

# 《电动力学导论》(Griffiths) 学习笔记

Siyan Dong

## 引言

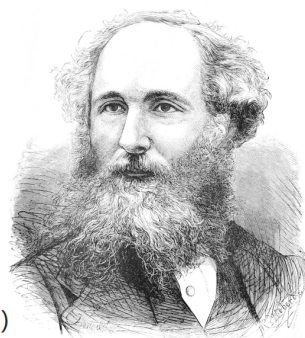
本文主要基于知乎笔记（原名为《电动力学导论》(Griffiths) 学习总结）进行部分修正与简化，主要对电动力学学习进行导论介绍与复习电磁学相关内容；另外 Griffiths 的《电动力学导论》是本非常好的教材（甚至可以说是天花板）通俗易懂，例题优秀；强烈建议啃读！

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{高斯定理})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{安培环路定律})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{电磁感应})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{麦克斯韦位移电流})$$



## 第1章 静电学

### 1.1 相关计算

静电学的核心原理是静电力的叠加原理和 Coulomb 定律，由此引出电场、电势的概念，力的叠加原理导致了电场和电势的叠加原理。

电场的计算：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dq & (\text{连续}) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i|^3} q_i & (\text{离散}) \end{cases} \quad (1.1)$$

电场的散度和旋度：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauss 定理}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

注 1: 对于离散电荷分布,  $\rho = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r}'_i)$

注 2: 若电荷分布球对称、柱对称和面对称, 则电场分布的大小和方向可以部分确定, 其余部分可以通过 Gauss 定理确定, 进而可以确定完整的电场分布。

电场无旋使得我们可以定义电势, 相关方程如下:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ V(\mathbf{a}) - V(\mathbf{b}) &= \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ \mathbf{E} &= -\nabla V \end{aligned} \quad (1.3)$$

电势的计算 (选取无穷远为参考点):

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dq & (\text{连续}) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i|} q_i & (\text{离散}) \end{cases} \quad (1.4)$$

对于不同类型的连续电荷分布,  $dq$  具有不同的形式:  $dq = \lambda(\mathbf{r}') d\mathbf{l} = \sigma(\mathbf{r}') d\mathbf{a} = \rho(\mathbf{r}') d\tau$

注: 若电荷分布不在一个有限的范围内, 上面的公式给出的结果可能发散。这种问题一般具有某种对称性允许我们直接求出电场, 之后再根据定义求出电势, 此时应另选参考点。

解决静电学问题, 利用电势 (标量) 会比电场 (矢量) 便利, 为此需要导出仅包含电势的方程。Laplace 方程与 Poisson 方程:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \quad (\text{Laplace 方程, 对应无电荷空间}) \\ \nabla^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Poisson 方程, 对应有电荷空间}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

## 1.2 边值关系

在穿过带电的表面时, 电场 (即电势的梯度) 可能会发生突变, 这些突变可以通过在表面附近应用 Gauss 定理和旋度定理得到。电场的边值关系:

$$\mathbf{E}_{\text{above}} - \mathbf{E}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (1.6)$$

电势的边值关系:

$$\begin{aligned} V_{\text{above}} &= V_{\text{below}} \\ \frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.7)$$

注:  $\hat{n}, \frac{\partial}{\partial n}$  指的是由表面下指向表面上的方向, 这些都是随意指定的, 如果改变表面上与表面下的约定则等式两边的方向或正负都会改变。

## 1.3 能量相关

布置某个离散的电荷系统 (从无穷远将各个电荷移动至对应位置) 至少需要做的功 (也即某个离散电荷分布中存储的静电能):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_{\text{other}}(\mathbf{r}_i) \quad (1.8)$$

其中  $V_{\text{other}}(\mathbf{r}_i)$  指的是其他电荷在  $q_i$  所在处  $\mathbf{r}_i$  产生的电势。由于点电荷的自能发散, 在计算时, 实际上是在所有点电荷自能的基础上产生的。

连续电荷系统中存储的静电能:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V(\mathbf{r}) d\tau \quad (1.9)$$

