Notes: Electrodynamics

Update at January 12, 2024

心梦 Wizard

Contents

III 介质

真空

1. 导论

电磁学基本规律：洛伦兹力 + 麦克斯韦方程组，其中洛伦兹力的公式为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \implies \boldsymbol{F} = \int \mathrm{d}V\,(\rho\boldsymbol{E} + \rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

此外电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，磁场 $B(\boldsymbol{r},t)$ 为三维矢量，满足叠加原理——知道单一电荷产生的电磁场就足够了。场是客观存在的，时空中一点处的场值与邻近点处的场值间存在简单关系。

1.1 麦克斯韦方程组

首先有四个实验定律

1. Coulomb 定律：静电学情况下

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

其中 ρ 为电荷密度。

2. Biot-Savart 定律：稳恒电流下

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

其中 $\boldsymbol{j}$ 为电流密度

3. Faraday 电磁感应定律：

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon:\text{导线线圈中电磁力对单位电荷做功}$$

$$\varepsilon \equiv \oint(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad \boldsymbol{v}\text{为导线速度垂直于 }\mathrm{d}\boldsymbol{l}\sim\text{ 电荷速度}$$

$$\text{对于一个固定回路:}\oint\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \implies \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

为 Faraday 方程，不等价于 Faraday 电磁感应定律

关于反推电磁感应定律：法拉第方程计及的是随时间变化的磁场产生的回路电场，导致有感生电动势；考虑 $\boldsymbol{B}$ 不变化的情况，仅是面积变化导致的 ε

$$\Phi(t)=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \Phi(t+\mathrm{d}t)=\int_{S-\mathrm{d}S}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$\mathrm{d}\Phi=\Phi(t+\mathrm{d}t)-\Phi(t)=\int \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\mathrm{d}t\times \mathrm{d}\boldsymbol{l})$$
$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

注意 $\boldsymbol{v}$ 是导线速度，可加上沿导线方向的速度 ($\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向)，从而有

$$\varepsilon=\oint(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

4. 无磁荷：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

Maxwell 研究一般随时间、空间变化的电磁场，对一般情况考虑，Maxwell 引入位移电流，即对 2 考虑随时间的变化情况：

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=0 \qquad \text{一般来说：}\nabla\cdot\boldsymbol{j}\neq 0$$
$$\text{电荷守恒条件：}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$$
$$\text{推广 2：}\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\underline{\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}}\text{——位移电流}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

电磁场的全部物理都包含在 Maxwell 方程组中：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

电荷流动产生磁场的旋度，电荷密度产生电场的散度，可以有电流而无电场，即电荷密度为 0。在电磁场随时间变化的一般情况下，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$ 仍然成立，即由变化的磁场感应的电场不贡献电场散度，只贡献电场旋度。但是 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$ 不能看作是库伦定律，已经超出了静电学的库伦定律。

经典电动力学中的 $\rho,\boldsymbol{j}$ 是连续的。

进一步讨论：

1. 参考系问题：在狭义相对论之前，电动力学只在一个参考系成立——以太参考系——即绝对惯性系中成立，经典电磁学于狭义相对论一致。
2. 在低速情况下，磁现象比电现象弱 $\frac{1}{c^2}$
3. 在 10^{-16}cm 尺度以上，电动力学仍然成立，再小则由电弱统一理论描述。

超出经典电动力学的问题：

1. 正负电荷问题
2. 电子不落入原子核——量子力学
3. 原子核的物理——强相互作用
4. 电荷的量子化——基本粒子物理

1.2 电磁场的能量

从洛伦兹力出发有

$$\boldsymbol{F}=\int\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V\qquad \text{功}:\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad \text{功率}:\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$

那么有功率密度:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}&=\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot\left(\epsilon_0c^2\nabla\times\boldsymbol{B}-\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\\ \boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})&=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})\\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}&=-\epsilon_0c^2\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right)\\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}&+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right)+\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right)=0\end{aligned}$$

这样就写成了流守恒方程的形式，有

$$\begin{aligned}&\text{场的能量密度：}W=\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\\ &\text{场的能流密度：}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\text{——Poynting 矢量}\\ &\text{表示单位时间通过单位面积的能量}\end{aligned}$$

例 电容器的缓慢充电

缓慢意味着什么——可以忽略磁场的能量。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}=E(t)\boldsymbol{e}_z\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\ &W=\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}^2\cdot V\qquad \oint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\epsilon_0\mu_0\iint\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\epsilon_0E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\cdot V\qquad 2\pi rB=\epsilon_0\mu_0\pi r^2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\\ &B=\frac{r}{2c^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\\ &\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\epsilon_0E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2}(-\boldsymbol{e}_r)\\ &\text{单位时间流入能量}=S\cdot2\pi rh=\epsilon_0E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}V\end{aligned}$$

1.3 电磁场的动量

从电磁场对荷电粒子作用力出发

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\int\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V$$

考虑到

$$\rho=\epsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}\qquad \boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}=\epsilon_0(c^2\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})$$

可以推出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\epsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V=\epsilon_0\int\left[(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}+c^2(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}\right]\mathrm{d}V$$

上式右边可以化为

$$\iint \overleftrightarrow{T}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint \left[\epsilon_0\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2\overleftrightarrow{I}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2\overleftrightarrow{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\right)\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以可以化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \epsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V=\iint \overleftrightarrow{T}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以得到

$$\text{电磁场的动量密度：}\boldsymbol{G}=\epsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}$$

$$\text{电磁场的动量流密度：}\overleftrightarrow{T}=\epsilon_0\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2\overleftrightarrow{I}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2\overleftrightarrow{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\right)$$

$$\text{或者记为：}T_{ij}=\epsilon_0\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2\delta_{ij}-E_iE_j\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2\delta_{ij}-B_iB_j\right)$$

注意，牛顿第三定律不成立，其为质点组动量守恒的结果，此时的守恒量为粒子动量 + 电磁场的动量，承认动量守恒即可——这是更基本的。

例 光压强

这是用来解释电磁场动量的很好的例子

$$\text{光动量密度：}\boldsymbol{G}=\frac{\boldsymbol{G}\Delta V}{\Delta V}$$

$$\text{光压强：}\frac{\Delta G\Delta V}{\Delta t}\cdot\frac{1}{\Delta S}=\Delta\boldsymbol{G}\cdot c$$

假设完全吸收，此时光压强 $=Gc$

用光子来理解电磁场 $\boldsymbol{G},\boldsymbol{S}$ 的关系：

$\boldsymbol{S}=n\epsilon\boldsymbol{c}$ $\quad n$: 光子数密度 $\quad \epsilon$: 光子能量

$G=n\boldsymbol{p}$ $\quad \boldsymbol{p}$: 光子动量

光子有性质：$\epsilon=pc,\boldsymbol{S}=n\boldsymbol{p}c^2=c^2\boldsymbol{G}$

光通常观测到波动性，而电子易观测到粒子性，这与其为玻色子还是费米子有关，玻色子易大量粒子处于相同状态而表现出波动性，而费米子有 Pauli 不相容原理。

1.4 电磁势——对麦克斯韦方程组的简化

首先根据麦克斯韦方程组的其中两个有：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\implies\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\implies\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0\implies\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$\phi(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 称之为电磁势，得到电磁势使用两条麦克斯韦方程，将其带回另外两个方程中得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\implies\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}+\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\implies\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{j}$$

电磁势由微分定义，其选择不唯一，可以相差一个规范变换

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\psi$$
$$\phi \to \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

其保持 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 不变，选择合适的 $\boldsymbol{A}, \phi$ 使得满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\text{——Lorentz 规范条件}$$

那么可以导出由电磁势表示的麦克斯韦方程组：

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j}$$

方程简化为四个达朗贝尔方程，在 Lorentz 规范下，$\boldsymbol{A}, \phi$ 不唯一，可以有一个任意性

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = 0$$

所以只需要得到 $\phi, \boldsymbol{A}$ 即可得到电磁场

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

规范不变性：新的麦克斯韦方程组与狭义相对论的一致性明显！在有了狭义相对论之后，麦克斯韦方程组在任何惯性系都成立，但在 Einstein 之前，不同惯性系之间是伽利略变换，麦克斯韦方程组只在以太参考系成立。

1.5 数学准备

1.5.1 delta-函数

狄拉克 δ 函数定义为

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

更一般的定义

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \qquad \int_a^b \delta(x - x_0)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

是一个数学上所谓的广义函数，但是事实上我们也不需要从广义函数的角度去理解 δ 函数，只有学数学的人会那么干。然后列举 δ 函数所具有的几个性质

1. 偶函数：$\delta(x) = \delta(-x)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f(x_0)$
3. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta[f(x)]\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{|f'(x)|}\right|_{f(x)=0}$

以上是一维的情况，容易拓展到高维，例如三维空间中的 δ 函数定义为

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \qquad \int \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V=1$$

在球坐标下，情况略微有所不同，δ 函数需要多出一些东西

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)$$

这是考虑到体形式在球坐标中需要添加一些因子，相比于直角坐标系

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

δ 函数可以由如下形式表示：

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\mathrm{d}k$$

Proof. δ 函数可以表示为傅里叶变换即

$$\delta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}c(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \implies c(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

带回到傅里叶变换的表达式中立得上述结果。 ■

在积分的意义下，δ 函数的原函数为 θ 函数，其定义为

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} \qquad \delta(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x)$$

1.5.2 爱因斯坦求和记号

三维空间中的矢量表示为 $\boldsymbol{A}=A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3\equiv A_ie_i$，重复指标 i 自动求和，也叫做指标收缩求和。引入克罗内克记号 δ_{ij}，其定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

它可以看做是单位矩阵的矩阵元，满足 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$，因单位矩阵是对称矩阵，而 $\delta_{ii}=\mathrm{tr}I=3$，由于单位矩阵的乘积仍然为单位矩阵，所以说 $\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$。

借助爱因斯坦求和约定，矢量的标量积记作 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB_i$，对重复指标 i 自动求和，同样的，可以定义矢量的叉积，但在这之前需要引入三维全反对称张量

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & \mathrm{sgn}(ijk)=1\\ -1, & \mathrm{sgn}(ijk)=-1\\ 0, & \text{other case}\end{cases}$$

从而矢量的叉积可以定义为 $e_i\times e_j=\epsilon_{ijk}e_k, \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\epsilon_{ijk}A_iB_je_k$，三维全反对称张量具有如下性质

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{mk}$$

另一个在矢量分析中常用的是 Nabla 算子，其定义为

$$\nabla=e_i\partial_i$$

基于 Nabla 算子定义标量函数的梯度，矢量函数的散度和旋度

$$\text{梯度：}\nabla\phi=e_i\partial_i\phi \qquad \text{散度：}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\partial_iA_i \qquad \text{旋度：}\nabla\times\boldsymbol{A}=\epsilon_{ijk}e_i\partial_jA_k$$

拉普拉斯算子表示的是梯度的散度，即

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\partial_i\partial_i$$

1.5.3 标量，矢量和张量

在空间转动下，不同的物理量有不同的变换性质。例如，在空间转动下，矢量的长度不变。基于空间旋转定义标量和矢量

- **标量：** 在空间转动下不变的量；
- **矢量：** 在空间转动下，按照位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 一样变化的量。

以二维的情况为例，在二维平面上，位置矢量 $\boldsymbol{r} = xe_1 + ye_2 = x'e_1' + y'e_2', x' = x\cos\theta + y\sin\theta, y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$，用矩阵来表示就是

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2) \quad R^{-1} = R^T, \det R = 1$$

简单记为 $x_i' = R_{ij}x_j$，转动保持矢量的长度不变，容易验证 $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$，对于三维转动变换同理可以记作 $x_i' = R_{ij}x_j$，记作矩阵则为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

矩阵 $R = (R_{ij}) \in \mathrm{SO}(3)$ 为正交矩阵。借助转动可以定义更高阶的张量，张量的每一个指标都按照矢量那样变化，于是矢量可以看做一阶张量，而标量记作零阶张量，其变换即满足

$$T_{i_1 i_2 \cdots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

特别的需要注意，克罗内克记号和三维全反对称张量分别是二阶张量和三阶张量，但是其在转动变换下恰好不变，所以也称其为各向同性张量。另一种理解张量的方法是将其看做矢量的并矢，即 $T_{ij} = A_i B_j$，**但我不接受！** 这并不是一个很良好的理解，我认为。

1.5.4 矢量分析复习

仅列出公式，推导略，我懒了，以后有时间再补上。核心公式是广义斯托克斯定理

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega$$

将其用于散度，旋度等公式有

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \oiint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \iint \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

另外一条重要的关于 δ 函数的公式是

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

2. 静电学

2.1 基本方程

在静电学中，麦克斯韦方程组少了一半还多，在静磁学也一样，现在是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

或者是

$$\oiint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

更进一步用电磁势表示

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

再或者要求空间各向同性，这个也等价

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

例 2-1 均匀带电球体的 $\phi, \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}_{外} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \boldsymbol{e}_r \qquad \boldsymbol{E}_{内} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \boldsymbol{r}$$

$$\phi_{外} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \qquad \phi_{内} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{Q}{2R^3} r^2 + \frac{3Q}{2R} \right)$$

例 2-2 无限长带电均匀线的 $\phi, \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_r \qquad \lambda=\frac{Q}{L} \qquad \phi=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln r+C$$

例 2-3 无限大带电平面的 $\phi, \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{e}_r \qquad \sigma=\frac{Q}{S} \qquad \phi=-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}r+C$$

对于一个点电荷

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

从分布来看

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\frac{-1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\\&=-\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\\\implies\phi(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

而

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r}')\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r}')\left(-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right)\mathrm{d}V'=-\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

ϕ 连续：$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi, \mathrm{d}\phi=-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。泊松方程 $\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$ 是定域的:$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r})\to\rho(\boldsymbol{r})$ 一点决定一点。

例 2-4 电偶极子

一个重要的物理模型：

电偶极矩$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{a}$,理想情况下:$a\to 0$,非常小

$\boldsymbol{E}\sim\frac{1}{r^3}$,当 r 非常大时，$\phi\sim\frac{1}{r^2}$

$$\phi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad \boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{p}}{r^3}$$

在 xz 平面上：$E_x=\frac{3p\sin\theta\cos\theta}{r^3} \qquad E_z=\frac{p(3\cos^2\theta-1)}{r^3}$

2.2 拉普拉斯方程和泊松方程

在 $\rho=0$ 处，标势满足方程 $\nabla^2\phi=0$，称之为拉普拉斯方程，经典场论的主要研究内容，满足拉普拉斯方程的函数称之为调和函数。其具有性质：如果 $\phi(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程，那么 ϕ 在任意球面上的平均值等于 ϕ 在球心上的取值。

考虑一维的情况：

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=0\implies\phi=c_1+c_2x$$

那么 $\phi(x_0)=\phi(\frac{1}{2}x_++\frac{1}{2}x_-)=\frac{1}{2}[\phi(x_+)+\phi(x_-)]$ 这表明拉普拉斯方程的解无极值点。

Theorem 2.2.1 任意静电场都不会有稳定平衡点。

Proof. 反证法：如果有这样的点，那么违反了 ϕ 作为调和函数的性质，因为这样的点要求存在一个球面，该球面上的 ϕ 的平均值大于/小于中心值。 ■

Theorem 2.2.2 边界为 0 的无界空间上的调和函数 ϕ 满足 $\phi = \text{const} = \phi_{边界} = 0$

Proof. 反证法，如果 ϕ 不是常数，那么其必然存在极值点，所以 ϕ 必然是常数，无界空间边界条件确定常数为 0. ■

Theorem 2.2.3 — 唯一性. 拉普拉斯方程的解是唯一的。

Proof. 设 $\nabla^2\phi_1 = 0, \nabla^2\phi_2 = 0$，并且 ϕ_1, ϕ_2 满足同一边界条件，那么 $\phi = \phi_1 - \phi_2$ 也是拉普拉斯方程的解，即 $\nabla^2\phi = 0$，但是满足的边界条件为 0，因为 ϕ_1, ϕ_2 的边界条件在相减时抵消，由上述定理得 $\phi = 0 \implies \phi_1 = \phi_2$ ■

对于泊松方程的解 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$，在无界空间中有解

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

假设其还有解 ϕ_1，那么令 $\Phi = \phi - \phi_1$ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\Phi = 0$，满足无穷远边界条件，那么 $\Phi = 0$，从而有 $\phi = \phi_1$。

例 2-5 汤川势

对于汤川型势

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r} \implies \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \phi = \frac{1}{4\pi} = (\frac{1}{r} + \frac{e^{-\alpha r}-1}{r})$$

$$\rho = -\epsilon_0\nabla^2\phi = q\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{q}{4\pi}\frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{r}\text{中心有点电荷}q\text{，空间中弥散有电荷分布}$$

$$Q_{总} = 0 \qquad q = \frac{q}{4\pi}\int\frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{r}\mathrm{d}V \quad \text{如果}\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r)\text{，那么}\nabla\phi = e_r\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)$$

2.3 静电能

能量定域于电场所在的空间，所在空间中

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int\epsilon_0\boldsymbol{E}^2\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\epsilon_0\int(\nabla\phi)^2\mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon_0\int\phi\nabla^2\phi\mathrm{d}V \quad \text{在边界上，}\phi\nabla\phi = 0 \\ &= \frac{1}{2}\int\rho\phi\mathrm{d}V\text{——静电能 (势能)} \end{aligned}$$

可以理解为将电荷从无穷远处聚集所作的功，下面讨论 $\frac{1}{2}$ 从何而来

$$\phi(\boldsymbol{r}_1) = \int\frac{\rho(\boldsymbol{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\mathrm{d}V_2 \qquad r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$$

那么

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\phi \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}_1)\rho(\boldsymbol{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2$$
$$= \frac{1}{2}\sum_j\sum_{k\neq j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_jq_k}{r_{jk}} = \sum_{\text{所有 }(kj)\text{ 对}}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_jq_k}{r_{jk}}$$

也就是说，$\frac{1}{2}$ 来自每个电荷被算了 2 次。

这里需要注意一个问题，如果电荷异号，那么 U 可能为负值，但是实际上 $\boldsymbol{E}^2 \geq 0$，因为上式未计算点电荷自身的能量，这总是一个大于 0 的常数，负值是因为只考虑了相互作用能。

这里给出一个 Notes，考虑这样一个体系

$$\phi = \bar{\phi} + \phi_{\text{检验}} \qquad \rho = \bar{\rho} + \rho_{\text{检验}}$$

那么系统的静电能

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\phi\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \bar{\rho}\bar{\phi}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \rho_{\text{检验}}\phi_{\text{检验}}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \left(\rho_{\text{检验}}\bar{\phi} + \bar{\rho}\phi_{\text{检验}}\right)\mathrm{d}V$$
$$\phi_{\text{检验}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_{\text{检验}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \qquad \bar{\phi}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\bar{\rho}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$
$$U_{\text{相互作用}} = \frac{1}{2}\int \left(\rho_{\text{检验}}\bar{\phi} + \bar{\rho}\phi_{\text{检验}}\right)\mathrm{d}V = \int \rho_{\text{检验}}\bar{\phi}\mathrm{d}V = \int \bar{\rho}\phi_{\text{检验}}\mathrm{d}V$$

$\int \rho_{\text{检验}}\bar{\phi}\mathrm{d}V$ 为点电荷在外场中的能量 $q\phi$，对于检验电荷分布，$U_{\text{相互作用}}$ 有意义仅在于这个分布是刚性的，否则应和该电荷分布的自能一起考虑。

例 2-5 设表面张力系数为 α，面上电场为 E_0，求肥皂泡的最小半径

无需考虑肥皂泡有几层，装进 α 里面就好了

$$\boldsymbol{E}_{\text{外}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad \boldsymbol{E}_{\text{内}} = 0$$
$$\text{电场能：}U_{\text{电}} = \frac{1}{2}\int \epsilon_0\boldsymbol{E}^2\mathrm{d}V = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2R}$$
$$U_{\text{总}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2R} + 4\pi R^2\alpha$$
$$\left.\frac{\partial U_{\text{总}}}{\partial R}\right|_{R=R_0} = 0 \implies 8\pi\alpha R_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2R_0^2} \implies R_0 = \frac{4\alpha}{\epsilon_0E_0^2}$$

2.4 电多极展开

考虑一个电荷体系在远处产生的电场

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

将被积函数分母对 $\boldsymbol{r}'$ 做一个泰勒展开

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{1!}\partial_i\left.\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right|_{\boldsymbol{r}'=0}(-x_i') + \frac{1}{2!}\partial_i\partial_j\left.\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right|_{\boldsymbol{r}'=0}x_i'x_j'$$
$$= \frac{1}{r} - x_i'\partial_i\frac{1}{r} + \frac{1}{6}\cdot 3x_i'x_j'\partial_i\partial_j\frac{1}{r} + \cdots$$

所以电势

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\int \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x_i}{r^3}\int x_i'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$
$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3x_ix_j - \delta_{ij}r^2}{6r^5}\int \rho(\boldsymbol{r}')(3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2)\mathrm{d}V' + \cdots$$

则定义如下量

$$
\begin{aligned}
&\text{总电荷：}Q \equiv \int \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \\
&\text{电偶极矩：}\boldsymbol{p} \equiv \int \rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'\mathrm{d}V' \\
&\text{电四极矩：}Q_{ij} = \int \mathrm{d}V' \left(3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2\right)\rho(\boldsymbol{r}') \\
&\text{电八极矩} + \text{电十六极矩} + \cdots
\end{aligned}
$$

