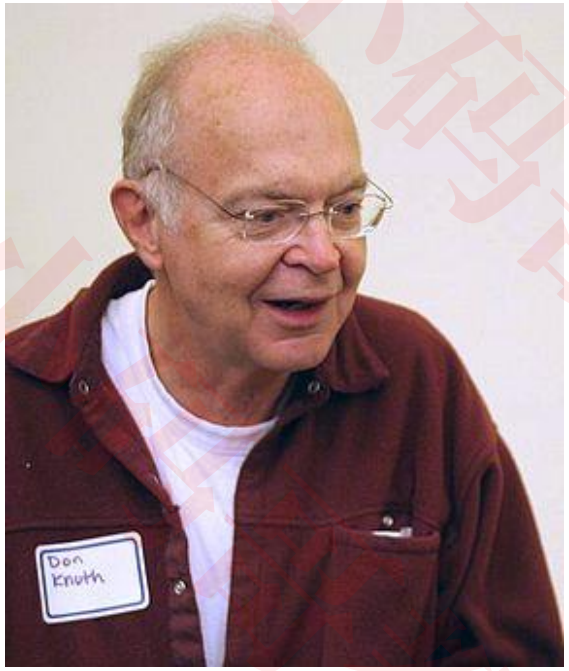
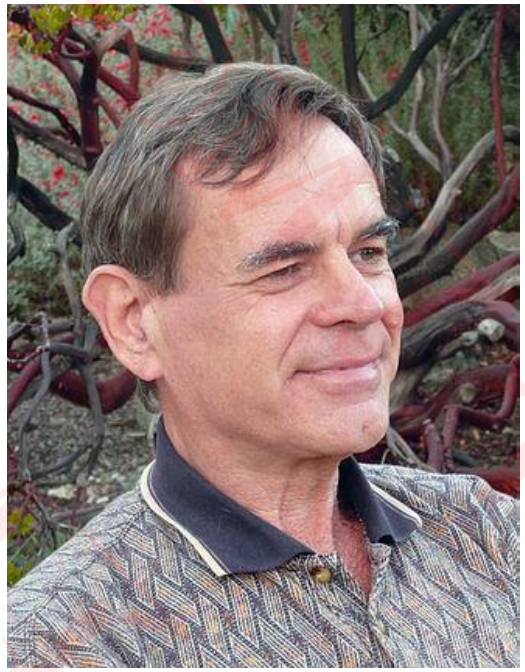
KMP

