。现在集合论已渗透到古典分析、泛函、概率、函数论以及信息论、排队论等现代数学各个领域。

第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

第三章 集合与关系

3-1 集合的概念及表示法

■ 集合的概念

就是把具有共同属性的对象汇集成一个整体。

或 由**指定范围**内满足给定条件且能相互区分的**所有对象**的聚集。

■ 集合的表示

$\{1, 2, 3, 4\}$

$\{x \mid x \text{ 是偶数}\}$

集合常用大写英文字母表示

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\{x \mid 1 < x < 4\}$

如：A、B

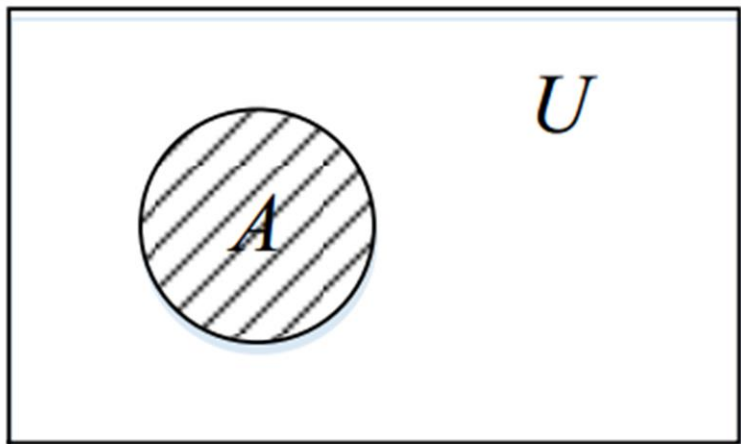
枚举法

$\{x \mid p(x)\}$

描述法

文氏图法

是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解。一般用平面上的圆形、椭圆形或方形表示一个集合。



离散数学——集合论

■ 集合的特性

元素不能重复, 元素没有顺序

■ 元素与集合的关系

① 属于 x 是集合 A 的元素, 称 x 属于 A , 记为 $x \in A$

② 不属于 x 不是集合 A 的元素, 称 x 不属于 A , 记为 $x \notin A$

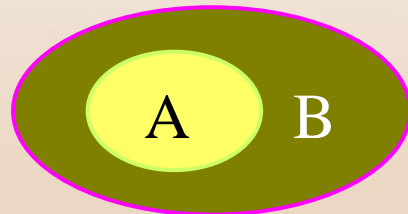
■ 集合的关系

① 相等 $A=B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

② 包含 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \rightarrow x \in B)$ A 称为 B 的子集

③ 真包含 $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x) (x \in B \wedge x \notin A)$

$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge \neg(A=B)$ A 称为 B 的真子集



离散数学——集合论

- 从属关系 \in : 集合元素与集合的关系
- 包含关系 \subseteq : 集合与集合的关系
- 包含关系满足:
 - 自反性 $A \subseteq A$
 - 传递性 $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

离散数学——集合论

【定理 3-1.1】 $A=B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

■ 证明：若 $A=B$ ，根据定义，A和B有相同的元素，

$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ 为真且 $(\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$ 为真，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，设 $A \neq B$ ，则A与B的元素不完全相同

若有 $x \in A$ ，但 $x \notin B$ ，与 $A \subseteq B$ 矛盾；

若有 $x \in B$ ，但 $x \notin A$ ，与 $B \subseteq A$ 矛盾。

故A和B的元素相同，即 $A=B$

■ 特殊集合

① **空集** $\Phi = \{ x \mid p(x) \wedge \neg p(x) \}$

Φ 是任何集合的子集

Φ 及 A 称为集合 A 的**平凡子集**。

② **幂集** $\rho(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$

是 A 的所有子集的集合

③ **全集**

在一个相对固定的范围内，包含此范围内所有元素的集合，称为**全集**，用 U 或 E 表示。

【定理 3-1.2】 若 $|A|=n$ ，则 $|\rho(A)|=2^n$ ，或记为 $2^{|A|}$ 。

【证明】 设 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，则A的任一子集B都可以表示为一个n位二进制串 $b_1 b_2 \dots b_n$ ，其中

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{若 } a_i \in B \\ 0 & \text{若 } a_i \notin B \end{cases}$$

因而， $00\dots 0 \leq b_1 b_2 \dots b_n \leq 11\dots 1$ 。

同样的，任何给一个n位二进制串都可以构造出一个A的子集。

故 $|\rho(A)|=2^n$ 。

离散数学——集合论

【例3-1.1】 $A=\{\Phi\}$, $B=\{1,2\}$, 求 $\rho(A)$, $\rho(B)$ 。

【解】 $\rho(A)=\{\Phi, \{\Phi\}\}$

$$\rho(B)=\{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

【例3-1.2】 求 $\rho(\rho(\{\Phi\}))$

【解】 $\rho(\rho(\Phi)) = \rho(\{\Phi, \{\Phi\}\})$

$$= \{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$$

【例3-1.3】 设集合A有101个元素，试问可以构成多少个子集？

其中有多少个子集的元素个数为奇数？

【解】 2^{101} 2^{100}

离散数学——集合论

【例3-1.4】 $A=\{1,2,3\}$, 求 $\rho(A)$

【解】 A 的子集

$$S_{000} = \Phi = S_0 \quad S_{001} = \{3\} = S_1$$

$$S_{010} = \{2\} = S_2 \quad S_{011} = \{2,3\} = S_3$$

$$S_{100} = \{1\} = S_4 \quad S_{101} = \{1,3\} = S_5$$

$$S_{110} = \{1,2\} = S_6 \quad S_{111} = \{1,2,3\} = S_7$$

故 $\rho(A) = \{S_i \mid 0 \leq i \leq 7\}$

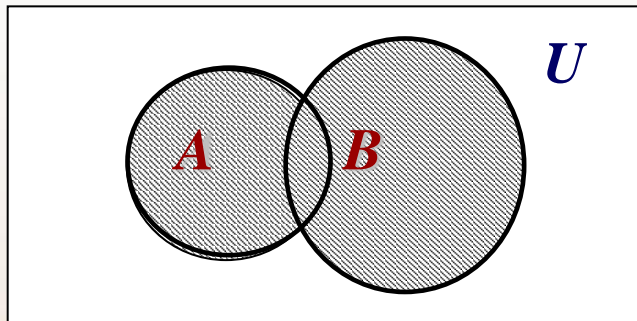
第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-2 集合的运算

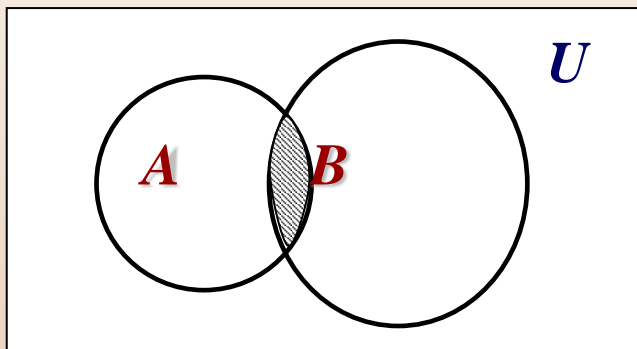
■ 并 \cup

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



■ 交 \cap

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



3-2 集合的运算

性质：

$$(1) A \cup A = A$$

$$(2) A \cup B = B \cup A$$

$$(3) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(4) A \cup \Phi = A$$

$$(5) A \cup E = E$$

$$(1) A \cap A = A$$

$$(2) A \cap B = B \cap A$$

$$(3) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(4) A \cap E = A$$

$$(5) A \cap \Phi = \Phi$$

幂等律

交换律

结合律

同一律

零率

【定理3-2.1】 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

分配律

【证明】方法一 采用 $A=B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

(1) 对任意的 $x \in A \cap (B \cup C)$,

则 $x \in A$, 且 $x \in B \cup C$

从而 $x \in A$, 且 $x \in B$ 或 $x \in A$, 且 $x \in C$

故 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$

则 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

从而 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) 对任意的 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$

从而 $x \in A$, 且 $x \in B$ 或 $x \in A$, 且 $x \in C$

故 $x \in A$, 且 $x \in B \cup C$

则 $x \in A \cap (B \cup C)$

从而 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

由(1)(2)得, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

方法二：采用谓词演算的的等价公式

对任意的 $x \in A \cap (B \cup C)$ ，由于

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

故 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

【定理3-2.2】 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

【证明】 充分性

(1) 对任意的 $x \in A \cup B$ ，则 $x \in A$ 或 $x \in B$ 。

由于 $A \subseteq B$ ，故对任意的 $x \in A$ ，均有 $x \in B$ 。

从而， $x \in B$ 成立。

因而， $A \cup B \subseteq B$ 。

(2) $B \subseteq A \cup B$ 成立

由 (1) (2) 可得， $A \cup B = B$ 。

必要性

若 $A \cup B = B$ ，由于 $A \subseteq A \cup B$ ，则 $A \subseteq B$ 。

【定理3-2.3】 $A \cap (A \cup B) = A$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

吸收律

【证明】

(1) $A \cap (A \cup B) \subseteq A$

(2) 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cup B$, 从而有 $x \in A \cap (A \cup B)$