所以

$$
\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3x_ix_j - \delta_{ij}r^2}{6r^5}Q_{ij} + \cdots
$$

则

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &\sim \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots \\
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &\sim \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \cdots
\end{aligned}
$$

分别对应电量，电偶极矩，电四极矩等等至于更高阶的项。举一些例子如中性分子 $Q = 0$，单电离分子 $Q = e$，而电偶极矩项重要 $\iff$ $Q = 0$，后续项重要也是当且仅当前面的项为 0。

电偶极矩和电四极矩等决定于 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 分布，一般展开原点选取任意，以 $\frac{r'}{r}$ 小为好。

如果 $Q = 0$，那么电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 于原点选取无关：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{p} = \int \mathrm{d}V'\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}' \qquad \text{重新选择原点：}\boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a} \\
&\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}' = \int \mathrm{d}V'\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}' + \int \mathrm{d}V'\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

同理对于电四极矩，$Q = 0, \boldsymbol{p} - 0$，则电四极矩主导，且 Q_{ij} 选取与原点无关。

$$
\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3x_ix_j - \delta_{ij}r^2}{6r^5}Q_{ij}
$$

Q_{ij} 的一般性质：$Q_{ij} = \int \mathrm{d}V'(3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2)\rho(\boldsymbol{r}')$

$$
\begin{aligned}
&Q_{ii} = \int \mathrm{d}V'(3x_i'x_i' - 3r'^2)\rho(\boldsymbol{r}') = 0 \\
&Q_{ij} = Q_{ji}\text{为一个二阶无迹对称张量} \\
&(Q_{ij}) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \\
&\mathrm{Tr}(Q_{ij}) = 0 \qquad (Q_{ij})^T = (Q_{ij}) \\
&\text{具有 5 个独立变量} \\
&\text{若 }\rho(\boldsymbol{r}')\text{ 为球对称分布，则}\boldsymbol{p} = 0, Q_{ij} = 0
\end{aligned}
$$

2.5 电荷体系在外场

首先假设外场 $\boldsymbol{E}_e$ 变化缓慢，相对于 $\boldsymbol{r}'$，那么静电能

$$\begin{aligned}
U &= \int \rho\phi_e \mathrm{d}V \qquad \text{相互作用能无 } 1/2 \text{ 因子，前提 } \rho \text{ 为刚性分布} \\
&= \int \rho(\boldsymbol{r})\phi_e(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = \int \rho(\boldsymbol{r}) \left[\phi_e(0) + x_i\partial_i\phi_e(0) + \frac{1}{2}x_ix_j\partial_i\partial_j\phi_e(0) + \cdots\right] \mathrm{d}V \\
&= \phi_e(0)\int \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V + \partial_i\phi_e(0)\int x_i\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V + \frac{1}{6}\partial_i\partial_j\phi_e(0)\int (3x_ix_j - \delta_{ij}r^2)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V \\
&= Q\phi_e(0) + (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\phi_e(0) + \frac{1}{6}Q_{ij}\partial_i\partial_j\phi_e(0) + \cdots
\end{aligned}$$

所谓刚性分布即 $Q, \boldsymbol{p}, Q_{ij}$ 都是常量，与外电场无关。
电偶极矩在外场中的势能

$$U^{(2)} = \boldsymbol{p}\cdot\nabla\phi_e = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_e = -pE_e\cos\theta$$

电四极矩在外场中的势能

$$U^{(4)} = \frac{1}{6}Q_{ij}\partial_i\partial_j\phi_e$$

电偶极矩受力

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F} = -\nabla U^{(2)} \\
&F_i = -\partial_i U^{(2)} = \partial(p_jE_{ej}) = p_j(\partial_iE_{ej}) = p_j\partial_jE_{ei} \\
&\text{此因：} \nabla\times\boldsymbol{E} = 0 = \boldsymbol{e}_k\epsilon_{kij}\partial_iE_{ej} \implies \partial_iE_{ej} = \partial_jE_{ei} \\
&\text{所以} \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_e
\end{aligned}$$

电偶极矩受力矩：

$$M = -\frac{\partial U^{(2)}}{\partial\theta} = pE_e\sin\theta = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}_e \quad \text{方向由实际物理决定}$$

例 2-6 $\boldsymbol{p}$ **置于点电荷电场中，求** $U, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{M} = ?$

依次求出即可

$$\begin{aligned}
U &= -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^3} \\
\boldsymbol{F} &= (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\
F_i &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}p_j\partial_j\frac{x_i}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}p_j\frac{\delta_{ij}r^2 - 3x_ix_j}{r^5} \\
\boldsymbol{F} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{p}}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\right] \\
\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

要注意原点的选择，不能犯如下错误：

错误答案： $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$

3. 静磁学

3.1 基本方程

正如上一章静电学，静磁学的麦克斯韦方程组也只剩下一半不到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

或者是

$$\oiint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$
$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

其中蕴含了稳恒电流

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0 \implies \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

荷电粒子在磁场中受力

$$\boldsymbol{F} = \int \rho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \mathrm{d}V$$

静磁场本质是电荷运动造成的，作用于运动电荷上，存在参考系问题。静磁学的情况例如在导线中有

$$\boldsymbol{j} = \rho_+ \boldsymbol{v}_+ + \rho_- \boldsymbol{v}_- \qquad \rho_+ + \rho_- = 0 \qquad \boldsymbol{v}_+ = 0 \text{但} \boldsymbol{v}_- \neq 0$$

$\boldsymbol{B}$ 满足线性方程，从而有叠加原理，由于 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$，从而可以令 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 为磁矢势，选择不唯一，可以相差一个标量场的梯度

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla \psi \qquad \nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{A}$ 加上一个标量场的梯度，总是不改变任何具有物理实质的东西，但受规范条件的限制，扣除其任意性，往往比较方便。

在静磁学中选择库伦规范，要求 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，带入到麦克斯韦方程组中有

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=-\nabla^2\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 满足泊松方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

取无穷边界条件，得到

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

由 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 求得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，再由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 求得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\\
&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V'\\
&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}V'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\qquad\text{若}\boldsymbol{j}\mathrm{d}V'=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\\
&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\qquad\text{即 Biot-Savart 定律}\\
&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0c^2}\int\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\text{——相比于电有 }\frac{1}{c^2}\text{ 效应}
\end{aligned}
$$

例 3-1 求电流 I 的长直导线的 B, A

首先有麦克斯韦方程组

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0
\end{aligned}
$$

得到

$$\oint_C\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0I$$

所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}&=\frac{\mu_0I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta=\frac{\mu_0I}{2\pi r}(-\sin\theta\boldsymbol{e}_x+\cos\theta\boldsymbol{e}_y)\\
&=\frac{\mu_0I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_x+\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_y\right)
\end{aligned}
$$

设

$$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0I}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$$

那么可以验证

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\qquad B_x=-\frac{\mu_0I}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\qquad B_y=\frac{\mu_0I}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\qquad B_z=0$$

$\boldsymbol{A}$ 不唯一，可以加上任意一项旋度为 0 的函数。

例 3-2 讨论产生匀强磁场的 A 的形式

首先

$$\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{A}_1=B_0x\boldsymbol{e}_y \qquad 则\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\nabla\times\boldsymbol{A}=B_0\boldsymbol{e}_z$$

再设

$$\boldsymbol{A}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}B_0(-y\boldsymbol{e}_x+x\boldsymbol{e}_y)\implies\nabla\times\boldsymbol{A}=B_0\boldsymbol{e}_z,\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$

再令

$$\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2=\frac{1}{2}B_0(x\boldsymbol{e}_y+y\boldsymbol{e}_x)=\nabla\left(\frac{B_0}{2}xy\right)=\nabla\psi\implies\nabla^2\psi-0$$

即 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 之差为一个调和函数 ψ 的梯度 $\nabla\psi$
则可设

$$\boldsymbol{A}_3=B_0x\boldsymbol{e}_y+B_0z\boldsymbol{e}_z\implies\nabla\times\boldsymbol{A}_3=B_0\boldsymbol{e}_z,\nabla\cdot\boldsymbol{A}_3=B_0$$

可以引入 $\nabla^2\psi=-B_0$，如 $\psi=-\frac{B_0}{6}(x^2+y^2+z^2)$ 或 $\psi=-\frac{1}{2}B_0x^2$，令

$$\boldsymbol{A}_3'=\boldsymbol{A}_3+\nabla\psi$$

则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_3'=\nabla\cdot\boldsymbol{A}_3+\nabla^2\psi=B_0+(-B_0)=0$$

如果取 $\psi=\frac{1}{2}B_0z^2$，那么

$$\boldsymbol{A}_3'=B_0x\boldsymbol{e}_y+B_0z\boldsymbol{e}_z-B_0z\boldsymbol{e}_z=B_0x\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{A}_1$$

3.2 圆环和线圈的磁场和磁矢势

首先讨论圆环，其磁矢势为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}$$

由对称性推出 $\boldsymbol{A}$ 的方向

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=A(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_\phi$$

则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{a\cos\phi\mathrm{d}\phi}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\alpha}}$$

$$ra\cos\phi=r_ja_j=ra\sin\theta\cos\phi$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int\frac{\cos\phi\mathrm{d}\phi}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\phi}}\boldsymbol{e}_\phi$$

很不幸，这是个椭圆积分没有初等函数解

退而求其次，只看对称轴上

$$B_z=\frac{\mu_0 Ia^2}{4\pi}\frac{1}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

在圆环远处有

$$B_z\sim\frac{1}{z^3}$$

将 $\sin\theta$ 作为小量展开，那么

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int\frac{\cos\phi\mathrm{d}\phi}{\sqrt{r^2+a^2}\sqrt{1-\frac{2ra\sin\theta\cos\phi}{r^2+a^2}}}\\
&= \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int\frac{\cos\phi\mathrm{d}\phi}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(1+\frac{ra\sin\theta\cos\phi}{r^2+a^2}\right)\\
&= \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int\frac{ra\sin\theta\cos^2\phi\mathrm{d}\phi}{(r^2+a^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

而磁场

$$
\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \implies A2\pi R = B\pi R^2 \implies B=\frac{2A}{R}=\frac{2A}{r\sin\theta}
$$

然后讨论线圈，将线圈看作一堆圆环的叠加，考虑每个圆环对一点的贡献

$$
B_z=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}
$$

引入线圈的匝密度 n，则

$$
\mathrm{d}I = nI\mathrm{d}z
$$

所以磁场的 z 分量

$$
\mathrm{d}B_z=\frac{\mu_0}{2}\frac{a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}I=\frac{\mu_0}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}nI\mathrm{d}z
$$

引入 $r^2=z^2+a^2$

$$
\mathrm{d}B_z=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{a^2}{r^3}\mathrm{d}z=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{\sin^2\theta}{r}\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}z=\frac{r\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}
$$

所以得到

$$
\mathrm{d}B_z=\frac{\mu_0 nI}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \implies B_z=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)
$$

无限长螺线管 $\theta_1\to 0,\theta_2\to\pi, B_z\to\mu_0 nI$，也可以理解为 $a\to 0$，即无限长 $\cong$ 无限细，本质为螺线管长度和半径之比，从而可以认为长螺线管内的 $\boldsymbol{B}$ 为常数场，外部 $\boldsymbol{B}=0$。

$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，出于对称性考虑，做一个垂直于 z 的圆面，中心在 z 轴上，那么有

管外：$\oint \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \implies 2\pi rA=\pi a^2 B \implies A=\frac{Ba^2}{2r}\boldsymbol{e}_\phi$

$\nabla\times\boldsymbol{A}=0 \qquad \boldsymbol{B}=0$但$\boldsymbol{A}$不为 0

$\implies$ AB 效应：与量子力学相关。$\boldsymbol{A}$更基本，尽管不可测

管内：$\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \implies 2\pi rA=\pi r^2 B \implies A=\frac{rB}{2}\boldsymbol{e}_\phi$

$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_z$——常数场

接下来是磁偶极子，正如电偶极子，它产生的磁矢势为圆环电流在远处产生的磁矢势。首先一个圆环电流产生的磁矢势为

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int\frac{\cos\phi\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\phi}}
$$

远处看 $r\gg a$，将 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 按 $\frac{a}{r}$ 展开

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int\frac{\cos\phi\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi}{r\sqrt{1-\frac{2a\sin\theta\cos\phi}{r}}}=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\boldsymbol{e}_\phi\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi\mathrm{d}\phi}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi\right)\\
&= \frac{\mu_0 a^2 I}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned}
$$

定义磁偶极矩

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S}$$

则磁矢势表达为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

其产生的磁场为

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{m}r^2}{r^5}\text{——与电偶极子的 }\boldsymbol{E}\text{ 很像}$$

由于远处 $\nabla\times\boldsymbol{B} = 0$，所以 $\boldsymbol{B}$ 可以定义一个标量势，这是一个特殊现象

$$\boldsymbol{B} = -\mu_0\nabla\phi_m \qquad \phi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}$$

然后讨论磁偶极子在磁场中的受力

$$\pi a^2\left[B_z(z+\Delta z) - B_z(z)\right] + 2\pi a\Delta z B_r = 0 \implies B_r = -\frac{a}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

在 z 方向的受力

$$F_z = IB_r 2\pi a = I\pi a^2\frac{\partial B_z}{\partial z} = m\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

如果 $\boldsymbol{m}$ 平行 $\boldsymbol{B}$，那么 $\boldsymbol{F}$ 沿磁场增大方向，如果反平行，那么沿着磁场减小的方向

磁场做功来自感生电动势——电磁感应

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= m\frac{\partial B_z}{\partial z}\mathrm{d}z \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = m\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} \\
&= IS\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \\
&= I\mathcal{E}
\end{aligned}$$

3.3 静磁能

静磁场的能量为

$$U = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\mathrm{d}V = \frac{1}{2\mu_0}\int\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}V$$

考虑一个线圈 (圆环电流)

$$U = \frac{1}{2}\int\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}I\int\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}I\Phi \qquad \Phi\text{——磁通量}$$

$\Phi = LI$——自感，$U = \frac{1}{2}LI^2$——电感器的能量，磁场的能量来源于建立磁场时所作的功，而 Lorentz 力不做功，如先摆好导线，设好电源，电阻，通电 $\implies$ 建立磁场的能量

3.4 磁多极展开

考虑一个电流分布在远处的磁场

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

当 $r \gg r'$ 时，泰勒展开

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r} + \partial_i \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Big|_{\boldsymbol{r}'=0}(-x_i') + \cdots \approx \frac{1}{r} - x_i'\partial_i\frac{1}{r}$$

则磁矢势相应的展开为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' + \frac{\mu_0}{4\pi}I\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}'\frac{(-x_i')(-x_i)}{r^3}$$

稳恒电流条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$ 给出

$$\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V' = 0$$

只需计算后一项

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{r^3}\oint(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

但是这一项并不好算，首先对其做一个变换

$$(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}') - \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}')$$

接下来证明一个公式

$$\oint(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = -\frac{1}{2}\oint\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}')$$

证明如下：

$$\partial_m'(x_i'x_j'\mathrm{d}l_m') = (\partial_m'\mathrm{d}l_m)x_i'x_j' + x_j'\mathrm{d}l_i' + x_i'\mathrm{d}l_j'$$

由电流守恒

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = \partial_m j_m = 0$$

则有

$$\partial_m j_m \Delta V = \partial_m(I\mathrm{d}l_m) = I\partial_m(\mathrm{d}l_m) \implies \partial_m'\mathrm{d}l_m' = 0$$

所以

$$\begin{aligned}
&\partial_m'(x_i'x_j')\mathrm{d}l_m' = x_i'\mathrm{d}l_j' + x_j'\mathrm{d}l_i' \\
\implies &\oint x_i'\mathrm{d}l_j' + x_j'\mathrm{d}l_i' = 0 \\
\implies &\oint x_ix_i'\mathrm{d}l_j' + x_ix_j'\mathrm{d}l_i' = 0 \\
\implies &\oint x_ix_i'\mathrm{d}l_j' = \frac{1}{2}\left[\oint x_ix_i'\mathrm{d}l_j' - x_ix_j'\mathrm{d}l_i'\right] \\
\implies &\oint \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \frac{1}{2}\left[\oint(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{l}' - \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}')\right] \\
\implies &\oint \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = -\frac{1}{2}\oint\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}')
\end{aligned}$$

所以得到磁矢势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\left(-\frac{1}{2}\oint\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\right)$$

定义磁矩

$$\boldsymbol{m} = \frac{I}{2}\oint\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

所以磁矢势进一步化为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{m}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

这与磁偶极子一致，事实上，只要 $\frac{r'}{r}$ 很小就必然如此！

3.5 磁偶极矩在外场中的受力和力矩

首先是其受力

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_e&=\int\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}_e\mathrm{d}V'=\int\boldsymbol{j}\times\left[\boldsymbol{B}_e(0)+x_i'\partial_i'\boldsymbol{B}_e(0)+\cdots\right]\mathrm{d}V'\\&\approx\int\boldsymbol{j}\times\left[x_i'\partial_i'\boldsymbol{B}_e(0)\right]\mathrm{d}V'=\left[\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')x_i'\mathrm{d}V'\right]\times\partial_i\boldsymbol{B}_e\\&=I\left[\oint x_i'\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\right]\times\partial_i\boldsymbol{B}_e=I\left[-\frac{1}{2}\oint\nabla\times(\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}')\times\boldsymbol{B}_e(0)\right]\\&=\frac{I}{2}\left[\oint(\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}')\times\nabla\right]\times\boldsymbol{B}_e=(\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}_e\end{aligned}$$

磁场的空间变化产生此力，其分量为

$$F_i=-m_i(\nabla\cdot\boldsymbol{B})+m_k\partial_iB_k=m_k\partial_iB_k$$

如果取 $i=z$，则只有 z 分量

$$F_z=m\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

假设 $\boldsymbol{m}=\text{const}$，那么

$$\boldsymbol{F}=-\nabla(-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})=-\nabla U$$

其中

$$U=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}\text{——(机械) 势能，此时非保守系}$$

因为要保持 $\boldsymbol{m}$ 恒定，必然需要外部输入，系统不可能是一个保守系。

接下来所受的力矩

$$\boldsymbol{M}=\int\boldsymbol{r}'\times\left[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{B}_e\right]\mathrm{d}V'$$

其分量为

$$M_i=I\oint\left[x_j'\mathrm{d}l_i'B_{ej}-x_j'\mathrm{d}l_j'B_{ei}\right]$$

注意到

$$\oint(x_i'\mathrm{d}l_j'+x_j'\mathrm{d}l_i')=0$$

得到

$$\boldsymbol{M}=\frac{I}{2}\left(\oint\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\right)\times\boldsymbol{B}_e=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_e$$

其大小为

$$M=mB_e\sin\theta=-\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

最后是在外场中的总能量

$$\begin{aligned}W=\int\boldsymbol{A}_e\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'&=\int\left[\boldsymbol{A}_e(0)+\partial_i\boldsymbol{A}_e(0)\cdot(x_i')\right]\mathrm{d}V'\\&=\partial_i\boldsymbol{A}_eI\cdot\int x_i'\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=I\left[\frac{1}{2}\oint(\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}')\times\nabla\right]\cdot\boldsymbol{A}_e\\&=(\boldsymbol{m}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{A}_e=\boldsymbol{m}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}_e)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e\end{aligned}$$

与上述提到的 U 恰好相差一个负号，如何理解？考虑一个回路和一个线圈，除此之外二者完全相同：

$$
\begin{aligned}
&\text{对回路：}U_{\text{势能}}+U_{\text{电 (回路)}}=0\\
&\text{对线圈：}U_{\text{势能}}+U_{\text{电 (线圈)}}=0\\
&\text{相加有：}2U_{\text{势能}}+U_{\text{电 (回路)}}+U_{\text{电 (线圈)}}=0\\
&\text{总能量：}U=U_{\text{势能}}+U_{\text{电 (回路)}}+U_{\text{电 (线圈)}}=-U_{\text{势能}}
\end{aligned}
$$

3.6 电磁感应定律

还是从麦克斯韦方程组出发

$$
\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial B}{\partial t}\implies\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}
$$

控制回路不动，电动势

$$
\mathcal{E}=\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}
$$

当回路运动时：$\boldsymbol{v}\neq 0$，假设 $\boldsymbol{B}$ 不随时间变化

$$
\mathcal{E}=\oint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\approx B\frac{\Delta x}{\Delta t}L\sim -B\frac{\Delta S}{\Delta t}
$$

一般的，在一个确定的参考系，有随时间变化的磁场，受洛伦兹力，则

$$
\mathcal{E}=\oint(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\text{——Faraday 电磁感应定律}
$$

其中 $\Phi=\iint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{v}$ 为导线速度而非电子运动速度

电磁感应定律包含了 2 个基本定律：

$$
\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\implies\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}
$$

$$
\begin{aligned}
-\oint(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\iint_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\
&=\iint_S\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})\right)\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&=\iint_S\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&=\iint_S\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&=\iint_S\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi
\end{aligned}
$$

截至目前，仍然认为电磁感应定律仅在以太参考系成立，感生电动势与动生电动势时不同的物理，变换参考系，原先的 Lorentz 力消失，看到了变化的磁场产生涡旋电场，效果在相对论下相同。