对于连续电荷分布, 与某点十分接近的电荷在该点产生的电势趋于 0, 因此  $V$  与  $V_{\text{other}}$  没有任何区别。

利用  $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$  可以化简连续系统中存储的静电能:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int_V E^2 d\tau + \oint_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right] \\ &= \int_{\text{all space}} \frac{\epsilon_0}{2} E^2 d\tau \end{aligned} \quad (1.10)$$

对于静电学问题, 认为能量存储在电荷还是存在电场中是等价的, 但是在更一般的问题中, 认为能量存储在电场中是更合适的。由于静电能的积分中出现平方项, 因此叠加原理不成立:

$$U_{\text{tot}} = U_1 + U_2 + \epsilon_0 \int_{\text{all space}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau \quad (1.11)$$

注: 对于两个点电荷, 交叉项  $\epsilon_0 \int_{\text{all space}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$  即两电荷之间的互能  $W_{\text{interaction}}$  (见 Q 2.37) 静电能的计算方法:

1. 利用  $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_{\text{other}}$  或  $U = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau$  计算
2. 利用  $U = \int_{\text{all space}} \frac{\epsilon_0}{2} E^2 d\tau$  计算, 注意要对全空间积分
3. 利用定义: 布置一个电荷系统需要提供的能量或拆散一个电荷系统可以获得的能量 (见 Prob 2.35)

## 1.4 导体

称一个拥有足够多能够在其中自由运动的电子 (自由电子) 的物质为导体, 在外场中导体具有如下性质:

1. 导体内部  $\mathbf{E} = 0$  进而  $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , 则导体中所有电荷都分布在导体表面 (最基本的性质, 这是形成稳定电荷分布的必要条件)
2. 导体是一个等势体 (由内部  $\mathbf{E} = 0$  以及电势差计算公式)
3. 导体外附近电场与导体垂直 (由内部  $\mathbf{E} = 0$  以及边界条件) 注: 导体内部  $\mathbf{E} = 0$  与 Coulomb 定律取什么形式无关, 但是内部  $\rho = 0$

只有 Coulomb 定律是平方反比时才成立 (见 Prob 2.54)。带电表面上的某一块 (足够小) 电荷在其两侧产生的电场  $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , 这是穿过表面时电场强度跃变的直接原因。由此可以确定表面上某一块电荷所受到的力:

$$\mathbf{F} = \sigma A \frac{\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}}}{2} = \sigma A \mathbf{E}_{\text{avg}} \quad (1.12)$$

对于导体表面,  $\mathbf{E}_{\text{below}} = 0$  则静电力对导体表面产生的静电 (排斥) 压强  $P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$  这也可以由虚功原理以及由电场表述的静电能表达式得到。

## 第2章 电势

### 2.1 Laplace 方程的解性质与静电边值唯一性定理

Laplace 方程的解的性质:

1. 平均性质

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} [V(x - \delta) + V(x + \delta)] \\ V(x, y) &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{\text{circle}} V dl \\ V(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{sphere}} V d\tau \end{aligned} \quad (2.1)$$

## 2. 无局部极值 (源于平均性质) • 静电边值唯一性定理:

- 若区域  $\nu$  的边界  $s$  上的电势给定, 且  $\nu$  内电荷分布给定, 则  $\nu$  内 Poisson 方程的解唯一确定
- 若区域  $\nu$  的外边界  $S_{\text{out}}$  上的电势值为 0 (无穷远或外边界为导体表面), 且  $\nu$  内的电荷分布给定, 所有导体上带的总电荷确定, 则  $\nu$  内 Poisson 方程的解唯一确定
- 若区域  $\nu$  的边界  $s$  上的电势值或电势的法向导数给定, 且  $\nu$  内电荷分布给定, 则  $\nu$  内 Poisson 方程的解唯一确定

静电边值唯一性定理提供了电像法的逻辑基础, 若要求解某空间的电势分布, 则可以在该空间外放置电荷来满足边界条件, 猜出 Poisson 方程的解。

## 2.2 分离变量法

**分离变量法:** 核心内容: (还要考虑在柱坐标、球坐标下的不同形式)

形式为: (省略了求和, 其实是系数与模的乘积再求和)

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

- 将解写成分离变量形式, 选定合适变量, 求解固有值问题得到固有值和固有函数系
- 求解其他常微分方程得到形式解, 即把解在定解条件上展开
- 把定解条件代入形式解中确定形式解的系数, 即把定解条件在固有函数系上展