- KMP 是 Knuth–Morris–Pratt 的简称（取名自3位发明人的名字），于1977年发布



Donald Knuth

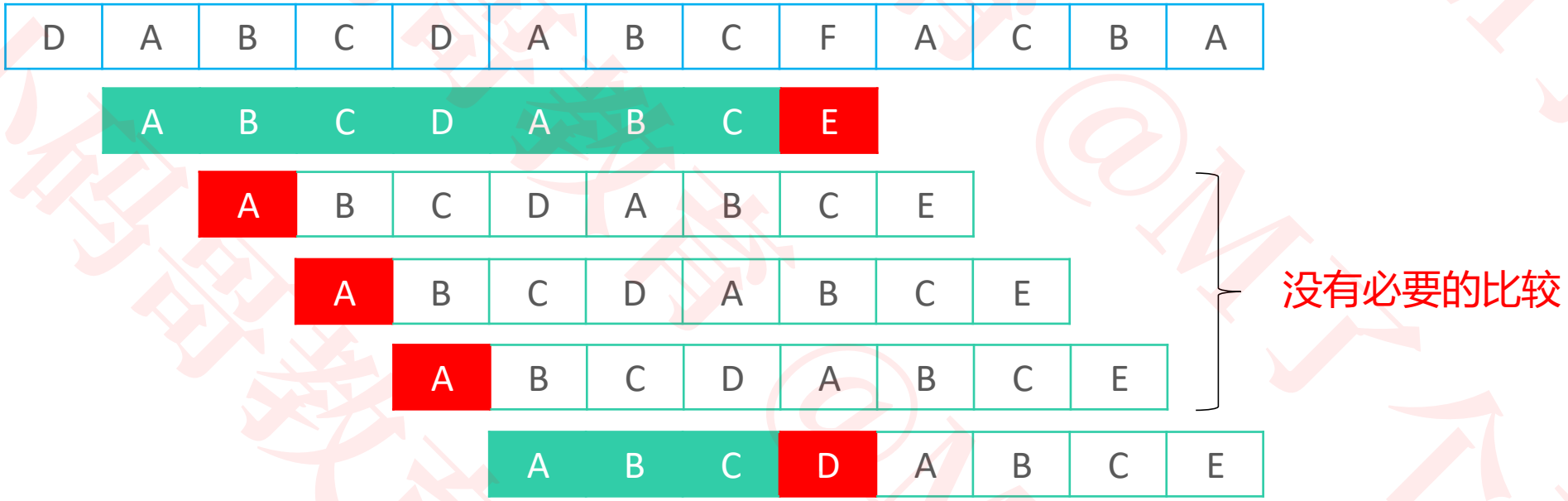
James Hiram Morris



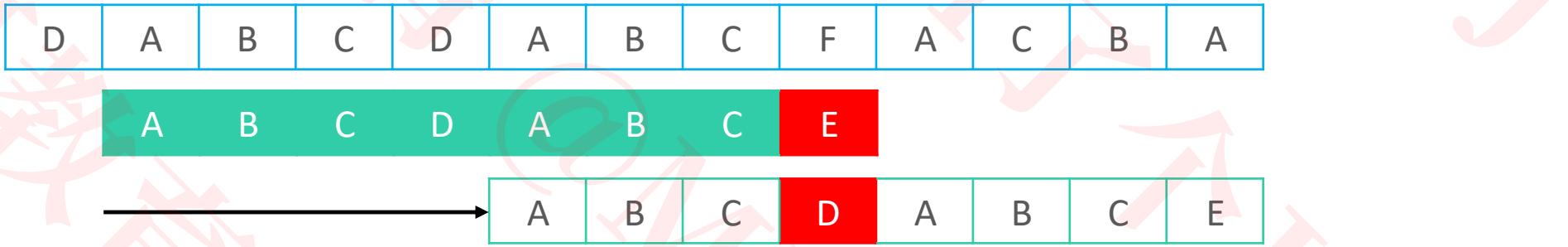
Vaughan Pratt

蛮力 vs KMP

蛮力算法



KMP算法

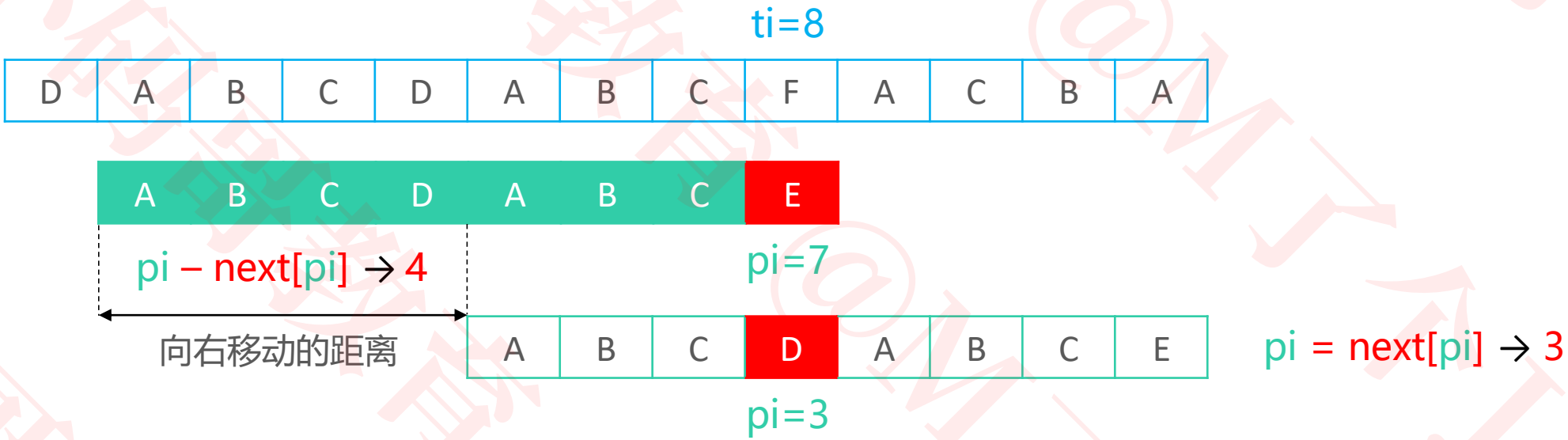


■ 对比蛮力算法，KMP的精妙之处：充分利用了此前比较过的内容，可以很聪明地跳过一些不必要的比较位置

KMP – next表的使用

- KMP 会预先根据模式串的内容生成一张 next 表（一般是个数组）

模式串 "ABCDABCE" 的 next 表								
模式串字符	A	B	C	D	A	B	C	E
索引	0	1	2	3	4	5	6	7
元素	-1	0	0	0	0	1	2	3