4. 电磁波

考虑 $\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0$ 的情况

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

所以得到

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = -\nabla^2 \boldsymbol{B}$$

即得到两个波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

非平凡解要求 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 随时间变化，否则为平凡零解，且随时间的变化率也随时间变化，同样对于电磁势有同样的方程

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0$$

此处选取 Lorentz 规范

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

4.1 单色平面电磁波

波动方程的典型解：平面电磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(kz - \omega t)$$

描述一个沿 z 方向传播，振幅为矢量 $\boldsymbol{E}_0$，不失一般性的，这里使得 $t=0$ 时，在 $z=0$ 处电场初相位为 0。其波长为空间最小周期 $\lambda=\frac{2\pi}{\omega}, \boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_z=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{e}_z$ 称为波矢；相应的 (时间) 周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}, \omega=\frac{T}{2\pi}$ 称之为角频率，所以光速为 $c=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{k}$

然后看波的运动

$$\begin{aligned} t=0: & kz-\omega t=0 \\ t=\Delta t: & k(z+\Delta z)-\omega(t+\Delta t)=0 \\ \Longrightarrow & k\Delta z-\omega\Delta t=0 \implies c=\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\omega}{k} \end{aligned}$$

一般的

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$$

波动的方向为 $\boldsymbol{k}$ 的方向，其等相面为

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t=\text{const}$$

为一个垂直于波矢的平面，等相面之间的最小距离为波长。

由波动方程：

$$\begin{aligned} k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\frac{\omega^2}{c^2} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \implies \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \implies \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0 \\ \implies \boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{B}\text{且}\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{E} \end{aligned}$$

说明电磁波为横波，振动方向与传播方向垂直。

电磁波的电场和磁场并不独立，密切相关

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \implies \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)=-\boldsymbol{B}_0\omega\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\phi) \end{aligned}$$

要在任意时刻成立，所以得到 $\phi=0$，有

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0=\omega\boldsymbol{B}_0 \implies \boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B} \qquad E_0=cB_0$$

最简单的情况

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}=E\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

一般来说，E_z 决定 B_y，E_y 决定 B_x，E_x, E_y 是相互独立的——2 个自由度。

对于

$$\boldsymbol{E}=E_0\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{e}_x$$

其

$$\begin{aligned} \text{能量密度: } W &= \frac{1}{2}\epsilon_0E_0^2+\frac{1}{2\mu_0}B_0^2=\left(\frac{1}{2}\epsilon_0E_0^2+\frac{1}{2\mu_0}B_0^2\right)\cos^2(kz-\omega t) \\ B_0 &= \frac{E_0}{c} \implies \boldsymbol{E}\text{与}\boldsymbol{B}\text{同等贡献} \\ W &= \epsilon_0E_0^2\cos^2(kz-\omega t) \\ \text{取周期平均}\overline{W} &= \frac{1}{2}\epsilon_0E_0^2 \end{aligned}$$

$$\text{Poynting 矢量: } \boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu_0}EB\boldsymbol{e}_z=\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E^2\boldsymbol{e}_z=cW\boldsymbol{e}_z$$
$$\text{动量密度: } \boldsymbol{G}=\epsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}=\frac{W}{c}\boldsymbol{e}_z$$
$$\text{周期平均: } \overline{\boldsymbol{G}}=\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\boldsymbol{e}_z \qquad \overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\boldsymbol{e}_z$$

这表明电磁波有能量且在传播。

考虑平面单色线偏振作用下的电荷为 q 的粒子，初始位于原点

$$E_x=E_0\cos\omega t \qquad B_y=B_0\cos\omega t$$

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=qE_x\cos\omega t\boldsymbol{e}_x+qv_xB_y\boldsymbol{e}_z-qv_zB_y\boldsymbol{e}_x$$
$$\langle\boldsymbol{F}\rangle=q\langle v_xB_y\rangle\boldsymbol{e}_z=q\langle v_x\frac{E_x}{c}\rangle\boldsymbol{e}_z=\frac{1}{c}\langle\text{功率}\rangle\boldsymbol{e}_z$$
$$\langle\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\rangle=\frac{1}{c}\langle\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\rangle\boldsymbol{e}_z$$

带电粒子 q 从电磁场中获得能量 ΔW 的时间间隔内，也从其中得到动量 $\Delta\boldsymbol{P}=\frac{W}{c}\boldsymbol{e}_z$

也可以类似处理平面电磁波的角动量，设 E_x,E_y 均不为 0

$$E_x=E_0\cos(kz-\omega t) \qquad E_y=E_0\cos(kz-\omega t-\frac{\pi}{2})$$

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y \qquad \text{圆偏振，}\boldsymbol{E}\text{的旋转频率也为}\omega$$

原点处有 q 时，设想其在电磁波作用下处于稳定状态，其在电磁波作用下处于受迫振动的状态，可设想其做圆周运动的情况 $v=\omega r$

$$\text{角动量 } \boldsymbol{J}\text{: } \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times(q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

由于 $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 总是在 $-\boldsymbol{v}$ 方向

$$\text{看周期平均: } \langle\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}\rangle=\langle q(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{E})\rangle+q\langle\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\rangle=\langle q(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{E})\rangle=\frac{q}{\omega}\langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}\rangle\boldsymbol{e}_z$$

带电粒子从电磁波中获得能量 ΔW，也得到角动量 $\frac{\Delta W}{\omega}$，所以可以认为平面圆偏振电磁波具有角动量密度

$$\boldsymbol{J}=\frac{W}{\omega}\boldsymbol{e}_k$$

这与量子力学一致：

$$\Delta W=\hbar\omega\implies\Delta\boldsymbol{j}=\hbar$$

4.2 波动方程的球面波解

一维波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

其具有解

$$\psi(x,t)=\psi_1(x-ct)+\psi_2(x+ct)$$

三维情况以电场为例

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

其基本解为沿某个方向的平面单色波，一般解时各个方向的平面波叠加。

接下来讨论其球面波解：$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(r,t)$ 所以得到

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\boldsymbol{E})\implies\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\boldsymbol{E})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=0$$

稍微调动一下 r 的位置得到

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\boldsymbol{E})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\boldsymbol{E})=0\implies r\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\psi}(r-ct)\qquad r\neq 0$$

$$\implies\boldsymbol{E}(r,t)=\frac{1}{r}\boldsymbol{\psi}(r-ct)\text{——球面波，向外传播，速度为}c$$

波长、频率不变，振幅为 $\frac{1}{r}$ 幅度衰减——球面波的特征。同时注意到 $\psi(r+ct)$ 也是解，表示汇聚波，在经典物理中一般不考虑，在量子场论中有实际意义。

4.3 电磁波的偏振

一般平面单色电磁波

$$E_x=E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x)\qquad E_y=E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y)$$

在固定的 z 处，当 $\phi_x=\phi_y,\phi_x=\phi_y+\pi$ 时——线偏振；当 $\phi_x=\phi_y\pm\frac{\pi}{2}$ 时，假设 $E_{0x}=E_{0y}$——圆偏振

$$\begin{cases}+\frac{\pi}{2}\text{左旋}\\-\frac{\pi}{2}\text{右旋}\end{cases}$$

一般情况下是椭圆偏振即 $E_{0x}\neq E_{0y}$

一种方便的描述是使用复数记号：

$$\mathbb{E}_x=E_{0x}e^{i(kz-\omega t+\phi_x)}=\mathbb{E}_{0x}e^{i(kz-\omega t)}\qquad\mathbb{E}_y=E_{0y}e^{i(kz-\omega t+\phi_y)}=\mathbb{E}_{0y}e^{i(kz-\omega t)}$$

物理的 $E_x=\mathrm{Re}\mathbb{E}_{0x},E_y=\mathrm{Re}\mathbb{E}_{0y}$，用 $e^{i(kz-\omega t)}$ 电磁场即复数标量场。

$$\text{在不引起混乱前提下}\begin{cases}E_x,E_y\text{——复的}\\\boldsymbol{E}=(E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}\end{cases}$$

电磁波有两个独立的偏振模式，引入正交归一基

$$\text{线偏振基}\begin{cases}\mathcal{E}_x=\boldsymbol{e}_xe^{i(kz-\omega t)}\\\mathcal{E}_y=\boldsymbol{e}_ye^{i(kz-\omega t)}\\\boldsymbol{E}=E_{0x}\mathcal{E}_x+E_{0y}\mathcal{E}_y\end{cases}$$

$$\text{圆偏振基}\begin{cases}\mathcal{E}_+=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x-i\boldsymbol{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_x-i\mathcal{E}_y)\\\mathcal{E}_-=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x+i\boldsymbol{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_x+i\mathcal{E}_y)\\\boldsymbol{E}=\mathcal{E}_{0+}+\mathcal{E}_{0-}\\E_{0+}=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{0x}+E_{0y})\qquad E_{0-}=-\frac{i}{\sqrt{2}}(E_{0x}-E_{0y})\end{cases}$$

能量密度：

$$W=\epsilon_0\left|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}\right|^2$$

能流密度

$$S=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\boldsymbol{E}\times\mathrm{Re}\boldsymbol{B}=\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\left|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}\right|^2\boldsymbol{e}_k$$

其中

$$|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2 = |E_{0x}|^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi_x) + |E_{0y}|^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi_y)$$

对时间平均

$$\overline{|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2} = \frac{1}{2}|E_{0x}|^2 + \frac{1}{2}|E_{0y}|^2 = \frac{1}{2}|E_{0+}|^2 + \frac{1}{2}|E_{0-}|^2$$

5. 麦克斯韦方程组的解

5.1 麦克斯韦方程组复习

首先不能忘记麦克斯韦方程组的样子

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\\
&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial B}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}
\end{aligned}
$$

其次是电磁势 $(\phi,\boldsymbol{A})$ 具有不唯一性

$$
\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\qquad B=\nabla\times\boldsymbol{A}
$$

$$
\text{有规范变换：}\ \phi\to\phi-\frac{\partial\psi}{\partial t}\qquad\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\nabla\psi
$$

取 Lorentz 规范

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0
$$

得到麦克斯韦方程组的一个等价形式

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\boldsymbol{r},t)&=-\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\epsilon_0}\\
\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)&=-\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
$$

如果取库伦规范：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，那么麦克斯韦方程组

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\
&\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)=-\mu_0\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

化为

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) = -\mu_0\boldsymbol{j}$$

这告诉我们方程的难度不会凭空下降，只会从一个方程转移到另一个方程，甚至转移过后更难写了。

例 5-1 求平面电磁波的电磁势

没有电荷没有电流，电磁势的麦克斯韦方程组就是两个波动方程，平面波解是其一个解，为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$
$$\phi = \phi_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$
$$\phi = \frac{c^2}{\omega}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}$$

所以其决定的电磁场为

$$\boldsymbol{B} = i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{E} = -i\boldsymbol{k}\phi + i\omega\boldsymbol{A} = \frac{ic^2}{\omega}\left[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{A}\right]$$
$$= -\frac{ic^2}{\omega}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}) = -\frac{c^2}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B} = -c\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{B}$$

从中有决定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的只有横向的 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 的纵方向仍然具有任意性。

如果令 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{k}$，可以有更简单的选择，即

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A} = 0\text{——库伦规范}$$

那么 $\phi = 0, \boldsymbol{B} = i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E} = i\omega\boldsymbol{A}$

5.2 麦克斯韦方程组的解

在 Lorentz 规范下，麦克斯韦方程组为：

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\epsilon_0}$$
$$\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = -\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$$

其可以看作四个达朗贝尔方程，所以只需要解一个 ϕ 的方程，猜：

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\epsilon_0}$$

在远处 (无穷远处电荷为 0)

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\boldsymbol{r},t) = 0$$

为波动方程

在源发出应有球面波解

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{X(r-ct)}{r}=\frac{X\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

相当于有一推迟：$(\boldsymbol{r},t)$ 由 $\left(0,t-\frac{r}{c}\right)$ 时决定。

看近处：$r\to 0$，$\phi(\boldsymbol{r},t)$ 在远处为 $\frac{X}{r}$，在 r 较小时，二阶导数很大，可以略去时间项即

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

取电荷密度元 $\rho\mathrm{d}V$，那么

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{r}\mathrm{d}V$$

所以一般的有

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

电动力学老师评价此解：这就是物理，漂亮！

注意 $\rho,\boldsymbol{j}$ 时经典电动力学的基本物理量，无需将其看作一堆点电荷和一堆点电荷的流动！

例 5-2 求电偶极矩对时间的变化率

$$\boldsymbol{p}=\int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V\implies p_i(t)=\int x_i\rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i(t)&=\int x_i\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\mathrm{d}V\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\\&=-\int x_i\partial_k j_k(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V=\int j_i(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V\\\implies\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}(t)&=\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V\end{aligned}$$

例 5-2 证明麦克斯韦方程组的解 Lorentz 规范条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi=0$

证明：

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\frac{\partial\rho}{\partial t}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\frac{\partial\rho}{\partial t'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\partial_i A_i=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\partial_i j_i(\boldsymbol{r}',t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+j_i\partial_i\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]\mathrm{d}V'$$

计算 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 的两项

$$
\begin{aligned}
\partial_i j_i(\boldsymbol{r}',t') &= \frac{\partial j_i}{\partial t'}\partial_i\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\\
\partial'_i j_i(\boldsymbol{r}',t') &= (\partial'_i j_i)_{t'} + \frac{\partial j_i}{\partial t'}\partial'_i\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\\
&= (\partial'_i j_i)_{t'} - \frac{\partial j_i}{\partial t'}\partial_i\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\\
&= (\partial'_i j_i)_{t'} - \partial_i j_i\\
\Longrightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{j} &= \nabla'\cdot\boldsymbol{j}|_{t'} - \nabla'\cdot\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}|_{t'}-\nabla'\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - j_i\partial'_i\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]\mathrm{d}V'\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}|_{t'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \partial'_i\left(\frac{j_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\right]\mathrm{d}V'\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t')|_{t'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'
\end{aligned}
$$

最后有

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)|_{t'} + \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' = 0
$$

其中用到电荷守恒，即验证麦克斯韦方程组的解满足洛伦兹规范条件。

5.3 运动的点电荷的势

运动的点电荷对 $\boldsymbol{r}$ 处的 $\phi,\boldsymbol{A}$，每时刻 t 只有运动轨迹上的一点与之对应。

证明：设点 1 $\boldsymbol{r}'_1$ 与点 2 $\boldsymbol{r}'_2$ 都对应 t 时刻的场，那么

$$
\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_1|}{c} = \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_2|}{c} + \frac{|\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1|}{v}
$$

$$
\text{均不可能}\begin{cases}\text{如果：}\boldsymbol{r}'\text{平行}\boldsymbol{r} \implies v=c\\ \text{如果：}\boldsymbol{r}'\text{垂直}\boldsymbol{r} \implies v>c\end{cases}
$$

那么如果在 $\boldsymbol{r}$ 处，t 时刻对应的是电子在 $\boldsymbol{r}'$ 处，$t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$ 处的势，那么是否有

$$
\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad \text{非也!}
$$

正确答案

$$
\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{1}{1-v_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}/c}
$$

其中 $v_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}$ 为 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 上的分量

此因

$$
\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\mathrm{d}V'
$$

其中

$$\int \rho\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\mathrm{d}V' = \frac{q}{1-\frac{v}{c}} \neq q \qquad \text{——运动的几何效果，其实不涉及相对论}$$

同理有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t'\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{1}{1-v_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}/c}$$

所以最后有

$$\text{连纳-维谢尔势}\begin{cases}\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-\frac{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{c}} \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\phi(\boldsymbol{r},t)\end{cases}$$

继续研究匀速运动点电荷的势——推迟时间用现在时间标志，设 $t=0$ 时，q 在原点，那么

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-\frac{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{c}}$$

其中的

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = c(t-t') \qquad \frac{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{c} = \frac{v}{c}(x-vt')$$

所以标势变为:

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{c(t-t')-\frac{v}{c}(x-vt')} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{ct-\frac{v}{c}x-ct'+\frac{v^2}{c}t'} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}c\left[\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t'\right]\end{aligned}$$

结合如下几何关系

$$c^2(t-t')^2 = (x-vt')^2+y^2+z^2$$

求得

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t' = t-\frac{vx}{c^2}-\frac{1}{c}\sqrt{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}$$

带回到标势的表达式有

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z,t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2+y^2+z^2}}\end{aligned}$$

如果我们认为换一个参考系物理也一样，则在以 $\boldsymbol{v}$ 运动的参考系内，应当有

$$\phi'(x',y',z',t') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

那么应当有变换

$$\begin{cases}x' \to \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' \to y \\ z' \to z \\ \phi' \to \frac{\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\end{cases}$$

这是 Lorentz 得到 Lorentz 变换的地方，可惜他没有搞明白 t' 的含义，认为这只是表象。

5.4 电磁波的激发

看 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$，由 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{E}$，其中

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

关注远场，即 $|\boldsymbol{r}|\gg|\boldsymbol{r}'|$，即场点位置远大于源点，同时 $\lambda\gg|\boldsymbol{r}'|$，所以有：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-\frac{r}{c})\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\boldsymbol{p}}(t')$$

设电偶极矩 $\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{p}_0e^{-i\omega t}\iff\boldsymbol{j}(t)=\boldsymbol{j}_0e^{-i\omega t}$，那么磁矢势：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}(-i\omega)\boldsymbol{p}_0e^{-i\omega t'}=-i\frac{\mu_0}{4\pi}\omega\boldsymbol{p}_0\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\dot{\boldsymbol{p}}(t)\frac{e^{ikr}}{r}$$

从而有磁场

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)&=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_0\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}+\cdots\\&\approx i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{k}{\omega}\omega\frac{e^{ikr}}{r}\boldsymbol{e}_k\times\dot{\boldsymbol{p}}(t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\ddot{\boldsymbol{p}}(t)\times\boldsymbol{e}_k\end{aligned}$$

<u>远处</u> 球面波，略去高阶项后：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_k=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{e^{ikr}}{r}|\ddot{\boldsymbol{p}}|\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

从而波印廷矢量及其对时间的平均

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\boldsymbol{E}\times\mathrm{Re}\boldsymbol{B}\\\bar{\boldsymbol{S}}&=\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2\frac{|\boldsymbol{p}_0|^2}{r^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_k\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{c}\omega^4\\&=\frac{\omega^4}{32\pi^2\epsilon_0c^3}\frac{|\boldsymbol{p}_0|^2}{r^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_k\end{aligned}$$

注意 ω^4 产生于电荷的加速运动——电偶极辐射

辐射的角分布和总功率分别为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\omega^4p_0^2}{32\pi^2\epsilon_0c^3}\sin^2\theta\qquad W=\oint\boldsymbol{S}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4p_0^3}{3c^3}$$

例 5-4 讨论短天线的辐射

电流满足

$$I=I(z')e^{-i\omega t}\qquad I(z')=I_0\left(1-\frac{2|z'|}{d}\right)$$

仍然从

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

出发，当 $r\gg d,\lambda\gg d$ 时：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}I(z',t')\mathrm{d}z'\boldsymbol{e}_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}I(z')\mathrm{d}z'e^{i(kr-\omega t)}\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}I_0\frac{d}{2}e^{i(kr-\omega t)}\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

从而

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t)=I_0\frac{d}{2}e^{-i\omega t}\boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{p}(t)=\frac{I_0 d}{-2i\omega}e^{-i\omega t}\boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{p}(0)=\frac{I_0 d}{-2i\omega}\boldsymbol{e}_z$$

从而有角分布为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\omega^4 I_0^2 d^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta=\frac{\omega^4 I_0^2 d^2}{12\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin\theta=\frac{1}{32}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}I_0^2\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2\sin\theta$$

例 5-5 证明具有相同荷质比的粒子组成的孤立系统，没有电偶极辐射

证明：从系统的电偶极矩出发

$$\boldsymbol{p}=\sum_i q_i\boldsymbol{r}_i=\sum_i m_i\frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{r}_i=\frac{q}{m}\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{q}{m}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{q}{m}\boldsymbol{P}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为系统的总动量，孤立系统电荷守恒，从而$\dot{\boldsymbol{P}}=0\implies\ddot{\boldsymbol{p}}=0$所以无电偶极辐射

例 5-6 磁偶极辐射和电四极辐射

需要对 $\frac{r'}{\lambda}$ 做一阶修正，即

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx r-\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{e}_r$$

所以磁矢势

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{r},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')e^{-i\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}V'e^{i(kr-\omega t)}\end{aligned}$$

设电偶极辐射为 0，那么

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$

先算

$$\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'=\int j_i(\boldsymbol{r}')n_j x_j'\mathrm{d}V'\boldsymbol{e}_i$$

令

$$j_i x_j'=\frac{1}{2}(x_j'j_i-x_i'j_j)+\frac{1}{2}(x_j'j_i+x_i'j_j)$$

对于第一项：

$$\frac{1}{2}n_j(x_j'j_i-x_i'j_j)=\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{n}\right]$$

而

$$\frac{1}{2}\int\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'=\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}I\int\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=I\boldsymbol{S}$$

所以

$$\begin{aligned}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'&=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+\frac{1}{2}\int(x_j'j_i+x_i'j_j)n_j\mathrm{d}V'\boldsymbol{e}_i\\&=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+\frac{1}{2}\int\mathrm{d}V'\left\{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{r}'\right\}\end{aligned}$$