具体参见: [https://gitee.com/destiny-physics/physics\\_notes/tree/master/Math\\_method](https://gitee.com/destiny-physics/physics_notes/tree/master/Math_method)  
解的形式类似于:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta) \quad (2.2)$$

## 2.3 多级展开与电偶极子

对于某一局部电荷分布, 在足够远处的电势可以多极展开为:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.3)$$

其中的  $\alpha$  为  $\mathbf{r}$  与  $\mathbf{r}'$  的夹角, 这意味着式中的积分与所考虑的点  $\mathbf{r}$  有关。这相当于将局部电荷分布拆分为电单极子 ( $n=0, V \propto \frac{1}{r}$ ), 电偶极子 ( $n=1, V \propto \frac{1}{r^2}$ ), 电四级子 ( $n=2, V \propto \frac{1}{r^3}$ ) 等等  $\dots$

需要注意的是, 多级展开实际是针对所考虑的点相对原点的径矢  $\mathbf{r}$  的 Taylor 展开, 因而与坐标系的选取有关。多级展开的偶极子项可以写成:

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (2.4)$$

其中:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.5)$$

称为偶极矩, 在离散情况就是:  $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i$  偶极矩也与坐标系的选取有关, 同一个电荷分布在不同的坐标系中可能不同。一般而言, 在多级展开中第一个非零项不受坐标系选取的影响, 之后的项都受到坐标系选取的影响 (见 Prob 3.52)。例如, 电中性的物体的偶极矩与坐标系选取无关。

将电荷量绝对值为  $q$  的等量异号电荷相隔一定足够小的距离  $d$  放置构成一个物理偶极子, 偶极矩为  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  其中  $\mathbf{d}$  由负电荷指向正电荷。物理偶极子的多级展开中还会存在其他高阶项 (第二个非零项是八级子项, 见 Prob 3.31)。保持  $p$  不变, 令  $d \rightarrow 0$ , 得到的就是理想偶极子。对于理想偶极子而言, 上面的  $V_{\text{dip}}$  不只是无穷远处的近似, 而是真实的电势。理想偶极子产生的电场:

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{p}] \quad (2.6)$$

偶极子在电场中受到力与力矩:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{p} \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.7)$$

电偶极子与静电场的相互作用能 (将电偶极子从无穷远移动至某点最少需要做的功):

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (2.8)$$

由此可以通过虚功原理导出:  $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ , 该公式中的  $\nabla$  只对  $\mathbf{E}$  作用 (即: 在计算时应当作  $\mathbf{p}$  不变), 并且只在静电场中成立 (在静电场中与  $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$  等价)

## 第3章 物质中的电场

### 3.1 介质极化的微观解释

与导体不同, 电介质中没有自由电子, 所有电子都被束缚于原子或分子上。在外界电场中, 电介质会发生极化, 产生一个偶极矩。极化现象有两种微观成因: 取向极化 (有极分子在电场中取向发生转变) 和位移极化 (无极分子在电场作用下被诱导出偶极矩)

介质发生极化时, 其中的分子相当于一个电偶极子, 偶极矩为  $\mathbf{p}$ 。对于原子而言, 有  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ , 其中  $\alpha$  称为原子极化率, 一般分子的极化规律要用极化张量表述 (此时,  $\mathbf{p}$  与  $\mathbf{E}$  一般不平行)。

记单位体积内的偶极矩为  $\mathbf{P}$ , 称为极化强度, 用以宏观描述电介质的极化。

联系原子极化率 (微观) 与相对介电常数 (宏观) 的是 Clausius-Mossotti 公式:

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r - 1}{N \epsilon_r + 2} \quad (3.1)$$

### 3.2 有电介质时电场、电势的计算

电介质中的全体偶极子产生的电势为:

$$V(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \right)$$

即相当于极化体电荷  $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  和极化面电荷  $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{n}$  产生的电势。

极化体电荷和极化面电荷的成因是偶极子某一端的电荷的累加, 这启发了一种求解均匀极化介质的电场和电势分布的方法 (见 Ex 4.3)

