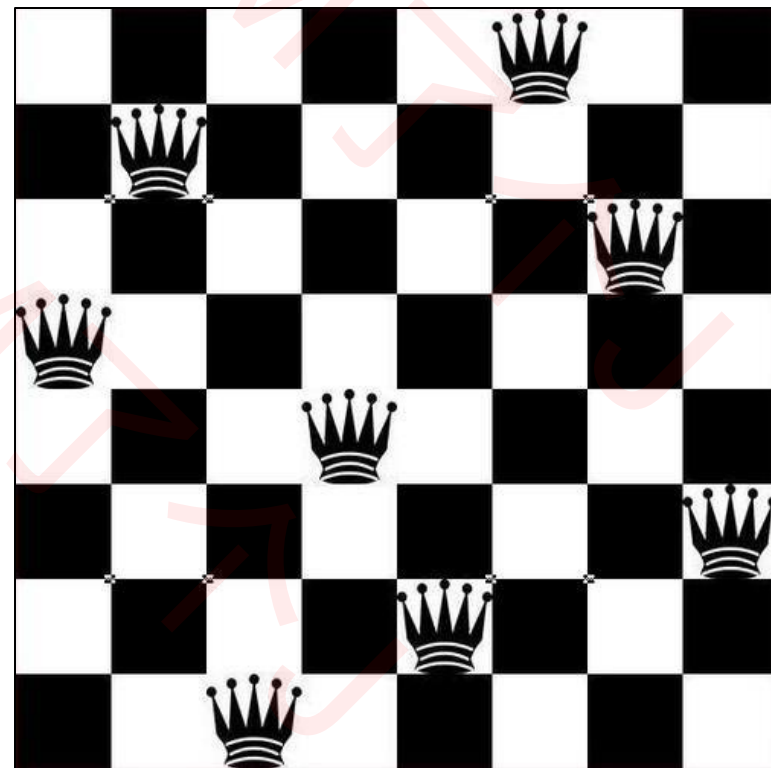
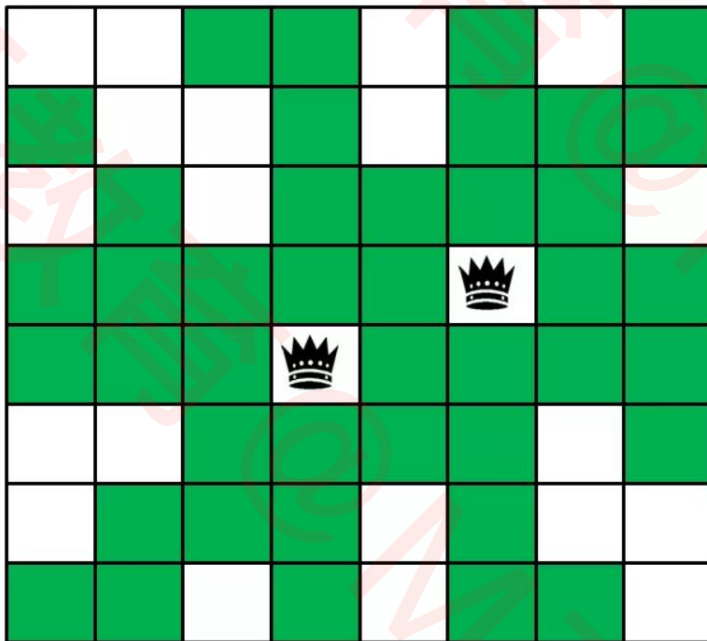
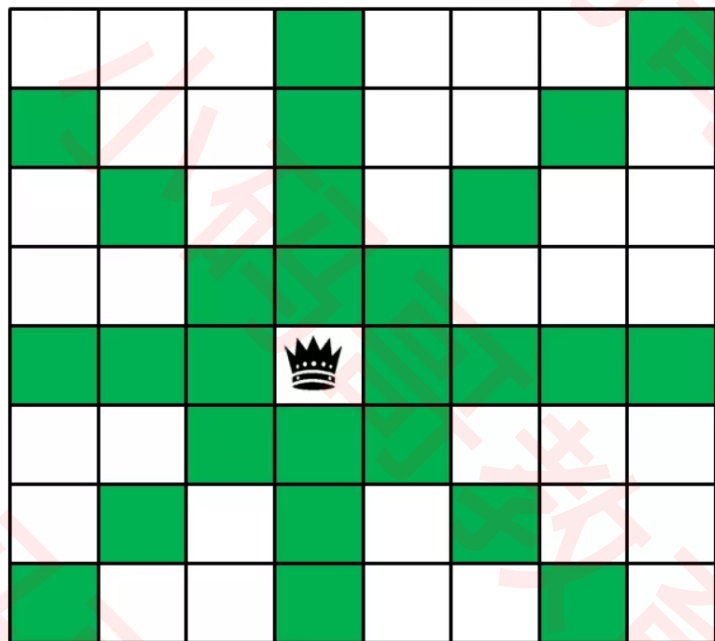


