# 离散数学

# Discrete Mathematics

信息工程学院

崔丽莎 副教授

ielscui@zzu.edu.cn

# 第二章 谓词逻辑

苏格拉底三段论：

（1）所有的人都是要死的

（2）苏格拉底是人

（3）苏格拉底是要死的

利用命题演算

设 P：所有的人都是要死的

Q：苏格拉底是人

R：苏格拉底是要死的

则 推理表示为：$P \wedge Q \Rightarrow R$

局限性

命题逻辑中，命题是命题演算的基本单位，不再对原子命题进行分解，因而无法研究命题的内部结构、成分及命题之间的内在联系， 甚至无法处理一些简单而又常见的推理过程。

解决方法： 对命题内部结构、关系做深入研究。

# 第二章 谓词逻辑

## 2-1 谓词的概念及表示

**【例2-1.1】**

(1) 小张是大学生
(2) 小李是大学生
(3) 小李喜欢跳舞
(4) 3 是质数
(5) 2 < 3
(6) 6 = 2 * 3
(7) 郑州位于北京和武汉之间

(1) 小张是大学生
(2) 小李是大学生
(3) 小李喜欢跳舞
(4) 3 是质数
(5) 2 < 3
(6) 6 = 2 * 3
(7) 郑州位于北京和武汉之间

## 个体、谓词

**【定义2-1.1】**客观世界中可以独立存在的具体或抽象对象称为**个体（客体）**，表示个体的词称为**个体词**。若个体词以常量的方式表示特定个体，则称之为**个体常量**；若个体词以变量的方式泛指不确定的个体，则称之为**个体变量**。

常用小写字母表示，如：

a: 小李　b:小张　c: 北京

**个体常量**

s: 学生　z: 桌子

**个体变量**

**【定义2-1.2】**表示个体（客体）特征、性质或关系的词，称为**谓词**。

常用大写字母表示，如：

F：喜欢跳舞　　S：是大学生　　G：…<…　　D：…=…*…

**谓词与个体常量一起可以表示一个命题**，如：

(1) a:小张　S：是大学生　则: S(a)　表示“小张是大学生”

(2) b:小李　S：是大学生　则: S(b)　表示“小李是大学生”

(3) a:小张　F：喜欢跳舞　则: F(a)　表示“小张喜欢跳舞”

(4) G(2,3)　2<3　　G(3,2)　3<2

# 第二章 谓词逻辑

## 2-2 谓词函数与量词

对于上述例子，若用个体变元取代个体常量，则可得到：

S(x): x是大学生

F(x): x喜欢跳舞”

G(x,y)：x<y

**【定义2-2.1】**由一个谓词和一些个体变元组成的表达式，称为**简单谓词函数**。

如果一个函数包含n个个体变元，则称为**n元简单谓词函数**。

**注意:** 谓词函数不是命题，只有当所有的个体变元都用确定的个体代入时，才表示一个命题。

**【定义2-2.2】**由简单谓词函数和命题连结词组成的表达式，称为**复合谓词函数。**

**如：** $S(x) \wedge F(x)$： x是大学生，并且喜欢跳舞

$\neg S(x)$：x不是大学生

对于一个谓词函数，每个个体变元都有其取值范围，该取值范围，称为是该个体变元的**个体域（论域）**。

根据上述概念，一个命题被分为了个体与谓词两部分，但对于一些命题，这样的划分仍不能区分命题之间的不同，不能准确的表达命题的意义。

所有学生都喜欢跳舞

有些学生喜欢跳舞

**【定义2-2.3】**表示命题中数量的词称为**量词**。对于给定的谓词函数P($x$)，若对$x$个体域中的每个元素都要求P($x$)为真，则称P($x$)得到**全称量化**，记为($\forall x$)P($x$)，其中$\forall$称为全称量词，$x$称为其作用变量。

若$x$在其个体域中至少存在一个元素使P($x$)为真，则称P($x$)得到**存在量化**，记为($\exists x$)P($x$)，其中$\exists$称为存在量词，$x$称为其作用变量。

