第二篇 集合论

集合论是现代各科数学的基础，它的起源可以追溯到十纪末期。开始时为了追寻微积分的坚实的基础，人们仅进行了有关数集的研究。直到1876~1883年，康托尔(Georg Cantor)发表一系列有关集合论的文章，对任意元素的集合进行了深入的探讨，提出了关于基数、序数和良序集等理论，奠定了集合论的深础。但是随着集合论的发展，以及它与数学哲学密切联系所做的讨论，在1900年前后出现了各种悖论，使集合论的发展一度陷入僵滞的局面。1904~1908年，策墨罗(Zermelo)列出了第一个集合论的公理系统，他的公理，使数学哲学中产生的一些矛盾基本上得到统一，在此基础上以后就逐步形成了公理化集合论和抽象集合论，使该学科成为在数学中发展最为迅速的一个分支。现在集合点已渗透到古典分析、泛函、概率、函数论以及信息论、排队论等现代数学各个领域。

第三章 集合与关系

3-1 集合的概念及表示法

集合的概念

就是把具有共同属性的对象汇集成一个整体。

或 由**指定范围**内满足给定条件且能相互区分的**所有对象**的聚集。

集合的表示

{1，2，3，4}

{1，2，3，4，……}

枚举法

$\{x \mid x$ 是偶数$\}$

$\{x \mid 1<x<4\}$

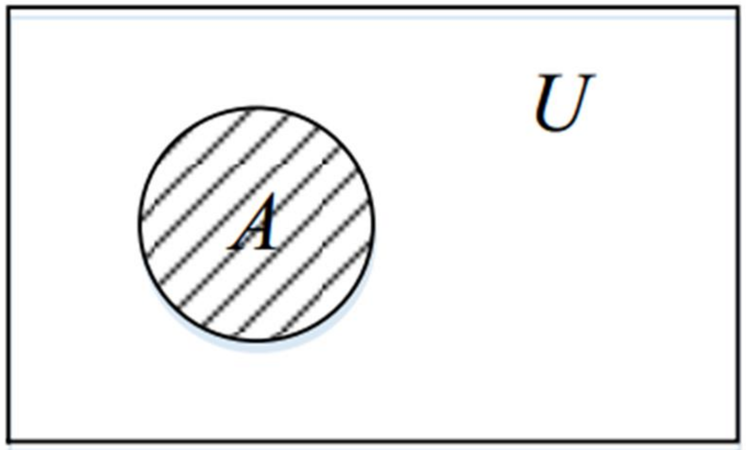
$\{x \mid p(x)\}$ **描述法**

集合常用大写英文字母表示

如：A、B

文氏图法

是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解。一般用平面上的圆形、椭圆形或方形表示一个集合。



离散数学——集合论

集合的特性

元素不能重复, 元素没有顺序

元素与集合的关系

① 属于 x是集合A的元素，称x属于A，记为 $x \in A$

② 不属于 x不是集合A的元素，称x不属于A，记为 $x \notin A$

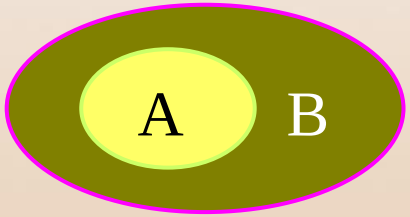
集合的关系

①相等 $A=B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \leftrightarrow x \in B\}$

②包含 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \rightarrow x \in B\}$ B称为A的**子集**

③真包含 $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B\} \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$

$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge \neg(A=B)$ B称为A的**真子集**



【定理 3-1.1】 $A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B) \wedge (B\subseteq A)$

- **特殊集合**

① 空集 $\Phi=\{\, x \mid p(x) \wedge \neg p(x) \,\}$

Φ是任何集合的子集

Φ及A 称为集合A的平凡子集。

② 幂集 $P(A)=\{\, B \mid B\subseteq A \}$

是A的所有子集的集合

③ 全集

在一个相对固定的范围内，包含此范围内所有元素的集合，称为全集，

用**U**或E表示。

【定理 3-1.2】 若$|A|=n$，则$|P(A)|=2^n$，或记为$2^{|A|}$。

【证明】设$A=\{a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n\}$，则A的任一子集B都可以表示为一个n位二进制串$b_1b_2\ldots\ldots b_n$，其中

$$b_i=\begin{cases}1 & 若a_i\in B\\ 0 & 若a_i\notin B\end{cases}$$

因而，$00\ldots0\leq b_1b_2\ldots\ldots b_n\leq 11\ldots1$。

同样的，任何给一个n位二进制串都可以构造出一个A的子集。

故$|P(A)|=2^n$。

【例3-1.1】 A={Φ}，B={1,2}，求P(A)，P(B)。

【解】 P(A)={Φ,{Φ}}

P(B)={Φ,{1},{2},{1,2}}

【例3-1.2】 求P(P({Φ}))

【解】 P(P(Φ)) = P({Φ,{Φ})

= {Φ,{Φ}, {{Φ}}, {Φ,{Φ}}}

【例3-1.3】 设集合A有101个元素，试问可以构成多少个子集？

其中有多少个子集的元素个数为奇数？

【解】 2^{101} 2^{100}

【例3-1.4】A={1,2,3}，求P(A)

【解】A的子集

$S_{000}=\Phi \quad = S_0 \qquad S_{001}=\{3\} \quad = S_1$

$S_{010}=\{2\} \quad = S_2 \qquad S_{011}=\{2,3\} \quad = S_3$

$S_{100}=\{1\} \quad = S_4 \qquad S_{101}=\{1,3\} \quad = S_5$

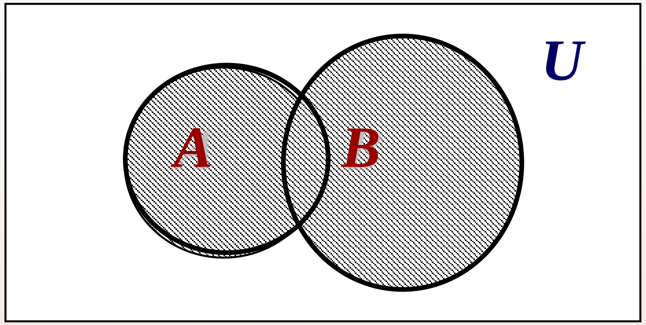
$S_{110}=\{1,2\}= S_6 \qquad S_{111}=\{1,2,3\}= S_7$

