# 线性预测阶段报告

## 线性预测概况

线性预测Linear Prediction 在1947年首次提出，1967年用于语音分析和合成。线性预测分析的基本概念是，一个语音的采样值能够用过去若干语音采样值的线性组合来逼近。其基本原理是把分析信号用一个模型来表示，即将信号看做某一个模型（即系统）的输出，这样就可以用激励源和模型的参数来描述信号。



图1-

如图，u(n)表示模型的输入，x(n)表示模型的输出，当x(n)为确定性信号时模型的输入u(n)可采用单位冲激序列；当x(n)为随机性信号时输入可采用白噪声序列。

其中传递函数H(z)可以写成有理分式的形式：

 (1-)

可以简化为

 (1-)

其中系数a, b及增益因子G就是m9oxing的参数，而p 和q是选定模型的阶数。为了保证H(z)是一个稳定且具有最小相位的系统，A(z) B(z)的零点都应该在单位圆内。

根据H(z)的表达式，我们可以得到模型输入与输出的时域关系为

 (1-3)

根据参数不同，分为三种情况：

1. 若全为零，则传递函数的时频域关系变为

 (1-4)

 (1-5)

这种模型称为自回归（Auto-Regressive）模型，简称AR模型，是一个全极点模型。“自回归”的含义是，该模型现在的输出是现在输入和过去p个输出的加权之和。

1. 若全为零，则传递函数的时频域关系变为

 (1-6)

 (1-7)

这种模型称为移动平均模型（Moving-Average）模型，简称MA模型，是一个全零点模型。

1. 若和不全为零，则该模型被称为自回归-移动平均模型，简称ARMA模型。

在我们使用时最常用的是全极点模型，即AR模型，主要理由如下

1. 全极点模型最容易计算，对全极点模型的参数估计就是对线性方程组的求解。有零点就变成了非线性方程组，求解比较困难。
2. 有时候我们无法得知输入序列的情况，所以用MA模型会比较复杂
3. 如果不考虑鼻音和摩擦音，语音的声道传递函数本身就是一个全极点模型，即使考虑鼻音和摩擦音，也可以用全极点模型来近似。

所以后面我们主要针对全极点模型进行分析。全极点模型的传递参数为

 (1-8)

时域关系为



我们称系统



为线性预测器，为的估算值，由过去的p个值的线性组合得到，即由过去的值预测或估测当前的值。式中是线性预测系数（linear prediction coefficient，LPC）。

易知线性预测器的传递函数如下



信号值与线性预测值之差称为线性预测误差，也称为预测误差或残差，即



转换为z域即为



观察上式与式可知，。

由此可以定义预测误差滤波器A(z)即为H(z)的逆滤波器。

线性预测的基本问题就是由语音信号直接决定一组预测器参数{}，使预测误差在某个准则下最小，这个准则通常采用最小均方误差准则，这一过程就成为线性预测分析。

下面简要介绍线性预测方程

由最小均方误差准则，我们得到预测二次方误差为



为了让上式最小，可得约束条件为

 

代入上式可得线性预测的标准方程组



如果定义



那么标准方程组可以写成



上式是含有p个未知数的方程组，求解方程组可得各个预测期系数。如何求解上式成为待解决的问题。

## LPC参数的求解

### 自相关法和协相关法

自相关法在整个时间范围内使误差最小，并设在以外都等于零，即假定经过有限长度的窗。

自相关函数的定义为

 

由于进行了加窗处理，所以自相关函数表示为

 

根据上节最后得出的，我们可以发现



由于为偶函数且只与i和j的相对大小有关，则



则用自相关函数表示线性预测分析的标准方程组可得

 .

同时最小均方误差可写为



标准方程组的等式左边是托布利兹(Toeplitz)矩阵，以对角线对称，其主对角线以及和主对角线平行的任何一条斜线上所有的元素都相等。整个方程被称为Yule-Walker方程，利用其性质有高效率的求解方法。

这种矩阵方程可以采用递归的方法求解，最常用的是莱文逊-杜宾(Levinson-Durbin)算法，这是一种最佳算法。

具体步骤为

1. 当i=0时，
2. 对于第i次递归（）：
   1. 
   2. 
   3. 对于j=1到i-1



* 1. 

