



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по курсовой работе

«Задание по исследованию дискретных и непрерывных динамических систем на плоскости»

Студент 315 группы
А. Д. Тулегенов

Руководитель
В. В. Абрамова

Москва, 2025

1 Постановка задачи

Во всех заданиях значения переменных u_t , $u_{t\pm 1}$ неотрицательны, значения параметров положительны. В ходе исследования системы без запаздывания необходимо:

- найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость;
- проверить существования циклов длины 2 и 3;
- построить бифуркационную диаграмму (в смысле предельного поведения траекторий) в зависимости от значения бифуркационного параметра (значения других параметров и значение u_0 следует зафиксировать при построении);
- построить зависимость показателя Ляпунова от значения параметра.

Для системы с запаздыванием: найти особые точки и исследовать их устойчивость, проверить существование бифуркации Неймарка-Сакера, если она присутствует – построить инвариантную кривую. Исследование необходимо проводить аналитически, подкрепляя результат иллюстрациями, полученными с помощью численного моделирования.

Система без запаздывания:

$$u_{t+1} = ru_t^2(1 - \ln(1 + u_t)). \quad (1)$$

Система с запаздыванием:

$$u_{t+1} = ru_t^2(1 - \ln(1 + u_{t-1})). \quad (2)$$

2 Система без запаздывания

2.1 Неподвижные точки

Определение. Точка u называется неподвижной точкой динамической системы $u_{t+1} = f(u)$, если $f(u) = u$.

Найдём неподвижные точки (1). Для нахождения воспользуемся равенством:

$$u = ru^2(1 - \ln(1 + u)).$$

При любом значении параметра r система всегда имеет тривиальную неподвижную точку $u_0^* = 0$. Для анализа других решений введем вспомогательные функции:

$$f(u) = ru^2(1 - \ln(1 + u)), \quad g(u) = u.$$

Исследуем производные.

Первая производная $f(u)$:

$$f'(u) = ur \left(\frac{u+2}{u+1} - 2\ln(1+u) \right). \quad (3)$$

При малых $u > 0$ производная положительна, а также существует точка u_0 , после которой производная становится отрицательной.

Вторая производная $f(u)$:

$$f''(u) = -r \left(\frac{u^2 - 2}{(u + 1)^2} + 2 \ln(1 + u) \right). \quad (4)$$

Вторая производная меняет знак, что указывает на наличие точки перегиба. Приходим к тому, что функция $f(u)$ сначала возрастает, достигает максимума, затем убывает, при $u \rightarrow +\infty$ функция стремится к $-\infty$.

Можно сделать вывод, что система имеет как минимум одну нетривиальную неподвижную точку при определённых значениях r , что требует дальнейшего численного или аналитического исследования.

Выделим три качественно различных случая в зависимости от параметра r :

1. 1 точка пересечения $u_0^* = 0$;
2. 2 точки пересечения $u_0^* = 0$ и точка касания графиков $f(u)$ и $g(u)$;
3. 3 точки пересечения $u_0^* = 0$ и 2 точки пересечения графиков $f(u)$ и $g(u)$.

При помощи программы на языке Matlab численно найдем значение параметра r , при котором графики функций касаются. Для этого нужно решить систему:

$$\begin{cases} f(u) = g(u) \\ f'(u) = g'(u) \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} u = 0.76322 \\ r = 3.0269 \end{cases}$$

Следовательно, в зависимости от параметра r :

1. 1 особая точка $u_0^* = 0$ при $r < 3.0269$;
2. 2 особых точки $u_0^* = 0$ и $u_1^* = 0.76322$ при $r = 3.0269$;
3. 3 особых точки $u_0^* = 0$ и $0 < u_2^* < 0.76322 < u_3^*$ при $r > 3.0269$ (См. рис. 1).

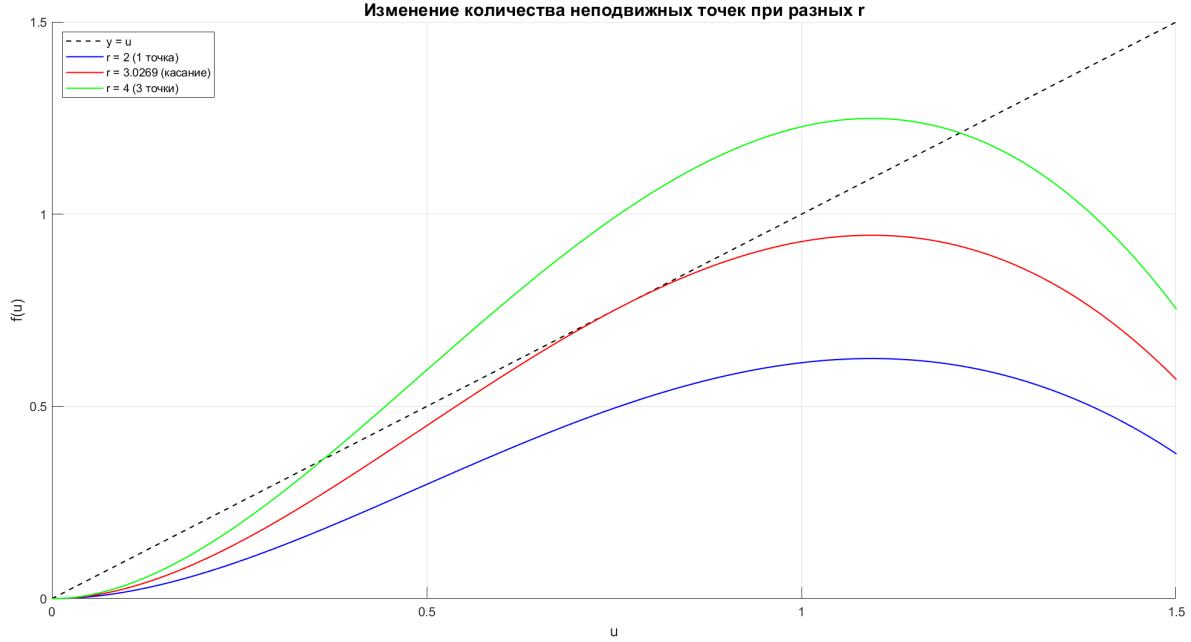


Рис. 1: Особые точки

2.2 Устойчивость неподвижных точек

Определение. Неподвижная точка u^* **устойчива по Ляпунову**, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такая что для любой точки u_0 из δ -окрестности точки u^* верно $|u^* - u_t| < \epsilon$ для любого $t \geq 0$, то есть траектория системы u_t содержится в ϵ -окрестности точки u^* .