故 $P(A)=\{S_i \mid 0 \le i \le 7\}$

3-2 集合的运算

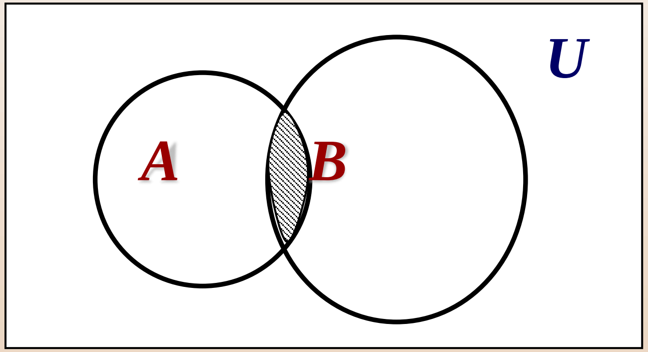
- 并 ∪

$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$



- 交 ∩

$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$



3-2 集合的运算

性质：

(1) $A \cup A = A$	(1) $A \cap A = A$	幂等律
(2) $A \cup B = B \cup A$	(2) $A \cap B = B \cap A$	交换律
(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	结合律
(4) $A \cup \Phi = A$	(4) $A \cap E = A$	同一律
(5) $A \cup E = E$	(5) $A \cap \Phi = \Phi$	零率

【定理3-2.1】 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$　　分配律

【证明】 方法一　采用 $A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$

(1) 对任意的$x\in A\cap(B\cup C)$，

则 $x\in A$，且$x\in B\cup C$

从而 $x\in A$，且$x\in B$ 或 $x\in A$，且$x\in C$

故 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$

则 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

从而 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2) 对任意的$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，

则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$

从而 $x \in A$，且$x \in B$ 或 $x \in A$，且$x \in C$

故 $x \in A$，且$x \in B \cup C$

则 $x \in A \cap (B \cup C)$

从而 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

由(1)(2)得，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

方法二：采用谓词演算的的等价公式

对任意的$x \in A \cap (B \cup C)$，由于

$x \in A \cap (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

故 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

【定理3-2.2】 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

【证明】充分性

(1) 对任意的$x \in A \cup B$，则 $x \in A$ 或 $x \in B$。

由于 $A \subseteq B$，故对任意的$x \in A$，均有$x \in B$。

从而，$x \in B$ 成立。

因而，$A \cup B \subseteq B$。

(2) $B \subseteq A \cup B$ 成立

由 (1) (2) 可得，$A \cup B = B$。

必要性

若$A \cup B = B$，由于$A \subseteq A \cup B$，则$A \subseteq B$。

【定理3-2.3】 $A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

吸收律

【证明】

(1) $A \cap (A \cup B) \subseteq A$

(2) 若$x \in A$，则$x \in A \cup B$，从而有$x \in A \cap (A \cup B)$

故 $A \subseteq A \cap (A \cup B)$

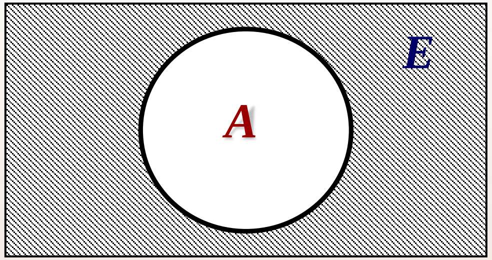
由 (1) (2) 可得，$A \cap (A \cup B) = A$。

同理可证 $A \cup (A \cap B) = A$

补

对于集合A，设 E 为全集，则 ~A 称为A的补集，定义为：

$$\sim A = \{x \mid x \in E \text{ 且 } x \notin A\}$$



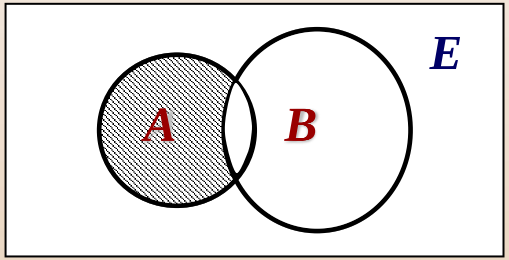
差

设A，B为任意两个集合，A-B称为A与B的差集，定义为:

$$A-B = \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B \}$$

也称B相对于A的补。

相对补



性质：

(1) $\sim\sim A = A$　　双重否定律

(2) $A \cup \sim A = E$　　排中律

(3) $A \cap \sim A = \Phi$　　矛盾律

【定理3-2.4】

(1) $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

(2) $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

德•摩根律

【定理3-2.5】 设A、B为任意两个集合，则

(1) $A - B = A \cap \sim B$

(2) $A - B = A - A \cap B$

【定理3-2.6】 设A、B、C为任意三个集合，则

$A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$

【定理3-2.7】 设A、B为任意两个集合，若$A \subseteq B$则

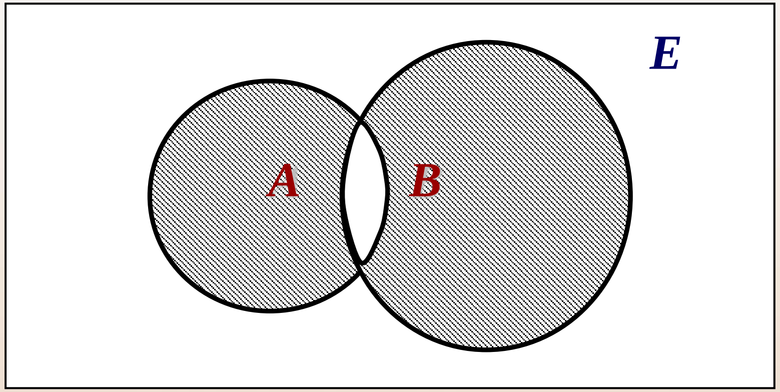
(1) $\sim B \subseteq \sim A$

(2) $(B - A) \cup A = B$

对称差

设A，B为任意两个集合，A⊕B称为A与B的对称差，定义为:

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$$



【定理3-2.8】设A、B、C为任意三个集合，则

(1) $A \oplus B = B \oplus A$

(2) $A \oplus A = \Phi$

(3) $A \oplus \Phi = A$

(4) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

【例3-2.1】 判断下列命题是否为真。

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(2) $\varnothing \in \varnothing$

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(5) $\{ a, b \} \subseteq \{ a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{ a, b \} \in \{ a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{ a, b\} \subseteq \{ a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{ a, b\} \in \{ a, b, \{\{a,b\}\}\}$

【解】 (1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真，其余为假.