KMP – next表的使用

模式串 "ABCDABCE" 的 next 表								
模式串字符	A	B	C	D	A	B	C	E
索引	0	1	2	3	4	5	6	7
元素	-1	0	0	0	0	1	2	3

ti=5

D	A	B	C	C	B	B	C	F	A	C	B	A

A	B	C	D	A	B	C	E

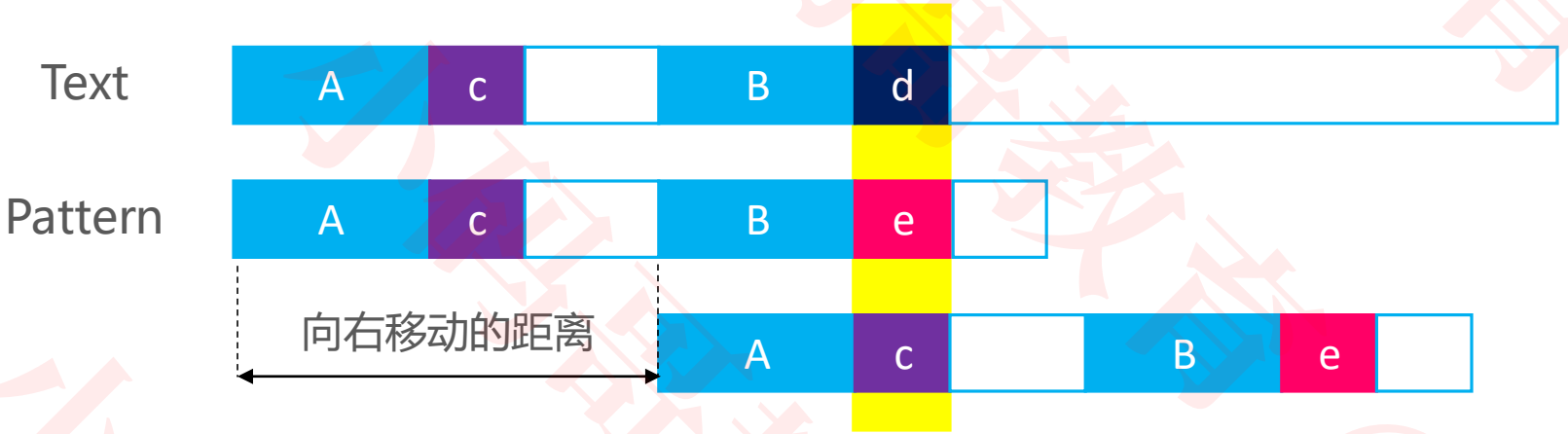
pi=3

A	B	C	D	A	B	C	E

pi = next[pi] → 0

pi=0

KMP – 核心原理



- A、B是个子串
- c、d、e是单个字符

- 当 d、e 失配时，如果希望 Pattern 能够一次性向右移动一大段距离，然后直接比较 d、c 字符
  - 前提条件是 A 必须等于 B
- 所以 KMP 必须在失配字符 e 左边的子串中找出符合条件的 A、B，从而得知向右移动的距离
- 向右移动的距离：e 左边子串的长度 – A 的长度，等价于：e 的索引 – c 的索引
- 且 c 的索引 == next[e 的索引]，所以向右移动的距离：e 的索引 – next[e 的索引]
- 总结
  - 如果在 pi 位置失配，向右移动的距离是 pi – next[pi]，所以 next[pi] 越小，移动距离越大
  - next[pi] 是 pi 左边子串的真前缀后缀的最大公共子串长度

小码哥教育 SEEMYGO

KMP – 真前缀后缀的最大公共子串长度

模式串	真前缀	真后缀	最大公共子串长度
ABCDABCE	A, AB, ABC, ABCD, ABCDA, ABCDAB, ABCDABC	BCDABCE, CDABCE, DABCE, ABCE, BCE, CE, E	0
ABCDABC	A, AB, ABC, ABCD, ABCDA, ABCDAB	BCDABC, CDABC, DABC, ABC, BC, C	3
ABCDAB	A, AB, ABC, ABCD, ABCDA	BCDAB, CDAB, DAB, AB, B	2
ABCDA	A, AB, ABC, ABCD	BCDA, CDA, DA, A	1
ABCD	A, AB, ABC	BCD, CD, D	0
ABC	A, AB	BC, C	0
AB	A	B	0
A			0

