第四章 函数

4-1 函数的概念

【定义 4-1.1】 设X和Y是两个集合，f 是X到Y的一个关系，如果对于任意的 $x\in X$，均有唯一的 $y\in Y$，使得 $\langle x,y\rangle\in f$，则称 f 是X到Y的一个**函数**(或映射)。

记作 f：$X\to Y$

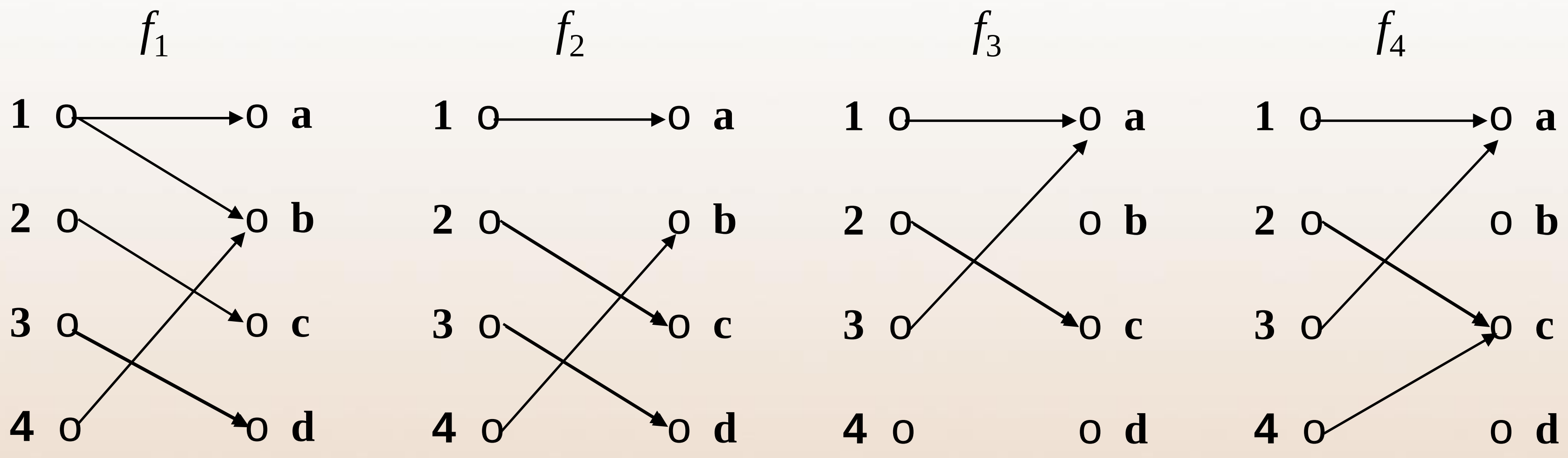
y称作x在 f 作用下的象，x称为y的原象，记作 $f(x)=y$。

注意：

(1) 函数的定义域为X，即 **dom f =X**；

(2) 一个$x\in X$只能对应**唯一的** $y\in Y$。

【例4-1.1】设X={1,2,3,4}，Y={a,b,c,d}，f_1、f_2、f_3 、f_4均为X到Y的关系，关系图如下，判断哪些为X到Y的函数。



【解】 f_2、f_4为X到Y的函数

【定义 4-1.2】设f、g为函数，若满足

(1) $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, g$

(2) 任意的 $x \in \mathrm{dom}\, f$，都有$f(x)=g(x)$

则称 f 与 g **相等**，记为 $f = g$ 。

【例4-1.2】设 X={1,2,3,4}，Y={a,b,c}，X到Y有多少个不同的函数？

【解】X到Y的关系是X×Y的子集，共有$2^{4\times3}$个。

在这些关系中有多少个不同函数呢？

函数要求定义域为X，每一个$x\in$X，有且只有一个$y\in$Y与其对应。而每一个$x\in$A ，在Y中可以有3种选择，因而不同函数的个数为：

$3\times3\times3\times3=3^4$

对于一般情况，若|X|=m，|Y|=n，则

(1) X到Y的不同关系有2^{mn}

(2) X到Y的不同函数有n^m，用Y^X表示X到Y所有函数的集合。

【定义 4-1.3】设f是X到Y的函数，如果对任意的x_1，$x_2 \in X$，有

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称f是X到Y的**单射** (入射)。

【定义 4-1.4】设f是X到Y的函数，如果对任意的$y \in Y$，均存在$x \in X$，使得$f(x)=y$，则称f是X到Y的**满射**。

即 f是X到Y的满射$\Leftrightarrow \text{ran} f = Y$

f的象(值域)也可记为：$R_f=\{ y \mid (\exists x)(x \in X \wedge f(x)=y) \}$

【定义 4-1.5】 设 f 是X到Y的函数，如果 f 既是单射，又是满射，则称 f 是X到Y的**双射**(或一一映射)。

【例4-1.3】 判断下面函数是否为单射、满射或 双射，为什么?