【例3-2.2】设

$S_1=\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$，$S_2=\{2, 4, 6, 8\}$，$S_3=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，

$S_4=\{3, 4, 5\}$，$S_5=\{3, 5\}$

确定在以下条件下X是否与$S_1,\ldots,S_5$中某个集合相等？

（1）若 $X \cap S_5=\varnothing$

（2）若 $X \subseteq S_4$但 $X \cap S_2=\varnothing$

（3）若 $X \subseteq S_1$且 $X \not\subseteq S_3$

（4）若 $X - S_3=\varnothing$

（5）若 $X \subseteq S_3$ 且 $X \not\subseteq S_1$

【解】

(1) $X=S_2$

(2) $X=S_5$

(3) $X=S_1$，S_2，S_4

(4) $X=S_3$，S_5

(5) X不存在

【例3-2.3】证明：$(A\cup B = A\cup C) \wedge (A\cap B = A\cap C) \Rightarrow B = C$

【证明】方法一

$B = B\cap(A\cup B)$

$= B\cap(A\cup C)$

$= (B\cap A)\cup(B\cap C)$

$= (A\cap C)\cup(B\cap C)$

$= (A\cup B)\cap C$

$= (A\cup C)\cap C$

$= C$

方法二

根据已知条件，可以得到

$$(A\cup B)-(A\cap B) = (A\cup C)-(A\cap C)$$

即 $A\oplus B = A\oplus C$

从而有 $A\oplus(A\oplus B) = A\oplus(A\oplus C)$

根据结合律得 $(A\oplus A)\oplus B = (A\oplus A)\oplus C$

由于$A\oplus A = \varnothing$， $\varnothing\oplus B=B$， $\varnothing\oplus C=C$

化简上式得，$B = C$

3-4 序偶与笛卡尔积

集合的一个主要特征是元素的无序性，但是在现实生活中，有许多事物都是成对出现的，都有一定顺序，如：上、下；左、右；$3 \le 4$；张华比李明高。具有顺序的元素无法用集合表示。

序偶： 由两个元素组成的有序对，表示为$\langle x, y\rangle$，其中x称为第一元素，y称为第二元素。

【定义 3-4.1】两个序偶相等 $\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle$ iff $x=u$，$y=v$。

由此可知 $<2,3> \neq <3,2>$

而对于集合，$\{2,3\}=\{3,2\}$

【定义 3-4.2】n元组序偶 $<x_1, x_2,\ldots,x_n> = < <x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}> , x_n >$

它是一个二元组序偶，其第一元素为n-1组序偶。

由此可知 $<2,3,4> = <<2,3>,4>$，但 $<2,3,4> \neq <2,<3,4>>$。

【定义 3-4.3】设A、B是两个集合，定义

$$A\times B=\{<x,y> \mid x\in A \wedge y\in B \}$$

称A×B为集合A与集合B的笛卡尔积或直积。

【例3-4.1】若A={1,2}，B={3,4}，求A×B，B×A， A×A。

【解】A×B={<1,3>，<1,4>，<2,3>，<2,4>}

B×A={<3,1>，<4,1>，<3,2>，<4,2>}

A×A={<1,1>，<1,2>，<2,1>，<2,2>}

由此可知，当$A \neq B$时，**$A \times B \neq B \times A$**。

约定：$A \times \Phi = \Phi \times A = \Phi$

【例3-4.2】若$A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$，$C=\{5\}$，求$(A \times B) \times C$， $A \times (B \times C)$。

【解】 $(A \times B) \times C = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle\} \times \{5\}$

$= \{\langle\langle 1,3\rangle,5\rangle, \langle\langle 1,4\rangle,5\rangle, \langle\langle 2,3\rangle,5\rangle, \langle\langle 2,4\rangle,5\rangle\}$

$= \{\langle 1,3,5\rangle, \langle 1,4,5\rangle, \langle 2,3,5\rangle, \langle 2,4,5\rangle\}$

$A \times (B \times C) = \{1,2\} \times \{\langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle\}$

$= \{\langle 1,\langle 3,5\rangle\rangle, \langle 1,\langle 4,5\rangle\rangle, \langle 2,\langle 3,5\rangle\rangle, \langle 2,\langle 4,5\rangle\rangle\}$

由此可知，**$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$**

【定理3-4.1】

设A、B、C是任意三个集合，则

(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(4) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

【证明】

(1) 对任意的$\langle x, y\rangle \in A \times (B \cap C)$，由于

$\langle x, y\rangle \in A \times (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in A \times B \wedge \langle x, y\rangle \in A \times C$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (A \times B) \cap (A \times C)$

故 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

【定理3-4.2】 设A、B、C、D是四个非空集合，则

$$A \times B \subseteq C \times D \text{ 当且仅当 } A \subseteq C \text{ 且 } B \subseteq D$$

【证明】 **充分性**

任意的$x\in A$，$y\in B$，

则 $\langle x, y\rangle \in A\times B$，

由于$A \times B \subseteq C \times D$，

所以 $\langle x, y\rangle \in C\times D$，

因而 $x\in C$，$y\in D$

故 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$

必要性

任意的$\langle x, y\rangle \in A\times B$，

则 $x\in A$，$y\in B$，

由于$A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$，

所以 $x\in C$，$y\in D$，

因而 $\langle x, y\rangle \in C\times D$，

故 $A \times B \subseteq C \times D$

为了与n元组的定义一致，我们约定：

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

因而

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{<x_1, x_2, \ldots, x_n> \mid x_i \in A_i, i=1,2,\ldots\ldots,n\}$$

记 $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots\ldots \times A}_{n个}$

【例3-4.1】设$A=\{1,2\}$，求出A^3。

【解】$A \times A = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

$$(A \times A) \times A = \{<<1,1>,1>,<<1,2>,1>,<<2,1>,1>,<<2,2>,1>,$$
$$<<1,1>,2>,<<1,2>,2>,<<2,1>,2>,<<2,2>,2>\}$$
$$= \{<1,1,1>,<1,2,1>,<2,1,1>,<2,2,1>,<1,1,2>,<1,2,2>,<2,1,2>,<2,2,2>\}$$
$$= A \times A \times A$$

【例3-4.2】判断下列各式是否成立。

a) $(A - B)\times(C - D) = (A\times C) - (B\times D)$　　不成立，$A=B=\{1,2\}$，$C=\{3\}$，$D=\{4\}$

b) $(A\oplus B)\times(C\oplus D) = (A\times C)\oplus(B\times D)$　　不成立，$A=B=\{1,2\}$，$C=\{3\}$，$D=\{4\}$

c) $(A - B) \times C = (A\times C) - (B\times C)$　　成立

d) $(A\oplus B) \times C = (A\times C)\oplus(B\times C)$　　成立，$A=B=\{1,2\}$，$C=\{3\}$，$D=\{4\}$

c) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

$\langle x,y\rangle\in (A-B)\times C$

$\Leftrightarrow x\in A-B \wedge y\in C$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B) \wedge y\in C$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C) \wedge (x\notin B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C \wedge \langle x,y\rangle\notin B\times C$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in (A\times C)-(B\times C)$

d) $(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

$(A\oplus B)\times C$

$=((A-B)\cup(B-A))\times C$

$=(A-B)\times C\cup(B-A)\times C$

$=((A\times C)-(B\times C))\cup((B\times C)-(A\times C))$

$=(A\times C)\oplus(B\times C)$

3-5 关系及其表示

关系在现实生活中随处可见，如：位置关系、师生关系、学生与课程的关系、学生与学号的关系、数值的大小关系、集合的包含关系等；在这些关系中，元素之间是有顺序的。

【定义 3-5.1】设A、B是两个集合，若R是A × B的子集，则称R是集合A到集合B的一个二元关系。

根据定义，$R \subseteq A \times B$，R中的元素 $<x, y> \in A \times B$ 。

若元素 x, y 之间存在关系R，则$<x, y> \in R$，也可记为 xRy；

若元素 x, y 之间不存在关系R，则$<x, y> \notin R$，也可记为 $x \not{R} y$ 。

例如： $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$，$R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0,1>\}$，