模式串字符	A	B	C	D	A	B	C	E
最大公共子串长度	0	0	0	0	1	2	3	0

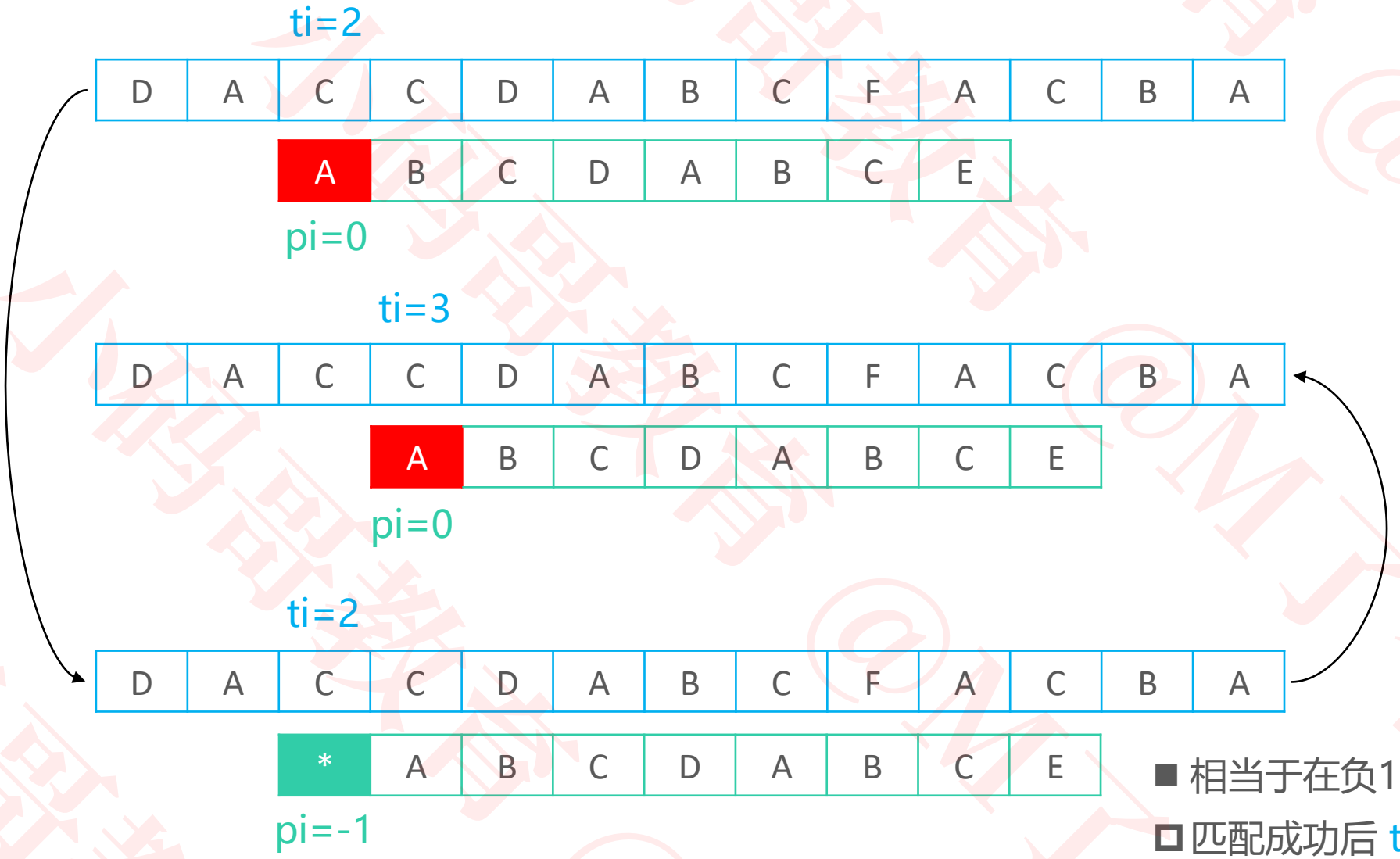
KMP – 得到next表

模式串字符	A	B	C	D	A	B	C	E
最大公共子串长度	0	0	0	0	1	2	3	0

- 将最大公共子串长度都向后移动 1 位，首字符设置为 负1，就得到了 next 表

模式串 "ABCDABCE" 的 next 表								
模式串字符	A	B	C	D	A	B	C	E
索引	0	1	2	3	4	5	6	7
元素	-1	0	0	0	0	1	2	3

