ALJABAR LINEAR

TUGAS 2

Dosen Pengampu:
Dr. Ellis Salsabila, M.Si.

Disusun oleh :

Khairul Akmal (1313624017)
Muhammad Pradipta Arya Anindita (1313624019)
Rafly Rabbani Zalfa Pateda (1313624051)
Trystan Prastanov Gabriel (1313624071)

PROGRAM STUDI SARJANA ILMU KOMPUTER 2024
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
10 APRIL 2025

Bab 1.3

Express the matrix equation as a system of linear equations

13. a $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Jawab:

Berdasarkan Example 8 Matrix Product as Linear Combinations, maka matrix diatas dapat ditulis menjadi seperti ini

$$x1 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x2 \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + x3 \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lalu dilakukan perkaliar skalar sehingga bentuknya menjadi seperti ini

$$\begin{bmatrix} 5x1 \\ -x1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6x2 \\ -2x2 \\ 4x2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7x3 \\ 3x3 \\ -x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga, sistem persamaan linear nya berbentuk seperti ini

$5x1 + 6x2 - 7x3 = 2$

$-x1 - 2x2 + 3x3 = 0$

$4x2 - x3 = 3$

13. b $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$

Jawab:

Berdasarkan Example 8 Matrix Product as Linear Combinations, maka matrix diatas dapat ditulis menjadi seperti ini

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Lalu dilakukan perkaliar skalar sehingga bentuknya menjadi seperti ini

$$\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 5x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ 3y \\ -3y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Sehingga, sistem persamaan linear nya berbentuk seperti ini

$x + y + z = 2$

$2x + 3y = 2$

$5x - 3y - 6z = -9$

Bab 1.4

No. 40

Simplify the expression assuming that A, B, C, and D are invertible.
$(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$

Jawab:

1. **Gunakan sifat invers matriks**
   Gunakan Rumus:
   $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

   Maka, menjadi:
   $(AC^{-1})^{-1} = (C^{-1})^{-1}A^{-1} = CA^{-1}$

2. **Substitusi ke dalam ekspresi berikut**
   $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$

   Maka, menjadi:
   $(CA^{-1})(AC^{-1})(CA^{-1})AD^{-1}$

3. **Sederhanakan bagian pertama**
   $\underline{(CA^{-1})(AC^{-1})}(CA^{-1})AD^{-1}$

   Akan mendapat:
   $(CA^{-1})(AC^{-1}) = C(A^{-1}A)C^{-1} = CIC^{-1} = CC^{-1} = I$ -> I = Identitas

4. **Lanjutkan penyederhanaan**
   $I \cdot (CA^{-1})AD^{-1}$

   Menjadi:
   $(CA^{-1})AD^{-1}$

5. **Sederhanakan ekspresi akhir**
   $\underline{(CA^{-1})A}D^{-1}$

   Akan menjadi:
   $(CA^{-1})A = C(A^{-1}A) = C \cdot I = C$

   Sehingga:
   CD^{-1}

No. 42

If A is a square matrix and n is a positive integer, is it true that $(A^n)^T=(A^T)^n$? Justify your answer.

Jawab:

Jika A adalah matriks persegi, maka pangkat bilangan bulat tak negatif didefinisikan sebagai:

Untuk n = 0, didefinisikan: $A^0 = I$ -> I = Identitas

Untuk n > 0, didefinisikan: $A^n = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots . \cdot A$ (Sebanyak n kali)

Disini, kita membuktikan bahwa $(A^n)^T=(A^T)^n$ itu benar

Kita akan menggunakan sifat transpose dari hasil kali matriks, yaitu $(AB)^T=B^TA^T$

Menurut sifat ini, hasil perkalian dua matriks adalah hasil kali transpose-nya, dengan urutan dibalik.

Maka:

$(A^n)^T = (A\cdot A\cdot\ldots\cdot A)^T = A^T\cdot A^T\cdot\ldots\cdot A^T = (A^T)^n$

Jadi, untuk matriks persegi A dengan n adalah bilangan bulat tidak negatif $(AB)^T=B^TA^T$ berlaku.