R_1, R_2, R_3, R_4都是从 A 到 B 的二元关系。

在定义 3-5.1中，若A=B，则称R是**A上**的二元关系。

【定义 3-5.2】 设R是集合A到集合B的一个二元关系，定义：

$$\text{dom } R=\{ x \mid (\exists y)(< x , y >\in R)\}$$

$$\text{ran } R = \{ y \mid (\exists x)(< x , y >\in R)\}$$

$$\text{FLD } R= \text{dom } R \cup \text{ran } R$$

称 dom R、 ran R、 FLD R分别为R的前域、值域、R的域。

【定义 3-5.3】 设 A 、B为任意两个集合, 则称 $\varnothing$ 、$A\times B$分别为A到B的空关系、全域关系。

【定义 3-5.4】 设 A 是一个集合， $I_A=\{<x,x>|x\in A\}$，称I_A为A上的恒等关系 。

【例3-5.1】设A={1,2}，B={3,4}，求出A到B的所有关系。

【解】 根据定义，A到B的二元关系为 $A\times B$的子集，

由于 $A\times B$={<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>}

所以，A到B的所有关系为：$\varnothing$，{<1,3>}，{<1,4>}，{<2,3>}，{<2,4>}，{<1,3>,<1,4>}，{<1,3>,<2,3>}，{<1,3>,<2,4>}，{<1,4>,<2,3>}，{<1,4>,<2,4>}，{<2,3>,<2,4>}，{<1,3>,<1,4>,<2,3}，{<1,3>,<1,4>,<2,4>}，{<1,3>,<2,3>,<2,4>}，{<1,4>,<2,3>,<2,4>}，{<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>}。

【例3-5.2】设A、B是任意两个集合，|A|=m， |B|=n ，那么A到B有多少个不同的二元关系，A上有多少个不同的二元关系?

【解】由于|A|=m， |B|=n

故 $|A\times B| = m\times n$

而 A到B的关系是$A\times B$的子集

故 A到B不同的二元关系共有$2^{m\times n}$个。

同理，由于$|A\times A|=m^2$, A上不同的二元关系共有2^{m^2}个。

【定义 3-5.5】 若A={x_1, x_2, …, x_m}，B={y_1, y_2, …, y_n}，R是从A到B的二元关系，则**R的关系矩阵**定义为：

$$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$$

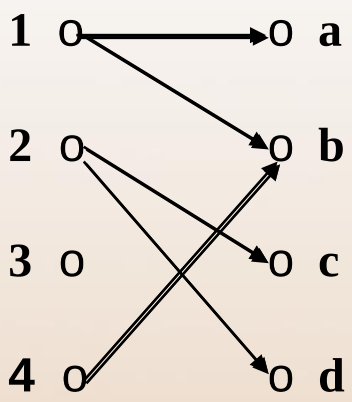
其中，$r_{ij} = \begin{cases} 1 & 若 < x_i, y_j > \in R \\ 0 & 若 < x_i, y_j > \notin R \end{cases}$

R的关系图：在平面上作出m个结点分别记作$x_1, x_2, \dots, x_m$，而后再作出n个结点分别记作$y_1, y_2, \dots, y_n$。如果$< x_i, y_j > \in R$，则从结点x_i到结点y_j作一有向弧度，箭头的方向指向结点y_j。

【例3-5.3】 设 A={1,2,3,4}, B={a,b,c,d},R={<1,a>,<1,b>,<2,c>,<2,d>,<4,b>}, 试求出R的关系矩阵，画出其关系图。

【解】

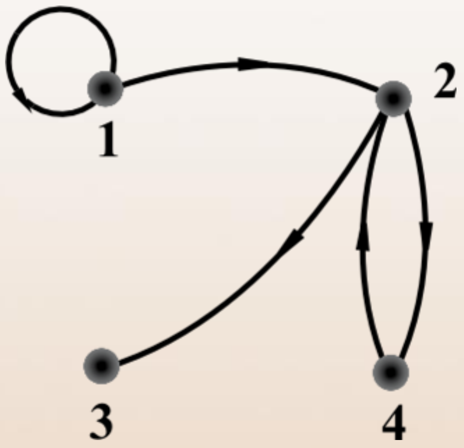
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



【例3-5.4】 设 A={1,2,3,4}, R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>},试求出R的关系矩阵，画出其关系图。

【解】

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



3-6 关系的性质

本节关注的是一个集合上的二元关系具有的性质。

【定义 3-6.1】 设R是集合A的二元关系，若对于任意的$x\in A$，均有$<x,x>\in R$，则称**R是自反的**。

$$\text{R是自反的}\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow<x,x>\in R)$$

【定义 3-6.2】 设R是集合A的二元关系，若对于任意的$x\in A$，均有$<x,x>\notin R$，则称**R是反自反的**。

$$\text{R是反自反的}\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow<x,x>\notin R)$$

【定义 3-6.3】设R是集合A的二元关系，若对于任意的$<x, y>\in R$，均有$<y, x>\in R$，则称**R是对称的**。

$$\text{R是对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(<x, y>\in R \to <y, x>\in R)$$

【定义 3-6.4】设R是集合A的二元关系，若$<x, y>\in R$，且$<y, x>\in R$，必有$x = y$，则称**R是反对称的**。

$$\text{R是反对称的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(xRy \wedge yRx \to x = y)$$

【定义 3-6.5】设R是集合A的二元关系，若$<x,y>\in R$，且$<y, z>\in R$，必有$<x, z>\in R$，则称**R是传递的**。

$$\text{R是传递的} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(xRy \wedge yRz \to xRz)$$

【例3-6.1】 设 $A=\{1,2,3,\}$， $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，

$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$， $T=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

试分析A上的关系R、S、T、Φ、A×A，I_A的具有那些性质。

【解】

性质 / 集合	自反	反自反	对称	反对称	传递
R	×	×	×	√	√
S	√	×	√	×	√
T	×	×	×	√	×
Φ	×	√	√	√	√
A×A	√	×	√	×	√
I_A	√	×	√	√	√

- 空集合上空关系与非空集合上的空关系性质相同吗？

  空集合上空关系具有关系的所有性质

  非空集合上空关系具有反自反、对称、反对称、传递性质
- 实数集合上的小于关系、小于等于关系、相等关系具有那些性质？
- 集合上的包含、真包含、相等关系具有那些性质？