KMP – 负1的精妙之处



pi = next[pi] → -1

pi++ → 0

ti++ → 3

- 相当于在负1位置有个假想的通配字符（哨兵）
- 匹配成功后 ti++、pi++

小码哥教育 SEEMYGO

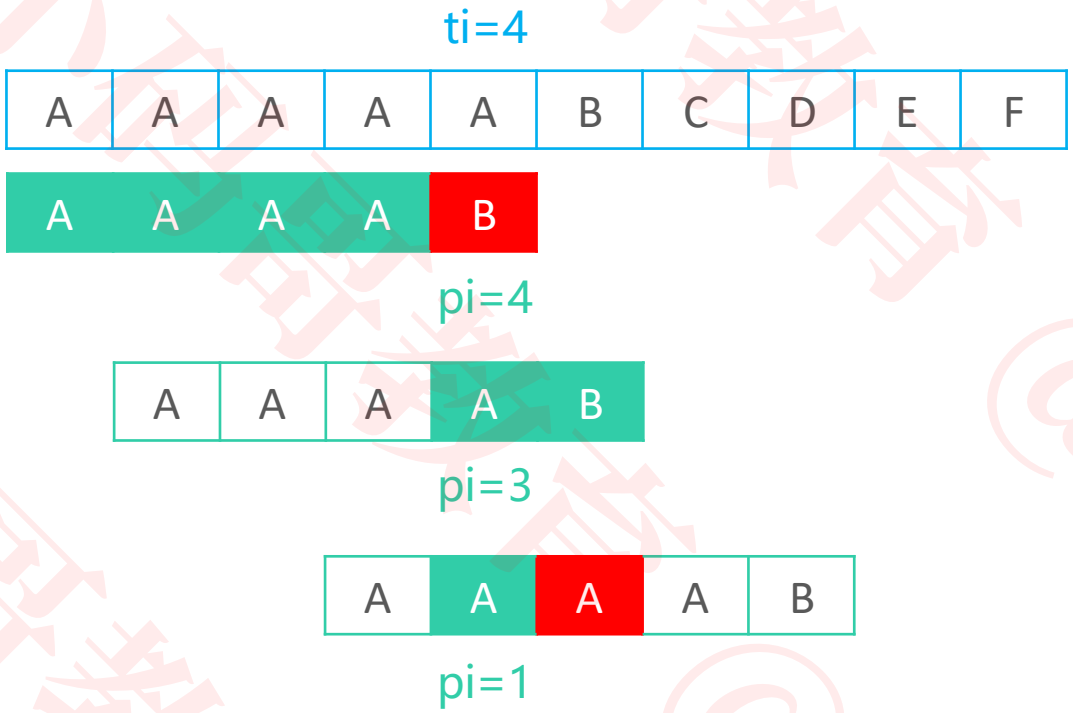
KMP – 主算法实现

```
public static int indexOf(String text, String pattern) {
    if (text == null || pattern == null) return -1;
    int plen = pattern.length();
    int tlen = text.length();
    if (tlen == 0 || plen == 0 || tlen < plen) return -1;
    int[] next = next(pattern);
    int pi = 0, ti = 0;
    int tmax = tlen - plen;
    while (pi < plen && ti - pi <= tmax) {
        if (pi < 0 || text.charAt(ti) == pattern.charAt(pi)) {
            ti++;
            pi++;
        } else {
            pi = next[pi];
        }
    }
    return pi == plen ? ti - pi : -1;
}
```

KMP – 为什么是“最大“公共子串长度?

- 假设文本串是AAAAABCDEF，模式串是AAAAB

模式串	真前缀	真后缀	公共子串长度
AAAA	A, AA, AAA	A, AA, AAA	1, 2, 3
AAA	A, AA	A, AA	1, 2
AA	A	A	1



- 应该将1、2、3中的哪个值赋值给 pi 是正确的?
- 将 3 赋值给 pi
  - 向右移动了 1 个字符单位，最后成功匹配
- 将 1 赋值给 pi
  - 向右移动了 3 个字符单位，错过了成功匹配的机会
- 公共子串长度越小，向右移动的距离越大，越不安全
- 公共子串长度越大，向右移动的距离越小，越安全