Определение. Неподвижная точка u^* **асимптотически устойчива**, если она устойчива по Ляпунову, и, кроме того, для тех же u_0 , что и в прошлом определении, выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_t = u^*.$$

Исследуем особые точки на устойчивость. Для этого воспользуемся следующим утверждением:

Утверждение Пусть u^* — особая точка системы $u_{t+1} = f(u_t)$. Тогда

$$|f'(u^*)| < 1 \Rightarrow u^* \text{ — асимптотически устойчивая особая точка.}$$

$$|f'(u^*)| > 1 \Rightarrow u^* \text{ — неустойчивая особая точка.}$$

$$|f'(u^*)| = 1 \Rightarrow \text{об устойчивости } u^* \text{ ничего сказать нельзя.}$$

В точке u_0^* получим, что $f'(u_0^*) = 0$ при любом значении параметра r . То есть точка является всегда устойчивой.

В точке $u_1^* = 0.76322$ при $r = 3.0269$ получим, что $f'(u_1^*) = 1$. То есть об устойчивости ничего сказать нельзя. Точка является странным аттрактором.

Для точек $0 < u_2^* < 0.76322 < u_3^*$ при $r > 3.0269$ воспользуемся программой на языке **Matlab** и посмотрим на график производной. На рис. 2 Красным отмечены значения

производных для u_3^*, u_2^* . Производная $f'(u_2^*) > 1$ при любом $r > 3,0269$ — то есть точка неустойчива всегда. Производная $f'(u_3^*) < 1$ при $3,0269 < r < 4,2822$ — то есть устойчива. При $r = 4,2822$, $f'(u_3^*) = 1$ — то есть граница устойчивости. При $r > 4,2822$, $f'(u_3^*) > 1$ — то есть точка теряет устойчивость.

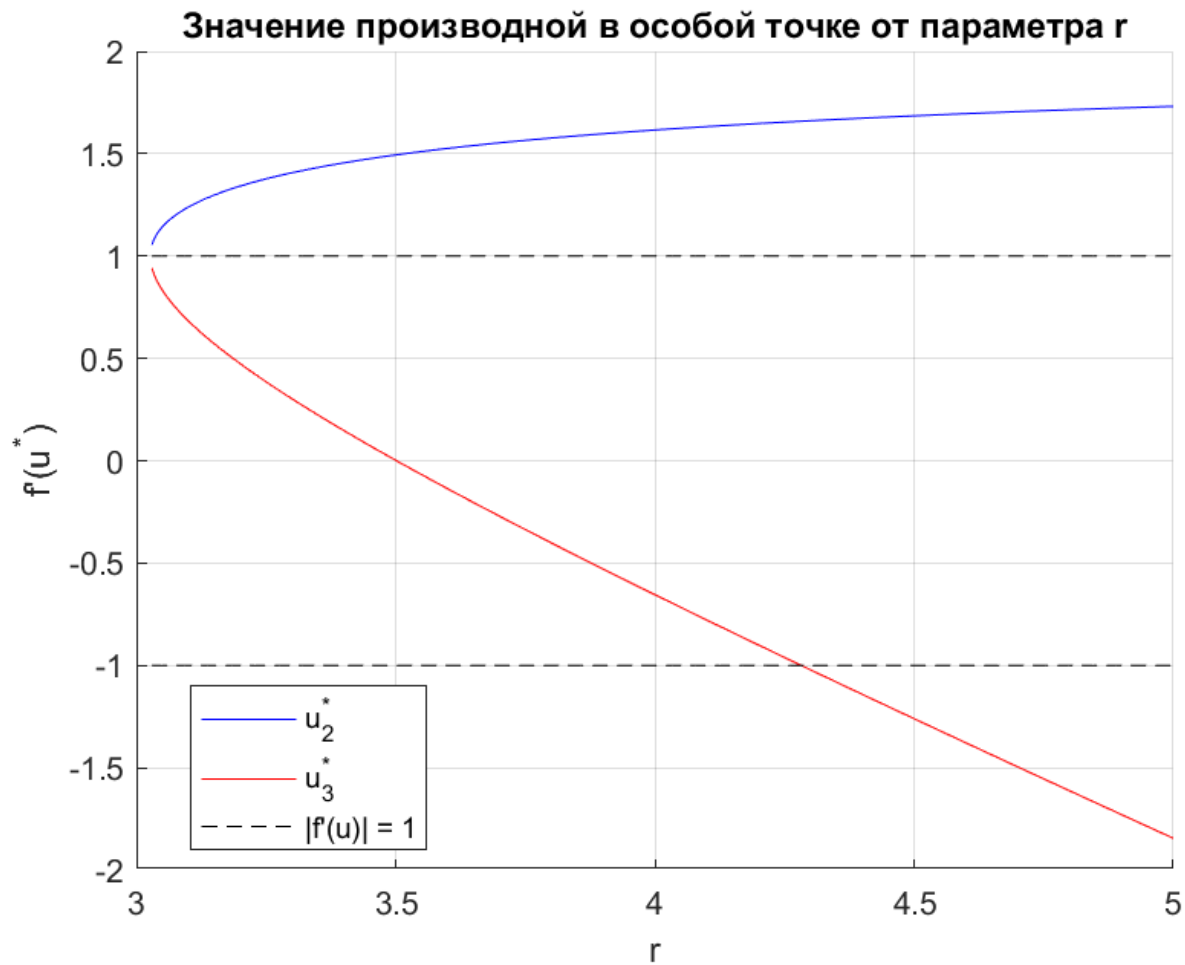


Рис. 2: Зависимость значений производной в особых точках от параметра r

Отметим на графиках случаи: На рис. 3, 4, 5 звездой указано начальное приближение, наглядно видим как меняется устойчивость в зависимости от значений r .