(1) $f: R \to R$， $f(x) = -x^2+2x-1$

(2) $f: Z^+ \to R$， $f(x) = \ln x$， Z^+为正整数集

(3) $f: R \to Z$， $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) $f: R \to R$， $f(x)=2x+1$

(5) $f: R^+ \to R^+$， $f(x)=(x^2+1)/x$， 其中R^+为正实数集。

【解】 (1) 在x=1取得极大值0，既不是单射也不是满射的

(2) 是单调上升的， 是单射，但不满射。

(3) 是满射的，但不是单射的，例如 $f(1.5) = f(1.2)=1$

(4) 是满射、单射，也是双射。

(5) 有极小值 $f(1)=2$， 该函数既不是单射的也不是满射的

【定理 4-1.1】 设 f 是X到Y的映射，则

(1) 若f 是单射，则 $|X| \le |Y|$;

(2) 若f 是满射，则 $|Y| \le |X|$;

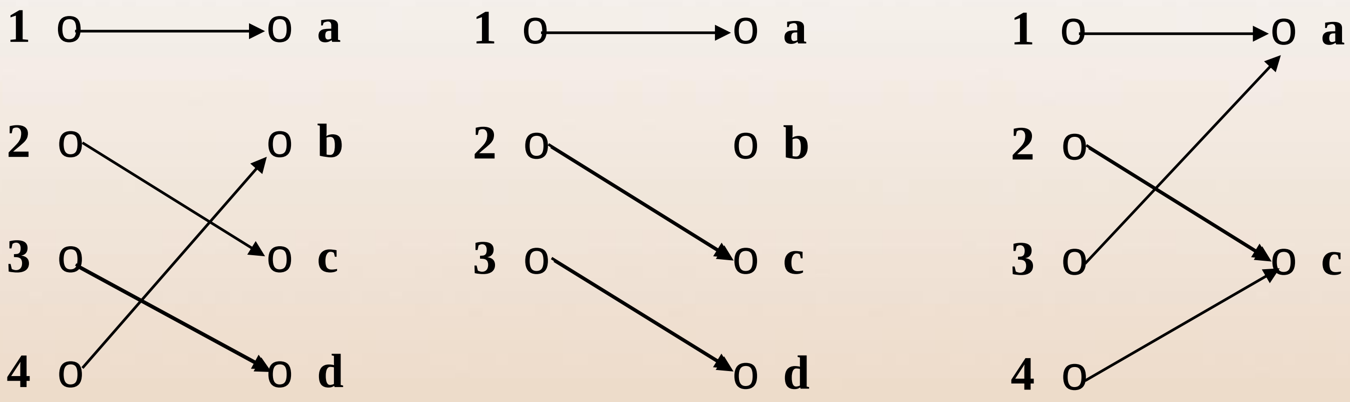
(3) 若f 是双射，则 $|X| = |Y|$。

【定理 4-1.2】 令X和Y都是**有限集**，若$|X|=|Y|$，则 f 是单射$\Leftrightarrow$ f 是满射。

4-2 复合函数和逆函数

【定理 4-2.1】 若 $f: X \to Y$ 的双射，则 f^c 是 $Y \to X$ 的双射。

该函数称为 f 的**逆函数**，记为 f^{-1}。



【定理 4-2.2】 设函数 $f: X \to Y$， $g: Y \to Z$，则

$$g \circ f = \{<x, z> \mid (\exists y)(f(x) = y \wedge g(y) = z\}$$

是 X→Z 的函数。

该函数称为 f 与 g 的**复合函数**。

注意： 复合函数与复合关系表示的不同

从定理 4-2.2可以得出 $g \circ f(x) = g(f(x))$

【定理 4-2.3】 令 $g \circ f$ 是一个复合函数，则

(1) 若 f 和 g 是满射的， 则 $g \circ f$ 也是满射的。

(2) 若 f 和 g 是单射的， 则 $g \circ f$ 也是单射的。

(3) 若 f 和 g 是双射的， 则 $g \circ f$ 也是双射的。

【证明】设 $f: A \to B$， $g: B \to C$，则 $g \circ f: A \to C$

(1) 对任意的$c \in C$， 由于g是满射， 则存在 $b \in B$，使得 $g(b)=c$。

对于这个b，由于 f 是满射，则存在 $a \in A$，使得 $f(a)=b$。

根据函数复合的定义，则 $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

故， $g \circ f$ 是满射的。

(2) 假设存在$a_1, a_2 \in A$，使得 $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$