全称量词$\forall$读作“任意的”，表示“所有的”、“每一个”、“任意的”等意义；

存在量词$\exists$读作“存在”，表示“存在”、“有一个”、“有一些”等意义。

则命题

(1) 所有学生都喜欢跳舞

(2) 有些学生喜欢跳舞

设F($x$)：x喜欢跳舞

(1) $(\forall x)F(x)$

(2) $(\exists x)F(x)$

其中 $x$ 的个体域为“学生”。

再如：

(1) 所有的整数都是实数

(2) 有些整数是偶数

设 R($x$)：$x$是实数　　E($x$)：$x$是偶数

则 (1) $(\forall x)R(x)$

(2) $(\exists x)E(x)$

其中 $x$ 的个体域为“ 整数”。

在谓词函数中，每一个个体变元都有其个体域，个体域不同，表达的命题的真值就可能不同。若在一个谓词表达式中有多个谓词，每个变元都要说明其个体域，对研究谓词公式的性质及推理都是不方便的，因而引入全总个体域的概念。

**全总个体域**：包含宇宙中所有的研究对象，即所有个体的全体。

**特性谓词**：用于限制个体变元的变化范围

此时，每个变元的个体域用**特性谓词**表达。

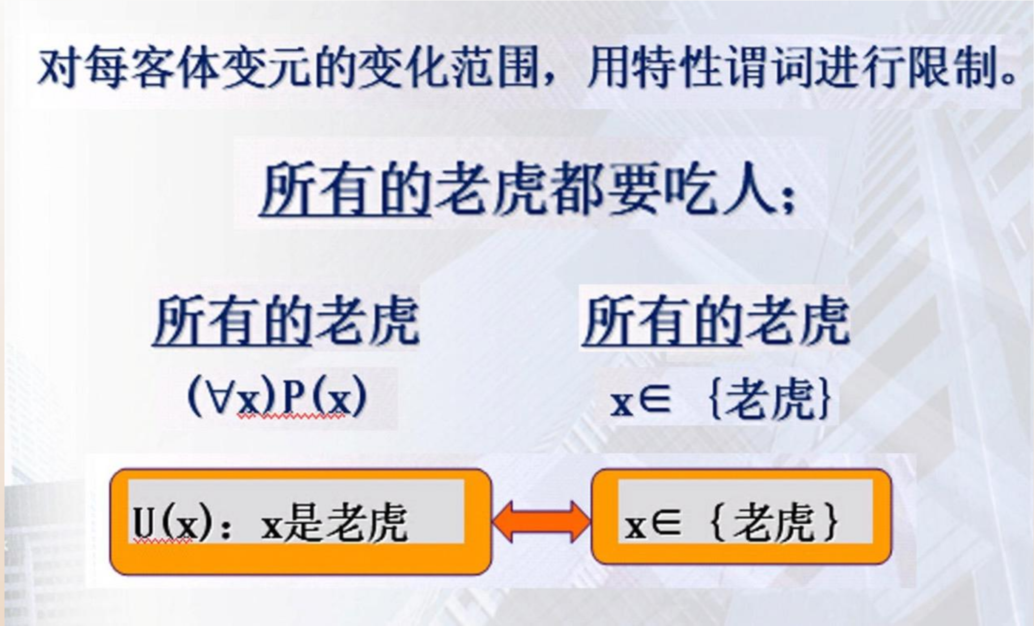
**特性谓词：** 用于限制个体变元的变化范围

例：所有的老虎都要吃人

设P($x$)：x要吃人

$$(\forall x)P(x)$$

x的个体域是老虎



此时，每个变元的个体域用**特性谓词**表达。

(1) 所有的整数都是实数

(2) 有些整数是偶数

设 $I(x)$: $x$是整数　$R(x)$: $x$是实数　$E(x)$:x是偶数

则：　$(\forall x)(I(x)\rightarrow R(x))$

$(\exists x)(I(x)\wedge E(x))$

- 对全称量词，特性谓词作为条件式前件加入，$(\forall x)(P(x)\rightarrow \ldots)$
- 对存在量词，特性谓词作为合取项加入，$(\exists x)(P(x)\wedge \ldots)$

