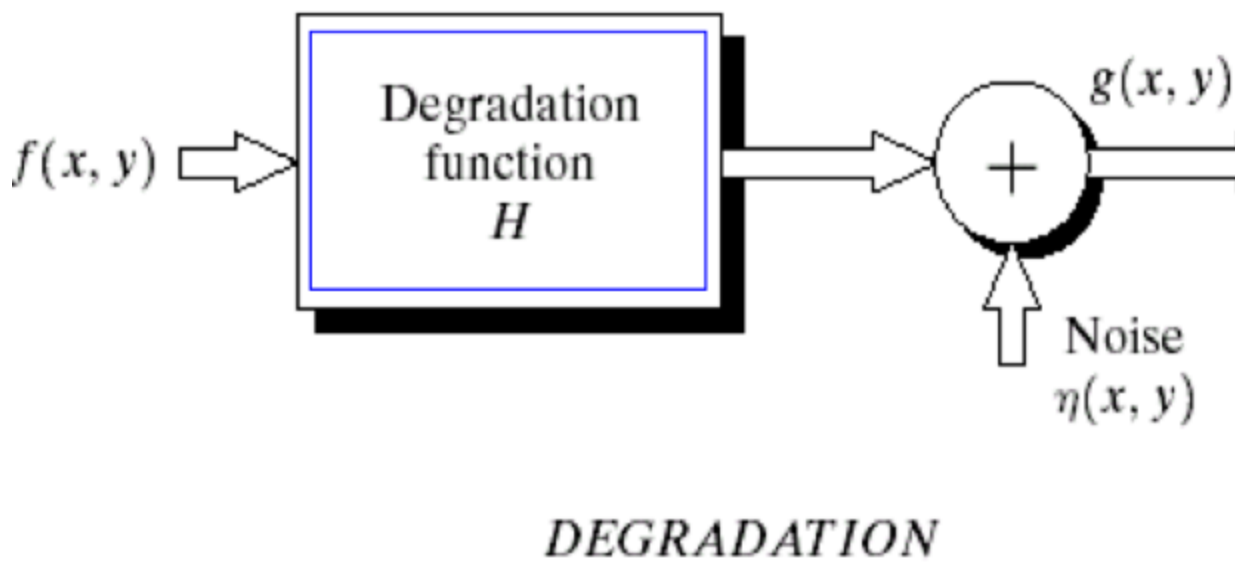


Image Restoration

Un'immagine può essere degradata durante l'acquisizione della foto, quindi quello che si può fare è ottenere l'inversa di questa trasformazione e riapplicarla alla foto degradata.

La restaurazione è diversa dall'enhancement, infatti la prima rappresenta una tecnica che permette di individuare la degradazione che è stata applicata alla foto e applicare la sua inversa, mentre l'enhancement (miglioramento) è un'euristica che permette di manipolare la foto affinché sia piacevole all'occhio umano.

Possiamo descrivere questa degradazione attraverso uno schema.



Qui si ha una funzione di degradazione chiamata **Point Spread Function** (PSF) che ha la caratteristica di essere lineare e spazialmente invariante. Questa funzione è seguita poi da un rumore additivo.

Si ha, quindi:

- $h(x, y) \rightarrow$ PSF
- $H(u, v) \rightarrow$ Funzione di Trasferimento

Ricordiamo che le caratteristiche della PSF sono:

- $H[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = aH[f_1(x, y)] + bH[f_2(x, y)]$
- $H[f(x - a, y - b)] = g(x - a, y - b)$

Guardiamo questo ragionamento:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

Se $g(x, y) = H[f(x, y)]$ allora possiamo vedere $g(x, y)$ come:

$$g(x, y) = H[f(x, y)] = H\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta\right]$$

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$$

Che per la proprietà della linearità di H si può riscrivere come:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$$

vediamo che $H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] = h(x - \alpha, y - \beta)$

In conclusione con $\eta = 0$ viene:

$$g(x, y) = f(x, y) \otimes h(x, y)$$

Altrimenti con $\eta \neq 0$:

$$g(x, y) = f(x, y) \otimes h(x, y) + \eta(x, y)$$

Natura dei disturbi

I disturbi che abbiamo sono:

- PSF (Point Spread Function): rappresenta un disturbo che viene solo da l'hardware e quindi dal nostro sistema di acquisizione. È un disturbo collegato alla natura delle lenti e è qualcosa che possiamo controllare e risolvere una volta che il sistema è stato ingegnerizzato.
- Rumore: è un segnale casuale stocastico che quindi non possiamo controllare, dovuto a fluttuazioni non volute o altro. Non possiamo sapere i valori specifici per il rumore ma possiamo capirne il modello e le sue proprietà statistiche.