而

$$j_i=\partial_j(x_i j_j)-x_i\nabla\cdot\boldsymbol{j}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}n_j\int\left(x_j'j_i+x_i'j_j\right)\mathrm{d}V'\\
=&\frac{1}{2}n_j\int\mathrm{d}V'\left[\partial_k'(x_i'j_k)x_j'-x_i'x_j'\nabla'\cdot\boldsymbol{j}+\partial_k'(x_j'j_k)x_i'-x_i'x_j'\nabla'\cdot\boldsymbol{j}\right]\\
=&\frac{1}{2}n_j\int\mathrm{d}V'\left[-x_i'j_j-x_j'j_i-2x_i'x_j'\nabla'\cdot\boldsymbol{j}\right]\\
=&-\frac{1}{2}n_j\int\mathrm{d}V'x_i'x_j'\nabla'\cdot\boldsymbol{j}\quad\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=i\omega\rho\\
=&-i\omega\frac{1}{2}\int\mathrm{d}V'n_jx_i'x_j'\rho(\boldsymbol{r}')
\end{aligned}
$$

所以

$$
\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}-i\omega\frac{1}{2}\int\mathrm{d}V'n_jx_i'x_j'\rho(\boldsymbol{r}')
$$

所以

$$
\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left[i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{m}-k\omega\frac{1}{2}\int\boldsymbol{d}V'n_jx_i'x_j'\rho(\boldsymbol{r}')\right]
$$

对于磁偶极辐射来说

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_{\text{磁偶}}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\times\boldsymbol{n}\\
\boldsymbol{E}_{\text{磁偶}}&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}\\
\overline{\boldsymbol{S}}_{\text{磁偶}}&=\frac{\mu_0}{32\pi^2}\frac{\omega^4}{c^3}\frac{|\boldsymbol{m}|^2}{r^2}\quad\text{与电四极部分有交叉项，当二者同时存在时}
\end{aligned}
$$

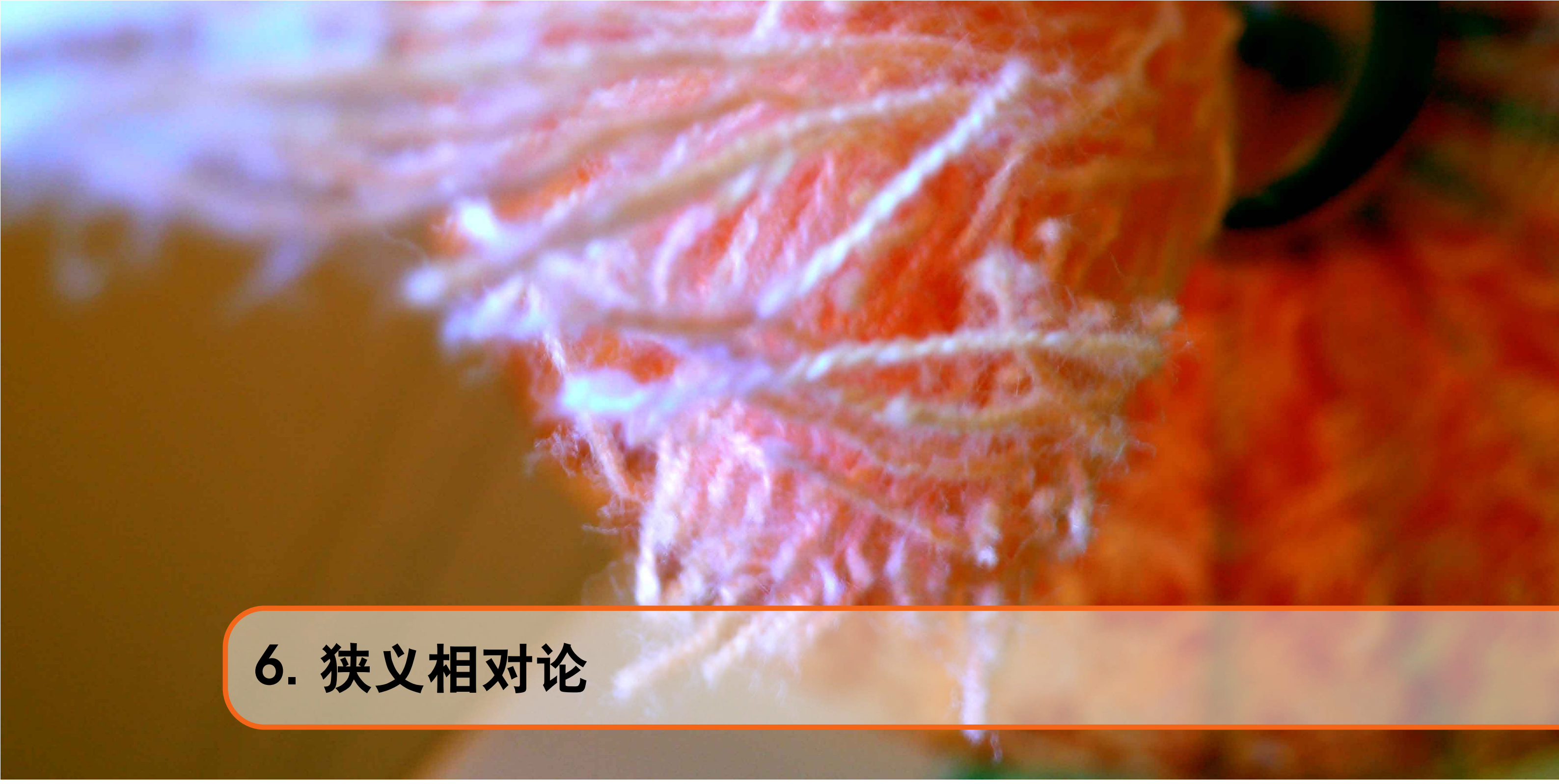
然后考虑电四极辐射

$$
A_i(\text{电四})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\frac{1}{2}\int\mathrm{d}V'n_jx_i'x_j'\rho(\boldsymbol{r}')
$$

所以电四极辐射的磁场分量

$$
\begin{aligned}
B_i(\text{电四})&=\epsilon_{iab}\partial_aA_b(\text{电四})\qquad\rho(\boldsymbol{r}',t)=\rho(\boldsymbol{r}')e^{-i\omega t}\\
&=-i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{1}{2}n_jk_a\epsilon_{iab}\frac{Q_{jb}}{3}\qquad\text{令}Q_i=Q_{ij}n_j\\
&=-\frac{\mu_0}{24\pi}\frac{\omega^2}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\epsilon_{iab}n_an_j\dddot{Q}_{jb}=-\frac{\mu_0}{24\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\epsilon_{iab}n_a\dddot{Q}_b\\
\boldsymbol{B}(\text{电四})&=\frac{\mu_0}{24\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\dddot{\boldsymbol{Q}}\times\boldsymbol{n}\\
\overline{\boldsymbol{S}}(\text{电四})&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{288\pi c^5}\frac{1}{r^2}\left(\dddot{\boldsymbol{Q}}\times\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\sim\omega^6
\end{aligned}
$$

II 相对论



6. 狭义相对论

电动力学仍未结束，原则上应该测得地球相对于以太的绝对速度，实际没有！

6.1 相对性原理

在之前所学的电动力学中，我们只处于一个参考系即以太参考系，因为电动力学的规律似乎不像经典力学那样在不同的惯性系都成立，比如带电粒子受到洛伦兹力是速度依赖的，而 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 对不同的惯性系来说没有理由变化，因为我们使用的是伽利略变换，更为明确的是麦克斯韦方程组似乎也只在一个绝对参考系成立。

另一方面，在电磁感应问题，我们看到线圈在磁场中的近似产生的电动势等价于线圈不动而磁场变化产生的电动势，这似乎说明不同惯性系等价，特别是没有测到地球的绝对速度

爱因斯坦在 1905 年提出狭义相对论，自己完成了经典电动力学体系，革命性地发展了整个经典物理，他提出的基本假设是 (不改变麦克斯韦方程组)

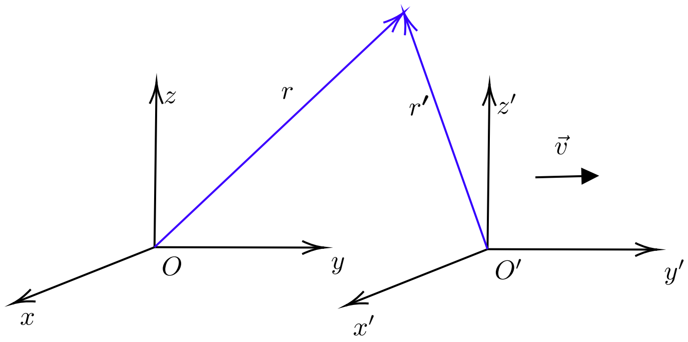
1. 相对性原理：任何物理规律在不同惯性系都成立，包括电动力学规律
2. 光速不变原理：在真空中的光速在任何参考系中大小都一样

相对性原理说：在不同惯性系，麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式都有相同的形式，都能描述同一现象。这意味着

1. 不同惯性系通过非同寻常的变换 (——时空观念改变) 相联系。此变换一定包含着电场和磁场的转换。
2. 不需要以太，光速 c 不变。

在牛顿力学，其实有相对性原理，这始于伽利略。意即在不同参考系，力学规律是一样的，不同惯性系之间的时空关系为

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$



其中参考系 O' 相对于 O 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，两个参考系共用一个时间 $t'=t$。万有引力定律 ⊕ 牛顿三大定律在这个伽利略变换下是不变的。但是电磁波的波动方程将变为：

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\right]\phi=0$$

所以相对性原理要求上面变换应该被改写，对电磁现象也要求有相对性原理，是一个深刻的物理。新变换——洛伦兹变换——经典力学近似下回到伽利略变换。

6.2 光速不变原理

相对论是物理学的基本现象，是关于惯性系之间的联系：时间、空间的概念的理论。它原则上独立于电动力学，所以才称之为原理。

这个原理违反直觉，但是它让麦克斯韦方程组里的基本常数在不同惯性系下一样，特别是，它是任何无质量胶子、引力子的速度。

在经典力学里，物体的速度远小于光速，伽利略变换是可以合理近似得到的。狭义相对论是整个物理学的基础，并不是仅对电动力学。

描述现象总要选一个参考系，选取参考系 O，每一点位置用 (x,y,z,t) 描述，在每个参考系放一个“钟”就足够了。在 $t=t'=0$ 时，两个参考系 O,O' 坐标原点重合，参考系 O' 以速度 v 沿着 x 轴运动，相对于参考系 O，坐标为 (x',y',z',t')，同时对钟，用光速，如果两个信号同时被接收，那么两个事件是同时的，那么应当有变换

$$\begin{cases}x'=\alpha x+\beta t\\ y'=y\\ z'=z\\ t'=\gamma t+\delta x\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为常量。

先看相对运动：

- O' 点：

$$0=\alpha(vt)+\beta t\implies\beta=-\alpha v$$

- O 点：

$$-vt'=0+\beta t\qquad t'=\gamma t\implies\beta=-\gamma v$$

$$\implies\begin{cases}x'=\alpha(x-vt)\\ t'=\alpha t+\delta x\end{cases}$$

$t=0$ 时，在 O 系沿着 x 发出一束光，在 O' 系中，有

$$\begin{cases} ct' = \alpha(ct - vt) \\ t' = \alpha t + \delta ct \end{cases} \implies \delta = \frac{-\alpha v}{c^2}$$

变换写成

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \alpha(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

$t=0$ 时，朝着 y 轴发射一束光

$$\begin{cases} -vt' = \alpha(-vt) \implies t' = \alpha t \\ y' = y \\ y = ct \\ (ct')^2 = y'^2 + (vt')^2 \end{cases} \implies (ct') = (ct)^2 + (vt')^2$$

得到

$$(c^2 - v^2)t'^2 = (ct)^2 \implies \alpha = \frac{t'}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

完整写出洛伦兹变换

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

反过来写有

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

当 $c \to \infty$ 时洛伦兹变换变为伽利略变换。不要用 $\frac{v}{c}$ 是一个小量取近似取得伽利略变换。注意 t 中的爱因斯坦项 $\frac{v}{c^2}x$ 在 $\frac{v}{c}$ 取小量时，未必消失。

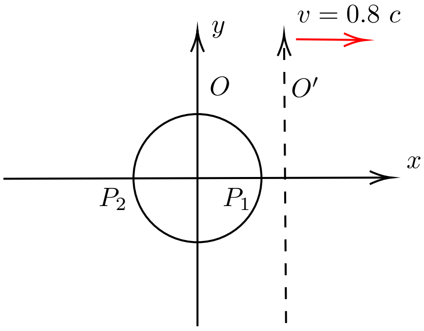
引入一些新符号：

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

所以洛伦兹变换简写为

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x - vt) \qquad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x)$$

例 5-1 如图，设闪光点 O 发出，$t=0$ 时 O 系中 1 秒后被 P_1,P_2 同时接收到，设 O' 相对于 O 的速度为 $v=0.8c$，求 P_1,P_2 在收到信号时，O' 上的时刻和位置



$$P_1在O(x,y,z,t)=(c,0,0,1)$$

$$x'=\gamma(x-vt)=\frac{c}{3} \qquad y'=0 \qquad z'=0 \qquad t'=\gamma(t-\frac{\beta}{c}x)=\frac{1}{3}$$

$$所以光在O'系中沿x'方向的速度为\frac{c}{3}\Big/\frac{1}{3}=c \quad ——光速不变$$

$$P_2在O(x,y,z,t)=(-c,0,0,1) \qquad P_2在O'(x',y',z',t')=(-3c,0,0,3)$$

$$P_1,P_2两个事件在O'中不同时$$

6.3 时空的物理性质

同时的相对性

在同一参考系对准各处的时钟，但在另一运动的参考系来看，这些不同处的时钟不同时。

设有两个事件 P,Q 在 O' 系同时发生，在 O 系中，时间有关系式

$$t_P=\frac{t'_P+\frac{v}{c^2}x'_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_Q=\frac{t'_Q+\frac{v}{c^2}x'_Q}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_P-t_Q=\frac{v}{c^2}\frac{x'_P-x'_Q}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

在 O 系看，事件 P,Q 不同时发生，并且先后取决于其坐标 x'_P,x'_Q 的位置，所以说同时是相对的。

因果性问题

有两个事件的时间差可以写为

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

要求有因果联系的事件：$\Delta t>0$，任意参考系都应该有因果性，这要求

$$\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'>0, \quad \Delta t'>0 \quad ——因果性要求$$

$$\Delta t'>\frac{v}{c^2}\left|\Delta x'\right|——任意系，对x加入绝对值$$

所以进一步有：

$$\frac{v}{c^2}\frac{|\Delta x'|}{\Delta t'}<1$$

洛伦兹变换要求 $v<c$，最多达到 $v\to c$，所以得到

$$\frac{|\Delta x'|}{\Delta t'}\equiv 信号速度\leq c$$

任何物体的速度不能超过光速 c，这与洛伦兹变换自洽。如果 $\Delta x'$ 足够大，以至于

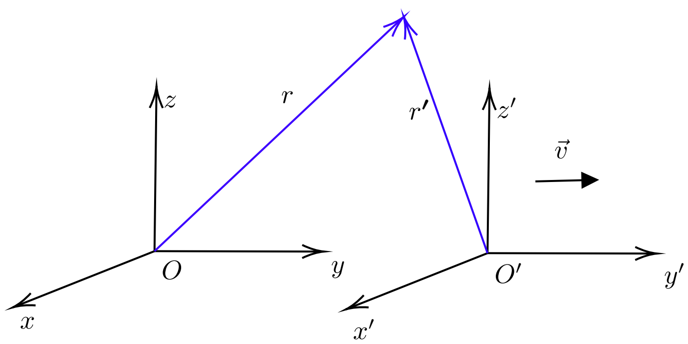
$$\frac{|\Delta x'|}{\Delta t'} > c$$

那么这两个事件一定没有因果关系。那么时序可以颠倒。

动钟变慢

若有一钟表置于 O' 系中，其时间流逝为

$$T_0 = t_2' - t_1'$$



那么在 O 系中，时间分别为

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad T = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

即运动的钟，时间流逝变慢了。这并不是一个表观现象 (观测效果，光学效果)，而是真实存在的物理。双生子佯谬不是问题。

例 6-2 μ 子衰变

μ 子的寿命 (静止情况下)

$$\tau_\mu^0 = 2.2 \times 10^{-6}\text{s}$$

平均在 10^4m 的高空产生，所以它即使以光的速度，也只能走 600 m 左右。但是在地面做实验可以观测到 μ 子。

假设如果 μ 子近光速运动，则在地面看，μ 子的寿命为

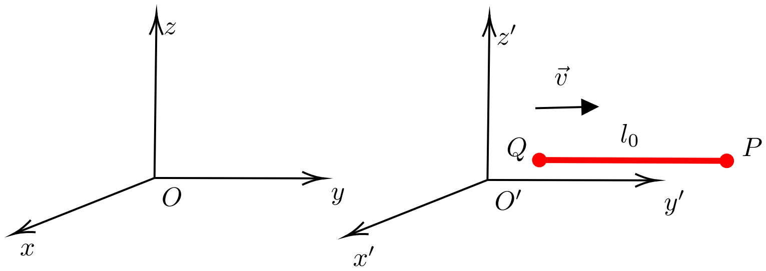
$$\tau_\mu = \frac{\tau_\mu^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

当 $v \sim 0.9c$，μ 子可以运动约 1.2×10^4m

运动尺缩短

设有一尺子在 O 系中以速度 v 运动，置其于 O' 系中静止，则尺子长为：

$$l_0 = x_P' - x_Q' \qquad x_P' = \frac{x_P - vt_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_Q' = \frac{x_Q - vt_Q}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



那么其在参考系 O 中的长度为

$$l = x_P - x_Q \qquad l_0 = x'_P - x'_Q = \frac{x_P - x_Q}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

动尺缩短了，相对效应，在两个参考系相互看都变短了，并无矛盾。承认动尺缩短，也可以推出洛伦兹变换。

$$x = vt + x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad\Longrightarrow\quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

速度合成

首先洛伦兹变换

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

则

$$\mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t) \qquad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}t' = \gamma(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x)$$

所以在 O' 系中看物体的速度

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$
$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)}$$

O 中物体速度为

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

O' 中物体速度为

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \qquad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \qquad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$$

所以得到速度变换关系

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u_x)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u_x)}$$

当 $c \to \infty$ 时，回到伽利略变换：$u'_x = u_x - v$

例 6-3 设 O' 系中物体沿 x 方向，$u'_x = 0.9c$，而 O' 相对于 O 速度为 $v = 0.9c$，求 u_x

直接代入速度变换关系即可

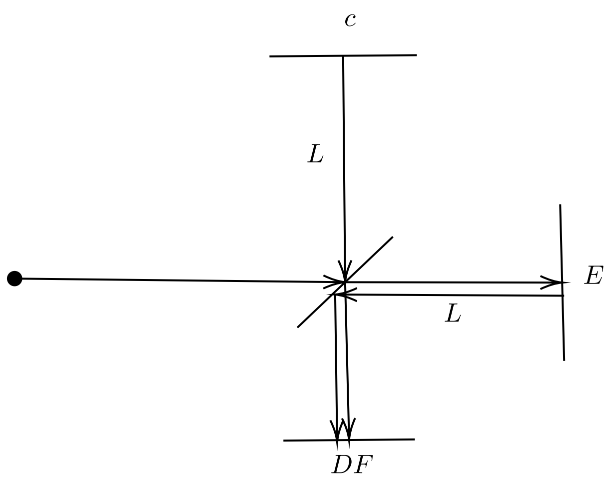
$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{1.8c}{1 + 0.81c} = 0.994c \quad \text{仍然小于}c$$

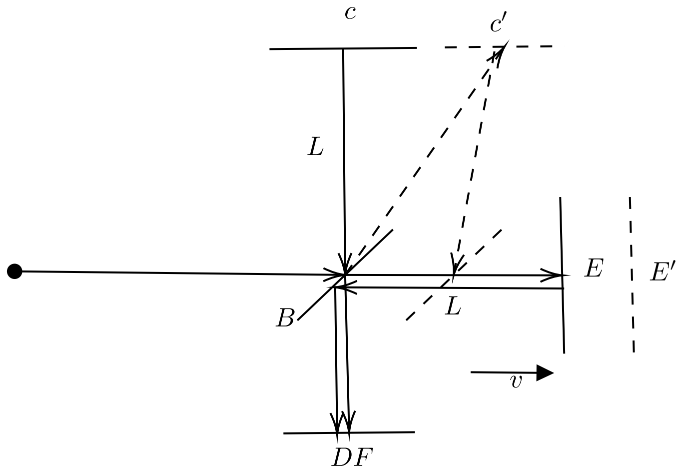
例 6-4 迈克尔逊-莫雷实验

如果这个装置在" 以太" 中不动，那么 D，F 两束光相位相同，经过 C 和 E 反射的两束光到 B 的时间都是 $\frac{2L}{c}$

如果装置以速度 v 向右运动

$$ct_1 = L + vt_1 \qquad ct_2 = L - vt_2$$





沿水平方向的总时间

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$(ct_3)^2 = L^2 + (vt_3)^2 \qquad t_3 = \frac{L/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{总时间：} 2t_3 = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