对于介质内的点, 电势和场强是无法定义的, 因此式 (28) 给出的是介质内某点附近的小区域 (宏观足够小, 微观足够大) 内的电场的平均性质。以场强为例, 实际上有  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{in}} + \mathbf{E}_{\text{out}}$ , 其中  $\mathbf{E}_{\text{in}}$  是某点附近的小区域内的电荷在该区域内产生的平均电场,  $\mathbf{E}_{\text{out}}$  是该区域外的电荷在该区域内产生的平均电场。

实验中, 为了测量介质内部的电场, 需要在介质内部挖出一个小空腔, 这时由于空腔壁上感应出的极化电荷, 空腔内部的电场强度并非真实的介质内部的电场强度。或者说, 实际测量的电场是  $\mathbf{E}_{\text{out}}$  而非  $\mathbf{E}$

引入电位移  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  消去 Gauss 定理中的极化电荷, 得到有电介质情况下的静电学基本方程:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

在一般情况下  $\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P} \neq 0$ , 因此无法直接将  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  进行类比 ( $\mathbf{D}$  不完全由自由电荷决定)。求解  $\mathbf{D}$  的最常用方法是利用对称性和 Gauss 定理的积分形式。

### 3.3 线性介质的特殊性质

线性电介质满足下列关系:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}\end{aligned}\quad (3.3)$$

其中  $\chi_e$  为电极化率,  $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r$  为介电常数 ( $\epsilon_0$  为真空介电常数),  $\epsilon_r$  为相对介电常数。

若空间中充满了均匀电介质, 则  $\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times (\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \nabla \times \mathbf{E} = 0$ , 这时  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  满足的微分方程完全一致, 可完全类比  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{D}$ 。具体而言, 可以先求解真空中的  $\mathbf{E}_0$ , 则  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$

例如, 若空间中充满了均匀介质, 则点电荷产生的电场  $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ , 这是因为点电荷极化了介质, 使得其周围聚集了与之相反的电荷。在均匀介质中:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_f \quad (3.4)$$

因此, 若某处无自由电荷, 则也无极化电荷。由此可知, 即便空间中分布着不同的介质, 处于某一介质中的点电荷 (连同其周围极化出的异号电荷) 在空间中任意一点产生的场强仍为:  $\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ , 其中  $\epsilon$  是点电荷所在的介质的介电常数。

若介质中无自由电荷, 则其中的电势满足 Laplace 方程, 利用第三章中的技术可以求解有介质存在时的电场和电势分布, 为此需要确定介质分界面处的边值关系:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{\text{above}}^\perp - \mathbf{D}_{\text{below}}^\perp &= \sigma_f \\ \mathbf{E}_{\text{above}}^\parallel - \mathbf{E}_{\text{below}}^\parallel &= 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

与电势相关的边值关系:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{above}} \frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{below}} \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} &= \sigma_f \\ V_{\text{above}} &= V_{\text{below}}\end{aligned}\quad (3.6)$$

电介质存在时的静电能与受力在存在电介质时, 仍然定义一个电荷系统储存的能量是布置这个系统所需做的功, 只不过布置系统时只能移动自由电荷, 在移动的过程中极化电荷自行产生。

这意味着, 在向系统中移入自由电荷时, 其所受到的力不仅仅是由之前放置的自由电荷产生的, 还包括先前放置的自由电荷在介质中极化出的电荷, 因此静电能与空间中的全部介质都有关系。对于线性电介质, 静电能:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{all space}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \quad (3.7)$$

与  $U_0 = \int_{\text{all space}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau$  相比, 有:

$$U = U_0 + U_{\text{polarization}} \quad (3.8)$$

其中  $U_{\text{polarization}}$  表示为了极化电介质所需要付出的能量。许多包含电介质的问题中, 电介质的受力都是由于边缘效应。利用虚功原理可以避免实际考虑边缘效应而计算受力。