Caso in cui si ha solo rumore:

Il primo caso che studiamo è quello in cui si ha solo il rumore, e si ipotizza che la funzione di trasferimento è un'identità, di conseguenza la nostra equazione è questa:

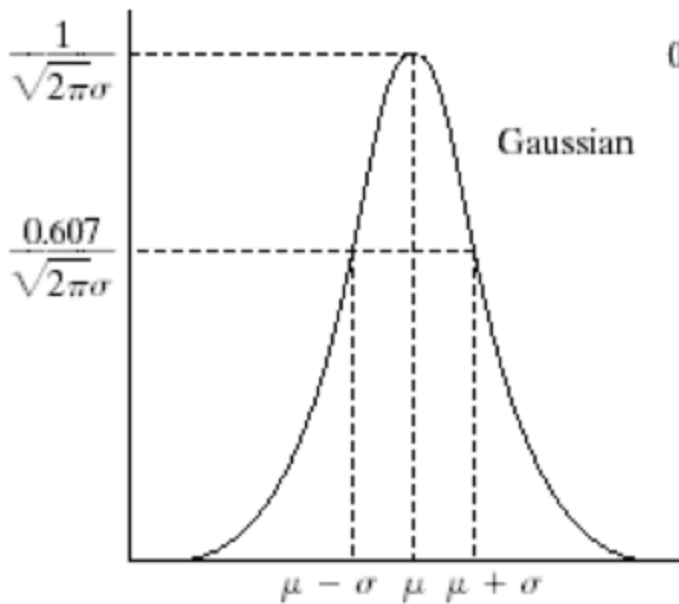
$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

Il rumore può venire da numerose fonti durante l'acquisizione ma anche la trasmissione (nel caso di foto spaziali).

Il rumore può avere più modelli.

Rumore Gaussiano:

Quello più comune ed è attribuito al rumore dei circuiti elettronici e del sensore. Si chiama distribuzione normale se ha media nulla e varianza uno.



$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\mu)/2\sigma^2}$$

Rumore di Rayleigh:

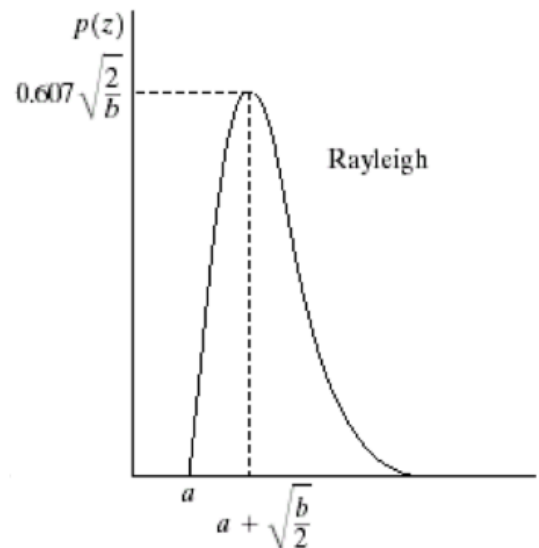
$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b} (z - a) e^{-(z-a)^2/b} & \text{for } z \geq a \\ 0 & \text{for } z < a. \end{cases}$$

mean

$$\mu = a + \sqrt{\pi b/4}$$

variance

$$\sigma^2 = \frac{b(4 - \pi)}{4}$$



Rumore Gamma:

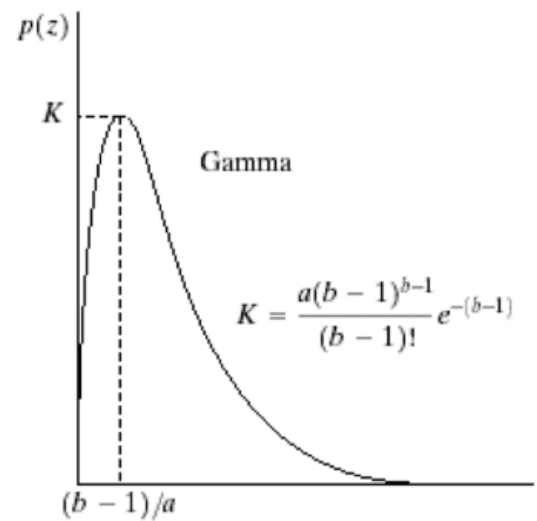
$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

mean

$$\mu = \frac{b}{a}$$

variance

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$



Rumore Esponenziale:

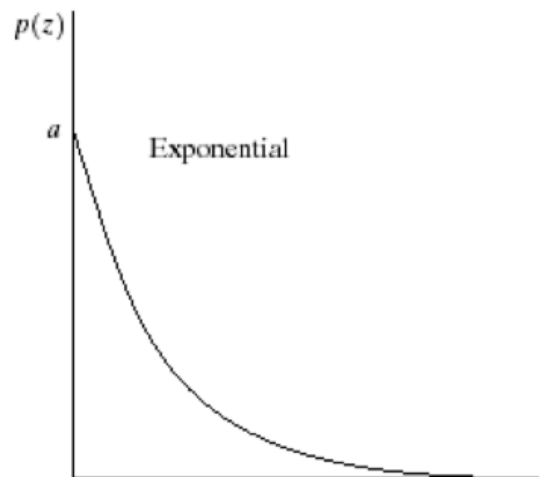
$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

mean

$$\mu = \frac{1}{a}$$

variance

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$

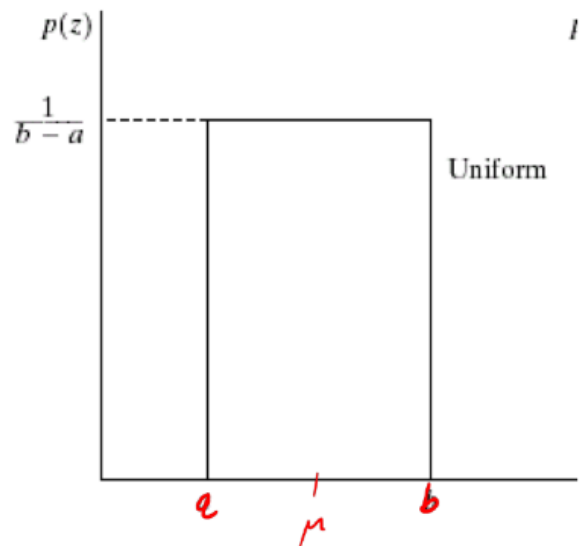


Rumore Uniforme:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

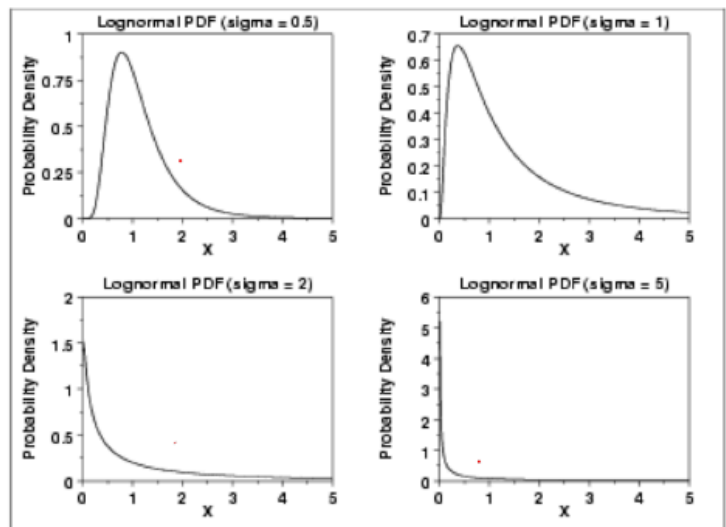
Mean: $\mu = \frac{a+b}{2}$

Variance: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$



Rumore Logaritmico:

A variable X is lognormally distributed if $Y = \ln(X)$ is normally distributed with “ln” denoting the natural logarithm



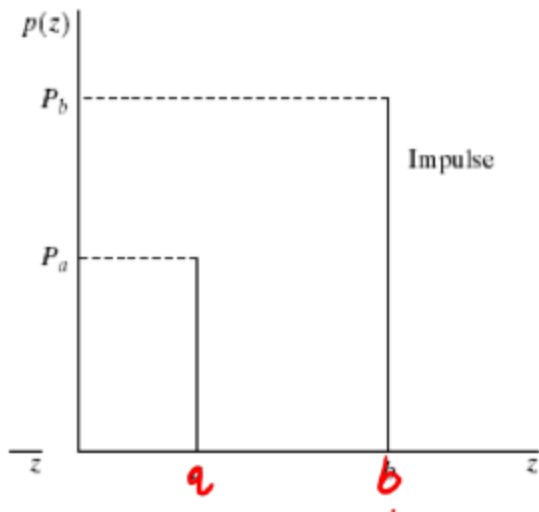
$$f(x) = \frac{e^{-((\ln x)^2 / 2\sigma^2)}}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \quad x > 0; \sigma > 0$$

Rumore Salt & Pepper:

In questo rumore le transizioni sono molto veloci.

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se una delle due probabilità è zero allora si chiama **unipolare** altrimenti **bipolare**.



Rumore Periodico:

Si ha con interferenze elettriche o elettromeccaniche durante l'acquisizione dell'immagine. Può essere ridotto molto attraverso il filtraggio nel dominio di frequenza.

Il rumore è questo:

$$r(x, y) = A \sin\left[\frac{2\pi u_0(x + B_x)}{M} + \frac{v_0(y + B_y)}{N}\right]$$

Stima Parametri dei Rumori:

Si possono stimare i parametri dei rumori analizzando le immagini prodotte dal sistema di acquisizione.