故 $A \subseteq A \cap (A \cup B)$

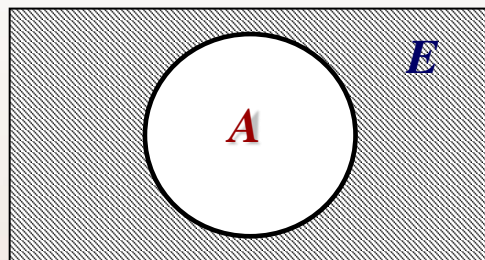
由 (1) (2) 可得, $A \cap (A \cup B) = A$ 。

同理可证 $A \cup (A \cap B) = A$

■ 补

对于集合A，设E为全集，则 $\sim A$ 称为A的补集，定义为：

$$\sim A = \{x \mid x \in E \text{ 且 } x \notin A\}$$



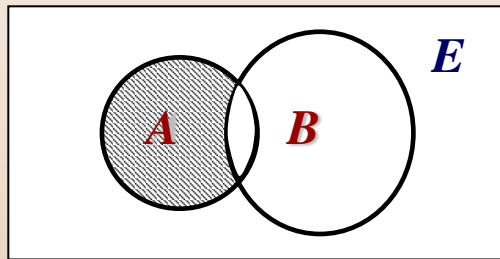
■ 差

设A，B为任意两个集合，A-B称为A与B的差集，定义为：

$$A-B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

也称B相对于A的补。

相对补



性质：

$$(1) \sim\sim A = A$$

双重否定律

$$(2) A \cup \sim A = E$$

排中律

$$(3) A \cap \sim A = \Phi$$

矛盾律

【定理3-2.4】

$$(1) \sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$$

德·摩根律

$$(2) \sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

【定理3-2.5】 设A、B为任意两个集合，则

$$(1) A - B = A \cap \sim B$$

$$(2) A - B = A - A \cap B$$

【定理3-2.6】 设A、B、C为任意三个集合，则

$$A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$$

【定理3-2.7】 设A、B为任意两个集合，若 $A \subseteq B$ 则

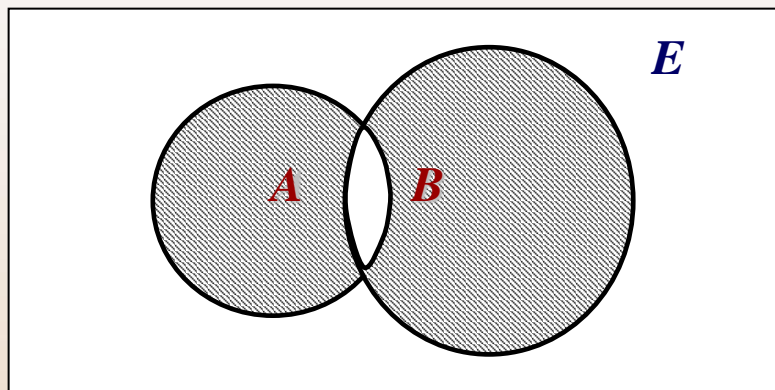
$$(1) \sim B \subseteq \sim A$$

$$(2) (B - A) \cup A = B$$

■ 对称差

设 A , B 为任意两个集合, $A \oplus B$ 称为 A 与 B 的**对称差**, 定义为:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$



【定理3-2.8】 设A、B、C为任意三个集合，则

$$(1) A \oplus B = B \oplus A$$

$$(2) A \oplus A = \Phi$$

$$(3) A \oplus \Phi = A$$

$$(4) (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

【例3-2.1】 判断下列命题是否为真。

(1) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(2) $\emptyset \in \emptyset$

(3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

【解】 (1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真，其余为假.

【例3-2.2】 设

$$S_1=\{1, 2, \dots, 8, 9\}, \quad S_2=\{2, 4, 6, 8\}, \quad S_3=\{1, 3, 5, 7, 9\},$$

$$S_4=\{3, 4, 5\}, \quad S_5=\{3, 5\}$$

确定在以下条件下 X 是否与 S_1, \dots, S_5 中某个集合相等？

(1) 若 $X \cap S_5 = \emptyset$

【解】 (1) $X = S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4$ 但 $X \cap S_2 = \emptyset$

(2) $X = S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$ 且 $X \not\subseteq S_3$

(3) $X = S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \emptyset$

(4) $X = S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3$ 且 $X \not\subseteq S_1$

(5) X 不存在

【例3-2.3】证明： $(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C) \Rightarrow B = C$

【证明】 方法一

$$\begin{aligned} B &= B \cap (A \cup B) \\ &= B \cap (A \cup C) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cup B) \cap C \\ &= (A \cup C) \cap C \\ &= C \end{aligned}$$

方法二

根据已知条件，可以得到

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup C) - (A \cap C)$$

即 $A \oplus B = A \oplus C$

从而有 $A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$

根据结合律得 $(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$

由于 $A \oplus A = \emptyset$, $\emptyset \oplus B = B$, $\emptyset \oplus C = C$

化简上式得, $B = C$

第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-4 序偶与笛卡尔积

集合的一个主要特征是元素的**无序性**，但是在现实生活中，有许多事物都是成对出现的，都有一定顺序，如：上、下；左、右； $3 \leq 4$ ；张华比李明高。具有顺序的元素无法用集合表示。

序偶：由两个元素组成的有序对，表示为 $\langle x, y \rangle$ ，其中 x 称为第一元素， y 称为第二元素。

【定义 3-4.1】两个序偶相等 $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ iff $x = u, y = v$ 。

由此可知 $\langle 2, 3 \rangle \neq \langle 3, 2 \rangle$

而对于集合， $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

离散数学——集合论

【定义 3-4.2】 **n 元组序偶** $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$

它是一个二元组序偶，其第一元素为 $n-1$ 组序偶。

由此可知 $\langle 2, 3, 4 \rangle = \langle \langle 2, 3 \rangle, 4 \rangle$ ，但 $\langle 2, 3, 4 \rangle \neq \langle 2, \langle 3, 4 \rangle \rangle$ 。

【定义 3-4.3】设 A 、 B 是两个集合，定义

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

称 $A \times B$ 为集合 A 与集合 B 的**笛卡尔积**或**直积**。

$|A|=m$ ， $|B|=n$ 。则 $|A \times B|=mn$

【例3-4.1】若 $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, 求 $A\times B$, $B\times A$, $A\times A$ 。

【解】 $A\times B=\{<1,3>, <1,4>, <2,3>, <2,4>\}$

$B\times A=\{<3,1>, <4,1>, <3,2>, <4,2>\}$

$A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>\}$

由此可知, 当 $A\neq B$ 时, $A\times B \neq B\times A$ 。

约定: $A\times\Phi = \Phi\times A = \Phi$

离散数学——集合论

【例3-4.2】若 $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{5\}$, 求 $(A \times B) \times C$, $A \times (B \times C)$ 。

【解】 $(A \times B) \times C = \{\langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle\} \times \{5\}$
 $= \{\langle \langle 1,3 \rangle, 5 \rangle, \langle \langle 1,4 \rangle, 5 \rangle, \langle \langle 2,3 \rangle, 5 \rangle, \langle \langle 2,4 \rangle, 5 \rangle\}$
 $= \{\langle 1,3,5 \rangle, \langle 1,4,5 \rangle, \langle 2,3,5 \rangle, \langle 2,4,5 \rangle\}$

$A \times (B \times C) = \{1,2\} \times \{\langle 3,5 \rangle, \langle 4,5 \rangle\}$
 $= \{\langle 1, \langle 3,5 \rangle \rangle, \langle 1, \langle 4,5 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 3,5 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 4,5 \rangle \rangle\}$

由此可知, $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

【定理3-4.1】

设A、B、C是任意三个集合，则

$$(1) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(2) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(3) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$(4) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

【证明】

(1) 对任意的 $\langle x, y \rangle \in A \times (B \cap C)$ ，由于

$$\langle x, y \rangle \in A \times (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \wedge \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

故 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

【定理3-4.2】 设A、B、C、D是四个非空集合，则

$$A \times B \subseteq C \times D \text{ 当且仅当 } A \subseteq C \text{ 且 } B \subseteq D$$

【证明】 充分性

任意的 $x \in A, y \in B$,

则 $\langle x, y \rangle \in A \times B$,

由于 $A \times B \subseteq C \times D$,

所以 $\langle x, y \rangle \in C \times D$,

因而 $x \in C, y \in D$

故 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$

必要性

任意的 $\langle x, y \rangle \in A \times B$,

则 $x \in A, y \in B$,

由于 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$,

所以 $x \in C, y \in D$,

因而 $\langle x, y \rangle \in C \times D$,

故 $A \times B \subseteq C \times D$

离散数学——集合论

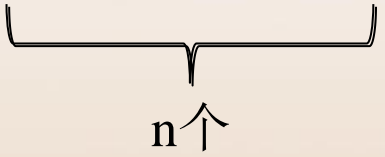
为了与n元组的定义一致，我们约定：

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$$

因而

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in A_i, i=1, 2, \dots, n \}$$