关系的性质在关系矩阵及关系图中表现出的特征：

(1)若关系R是自反的,当且仅当关系矩阵对角线的元素皆为1，关系图上每个结点都有自回路。

(2)若关系R是对称的，当且仅当关系矩阵是对称的，关系图上，任两个结点间若有定向弧线,必是成对出现的。

(3)若关系R是反自反的,当且仅当关系矩阵对角线的元素皆为零，关系图上每个结点都没有自回路。

(4)若关系R是反对称的,当且仅当关系矩阵中以主对角线对称的元素不能同时为1,在关系图上两个不同结点间的定向弧线不可能成对出现。

传递的特征较复杂，不易从关系矩阵和关系图中直接判断。

3-7 复合关系和逆关系

【定义 3-7.1】设R是X到Y的关系， S是Y到Z的关系， 则

$$R \circ S=\{\langle x, z\rangle \mid (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S\}$$

称为R和S的复合关系。由R、S求R∘S称为关系的复合运算。

【定义 3-7.2】设R是X到Y的一个关系， 则

$$R^{c}=\{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$$

称为R的逆关系。由R求R^c称为关系的逆运算。

【例3-7.1】 已知X={1,2,3}，Y={a,b,c,d}，Z={3,4,5}

$$R = \{<1,a>, <1,c>, <2,b>, <2,c>,<3,a>,<3,d>\}$$

$$S = \{<a,3>, <a,5>, <b,3>, <b,4>, <d,3>,<d,4>\}$$

求 $R \circ S$， R^c。

【解】 根据定义可求得

$$R \circ S = \{<1,3>, <1,5>, <2,3>, <2,4>,<3,3>,<3,5>,<3,4>\}$$

$$R^c = \{<a,1>, <c,1>, <b,2>, <c,2>,<a,3>,<d,3>\}$$

$R \circ S$是X到Z的关系， R^c 是Y到X的关系。

对于求R◦S，当R、S中元素比较多时，求解比较麻烦、且容易出现错误。

下面我们关系矩阵进行求解。

（1）分别求出R、S的关系矩阵M_R、M_S

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_s=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）利用矩阵乘法，求出$M_R \times M_S$

$$M_R \times M_S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

（3）把$M_R \times M_S$中的非0元素改为1，得到$M_{R \circ S}$

$$M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

（4）求出$R \circ S$

$R \circ S = \{<1,3>, <1,5>, <2,3>, <2,4>, <3,3>, <3,5>, <3,4>\}$

【例3-7.2】已知$X=\{1,2,3,4\}$，

$$R = \{<1,2>, <1,4>, <2,2>,<2,3>\}$$

$$S = \{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$$

$$T = \{<1,2>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <3,3>,<4,2>,<4,3>\}$$

求 $R\circ S$， $S\circ R$， $(R\circ S)\circ T$， $R\circ(S\circ T)$。

【解】 根据定义可求得

$$R\circ S = \{<1,3>, <2,3>, <2,2>\}$$

$$S\circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$$

$$S\circ T = \{<1,2>, <1,4>, <1,3>, <2,3>, <3,1>,<3,2>,<3,3>\}$$

$$(R\circ S)\circ T = \{<1,3>, <2,3>, <2,1>, <2,2>\}$$

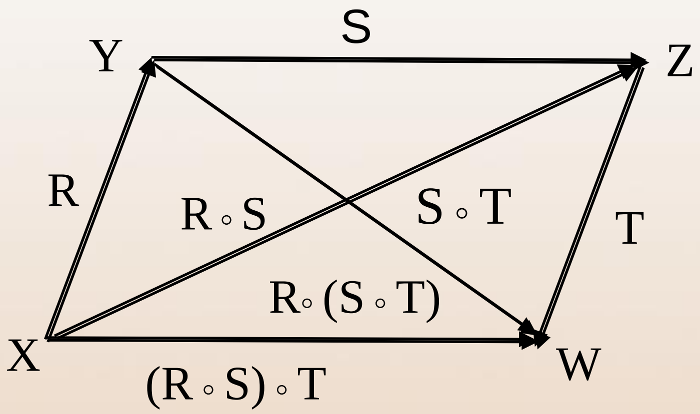
$$R\circ(S\circ T) = \{<1,3>, <2,3>, <2,1>, <2,2>\}$$

从上例可以看出， $R\circ S \neq R\circ S$，即关系的复合运算**不满足交换律**。

【定理3-7.1】 设R是X到Y的关系， S是Y到Z的关系，T 是Z到W的关系，则

$$(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$$

由此可知，关系的复合运算**满足结合律**。



记 $R^n = \underbrace{R\circ R\circ \ldots\ldots \circ R}_{n个} = R^{n-1}\circ R = R\circ R^{n-1}$

【定理 3-7.2】 设R、S都是从A到B的二元关系，则下列各式成立：

(1) $(R\cup S)^c = R^c \cup S^c$

(2) $(R\cap S)^c = R^c \cap S^c$

(3) $(\overline{R})^c = \overline{R^c}$， $\overline{R} = A\times B - R$

(4) $(R - S)^c = R^c - S^c$

【证明】 (1) $\langle x,y\rangle \in (R\cup S)^c$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R\cup S$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R \vee \langle y,x\rangle \in S$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R^c \vee \langle x,y\rangle \in S^c$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R^c \cup S^c$

(3) $\langle x,y\rangle \in (\overline{R})^c$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in \overline{R}$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \notin R$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \notin R^c$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \overline{R^c}$

【定理 3-7.3】 设R是从X到Y的二元关系， S是从Y到Z的二元关系，则

$$(R\circ S)^c = S^c \circ R^c$$

【证明】 (1) $(R\circ S)^c$ 与 $S^c \circ R^c$ 都是Z到X的二元关系，且对任意的

$$<z,x> \in (R\circ S)^c$$

$$\Leftrightarrow <x,z> \in R\circ S$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(<x,y> \in R \wedge <y,z> \in S)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(<y,x> \in R^c \wedge <z,y> \in S^c)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(<z,y> \in S^c \wedge <y,x> \in Rc)$$

$$\Leftrightarrow <z,x> \in S^c \circ R^c$$

故 $(R\circ S)^c = S^c \circ R^c$

【定理 3-7.4】 设R是从A到B的二元关系，则 $R\circ I_B = I_A\circ R = R$。

【定理 3-7.5】 设R、S和T都是A上的二元关系，则：

(1) $R\circ(S\cup T) = R\circ S \cup R\circ T$

(2) $(S\cup T)\circ R = S\circ R \cup T\circ R$

(3) $R\circ(S\cap T) \subseteq R\circ S\cap R\circ T$

(4) $(S\cap T)\circ R = S\circ R\cap T\circ R$

【证明】 只证 (3)

$$<x,y> \in R\circ(S\cap T)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t)\,(<x,t>\in R \wedge <t,y>\in S\cap T\,)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t)\,(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in S\wedge <t,y>\in T)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t)\,((<x,t>\in R \wedge <t,y>\in S)\wedge(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in T))$$

$$\Rightarrow (\exists t)(<x,t>\in R \wedge <t,y>\in S)\wedge(\exists t)\,(<x,t>\in R \wedge <t,y>\in T)$$

$$\Leftrightarrow \ <x,y>\in R\circ S\wedge <x,y>\in R\circ T$$

$$\Leftrightarrow \ <x,y>\in R\circ S \cap R\circ T$$

所以， $R\circ(S\cap T)\subseteq R\circ S\cap R\circ T$

3-8 关系的闭包运算

【定义 3-8.1】设R是非空集合A上的关系，若A上的二元关系R′满足：

(1) $R \subseteq R'$

(2) R′是自反的

(3) 对A上任意的包含R且自反的关系R″，有$R' \subseteq R''$；

则称R′为R的自反闭包，记作r(R)。

在上述定义中，把自反改为对称，就得到对称闭包，记为s(R)。

把自反改为传递，就得到传递闭包，记为t(R)。

【定理 3-8.1】设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup I_A$

(2) $s(R)=R\cup R^c$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

【证明】 (1)