La stima dei rumori si può fare guardando lo spettro di frequenza e notando dei picchi periodici. Se il sistema di acquisizione è disponibile allora si può scattare delle foto con sfondo omogeneo e quindi con contenuto piatto dove non si ha alto livello energetico nella frequenza.

Altrimenti se non si dispone di niente si possono prendere delle strisce di immagine con contenuto piatto (area costante), dopo di che disegnare l'istogramma e misurare varianza e valore atteso.

Se non è un rumore gaussiano attraverso questi due parametri si può ottenere gli altri.

Il valore atteso si calcola in questo modo:

$$\mu = \sum_{z_i \in S} z_i p(z_i)$$

$$\sigma^2 = \sum_{z_i \in S} (z_i - \mu)^2 p(z_i)$$

La forma dell'istogramma ci fa capire che tipo di modello abbiamo.

Il rumore ad impulso per essere riconosciuta ha bisogno di un'area costante nell'immagine per poter creare l'istogramma. L'altezza dei picchi corrisponde ai pixel da bianco a nero che sono le stime di P_a e P_b .

Filtri per la restaurazione

Quando si ha solo il rumore il miglior metodo di restaurazione è il **Filtraggio Spaziale** che ha i seguenti filtri:

- Mean Filter
- Order-Statistic Filter
- Adaptive Filter

Arithmetic Mean and Geometric Mean Filter:

Può essere tramite media aritmetica o geometrica. Sostanzialmente ogni pixel in output (x,y) è dato (nel caso della geometrica) dal prodotto dei pixel dentro la maschera e poi elevato alla potenza di $1/mn$.

Mentre nel caso della media aritmetica la maschera è fatta solo da $1/mn$ dove mn sono la lunghezza e la larghezza della maschera.

arithmetic mean $\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)$

Geometric Mean: $\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$

Harmonic Mean Filter:

Viene utilizzata per rumori ad impulsi (Salt) e Gaussiano mentre non funziona con il rumore pepper.

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s,t)}}$$

Poichè possiamo vedere che se nella maschera si hanno valori scuri allora si avrà ampliamento dei "grani".

Contraharmonic Mean Filter:

Mentre questo viene utilizzato per eliminare sia salt che pepper tranne per tutti e due simultaneamente.

Pepper Noise → Q positivi

Salt Noise → Q negativi

Q è l'ordine del filtro

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t)^Q}$$

Utilizzare l'ordine sbagliato per filtrare questo tipo di rumore peggiora le cose.

Max/Min Filter:

Si prende il max/min valore della maschera.

Max Filter è efficace per il pepper noise mentre il Min Filter è efficace per il Salt Noise.

Median Filter:

Sappiamo già cosa fa questo filtro, riordina i valori della sotto maschera e poi prende quello nel mezzo.

Filtri per i rumori periodici:

Abbiamo detto che questi rumori si hanno grazie ad effetti di interferenza elettromagnetica/elettrica e da allo spettro di frequenza dei pattern periodici.

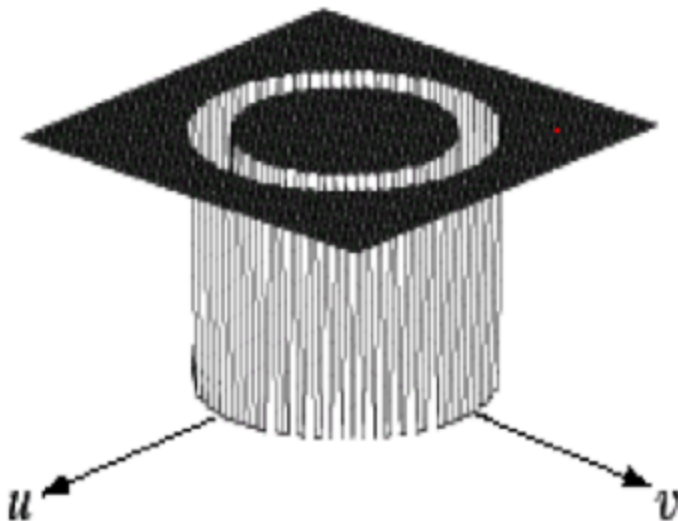
Le tecniche nel dominio di frequenza sono molto più efficaci per levare il rumore periodico e si hanno i seguenti filtri:

- Bandreject - Filter
- Bandpass- Filter
- Notch Filter

Bandreject Filter

Questo filtro, come dice la parola, cancella le frequenze di una certa banda.