记 $A^n = A \times A \times \dots \times A$



n个

离散数学——集合论

【例3-4.1】 设 $A=\{1,2\}$ ， 求出 A^3 。

【解】 $A \times A = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle\}$

$$\begin{aligned}(A \times A) \times A &= \{\langle \langle 1,1 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 1,2 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 2,1 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 2,2 \rangle, 1 \rangle, \\ &\quad \langle \langle 1,1 \rangle, 2 \rangle, \langle \langle 1,2 \rangle, 2 \rangle, \langle \langle 2,1 \rangle, 2 \rangle, \langle \langle 2,2 \rangle, 2 \rangle\} \\ &= \{\langle 1,1,1 \rangle, \langle 1,2,1 \rangle, \langle 2,1,1 \rangle, \langle 2,2,1 \rangle, \langle 1,1,2 \rangle, \langle 1,2,2 \rangle, \langle 2,1,2 \rangle, \langle 2,2,2 \rangle\} \\ &= A \times A \times A\end{aligned}$$

【例3-4.2】 判断下列各式是否成立。

a) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$ 不成立, $A=B=\{1,2\}$, $C=\{3\}$, $D=\{4\}$

b) $(A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$ 不成立, $A=B=\{1,2\}$, $C=\{3\}$, $D=\{4\}$

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ 成立

d) $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$ 成立, $A=B=\{1,2\}$, $C=\{3\}$, $D=\{4\}$

$$c) (A-B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

$$\langle x, y \rangle \in (A - B) \times C$$

$$\Leftrightarrow x \in A - B \wedge y \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \wedge \langle x, y \rangle \notin B \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) - (B \times C)$$

$$d) (A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$$

$$(A \oplus B) \times C$$

$$= ((A - B) \cup (B - A)) \times C$$

$$= (A - B) \times C \cup (B - A) \times C$$

$$= ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C))$$

$$= (A \times C) \oplus (B \times C)$$

第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-5 关系及其表示

关系在现实生活中随处可见，如：位置关系、师生关系、学生与课程的关系、学生与学号的关系、数值的大小关系、集合的包含关系等；在这些关系中，元素之间是有顺序的。

【定义 3-5.1】 设 A 、 B 是两个集合，若 R 是 $A \times B$ 的子集，则称 R 是集合 A 到集合 B 的一个二元关系。

根据定义， $R \subseteq A \times B$ ， R 中的元素 $\langle x, y \rangle \in A \times B$ 。

若元素 x, y 之间存在关系 R ，则 $\langle x, y \rangle \in R$ ，也可记为 xRy ；

若元素 x, y 之间不存在关系 R ，则 $\langle x, y \rangle \notin R$ ，也可记为 $x \not R y$ 。

离散数学——集合论

例如： $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A \times B$, $R_3=\emptyset$, $R_4=\{<0,1>\}$,
 R_1, R_2, R_3, R_4 都是从 A 到 B 的二元关系。

在定义 3-5.1 中，若 $A=B$ ，则称 R 是 **A 上** 的二元关系。

【定义 3-5.2】 设 R 是集合 A 到集合 B 的一个二元关系，定义：

由序偶 $<x, y> \in R$ 的所有 **第一元素 x** 组成的集合称为关系 R 的**前域**

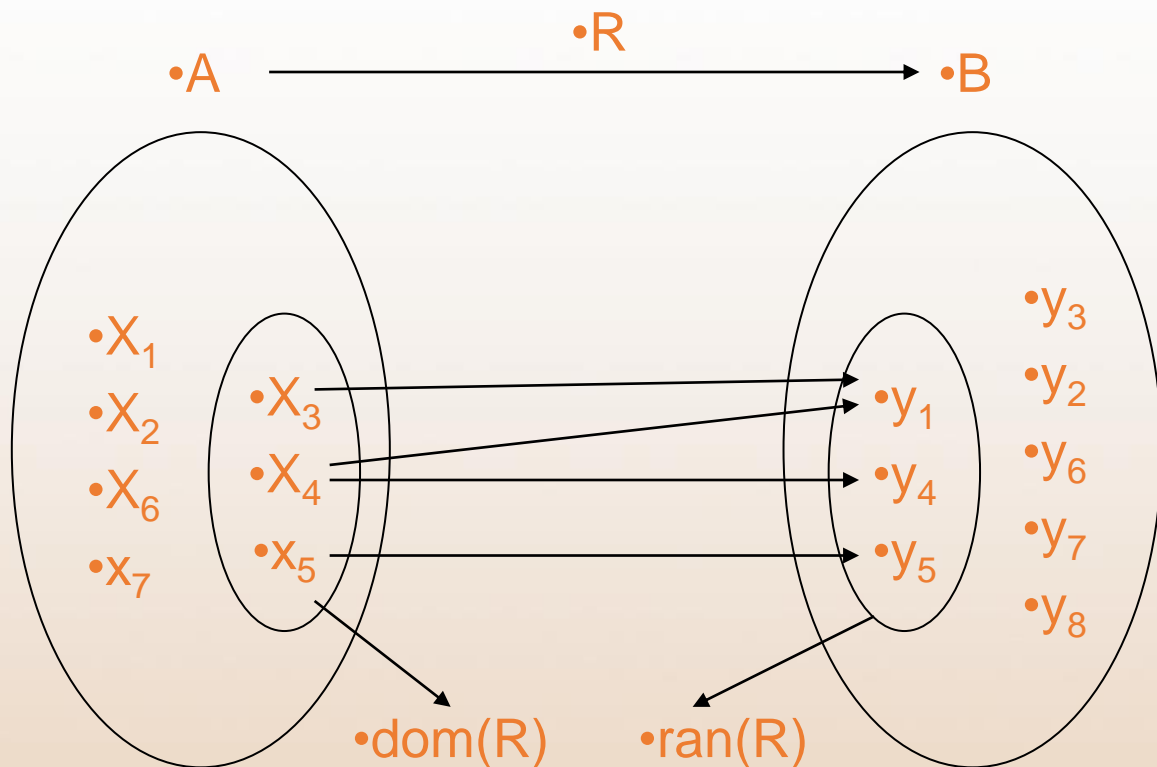
$$\text{dom } R = \{ x / (\exists y)(<x, y> \in R) \}$$

由序偶 $<x, y> \in R$ 的所有 **第二元素 y** 组成的集合称为关系 R 的**值域**

$$\text{ran } R = \{ y / (\exists x)(<x, y> \in R) \}$$

R 的**前域和值域**一起称为 R 的**域** **FLD** $R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$

离散数学——集合论



$$\text{dom } R \subseteq A$$

$$\text{ran } R \subseteq B$$

$$\text{FLD } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R \subseteq A \cup B$$

关系的个数

- $|A|=m$, $|B|=n$ 。则 $|A \times B|=mn$
- $A \times B$ 的子集个数: $|2^{A \times B}|=2^{mn}$
- A 到 B 的不同的二元关系有 2^{mn}
- A 上的二元关系有 2^{m^2}

注: 集合的幂集

离散数学——集合论

【定义 3-5.3】 设 A 、 B 为任意两个集合, 则称 \emptyset 、 $A \times B$ 分别为 A 到 B 的**空关系**、**全域关系**。

【定义 3-5.4】 设 A 是一个集合, $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$, 称 I_A 为 A 上的**恒等关系**。

【例3-5.1】 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, 求出 A 到 B 的所有关系。

【解】 根据定义, A 到 B 的二元关系为 $A \times B$ 的子集,

由于 $A \times B = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$

所以, A 到 B 的所有关系为: \emptyset , $\{ \langle 1, 3 \rangle \}$, $\{ \langle 1, 4 \rangle \}$, $\{ \langle 2, 3 \rangle \}$, $\{ \langle 2, 4 \rangle \}$,
 $\{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle \}$, $\{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$, $\{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$, $\{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$, $\{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$,
 $\{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$, $\{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$, $\{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$, $\{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$,
 $\{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$, $\{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$ 。

【例3-5.2】 设A、B是任意两个集合， $|A|=m$ ， $|B|=n$ ，那么A到B有多少个不同的二元关系，A上有多少个不同的二元关系？

【解】 由于 $|A|=m$ ， $|B|=n$

故 $|A \times B| = m \times n$

而 A到B的关系是 $A \times B$ 的子集

故 A到B不同的二元关系共有 $2^{m \times n}$ 个。

同理，由于 $|A \times A| = m^2$ ，A上不同的二元关系共有 2^{m^2} 个。

当X和Y都是有限集时，从X到Y的二元关系R可用序偶集合的形式表达，也可用矩阵或图形表示。

【定义 3-5.5】 若 $A=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ， $B=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ，R是从A到B的二元关系，则**R的关系矩阵**定义为：

$$M_R = [r_{ij}]_{m \times n}$$

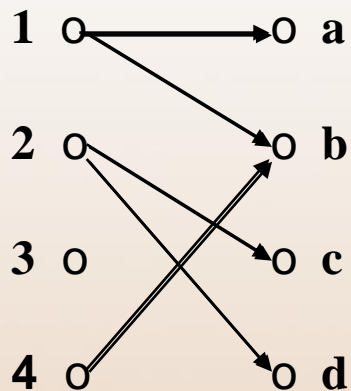
$$\text{其中, } r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } \langle x_i, y_j \rangle \in R \\ 0 & \text{若 } \langle x_i, y_j \rangle \notin R \end{cases}$$