(a) $R\subseteq R\cup I_A$

(b) 由 $I_A\subseteq R\cup I_A$知， $R\cup I_A$是自反的；

(c) 设R'' 是A上包含R的自反关系，则有$R\subseteq R''$ 和$I_A\subseteq R''$，从而有$R\cup I_A\subseteq R''$。

根据闭包的定义，$r(R)= R\cup I_A$。

(3) 按照集合相等来证明 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

(a) 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立

用归纳法证明，对任意正整数n，有$R^n\subseteq t(R)$。

i) n=1时，有$R^1=R\subseteq t(R)$。

ii) 假设 $R^n\subseteq t(R)$成立，则对任意的$<x,y>\in R^{n+1}=R^n\circ R$，

根据定义可以得到，$(\exists t)\,(<x,t>\in R^n\wedge<t,y>\in R)$

$\Rightarrow (\exists t)\,(<x,t>\in t(R)\wedge<t,y>\in t(R))$

$\Rightarrow <x,y>\in t(R)$

故，$R^{n+1}\subseteq t(R)$。

(b) 再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$成立。

对任意的$<x,y> \in R \cup R^2 \cup \ldots$，$<y,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$，则

$<x,y> \in R \cup R^2 \cup \ldots \wedge <y,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$

$\Rightarrow (\exists t)\ (<x,y> \in R^t) \wedge (\exists s)(<y,z> \in R^s)$

$\Rightarrow (\exists t)(\exists s)\ (<x,z> \in R^t \circ R^s)$

$\Rightarrow (\exists t)(\exists s)\ (<x,z> \in R^{t+s})$

$\Rightarrow <x,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$

故，$R \cup R^2 \cup \ldots$是传递的。

根据传递闭包的定义可知，$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$

【例3-8.1】设A={a,b,c,d}, R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>}， 求r(R), s(R), t(R)，并给出其关系图。

【解】

$r(R) = R \cup I_A = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\} \cup \{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>\}$

$= \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>,<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>\}$

$s(R) = R \cup R^c = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\} \cup \{<b,a>,<a,b>,<c,b>,<d,c>,<b,d>\}$

$= \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>,<c,d>,<d,c>,<d,b>,<b,d>\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

离散数学——集合论

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^2}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{r(R)}=\begin{bmatrix}\color{red}{1}&1&0&0\\1&\color{red}{1}&1&0\\0&0&\color{red}{1}&1\\0&1&0&\color{red}{1}\end{bmatrix}$$

$$M_{R^3}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_{s(R)}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&\color{red}{1}\\0&\color{red}{1}&0&1\\0&1&\color{red}{1}&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^4}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

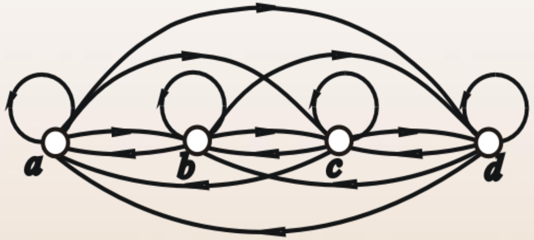
$$M_{R^5}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

关系图：

R

$r(R)$

$s(R)$



$t(R)$

【定理 3-8.2】 设A是非空集合，且|A|=n，R是A上的二元关系，则存在正整数$k \le n$，使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k$。

【定理 3-8.3】 设R是非空集合A上的关系, 则

(1) R是自反的当且仅当 r(R)=R.

(2) R是对称的当且仅当 s(R)=R.

(3) R是传递的当且仅当 t(R)=R.

【定理 3-8.4】 设R_1和R_2是非空集合A上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

3-9 集合的划分与覆盖

【定义 3-9.1】设A是非空集合，$S=\{S_1,S_2,\ldots, S_n\}$，若S满足：

(1) $S_i \subseteq A$， $S_i \neq \Phi$，$i=1,2,\ldots,n$；

(2) $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = A$

则称S是A的一个覆盖。

【定义 3-9.2】设A是非空集合，$S=\{S_1,S_2,\ldots, S_n\}$是A上的一个覆盖，若对任意的$i \neq j$，都有$S_i \cap S_j = \Phi$，则称S是A的一个划分。

【例3-9.1】若 A={a,b,c,d}，说明{{a,b},{c},{d}}，{{a,b,c,d}}，{{a,b},{b,c},{d}}，{{a,b},{c}}，{{a},{b},{c},{d}}哪些是A的划分。

其中，{{a,b,c,d}}与{{a},{b},{c},{d}}分别称为A的最小划分与最大划分。

3-10 等价关系

【定义 3-10.1】设R为非空集合A上的关系， 如果R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的**等价关系**。

【例3-10.1】设 A={1,2,…,8}， 定义A上的关系R：

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$$

证明R是A上的等价关系。

【证明】

(1) $\forall x\in A$, 有 $x\equiv x\ (\mathrm{mod}\ 3)$，则$\langle x,x\rangle\in R$，R是自反的；

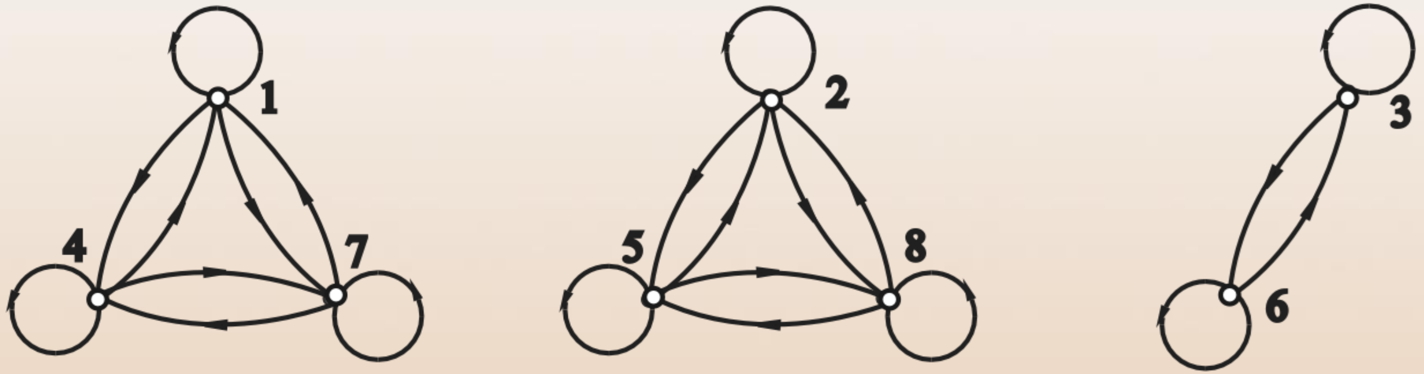
(2) 若$\langle x,y\rangle\in R$，则 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$， 从而有$y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$，即 $\langle y,x\rangle\in R$，R是对称的；