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u, v) < D_1 \\ 0 & \text{se } D_1 \leq D(u, v) \leq D_2 \\ 1 & \text{se } D(u, v) > D_2 \end{cases}$$



$$W = D_2 - D_1$$

Ricordarsi i filtri di frequenza trattati nel capitolo dei miglioramenti, si ha anche il Butterworth che viene rappresentato così:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2}$$

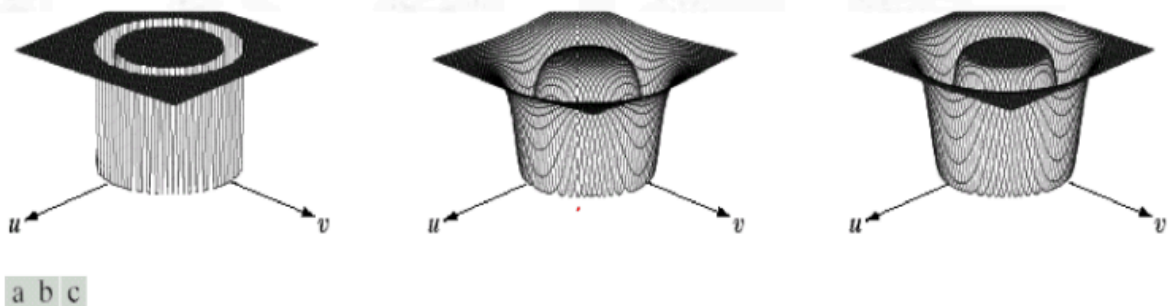


FIGURE 5.15 From left to right, perspective plots of ideal, Butterworth (of order 1), and Gaussian bandreject filters

Bandpass Filters:

Se facciamo un filtro passa banda questo sarà fatto in questo modo:

$$H(u, v) = 1 - H_{br}(u, v)$$

Può servire a prendere il rumore della foto.

Notch Filter:

Questo filtro respinge o fa passare solo determinate zone dello spettro, che sono centrate in un certo punto.

The transfer function of an ideal notch reject filter of radius D_0 , with centers at (u_0, v_0) and, by symmetry, at $(-u_0, -v_0)$, is

$$H_{nr}(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ or } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D_1(u, v) = [(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = [(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + v_0)^2]^{1/2}$$

$-(-u_0)$

$-(-v_0)$

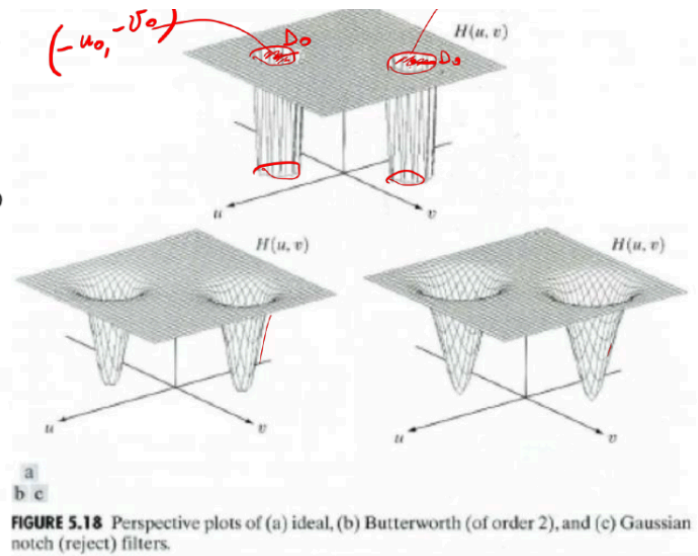


FIGURE 5.18 Perspective plots of (a) ideal, (b) Butterworth (of order 2), and (c) Gaussian notch (reject) filters.

Questo filtro è utile per casomai levare componenti orizzontali o verticali dati da rumori sotto forma di righe in sottofondo.

Caso in cui il rumore è zero e la funzione di trasferimento non è un'identità:

Ci sono tre modi per capire la funzione di trasferimento:

- Tramite stima di un modello matematico
- Tramite osservazione
- Stima attraverso esperimento

Tramite osservazione:

Si prende una finestra nell'immagine e si guadagnano informazioni da lì. Se si prende una piccola sezione dell'immagine $g_s(x, y)$ che contiene strutture semplici (come una parete) e uno che contiene forte segnale (un oggetto), allora si possono stimare i pixel originali nella finestra usando i livelli di grigio campione dell'oggetto e lo sfondo ottenendo $\hat{f}(x, y)$. (supponendo che il rumore sia trascurabile).

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

Stima attraverso esperimento:

Se $f(x, y) = A \cdot \delta(x, y) \rightarrow g(x, y) = A \cdot h(x, y)$ dove nel dominio di frequenza:

$$G(u, v) = A \cdot H(u, v)$$

Quindi:

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$

Questo impulso si crea facendo passare un filo di luce in una foto nera.

Ovviamente questa stima si può fare se abbiamo il dispositivo.

Stima attraverso modello matematico:

Si cerca di capire la causa del disturbo e creare un modello che simuli questi disturbi, a questo punto fare la inversa da moltiplicare alla $G(u, v)$ per ottenere la nostra $F(u, v)$.

Supponiamo che un'immagine $f(x, y)$ subisca un movimento planare e che $x_o(t)$ e $y_o(t)$ siano il movimento a tempo variabile delle componenti nelle direzioni X e Y.