- 对全称量词， 特性谓词作为条件式前件加入，$(\forall x)(P(x)\rightarrow\ldots)$

符号化“所有的老虎都要吃人”这个命题

若 $P(x)$：x会吃人　　　$U(x)$：x是老虎

- 则符号化的正确形式应该是
  - $(\forall x)(U(x)\rightarrow P(x))$
  - 它的含义是：“对于任意的x，如果x是老虎，则x会吃人”，符合原命题的逻辑含义。
- 若符号化为 $(\forall x)(U(x)\wedge P(x))$
  - 它的含义是：“对于任意的x，x是老虎，并且x会吃人”，与原命题“所有的老虎都要吃人”的逻辑含义不符。

- 对存在量词， 特性谓词作为合取项加入，$(\exists x)(P(x)\wedge\ldots)$

符号化“有一些人登过月球”

若S(x)：x登上过月球　U(x)：x是人

- 则符号化的正确形式应该是
  - $(\exists x)(U(x)\wedge S(x))$
  - 它的含义是：“存在一些x，x是人，且x登上过月球”，符合原命题的逻辑含义。
- 若符号化为 $(\exists x)(U(x)\rightarrow P(x))$
  - 它的含义是：“存在一些x, 若x是人，则x登上过月球”，与原命题“有些人登上过月球”的逻辑含义不符。

# 第二章 谓词逻辑

## 2-3 谓词公式与翻译

**【定义2-3.1】谓词公式（合式公式）**

**(1)** 原子谓词公式是谓词公式；

**(2)** 如果A是谓词公式，则¬A也是谓词公式；

**(3)** 如果A、B是谓词公式，那么(A∧B)、(A∨B)、(A→B)、(A$\boxed{\leftrightarrow}$B)都是谓词公式；

(4) 如果A是谓词公式，*x*是A中的一个变元，则(∀*x*)A（x）、(∃*x*)A(x)都是谓词公式；

(5) 当且仅当能够有限次地应用(1),(2),(3),(4)所得到的式子是谓词公式。

**注意：为了方便，最外层括号可以省略，但是若量词后边有括号，则括号不能省略**

**公式(∀ x)(A(x)→B(x))中(∀ x)后面的括号不是最外层括号，不能省略**

## 2-3 谓词公式与翻译

例如：

$$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \vee \neg R(x,a,f(z))))$$

$$(\forall x)(P(x) \vee (\exists y)R(x,y))$$

是谓词公式；

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x), \ (\exists y)(\forall x)(\vee P(x,y))$$

均不是谓词公式。

前者括号不配对，后者联结词无联结对象。

【例2-3.1】用谓词公式表达下列命题。

（1）所有的人都是要呼吸的

设 $M(x)$：$x$是人　$H(x)$：$x$是要呼吸的

则 $(\forall x)(M(x)\rightarrow H(x))$

（2）并非每个有理数都是实数

设 $Q(x)$：$x$是有理数　$R(x)$：$x$是实数

则 $\neg(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$

（3）没有不犯错误的人

设 $M(x)$：$x$是人　$E(x)$：$x$犯错误

则 $\neg(\exists x)(M(x)\wedge\neg E(x))$ 或 $(\forall x)(M(x)\rightarrow E(x))$

（4）尽管有人聪明，但未必一切人都聪明

设 $M(x)$：$x$是人　$C(x)$：$x$聪明

则 $(\exists x)(M(x)\wedge C(x))\wedge\neg(\forall x)(M(x)\rightarrow C(x))$

（5）每个实数都存在比它更大的实数。

(5) 每个实数都存在比它更大的实数。

设 $R(x)$：$x$是实数， $G(x,y)$：$y > x$

则 $(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \land G(x,y)))$

【例2-3.2】设$P(x)$：$x$是一个点，

$L(x)$：$x$是一条直线，

$R(x,y,z)$：$z$通过$x$和$y$，

$E(x,y)$：$x=y$。

符号化下面的句子：对每两个点有且仅有一条直线通过该两点

【解】

$$(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge P(y)\wedge \neg E(x,y)\rightarrow$$

$$(\exists z)(L(z)\wedge R(x,y,z)\wedge$$

$$(\forall m)(L(m)\wedge R(x,y,m)\rightarrow E(m,z))))$$

# 第二章 谓词逻辑

- 2.1 谓词的概念与表示
- 2.2 谓词函数与量词
- 2.3 谓词公式与翻译
- 2.4 变元的约束
- 2.5 谓词演算的等价式与蕴含式
- 2.6 前束范式
- 2.7 谓词演算的推理理论