KMP – next表的构造思路

- 已知 next[i] == n

① 如果 Pattern[i] == Pattern[n]

- 那么 next[i + 1] == n + 1

② 如果 Pattern[i] != Pattern[n]

- 已知 next[n] == k
- 如果 Pattern[i] == Pattern[k]
  - ✓ 那么 next[i + 1] == k + 1
- 如果 Pattern[i] != Pattern[k]
  - ✓ 将 k 代入 n，重复执行 ②

小码哥教育 SEEMYGO

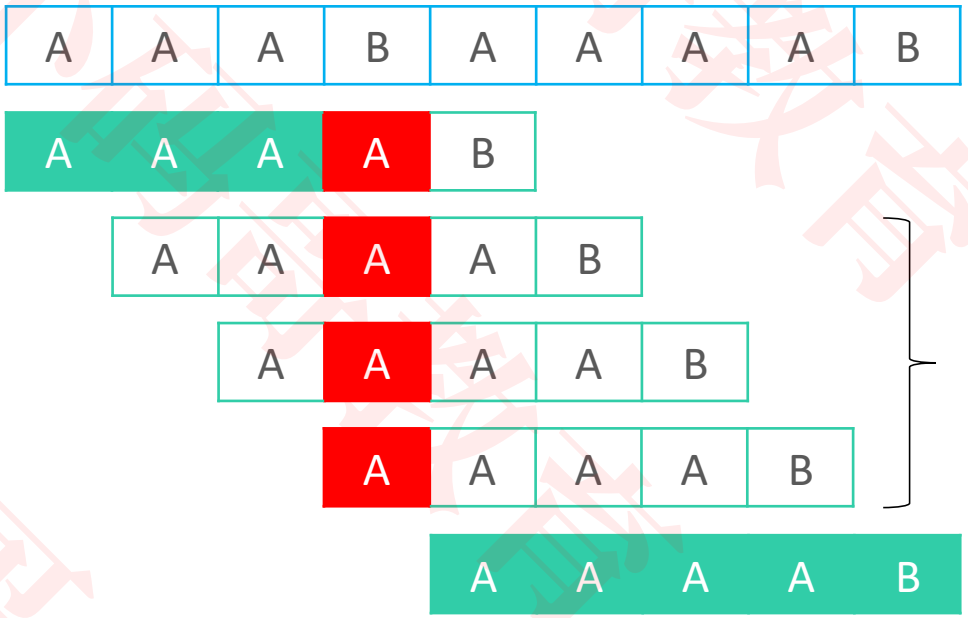
KMP – next表的代码实现

```
public static int[] next(String pattern) {
    int len = pattern.length();
    int[] next = new int[len];
    int i = 0;
    int n = next[i] = -1;
    int imax = len - 1;
    while (i < imax) {
        if (n < 0 || pattern.charAt(i) == pattern.charAt(n)) {
            next[++i] = ++n;
        } else {
            n = next[n];
        }
    }
    return next;
}
```