则 $g(f(a_1))=g(f(a_2))$

由于g是单射，故 $f(a_1) = f(a_2)$；又由于f 是单射，所以 $a_1=a_2$。

故， $g \circ f$ 是单射的。

(3) 由(1)和(2)得证

【定义 4-2.2】

(1)设 $f: X \to Y$， 如果存在$y_0 \in Y$，使得对任意的 $x \in X$，都有 $f(x)=y_0$， 则称 f 是**常函数**。

(2) 称 X上的恒等关系I_X为X上的**恒等函数。**即，对所有的$x \in X$，都有$I_X(x)=x$。

【定理 4-2.4】 设 $f: X \to Y$，则 $I_Y \circ f = f \circ I_X = f$ 。

【定理 4-2.5】 若 $f: X \to Y$， $g: Y \to Z$均有逆函数，则

(1) $f^{-1} \circ f = I_X$ ， $f \circ f^{-1} = I_Y$

(2) $(f^{-1})^{-1} = f$

(3) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

4-4 基数的概念

【定义 4-4.1】 设A、B是两个集合，如果A到B存在双射，就称A和B是**等势**的。记作A~B。

例如：(1) I ~ E

(2) $\{1,2,3\} \sim \{a,b,c\}$

【定理 4-4.1】 集合簇上的等势关系是一个等价关系。

【定义 4-4.2】 若存在整数n，使得$\{0,1,\ldots,n\text{-}1\}$与A等势，则称A是**有限集**，否则是**无限的**。

$\{0,1,\ldots,n\text{-}1\}$称为N的一个**初始段**。

【定理 4-4.2】 自然数集合N是无限的。

【证明】 若N是有限的，则存在整数n，使得$\{0,1,\ldots,n-1\}$与N等势。

因而，存在双射函数 $f:\{0,1,\cdots,n-1\}\to \mathrm{N}$。

设 $k=\max\{f(0), f(1), \cdots, f(n-1)\}+1$

则 $k\in \mathrm{N}$，但不存在 $x\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，使得$f(x)=k$。

这与 f 是双射函数矛盾。

【定义 4-4.2】 基数是描述集合大小的一个概念，集合A的基数用K[A]表示。若A~B，则K[A]= K[B]。

有限集A的基数为其元素个数，即 K[A] =|A|。

对于无限集，其基数是什么呢？

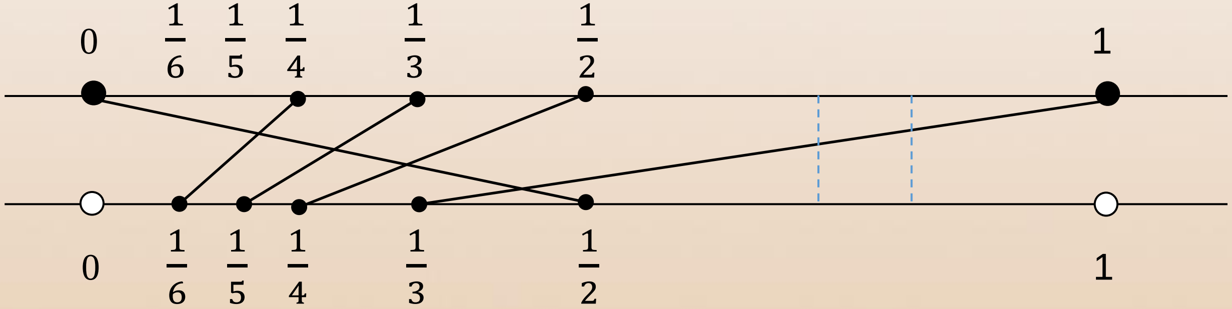
【例4-4.1】 证明区间[0,1]与(0,1)基数相同。

【证明】 设集合 A= $\{0\,,1\,,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$，A⊆[0,1]

定义 $f:[0,1]\to(0,1)$，使得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x=0\\[2ex] \dfrac{1}{n+2} & x=\dfrac{1}{n}\quad n\geq 1\\[2ex] x & x\in[0,1]-A\end{cases}$$

则 f 是双射。



4-4 可数集与不可数集

有限集的基数为其元素个数，无限集的基数是什么？都相同吗？

【定义 4-5.1】与自然数N集合**等势**的集合称为可数集。其基数用$\aleph_0$表示。

例如：$\{1,2,4,8,\cdots,2^n,\cdots\}$，$\{0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$