练习 - 八皇后问题 (Eight Queens)

■ 八皇后问题是一个古老而著名的问题

□ 在8x8格的国际象棋上摆放八个皇后，使其不能互相攻击：任意两个皇后都不能处于同一行、同一列、同一斜线上

□ 请问有多少种摆法？



■ leetcode_51_N皇后: <https://leetcode-cn.com/problems/n-queens/>

■ leetcode_52_N皇后 II: <https://leetcode-cn.com/problems/n-queens-ii/>

八皇后问题的解决思路

■ 思路一：暴力出奇迹

□ 从 64 个格子中选出任意 8 个格子摆放皇后，检查每一种摆法的可行性

□ 一共 C_{64}^8 种摆法（大概是 $4.4 * 10^9$ 种摆法）

$$A_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m}$$

■ 思路二：根据题意减小暴力程度

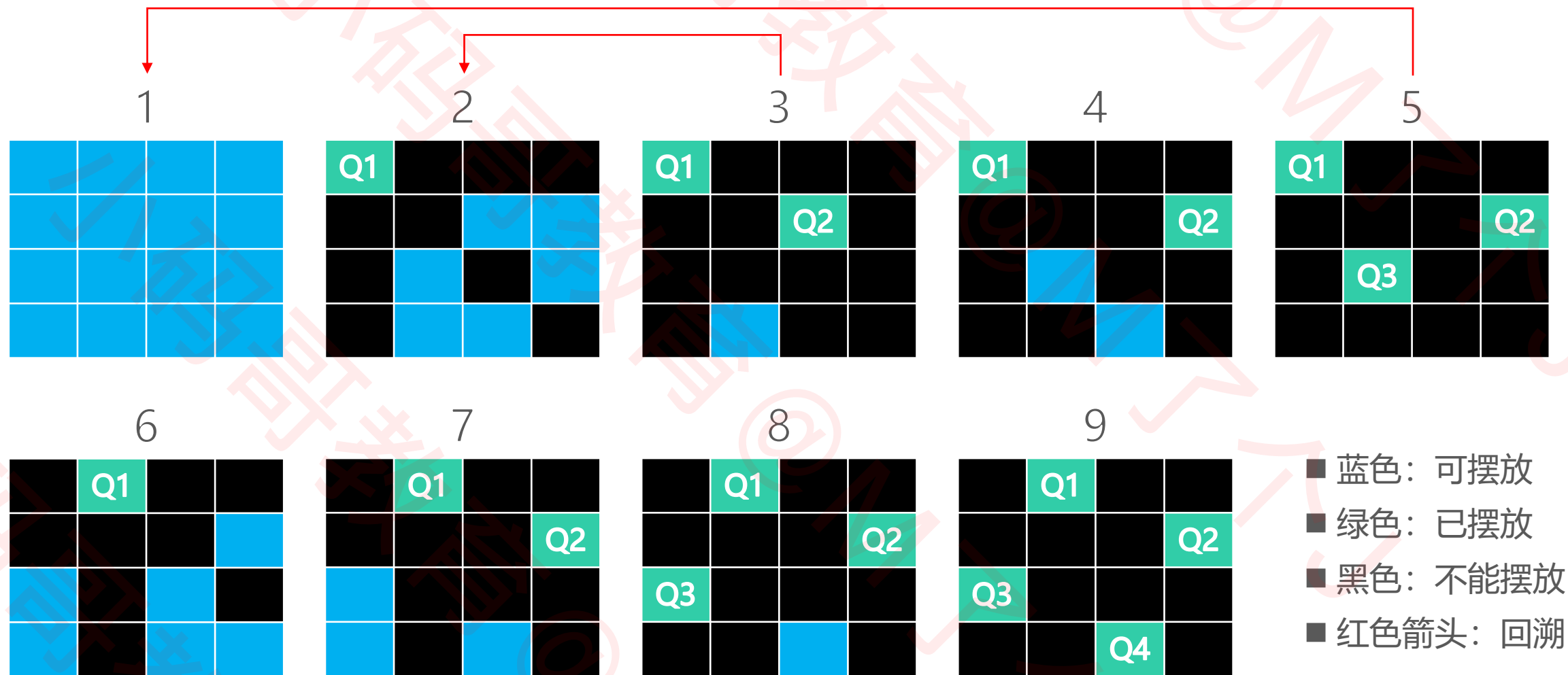
□ 很显然，每一行只能放一个皇后，所以共有 8^8 种摆法（16777216 种），检查每一种摆法的可行性