(3) 若$<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，则有$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$

从而有 $x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$，即 $<x,z>\in R$，R是传递的；

由(1)(2)(3)知，R是A上的等价关系。

R的关系图为：



【定义 3-10.2】设R为非空集合A上的等价关系，对任意的$a \in A$，集合

$$[a]_R = \{x \mid \langle a,x \rangle \in R\}$$

称为a关于R的等价类。

对于**例3-10.1**，

$[1]_R=\{1,4,7\}=[4]_R = [7]_R$

$[2]_R=\{2,5,8\}=[5]_R = [8]_R$

$[3]_R=\{3,6\}= [6]_R$

【定理 3-10.1】 设给定集合上的等价关系R，对于$a,b\in A$有，

$$<a,b>\in R \Leftrightarrow [a]_R=[b]_R$$

【证明】 **充分性**

若$<a,b>\in R$，则对任意的$x\in[a]_R$，有

$x\in[a]_R \Rightarrow <a,x>\in R \Rightarrow <x,a>\in R \Rightarrow <x,b>\in R \Rightarrow <b,x>\in R \Rightarrow x\in[b]_R$

故 $[a]_R\subseteq[b]_R$

同理可证，$[b]_R\subseteq[a]_R$

因而有，$[a]_R=[b]_R$

必要性

若$[a]_R=[b]_R$，由于$b\in[b]_R$，从而有 $b\in[a]_R$，故 $<a,b>\in R$

【定义 3-10.3】设R为集合A上的等价关系，则等价类的集合$\{[a]_R | a \in A\}$ 称为A关于R的**商集**，记为A/R。

对于**例3-10.1**， $A/R=\{[1]_R, [2]_R,[3]_R\} = \{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$

【定理 3-10.2】对于集合A上的等价关系R，其商集A/R是集合A的一个划分。

【证明】

（1）$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$

（2） $[a]_R \cap [b]_R=\Phi$，若$a \neq b$

【定理 3-10.3】 集合A上的一个划分，确定A的一个等价关系。

【证明】 设S={$S_1,S_2,\ldots$，S_n}是A的一个划分，则定义A上的关系R

$$R=\{<x,y>|\ (\exists k)\ (x\in S_k\ ,且 y\in S_k\ )\}$$

可以证明，R是A的一个等价关系。

如： 设 A={1,2,3,4,5}，S={{1,2},{3,4},{5}}是A的一个划分，则R确定的A上的等价关系为

$$R = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>, <3,3>,<3,4>,<4,3>,<4,4>,<5,5>\}$$

$$= (\{1,2\}\times\{1,2\}) \cup (\{3,4\}\times\{3,4\}) \cup (\{5\}\times\{5\})$$

【定理 3-10.4】 设 R_1、R_2是集合A上的两个等价关系，则

$$R_1=R_2 \Leftrightarrow A/R_1=A/R_2$$

3-11 相容关系

【定义 3-11.1】设r为非空集合A上的关系，如果r是自反的和对称的，则r称为A上的**相容关系**。

【例3-10.1】设 A={123，245，356，247，398}，定义A上的关系r

$$r=\{\langle x,y\rangle \mid x\text{与}y\text{含有共同的数字}\}$$

证明 r 是A上的相容关系。

【证明】(1) $\forall x\in A$，x与x数字完全一样，则$\langle x,x\rangle\in r$，r是自反的；

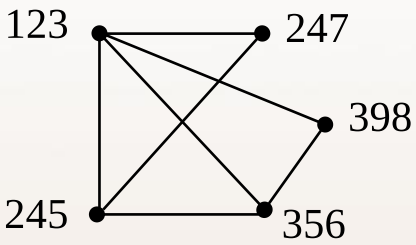
(2) 若$\langle x,y\rangle\in r$，则 x与y含有共同的数字，从而y与x含有共同的数字，即$\langle y,x\rangle\in r$，r是对称的；

由(1) (2) 知，r 是A上的相容关系。

其关系矩阵为

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

简化矩阵



简化图

【定义 3-11.1】设 r 为非空集合A上的相容关系， 如果C$\subseteq$ A，且对与C中的任意两个元素a_1，a_2均有$<a_1,a_2>\in r$，则称C是由r产生的**相容类**。

如：{123，356}，{356，398}，{247}，{123，245，247}都是相容类

其中，{123，245，247}不能再添加元素产生新的相容类，称为**最大相容类**。

{{123，356}，{356，398}，{123，398}，{123，245，247}，{245，356}}

{{123，245，247}，{123，356，398}，{123，245，356}}

都是A的覆盖

但是，{{123，245，247}，{123，356，398}，{123，245，356}}中的每一个元素都是一个最大相容类，称之为 r 产生的A的完全覆盖，记为 $C_r(A)$。

【定理 3-11.1】 给定集合A的覆盖 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，由其确定的关系

$$r = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_n \times A_n)$$

是A上的相容关系。

覆盖与相容关系不是一一对应的。

【定理 3-11.2】 集合A上的相容关系 r 与完全覆盖 $C_r(A)$ 是一一对应的。

3-12 序关系

【定义 3-12.1】设R为非空集合A上的关系， 如果R是自反的、反对称的和传递的，则R 称为A上的偏序关系， 并记为 $\preccurlyeq$。序偶$<A, \preccurlyeq>$ 称为偏序集。

例如：实数集上的小等于关系($\le$)，集合上的包含关系($\subseteq$) 等

【例3-11.1】设 A={2， 3， 6， 8， 12}， 定义A上的关系R

$$R = \{<x,y> \mid x\text{整除}y\}$$

证明 R 是A上的偏序关系。

【证明】

(1) 任意的$x\in A$， x整除x， 故$<x, x>\in R$， R是自反的；

(2) 若$<x, y>\in R$， $<y, x>\in R$， 则x整除y， y整除x。

从而存在正整数m、n，使得$y=mx$，$x=ny$

因而，$y=mny$，得出 $mn=1$，$m=n=1$

故 $x=y$， R是反对称的；

(3) 若$<x, y>\in R$，$<y, z>\in R$，则x整除y，y整除z。

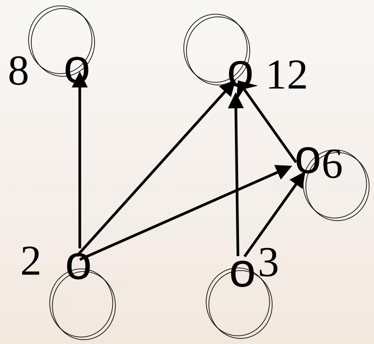
从而存在正整数m、n，使得$y=mx$，$z=ny$

因而，$z=mnx$，得出 x整除z

故 $<x, z>\in R$， R是传递的；

由(1)(2)(3)知，R是A上的偏序关系。

其关系图为



为了更清晰的描绘出元素的层次关系，给出盖住的概念。

【定义 3-12.2】在偏序集$<A, \preccurlyeq>$中，如果$x \preccurlyeq y$, $x \neq y$,且不存在z满足$x \preccurlyeq z$, $z \preccurlyeq y$, 则称y**盖住**x。