KMP – next表的不足之处

- 假设文本串是 AAABAAAAB， 模式串是 AAAAB

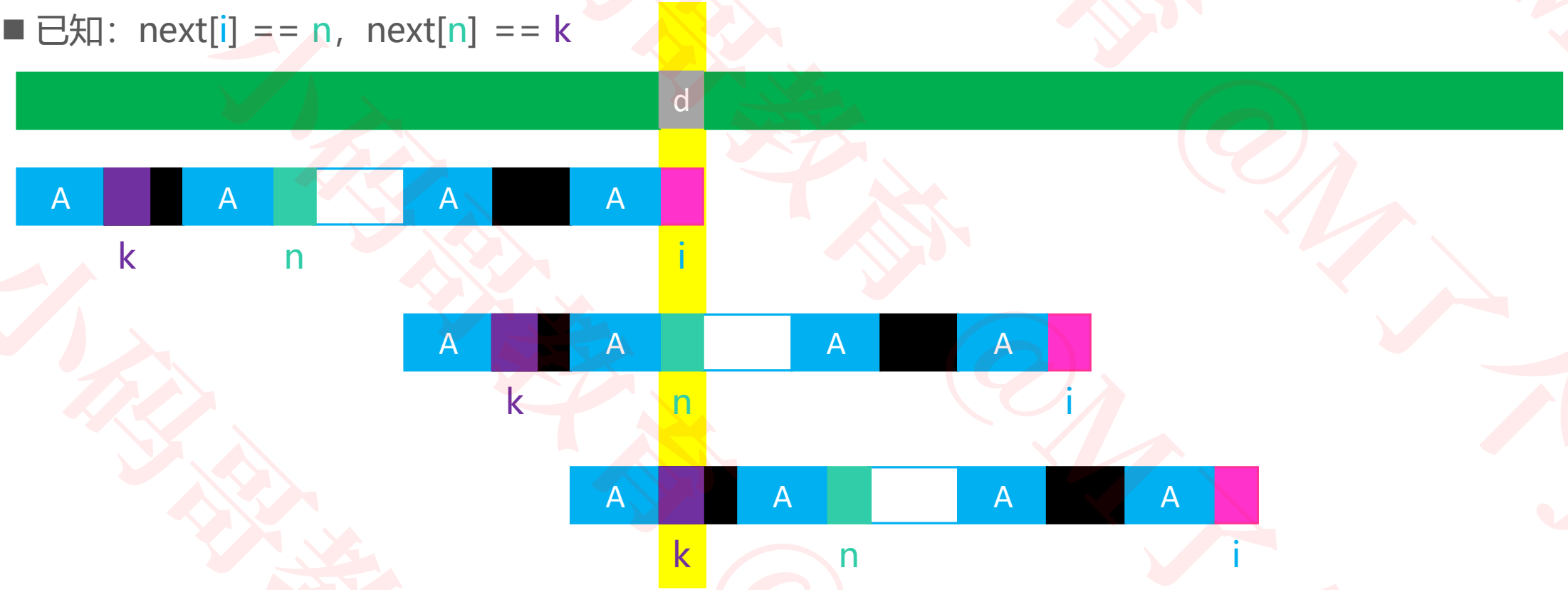
模式串 "AAAAB" 的 next 表					
模式串字符	A	A	A	A	B
索引	0	1	2	3	4
元素	-1	0	1	2	3



- 在这种情况下，KMP显得比较笨拙

KMP – next表的优化思路

- 已知：next[i] == n，next[n] == k



- 如果 Pattern[i] != d，就让模式串滑动到 next[i]（也就是n）位置跟 d 进行比较
- 如果 Pattern[n] != d，就让模式串滑动到 next[n]（也就是k）位置跟 d 进行比较
- 如果 Pattern[i] == Pattern[n]，那么当 i 位置失配时，模式串最终必然会滑到 k 位置跟 d 进行比较
- 所以 next[i] 直接存储 next[n]（也就是k）即可