1. 增益G为



注：上标表示预测器阶数，k被称之为反射系数或偏相关系数（PARCOR），是保证A(z)的根在单位圆内的关键。

协方差法无需对语音信号加窗，即不规定信号x(n)的长度范围，但因此得到的矩阵也不是托普利兹矩阵，所以无法采用自相关矩阵中的简便算法，可以用矩阵分解的乔里斯基（Cholesky）算法进行，即通过对矩阵C进行LU分解来计算。

### 格型法

1. 基本原理

首先引入前向预测和后向预测的概念。

定义i阶线性预测误差滤波器，传输函数定义为



根据莱文逊-杜宾递推算法中的递推关系可以得到



该滤波器的输入为，输出信号为预测误差



写成Z变换形式为



则可得到



令，在时域为

则



进行反变换得



即第i阶线性预测误差滤波器的输出可以被分解为两部分：第一部分是第i-1阶滤波器的输出，另一部分是与第i-1阶有关的输出信号经过单位时延和加权后的信号。分别把这两部分定义为前向预测误差信号和后向预测误差信号。

对后向预测误差进行同样的递推处理我们可以得到





对其做反变换可得



初始条件为



整理前向后向预测误差滤波器的公式我们可以得到适合于线性预测分析的格型滤波器结构形式。







根据格型法，我们可以得到反射系数k，然后根据递推公式我们可以得到线性预测系数的值。

## LSP参数

### LSP参数概论

由于LPC参数特点，若直接对LPC参数进行编码会导致鲁棒性不强，所以引入了LSP参数，可以改善编码效率，保证线性预测滤波器之稳定性，系统偏差也可以控制在局部，具有良好的量化特性和内插特性。缺点是运算量较大。

线性预测逆滤波器



定义 对称多项式 和 反对称多项式 如下





代入可得





这两个多项式都有共轭复根。可以证明，当线性预测逆滤波器A(z)的根位于单位圆内时，P和Q的根都在单位圆上，而且交替出现。

如果阶数p是偶数，则P和Q各有一个实根，其中P有实根z=-1，Q有实根z=1。如果阶数p是奇数，则Q有+1和-1两个实根，P没有实根。

此处假定p是偶数，这样P和Q各有p/2个共轭复根位于单位圆上，共轭复根形式为。设P 的零点为，Q的零点为，则满足



其中和分别为P和Q的第i个根。根据根的定义可以得到





其中，和是LSP系数在余弦域的表示，和是LSP参数对应的线谱频率（LSF）。由于LSP参数和成对出现，且反映信号的频谱特性，因此成为线谱对。

### LSP参数的求解

为计算方便，将P和Q中两个与LSP参数无关的实根去掉，得到如下两个新的多项式。





LSP参数常用的有四种解法：

1. 直接利用代数方程式求解，可以用牛顿迭代法。
2. 将0~之间均分为60个点，将频率值代入P和Q观察符号变化，在符号变化的两点之间再均分四份代入方程精细估值。这种方法程序实现简单但计算量较大。
3. DFT方法

根据等式：





可以将P和Q看成两个滤波器，对其系数作DFT求得滤波器的频率响应，寻找最小值点（最好是零点），即对于处在这个“频率”的输入信号，输出都接近零（即零频），所以满足这个“频率”特征的信号都是方程的解。

实际上做完DFT后的序列是整个0~上的响应值，所以相当于改进型的方法二，实现确定了一个大致的位置。

此方法随着DFT点数的增长而更加精确，但一般为了算法简便，N值一般取64~128，然后利用二分法再寻找更加精确的值。

1. 切比雪夫多项式法

切比雪夫多项式源起于多倍角的余弦函数和正弦函数展开式，是与棣美弗定理有关，以递归方式定义的多项式序列，是计算数学中的一类特殊函数。

其初始条件为 ，

递推式为 

其中 

易得

|  |  |
| --- | --- |
| 多项式表达 | 余弦函数表达 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

在估计LSP参数方面，利用切比雪夫多项式可以在余弦域直接得到。

当时，和可以写为





其中



此式中f(i)也是根据递推关系得到的系数：

 其中 

其中

根据上述理论，我们在使用切比雪夫多项式计算LSP参数时，首先算出f(i)矩阵和切比雪夫多项式的系数矩阵，相乘之后得到待测多项式。然后参照方法二，将输入信号设置为每个角度的余弦值，代入待测多项式中检查其零点。最后加入二分法可以使结果更加精确。