## 第4章 静磁学

查·论·编	电磁学	[隐藏]
静电学	电·电荷·电场·摩擦起电效应·静电放电 (闪电·电晕放电·尖端放电)·静电感应 (静电吸附)·静电屏蔽·库仑定律·高斯定律·电通量·电势能·电偶极矩·电极化·电位移	
静磁学	磁·安培定律·磁场·磁感应强度·磁场强度·磁化强度·磁通量·毕奥-萨伐尔定律·磁矩·高斯磁定律·磁矢势	
电学	电路·电流·电势·电压·电阻·绝缘体·半导体·导体·超导体·欧姆定律·串联电路·并联电路·直流电·交流电·带电流·电动势·电容·电感·阻抗·电导·波导·忆阻器·基尔霍夫电路定律	
电现象	压电效应·压阻效应·热电效应·光电效应·电致发光·中高层大气放电	
电动力学	洛伦兹力·霍尔效应·电磁干扰·法拉第电磁感应定律·楞次定律·位移电流·麦克斯韦方程组·电磁场·电磁波·麦克斯韦应力张量·坡印亭向量·李纳-维谢尔·杰斐逊方程·涡电流·伦敦方程·推迟势·自由空间·协变表述 (电磁张量·四维电流密度·电磁应力-能量张量·四维势)	
发展史	电荷守恒定律·库仑定律·伏打电堆·伽伐尼电池·安培定律·欧姆定律·电磁感应·麦克斯韦方程组·基尔霍夫电路定律·戴维南定理·电磁波·电子·自旋	

图 1: Concepts map

本章主要内容如下 (附上图链接: <https://zh.wikipedia.org/wiki/>):

1. 电荷在磁场中的受力与电流
2. 恒定电路产生的磁场
3. 磁矢势
4. 边值关系
5. 多级展开与磁偶极子

### 4.1 电荷在磁场中的受力与电流

Lorentz 力公式:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.1)$$

由于  $\mathbf{F}_{\text{mag}} \perp \mathbf{v}$  始终成立, 磁场力对带电粒子不做功。磁场是由运动电荷产生的, 为了描述大量电荷的定向运动, 需要引入电流和电流密度的概念。

电流与某一特定的截面有关, 定义为单位时间通过给定截面的电荷量, 是电流密度的通量。垂直流过单位面积或单位长度的电流为电流密度,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \rho \mathbf{v} \\ \mathbf{K} &= \sigma \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.2)$$

分别是体电流密度和面电流密度。电流密度与电流的关系为:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.3)$$

电荷的局部守恒导致电流连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

电动力学中的许多守恒方程都具有与电流连续性方程相同的形式。

导线中有大量定向流动的电子, 受到 Lorentz 的总效果是 Ampere 力:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int_{\mathcal{L}} I \, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (4.5)$$

该公式可以自然推广到面电流和体电流的情况:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int_S (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) da = \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau \quad (4.6)$$

## 4.2 恒定电流产生的磁场

恒定电流条件:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \quad (4.7)$$

即无电荷积累且电流分布不变。利用连续性方程可以得到:  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  恒定线电流产生的磁场由 Biot-Savart 定律给出:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{I \, d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.8)$$

在面电流和体电流情况下的推广:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau' \quad (4.9)$$

由 Biot-Savart 定律可以导出静磁场满足的微分方程:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{Ampere 定律}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ampere 定律的推导需要用到电流密度无散的条件 (因此在电容器充电过程中, 该式不成立, 需要引入位移电流) Ampere 定律的积分形式:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (4.11)$$

其中  $I_{\text{enc}}$  为通过以闭曲线  $\mathcal{L}$  为边界的曲面 (由于  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , 选取不同的曲面不会导致结果不同) 的电流,  $d\mathbf{l}$  的方向与  $I_{\text{enc}}$  的正负约定满足右手法则。应用 Ampere 定律积分形式求电场时, 首先根据对称性确定  $\mathbf{B}$  的方向, 再由 Ampere 定律得出  $\mathbf{B}$  的大小。

## 4.3 磁矢势

磁场无散使得我们可以定义磁矢势:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.12)$$

磁矢势的选择具有较大的任意性, 在变换:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \lambda \quad (4.13)$$

下不会影响磁场。利用这种任意性可以对  $\mathbf{A}$  加以限制, 即要求  $\mathbf{A}$  满足某种规范。静磁学中通常采取 Coulomb 规范, 要求  $\mathbf{A}$  无散。这样静磁学的基本方程变为:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (4.14)$$