■ 思路三：回溯法

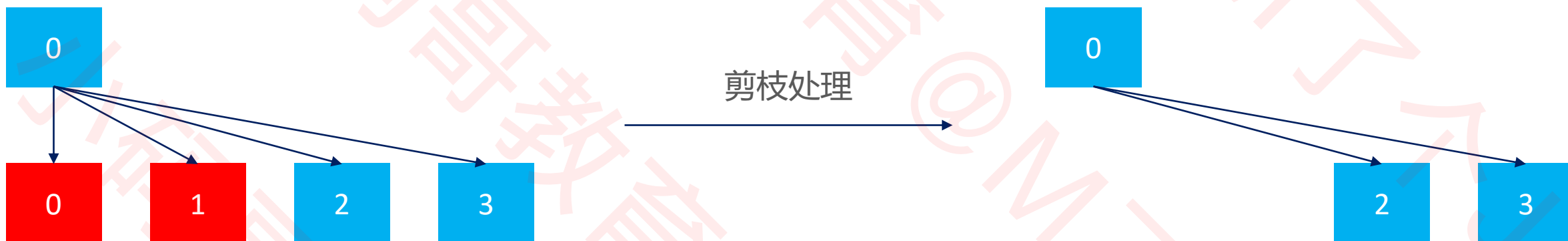
□ 回溯 + 剪枝

四皇后 - 回溯法

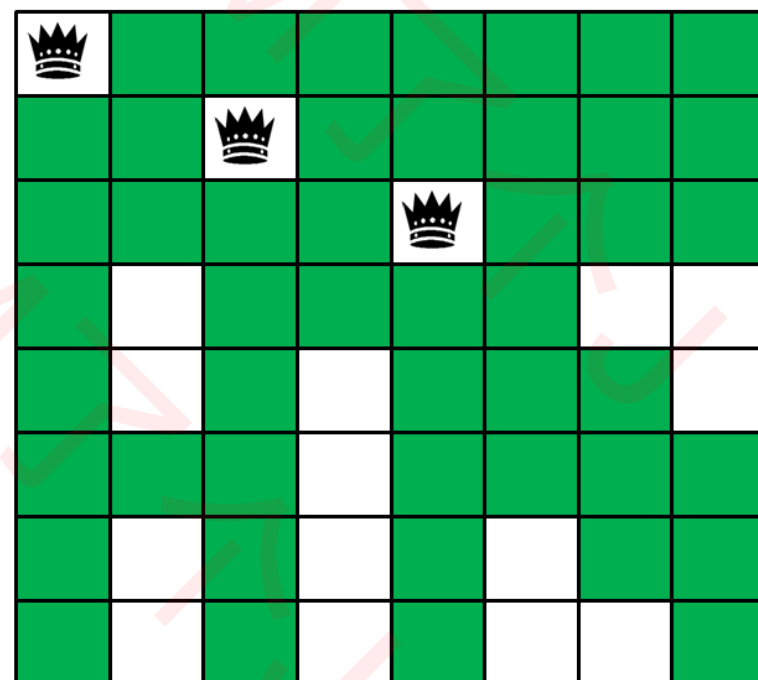