# 2-4 变元的约束

指导变元(作用变元)：量词后的个体变元, $(\forall x)$, $(\exists y)$

辖域（作用域）：紧跟量词后被量词作用的谓词公式称为该量词的辖域， $(\forall x)P(x)$

约束变元：在量词辖域内与该量词指导变元相同的变元

自由变元：谓词公式中除了约束变元之外的变元

**【例2-4.1】** 说明下列各式的作用域及变元约束情况。

（1） $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

(2) $(\exists x)\, P(x) \wedge Q(x)$

(3) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)\, Q(x,y))$

(4) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x,z) \rightarrow(\exists y)\, R(x,y)) \vee Q(x,y)$

【解】

(1) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

(2) $(\exists x)\ P(x)\wedge Q(x)$

(3) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)\ Q(x,y))$

(4) $(\forall x)(P(x)\wedge(\exists x)\ Q(x,z)\rightarrow(\exists y)\ R(x,y))\vee Q(x,y)$

在(2)、（4）中，$x$ 既以约束变元出现，又以自由形式出现，这容易引概念上的混乱。为此，我们需要对其进行改名，使得一个变元在一个谓词公式中只以一种形式出现。

若 $P(x)$： $x$喜欢唱歌，$x$的个体域为“我们班的所有学生”

则 $(\forall x)P(x)$与 $(\forall y)P(y)$ 都表示“我们班所有学生都喜欢唱歌”

因此，约束变元的改名不影响它所表达的句子意义。

- 约束变元如何改名呢？

(1) 范围　量词后的变元，以及量词作用域中出现的该变元。

(2) 名称　作用域中没有出现过的变元名称

如：(1) $(\exists x)\, P(x) \wedge Q(x)$　　　$(\exists y)\, P(y) \wedge Q(x)$

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x,z) \rightarrow (\exists y)\, R(x,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall w)(P(w) \wedge (\exists x)\, Q(x,z) \rightarrow (\exists y)\, R(w,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall w)(P(w) \wedge (\exists u)\, Q(u,z) \rightarrow (\exists y)\, R(w,y)) \vee Q(x,y)$

- 自由变元如何改名呢？

  (1) 范围　式子中所有同名的自由变元

  (2) 名称　式子中没有出现过的变元名称

如：(1) $(\exists x)\, P(x) \wedge Q(x)$　　$(\exists x)\, P(x) \wedge Q(y)$

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x,z) \to (\exists y)\, R(x,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x,z) \to (\exists y)\, R(x,y)) \vee Q(w,y)$

(3) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(y,z) \to (\exists y)\, R(x,y)) \vee Q(x,y)$

$(\forall x)(P(x) \wedge Q(u,z) \to (\exists y)\, R(x,y)) \vee Q(x,u)$

# 第二章 谓词逻辑

# 2-5 谓词演算的等价式与蕴含式

在谓词公式中常包含命题变元和客体变元，当个体变元由确定的个体所取代，命题变元用确定的命题所取代时，就称作对**谓词公式赋值**。 一个谓词公式经过赋值以后，就成为具有确定真值T或 F 的命题。

**【定义2-5.1】**给定任何两个谓词公式 A 和 B，设它们有共同的个体域 E，若对 A 和 B 的任一组变元进行赋值，所得命题的真值相同，则称谓词公式 A 和 B 在 E 上是等价的，并记作$A \Leftrightarrow B$。

**【定义2-5.2】** 一个谓词公式 A ，如果至少存在一种赋值为真，则称该 A 为**可满足的**。若对E上所有的赋值，A的值都为真，则称A在E上是**有效的**或**永真的**。若对E上所有的赋值，A的值都为假，则称A在E上是**永假的**或**不可满足的**。

根据谓词公式等价的定义，当个体域$E=\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$时，可以得出：

$$(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots\ldots \wedge P(a_n)$$

$$(\exists x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots\ldots \vee P(a_n)$$

【例2-5.1】设$P(x)$: $x < 4$， $Q(x)$: $x > 3$，$E=\{1,2,3,4\}$,试求$(\forall x)P(x)$、 $(\exists x)Q(x)$的值。