则静磁学本质上是解 Poisson 方程, 可以与静电学类比。实际上, 若电流分布在一个有限的范围内, 类比电势与磁矢势对应的 Poisson 方程可得:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (4.15)$$

可以验证确实有:  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (这需要用到电流无散的条件) 理论研究中的大多数问题都是二维二分量问题, 即磁场与某一个坐标 (可忽略坐标) 无关, 这时可设磁矢势方向与可忽略坐标方向平行, 则无散条件自动满足且可将矢量 Poisson 方程约化为标量方程。例如: 无限长直导线 ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y)$  与  $z$  无关, 设  $\mathbf{A} = A_z(x, y)\hat{z}$ ; 或考虑到  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r)$  与  $\phi, z$  无关, 设  $\mathbf{A} = A_\phi\hat{\phi}$ ), 旋转的均匀带电球壳 ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, \theta)$  与  $\phi$  无关, 设  $\mathbf{A} = A_\phi(r, \theta)\hat{\phi}$ ) 这种特殊的情况下,  $\mathbf{A}$  的分量有一定的物理意义, 可以通过:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi_B \quad (4.16)$$

将磁矢势的分量在不同位置的差值与磁通量联系起来。(见 Ex 5.12) 一般来说,  $\mathbf{A}$  与电流的方向相同。

#### 4.4 边值关系

在存在面电流的表面, 磁场和磁矢势会发生突变, 利用与静电学中相同的方式可以导出边值关系。磁场的边值关系:

$$\mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} = \mu_0(\mathbf{K} \times \hat{n}) \quad (4.17)$$

磁矢势的边值关系 (依赖于 Coulomb 规范):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{above}} &= \mathbf{A}_{\text{below}} \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} &= -\mu_0 \mathbf{K} \end{aligned} \quad (4.18)$$

多级展开与磁偶极子对于某一线圈, 在足够远处的磁矢势可以多级展开为:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint_{\mathcal{L}} (r')^n P_n(\cos \alpha) d\mathbf{l}' \quad (4.19)$$

其中的  $\alpha$  为  $\mathbf{r}$  与  $\mathbf{r}'$  的夹角。式中  $n=1$  对应的项为磁偶极子项, 可以写为:

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.20)$$

其中:

$$\mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{a} = I \mathbf{a}_{\text{loop}} \quad (4.21)$$

称为偶极矩 (式中的  $\mathbf{a}_{\text{loop}}$  为回路的矢量面积)。对于一般的体电流分布, 也可写出类似的多级展开:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V (r')^n \mathbf{J}(\mathbf{r}') P_n(\cos \alpha) d\tau' \quad (4.22)$$

一个任意形状的尺度足够小的线圈中通有一定量的电流就构成一个磁偶极子, 保持  $m$  不变的同时令线圈的尺度无限缩小, 得到的就是一理想磁偶极子。理想磁偶极子产生的磁场:

$$\mathbf{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\mathbf{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{m}) \quad (4.23)$$

与电偶极子产生的电场完全一致, 这是因为, 在几乎整个空间中, 磁偶极子产生的磁场  $\mathbf{B}$  与电偶极子产生的电场  $\mathbf{E}$  都满足相同的微分方程, 并且它们都具有相同的边界条件。磁偶极子在磁场中受到的力与力矩:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{M} &= \mathbf{m} \times \mathbf{B}\end{aligned}\quad (4.24)$$

需要注意的是,  $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$  中的  $\nabla$  只作用于  $\mathbf{B}$ , 利用场论中的公式可以得到:

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (4.25)$$

磁偶极子与磁场的相互作用能:

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (4.26)$$

这指的是维持磁偶极子以及场源中的电流不变的前提下, 将一个磁偶极子从

无穷远移动到指定位置最少需要做的功。为了维持磁偶极子和场源中的电流不变, 还需要付出额外的功  $W = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ , 则总共需要做功  $W_{\text{tot}} = U + W = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$