Bab 1.5

20. a) Diketahui matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana k_1, k_2, k_3, k_4 adalah bilangan bukan nol. Tentukan invers dari matriks tersebut

Jawab:

Diketahui bahwa k_1, k_2, k_3, k_4 adalah bilangan bukan nol, sehingga invers dari matriks dapat dicari

Selesaikan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan

Buat matriks gabungan [A|I]

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & k_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tukar baris agar matriks asal menjadi bentuk matriks identitas, tukar baris 1 dengan 4, 2 dengan 3

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Bagi tiap baris agar matriks asal menjadi matriks identitas

- Baris 1 dibagi dengan k_4
- Baris 2 dibagi dengan k_3
- Baris 3 dibagi dengan k_2
- Baris 4 dibagi dengan k_1

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ambil matriks di kanan sebagai invers dari matriks asal

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

22. Cari semua nilai dari *c*, jika ada, dimana matriks berikut dapat diinvers

$$A = \begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

Matriks bisa diinvers jika $\det(\mathrm{A}) \neq 0$

Cari det(A) dengan metode Sarrus

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} c & 1 & 0 & c & 1 \\ 1 & c & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Hitung diagonal

$(c \cdot c \cdot c) + (1 \cdot 1 \cdot 0) + (0 \cdot 1 \cdot 1) = c^3 + 0 + 0 = c^3$

Hitung anti diagonal

$(0 \cdot c \cdot 0) + (c \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot c) = 0 + c + c = 2c$

Kita kurangkan hasil dari diagonal dan anti diagonal, sehingga $\det(A) = c^3 - 2c$

$\det(A) = c^3 - 2c \neq 0$

$c(c^2 - 2) \neq 0$

$c \neq 0, c^2 - 2 \neq 0$

$c \neq 0, c^2 \neq 2$

$c \neq 0, c \neq \sqrt{2}, c \neq -\sqrt{2}$

Jadi matriks tersebut bisa diinvers ketika c adalah semua nilai real selain $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

Bab 1.6

11. solve the linear systems together by reducing the appropriate augmented matrix

$$4x_1 - 7x_2 = b_1$$
$$x_1 + 2x_2 = b_2$$

(i) $b_1 = 0,\ b_2 = 1$

(ii) $b_1 = -4,\ b_2 = 6$

(iii) $b_1 = -1,\ b_2 = 3$

(iv) $b_1 = -5,\ b_2 = 1$

Pembahasan:

1) Ubah persamaan menjadi bentuk matrix

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 4 & -7 & 0 & -4 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

2) Tukar R_1 dengan R_2

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 4 & -7 & 0 & -4 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & -4 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

3) Eliminasi elemen di bawah pivot pertama (x_1) dengan operasi $R_2 + (-4)R_1 \rightarrow R_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 0 & -4 & -1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + (-4)R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -4 & -28 & -13 & -9 \end{array}\right]$$

4) Normalkan pivot kedua dengan operasi $(-\frac{1}{11})R_2 \rightarrow R_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -4 & -28 & -13 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{(-\frac{1}{11})R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & \frac{28}{11} & \frac{13}{11} & \frac{9}{11} \end{array}\right]$$

5) Eliminasi elemen di atas pivot kedua (x_2) dengan operasi $R_1 + (-2)R_2 \rightarrow R_1$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & \frac{28}{11} & \frac{13}{11} & \frac{9}{11} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + (-2)R_2 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|c|c|c|c} 1 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{10}{11} & \frac{7}{11} & \frac{-7}{11} \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & \frac{28}{11} & \frac{13}{11} & \frac{9}{11} \end{array}\right]$$

6) Himpunan Penyelesaian

$$HP = \left\{x_1 = \frac{3}{11}, x_2 = \frac{4}{11} \middle| x_1 = \frac{10}{11}, x_2 = \frac{28}{11} \middle| x_1 = \frac{7}{11}, x_2 = \frac{13}{11} \middle| x_1 = \frac{-7}{11}, x_2 = \frac{9}{11}\right\}$$

Jadi, penyelesaian untuk masing-masing poinnya adalah:

(i) $x_1 = \frac{3}{11}, x_2 = \frac{4}{11}$

(ii) $x_1 = \frac{10}{11}, x_2 = \frac{28}{11}$

(iii) $x_1 = \frac{7}{11}, x_2 = \frac{13}{11}$

(iv) $x_1 = \frac{-7}{11}, x_2 = \frac{9}{11}$

Bab 1.7

Let A be an n x n symmetric matrix.

34. a Show that A^2 is symmetric.

Jawab:

Berdasarkan Definition 1 pada bab 1.7 disebutkan

DEFINITION 1 A square matrix A is said to be ***symmetric*** if $A = A^T$.

Maka jika A adalah n x n yang simetris, $A = A^T$

Diketahui bahwa $A^2 = A.A$

Kemudian ditranspose menjadi $(A.A)^T$

$= A^T . A^T$

$= (A^T)^2$

Berdasarkan Definition 1 diatas bahwa $A = A^T$, maka dapat diubah menjadi

$(A^T)^2 = A^2$

Maka A^2 adalah simetris