总时间不一样，应当观测到干涉条纹移动，实验结果：未看到干涉条纹移动。解释：在运动的方向上 $L \to L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ，那么

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2t_3 \quad \text{动钟变慢}$$

6.4 相对论力学

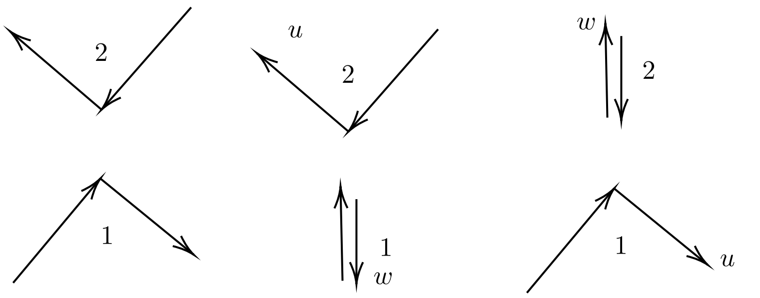
考虑牛顿力学之相对论改变。牛顿第一定律：已经包含在相对性原理中，不需要修改。牛顿第二定律：力 $\boldsymbol{F}=m_0\boldsymbol{a}$，所以速度总是可以被加速到超过光速 c，所以爱因斯坦提出

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \qquad m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{——物体在速度趋于光速时，惯性无穷大}$$

牛顿第三定律也需要修改，作用力和反作用力的传递需要时间，在不同惯性系中同时性消失，牛顿第三定律自然不成立。但是牛顿第三定律本质来自于动量守恒——空间平移不变性，用动量守恒替代即可。动量的定义为

$$m\boldsymbol{v}=\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

在相对论中，首先承认物体的质量是随其速度改变的，讨论相对论质量。考虑完全弹性碰撞，静止时 $m_{1,0}=m_{2,0}=m_0$，碰撞：



质心系　　另一参考系 O　　再换一个参考系 O'

在质心系中，可以这样看。在另一参考系中，使得 1 的水平运动为 0，类似的，再更换一个参考系，使得 2 的水平运动为 0，这两个参考系是完全对称的。利用相对论变换

$$u_y'=\frac{u_y}{\gamma(1-u_x\frac{v}{c})}$$

所以变换参考系后 y 方向运动的速度

$$w=\frac{u_y\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x^2}{c^2}}=\frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} \qquad u_y=w\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}$$

根据动量守恒，在 O 系中看

$$2m_w w=2m_u u_y$$

出于对称性考虑

$$\frac{m_w}{m_u}=\frac{u_y}{w}=\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}$$

取极限 $w\to 0$，则有 $m_w=m_0, u_x=u$，所以

$$m_u=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

6.5 相对论质量-能量的关系

由上节得到所谓的动质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 + \frac{1}{2}mv^2\frac{1}{c^2} + \frac{3}{8}m_0v^4\frac{1}{c^4} + \cdots$$

注意到

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \cdots$$

其中第二项为牛顿意义下的动能。于是爱因斯坦提出相对论中的总能量

$$E = mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \cdots = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\text{——质能关系}$$

相比于牛顿力学，多出的第一项 m_0c^2 称之为静止能量。不应当认为其没有意义。需要明确：这是动能在相对论下的一个运动质点的能量。这是相对论的一个预言。

如果一个质点的能量是 mc^2，则应当有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \implies \frac{\mathrm{d}mc^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot v = v\frac{\mathrm{d}mv}{\mathrm{d}t} \implies m\frac{\mathrm{d}mc^2}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}mv}{\mathrm{d}t}$$

所以得到

$$m^2c^2 = m^2v^2 + \text{const}$$

取 $v=0$ 时，$m_0^2c^2 = \text{const}$，所以得到

$$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2 \implies m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{——自洽}$$

这就是相对论的预言，m_0 对应了静止能量。主要的证据：正反物质湮灭。

例 6-5 相对论完全非弹性碰撞

设两个质量相同的粒子碰撞到一起，质量为 $M_0=$?:

(a) 质心系：$\xrightarrow{m_0,\,v}\ \xleftarrow{m_0,\,-v}$

(b) 坐电梯向下：速度为 $-u$

设 u 很小，竖直方向有：

$$M_0u = \frac{\sum m_0u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \implies M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \neq m_0 + m_0 \quad \text{能量守恒!}$$

以氘核为例，氘核 D 由 p 和 n 构成，实验上，质子的质量是 1.6726×10^{-27}kg，中子的质量是 1.6756×10^{-27}kg，氘核的质量是 3.33437×10^{-27}kg，那么质量差

$$\Delta m_{\mathrm{D}} = 0.0039\times10^{-27}\mathrm{kg}$$

如果 m_0c^2 代表静止能量，则形成 D 时，静能亏损为

$$\Delta m_{\mathrm{D}}c^2 = 3.6\times10^{-13}\mathrm{J} = 2.2\ \mathrm{MeV}$$

在实验上，这是质子和中子结合成氘时释放的能量。具体来看，氘核的能量

$$E = m_{\mathrm{p}}c^2 + m_{\mathrm{n}}c^2 + K_{\mathrm{p}} + K_{\mathrm{n}} + V$$

即质子的静能，中子的静能，其动能和势能，将 D 的能量写成如下形式，B 为结合能

$$E = m_{\mathrm{p}}c^2 + m_{\mathrm{n}}c^2 - B = m_{\mathrm{D}}c^2$$

在化学中也类似 (这节课为什么一直 cue 化学呢)。

给出粒子能量和动量的联系之间的公式

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2v^4 = (mc^2)^2 - m^2v^2c^2 = m^2v^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4$$

在相对论中可以存在没有静止质量，一般就称之为无质量的粒子，这时候能量和动量满足

$$E = pc$$

典型的例子就是光子，没有静质量。其能量

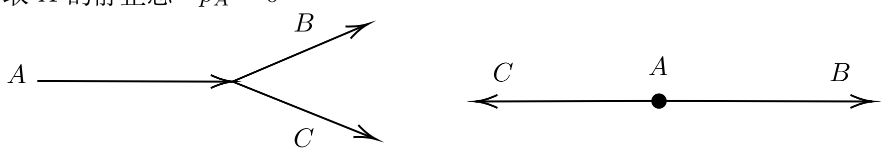
$$E = h\nu = pc = \frac{h}{\lambda}c \implies c = \frac{\nu}{\lambda}$$

一般来说，粒子的动量和能量满足

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{对于光子}\frac{v}{c} = \frac{|\boldsymbol{p}|\,c}{E} = 1\text{——自洽}$$

应用一：二体衰变

取 A 的静止态：$p_A = 0$



动量守恒

$$\boldsymbol{p}_B + \boldsymbol{p}_C = 0$$

能量守恒

$$m_Ac^2 = E_B + E_C = \sqrt{(m_Bc^2)^2 + \boldsymbol{p}_B^2c^2} + \sqrt{(m_Cc^2)^2 + \boldsymbol{p}_C^2c^2}$$

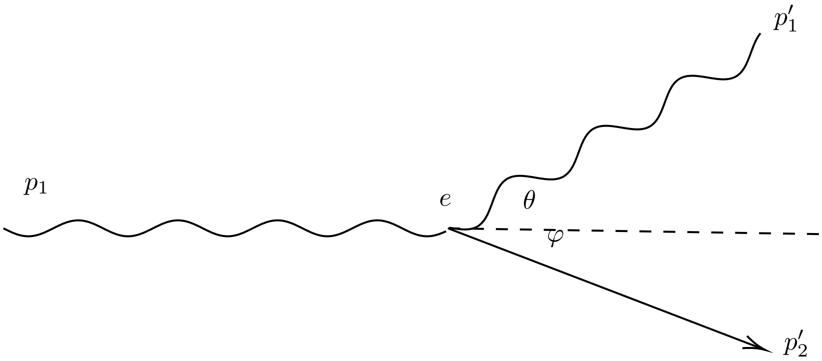
两式联立给出结果

$$|\boldsymbol{p}_B| = |\boldsymbol{p}_C| = \sqrt{\frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)^2}{4m_A^2} - m_B^2}c$$

应当注意到，衰变前后有关系：$m_A > m_B + m_C$，典型例子如中子的衰变 (β 衰变)：$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \bar{\nu}_e$，$\bar{\nu}_e$ 是反中微子，这是弱相互作用经典的例子。反过来不可能发生，即使质子，电子的能量足够大，会导致动量不守恒。

动量和能量实际是一个物理量 (能动张量) 的分量，在一个坐标系中，如果动量守恒，那么必然有能量守恒，否则转换到另一参考系，守恒量可能不再守恒。

应用二：光子与自由电子散射



$$\gamma + e \to \gamma + e$$

电子起始静止，动量守恒

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' \qquad |\boldsymbol{p}_1|\, c + m_e c^2 = |\boldsymbol{p}_1'|\, c + \sqrt{m_e^2 c^4 + |\boldsymbol{p}_2'|^2\, c^2}$$

解得

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{|\boldsymbol{p}_1'|}{|\boldsymbol{p}_2'|} = \frac{1}{1 + \frac{E_1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}$$

E_1 需要达到 0.51 MeV 量级即 X-射线才能明显观测到此现象。光的粒子说的一个验证。

应用三：讨论带电粒子在均匀恒定磁场中的运动

应用牛顿第二定律

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \qquad \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{v}\right)$$

由于洛伦兹力不做功，所以 $v^2, |\boldsymbol{v}|$ 是常量，所以

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \implies \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{\gamma m_e}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

分解速度为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{平行}} + \boldsymbol{v}_{\text{垂直}}$，所以

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{\text{平行}} = 0 \qquad \dot{\boldsymbol{v}}_{\text{垂直}} = \frac{e}{\gamma m_e} v_{\text{垂直}} B$$

所以 $v_{\text{平行}}$ 是常量，$v_{\text{垂直}}$ 也是常量。圆周运动，向心力为 $ev_{\text{垂直}}B$，质量为 γm_e

$$\frac{\gamma m_e v_{\text{垂直}}^2}{r} = ev_{\text{垂直}}B \implies \begin{cases} r = \frac{\gamma m_e v_{\text{垂直}}}{eB} \\ \omega = \frac{v_{\text{垂直}}}{r} = \frac{eB}{\gamma m_e} \end{cases}$$

非相对论极限下：$\omega \to \frac{eB}{m_e}$ = 常量。实验中测量 $p_{\text{垂直}}$——动量。

6.6 相对论的四维形式

时间-空间构成统一的四维时空 (spacetime)：

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - c^2}} \end{aligned}$$

描述一个事件用发生的时间和地点 (x, y, z, t)，同一参考系两个事件用 $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)$，定义两个事件的间隔为：

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

可以证明这是洛伦兹变换下的不变量，即

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 = s^2$$

写成微元的形式

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \implies (\mathrm{d}s)^2 = c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2$$

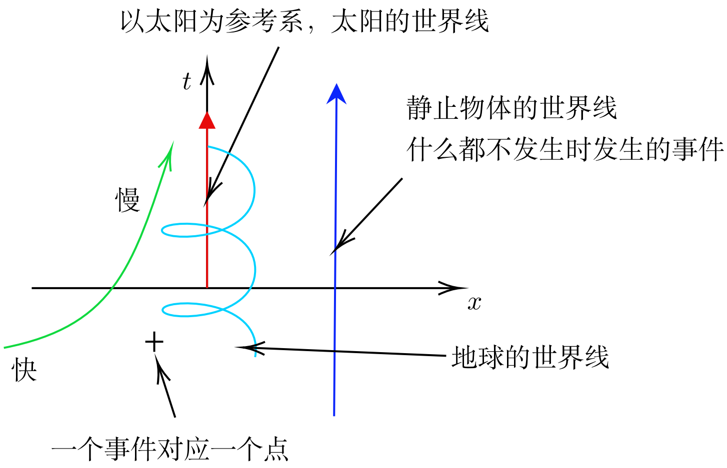
后者同样为洛伦兹不变量。

引入闵可夫斯基时空，引入四维时间-空间：$(x, y, z, ict) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$，其中两点之间的距离为定义为

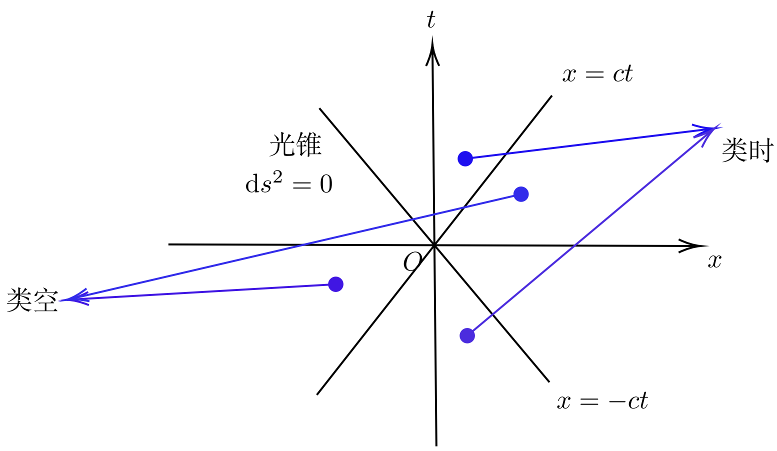
$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}x_1^2 - \mathrm{d}x_2^2 - \mathrm{d}x_3^2 - \mathrm{d}x_4^2 = -\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

间隔是不变量，在不同的参考系看，即在闵可夫斯基空间做了一个转动，其中矢量的长度在转动变换下保持不变。洛伦兹变换是保持间隔 (长度) 不变的转动。

世界线：

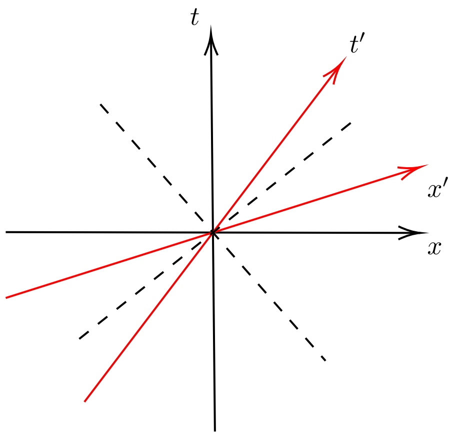


这种空间与欧氏空间有实质的不同。当 $\mathrm{d}s^2 > 0$ 时，为类时，小于 0 为类空，等于 0 为类光。引入光锥的概念：



考察 O 点与其他点的联系：光锥上的点是类光的，光锥内的点的类时的，其中的事件和 O 点可以有因果联系 (类时和类光)；光锥外的点是类空的，类空的点与 O 没有因果联系。

这样画是为了保持光锥不变。光锥内的点经过洛伦兹变换，和原点的因果关系不变。变换之后光锥依然是光锥，依然平稳 $ct - x$ 所成的角。



洛伦兹变换的图示

洛伦兹转动：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

$x_i' = R_{ij}x_j$ 长得很像之前所写的二维转动，则转动矩阵的矩阵元为

$$\cos\theta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \sin\theta = i\gamma\beta = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

一般的洛伦兹变换记作

$$x_\mu' = \Lambda_{\mu\nu}x_\nu + b_\mu$$

其中 $\Lambda_{\mu\nu}$ 表示一般的洛伦兹转动。后者 b_μ 是考虑到如果初始时原点不重合，进行一个平移，使得原点重合。这样的平移变换加上洛伦兹转动做成庞加莱群。如果时间 t 不变，那么转动实质上就是三维欧氏空间中的转动。

三维空间中的转动保持三维空间中矢量长度不变即 $x_i'x_i' = x_ix_i$。在洛伦兹转动下，保持四维时空中的矢量长度不变 $x_\mu'x_\mu' = x_\mu x_\mu$。三维空间中的标量满足 $u' = u$，而矢量满足 $v_i' = R_{ij}v_j$，对于二阶张量，满足 $T_{ij}' = R_{im}R_{jn}T_{mn}$。将 Λ 看做四维的矩阵，那么用矩阵表达洛伦兹转动 $X' = \Lambda X$，洛伦兹转动保持长度不变意味着 $X'^TX' = (\Lambda X)^T(\Lambda X) = X^T\Lambda^T\Lambda X = X^TX$，所以满足 $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$。

洛伦兹转动下的物理量

时间-空间坐标是四维矢量即洛伦兹矢量 (和时间-空间一样变换的那些量叫洛伦兹矢量)。

首先看**固有时间**，质点在 $\mathrm{d}t$ 时间内走过 $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$，定义

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\frac{1}{c^2}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\mu = \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}{c^2} \text{——标量}$$

$\mathrm{d}\tau$ 意义：随质点一起运动时，$\mathrm{d}x_i = 0, \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$，称为固有时。

引入**四维速度 (4-速度)**，这种速度是洛伦兹矢量。构造这样一个矢量

$$u_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}, ic\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}, ic\right) = \gamma(\boldsymbol{v}, ic) = \left(\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

验证 $u_\mu u_\mu$ 是一个标量

$$u_\mu u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(v^2-c^2\right) = -c^2 = \text{const}$$

能量-动量矢量，在相对论中，能量和动量分别为

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \boldsymbol{p} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

与 4-速度比较，两个量合并可以构成一个洛伦兹矢量

$$P_\mu = m_0 u_\mu = \left(\boldsymbol{p}, i\frac{E}{c}\right)$$

所以 3-动量 $\boldsymbol{p}$ 和能量 iE/c 构成 4-矢量。换一个新的坐标系，能量-动量矢量的变换，其中 v 为参考系的速度

$$\boldsymbol{p}' = \frac{\boldsymbol{p} + i\frac{v}{c}\cdot i\frac{E}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\boldsymbol{p} - \frac{v}{c^2}E}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

能量-动量守恒。即动量守恒一定意味着能量守恒，反之仍然成立。

四维微商算符

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{ic\partial t}\right)$$

在洛伦兹变换下

$$\partial'_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \qquad \partial X' = \Lambda \partial X \implies \partial X = \Lambda^{-1}\partial X'$$

$$\partial x_\nu = (\Lambda^{-1})_{\nu\mu}\partial x'_\mu \implies \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = (\Lambda^{-1})_{\nu\mu} = \Lambda_{\mu\nu} \implies \partial'_\mu \phi = \Lambda_{\mu\nu}\partial_\nu \phi$$

所以微商算符 ∂_μ 是 4-矢量。

四维波矢：电磁波的相位是不变量：$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t$，记作

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t = k_\mu x_\mu \qquad k_\mu = \left(\boldsymbol{k}, i\frac{\omega}{c}\right) \text{——4-矢量} \quad x_\mu = (\boldsymbol{r}, ict)$$

标量：对于标量的构造，只需对两个 4-矢量点积，得到 $A_\mu B_\mu$ 是一个四维时空中的标量。

四维物理

相对性原理 (牛顿第一定律)

物理规律是由四维张量表达的，这样才能协变。即在一个参考系 O 中，方程为 $A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$，那么在另一个参考系 O' 中，方程为 $\Lambda_{\mu\mu'}\Lambda_{\nu\nu'}\cdots A_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu\mu'}\Lambda_{\nu\nu'}\cdots B_{\mu'\nu'}$

四维力 (牛顿第二定律)

在四维时空的物理之前，力 $\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，写成四维的形式，猜为

$$F_\mu = \frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\boldsymbol{p}, i\frac{E}{c}\right) \qquad P_\mu = \left(\boldsymbol{p}, i\frac{E}{c}\right)$$

进一步的将 $\mathrm{d}t$ 引入

$$F_\mu = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{p}, i\frac{E}{c}\right) = \gamma\left(\mathbf{F}, \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right) \equiv \gamma\left(\mathbf{F}, \frac{i}{c}p(\text{功率})\right)$$

其中 γ 为受力粒子运动的 γ 因子。即写出了四维形式表达的牛顿第二定律。

$$F_\mu = \frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}, \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)$$

其中包含两项，一是三维的牛顿第二定律，二是关于功率的

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad p = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

能量-动量守恒定律 (牛顿第三定律)

在同一个参考系下 $\left(\boldsymbol{p}, i\frac{E}{c}\right)$ 守恒。这是一个四维矢量，在转动意义下还是会变化，所以需要标定在一个参考系。

7. 相对论电动力学

7.1 运动电荷的场

7.1.1 电荷的不变性

看第一个麦克斯韦方程组，即高斯定律

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

对于运动的电荷也成立，可以认为是 Q 的定义。

引入相对性原理，在另一个惯性系，同样有

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint \boldsymbol{E}'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

电场 $\boldsymbol{E}'$ 是在新参考系中测量的，注意同时性。上式就是电荷的相对论不变性的表述。这与电荷守恒 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 是不同的，电荷守恒是在确定的一个参考系中考虑。而电荷的相对论不变性表明电荷是守恒的，而且是相对论不变量。即 Q 是洛伦兹标量。