R的关系图：在平面上作出m个结点分别记作 x_1, x_2, \dots, x_m ，而后再作出n个结点分别记作 y_1, y_2, \dots, y_n 。如果 $\langle x_i, y_j \rangle \in R$ ，则从结点 x_i 到结点 y_j 作一有向弧度，箭头的方向指向结点 y_j 。

【例3-5.3】 设 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<1,a>, <1,b>, <2,c>, <2,d>, <4,b>\}$,
试求出R的关系矩阵, 画出其关系图。

【解】

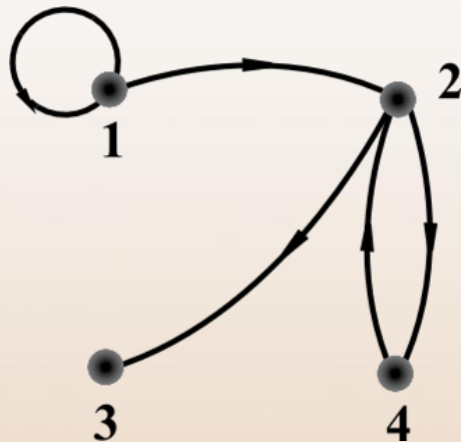
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



【例3-5.4】 设 $A=\{1,2,3,4\}$, 集合A上的关系 $R=\{<1,1>, <1,2>, <2,3>, <2,4>, <4,2>\}$, 试求出R的关系矩阵, 画出其关系图。

【解】

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-6 关系的性质

本节关注的是一个集合上的二元关系具有的性质。

【定义 3-6.1】 设 R 是集合 A 的二元关系，若对于任意的 $x \in A$ ，均有 $\langle x, x \rangle \in R$ ，则称 R 是自反的。

R 是自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$

【定义 3-6.2】 设 R 是集合 A 的二元关系，若对于任意的 $x \in A$ ，均有 $\langle x, x \rangle \notin R$ ，则称 R 是反自反的。

R 是反自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$

【定义 3-6.3】 设 R 是集合 A 的二元关系，若对于任意的 $\langle x, y \rangle \in R$ ，均有 $\langle y, x \rangle \in R$ ，则称 R 是对称的。

R 是对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$

【定义 3-6.4】 设 R 是集合 A 的二元关系，若 $\langle x, y \rangle \in R$ ，且 $\langle y, x \rangle \in R$ ，必有 $x = y$ ，则称 R 是反对称的。

R 是反对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$

【定义 3-6.5】 设 R 是集合 A 的二元关系，若 $\langle x, y \rangle \in R$ ，且 $\langle y, z \rangle \in R$ ，必有 $\langle x, z \rangle \in R$ ，则称 R 是传递的。

R 是传递的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$



一个关系可以既不是自反的，也不是反自反的，如整数的整除关系

一个关系既可以是对称的，也可以是反对称的，如实数的相等关系

【例3-6.1】 设 $A=\{1,2,3\}$, $R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,3>\}$,
 $S = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>\}$, $T = \{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,3>\}$
试分析A上的关系R、S、T、 Φ 、 $A\times A$, I_A 的具有那些性质。

【解】

性质 集合	自反	反自反	对称	反对称	传递
R	×	×	×	√	√
S	√	×	√	×	√
T	×	×	×	√	×
Φ	×	√	√	√	√
$A\times A$	√	×	√	×	√
I_A	√	×	√	√	√

- 实数集合上的小于关系、小于等于关系、相等关系具有哪些性质？
- 集合上的包含、真包含、相等关系具有哪些性质？

	自反	反自反	对称	反对称	传递
\subseteq	√	×	×	√	√
\subset	×	√	×	√	√
$=$	√	×	√	√	√

关系的性质在关系矩阵及关系图中表现出的特征：

(1)若关系 R 是**自反的**,当且仅当关系矩阵对角线的元素皆为1, 关系图上每个结点都有自回路。

(2)若关系 R 是**对称的**, 当且仅当关系矩阵是对称的, 关系图上, 任两个结点间若有定向弧线,必是成对出现的。

(3)若关系 R 是**反自反的**,当且仅当关系矩阵对角线的元素皆为零, 关系图上每个结点都没有自回路。

(4)若关系 R 是**反对称的**,当且仅当关系矩阵中以主对角线对称的元素不能同时为1, 在关系图上两个不同结点间的定向弧线不可能成对出现。

传递的特征较复杂, 不易从关系矩阵和关系图中直接判断。

第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-7 复合关系和逆关系

【定义 3-7.1】 设 R 是 X 到 Y 的关系， S 是 Y 到 Z 的关系，则

$$R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid (\exists y) (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S) \}$$

称为 R 和 S 的**复合关系**。由 R 、 S 求 $R \circ S$ 称为关系的**复合运算**。

【定义 3-7.2】 设 R 是 X 到 Y 的一个关系，则

$$R^c = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \}$$

称为 R 的**逆关系**。由 R 求 R^c 称为关系的**逆运算**。

【例3-7.1】 已知 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c,d\}$, $Z=\{3,4,5\}$

$$R = \{ \langle 1,a \rangle, \langle 1,c \rangle, \langle 2,b \rangle, \langle 2,c \rangle, \langle 3,a \rangle, \langle 3,d \rangle \}$$

$$S = \{ \langle a,3 \rangle, \langle a,5 \rangle, \langle b,3 \rangle, \langle b,4 \rangle, \langle d,3 \rangle, \langle d,4 \rangle \}$$

求 $R \circ S$, R^c 。

【解】 根据定义可求得

$$R \circ S = \{ \langle 1,3 \rangle, \langle 1,5 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 3,4 \rangle \}$$

$$R^c = \{ \langle a,1 \rangle, \langle c,1 \rangle, \langle b,2 \rangle, \langle c,2 \rangle, \langle a,3 \rangle, \langle d,3 \rangle \}$$

$R \circ S$ 是 X 到 Z 的关系, R^c 是 Y 到 X 的关系。

离散数学——集合论

对于求 $R \circ S$ ，当 R 、 S 中元素比较多时，求解比较麻烦、且容易出现错误。

下面我们关系矩阵进行求解。

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{a, b, c, d\}, \quad Z = \{3, 4, 5\}$$

$$R = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, c \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, d \rangle \}$$

$$S = \{ \langle a, 3 \rangle, \langle a, 5 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle d, 3 \rangle, \langle d, 4 \rangle \}$$

(1) 分别求出 R 、 S 的关系矩阵 M_R 、 M_S

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 利用矩阵乘法, 求出 $M_R \times M_S$

$$M_R \times M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 把 $M_R \times M_S$ 中的非0元素改为1, 得到 $M_{R \circ S}$

$$M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 求出 $R \circ S$

$$R \circ S = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \}$$

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{a, b, c, d\}, \quad Z = \{3, 4, 5\}$$

离散数学——集合论

【例3-7.2】 已知 $X=\{1,2,3,4\}$,

$$R = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle \}$$

$$S = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle \}$$

$$T = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle \}$$

求 $R \circ S$, $S \circ R$, $(R \circ S) \circ T$, $R \circ (S \circ T)$ 。

【解】 根据定义可求得

$$R \circ S = \{ \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle \}$$

$$S \circ R = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle \}$$

$$S \circ T = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle \}$$

$$(R \circ S) \circ T = \{ \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle \}$$

$$R \circ (S \circ T) = \{ \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle \}$$

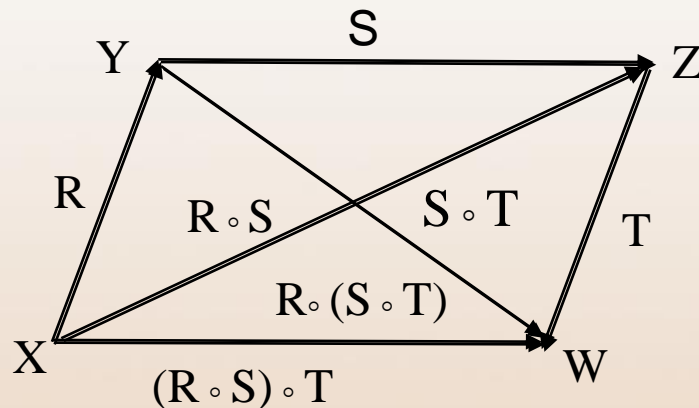
离散数学——集合论

从上例可以看出, $R \circ S \neq S \circ R$, 即关系的复合运算**不满足交换律**。

【定理3-7.1】 设 R 是 X 到 Y 的关系, S 是 Y 到 Z 的关系, T 是 Z 到 W 的关系, 则

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

由此可知, 关系的复合运算**满足结合律**。



$$\text{记 } R^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \uparrow} = R^{n-1} \circ R = R \circ R^{n-1}$$

离散数学——集合论

【定理 3-7.2】 设 R 、 S 都是从 A 到 B 的二元关系，则下列各式成立：

$$(1) (R \cup S)^c = R^c \cup S^c$$

$$(2) (R \cap S)^c = R^c \cap S^c$$

$$(3) (\bar{R})^c = \overline{R^c}, \quad \bar{R} = A \times B - R$$

$$(4) (R - S)^c = R^c - S^c$$

【证明】 (1) $\langle x, y \rangle \in (R \cup S)^c$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \cup S$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in S$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^c \vee \langle x, y \rangle \in S^c$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^c \cup S^c$$

$$(3) \quad \langle x, y \rangle \in (\bar{R})^c$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \bar{R}$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \notin R$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \notin R^c$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \overline{R^c}$$