【解】

$$\begin{aligned}(\forall x)P(x) &\Leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)\\ &\Leftrightarrow T \wedge T \wedge T \wedge F\\ &\Leftrightarrow F\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\exists x)Q(x) &\Leftrightarrow Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee Q(4)\\ &\Leftrightarrow F \vee F \vee F \vee T\\ &\Leftrightarrow T\end{aligned}$$

- 命题公式的推广

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x))$$

$$(\exists x)\neg(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x)\wedge\neg Q(x))$$

$$\neg(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x)\wedge\neg Q(x)) \quad \times$$

- 量词与否定的关系

设 $P(x)$: $x$喜欢唱歌　　　$Q(x)$: $x$喜欢跳舞

$x$ 的个体域为"我们班所有学生"

则：所有学生都不喜欢唱歌　　$(\forall x)\neg P(x)$

没有一个学生喜欢唱歌　　$\neg(\exists x)P(x)$

有学生不喜欢唱歌 $(\exists x)\neg P(x)$

不是所有学生都喜欢唱歌 $\neg(\forall x)P(x)$

$$(\forall x)\neg P(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x)P(x)$$

$$(\exists x)\neg P(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x)$$

- 量词与析取、合取的关系

所有学生都喜欢唱歌和跳舞 $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$

所有学生都喜欢唱歌，所有学生都喜欢跳舞 $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

有学生喜欢唱歌或跳舞 $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$

有学生喜欢唱歌或有学生喜欢跳舞 $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x) P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

当 $x$ 的个体域为有限时，很容易验证上述式子成立。

设 $x$ 的个体域为$\{a,b,c\}$，则

$$(\forall x) \neg P(x) \Leftrightarrow \neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\exists x)P(x)$$

$$(\exists x) \neg P(x) \Leftrightarrow \neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x)P(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (P(a) \wedge Q(a)) \wedge (P(b) \wedge Q(b)) \wedge (P(c) \wedge Q(c))$$

$$\Leftrightarrow (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \wedge (Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (P(a) \vee Q(a)) \vee (P(b) \vee Q(b)) \vee (P(c) \vee Q(c))$$

$$\Leftrightarrow (P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \vee (Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

当 $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ 中的 $\wedge$ 换成$\vee$，等价式是否还成立呢？

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 所有学生都喜欢唱歌或跳舞

$(\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x)$ 所有学生都喜欢唱歌或所有学生都喜欢跳舞

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

同样的，当$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$中的 $\vee$ 换成$\wedge$，情况是什么样呢？

$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ 有学生喜欢唱歌和跳舞

$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$ 有学生喜欢唱歌，且有学生喜欢跳舞

$$(\exists x) (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

对于条件和双条件式，存在如下关系：

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$$

如：P($x$): $x$是奇数 Q($x$): $x$是偶数 x 的个体域为{1，2}，则：

$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

$\Leftrightarrow (P(1) \wedge P(2)) \rightarrow (Q(1) \wedge Q(2))$

$\Leftrightarrow (T \wedge F) \rightarrow (F \wedge T)$

$\Leftrightarrow F \rightarrow F$

$\Leftrightarrow T$

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

$\Leftrightarrow (P(1) \rightarrow Q(1)) \wedge (P(2) \rightarrow Q(2))$

$\Leftrightarrow (T \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow T)$

$\Leftrightarrow F \wedge T$

$\Leftrightarrow F$

## 量词作用域的扩张与收缩

$$(\forall x)(P(x) \land Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \land Q(y)$$
$$(\forall x)(P(x) \lor Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \lor Q(y)$$
$$(\exists x)(P(x) \land Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \land Q(y)$$
$$(\exists x)(P(x) \lor Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \lor Q(y)$$

由此可以得出：

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow Q(y)$$
$$(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow Q(y)$$
$$(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow P(x) \rightarrow (\forall y)Q(y)$$
$$(\exists y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y)$$

## 多个量词的使用

设 $P(x,y)$是二元谓词函数，对于两个量词，存在8种情况，关系如下：

$(\forall x)(\forall y)$

$(\forall y)(\forall x)$

$(\exists x)(\forall y)$

$(\exists y)(\forall x)$

$(\forall x)(\exists y)$

$(\forall y)(\exists x)$

$(\exists x)(\exists y)$

$(\exists y)(\exists x)$

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

设 $P(x,y)$: $x$与$y$年龄一样，$x$的个体域是计算机的所有学生， $y$的个体域是软件工程的所有学生。

解释下列式子的意义：

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

【例2-5.1】设$P(x,y)$: $x$ 整除 $y$， $E=\{1,2,3\}$,试求$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$， $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$的值。