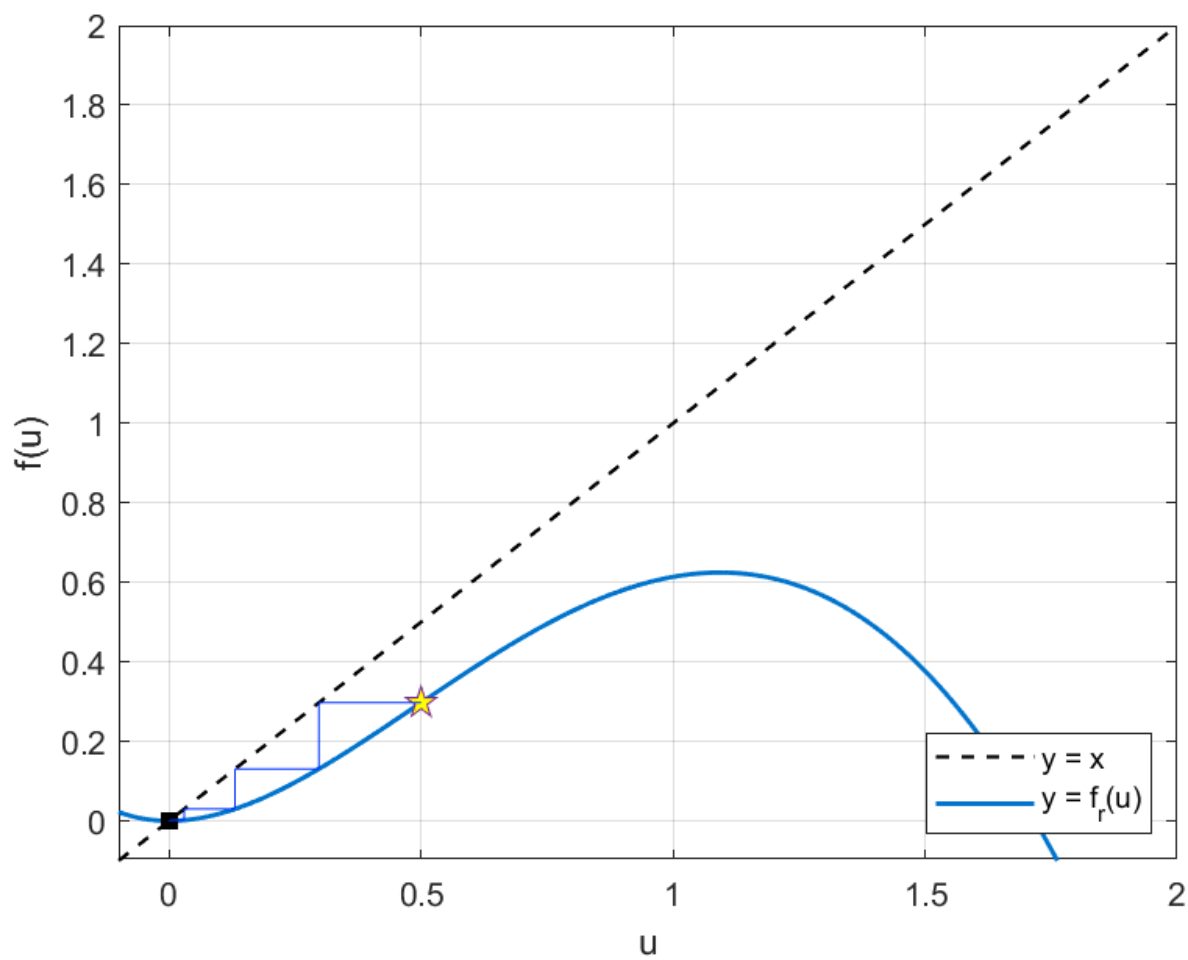


Рис. 3: $u^* = 0$ - устойчива при любом значении r

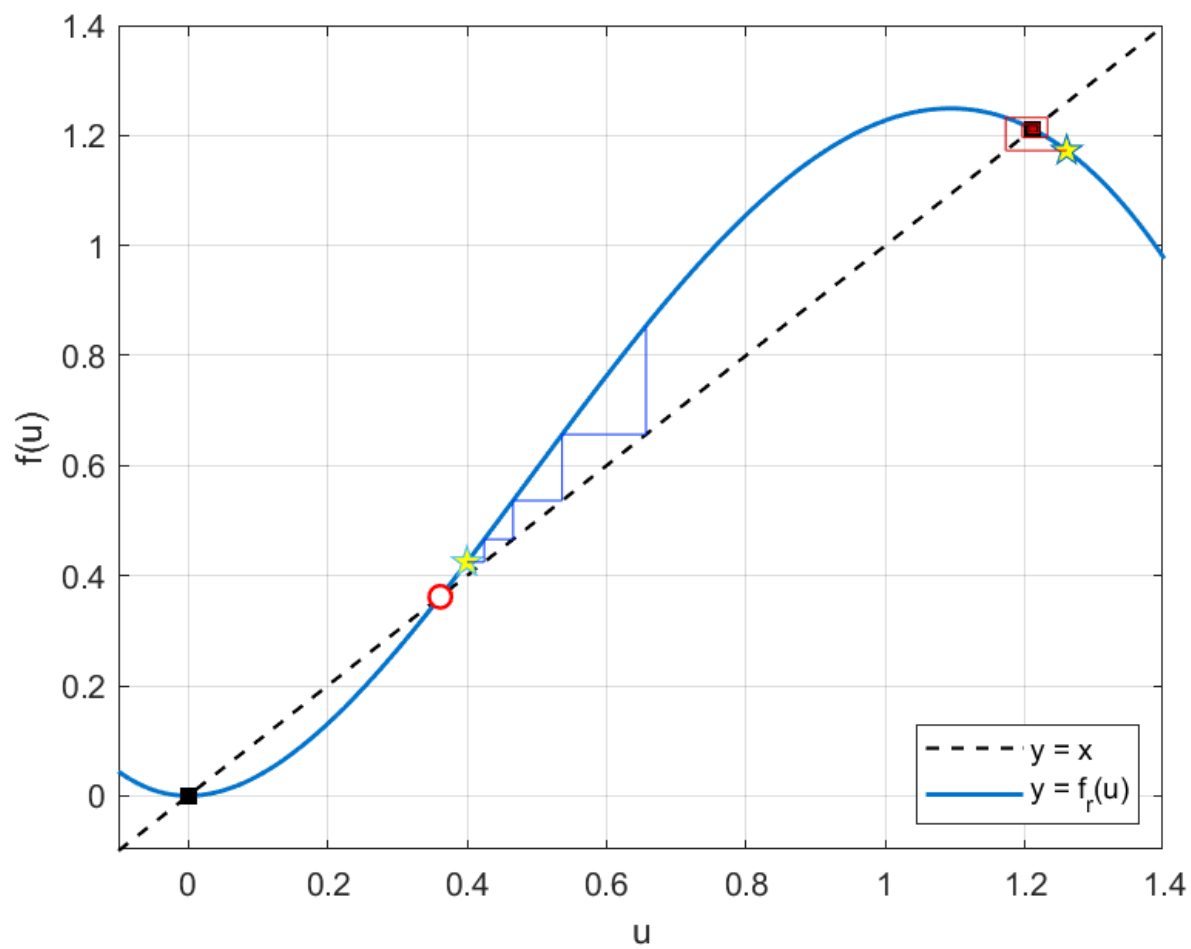


Рис. 4: $r = 4 < 4,2822$ - u_2^* - не устойчива, u_3^* - устойчива

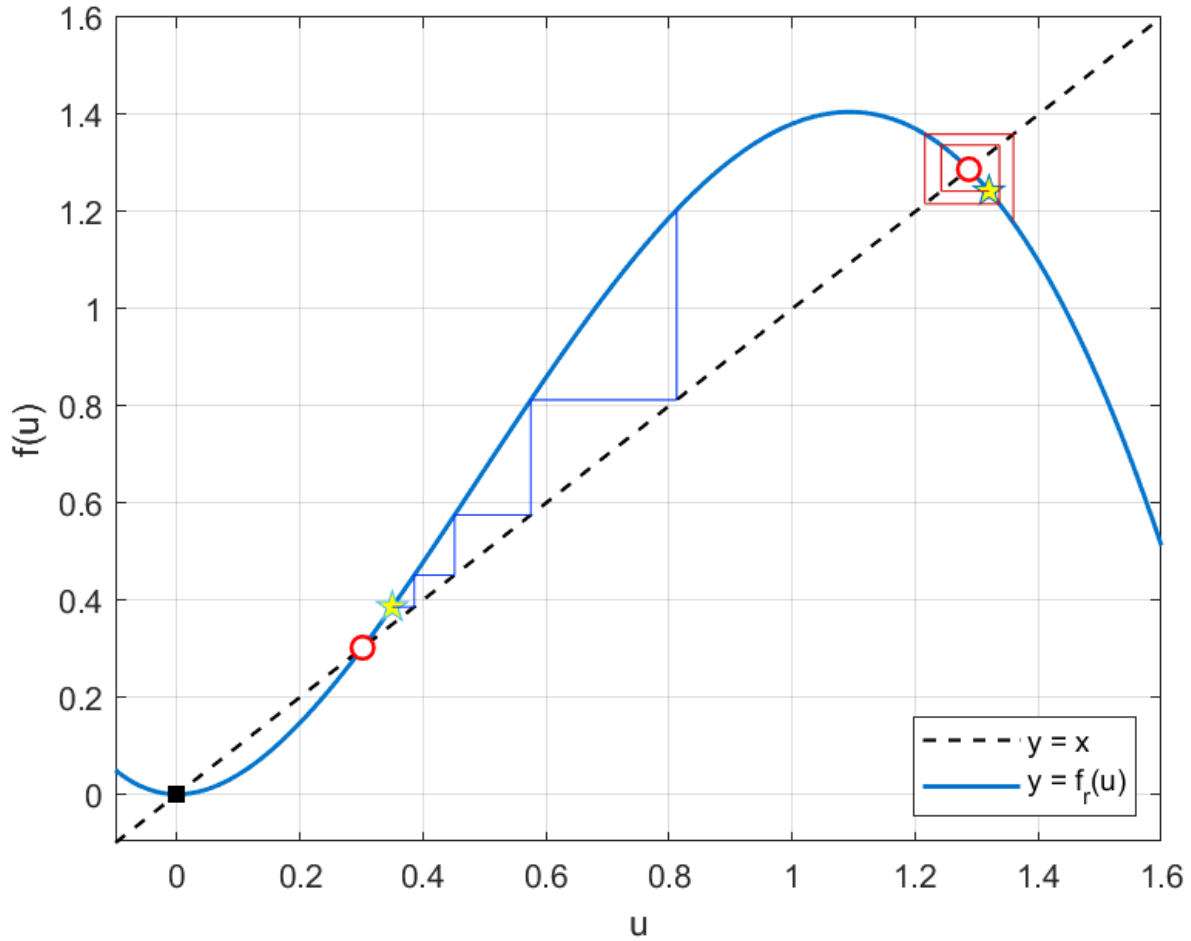


Рис. 5: $r = 4,5 > 4,2822$ - u_2^* и u_3^* - не устойчивы

2.3 Цикл длины 2 и 3

Определение. Цикл длины k — упорядоченный набор точек (N_1, N_2, \dots, N_k) такой, что:

$$f(N_1) = N_2, \quad f(N_2) = N_3, \quad \dots, \quad f(N_k) = N_1.$$

2.3.1 Цикл длины 3

Начнем проверку наличия цикла 3, потому что из его существования по теореме Шарковского будет следовать существование и цикла длины 2. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} f(f(f(u))) = u, \\ \frac{d}{du} f(f(f(u))) = 1. \end{cases}$$

для решения системы воспользуемся программой на языке **Matlab**. Получаем:

$$r = 5,05, \quad \begin{cases} u = 0,6745 = u_1, \\ u = 1,1131 = u_2, \\ u = 1,5760 = u_3. \end{cases}$$

На рис. 6 отмечен график функции $f(f(f(u)))$, красным отмечены точки, образующие цикл:

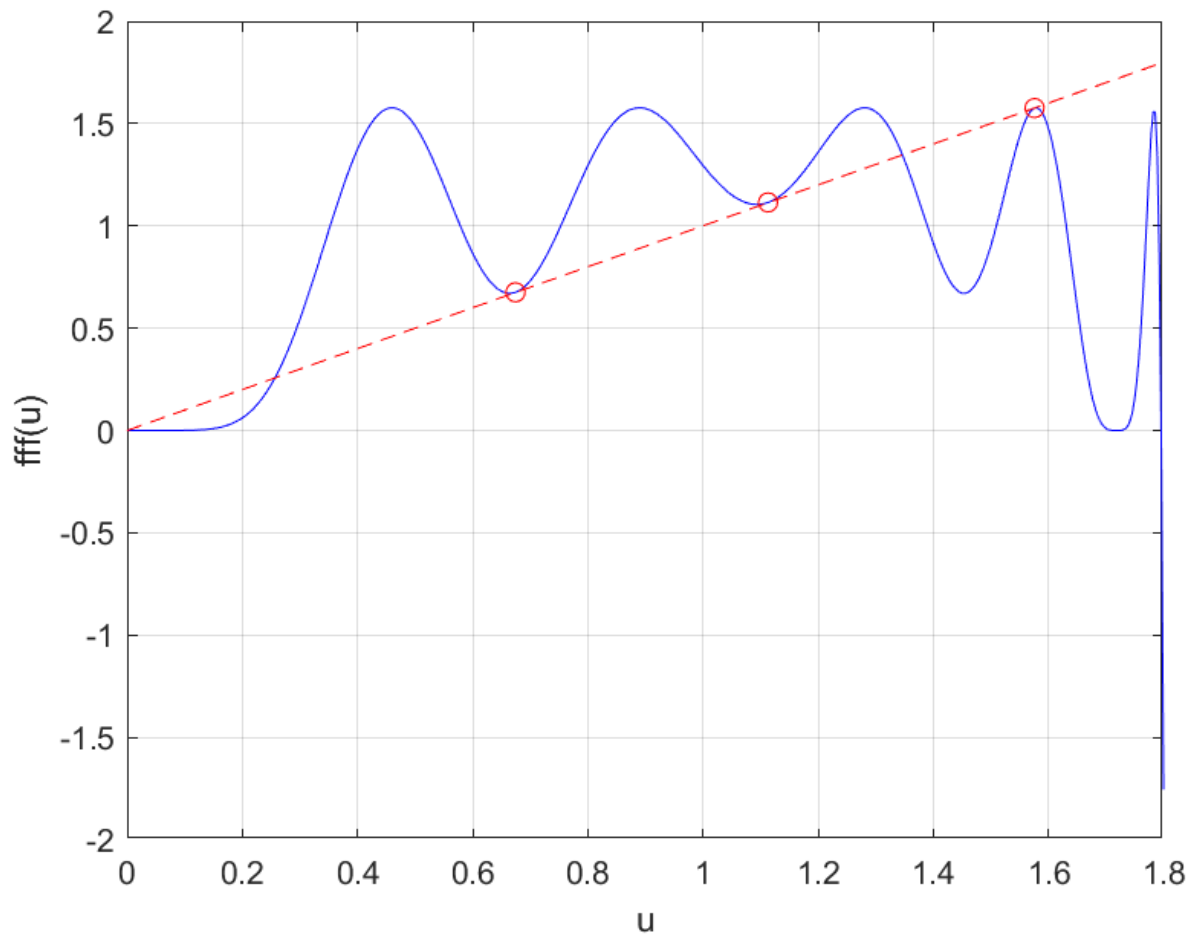


Рис. 6: при $r = 5.05$

Значит цикл длины 3 существует, и следовательно существует и цикл длины 2. Результаты согласовываются с бифуркационной диаграммой. На рис. ?? циклы длины 2 и 3:

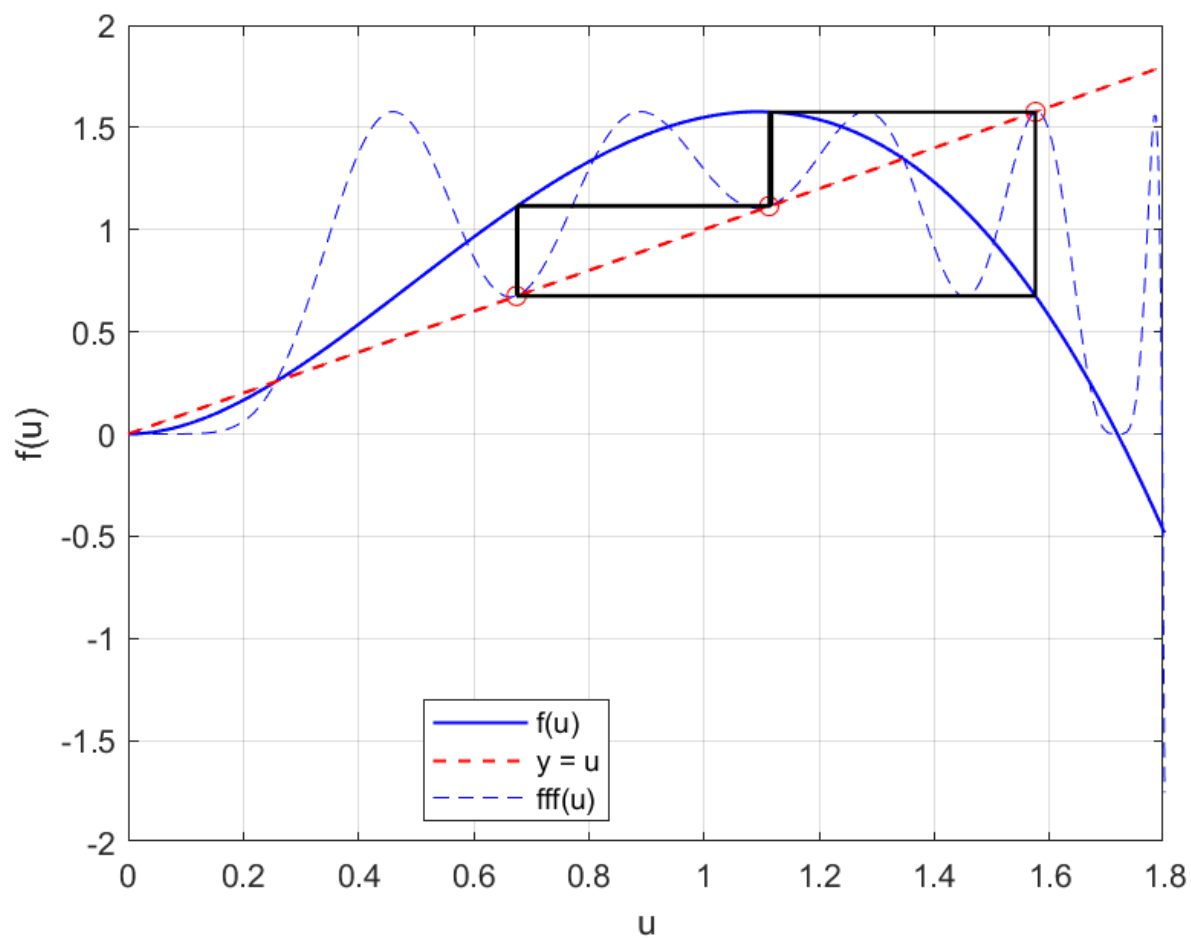


Рис. 7: цикл длины 3, при $r = 5.05$

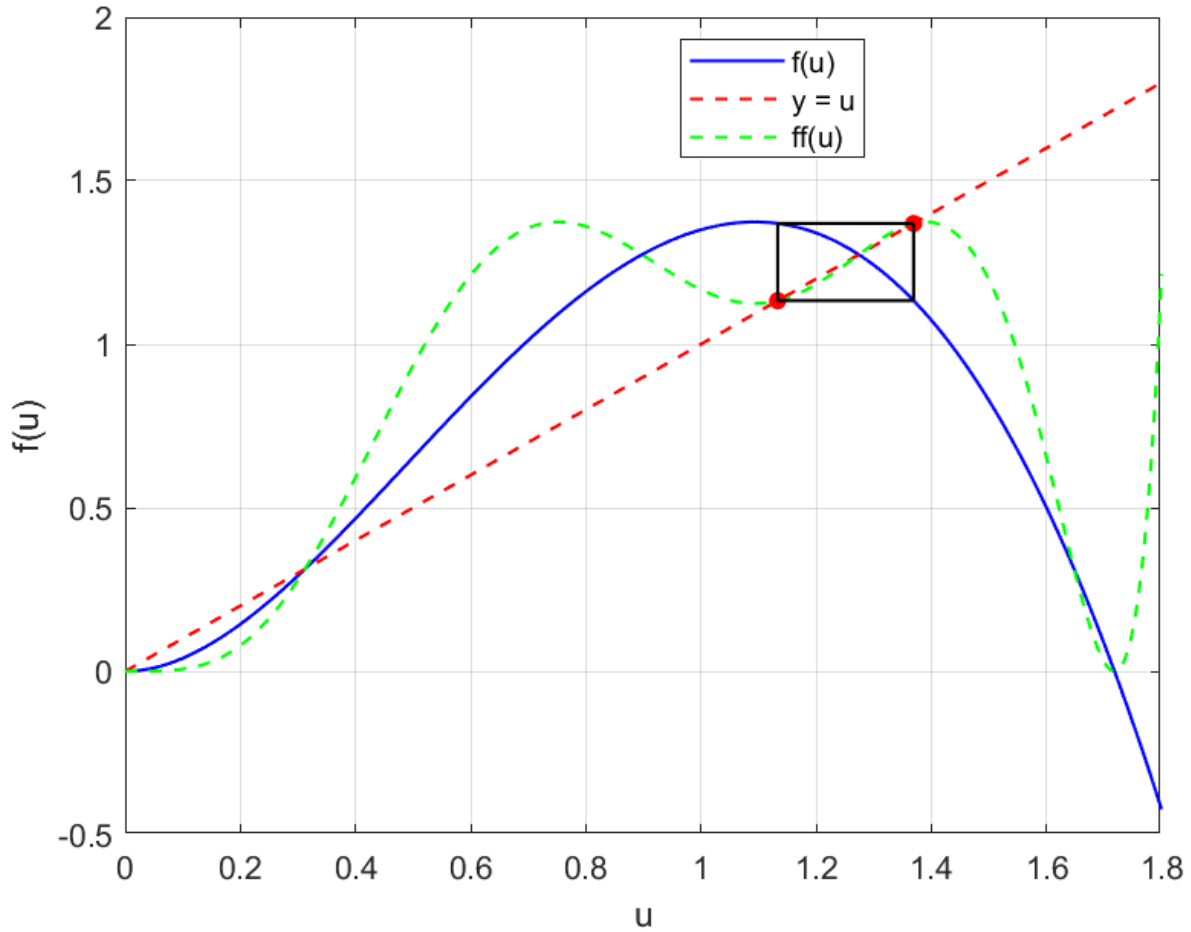


Рис. 8: цикл длины 2, при $r = 4.4$

2.4 Бифуркационная диаграмма

Определение. Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров динамической системы называется бифуркацией. **Определение.** Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Построим бифуркационную диаграмму для системы с начальной точкой $u^0 = 0.5$. Для этого будем перебирать значения параметра r от 0 до 6 с шагом 0.006 (см. рис. 9). Можно заметить, что подтверждается вывод о наличии цикла длины 3 (и любой другой длины).

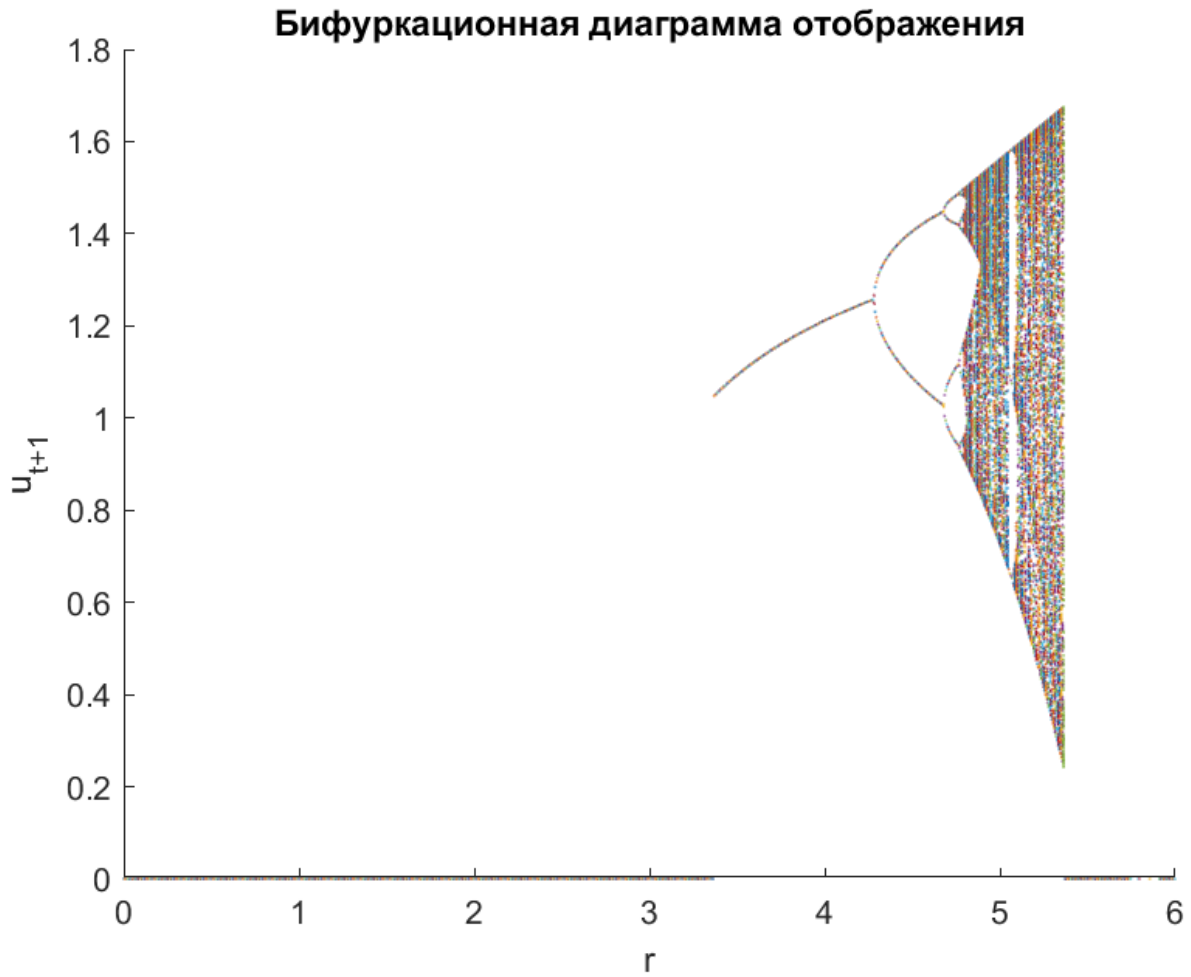


Рис. 9: $u_0 = 0.5$

2.5 Показатель Ляпунова

Показатель Ляпунова для системы определяется следующим образом:

$$p(u_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \ln |f'(u_t)|,$$

где $u_t = f(u_{t-1})$, $t = 1, 2, \dots, m$. При $p(u_0) < 0$ траектории, выпущенные из окрестности u_0 , остаются близки к траектории, выпущенной из этой точки (u_0, u_1, u_2, \dots) ; а при $p(u_0) > 0$ — отдаляются от неё.

