1 Упорядоченная пара; декартово произведение; операции над множествами

Упорядоченная пара - двухэлементное семейство, где множеством индексов является $\{1, 2\}$. При этом в обозначении упорядоченной пары (a, b) считается, что на первом месте стоит элемент, занумерованный индексом 1, а на втором - индексом 2. Равенство пар (a, b), (c, d) означает, что $a = b$ и $c = d$.
Декартовым или **прямым произведением** множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар, таких что первый элемент пары принадлежит X а второй - Y.
$X * Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$
Операции над множествами:

1. Пусть $\{X_{\alpha\in A}\}$ - семейство множеств. *Пересечением* семейства $\{X_{\alpha\in A}\}$ назывется множество всех элементов, которые принадлжат каждому из множеств X_α:

$$\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x : \forall\alpha \in A x \in X_\alpha\}$$

2. Пусть $\{X_{\alpha\in A}\}$ - семейство множеств. *Объединением* семейства $\{X_{\alpha\in A}\}$ назывется множество всех элементов, которые принадлжат хотя бы одному из множеств X_α:

$$\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x : \exists\alpha \in A x \in X_\alpha\}$$

3. **Разностью** множеств X и Y назывется множество всех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат Y:

$$X \backslash Y = \{x : x \in X, x \notin Y\}$$

Рис. 1: Расширенное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется *расширенной числовой прямой.* Таким образом, в $\overline{\mathbb{R}}$ к вещественным числам добавляются два новых символа (несобственных элемента): $-\infty$ и $+\infty$. Считают, что $-\infty < x < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $-\infty < +\infty$. Тогда можно рассматривать промежутки в $\overline{\mathbb{R}}$ вида $\langle a, +\infty]$ или $[-\infty, b\rangle$.

С несобственными элементами можно совершать некоторые операции. Полагают

$$
\begin{gathered}
x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \\
x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \\
x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0, \end{cases} \\
x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & x > 0, \\ +\infty, & x < 0, \end{cases} \\
(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \\
(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \\
(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.
\end{gathered}
$$

16 ГЛАВА 1. Введение

Символам $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$ и $(\pm\infty) \cdot 0$ не приписывается никакого значения.

Рис. 2: Подмножество в R, ограниченное сверху

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant M$ для всех $x \in E$. Число M при этом называется *верхней границей* множества E.

Рис. 3: Максимальный элемент множества

Определение. Число M называется *максимумом* или *наибольшим элементом* множества $E \subset \mathbb{R}$, если $M \in E$ и $x \leqslant M$ для всех $x \in E$.

Рис. 4: Последовательность

Определение. Отображение множества натуральных чисел в множество Y называется *последовательностью* в Y. Если Y — числовое множество, то последовательность называется числовой (например, вещественной или комплексной).

Рис. 5: Образ и прообраз множества при отображении; инъекция, сюръекция, биекция

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$, A — множество. Множество

$$f(A) = \{y \in Y:\ \exists x \in A\ f(x) = y\}$$

называется *образом* множества A при отображении f. *Множеством значений* отображения f называется множество $f(X)$, то есть образ множества X.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$, B — множество. Множество

$$f^{-1}(B) = \{x \in X:\ f(x) \in B\}$$

называется *прообразом* множества B при отображении f.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$. Если $f(X) = Y$, то отображение f называется *сюръективным*, или *сюръекцией*, или *отображением "на"* (отображением X на Y).

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$. Если для любых различных элементов X их образы различны, то отображение f называется *инъективным*, или *инъекцией*, или *обратимым* отображением.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$. Если отображение f одновременно сюръективно и инъективно, то f называется *биективным*, или *биекцией*, или *взаимно-однозначным* отображением (соответствием).

Рис. 6: Целая часть числа

imagesMin/7.png

Рис. 7: График отображения

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$. *Графиком* отображения f называется множество

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}.$$

Таким образом, $\Gamma_f \subset X \times Y$. В знакомой из школы ситуации, когда f — вещественнозначная функция вещественной переменной, график f есть подмножество плоскости.

График отображения обладает следующим свойством:

$$\text{если } (x, y_1), (x, y_2) \in \Gamma_f, \text{ то } y_1 = y_2.$$

На плоскости это означает, что никакая вертикальная прямая не может иметь двух общих точек с графиком. Обратно, если множество $G \subset X \times Y$ удовлетворяет условию:

$$\text{если } (x, y_1), (x, y_2) \in G, \text{ то } y_1 = y_2, \tag{7}$$

то G есть график некоторого отображения. Его областью определения служит множество

$$E = \{x \in X : \exists y \in Y \ \ (x, y) \in G\},$$

а правило таково: каждому $x \in E$ сопоставляется тот (единственный в силу (7)) элемент $y \in Y$, для которого $(x, y) \in G$.