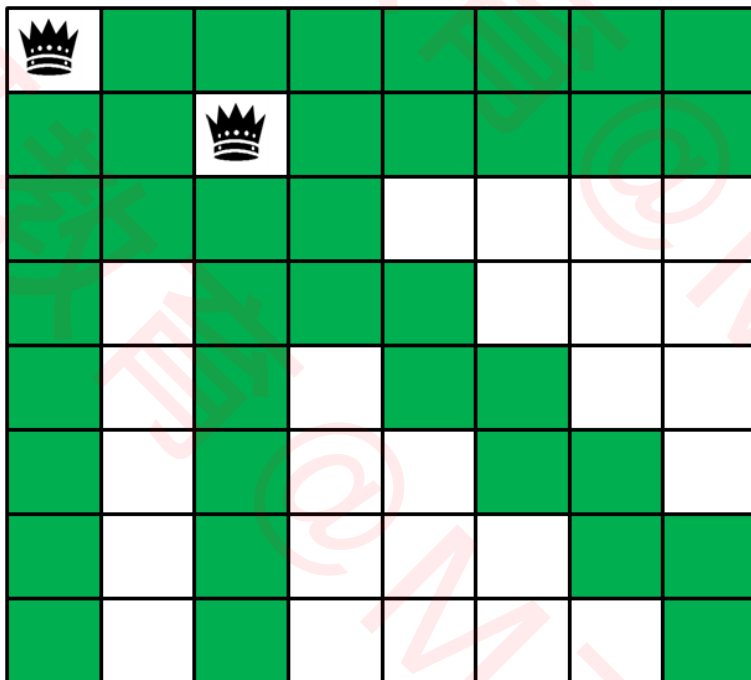
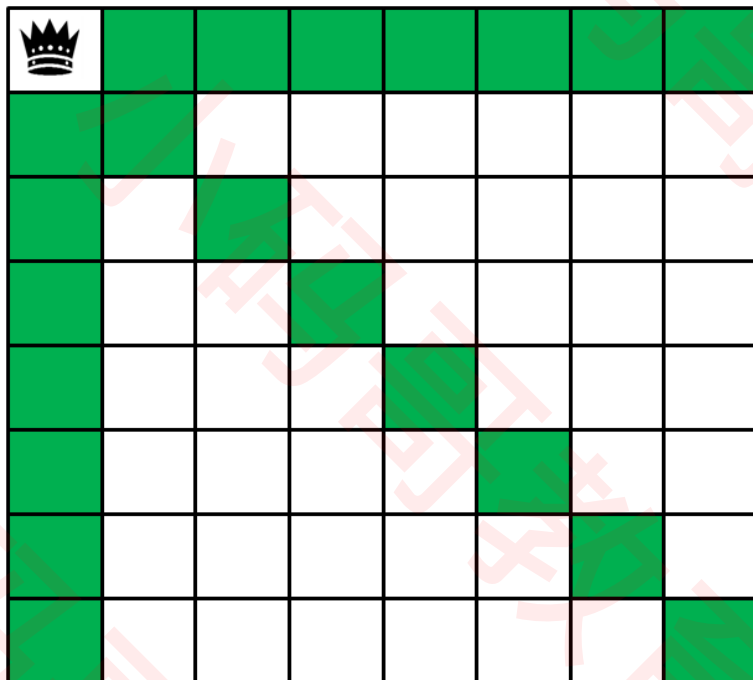
■ 在解决八皇后问题之前，可以先缩小数据规模，看看如何解决四皇后问题