【定理 3-7.3】 设 R 是从 X 到 Y 的二元关系， S 是从 Y 到 Z 的二元关系，则

$$(R \circ S)^c = S^c \circ R^c$$

【证明】 (1) $(R \circ S)^c$ 与 $S^c \circ R^c$ 都是 Z 到 X 的二元关系，且对任意的

$$\langle z, x \rangle \in (R \circ S)^c$$

$$\Leftrightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ S$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle y, x \rangle \in R^c \wedge \langle z, y \rangle \in S^c)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle z, y \rangle \in S^c \wedge \langle y, x \rangle \in R^c)$$

$$\Leftrightarrow \langle z, x \rangle \in S^c \circ R^c$$

故 $(R \circ S)^c = S^c \circ R^c$

【定理 3-7.4】 设 R 是从 A 到 B 的二元关系，则 $R \circ I_B = I_A \circ R = R$ 。

【定理 3-7.5】 设 R 、 S 和 T 都是 A 上的二元关系，则：

- (1) $R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$
- (2) $(S \cup T) \circ R = S \circ R \cup T \circ R$
- (3) $R \circ (S \cap T) \subseteq R \circ S \cap R \circ T$
- (4) $(S \cap T) \circ R \subseteq S \circ R \cap T \circ R$

【证明】只证 (3)

$$\langle x, y \rangle \in R \circ (S \cap T)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t) (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in S \cap T)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t) (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in S \wedge \langle t, y \rangle \in T)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t) ((\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in S) \wedge (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in T))$$

$$\Rightarrow (\exists t) (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in S) \wedge (\exists t) (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in T)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \circ S \wedge \langle x, y \rangle \in R \circ T$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \circ S \cap R \circ T$$

所以, $R \circ (S \cap T) \subseteq R \circ S \cap R \circ T$

第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-8 关系的闭包运算

【定义 3-8.1】 设 R 是非空集合 A 上的关系，若 A 上的二元关系 R' 满足：

(1) $R \subseteq R'$

(2) R' 是自反的（对称的，可传递的）

(3) 对 A 上任意的包含 R 且自反（对称，可传递）的关系 R'' ，有 $R' \subseteq R''$ ；

则称 R' 为 R 的自反（对称，可传递）闭包，记作 $r(R)$ （ $s(R)$ ， $t(R)$ ）。

R 的自反(对称、传递)闭包就是包含了 R ，并且具有自反(对称、传递)性质的最小关系

求闭包的目的

- 关系的闭包运算是将已知的关系 R ，通过增加必要的序偶，扩充成一新的关系 R'
- $R \subseteq R'$
- R' 具有一定的性质(如，自反性，对称性等)

【定理3-8.1】 设 R 是 X 上的二元关系，

(1) R 是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$;

如果 R 满足自反性，其自反闭包是自身

(2) R 是对称的 $\Leftrightarrow s(R)=R$;

如果 R 满足对称性，其对称闭包是自身

(3) R 是传递的 $\Leftrightarrow t(R)=R$;

如果 R 满足传递性，其传递闭包是自身

【定理 3-8.2】 设 R 为 A 上的关系, 则有

(1) $r(R)=R \cup I_A$ (自反的包含 R 的最小关系)

(2) $s(R)=R \cup R^c$ (对称的包含 R 的最小关系)

(3) $t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$ (传递的包含 R 的最小关系)

【证明】 (1)

(a) $R \subseteq R \cup I_A$

(b) 由 $I_A \subseteq R \cup I_A$ 知, $R \cup I_A$ 是自反的;

(c) 设 R'' 是 A 上包含 R 的自反关系, 则有 $R \subseteq R''$ 和 $I_A \subseteq R''$, 从而有 $R \cup I_A \subseteq R''$ 。

根据闭包的定义, $r(R)=R \cup I_A$ 。

(2) $(R \cup R^c)^c = R^c \cup (R^c)^c = R \cup R^c$, 故 $(R \cup R^c)$ 是对称的, 且 $R \subseteq (R \cup R^c)$

设 R' 为 X 上任意的, 满足 $R \subseteq R'$ 的对称关系, 对 $\forall \langle a, b \rangle \in (R \cup R^c)$

若 $\langle a, b \rangle \in R^c$, 则 $\langle b, a \rangle \in R (R \subseteq R')$, 故 $\langle b, a \rangle \in R'$

R' 是对称的, 故 $\langle a, b \rangle \in R'$

若 $\langle a, b \rangle \in R$, 因为 $R \subseteq R'$, 故 $\langle a, b \rangle \in R'$

所以总有 $\langle a, b \rangle \in R'$, 即 $(R \cup R^c) \subseteq R'$

故: $s(R) = (R \cup R^c)$

离散数学——集合论

(3) 按照集合相等来证明 $t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

(a) 先证 $R \cup R^2 \cup \dots \subseteq t(R)$ 成立

用归纳法证明, 对任意正整数 n , 有 $R^n \subseteq t(R)$ 。

i) $n=1$ 时, 有 $R^1=R \subseteq t(R)$ 。

ii) 假设 $R^n \subseteq t(R)$ 成立, 则对任意的 $\langle x, y \rangle \in R^{n+1} = R^n \circ R$,

根据定义可以得到, $(\exists t) (\langle x, t \rangle \in R^n \wedge \langle t, y \rangle \in R)$

$$\Rightarrow (\exists t) (\langle x, t \rangle \in t(R) \wedge \langle t, y \rangle \in t(R))$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in t(R)$$

故, $R^{n+1} \subseteq t(R)$ 。

所以 $R \cup R^2 \cup \dots \subseteq t(R)$

(b) 再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$

$\forall \langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$

$\exists r, s \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } \langle x, y \rangle \in R^r, \langle y, z \rangle \in R^s$

$\langle x, z \rangle \in R^r \circ R^s = R^{r+s}$

$R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$ 是可传递的

由传递闭包定义: $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$

【例3-8.1】 设 $X=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,3>, <2,2>, <3,4>, <4,4>\}$

求 $r(R)$

求 $s(R)$

求 $t(R)$

$t(R)$ 的求法

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

最高需要求出 R 的几次幂？

有限集 X 上的关系 R 的传递闭包的求解过程，与 $|X|$ 有关系

离散数学——集合论

【定理 3-8.3】 设 A 是非空集合, 且 $|A|=n$, R 是 A 上的二元关系,
则存在正整数 $k \leq n$, 使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^k$ 。

证: 设 $\langle x, y \rangle \in t(R)$, 则 $\exists p$, st: $\langle x, y \rangle \in R^p$

则存在序列 $x=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p=y$
使得 $xRx_1, x_1Rx_2, x_2Rx_3, \dots, x_{p-1}Ry$ 。

设满足上述条件的最小 p 大于 n ,

则 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p$ 必中有相同者,

设 $x_i = x_j (0 \leq i < j \leq p)$

$xRx_1, x_1Rx_2, \dots, x_{i-1}Rx_i, \dots, x_jRx_{j+1}, \dots, x_{p-1}Ry$

$\langle x, y \rangle \in R^s, s=p-(j-i) < p$,

这与 p 是最小的假设矛盾, 故 $p > n$ 不成立

【定理 3-8.4】 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

【定理 3-8.5】： 设 R 是 A 上的二元关系, 则

(1) $r(s(R))=s(r(R))$

R 的对称闭包的自反闭包 $= R$ 的自反闭包的对称闭包

$$\begin{aligned}\text{证明: } r(s(R)) &= r(R \cup R^c) = I_A \cup R \cup R^c = (I_A \cup R) \cup (I_A^c \cup R^c) \\ &= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^c = s(I_A \cup R) = s(r(R))\end{aligned}$$

(2) $r(t(R)) = t(r(R))$

R 的传递闭包的自反闭包 $= R$ 的自反闭包的传递闭包

$$\begin{aligned}\text{证明: } r(t(R)) &= I_A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \right) = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (I_A^i) \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (R^i) \right] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_A \cup R) \\ &= t(I_A \cup R) = t(r(R))\end{aligned}$$

(3) $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$

R 的传递闭包的对称闭包 $\subseteq R$ 的对称闭包的传递闭包

证明: $R \subseteq s(R)$, $t(R) \subseteq ts(R)$, $st(R) \subseteq sts(R)$,

对称关系的传递闭包仍保持对称, 故 $sts(R) = ts(R)$,

于是 $st(R) \subseteq ts(R)$

离散数学——集合论

例：设 $A=\{1,2,3\}$ ， A 上的二元关系 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

试求： $r(R)$ ， $s(R)$ ， $t(R)$ 。

解： $r(R)=R \cup I_A=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

$s(R)=R \cup R^c=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

以下求 $t(R)$ ：

$R^2=R \circ R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$R^3=R^2 \circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}=I_A$

$R^4=R^3 \circ R=I_A \circ R=R$

.....