## 第5章 物质中的磁场

### 5.1 磁介质的分类及微观解释

磁介质分为: 顺磁质、抗磁质、铁磁质。在外界磁场中, 顺磁质内部产生与外磁场同向的磁场, 使得内部磁场稍大于磁介质不存在时的磁场, 抗磁质与之相反。铁磁质是一种非线性介质, 即便磁场撤去也能保持磁性。施加外磁场时, 电子自旋磁矩的方向改变, 由杂乱无章分布变为倾向于朝向磁场方向分布, 产生与外磁场同向的场, 此即顺磁现象。

施加外磁场时, 原子轨道磁矩的大小改变, 产生与磁场反向的微小增量, 进而产生与外磁场反向的场, 此即抗磁现象。抗磁现象通常出现在有偶数个电子的原子中。

在铁磁质中, 大量磁偶极子由于量子力学效应同向排列, 形成磁畴。施加外磁场时, 指向与磁场平行的磁畴区域扩大, 导致铁磁体磁化。磁场撤去后, 这部分磁畴仍然保留一部分, 因此能保持磁性 (见铁磁体的磁滞回线)。温度超过一个特定值 (居里点), 铁磁现象消失, 发生铁磁-顺磁相变。

注意, 物质的磁性实质上是一种量子力学效应, 可以证明, 在经典物理中磁性是不存在的 (Bohr-van Leeuwen 定理)。

记单位体积内的磁偶极矩为  $\mathbf{M}$ , 称为磁化强度, 用以宏观描述磁介质的极化。

### 5.2 有磁介质时的磁场的计算

磁介质中全体磁偶极子产生的磁矢势为:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + \oint_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \right) \quad (5.1)$$

即相当于磁化体电流  $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$  和磁化面电流  $\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$  产生的磁矢势。磁化面电流的成因是介质边缘的小回路电流的贡献的总和, 实际上没有任何一个电子完整地环绕介质表面运动一周, 只是在表面上的某一小块运动。极化体电流是介质中某点附近的所有不同朝向的小回路电流的贡献的总和。

对于介质内部的点, 类似电介质的情况, 式 (5.2) 给出的是场的平均性质。

引入辅助场  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$  消去 Ampere 定理中的磁化电流, 得到有磁介质情况下的静磁学基本方程:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{5.2}$$

在一般情况下,  $\nabla \times \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{M} \neq 0$ , 因此无法直接将  $\mathbf{H}$  与  $\mathbf{B}$  进行类比 ( $\mathbf{H}$  不完全由自由电流决定)。求解  $\mathbf{H}$  的最常用的方法是利用对称性和 Ampere 定理的积分形式。

利用式 (5.2) 的积分形式可以得出有磁介质情况下更常用的边界条件:

$$\begin{aligned}H_{\text{above}}^{\perp} - H_{\text{below}}^{\perp} &= -(M_{\text{above}}^{\perp} - M_{\text{below}}^{\perp}) \\ \mathbf{H}_{\text{above}}^{\parallel} - \mathbf{H}_{\text{below}}^{\parallel} &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}\tag{5.3}$$

对于无自由电流的单连通区域, 由于  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ , 可以引入  $\mathbf{H} = -\nabla W$ , 则有  $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla^2 W = -\nabla \cdot \mathbf{M} \implies \nabla^2 W = \nabla \cdot \mathbf{M}$ , 进而可以与静电学类比, 利用上述边界条件求解 Poisson 方程。

### 5.3 线性介质的特殊性质

线性磁介质满足下列关系:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}\end{aligned}\tag{5.4}$$

其中  $\chi_m$  为磁化率,  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$  为磁导率 ( $\mu_0$  为真空磁导率)。注意此式与式 (BO) 的区别。在静电学实验中, 方便控制的是电势, 而电势的梯度即场强, 因此可以测量的通常是  $E$ , 通过  $E$  得到  $\mathbf{P}, \mathbf{D}$ 。然而在静磁学实验中, 方便控制的是自由电流, 而  $\mathbf{H}$  与自由电流有关系, 可以测量的通常是  $\mathbf{H}$ , 通过  $\mathbf{H}$  得到  $\mathbf{M}, \mathbf{B}$ 。

根据定义, 顺磁质  $\chi_m > 0$ , 抗磁质  $\chi_m < 0$ , 一般的顺磁质与抗磁质的磁化率很小,  $|\chi_m|$  约在  $10^{-4} \sim 10^{-6}$  之间。