记 COV A=$\{< x,y >| y$盖住$x\}$

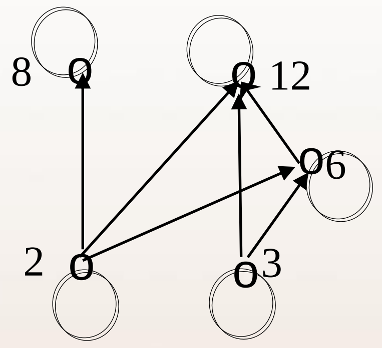
根据盖住关系，可以画出哈斯图，画图规则为：

(1) 用小圆圈代表元素

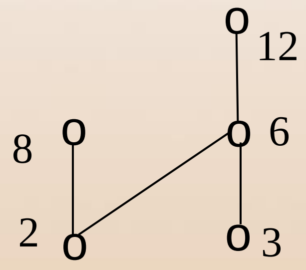
(2) 如果 $x \prec y$，则将代表y的小圆圈画在代表x的小圆圈之上。

(3) 如果y盖住x，则在x与 y之间用直线连接。

其关系图为



其哈斯图为



【例3-11.2】设 A={a,b,c}，证明 <P(A) , ⊆> 是偏序集，画出其哈斯图。

【证明】

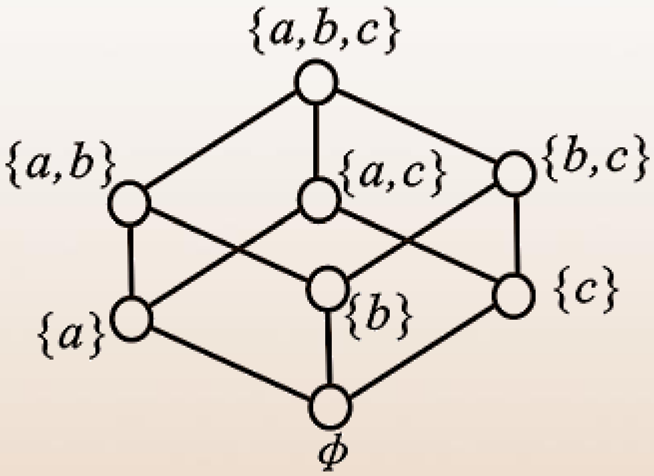
(1) 任意的B∈P(A)，由于 B⊆B ， 故⊆是自反的；

(2) 若 B⊆C， C⊆B，则 B = C， 故⊆是反对称的；

(3) 若 B⊆C， C⊆D，则 B⊆D， 故⊆是传递的。

由(1)(2)(3)知， ⊆是P(A)上的偏序关系。

其哈斯图为



【定义 3-12.3】 设<A, ≼>是一个偏序集，B⊆A，如果B的任意两个元素都存在关系≼，则B称为**链**。如果每两个元素都是无关的，则称为**反链**。

我们约定，若A的子集只有单个元素，则这个子集既是链又是反链。

例如，对于集合{1，2，3，4，5，6}上的整除关系，{1，2，4}是链，{2，3，5}是反链。

【定义 3-12.4】 设<A, ≼>是一个偏序集，如果A是一个**链**，则称<A, ≼> 是全序集 或线序集，≼是**全序关系** 或 **线序关系**。

<I, ≤ >是全序集，线序集

【定义 3-12.5】设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集，$B\subseteq A$， $a\in A$， $b\in B$。

(1) 极小元 b 为B的极小元 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x\in B\wedge x\neq b\wedge x\preccurlyeq b)$

(2) 极大元 b 为B的极大元 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x\in B\wedge x\neq b\wedge b\preccurlyeq x)$

(3) 最小元 b 为B的最小元 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in B\rightarrow b\preccurlyeq x)$

(4) 最大元 b 为B的最大元 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq b)$

(5) 下　界 a 为B的下界 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in B\rightarrow a\preccurlyeq x)$

(6) 上　界 a 为B的上界 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq a)$

(7) 下确界 a 为B的下确界 $\Leftrightarrow$ a是B的下界$\wedge(\forall x)$(x是B的下界$\rightarrow x\preccurlyeq a$)

(8) 上确界 a 为B的上确界 $\Leftrightarrow$ a是B的上界$\wedge(\forall x)$(x是B的上界$\rightarrow a\preccurlyeq x$)

性质：

性质：

(1) 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，可能存在多个。

(2) 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定唯一。

(3) 最小元一定是极小元，最大元一定是极大元。

(4) 孤立结点既是极小元，也是极大元。

(5) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在。

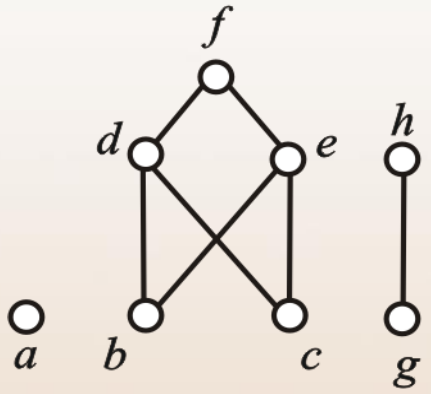
(6) 下界、上界如果存在，不一定唯一。

(7) 下确界、上确界如果存在，一定唯一。

(8) 集合的最小元是其下界，最大元是其上界；反之不对.

【例3-11.3】设<A,≼>是偏序集，哈斯图如下所示，求其的极小元、最小元、极大元、最大元。设B＝{b, c, d }, 求B的下界、上界、下确界、上确界.

【解】



极小元：a, b, c, g

极大元：a, f, h

没有最小元与最大元

B的下界和下确界都不存在

上界有 d 和 f

上确界为 d

【定义 3-12.5】 设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$是一个偏序集，若A的任意非空子集都存在最小元素，则称$\langle A, \preccurlyeq\rangle$为**良序的**。

如：$\langle N, \leq\rangle$是良序的，但$\langle I, \leq\rangle$不是良序的。

【定理 3-12.1】 良序集一定是全序集。

【定理 3-12.2】 有限全序集一定是良序集。