$R=R^4=R^7=\dots=R^{3n+1}=\dots$

$R^2=R^5=R^8=\dots=R^{3n+2}=\dots$

$R^3=R^6=R^9=\dots=R^{3n+3}=\dots$

$t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-9 集合的划分与覆盖

【定义 3-9.1】 设 A 是非空集合, $S=\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, 若 S 满足:

$$(1) S_i \subseteq A, S_i \neq \Phi, i=1, 2, \dots, n;$$

$$(2) \bigcup_{i=1}^n S_i = A$$

则称 S 是 A 的一个覆盖。

【定义 3-9.2】 设 A 是非空集合, $S=\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ 是 A 上的一个覆盖,

若对任意的 $i \neq j$, 都有 $S_i \cap S_j = \Phi$, 则称 S 是 A 的一个划分。

划分必是覆盖, 覆盖未必是划分

【例3-9.1】 设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ ，判断下面集合是否是 A 的覆盖或划分

$$S1 = \{\Phi, \{a,b\}, \{c,d\}, \{f\}\}$$

有空集，不是覆盖，更不是划分

$$S2 = \{\{a,b\}, \{c,d\}, \{f,g\}\}$$

不是覆盖，更不是划分

$$S3 = \{\{a,b,c\}, \{c,d\}, \{e,f\}\}$$

是覆盖，但不是划分

$$S4 = \{\{a,b\}, \{c,d\}, \{e,f\}\}$$

是覆盖，也是划分

$$S5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$$

最大(细)划分

$$S6 = \{\{a,b,c,d,e,f\}\}$$

最小(粗)划分

集合 S 的**最小（粗）划分**，由 S 的全部元素组成的一个分块构成的集合

集合 S 的**最大（细）划分**，由 S 的单个元素组成的单元素分块构成的集合

第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-10 等价关系

【定义 3-10.1】 设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的**等价关系**。

下面哪些关系是等价关系？

集合上的恒等关系

平面三角形的全等、相似关系

集合上的包含关系

朋友关系

同姓关系

离散数学——集合论

【例3-10.1】 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, R 是 A 上的二元关系,

$$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle \},$$

R 是 A 上的等价关系吗?

设 x 和 y 是两个整数, k 是一个正整数, 若 x 除以 k 的余数和 y 除以 k 的余数相等,

即 $x \bmod k = y \bmod k$, 称 x 和 y 模 k 同余, 记为 $x \equiv y \pmod{k}$, 也可写成 $x - y = kt$ (t 为整数)

【例3-10.2】 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, 定义 A 上的关系 R :

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$$

证明 R 是 A 上的等价关系。

离散数学——集合论

证明： (1) $\forall x \in A$, 有 $x \equiv x \pmod{3}$, 则 $\langle x, x \rangle \in R$, R 是自反的;

(2) 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则 $x \equiv y \pmod{3}$, 从而有 $y \equiv x \pmod{3}$,

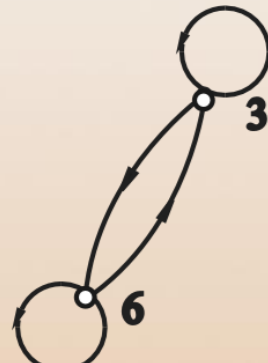
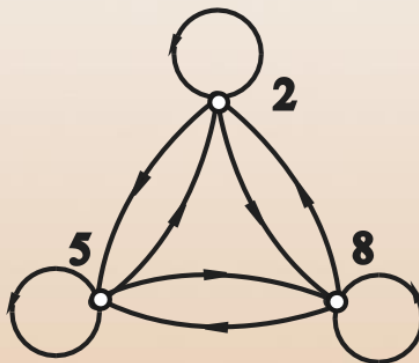
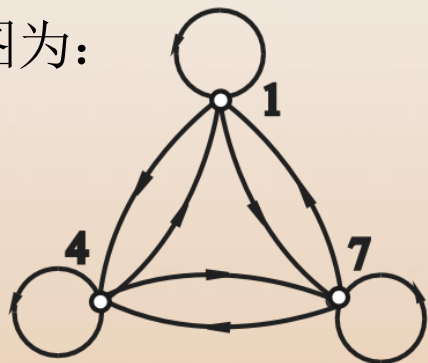
即 $\langle y, x \rangle \in R$, R 是对称的;

(3) 若 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$, 则有 $x \equiv y \pmod{3}$, $y \equiv z \pmod{3}$

从而有 $x \equiv z \pmod{3}$, 即 $\langle x, z \rangle \in R$, R 是传递的;

由(1)(2)(3)知, R 是 A 上的等价关系。

R 的关系图为:



【定义 3-10.2】 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，对任意的 $a \in A$ ，集合

$$[a]_R = \{x \mid \langle a, x \rangle \in R\}$$

称为 a 关于 R 的等价类。

对于例3-10.2，

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

【定理 3-10.1】 设给定集合上的等价关系 R ，对于 $a, b \in A$ 有，

$$\langle a, b \rangle \in R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$$

【证明】 充分性

若 $\langle a, b \rangle \in R$ ，则对任意的 $x \in [a]_R$ ，有

$$x \in [a]_R \Rightarrow \langle a, x \rangle \in R \Rightarrow \langle x, a \rangle \in R \Rightarrow \langle x, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, x \rangle \in R \Rightarrow x \in [b]_R$$

故 $[a]_R \subseteq [b]_R$

同理可证， $[b]_R \subseteq [a]_R$

因而有， $[a]_R = [b]_R$

必要性

若 $[a]_R = [b]_R$ ，由于 $b \in [b]_R$ ，从而有 $b \in [a]_R$ ，故 $\langle a, b \rangle \in R$

【定义 3-10.3】 设 R 为集合 A 上的等价关系，则等价类的集合 $\{[a]_R \mid a \in A\}$ 称为 A 关于 R 的**商集**，记为 A/R 。

对于**例3-10.2**， $A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\} = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$

【定理 3-10.2】 对于集合 A 上的等价关系 R ，其商集 A/R 是集合 A 的一个划分。

【证明】

$$(1) \bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

$$(2) [a]_R \cap [b]_R = \Phi, \text{ 若 } a \neq b$$

【定理 3-10.3】 集合A上的一个划分，确定A的一个等价关系。

【证明】 设 $S=\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ 是A的一个划分，则定义A上的关系R

$$R=\{ \langle x, y \rangle \mid (\exists k) (x \in S_k, \text{且} y \in S_k) \}$$

可以证明，R是A的一个等价关系。

如：设 $A=\{1,2,3,4,5\}$ ， $S=\{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}\}$ 是A的一个划分，则R确定的A上的等价关系为

$$\begin{aligned} R &= \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,5 \rangle \} \\ &= (\{1,2\} \times \{1,2\}) \cup (\{3,4\} \times \{3,4\}) \cup (\{5\} \times \{5\}) \end{aligned}$$

【定理 3-10.4】 设 R_1 、 R_2 是集合A上的两个等价关系，则

$$R_1=R_2 \Leftrightarrow A/R_1=A/R_2$$

第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-11 相容关系

【定义 3-11.1】 设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是**自反**的和**对称**的，
则 R 称为 A 上的**相容关系**。

【例3-10.1】 设 $A=\{123, 245, 356, 247, 398\}$ ，定义 A 上的关系 R
$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ 与 } y \text{ 含有共同的数字} \}$$

证明 R 是 A 上的相容关系。

【证明】 (1) $\forall x \in A$ ， x 与 x 数字完全一样，则 $\langle x, x \rangle \in R$ ， R 是自反的；

(2) 若 $\langle x, y \rangle \in R$ ，则 x 与 y 含有共同的数字，

从而 y 与 x 含有共同的数字，即 $\langle y, x \rangle \in R$ ， R 是对称的；

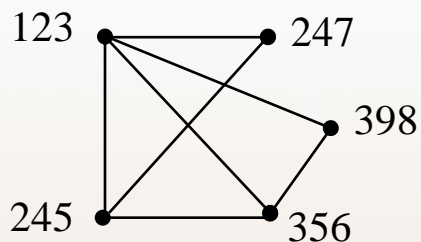
由(1)(2)知， R 是 A 上的相容关系。

离散数学——集合论

其关系矩阵为

$$M_r = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \color{red}{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \color{red}{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \color{red}{1} \end{bmatrix}$$

简化矩阵



简化图

- 关系矩阵

自反性：主对角线全为1

对称性：与转置矩阵相等，用下三角矩阵表示

- 关系图

自反性：顶点处的环省略

对称性：如果有边，方向相反的两条边用一条无向边表示

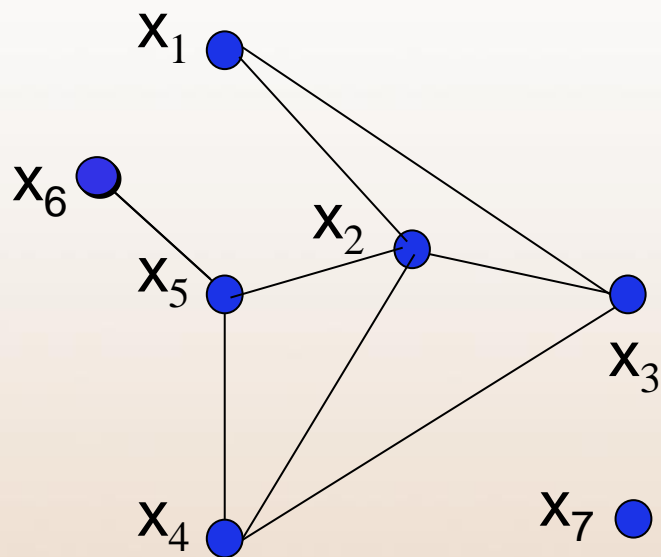
【定义 3-11.2】 设 R 为非空集合 A 上的相容关系，如果 $C \subseteq A$ ，且对与 C 中的任意两个元素 a_1, a_2 均有 $\langle a_1, a_2 \rangle \in R$ ，则称 C 是由 R 产生的**相容类**。