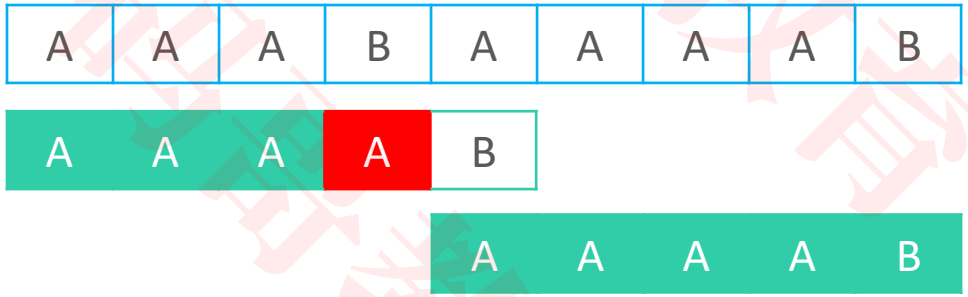
小码哥教育 SEEMYGO

KMP – next表的优化实现

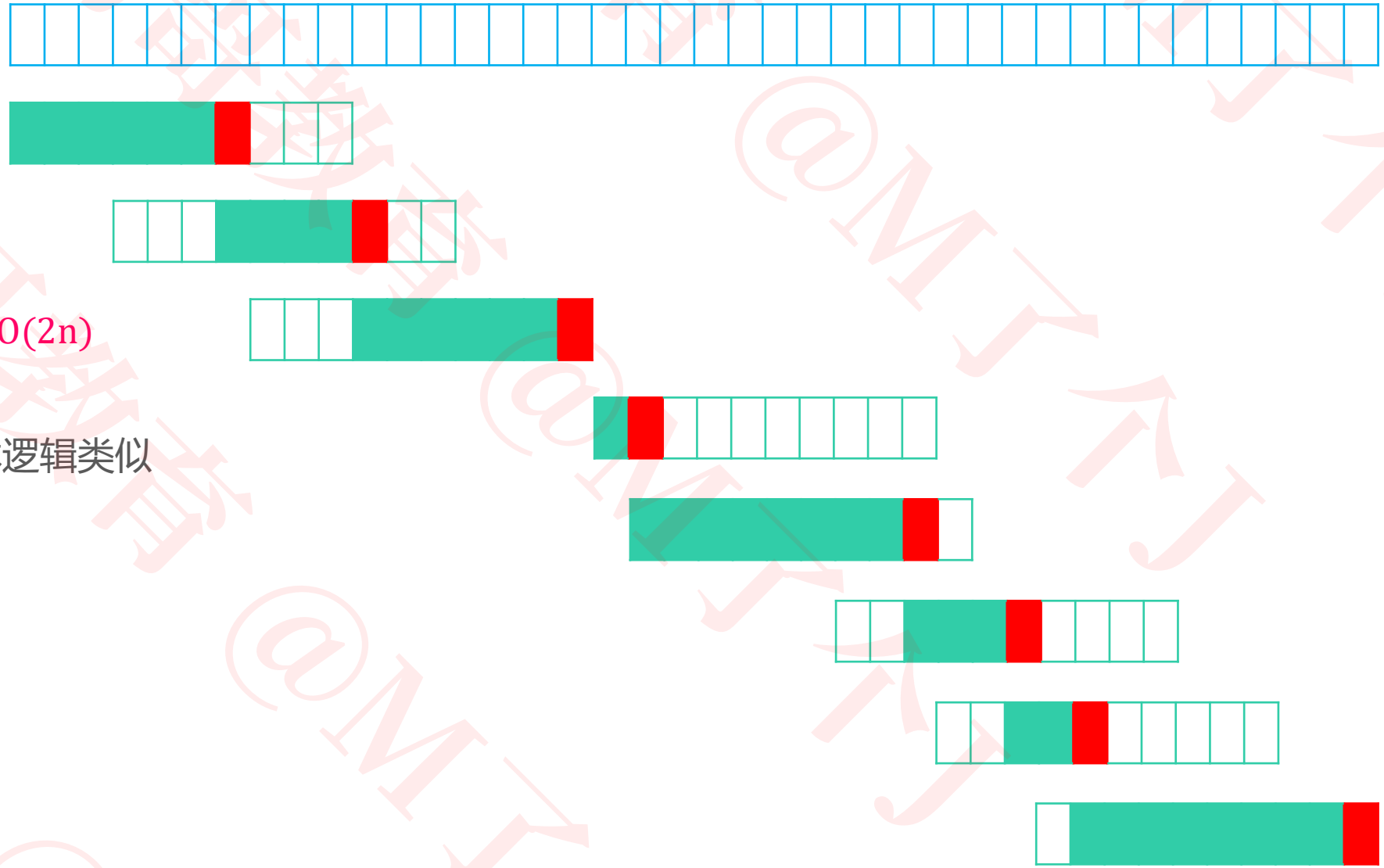
```
public static int[] next(String pattern) {
    int len = pattern.length();
    int[] next = new int[len];
    int i = 0;
    int n = next[i] = -1;
    int imax = len - 1;
    while (i < imax) {
        if (n < 0 || pattern.charAt(i) == pattern.charAt(n)) {
            i++;
            n++;
            if (pattern.charAt(i) == pattern.charAt(n)) {
                next[i] = next[n];
            } else {
                next[i] = n;
            }
        } else {
            n = next[n];
        }
    }
    return next;
}
```

KMP – next表的优化效果

模式串 "AAAAB" 的 next 表					
模式串字符	A	A	A	A	B
索引	0	1	2	3	4
优化前	-1	0	1	2	3
优化后	-1	-1	-1	-1	3



KMP – 性能分析



- KMP 主逻辑
  - 最好时间复杂度：$O(m)$
  - 最坏时间复杂度：$O(n)$，不超过$O(2n)$
- next 表的构造过程跟 KMP 主体逻辑类似
  - 时间复杂度：$O(m)$
- KMP 整体
  - 最好时间复杂度：$O(m)$
  - 最坏时间复杂度：$O(n+m)$
  - 空间复杂度：$O(m)$

蛮力 vs KMP

- 蛮力算法为何低效?

- 当字符失配时
  - 蛮力算法
    - ✓ ti 回溯到左边位置
    - ✓ pi 回溯到 0
  - KMP 算法
    - ✓ ti 不必回溯
    - ✓ pi 不一定要回溯到 0