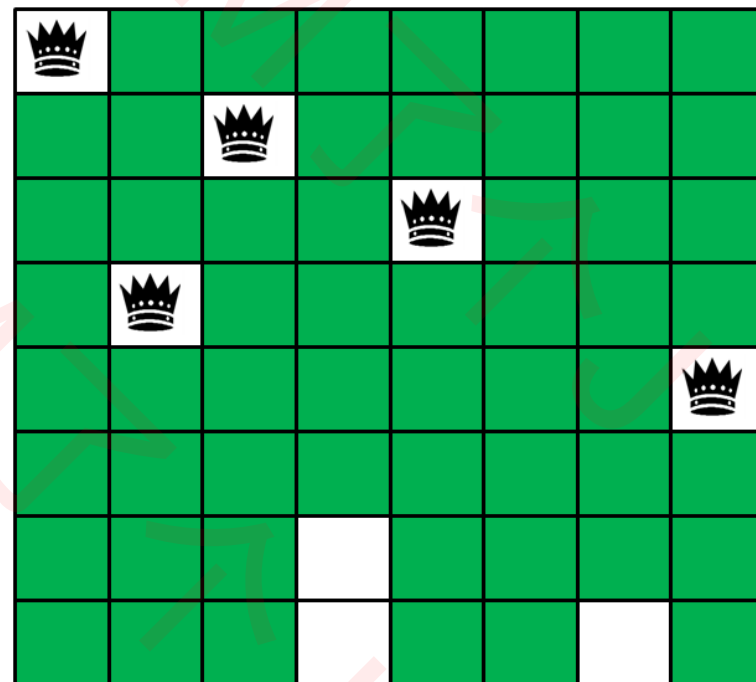
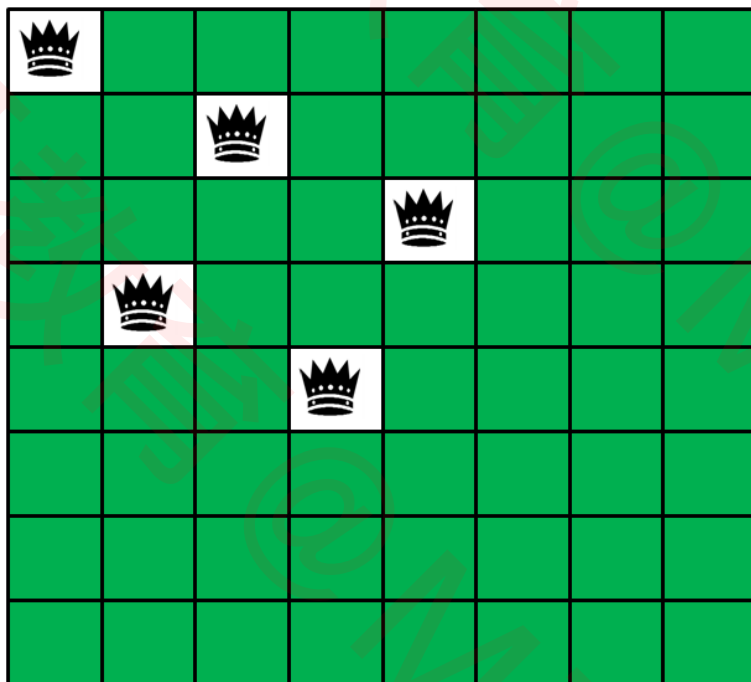
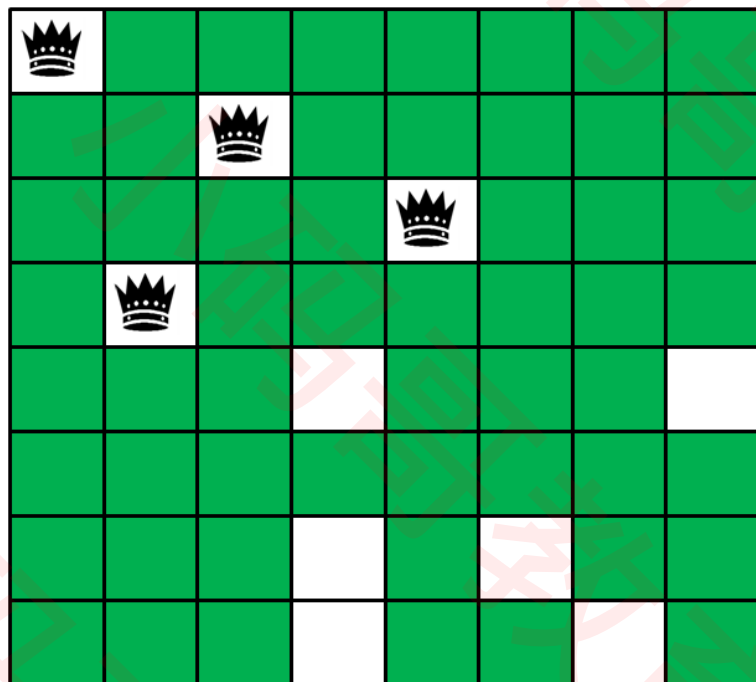
四皇后 - 剪枝 (Pruning)