L'esposizione totale in qualsiasi punto del terreno di registrazione si ottiene integrando l'esposizione istantanea nell'intervallo di tempo durante il quale l'otturatore del sistema di imaging è aperto.

$$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_o(t), y - y_o(t)) dt$$

quindi:

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T f(x - x_o(t), y - y_o(t)) dt \cdot e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Si può portare l'integrale rispetto a t fuori dagli altri integrali, facendo uno scambio di integrali.

$$G(u, v) = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_o(t), y - y_o(t)) dt \cdot e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Ma ricordiamo che $x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$ di conseguenza l'equazione sopra diventa:

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot \int_0^T e^{-j2\pi(ux_o(t)+vy_o(t))} dt = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

dove:

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi(ux_o(t)+vy_o(t))} dt$$

Se $x_o(t)$ e $y_o(t)$ sono conosciuti allora possiamo ricavare $H(u, v)$.

Invertire la funzione di degradazione:

Sappiamo che:

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v)$$

allora la funzione restaurata può essere scritta come:

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

In generale sappiamo che l'uscita non è solo influenzata dalla Point Spread Function ma anche dal rumore. Infatti si può riassumere così:

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v) + N(u, v)$$

Dove N è il rumore, vediamo che se sostituiamo questa equazione alla frazione di prima si ha una cosa del genere:

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

Si evidenzia una cosa importante da qui, che con valori piccoli di $H(u, v)$ si ottengono grandi valori, corrompendo la foto in questo modo.

Una **soluzione** è quello di filtrare la frequenza nella zona delle origini poichè lì si hanno valori alti di $H(u, v)$ riducendo la probabilità di incorrere a valori bassi.

Per tagliare fuori queste frequenze si può usare un **filtro Butterworth** con ordine 10.

Vediamo che se il rumore non c'è questa tecnica può funzionare senza l'utilizzo del filtro Butterworth.

Filtro di Wiener:

Riesce ad unire la funzione di degradazione e le caratteristiche statistiche del rumore nel processo di restaurazione. Esso vuole trovare il minimo errore quadratico medio $E(f - \hat{f})^2$.

Questo filtro è importante e se si hanno le seguenti ipotesi allora possiamo concludere che $H(u, v)$ ha un certo valore.

Le ipotesi sono:

- rumore ed immagine sono incorrelate
- uno dei due ha media zero
- i livelli del grigio nell'immagine stimata sono una funzione lineare dei grigi di quella deteriorata.

allora la funzione che da minimo errore è data da:

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_n(u, v)/S_f(u, v)} \right] G(u, v)$$

Dove quindi la funzione di trasferimento $H_w(u, v)$ è:

$$H_w(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} \right]$$

$S_\eta(u, v)$: è la potenza dello spettro del rumore.

$S_f(u, v)$: è la potenza dello spettro dell'immagine degradata.

Il rapporto di questi è chiamato *noise to signal power ratio* e se questo è a zero allora il filtro degenera in un Inverse Filter.

Un altro approccio usato frequentemente è quello di sostituire il *noise to signal power ratio* con una costante K.

Questo filtro viene chiamato **Parametric Wiener Filter**, dove si può sperimentare iterativamente variando la costante K e guardando i risultati.

Il filtro di Wiener riesce a dare risultati accettabili anche con rumore alto, facendo distinguere le parti salienti dell'immagine, cosa che è meno possibile con Inverse Filter.

Ci sono le seguenti casistiche:

- utente fornisce la funzione della potenza dello spettro (PSF) dell'immagine e non del rumore di conseguenza si usa l'Inverse Filter.
- utente fornisce il PSF e uno scalare stimato K del noise to signal power ratio. Si usa la parametrica.
- utente fornisce PSF e la frequenza dipendente stimata dal noise to signal power ratio, attraverso le loro funzioni.

Molto spesso, non si sa la funzione di degradazione, quindi viene assunta come $H=1$ facendo sì che dal filtro di Wiener si ottenga questa formula:

$$H_w(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)}} = \frac{S_f(u, v)}{S_f(u, v) + S_\eta(u, v)}$$

Poiché la potenza di uno spettro è reale e non nullo anche $H_w(u, v)$ è reale. Di conseguenza questo filtro non modifica la fase ma solo l'ampiezza.

Il filtro si comporta in questo modo:

- se $S_\eta(u, v) \rightarrow 0$ allora tende a preservare le frequenze alte dell'immagine.
- se $S_\eta(u, v) \rightarrow \infty$ allora tende ad attenuare le frequenze basse dell'immagine.

Filtro Adattivo:

Nei filtri precedenti avevamo l'assunzione che il rumore fosse omogeneo e che quindi non cambiasse da regione a regione, mentre tipicamente in un immagine il rumore cambia da zona a zona.