Построим график показателя Ляпунова для системы с начальной точкой $u_0 = 0,5$ в зависимости от параметра r (рис. 10).

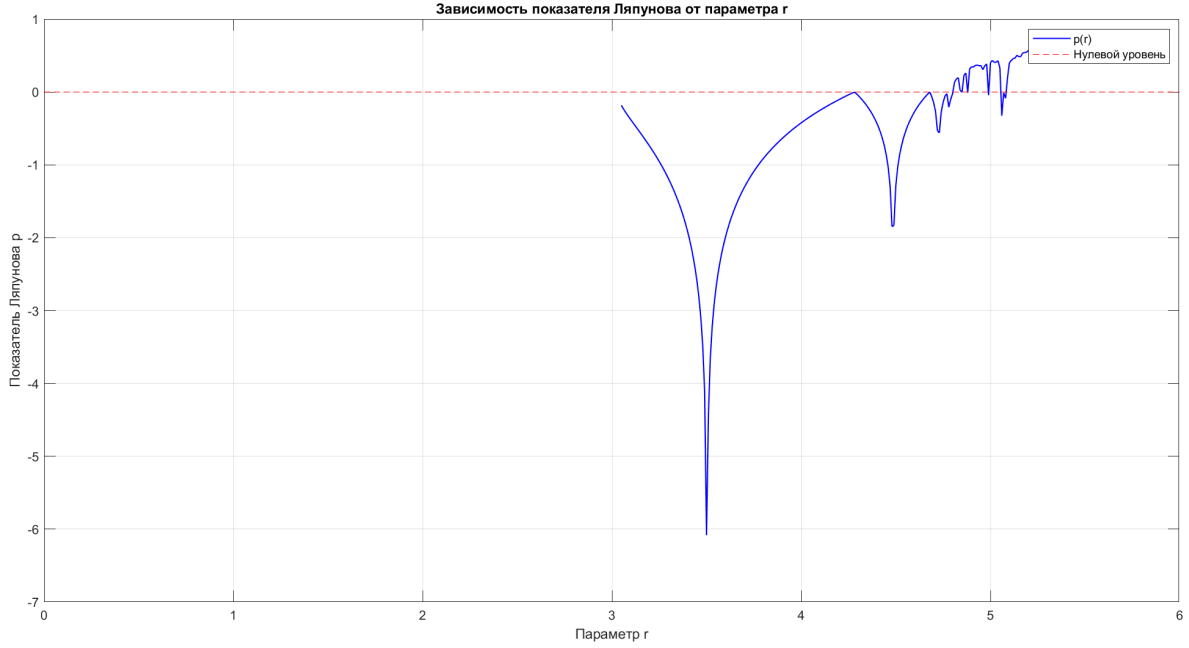


Рис. 10: $u_0 = 0.5$

3 Исследование системы с запаздыванием

Для начала преобразуем систему (2) в двумерную систему без запаздывания:

$$u_{t+1} = ru_t^2(1 - \ln(1 + u_{t-1})).$$

Для начала преобразуем систему [2] в двумерную систему без запаздывания:

$$u_{t+1} = ru_t^2(1 - \ln(1 + u_{t-1})) \Leftrightarrow \begin{cases} u_{t+1} = f(u_t, v_t), \\ v_{t+1} = g(u_t, v_t), \end{cases}$$

где $f(u, v) = ru_t^2(1 - \ln(1 + u_{t-1}))$, $g(u, v) = u$.

3.1 Особые точки системы

Для поиска особых точек воспользуемся системой

$$\begin{cases} u = ru^2(1 - \ln(1 + v)), \\ v = u. \end{cases}$$

Получим

$$u = ru^2(1 - \ln(1 + u))$$

Решения этой системы найдены в предыдущем разделе. Таким образом, получим следующие особые точки:

1. 1 особая точка (u_0^*, u_0^*) , $u_0^* = 0$ при $r < 3.0269$;
2. 2 особых точки (u_0^*, u_0^*) и (u_1^*, u_1^*) , $u_0^* = 0$ и $u_1^* \approx 0.76322$ при $r = 3.0269$;
3. 3 особых точки (u_0^*, u_0^*) , (u_1^*, u_1^*) и (u_2^*, u_2^*) , $u_0^* = 0$ и $0 < u_2^* < 0.76322 < u_3^*$ при $r > 3.0269$.

3.2 Устойчивость неподвижных точек

Для исследования устойчивости нам понадобится утверждение аналогичное одномерному случаю. **Определение** Пусть дана система $u_{t+1}^i = f^i(u_t^1, \dots, u_t^n)$, $i = \overline{1, n}$.

$$J(u^*) = \left[\frac{\partial f^i}{\partial u^j}(u^*) \right], \quad i, j = \overline{1, n}$$

— матрица Якоби системы в особой точке u^* . Собственные значения $J(u^*)$ называются мультипликаторами и обозначаются μ_1, \dots, μ_n .

Утверждение Пусть u^* — особая точка системы. Тогда

$$|\mu_i| < 1 \quad \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow u^* \text{ — асимптотически устойчивая особая точка.}$$

$$\exists i \in \overline{1, n} : |\mu_i| > 1 \Rightarrow u^* \text{ — неустойчивая особая точка.}$$

Для данной системы матрица Якоби будет выглядеть следующим образом:

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} 2ru(1 - \ln(1 + v)) & -\frac{ru^2}{1+v} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2.1 при $\forall r$ для (u_0^*, u_0^*) :

$$J(u_0^*, u_0^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

характеристическое уравнение $\lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Следовательно, нулевая неподвижная точка является асимптотически устойчивой при любом r .

3.2.2 при $r = 3.0269$ для (u_1^*, u_1^*) :

Подставляя это соотношение в матрицу Якоби, получаем

$$J(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Получаем корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Значит, об устойчивости в этом случае сказать ничего нельзя

3.2.3 при $r > 3.0269$ для (u_1^*, u_1^*) и (u_2^*, u_2^*)

Воспользуемся программой на языке Matlab. На рисунке 11 приведены зависимости собственных значений $\lambda_1(r)$ и $\lambda_2(r)$ от параметра r для обеих ветвей ненулевых неподвижных точек $u_1^*(r)$ и $u_2^*(r)$. Из графика видно, что для всех r , где существуют ненулевые особые точки, хотя бы одно из собственных значений по модулю не меньше единицы. В точке касания $r = r_{\min}$ оба собственных значения равны 1, а при $r > r_{\min}$ одно из них превышает 1 по модулю.