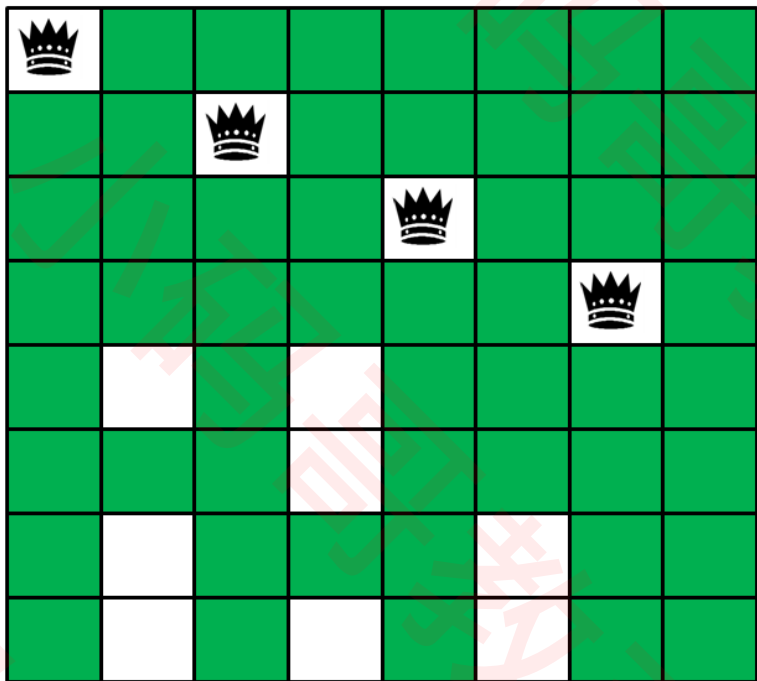
八皇后 - 回溯法1



八皇后 - 回溯法2



八皇后 - 回溯法3



八皇后实现 - 合法性检查

```
/**
 * 存放每一个皇后的列号（在第几列）
 */
private int[] queues;
/**
 * 一共有多少种合理的摆法
 */
private int ways;
```

```
/**
 * 检查第row行第col列是否可以摆放皇后
 */
private boolean isValid(int row, int col) {
    for (int i = 0; i < row; i++) {
        if (queues[i] == col) return false;
        if (row - i == Math.abs(col - queues[i])) return false;
    }
    return true;
}
```


八皇后实现 - 打印

```
/**
 * 显示皇后的摆放情况
 */
void show() {
    for (int row = 0; row < queues.length; row++) {
        for (int col = 0; col < queues.length; col++) {
            if (queues[row] == col) {
                System.out.print(1);
            } else {
                System.out.print(0);
            }
            System.out.print(" ");
        }
        System.out.println();
    }
    System.out.println("-----");
}
```

八皇后实现 - 从某一行开始摆放皇后

```
/**
 * 从第 row 行开始摆放皇后
 */
void place(int row) {
    if (row == queues.length) {
        ways++;
        show();
        return;
    }
    for (int col = 0; col < queues.length; col++) {
        if (isValid(row, col)) {
            queues[row] = col;
            place(row + 1);
        }
    }
}
```