【定理 4-5.1】A为可数集的充要条件是其元素可排列为

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

的形式。

【定理 4-5.2】任意无限集必存在可数子集。

【定理 4-5.3】任意无限集必存在与其等势的真子集。

【证明】设无限集为M，根据定理4.5.2，含有可数子集A={a_1, a_2, ⋯ , a_n ,⋯}。

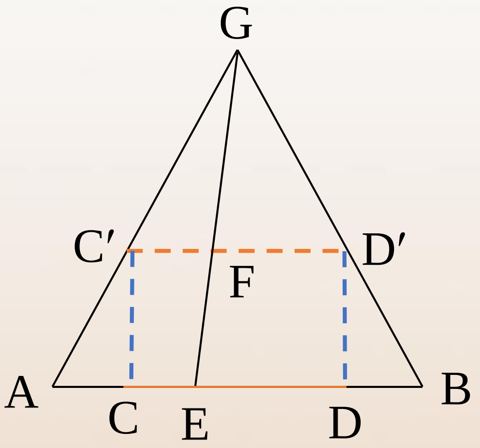
设 B=M-A

定义函数 f : M→ M-{a_1}

$$f(x)=\begin{cases} a_{n+1} & x=a_n \\ x & x\in B \end{cases}$$

可以证明 f 是双射。

故 M ~ M-{a_1}



【定理 4-5.4】可数集的任何无限子集是可数的。

【定理 4-5.5】若A是可数的，则A×A也是可数的。

【证明】设A= $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$，则 A×A可表示为

$$\begin{bmatrix} \langle a_0,a_0\rangle & \langle a_0,a_1\rangle & \langle a_0,a_2\rangle & \langle a_0,a_3\rangle & \langle a_0,a_4\rangle & \cdots \\ \langle a_1,a_0\rangle & \langle a_1,a_1\rangle & \langle a_1,a_2\rangle & \langle a_1,a_3\rangle & \langle a_1,a_4\rangle & \cdots \\ \langle a_2,a_0\rangle & \langle a_2,a_1\rangle & \langle a_2,a_2\rangle & \langle a_2,a_3\rangle & \langle a_2,a_4\rangle & \cdots \\ \langle a_3,a_0\rangle & \langle a_3,a_1\rangle & \langle a_3,a_2\rangle & \langle a_3,a_3\rangle & \langle a_3,a_4\rangle & \cdots \\ \langle a_4,a_0\rangle & a_4,a_1\rangle & \langle a_4,a_2\rangle & \langle a_4,a_3\rangle & \langle a_4,a_4\rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

对于A×A元素 $\langle a_{i_1},a_{j_1}\rangle$、$\langle a_{i_2},a_{j_2}\rangle$ 按照下列方法进行排列：

(1) $i_1+j_1< i_2+j_2$， $\langle a_{i_1},a_{j_1}\rangle$ 排在 $\langle a_{i_2},a_{j_2}\rangle$ 之前；

(2) $i_1+j_1= i_2+j_2$， $i_1< i_2$， $\langle a_{i_1},a_{j_1}\rangle$ 排在 $\langle a_{i_2},a_{j_2}\rangle$ 之前。

定义 $f: A\times A \to N$ 如下：

$$f(i,j) = \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+i$$

4-6 基数的比较

证明两个集合基数相等，需要构造两个集合间的双射，在许多情况下这个是非常困难的。下面给出一个证明基数相等的简单方法。

【定义 4-6.1】若从集合A到集合B存在单射，则称A的基数不大于B的基数，记作K[A]≤ K[B]。若从集合A到集合B存在单射，但不存在双射，则称A的基数小于B的基数，记作K[A]<K[B]。

【定理 4-6.1】对于任意集合A、B，则以下三条一定有且仅有一条成立。

$$K[A]<K[B]$$

$$K[A]>K[B]$$

$$K[A]=K[B]$$

【定理 4-6.2】 对于集合A、B，若K[A]≤ K[B]且K[B]≤ K[A]，则K[A]=K[B]。

【例4-6.1】 证明区间[0,1]与(0,1)基数相同。

【证明】 定义函数 f 和 g

f: (0,1) → [0,1]　$f(x)=x$

g: [0,1] → (0,1)　$g(x)=0.5x+0.25$

【定理 4-6.3】 设A是有限集，则K[A] < $\aleph_0$ < $\aleph$。

【定理 4-6.4】 设A是无限集，则 $\aleph_0$ ≤K[A]。

【定理 4-6.5】 设M是一个集合，T=P(M)，则K[M] < K[T]。