【解】 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x,1) \vee P(x,2) \vee P(x,3))$

$\Leftrightarrow (P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3)) \wedge$

$(P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3)) \wedge$

$(P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3))$

$\Leftrightarrow (T\vee T\vee T) \wedge (F\vee T\vee F) \wedge (F\vee F\vee T)$

$\Leftrightarrow T \wedge T \wedge T$

$\Leftrightarrow T$

$(\exists y)(\forall x)P(x,y)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(P(1,y) \wedge P(2,y) \wedge P(3,y))$

$\Leftrightarrow (P(1,1) \wedge P(2,1) \wedge P(3,1)) \vee$

$(P(1,2) \wedge P(2,2) \wedge P(3,2)) \vee$

$(P(1,3) \wedge P(2,3) \wedge P(3,3))$

$\Leftrightarrow (T\wedge F\wedge F)\vee(T\wedge T\wedge F)\vee(T\wedge F\wedge T)$

$\Leftrightarrow F\vee F\vee F$

$\Leftrightarrow F$

# 第二章 谓词逻辑

# 2-6 前束范式

【定义2-6.1】一个公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾，则该公式叫做**前束范式**。

【例2-6.1】把公式$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$转化为前束范式。

【解】

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

**【例2-6.2】**把公式$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y) Q(x,y))$ 转化为前束范式。

**【解】**

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y) Q(x,y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y) Q(x,y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (\exists y) (\neg P(x) \vee Q(x,y))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (\exists y) (P(x) \rightarrow Q(x,y))$$

# 第二章 谓词逻辑

- 2.1 谓词的概念与表示
- 2.2 谓词函数与量词
- 2.3 谓词公式与翻译
- 2.4 变元的约束
- 2.5 谓词演算的等价式与蕴含式
- 2.6 前束范式
- 2.7 谓词演算的推理理论

# 2-7 谓词演算的推理理论

命题推理的基本元素：

**推理规则**：P规则、T规则、CP规则

**推理方法**：真值表法、直接证法、间接证法

**推理依据**：等价式、蕴含式

在谓词演算中，由于在前提和结论中的谓词公式常带有量词，因而要使用命题演算的等价式和蕴含式需要消去和添加量词。

谓词演算的推理规则：**全称指定、存在指定、全称推广、存在推广**。

- **全称指定 US （Universal Specification ）**

$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$

注意: $c$ 代表个体域中的任意元素

- **存在指定 ES （Universal Specification）**

$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$

注意: (1) $c$ 代表个体域中的部分元素

(2) 在每次使用时都要引入不同的个体

如：$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$

$(\exists x)Q(x) \Rightarrow Q(d)$

- **全称推广 UG （Universal Generalization）**

$P(c) \Rightarrow (\forall x)P(x)$

注意: $c$ 要能够代表个体域中的所有元素

- **存在推广 EG （Existential Generalization ）**

$P(c) \Rightarrow (\exists x)P(x)$

注意： $c$ 代表个体域中的部分元素

【例2-7.1】验证苏格拉底三段论的有效性。

（1）所有的人都是要死的

（2）苏格拉底是人

（3）苏格拉底是要死的

【证】设$M(x)$: $x$ 是人， $D(x)$: $x$是要死的， $s$: 苏格拉底

$(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x)) \wedge M(s) \Rightarrow D(s)$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x))$ | P |
| (2) | $M(s) \rightarrow D(s)$ | US(1) |
| (3) | $M(s)$ | P |
| (4) | $D(s)$ | T (2)(3)I |

【例2-7.2】证明 $(\forall x)(C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x)) \wedge (\exists x)(C(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$

【证】

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $(\forall x)(C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x))$ | P |
| (2) | $C(a) \rightarrow W(a) \wedge R(a)$ | US (1) |
| (3) | $(\exists x)(C(x) \wedge Q(x))$ | P |
| (4) | $C(b) \wedge Q(b)$ | ES(3) |
| (5) | $C(b)$ | T (4) I |
| (6) | $Q(a)$ | T (4) I |
| (7) | $W(a) \wedge R(a)$ | T (2)(5) I |
| (8) | $R(a)$ | T (7) I |
| (9) | $Q(a) \wedge R(a)$ | T (6)(8) I |
| (10) | $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$ | EG(9) |