八皇后实现 - 摆放所有皇后

```
void placeQueens(int count) {  
    if (count < 1) return;  
    queues = new int[count];  
  
    place(0);  
    System.out.println(count + "皇后一共有" + ways + "种摆法");  
}
```

```
0 1 0 0  
0 0 0 1  
1 0 0 0  
0 0 1 0
```

```
-----  
0 0 1 0  
1 0 0 0  
0 0 0 1  
0 1 0 0
```

4皇后一共有2种摆法

八皇后优化 - 成员变量

```
/**
 * 标记着某一列是否有皇后了
 */
boolean[] cols;
/**
 * 标记着某一对角线是否有皇后了（左上角->右下角, left top -> right bottom）
 */
boolean[] leftTop;
/**
 * 标记着某一对角线是否有皇后了（右上角->左下角, right top -> left bottom）
 */
boolean[] rightTop;
/**
 * 一共有多少种合理的摆法
 */
int ways;
```

八皇后优化 - 从某一行开始摆放皇后

```
/**
 * 从第 row 行开始摆放皇后
 */
void place(int row) {
    if (row == cols.length) {
        ways++;
        return;
    }
    for (int col = 0; col < cols.length; col++) {
        if (cols[col]) continue;
        int ltIndex = row - col + cols.length - 1;
        if (leftTop[ltIndex]) continue;
        int rtIndex = row + col;
        if (rightTop[rtIndex]) continue;
        cols[col] = leftTop[ltIndex] = rightTop[rtIndex] = true;
        place(row + 1);
        cols[col] = leftTop[ltIndex] = rightTop[rtIndex] = false;
    }
}
```

八皇后优化 - 摆放所有皇后

```
/**
 * 摆放count个皇后
 */
void placeQueens(int count) {
    if (count < 1) return;
    cols = new boolean[count];
    leftTop = new boolean[(count << 1) - 1];
    rightTop = new boolean[leftTop.length];

    place(0);
    System.out.println(count + "皇后一共有" + ways + "种摆法");
}
```

八皇后优化 - 对角线

■ 左上角 -> 右下角的对角线索引: $\text{row} - \text{col} + 7$

■ 右上角 -> 左下角的对角线索引: $\text{row} + \text{col}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	7	6	5	4	3	2	1	0
1	8	7	6	5	4	3	2	1
2	9	8	7	6	5	4	3	2
3	10	9	8	7	6	5	4	3
4	11	10	9	8	7	6	5	4
5	12	11	10	9	8	7	6	5
6	13	12	11	10	9	8	7	6
7	14	13	12	11	10	9	8	7

0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1	2	3	4	5	6	7	0
1	2	3	4	5	6	7	8	1
2	3	4	5	6	7	8	9	2
3	4	5	6	7	8	9	10	3
4	5	6	7	8	9	10	11	4
5	6	7	8	9	10	11	12	5
6	7	8	9	10	11	12	13	6
7	8	9	10	11	12	13	14	7

八皇后优化 - 位运算

- 可以利用位运算进一步压缩八皇后的空间复杂度

```
/**
 * 标记着某一列是否有皇后了
 */
byte cols;
/**
 * 标记着某一对角线是否有皇后了（左上角->右下角, left top -> right bottom）
 */
short leftTop;
/**
 * 标记着某一对角线是否有皇后了（右上角->左下角, right top -> left bottom）
 */
short rightTop;
/**
 * 一共有多少种合理的摆法
 */
int ways;
```


八皇后优化 - 位运算

```
/**
 * 从第 row 行开始摆放皇后
 */
void place(int row) {
    if (row == 8) {
        ways++;
        return;
    }
    for (int col = 0; col < 8; col++) {
        int colV = 1 << col;
        if ((cols & colV) != 0) continue;
        int ltV = 1 << (row - col + 7);
        if ((leftTop & ltV) != 0) continue;
        int rtV = 1 << (row + col);
        if ((rightTop & rtV) != 0) continue;
        cols |= colV;
        leftTop |= ltV;
        rightTop |= rtV;
        place(row + 1);
        cols &= ~colV;
        leftTop &= ~ltV;
        rightTop &= ~rtV;
    }
}
```

```
void place8Queens() {
    place(0);
    System.out.println("8皇后一共有" + ways + "种摆法");
}
```