7.1.2 不同参考系的场

在相对论下，Q 是不变的，那么电场 $\boldsymbol{E}$ 应该以某种方式变换。对于同一时空点上的电场值，不同参考系的关系如下：考虑平行板电容器

电荷密度为 σ，那么电场

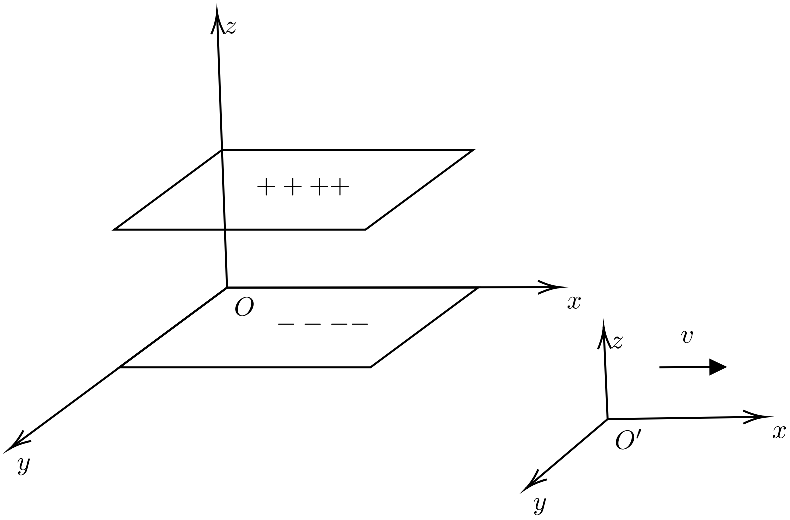
$$\boldsymbol{E}=-\frac{\sigma}{\epsilon_0}e_z$$

1. 沿 x 运动，在 O' 系中看，σ' 变大

$$\sigma'=\gamma\sigma$$

在 O' 系中看，高斯定律变为

$$E_z'=\gamma E_z$$



2. 参考系 O' 沿 z 方向运动：两个板之间的距离改变，但电荷不变，于是 σ 也不变，所以在 O' 系中

$$E'_z = E_Z$$

3. O' 沿 y 方向运动，与 x 一致。

场是与源无关的，如果在 O 系中电荷分布是静止的，那么其电场为

$$\boldsymbol{E} = E_{\parallel} e_{\parallel} + E_{\perp} e_{\perp}$$

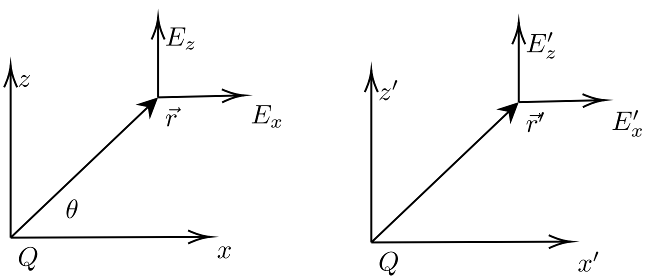
在另一参考系中，其电场也总是可以分解为这种形式，并且满足

$$\boldsymbol{E}' = E'_{\parallel} e_{\parallel} + E'_{\perp} e_{\perp} \qquad E'_{\parallel} = E_{\parallel} \quad E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}$$

7.1.3 匀速运动点电荷的场

在参考系 O 中，电荷 Q 静止，其电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} e_r$$



在 $x-z$ 平面，电场分量

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cos\theta \qquad E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \sin\theta$$

设参考系 O' 以速度 v 沿 x 的负方向运动，且 $t=0$ 时，两个原点重合，坐标变换关系为

$$x = \gamma(x' - \beta c t') \quad y = y' \quad = z' \quad t = \gamma(t' - \frac{\beta}{c} x')$$

在 $t=0$ 时

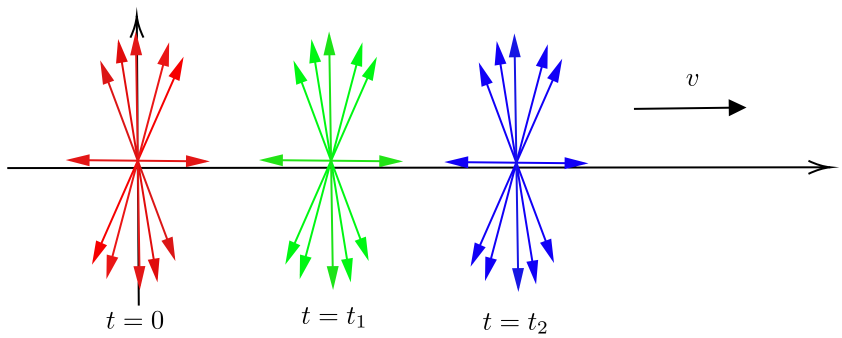
$$E_x'=E_x=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma x'}{[(\gamma x')^2+z'^2]^{3/2}}\qquad E_z'=\gamma E_z=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma z'}{[(\gamma x')^2+z'^2]^{3/2}}$$

注意到 $\frac{E_z'}{E_x'}=\frac{z'}{x'}$，即 $\boldsymbol{E}'$ 和 x' 所称角和 $\boldsymbol{r}'$ 与 x' 所成角相等。所以 $\boldsymbol{E}'$ 是沿着从 Q 的瞬时位置向外的径向方向。需要注意，这里不存在瞬时相互作用的意思，是匀速运动的结果。

$$\boldsymbol{E}'^2=E_x'^2+E_z'^2=\frac{\gamma^2Q^2(x'^2+z'^2)}{(4\pi\epsilon_0)^2\left[(\gamma x')^2+z'^2\right]^3}=\frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)}\frac{x'^2+z'^2}{\gamma^4(x'^2+z'^2-\beta^2z'^2)^3}$$

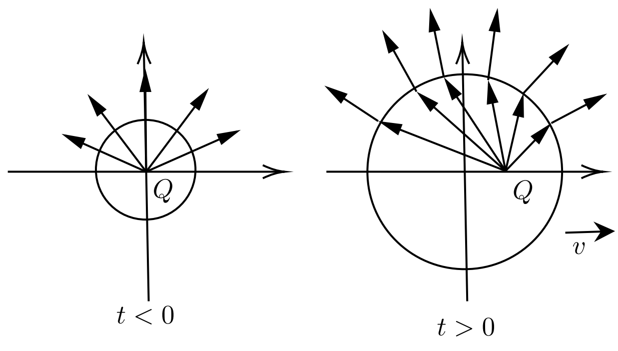
$$\boldsymbol{E}'^2=\frac{Q^2(1-\beta^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(x'^2+z'^2)^2\left(1-\frac{\beta^2z'^2}{x'^2+z'^2}\right)^3}\qquad E'=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

匀速运动电荷的电场在任意时刻，其电场沿径向方向。但其不是球对称的，也不是任何静电场能产生的。因为 $\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\neq0$。注意，每点的电场在随时变化，因为电荷在运动。但是在每一时刻，其都伴随在这个电荷之上。



7.1.4 加速运动的点电荷

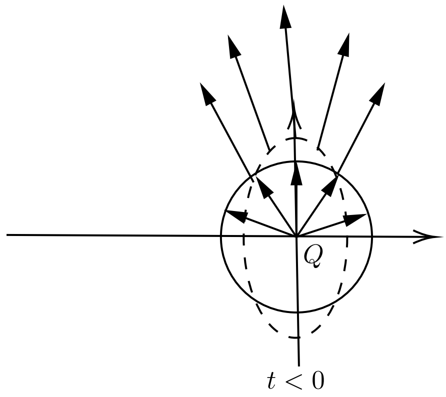
突然加速： 设 $t=0$ 之前电荷是静止的，$t=0$ 之时突然加速至速度 $\boldsymbol{v}$。电场改变由推迟势决



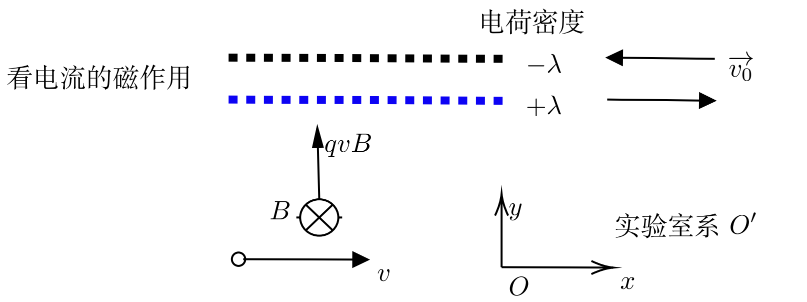
定，可以看做一个球壳的扩散，内外电场线应当连接起来，这样才能保证通量不变，图中的薄的球型壳以光速 c 扩大。(画的有点问题，仅做参考)

突然静止： 看突然停止的电荷，在 $t<0$ 时以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，在 $t\geq0$ 后静止，且在 $t=0$ 时突然静止。

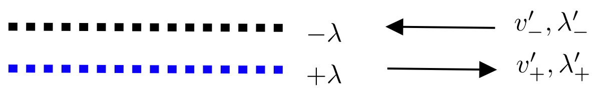
同样根据总通量不变，图中薄的球型壳的电场应为垂直于球面的径向的方向，不产生新的通量。加速运动的电荷的横向电场传播以光速向外。



7.1.5 运动电荷之间的相互作用



如图，正负电荷相互抵消，没有净电荷，但是有电流，有电流应当有磁场，其将作用在运动的电荷上。有一随运动电荷 Q 一起运动的参考系实验室系 O'，有洛伦兹收缩，所以有 $\lambda'_- \neq \lambda'_+$。



变换参考系后的速度

$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} \qquad v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + v_0 v/c^2}$$

或者写作

$$\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \qquad \beta'_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \beta}$$

所以得到电荷密度

$$\frac{Q}{\sqrt{1-\beta^2}L} = \lambda \implies \lambda'_+ = \gamma'_+ \frac{\lambda}{\gamma_0} \qquad \lambda'_- = \gamma'_- \frac{\lambda}{\gamma_0}$$

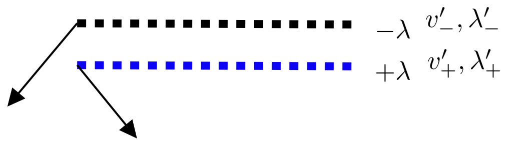
注意到

$$
\begin{aligned}
\lambda'_+\lambda'_- &= \frac{\lambda}{\gamma_0}(\gamma'_+ - \gamma'_-) \\
\gamma'_+ - \gamma'_- &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_0-\beta}{1-\beta_0\beta}\right)}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_0+\beta}{1+\beta_0\beta}\right)}} \\
&= \frac{1-\beta_0\beta}{\sqrt{1-\beta_0^2-\beta^2-\beta_0^2\beta^2}} - \frac{1+\beta_0\beta}{\sqrt{1-\beta_0^2-\beta^2-\beta_0^2\beta^2}} \\
&= \frac{2-\beta_0\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta_0^2)}} = -2\beta_0\beta\gamma_0\gamma \\
\Longrightarrow \quad \lambda'_+ - \lambda'_- &= -2\lambda\beta_0\beta\gamma = -2\lambda\gamma\frac{v_0 v}{c^2} \\
E'_y &= \frac{\lambda'_+ - \lambda'_-}{2\pi E_0 r} = -\frac{\lambda\gamma v v_0}{\pi\epsilon_0 r c^2} \qquad F'_y = -\frac{q\lambda\gamma v v_0}{\pi\epsilon_0 r c^2}
\end{aligned}
$$

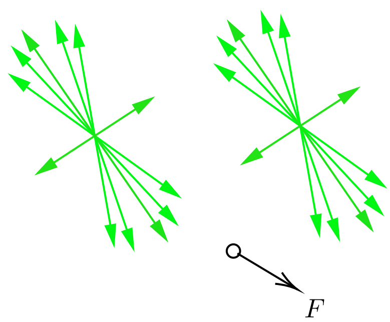
回到实验室系，应用四维力的洛伦兹变换，有 $\gamma F_y = \gamma' F'_y$，$\gamma' = 1$，所以

$$
F_y = \frac{1}{\gamma}F'_y = \frac{\lambda q v v_0}{\pi\epsilon_0 r c^2} = qv\frac{I}{2\pi\epsilon_0 r c^2} \qquad \text{其中} I = 2\lambda v_0
$$

定义磁场 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，所以得到 $F_y = qvB$，这恰好是一根带电导线在距离其 r 处产生的磁场。这完全是一个相对论的效应。但这只考虑了平行于电流方向方向的运动，再考虑垂直于电流方向的运动，这看似不存在洛伦兹收缩。选取相对于电荷 Q 静止的参考系，那么等效于电流向电荷 Q 运动，与电流本身方向合成后，电流应倾斜移动。由于运动电荷的磁场并非完全对称的，所以对称的两个



电荷对静止电荷产生的电场力并不相同，考虑正负电荷的作用后，尽管在上下方向抵消，但左右方向并不一样。磁场产生于电场的相对论效应，当 vv_0/c^2 趋于 0 时，无磁场。



物理描述应该在一个参考系中，这时仅有电场 $\boldsymbol{E}$ 来描述电荷之间的相互作用是不足的，必须引入磁场 $\boldsymbol{B}$，在相对论里，把电场和磁场都视为由电荷相互作用的不同方面，换句话说就是作用在电荷上的力——电磁场应该是张量。

7.2 电动力学的四维形式

7.2.1 四维电磁势

用电磁势写出的麦克斯韦方程组:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j}$$

其中包含了洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$$

看 $\rho, \boldsymbol{j}$ 在相对论变换下的行为:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{LS}$$

设当电荷静止时密度为 ρ_0，所以在洛伦兹变换下

$$\rho = \gamma\rho_0 = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

那么电流密度根据 $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$ 得

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v} = \frac{\rho_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\rho_0\boldsymbol{v}$$

为此引入四维的电流密度

$$j_\mu = (\boldsymbol{j}, ic\rho)\text{——构成 4-矢量}$$

验证 j_μ 作为 4-矢量的结果

$$j_\mu j_\mu = \boldsymbol{j}^2 - c^2\rho^2 = \gamma^2\rho_0^2 v^2 - \gamma^2\rho_0^2 c^2 = -c^2\rho_0^2$$

看电流守恒 $\nabla\cdot\boldsymbol{j} + \partial_t\rho = 0$，对其稍作变形

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} + \frac{\partial ic\rho}{ic\partial t} = \partial_\mu j_\mu = 0$$

既然电流密度和电荷密度构成 4-矢量，那么电磁势也构成 4-矢量

$$A_\mu = \left(\boldsymbol{A}, i\frac{\phi}{c}\right)$$

则电磁势的麦克斯韦方程组简洁的写为 (前者为麦克斯韦方程组，后者为洛伦兹规范条件)

$$\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu \qquad \partial_\mu A_\mu = 0 \qquad \Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial(ict)^2} = \partial_\mu\partial_\mu$$

所以在两个不同的参考系中，电流密度和电荷密度有类似于坐标的变换关系

$$j'_x = \gamma(j_x - v\rho) \qquad j'_y = j_y \qquad j'_z = j_z \qquad \rho' = \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2}j_x\right)$$

$$A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{v}{c^2}\phi\right) \qquad A'_y = A_y \qquad A'_z = A_z \qquad \phi' = \gamma\left(\phi - vA_x\right)$$

$$\text{规范变换:}A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\eta \impliedby \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\eta,\ \phi \to \phi + \frac{c}{i}\frac{\partial\eta}{\partial ict} = \phi - \frac{\partial\eta}{\partial t}$$

那么电磁场也应有相应的表示，考虑到

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

定义电磁场张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

7.2.2 场强

首先电磁场不可能是 4-矢量，因为其有 6 个分量 (电场和磁场各有 3 个分量)，根据 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial_t\boldsymbol{A}$，引入电磁场张量：

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

为一个反对称二阶张量，二阶四维张量有 16 个分量，对角元均为 0，余下 12 个分量，反对称性限制 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，所以最终得到有 6 个独立分量，恰好和电场与磁场的独立变量数等同。它自动是规范不变的，将 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\eta$ 代入

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu\partial_\nu\eta - \partial_\nu A_\mu + \partial_\nu\partial_\mu\eta = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

所以 $F_{\mu\nu}$ 不依赖于规范。然后看其各个分量：

$$\begin{aligned} &F_{4i} = \partial_4 A_i - \partial_i A_4 = \frac{1}{ic}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{i}{c}\partial_i\phi = \frac{i}{c}\left(-\partial_i\phi - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) = \frac{i}{c}E_i \\ &F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \epsilon_{3ij}\partial_i A_j = (\nabla\times\boldsymbol{A})_3 = B_3 \\ &F_{13} = -B_2 \qquad F_{23} = B_1 \quad \text{各个分量均已确定} \end{aligned}$$

可以将该二阶张量看做一个矩阵，其表示为

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

张量在洛伦兹变换下，有变换

$$F'_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'\mu}\Lambda_{\nu'\nu}F_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu'\mu}F_{\mu\nu}\Lambda^T_{\nu\nu'}$$

有了电磁场张量之后，应有张量形式的麦克斯韦方程组表示

$$\begin{aligned} &\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\mu \\ &\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \end{aligned}$$

其中第二式只有当 $\lambda\neq\nu\neq\mu$ 时才有意义，否则左侧直接为 0。并且第二式关于三个指标是轮换对称的。当 $\lambda,\mu,\nu = 1,2,3$ 时，第二式为

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

当 $\lambda,\mu,\nu = 1,4,3$ 时，第二式为

$$\partial_1 F_{43} + \partial_3 F_{14} + \partial_4 F_{31} = \partial_1\left(\frac{i}{c}E_3\right) + \partial_3\left(-\frac{i}{c}E_1\right) + \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}B_2 = 0 \implies \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

得到后面一个式子需要考虑这样的指标都算一遍，左侧式子只能得到第二个分量。第二式即包含此麦克斯韦方程组的两条。然后看第一式：

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \partial_1 F_{\mu 1} + \partial_2 F_{\mu 2} + \partial_3 F_{\mu 3} + \partial_4 F_{\mu 4} = \mu j_\mu$$

首先看 $\mu = 4$ 的情况：

$$\partial_1 F_{41} + \partial_2 F_{42} + \partial_3 F_{43} = \mu_0 ic\rho \implies \frac{i}{c}\partial_i E_i = \mu_0 ic\rho \implies \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

然后看 $\mu=3$ 的情况：

$$\partial_1 F_{31}+\partial_2 F_{32}+\partial_4 F_{34}=\mu_0 j_3 \implies \partial_1 B_2+\partial_2(-B_1)+\frac{1}{ic}\partial_t\left(-\frac{i}{c}E_3\right)=\mu_0 j_3$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})_3=\left(\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_3 \implies \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

后一式子考虑 $\mu=1,2$ 的情况，于是第一式给出另外两个麦克斯韦方程组——说明了麦克斯韦方程组是四维协变的。在新的参考系中，必然有

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{E}'=\frac{\rho'}{\epsilon_0}\quad \nabla'\cdot\boldsymbol{B}'=0\quad \nabla'\times\boldsymbol{E}'=-\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t'}\quad \nabla'\times\boldsymbol{B}'=\mu_0\boldsymbol{j}'+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t'}$$

一般的，在闵氏空间中，使用 4-矢量电流 j_μ，电磁势 A_μ 和电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 表示麦克斯韦方程组：

$$F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \qquad \partial_\nu F_{\mu\nu}=\mu_0 j_\mu$$

第一项为电磁场张量的定义，其中自动包含了 $\partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}=0$，第二式与上述麦克斯韦方程组表示的第一式一致。同时已经验证，电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 在规范变换 $A_\mu\to A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\eta$ 不变。如果将第二式代入第一式则有：

$$\partial_\nu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)=\mu_0 j_\mu \implies \partial_\mu\partial_\nu A_\nu-\Box A_\mu=\mu_0 j_\mu$$

但是似乎一般并不这么写，为了把两个式子化成一个式子，还是失去了一些方程的直观性。可能并不是一个好的选择。

Definition 7.2.1 — 四维全反对称张量. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 为四维全反对称张量，当 $(\mu\ \nu\ \rho\ \sigma)$ 为一个奇置换时，取 -1，偶置换取 1，否则为 0。

定义对偶张量 (将电场变成磁场而磁场变成电场)

$$^*F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

则麦克斯韦方程组可以写成更简洁的形式：

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}=0 \implies \partial_\nu\ {}^*F_{\mu\nu}=0$$

参考系 O' 相对于参考系 O 沿 x 以速度 v 运动，电磁场的洛伦兹变换为：

$$E'_1=E_1\quad E'_2=\gamma\left(E_2-vB_3\right)\quad E'_3=\gamma\left(E_3+vB_2\right)$$

$$B'_1=B_1\quad B'_2=\gamma\left(B_2+\frac{\beta}{c}E_3\right)\quad B'_3=\gamma\left(B_3-\frac{\beta}{c}E_2\right)$$

写的更紧凑一些，$2,3$ 写作垂直方向，1 写作平行方向：

$$E'_\parallel=E_\parallel\qquad E'_\perp=\gamma\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)_\perp$$

$$B'_\parallel=B_\parallel\qquad B'_\perp=\gamma\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}}{c^2}\right)_\perp$$

变换中的不变量为

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\implies \boldsymbol{E}^2-c^2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}'^2-c^2\boldsymbol{B}'^2$$

$$^*F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}F_{\mu\nu}\implies \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{B}'$$

只有上述两个不变量由 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 构成。

例 7-1 O **系中只有均匀电场** E**，无磁场，问在** O' **中看到什么？**

与 O' 系运动方向与电场方向相关，如果 $\boldsymbol{v}$ 与电场 $\boldsymbol{E}$ 平行，那么在 O' 系中看到一样的电场，无磁场出现。

如果 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 垂直，那么在 O' 系中看到电场与磁场。并且观测到的电场和磁场强度分别为

$$\boldsymbol{E}' = \gamma \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B}' = -\gamma \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}$$