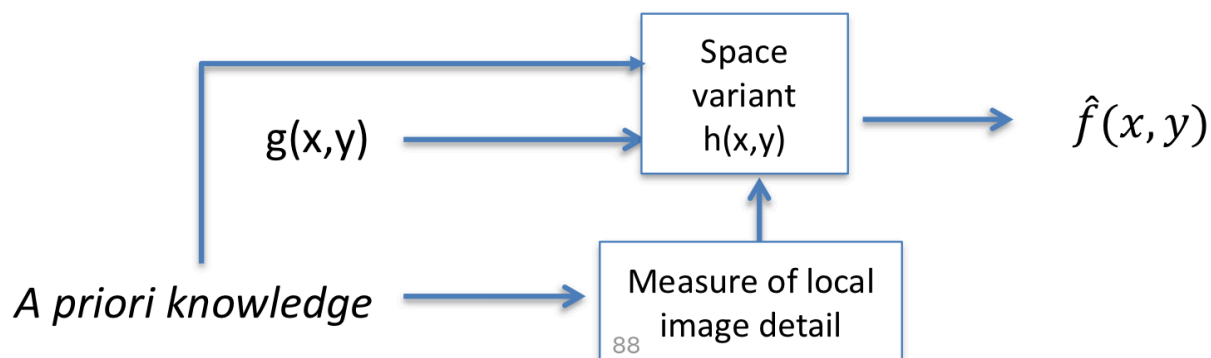
(Esempio: muri e cieli hanno approssimativamente rumore omogeneo rispetto a palazzi o alberi)
La degradazione cambia da regione a regione.

Ci sono vari tipi di processamento delle immagine in modo adattivo:

- *pixel by pixel*: il processamento è adattato in base al pixel, per ogni pixel si determina il suo valore in base alle caratteristiche locali dell'immagine, la degradazione o altre info intorno a questo pixel. **Computazionalmente Costoso** ed è implementato nel dominio dello spazio
- *block by block* o *subimage by subimage*: l'immagine è divisa in molte sottoimmagini e ognuno di essi viene processata separatamente e combinata. Meno costosa. Generalmente più flessibile nell'implementazione poichè può essere fatta nel dominio dello spazio e nel dominio della frequenza.

Per ogni sottoimmagine viene scelta un'operazione spazialmente invariante appropriata alla sottoimmagine scelta sulla base delle caratteristiche di questa sottoimmagine, della degradazione e altre caratteristiche.

Questi filtri permettono di ridurre il rumore senza avere un effetto blur (come Average Filter).
È determinata la misura dei dettagli locali dell'immagine senza rumore attraverso l'utilizzo di conoscenze a priori e l'immagine degradata.



I dettagli locali dell'immagine senza rumore $\hat{f}(x,y)$ vengono ricavati a partire dai dettagli dell'immagine degradata e dalle misure di dettagli locali a partire da conoscenze a priori.

- Quando il rumore è a banda larga, $h(x,y)$ è di carattere low pass. Di modo che si preservino le frequenze più basse e quindi cancellando quelle più alte.
- In regioni di immagini a bassa dettaglio come regioni di intensità uniforme, in cui il rumore è più visibile, viene eseguita una grande quantità di filtraggio lowpass per ridurre il maggior numero possibile di rumore.

- Poiché la piccola variazione del segnale è presente in regioni a bassa dettaglio, anche una grande quantità di filtraggio LP non influisce in modo significativo del segnale.
- In regioni di immagini ad alta dettagliata, in cui è presente un elemento di segnale di grandi dimensioni, viene eseguita solo una piccola quantità di filtraggio lowpass in modo da non distorcere (sfocatura) il componente del segnale.