$A = \{123, 245, 356, 247, 398\}$

如： $\{123, 245\}$ ， $\{356, 398\}$ ， $\{247\}$ ， $\{123, 245, 247\}$ 都是相容类

【定义 3-11.3】最大相容类： 设 R 是集合 A 上的相容关系，不能真包含在任何其它相容类中的相容类，称最大相容类，记作 C_R 。

$\{123, 245, 247\}$ 不能再添加元素产生新的相容类，称为**最大相容类**。



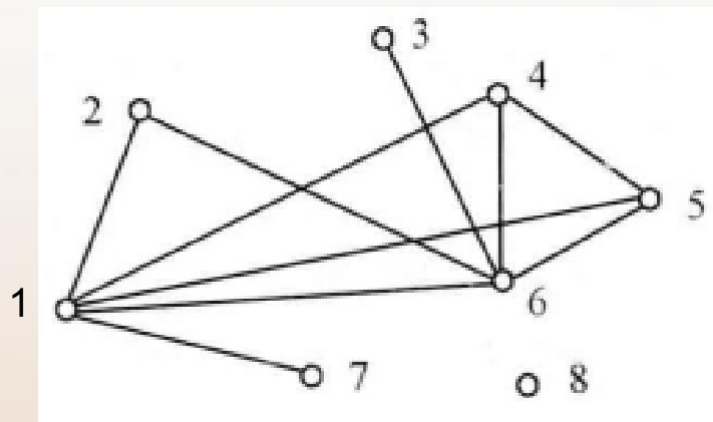
❖ 最大相容类在相容关系图中体现：

- 孤立结点
- 悬挂边
- 最大完全多边形的顶点集合

最大相容类有：

- $\{x_7\}$
- $\{x_5, x_6\}$
- $\{x_1, x_2, x_3\}$
- $\{x_2, x_3, x_4\}$
- $\{x_2, x_4, x_5\}$

集合A上的相容关系图，写出最大相容类。



最大相容类为：

$\{8\}$

$\{1, 7\},$

$\{3, 6\},$

$\{1, 2, 6\},$

$\{1, 4, 5, 6\},$

$A = \{123, 245, 356, 247, 398\}$

$\{\{123, 356\}, \{356, 398\}, \{123, 398\}, \{123, 245, 247\}, \{245, 356\}\}$

$\{\{123, 245, 247\}, \{123, 356, 398\}, \{123, 245, 356\}\}$

都是A的覆盖

【定义 3-11.4】 A的完全覆盖：在集合A上给定相容关系R，其最大相容类的集合称作A的完全覆盖，记作 $C_R(A)$ 。

$\{\{123, 245, 247\}, \{123, 356, 398\}, \{123, 245, 356\}\}$

中的每一个元素都是一个最大相容类，称之为R产生的A的完全覆盖，记为 $C_R(A)$ 。

离散数学——集合论

覆盖与相容关系不是一一对应的。

集合 A 的覆盖不是唯一的，因此给定相容关系 R ，可以做成不同的相容类的集合，他们都是 A 的覆盖。

但给定相容关系 R ，只能对应唯一的完全覆盖。

【定理 3-11.2】 集合 A 上的相容关系 R 与完全覆盖 $C_R(A)$ 是一一对应的。

第三章 集合与关系

- 3.1 集合的概念与表示
- 3.2 集合的运算
- 3.3 包含排斥原理
- 3.4 序偶与笛卡尔积
- 3.5 关系及其表示
- 3.6 关系的性质
- 3.7 复合关系和逆关系
- 3.8 关系的闭包运算
- 3.9 集合的划分和覆盖
- 3.10 等价关系和等价类
- 3.11 相容关系
- 3.12 序关系

3-12 序关系

【定义 3-12.1】 设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则 R 称为 A 上的**偏序关系**，并记为 \leq ，将 xRy 记为 $x \leq y$ 。序偶 $\langle A, \leq \rangle$ 称为**偏序集**。

例如：实数集上的小等于关系(\leq)，集合上的包含关系(\subseteq)等

【例3-11.1】 设 $A=\{2, 3, 6, 8, 12\}$ ，定义 A 上的关系 R

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ 整除 } y \}$$

证明 R 是 A 上的偏序关系。

【证明】

- (1) 任意的 $x \in A$ ， x 整除 x ，故 $\langle x, x \rangle \in R$ ， R 是自反的；
- (2) 若 $\langle x, y \rangle \in R$ ， $\langle y, x \rangle \in R$ ，则 x 整除 y ， y 整除 x 。

从而存在正整数 m 、 n ，使得 $y=mx$ ， $x=ny$

因而， $y=mny$ ，得出 $mn=1$ ， $m=n=1$

故 $x=y$ ， R 是反对称的；

(3) 若 $\langle x, y \rangle \in R$ ， $\langle y, z \rangle \in R$ ，则 x 整除 y ， y 整除 z 。

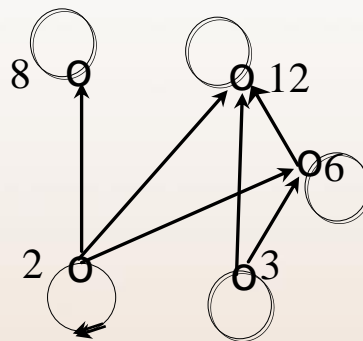
从而存在正整数 m 、 n ，使得 $y=mx$ ， $z=ny$

因而， $z=mnx$ ，得出 x 整除 z

故 $\langle x, z \rangle \in R$ ， R 是传递的；

由(1)(2)(3)知， R 是 A 上的偏序关系。

其关系图为



离散数学——集合论

为了更清晰的描绘出元素的层次关系，给出盖住的概念。

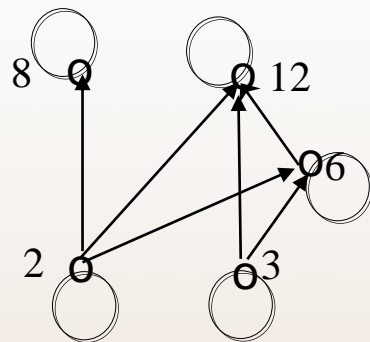
【定义 3-12.2】 在偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 中，如果 $x \leq y, x \neq y$, 且不存在 z 满足 $x \leq z, z \leq y$, 则称 y **盖住** x 。

记 盖住集 $\text{COV } A = \{ \langle x, y \rangle \mid y \text{ 盖住 } x \}$

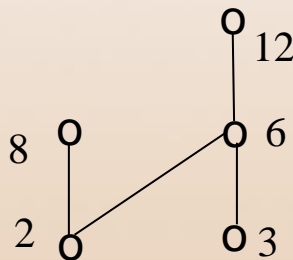
根据盖住关系，可以画出**哈斯图**，画图规则为：

- (1) 用小圆圈代表元素
- (2) 如果 $x < y$ ，则将代表 y 的小圆圈画在代表 x 的小圆圈之上。
- (3) 如果 y 盖住 x ，则在 x 与 y 之间用直线连接。

其关系图为



其哈斯图为



由关系图改为哈斯图的方法：

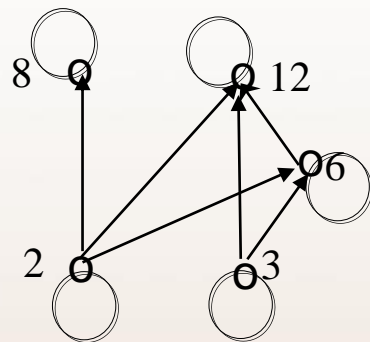
(1) 去掉自环

(2) 取消所有由传递性产生的边.