如果既不平行也不垂直，那么分解为两部分，即可回到上述两种情况。

例 7-2 O **系中互相垂直的均匀电场** E **和磁场** B**，问能否找到一个惯性系** O'**，其中只有电场或磁场。**

要从不变量的角度出发，由守恒量

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

直觉上认为这是可能的，但是别急，先看另一个不变量 $\boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2$，它的正负号也会一致。所以视情况而定。

1. 如果守恒量为正，那么有 $\boldsymbol{E}^2 > c^2\boldsymbol{B}^2$，那么不可能只存在磁场，但是可能有参考系 O' 只看到电场。令 $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}$平面，令速度的大小满足 $B = \frac{v}{c^2}E$，那么在新的参考系中，磁场为 0，但电场不为 0。
2. 另一种情况同理，当守恒量是负值时，可以令电场为 0 而磁场不为 0，但不可能只有电场。
3. 注意两种情况下，所得到的速度都不会大于光速。

例 7-3 求运动带电粒子在电磁场中的力

设 q 电荷沿着 x 方向以 $\boldsymbol{v}$ 运动，O' 系固定在 q 上，在此参考系，只有电场力

$$F'_\mu = \left(\gamma \boldsymbol{F}', \frac{i}{c}\gamma W\right) = (\boldsymbol{F}', 0) = (q\boldsymbol{E}', 0)$$

在 O 系中看，做一个洛伦兹变换

$$\gamma \boldsymbol{F}_\parallel = \frac{\boldsymbol{F}'_\parallel}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \boldsymbol{F}'_\parallel = \gamma q \boldsymbol{E}_\parallel \implies \boldsymbol{F}_\parallel = qE_\parallel$$

$$\gamma \boldsymbol{F}_\perp = \gamma' \boldsymbol{F}'_\perp = \boldsymbol{F}'_\perp = q\boldsymbol{E}'_\perp = q \cdot \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_\perp$$

$$\implies \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \text{ 平行于 } \boldsymbol{v} \text{ 分量为 } 0$$

在相对论情况下，洛伦兹力是相对论协变的，称其为电磁学的基本规律并不为过。

7.2.3 洛伦兹力和电磁场的能量-动量张量

洛伦兹力的四维形式：更多的时候用力密度表示为

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$$

四维力中 $F_\mu = \gamma(\boldsymbol{F}, \frac{i}{c}W)$，在力密度中，$\gamma$ 因子包含在体积项中消去，更加自然。引入四维力密度：

$$f_\mu \equiv F_{\mu\nu} j_\nu$$

这自然是洛伦兹协变的，然后证明其四个分量刚好就是如上定义的力密度，如下

$$f_i = F_{ij}j_j + F_{i4}j_4 = -\frac{i}{c}E_i \cdot ic\rho + F_{ij}j_j = \rho E_i + F_{ij}j_j$$

$$f_1 = \rho E_1 + F_{12}j_2 + F_{13}j_3 = \rho E_1 + B_3 j_2 - B_2 j_3 = (\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})_1$$

$$\text{同理：}f_2 = (\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})_2 \qquad f_3 = (\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})_3$$

$$f_4 = F_{4i}j_i = \frac{i}{c}E_i\cdot j_i = \frac{i}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{i}{c}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \text{——功率密度}$$

更确切的写出来就是

$$f_\mu = \left(\boldsymbol{f}, \frac{i}{c}W\right)$$

与之前的四维力定义是一致的，γ 因子包含在体积项 $\int \mathrm{d}V$ 中。

接下来考虑电磁场的能量-动量张量——注意不是粒子的能量和动量。首先看**能量密度**：

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2$$

然后是**能流密度 (波印廷矢量)**：

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$$

二者满足能量守恒定律

$$-\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = \nabla\cdot\boldsymbol{S} + \rho(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}$$

还有**动量密度**：

$$\boldsymbol{G} = \epsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}$$

结合**动量流密度** $\overset{\rightrightarrows}{D}$，有动量守恒定律：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} = -\nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{D}$$

前面的**四维力密度**：

$$f_\mu = \left(\boldsymbol{f}, \frac{i}{c}\mathcal{E}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\right)$$

所以

$$-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{S} + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} \qquad -\boldsymbol{f} = \nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{D} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Longrightarrow\ -f_\mu = \left[\nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{D} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}, \nabla\cdot\frac{i\boldsymbol{S}}{c} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{i}{c}\mathcal{E}\right] \equiv \partial_\nu T_{\mu\nu}$$

要搞清楚 $T_{\mu\nu}$ 的具体表达式，重新写表达式：

$$-f_\mu = \left[\nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{D} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_4}(ic\boldsymbol{G}), \nabla\cdot\frac{i\boldsymbol{S}}{c} - \frac{\partial}{\partial x_4}\mathcal{E}\right]$$

先看第 4 个分量：

$$-f_4 = \nabla\cdot\frac{i}{c}\boldsymbol{S} - \partial_4\mathcal{E} = \partial_\nu\cdot\left(\frac{i}{c}\boldsymbol{S}, -\mathcal{E}\right) = \partial_\nu T_{4\nu}$$

其余三个分量

$$-f_i = \partial_\nu T_{i\nu} = \nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{D} + \partial_4(ic\boldsymbol{G}) = \partial_\nu(\overset{\rightrightarrows}{D}, ic\boldsymbol{G}) = \partial_\nu T_{i\nu}$$

所以得到 $T_{\mu\nu}$ 的最终表达式：

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \overset{\rightrightarrows}{D} & ic\boldsymbol{G} \\ \frac{i}{c}\boldsymbol{S} & -\mathcal{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\mathcal{E}\delta_{ij} - \epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0}B_i B_j\right)_{3\times3} & ic\boldsymbol{G} \\ \frac{i}{c}\boldsymbol{S} & -\mathcal{E} \end{pmatrix} \text{——}4\times4\text{ 对称无迹矩阵}$$

称为电磁场的能量-动量密度张量。如果要从矩阵角度理解，应当写成

$$-f_\mu = \partial_\nu T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\nu}$$

如果 $f_\mu=0$，那么有 $\partial_\nu T_{\mu\nu}=0$，体现出的守恒律。(总觉得上一行写的这么奇怪是因为不区分上下指标。)

如果另一种物质的场的能量-动量张量写作如：

$$T_{\mu\nu}=\lambda\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\text{——宇宙常数}$$

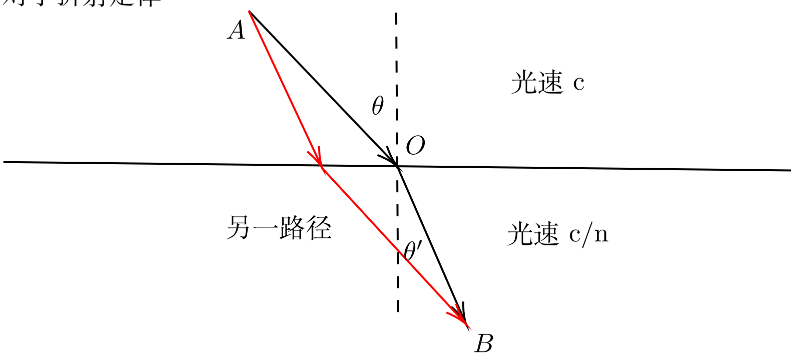
7.3 最小作用量原理

7.3.1 光学的最短时间原理

几何光学基本定律：最短时间原理，也叫做费马原理：**光从一点到另一点的所有可能路径中，光走需要时间最短的的路径。**

对于反射定律，这是明显的，对反射面做一个镜像，光线走的实质是一个直线，在固定同一个介质中，自然是时间最短的。

对于折射定律：



所需的时间

$$t=\frac{AO}{c}+\frac{BO}{c/n}\propto AO+nBO\qquad \delta t=\delta AO+n\delta BO=0$$

$$\frac{\delta AO}{\sin\theta}=\frac{\delta BO}{\sin\theta'}\implies n=\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}\qquad\text{——折射定律}$$

解释海市蜃楼等现象。但是一个理论总还得预言一些东西，它预言了相对折射率，光学都学过，虽然我的光学学的依托。

7.3.2 最小作用量原理

牛顿力学

牛顿运动定律可以有一种积分表述，具体来说是：一个质点，从 $(t_1,\boldsymbol{r}_1)$ 运动到 $(t_2,\boldsymbol{r}_2)$ 走的是路径 $\boldsymbol{r}(t)$ 的泛函。它使得如下名为作用量 S 的物理量取极值 (未必是极小)：

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}(T-V)\mathrm{d}t$$

其中 T 为质点的动能，V 为质点的势能。所以说，S 是路径的泛函。真实路径是 S 取极小值的路径。

看重力场中的一维运动，其作用量写为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2-mgh(t)\right]\mathrm{d}t$$

无重力时，$g=0$，$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\mathrm{const}$ 时，作用量最小，对应于匀速直线运动。当 $g\neq 0$ 时，势能大的话，倾向于使得作用量小，但此时动能也大，需要找到中间的驻点，使用变分法。

一般来说，一维运动的作用量为：

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2-V(x)\right]\mathrm{d}t$$

对其变分：

$$\begin{aligned}0=\delta S&=\int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\delta x\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\delta x\right)-m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\delta x-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\delta x\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[-m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right]=0\\&\implies m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

更一般的，不局限于牛顿力学，作用量写为拉格朗日量对时间的积分：

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\mathrm{d}t$$

其变分为

$$\begin{aligned}\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\delta\mathcal{L}\mathrm{d}t&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\right)\delta x_i=0\end{aligned}$$

得到欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}=0$$

相对论

(一) 自由粒子：作用量应当为相对论不变量

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\mathrm{d}t$$

其中 t_1,t_2 是两个事件。在没有引入别的物理量时，只有间隔，所以作用量应该为如下才能符合相对论的要求：

$$S=\alpha\int\mathrm{d}\tau=\alpha\int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t=\int\alpha\left(1-\frac{v^2}{2c^2}+\cdots\right)\mathrm{d}t=\int\left(\alpha-\frac{1}{2}\alpha\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right)\mathrm{d}t$$

和非相对论情况比较，应当有参数 $\alpha=-m_0c^2$，所以相对论自由粒子的拉格朗日量为

$$\mathcal{L}=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

(二) 带电粒子之电动力学：设质点带电荷 q，在电磁场中：

$$\mathcal{L}=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-q(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

将其代入欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}=-q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+q\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_i}=-q\partial_i\varphi+qv_j\partial_iA_j$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}=\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+qA_i\qquad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+q\left[\frac{\partial A_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right]$$
$$\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-q\partial_i\varphi+qv_j\partial_iA_j-q\frac{\partial A_i}{\partial t}-v_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j}=qE_i+q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_i$$

所以最后有相对论性带电粒子的运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

看加入拉格朗日量中的项 $\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$，将其写成：

$$\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}=-v_\mu A_\mu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\qquad v_\mu=\left(\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\qquad A_\mu=\left(\boldsymbol{A},\frac{i}{c}\varphi\right)$$

作用量即可写成洛伦兹不变的形式：

$$S=\int_1^2\left(-m_0c^2+qv_\mu A_\mu\right)\mathrm{d}\tau$$

(三) 电磁场 $F_{\mu\nu}$：

在带电粒子的拉格朗日量中，已经包含了电磁场的项：

$$\mathcal{L}\supset-q(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})=-\int(\rho\varphi-\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V$$

回到静电学中，电势满足泊松方程，拉格朗日量中必须加入一项：

$$\mathcal{L}\supset\frac{\epsilon_0}{2}\int(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V-\int\rho\varphi\mathrm{d}V$$

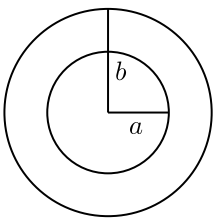
这里对场 $\varphi(x,y,z,t)$ 变分 $\varphi(x,y,z,t)\mapsto\varphi(x,y,z,t)+\delta\varphi$，把场 $\varphi(x,y,z,t)$ 看做路径，在无限远处 $\delta\varphi=0$：

$$\delta\mathcal{L}=0=\int\left(-\epsilon_0\nabla^2\varphi-\rho\right)\delta\varphi\mathrm{d}V\Longrightarrow\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

下面只看 $\rho=0$ 的情况，即

$$\mathcal{L}=\frac{\epsilon_0}{2}\int(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V$$

例 如图电容器，外层带负电，内层带正电



那么拉格朗日量 $\mathcal{L}=\frac{\epsilon_0}{2}\int(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}CU^2$ 是静电能，可以用最小作用量原理求得电容 C，真实的电容应为 $C=\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}h$。由

$$C=\frac{\epsilon_0}{U^2}\int(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V$$

$\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{C_{\text{true}}}{2\pi\epsilon_0 h}$	线性解 $\dfrac{b+a}{2(b-a)}$	极小解 $\dfrac{b^2+4ab+a^2}{3(b^2-a^2)}$
2	1.442	1.5	1.444
4	0.721	0.833	0.733
10	0.434	0.312	0.475
100	0.267	0.51	0.346
...	...	...	...
1.1	10.492	10.50	10.4921
1.5	2.466	2.5	2.4667

先取线性的试探电势 $\varphi = -E_0(r-a)+U$，边界条件 $0 = E_0(b-a)+U$，所以

$$\varphi = U\left(1-\frac{r-a}{b-a}\right) \implies \frac{C}{2\pi\epsilon_0 h} = \frac{b+a}{2(b-a)}$$

再考虑试探解二次依赖于坐标：

$$\varphi = U\left[1 + A_1\frac{r-a}{b-a} + A_2\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right]$$

考虑边界条件可以求出

$$\varphi = U\left[1 + \alpha\frac{r-a}{b-a} - (1+\alpha)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right]$$

进而可以求出

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0 h} = \frac{a}{b-a}\left[\frac{b}{a}\left(\frac{\alpha^2}{6}+\frac{2\alpha}{3}+1\right)+\frac{1}{6}\alpha^2+\frac{1}{3}\right]$$

由 C_{min} 极小得到

$$\alpha = \frac{-2b}{b+a} \implies \frac{C}{2\pi\epsilon_0 h} = \frac{b^2+4ab+a^2}{3(b^2-a^2)}$$

一般情况下考虑：

$$\mathcal{L} \supset \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$$

应当是一个洛伦兹不变的量，由电磁场张量只确定了两个不变量，所以拉格朗日量应该为

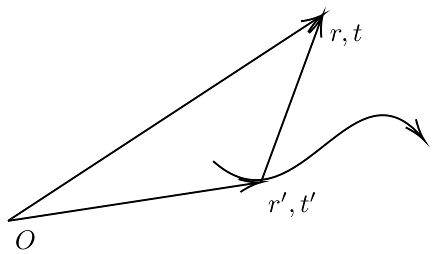
$$\int \frac{\epsilon_0}{2}(\boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2)\mathrm{d}V \implies \mathcal{L} \supset -\frac{1}{4\mu_0}\int F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\mathrm{d}V \qquad S = \int \mathcal{L}\mathrm{d}t$$

7.4 任意运动点电荷的电磁场

推迟势解为

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')| - \frac{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t'))}{c}}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\phi(\boldsymbol{r},t)$$



注意上式左端是推迟势解，在 t' 时刻：

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'(t')}{\mathrm{d}t'} \qquad t' = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')|}{c}$$

定义

$$\hat{n} = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(r')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')|}$$

求 r, t 时的磁场，由

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad B = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

定义

$$\nabla\phi = \nabla\phi|_{t'\text{固定}} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\nabla t' \qquad \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

为了推导方便，引入几个公式

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{1}{1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}} \tag{7.1}$$

$$\nabla t' = \frac{-\hat{n}/c}{1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}} \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')\right|}{\partial t'} = -\boldsymbol{v}\cdot\hat{n} \tag{7.3}$$

先证明 (7.3)：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')\right|}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left\{[x - x'(t')]_i\,[x - x'(t')]_i\right\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2[x - x'(t')]_i\frac{\partial}{\partial t'}[-x'(t')]_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')|} = -\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}\end{aligned}$$

然后证明 (7.1):

$$\begin{aligned}t' &= t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')|}{c} \\ \frac{\partial t'}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')\right|\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\frac{\partial t'}{\partial t} \\ \Longrightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{1}{1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}} \text{ 即证明 (7.1) 式}\end{aligned}$$

最后证明 (7.2) 式：

$$\begin{aligned}\partial_i t' &= \partial_i t - \partial_i\frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c} = -\frac{1}{c}\partial_i\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')\right| \\ &= -\frac{1}{c}\partial_i\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')\right|\Big|_{\text{固定}t'} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t')\right|\partial_i t' \\ &= -\frac{1}{c}\hat{n}_i + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\partial_i t' \implies \nabla t' = \frac{-\hat{n}/c}{1 - \boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c}\end{aligned}$$

然后即可去求电场，首先对标势：

$$
\begin{aligned}
\partial_i\phi\Big|_{t'-\text{fixed}} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial_i\left\{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|_{t'-\text{fixed}}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t'))_{t'-\text{fixed}}\right\}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)^2} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{n}_i-\frac{1}{c}v_j\delta_{ij}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^2} \\
\nabla\phi\Big|_{t'-\text{fixed}} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{n}-\boldsymbol{v}/c}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^2} \\
\frac{\partial\phi}{\partial t'} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial_{t'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{c}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t'))+\boldsymbol{v}^2/c}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^2} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{c}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t'))+\frac{v^2}{c}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^2} \\
\frac{\partial\phi}{\partial t'}\nabla t' &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\hat{n})\hat{n}}{c}-\frac{v^2}{c^2}\hat{n}+\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t'))\hat{n}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^2} \\
\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\phi\right)=\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\phi(\boldsymbol{r},t)+\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t'} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\dot{\boldsymbol{v}}/c^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)}-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\frac{-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}+\frac{v^2}{c}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t'))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^2} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\dot{\boldsymbol{v}}/c^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)+\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{n}}{c}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^2}-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\boldsymbol{v}}{c}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^3}\times \\
&\left\{\left(\hat{n}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\hat{n}-\frac{v^2}{c^2}\hat{n}-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right\} \\
&+\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^3}\left\{\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{n}}{c^2}\hat{n}-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{n}}{c}\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right\} \\
=& \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\left(\hat{n}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|^2(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^3}+\frac{\hat{n}\times\left[\left(\hat{n}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|(1-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}/c)^3}\right]
\end{aligned}
$$

后一部分与距离反比，与加速度有关，即加速运动才能产生辐射。前一部分与加速度无关，距离平方反比，是匀速运动点电荷的电场。对于磁场，其做法类似，为

$$
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}|_{t'-\text{fixed}}+\nabla t'\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t'}=\frac{1}{c}\hat{n}\times\boldsymbol{E}
$$

只看辐射场部分：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\text{辐射}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)^3}\frac{\hat{n}\times\left[\left(\hat{n}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]}{c^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t')|} \\
\boldsymbol{B}_{\text{辐射}} &= \frac{1}{c}\hat{n}\times\boldsymbol{E}_{\text{辐射}}
\end{aligned}
$$

如果 $v\ll c$，那么

$$
\boldsymbol{E}_{\text{辐射}}\approx\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\qquad\boldsymbol{B}_{\text{辐射}}\approx\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\times\hat{n}}{c^3|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}
$$

取远场近似：

$$
\boldsymbol{B}_{\text{辐射}}\approx\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\times\hat{n}}{c^3r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\boldsymbol{p}}\times\hat{n}}{r}\qquad\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{r}'
$$

这是电偶极辐射。

辐射场的能流密度:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\frac{1}{\mu_0}E^2\hat{n}\\&=\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon c^3}\frac{\hat{n}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{v}}^2}{\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)^4}+\frac{2(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{n})(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v})}{c\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)^5}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{n})^2}{\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)^6}\right]\end{aligned}$$

t 时刻，$\boldsymbol{r}$ 点接受到在 t' 时刻 $\boldsymbol{r}'$ 处发出的能流密度。辐射能量

$$\mathrm{d}E=\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}t=S\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t$$

将时间 t 都用 t' 表示:

$$\mathrm{d}E=S\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}=S\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t'$$

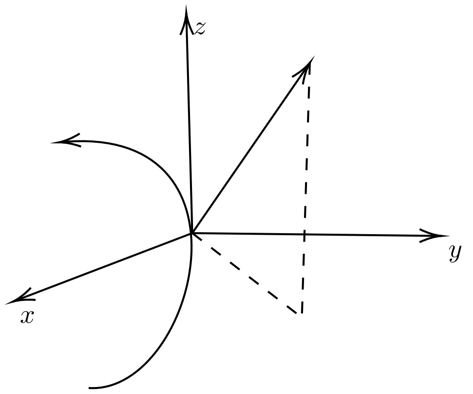
所以辐射功率与角分布为:

$$\mathrm{d}W(t')=S\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t'\qquad\frac{\mathrm{d}W(t')}{\mathrm{d}\Omega}=S\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}}{c}\right)\mathrm{d}t'$$

例 同步辐射：设 $\dot{\boldsymbol{v}}\perp\boldsymbol{v}$，圆周运动，使其在 $x-z$ 平面运动。当运动到原点时，考察空间中 r 接受到的电磁辐射