Filtro Mediano Adattivo

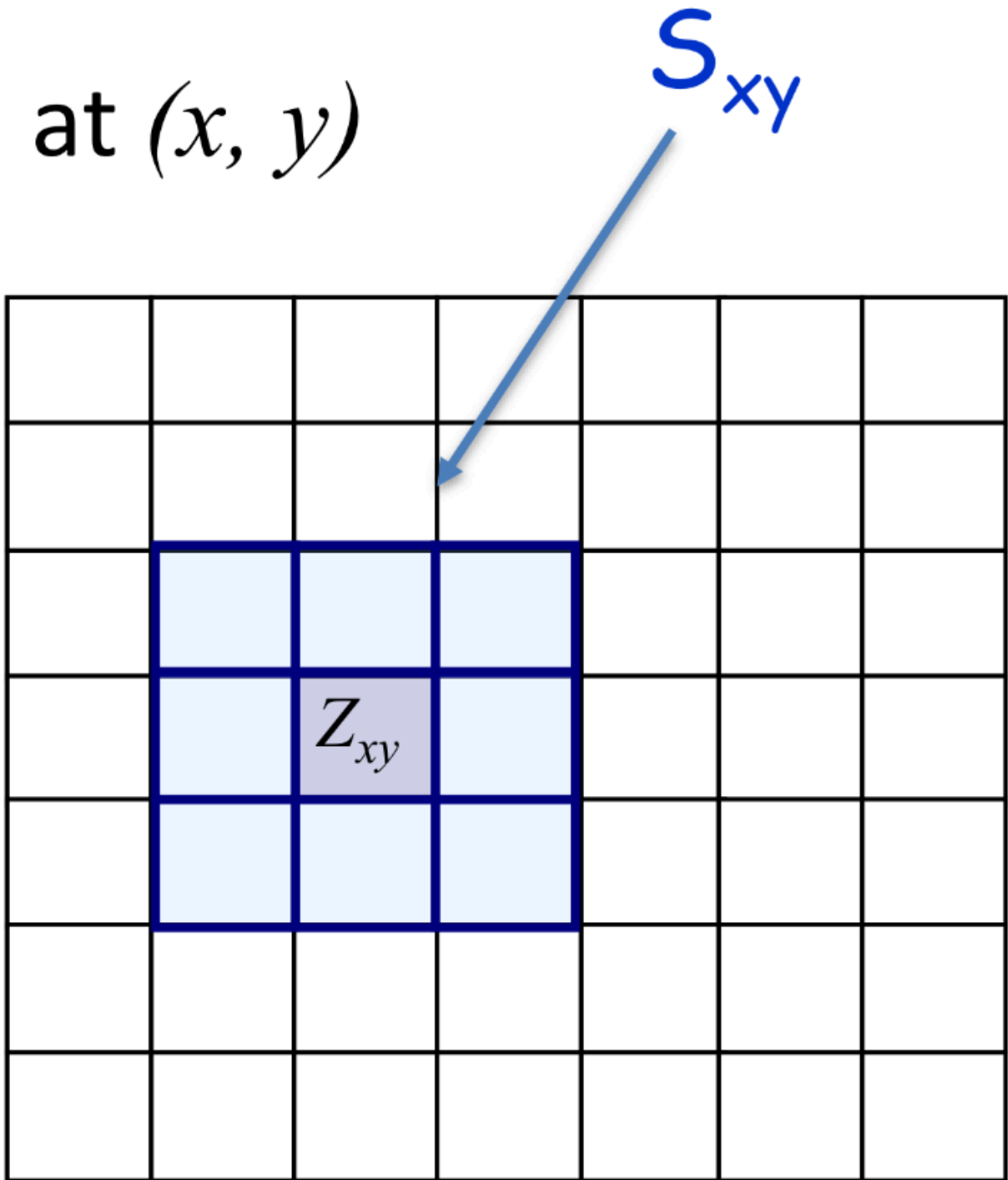
Questo filtro performa relativamente bene col rumore ad impulso, esso può gestire meglio il rumore a impulso denso e performa anche lo smoothing per il rumore non impulsivo.

Questo filtro ha tre obiettivi:

- ridurre rumore impulso
- riduce distorsione

- provvede a lisciare l'immagine

ed at (x, y)



91

Notazione:

- z_{xy} = livello di grigio alle coordinate (x,y)
- S_{xy} = dimensione maschera
- z_{min} = min valore di grigio nella maschera
- z_{max} = max valore di grigio nella maschera
- z_{med} = mediana del livello di grigi

- S_{max} = massima maschera

Stage A:

$$A1 = z_{med} - z_{min}$$

$$A2 = z_{med} - z_{max}$$

If $A1 > 0$ and $A2 < 0$, Go to stage B

Else increase the window size

If window size $\leq S_{max}$ repeat stage A

Else output z_{med}

Se $A1 > 0$ e $A2 < 0$ allora vuol dire che il mediano ha un valore normale e quindi non è un impulso.

Se $A1 < 0$ o $A2 > 0$ vuol dire che z_{med} è minore del minimo(nero) o maggiore del massimo vuol dire che potrebbe essere un impulso quindi viene aumentata la finestra e ripetuto il confronto con $A1$ e $A2$. Se si arriva al max allora in output si ha lo z_{med} (calcolato ad ogni incremento della finestra).

Stage B:

$$B1 = z_{xy} - z_{min}$$

$$B2 = z_{xy} - z_{max}$$

If $B1 > 0$ and $B2 < 0$, output z_{xy}

Else output z_{med}

Qui vedo, invece, se z_{xy} è un impulso, se lo è imposto il pixel(x,y) al valore z_{med} altrimenti z_{xy} .

Filtro di Wiener Adattivo

Sappiamo che il filtro di Wiener ha bisogno di conoscenza sulla media del segnale della foto e del rumore con i relativi spettri.

Invece di assumerli fissati si può stimarli localmente.

Il design del filtro dipende su come sono stimati questi filtri.

with Known Noise Removed by Wiener Filter

Portion of the Image with Noise Removed by Wiener F