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $(\exists x)(C(x) \wedge Q(x))$ | P |
| (2) | $C(a) \wedge Q(a)$ | ES (1) |
| (3) | $(\forall x)(C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x))$ | P |
| (4) | $C(a) \rightarrow W(a) \wedge R(a)$ | US(3) |
| (5) | $C(a)$ | T (2) I |
| (6) | $Q(a)$ | T (2) I |
| (7) | $W(a) \wedge R(a)$ | T (4)(5) I |
| (8) | $R(a)$ | T (7) I |
| (9) | $Q(a) \wedge R(a)$ | T (6)(8) I |
| (10) | $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$ | EG(9) |

【例2-7.3】证明 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

【证】 反证法

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) $\neg((\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$ | P 附加前提 | | |
| (2) $\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)Q(x)$ | T (1) E | | |
| (3) $(\exists x)\neg P(x) \wedge (\forall x)\neg Q(x)$ | T (2) E | | |
| (4) $(\exists x)\neg P(x)$ | T (3) I | (8) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ | P |
| (5) $(\forall x)\neg Q(x)$ | T (3) I | (9) $P(c) \vee Q(c)$ | US(8) |
| (6) $\neg P(c)$ | ES(4) | (10) $P(c)$ | T (7)(9) I |
| (7) $\neg Q(c)$ | US(5) | (11) $P(c) \wedge \neg P(c) = F$ | T (6)(10) I |

方法二： **CP 规则**

由于 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg(\forall x)P(x)$ | P 附加前提 |
| (2) | $(\exists x)\neg P(x)$ | T (1) E |
| (3) | $\neg P(c)$ | ES(2) |
| (4) | $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ | P |
| (5) | $P(c) \vee Q(c)$ | US(4) |
| (6) | $Q(c)$ | T (3)(5) I |
| (7) | $(\exists x)Q(x)$ | EG(6) |
| (8) | $\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$ | CP |

【例2-7.5】有些病人喜欢所有的医生，任何病人都不喜欢庸医，所以没有医生是庸医。

【解】设 $P(x)$: $x$是病人　$Q(x)$: $x$是医生　$R(x)$: $x$是庸医　$L(x,y)$: $x$喜欢$y$

则 推理可表示为：

$$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y)\rightarrow L(x,y)) \wedge (\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)(R(y)\rightarrow\neg L(x,y)) \Rightarrow \neg(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y)\rightarrow L(x,y))$ | P |
| (2) | $P(a) \wedge (\forall y)(Q(y)\rightarrow L(a,y))$ | ES(1) |
| (3) | $P(a)$ | T (2) I |
| (4) | $(\forall y)(Q(y)\rightarrow L(a,y))$ | T (2) I |
| (5) | $Q(b)\rightarrow L(a,b)$ | US(4) |

| | |
|---|---|
| (6) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)(R(y)\rightarrow\neg L(x,y))$ | P |
| (7) $P(a)\rightarrow(\forall y)(R(y)\rightarrow\neg L(a,y))$ | US(6) |
| (8) $(\forall y)(R(y)\rightarrow\neg L(a,y))$ | T I(3)(7) |
| (9) $R(b)\rightarrow\neg L(a,b)$ | US(7） |
| (10) $L(a,b)\rightarrow\neg R(b)$ | T E(9) |
| (11) $Q(b)\rightarrow\neg R(b)$ | T I(5)(10) |
| (12) $\neg Q(b)\vee\neg R(b)$ | T E(11) |
| (13) $\neg(Q(b)\wedge R(b))$ | T E(12) |
| (14) $(\forall y)\neg(Q(y)\wedge R(y))$ | UG(13) |
| (15) $\neg(\exists y)(Q(y)\wedge R(y))$ | T E(14) |

## 数理逻辑 程序设计题

**输入：** 一个命题公式

**输出：** （1）真值表

（2）主析取范式、主合取范式

（3）给出命题公式的类别（永真、永假、可满足）

**提交报告：**

（1）源程序

（2）程序运行截图

（3）算法描述 算法思想、流程图等