Таким образом, **все ненулевые неподвижные точки являются неустойчивыми**, независимо от значения параметра r . Единственной асимптотически устойчивой особой точкой системы остаётся начало координат $(0, 0)$.

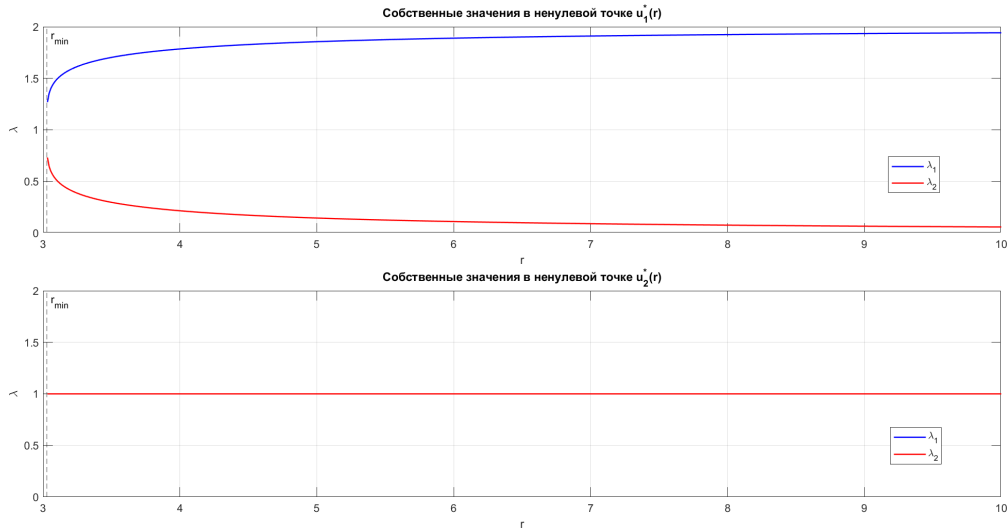


Рис. 11: Собственные значения $\lambda_1(r)$, $\lambda_2(r)$ ненулевых неподвижных точек $u_1^*(r)$, $u_2^*(r)$

График наглядно показывает, что при $r = r_{\min} \approx 3.0269$ ненулевые неподвижные точки находятся на границе устойчивости ($|\lambda| = 1$), а при $r > r_{\min}$ хотя бы одно из собственных значений превышает 1 по модулю, что означает неустойчивость этих точек.

3.3 Бифуркация Неймарка-Сакера

Определение. Бифуркация Неймарка-Сакера — бифуркация положения равновесия в системе, соответствующая паре собственных значений $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$:

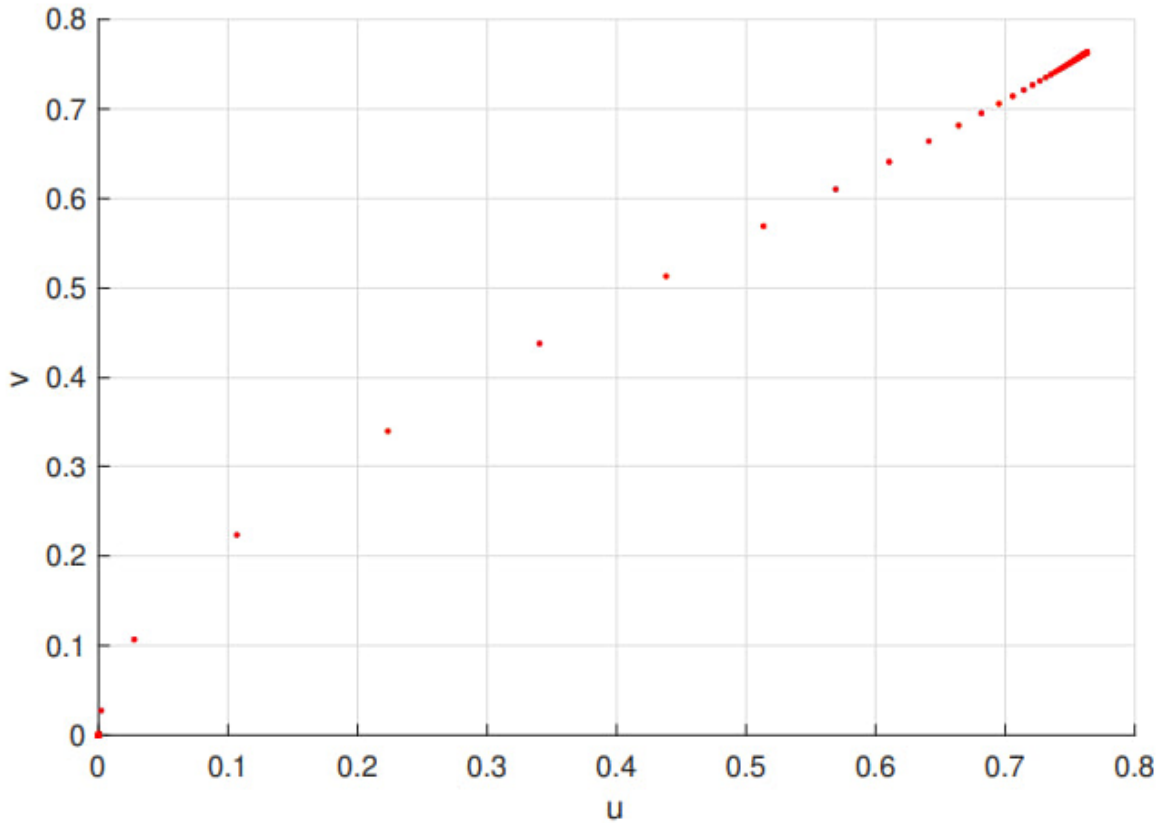


Рис. 12: Появление двух ненулевых особых точек при $r = 3.0269$

На рис. 12 показано появление двух ненулевых особых точек при $r = r_{\min} \approx 3.0269$. При этом количество решений уравнения возрастает с одной (нулевая точка) до трёх. Данный график подтверждает, что при $r = r_{\min}$ действительно возникают новые неподвижные точки.

Для проверки наличия бифуркации Неймарка–Сакера необходимо рассматривать собственные значения матрицы Якоби. Так как они действительные и не образуют комплексную сопряжённую пару, пересекающую единичную окружность, бифуркация Неймарка–Сакера отсутствует.

Литература

Абрамова В. В. Лекции по динамическим системам и биоматематике. 2024.

Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и методы в биологии*. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.