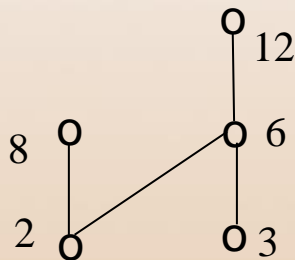
即若 $x \leq y, y \leq z$, 去掉 $x \leq z$ 这条边 (因传递性)

(3) 重新结点位置排列, 有向边起点放下层, 终点放上层;
把有向边改为无向边。

其关系图为



其哈斯图为



【例3-11.2】 设 $A=\{a,b,c\}$ ，证明 $\langle \rho(A), \subseteq \rangle$ 是偏序集，画出其哈斯图。

【证明】

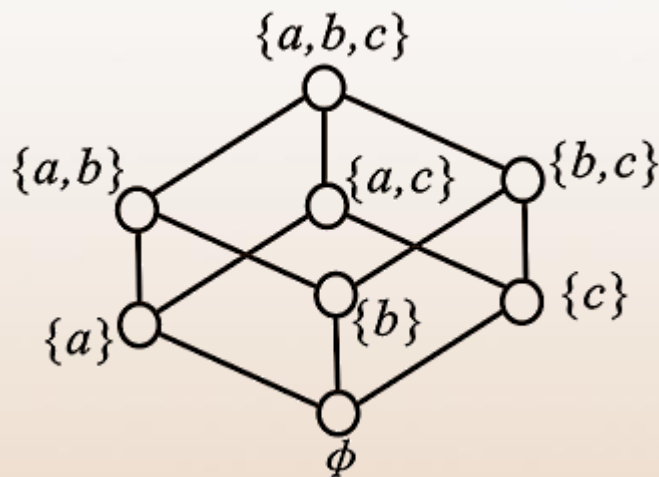
(1) 任意的 $B \in \rho(A)$ ，由于 $B \subseteq B$ ，故 \subseteq 是自反的；

(2) 若 $B \subseteq C$ ， $C \subseteq B$ ，则 $B = C$ ，故 \subseteq 是反对称的；

(3) 若 $B \subseteq C$ ， $C \subseteq D$ ，则 $B \subseteq D$ ，故 \subseteq 是传递的。

由(1)(2)(3)知， \subseteq 是 $\rho(A)$ 上的偏序关系。

其哈斯图为



【定义 3-12.3】 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序集， $B \subseteq A$ ，如果B的任意两个元素都存在关系 \leq ，则B称为**链**。如果每两个元素都是无关的，则称为**反链**。

我们约定，若A的子集只有单个元素，则这个子集既是链又是反链。

例如，对于集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的整除关系， $\{1, 2, 4\}$ 是链， $\{2, 3, 5\}$ 是反链。

【定义 3-12.4】 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序集，如果A是一个**链**，则称 $\langle A, \leq \rangle$ 是**全序集**或**线序集**， \leq 是**全序关系**或**线序关系**。

$\langle I, \leq \rangle$ 是全序集，线序集

【定义 3-12.5】 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $a \in A$, $b \in B$ 。

- (1) **极小元** b 为 B 的极小元 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in B \wedge x \neq b \wedge x \leq b)$
- (2) **极大元** b 为 B 的极大元 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in B \wedge x \neq b \wedge b \leq x)$
- (3) **最小元** b 为 B 的最小元 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \rightarrow b \leq x)$
- (4) **最大元** b 为 B 的最大元 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq b)$
- (5) **下 界** a 为 B 的下界 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \rightarrow a \leq x)$
- (6) **上 界** a 为 B 的上界 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq a)$
- (7) **下确界** a 为 B 的下确界 $\Leftrightarrow a$ 是 B 的下界 $\wedge (\forall x)(x \text{ 是 } B \text{ 的下界} \rightarrow x \leq a)$
- (8) **上确界** a 为 B 的上确界 $\Leftrightarrow a$ 是 B 的上界 $\wedge (\forall x)(x \text{ 是 } B \text{ 的上界} \rightarrow a \leq x)$

令 $C = \{b \mid b \text{ 是 } B \text{ 的上界}\}$ ， C 的最小元为 B 的 **上确界**

令 $D = \{b \mid b \text{ 是 } B \text{ 的下界}\}$ ， D 的最大元为 B 的 **下确界**

离散数学——集合论

例3: A是正整数12的因子的集合 $\{1,2,3,4,6,12\}$, 设 \leq 为A上的整除关系,

$B_1=\{1,6\}$ 、 $B_2=\{1,2,3\}$ 、 $B_3=\{4,6,12\}$ 、 $B_4=\{2,4,6\}$ 、 $B_5=\{1,2,6,12\}$ 、 $B_6=\{1,2,3,4,6,12\}$

$B_1=\{1,6\}$ 的极大元是 6, 极小元是 1。

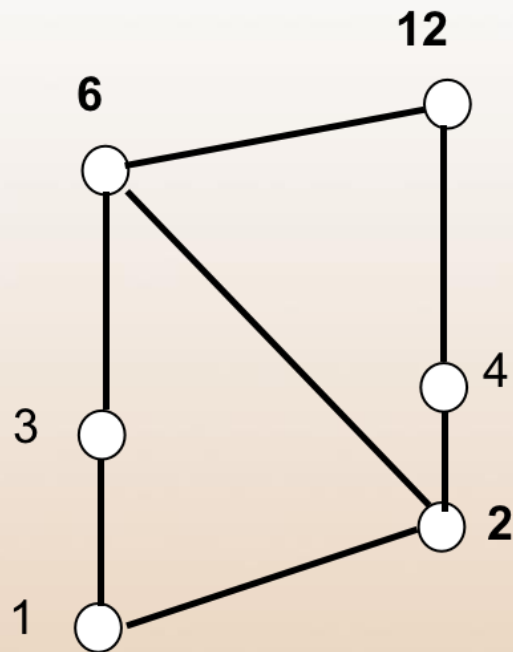
$B_2=\{1,2,3\}$ 的极大元是 2,3, 极小元是 1。

$B_3=\{4,6,12\}$ 的极大元是 12, 极小元是 4,6。

$B_1=\{1,6\}$ 的最大元是 6, 最小元是 1。

$B_2=\{1,2,3\}$ 的最大元是 无, 最小元是 1。

$B_3=\{4,6,12\}$ 的最大元是 12, 最小元是 无。



哈斯图

离散数学——集合论

例3: A是正整数12的因子的集合 $\{1,2,3,4,6,12\}$, 设 \leq 为A上的整除关系,

$B_1=\{1,6\}$ 、 $B_2=\{1,2,3\}$ 、 $B_3=\{4,6,12\}$ 、 $B_4=\{2,4,6\}$ 、 $B_5=\{1,2,6,12\}$ 、 $B_6=\{1,2,3,4,6,12\}$

$B_1=\{1,6\}$ 的上界是 6, 12, 下界是 1。

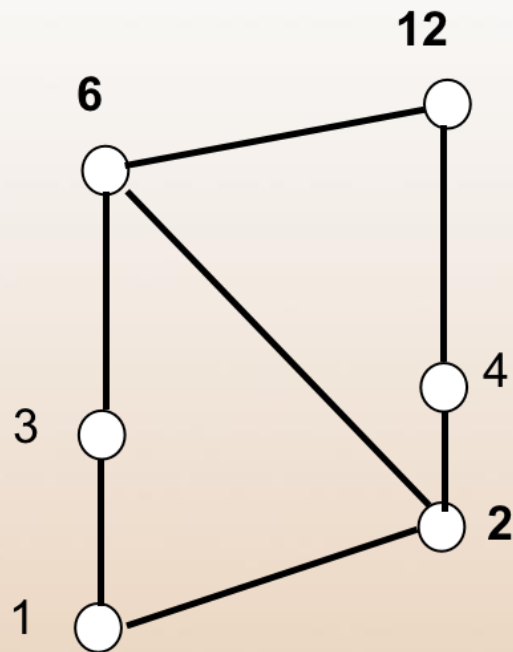
$B_1=\{1,6\}$ 的上确界是 6, 下确界是 1。

$B_2=\{1,2,3\}$ 的上界是 6, 12, 下界是 1。

$B_2=\{1,2,3\}$ 的上确界是 6, 下确界是 1。

$B_3=\{4,6,12\}$ 的上界是 12, 下界是 1, 2。

$B_3=\{4,6,12\}$ 的上确界是 12, 下确界是 2。



哈斯图

性质：

- (1) 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，可能存在多个。
- (2) 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定唯一。
- (3) 最小元一定是极小元，最大元一定是极大元。
- (4) 孤立结点既是极小元，也是极大元。
- (5) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在。
- (6) 下界、上界如果存在，不一定唯一。
- (7) 下确界、上确界如果存在，一定唯一。
- (8) 集合的最小元是其下界，最大元是其上界；反之不对。

【例3-11.3】 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集，哈斯图如下所示，求其的极小元、最小元、极大元、最大元。设 $B = \{b, c, d\}$ ，求 B 的下界、上界、下确界、上确界。

【解】

极小元： a, b, c, g

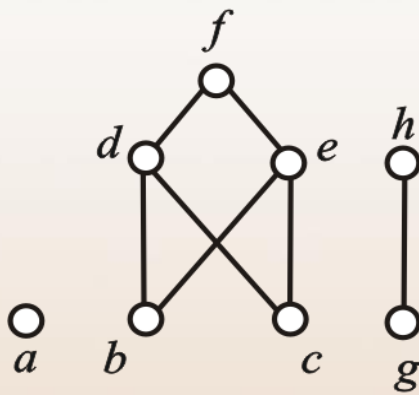
极大元： a, f, h

没有最小元与最大元

B 的下界和下确界都不存在

上界有 d 和 f

上确界为 d



【定义 3-12.5】 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序集，若 A 的任意非空子集都存在**最小元素**，则称 $\langle A, \leq \rangle$ 为**良序的**。

如： $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ 是良序的，但 $\langle \mathbb{I}, \leq \rangle$ 不是良序的。

【定理 3-12.1】 良序集一定是全序集。

【定理 3-12.2】 有限全序集一定是良序集。