有如下关系

$$\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}=v\cos\theta\qquad\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}=0\qquad\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{n}=|\dot{\boldsymbol{v}}|\sin\theta\cos\phi$$



$$\boldsymbol{S}=\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0c^3}\frac{\hat{n}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\left[\frac{|\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^4}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}|\dot{\boldsymbol{v}}|^2\sin^2\theta\cos^2\phi\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(t')}{\mathrm{d}\Omega}&=\frac{q^2|\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{16\epsilon_0c^3}\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^5}\\&\Longrightarrow\quad W(t')=\frac{q^2|\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\end{aligned}$$

7.5 规范不变性——与量子力学结合

7.5.1 量子力学中电磁相互作用

进一步讨论规范不变性，电磁场张量为

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\qquad A_\mu=\left(\boldsymbol{A},\frac{i}{c}\varphi\right)$$

$$\text{gauge transformation} : A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \eta \qquad \text{gauge invariance} : F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$$

在相对论中，电子波函数满足薛定谔方程 (非相对论的)：

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\psi$$

考虑电磁相互作用，哈密顿量改写为

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi$$

正则动量 $\boldsymbol{p} \to -i\hbar\nabla$，在库伦规范，将哈密顿量展开

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{q^2\boldsymbol{A}^2}{2m} - \frac{q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}}{m} + q\varphi$$

如何理解 $\boldsymbol{A}$，其实 $-q\boldsymbol{A}$ 是有磁场时额外的动量。设有 q，螺线圈未通电时，动量为 $-i\hbar\nabla$，通电时，产生 $\boldsymbol{A}$，波函数形状未来得及改变，但此时有新的受力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -q\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \implies \text{新动量：} \int q\boldsymbol{E}\mathrm{d}t = -q\boldsymbol{A}$$

总动量应当为：

$$\boldsymbol{p} + (-q\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A} = -i\hbar\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)$$

7.5.2 规范不变性

在量子力学中，电子的波函数可以相差一个相位：

$$\psi \to \psi e^{i\theta} \qquad \theta = \text{const}$$

但是需要所有位置都同时改变一个相同的相位，这似乎违反了因果律，反正看起来很不自然。Weyl 提出一个原则：看波函数变换

$$\psi \to \psi' = \psi e^{iq\eta(\boldsymbol{r},t)/\hbar}$$

则薛定谔方程 $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$ 一般不成立，需要添加一些东西使之成立：

$$i\hbar\frac{\partial \psi'}{\partial t} \to \left[i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} - q\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\psi\right]e^{iq\eta(\boldsymbol{r},t)/\hbar} \qquad q\varphi\psi \to q\varphi\psi e^{iq\eta(\boldsymbol{r},t)/\hbar}$$

如果 $\varphi \to \varphi' = \varphi - \partial_t\eta$，则

$$q\varphi\psi' \to q\varphi'\psi e^{iq\eta(\boldsymbol{r},t)/\hbar} = q\varphi\psi e^{iq\eta/\hbar} - q\partial_t\eta\psi e^{iq\eta/\hbar}$$

如此便消去了 $q\partial_t\eta$ 对应的项。此外还有 ∇ 项需要解决，根据规范变换：

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\eta$$

看

$$\begin{aligned}\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)\psi \to \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)\psi' =& e^{iq\eta/\hbar}\nabla\psi + \psi e^{iq\eta/\hbar}\frac{iq}{\hbar}\nabla\eta - \frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}\psi' - \frac{iq}{\hbar}\nabla\eta\psi' \\ =& e^{iq\eta/\hbar}\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)\psi\end{aligned}$$

$$\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)^2\psi \to \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}'\right)^2\psi' = e^{iq\eta/\hbar}\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)^2\psi$$

所以

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}'\right)\psi'+q\varphi'\psi' \implies i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)\psi+q\varphi\psi$$

所以薛定谔方程在规范变换

$$\psi\to\psi e^{iq\eta(\boldsymbol{r},t)/\hbar} \qquad \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\nabla\eta \qquad \varphi\to\varphi-\frac{\partial\eta}{\partial t}$$

下不变。称为 Weyl 规范不变性原则。要求 $\psi'\to\psi\exp\left(\frac{iq}{\hbar}\eta(\boldsymbol{r},t)\right)$ 时物理不变，必须引入如上变换的电磁势即唯一决定电磁相互作用。

电磁相互作用为 U(1) 群的对称性，可推广到强相互作用，弱相互作用的 SU(3), SU(2) 的对称性。将这种原则进一步推广到非阿贝尔规范下即杨振宁-Mills 理论。

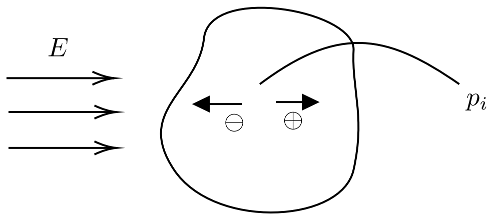
电动力学进一步的发展方向：

1. 与万有引力是瞬时相互作用的矛盾——爱因斯坦提出广义相对论；
2. 量子力学要求推广到相对论情况——量子场论。

介质

8. 连续介质电动力学

8.1 介质中的麦克斯韦方程组



一般的介质中，当

- 有电场时，有极化，极化和电场 $\boldsymbol{E}$ 有关
- 有磁场时，有磁化，磁化和磁场 $\boldsymbol{B}$ 有关

平均来看，定义如下的量来描述磁化和极化。首先用于描述极化，定义极化矢量

$$\boldsymbol{P} \equiv \frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V} \qquad \boldsymbol{p}_i = q\boldsymbol{l}_i \qquad \oiint \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -Q_{\text{束缚}}$$

描述单位体积内的电偶极。其中 $\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = nq\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，$n$ 是数密度，是伸出 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的偶极子的总个数 $\times q$。按照高斯定律有：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{P} = -\rho_{\text{束缚}}$$

极化产生的电荷叫束缚电荷。在介质表面：

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\sigma} = +Q_{\text{束缚}} \qquad \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = \Sigma_{\text{束缚}} \text{——束缚面电荷密度}$$

看 $\boldsymbol{P}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 的量纲：

$$[\boldsymbol{P}] = \frac{[q][L]}{[L]^3} = \frac{[q]}{[L]^2} \qquad [\boldsymbol{E}] = \frac{[q]}{[\epsilon_0][L]^2}$$

对于线性介质：

$$\boldsymbol{P} \propto \epsilon_0 \boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$$

其中 χ_e 是一个无量纲的系数——极化率。对于均匀介质，χ_e 总是一个常数。

对于一般的介质，麦克斯韦方程第一式为：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{束缚}}}{\epsilon_0}$$

将 $\rho_{\text{束缚}}$ 的表达式代入：

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}$$

令

$$\boldsymbol{D} \equiv \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \implies \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\text{自由}}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 称为电位移矢量。对于此情况，麦克斯韦方程组第二式和第三式不改变，但是第四式需要改变：

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

在此之前需要引入磁化强度矢量：

$$\boldsymbol{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{m}_i}{\Delta V}$$

即单位体积内磁偶极子的数量，其中 $\boldsymbol{m}_i$ 为磁矩。

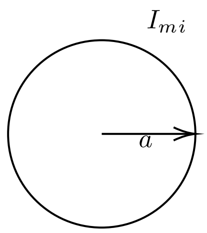


Figure 8.1: 微观磁化电流

对于微观磁化电流：

$$\boldsymbol{m}_i = I_m \pi a^2 e_{\boldsymbol{m}_i} \implies \oint \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_m = M_1 \mathrm{d}l - M_2 \mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}l}{\Delta V} \sum_i I_{m_i} \pi a^2$$

应用 Stokes 定理，有

$$\oint (\nabla \times \boldsymbol{M}) \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_M \implies \nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{j}_M$$

再看 $\boldsymbol{M}$ 的量纲和磁场的量纲：

$$[\boldsymbol{M}] = \frac{[\boldsymbol{m}]}{[L]^3} = \frac{[I]}{[L]} \qquad [\boldsymbol{B}] = \frac{[\mu_0][I]}{[L]}$$

如果考虑极化一样，考虑线性介质：

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0} \lambda_m \boldsymbol{B}$$

其中 λ_m 称为磁化率，是一个无纲量。如果进一步的，是一个均匀介质，那么 λ_m 是一个常数。看麦克斯韦方程组第四式：

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{j}_{\text{自由}} + \boldsymbol{j}_M + \boldsymbol{j}_{\text{束缚}}) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

如何理解束缚电流，首先对于束缚电荷 $\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\rho_{\text{束缚}}$，所以：

$$\boldsymbol{j}_{\text{束缚}}=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}$$

即束缚电荷分布变化所产生的电流。将这些表达式代入：

$$\mu_0\left(\boldsymbol{j}_{\text{自由}}+\nabla\times\boldsymbol{M}+\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}\right)+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{M})=\mu_0\boldsymbol{j}_{\text{自由}}+\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

定义磁场强度

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$$

则有麦克斯韦方程第四式：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_{\text{自由}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

从而有介质中的麦克斯韦方程组：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

这并不完备，考察 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}$ 的定义：

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}\qquad\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}$$

假设线性均匀介质，那么

$$\boldsymbol{P}=\epsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}\qquad\boldsymbol{M}=\frac{1}{\mu_0}\lambda_m\boldsymbol{B}$$

并非所有的介质都有这样的性质，这仅仅是一个简单的假设，在此假设下：

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\epsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}=\epsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}\qquad\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}-\frac{1}{\mu_0}\lambda_m\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu_0}(1-\lambda_m)\boldsymbol{B}$$

定义如下两个物理量

$$\text{介质介电常数：}\epsilon=\epsilon_0(1+\chi_e)\geq\epsilon_0$$
$$\text{介质磁导率：}\mu=\mu_0/(1-\lambda_m)$$

此时有关系：

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}\qquad\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

麦克斯韦方程组即完备：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon}\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{j}_f+\epsilon\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

或者用 $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$ 表示的麦克斯韦方程组：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

其积分形式为：

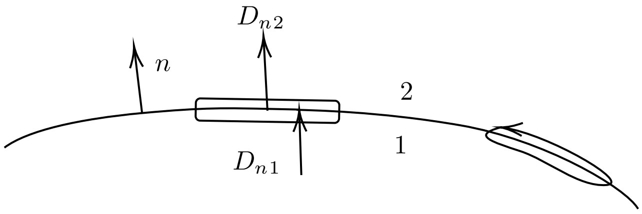
$$\oiint\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q_f$$
$$\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$\oiint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$
$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I_f+\iint\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

对于现行均匀金属介质，还有经验定律——欧姆定律 (微分形式)：

$$\boldsymbol{j}_f = \sigma \boldsymbol{E}$$

其中 σ 为电导率。与真空中的情况最本质的区别是真空是边界是无限远，而介质中的边界是有限的。

边界条件：介质界面上



满足：

$$\begin{aligned}
&D_{n_2} - D_{n_1} = \Sigma_f\text{——自由电荷面密度} \\
&B_{n_2} - B_{n_1} = 0 \\
&E_{t_2} - E_{t_1} = 0 \\
&H_{t_2} - H_{t_1} = K_f\text{——传导电流面密度}
\end{aligned}$$

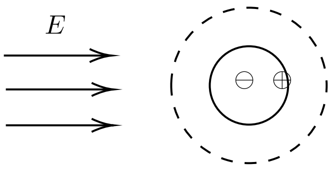
或者写成：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \Sigma_f \\
&\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \\
&\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \\
&\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{K}_f
\end{aligned}$$

8.2 物质极化和磁化的微观说明

说明氢原子的极化强度

依据氢原子的半经典图像描述，在外电场作用下，正电荷中心和负电荷中心偏离，二者相距为 b，根据高斯定律，可得极化矢量：

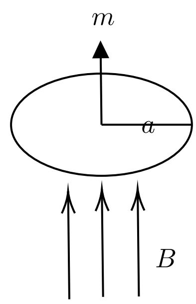


$$eE_e = e \cdot e\frac{b^3}{r_0^3}\frac{1}{b^2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \implies p = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 E_e \propto E_e$$

说明物质的磁性

抗磁性：一个圆形电流放入磁场 $\boldsymbol{B}$，有感生电流产生，则

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \implies E2\pi a = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi a^2 \implies E = \frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



$\boldsymbol{E}$ 沿着 e_ϕ 方向，有：

$$eE = m_e \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \implies \Delta v = \frac{ea}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{1}{m_e}\mathrm{d}t = \frac{ea}{2m_e}\mathrm{d}B = \frac{ea}{2}\frac{B}{m_e}$$

电荷速度改变，则电流也会改变，磁矩变为：

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S} = \frac{e\omega}{2\pi}\pi a^2 = \frac{ea}{2}v \implies \Delta m = \frac{ea}{2}\Delta v = \left(\frac{ea}{2}\right)^2 \frac{B}{m_e}$$

计及方向，$\Delta \boldsymbol{m} \sim -\boldsymbol{B}$。但此时还未考虑半径 a 可能的变化，因为此时如果 Δv 为正，那么 a 应当变大，反之变小：

$$m_e \frac{(v+\Delta v)^2}{a} = m_e \frac{v^2}{a} + 2m_e \frac{v\Delta v}{a} \text{——略去二阶小量}$$

而新的向心力为：

$$evB = ev\frac{2m_e}{ea}\Delta v = 2m_e v\frac{\Delta v}{a}$$

刚好与圆周运动多出的项一致，而数值上 $\Delta v \sim 10$ m/s，所以半径 a 不变。抗磁性产生于电磁感应，是普遍现象。

顺磁性： 物质原子含有奇数电子，那么最外层电子自旋磁矩给出原子磁矩不为 0,。加上磁场 $\boldsymbol{B}$，自旋磁矩 $\boldsymbol{m}_{\text{自旋}} \propto \boldsymbol{B}$，这就是顺磁性。此时抗磁性效应也存在，但是十分微弱，总体仍然表现出顺磁性。

铁磁性： 顺磁物质，考虑原子之间相互作用，出现自发磁化，排列称磁畴，但是总体看，磁畴也是无序的。(一瞬间感受到了上学期热统 Ising 模型的恐惧)，每个磁畴中的磁矩约有 $10^6 \sim 10^8$ 个。

在介质中，如果考虑其中的一块区域，相比于真空，完全可以平移得到结论，只需要变换一些常数，即可得到介质中电磁场的能量密度、能流密度等等。

8.3 静电问题

在介质中，考虑经典问题，麦克斯韦方程组包含：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

一般来说：$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$，而由于 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$，所以：

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

形式上与真空的静电问题一致，不一样的地方在于边界条件。对于不均匀的介质，需要在界面处分割，作为边界条件。在均匀的区域中，不越过边界，总是有 $\nabla \times \boldsymbol{D} = 0$，但是在边界处，这个式子一般不成立。

看 φ 的边界条件，一般来说，在有限的边界区域有不同介质，例如绝缘体，导体等：

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\Sigma_f \qquad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$$

由于泊松方程为二阶方程，φ 在边界连续，考虑：

$$\mathrm{d}\varphi=-\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} \implies \varphi \text{ 在边界连续}$$

$$\epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\Sigma_f$$

对于导体，其内部有自由电子，可以看做电子液体模型。静电情况下，自由电子静止，这意味着内部没有电场，否则自由电子必须运动，直至达到内部无电场未知。由此可以得出导体内部无电荷，无电场，即 $\boldsymbol{D}=0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$。

注意，在导体的情况下，理解什么是自由电荷，不是极化电荷的电荷都是自由电荷，所以：

$$\rho_f=\rho_{\text{自由电子}}+\rho_{\text{离子}}$$

例如金属中的晶格存在阳离子，不仅仅是电子，只有多余出的电荷才会到表面。导体为等势体而其表面为等势面，电场 $\boldsymbol{E}$ 垂直于表面，从而有：

$$\boldsymbol{D}=\Sigma_f\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{D}$ 为总的电位移矢量，而不是靠近表面的 Σ_f 那部分产生的电位移矢量。Σ_f 可自由调节以保证导体内无电场。

如果不是静电导体，考虑随时间变化的电场：

$$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}$$

此时如果周期足够大，则 $\boldsymbol{E}(t)$ 随时间变化慢，可以近似看做静电：

$$\boldsymbol{j}_f=\sigma\boldsymbol{E} \qquad \epsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_f \implies \nabla\cdot\boldsymbol{j}_f=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\rho_f$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}\rho_f}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\rho_f \implies \rho_f=\rho_{f,0}\exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}t\right)$$

当 $\dfrac{\sigma}{\epsilon_0\omega}\gg 1$ 时，为良导体，在一个周期内，自由电荷就衰减到 0，电荷都聚集在表面，这种物质为金属。如果外电场频率高速振荡，则非良导体。对于一般金属，$\epsilon_0/\sigma\sim 10^{-18}$ s，只要 $\omega<10^{18}$ Hz，那么在一个周期内 $\rho_f=0$。

Theorem 8.3.1 — 静电唯一性定理. Poisson 方程在第一类边界条件 $\varphi|_{\text{边界}}$，或第二类边界条件 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\text{边界}}$ 确定时，解是唯一的。

Proof. 设

$$\nabla^2\varphi_1=-\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla^2\varphi_2=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

且 φ_1,φ_2 满足同样的边界条件，令

$$u=\varphi_1-\varphi_2 \implies \nabla^2u=0$$

且 u 满足边界条件为零。根据 Green 公式：

$$\int\mathrm{d}V(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi+\varphi\nabla^2\psi)=\oiint_S\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

取 $u=\varphi=\psi$，则：

$$\int_V\mathrm{d}V(\nabla u)^2=0 \implies \nabla u=0 \implies u=\text{const}$$

所以 φ,ψ 仅仅相差一个常数，所以电场是唯一的，即证明静电的唯一性定理。 ■

Theorem 8.3.2 — 静电唯一性定理 (续). 当区域中有导体时，如果边界条件是导体所带的总电荷，则 Poisson 方程的解也是唯一的。

Proof. 总电荷为

$$\oiint_S \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S$$

由于导体为等势体，可以构造

$$\oiint \epsilon \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = \oiint_S \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S \cdot \varphi$$

设 φ_1, φ_2 满足：

$$\oiint_S \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \mathrm{d}S = \oiint_S \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = \text{总电荷}$$

则 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$，有：

$$\oiint_S \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = 0$$

在 S 上，φ 是常数：

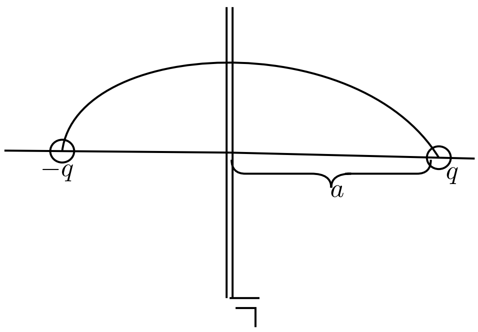
$$\oiint \epsilon_0 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = 0$$

应用上一结果即得解是唯一的。 ■

8.3.1 镜像法

猜测：先猜电荷分布，算出势，势在金属表面为常数，则完成任务，否则继续猜。

■ **Example 8.1** 如图，$x-y$ 平面左面为金属，电荷 q 在 a 处，求电势： ■



想像一个像电荷，在 $(0,0,-a)$ 处，带电 $-q$，两个电荷满足同样的边界条件，由唯一性定理即可得到电势。看两个电荷产生的电势：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}} \qquad \varphi(z=0)=0$$

由边界条件即可确定所得电势即为 $z>0$ 的正确的解。再看电场：

$$E_n|_{z=0} = -\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{z=0} = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2+a^2)^{3/2}} \qquad \Sigma_f = \epsilon_0 E_n(z=0)$$

对自由电荷面密度积分，得到：

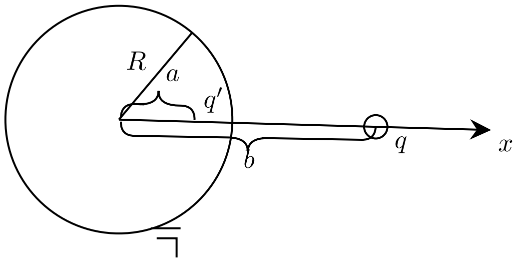
$$Q = \iint \Sigma_f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -q$$

因为已知电场，那么电荷与板的作用力 (吸引) 也可计算得到：

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2} \mathbf{e}_z$$

但电场能需要小心，只能计算右侧一半，不是全空间积分，只是全空间积分的一半。

■ **Example 8.2** 如图，一个导体球，在 $b>R$ 处有一电荷 q，求 φ? ■



在球内添加一像电荷，答案为：

$$q'=-\frac{R}{b}q \qquad a=\frac{R^2}{b}$$

如果球面不接地，只需要在中心加一个电荷，其在球面产生的电荷正好为球面对于的电荷值，这样球外的电势即可用三个电荷决定。

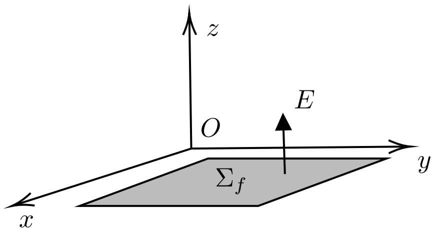
若在电场中有一等势面，则可设想一形状与此面吻合的金属薄片，置于该面位置，并调节其势至恰当数值。如果以该面为边界，则若此势可用有限个点电荷的势来等效的话，问题解决。

8.3.2 拉普拉斯方程的分离变量解法

对于拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad \varphi|_{\text{边界}} \text{ or } \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\text{边界}} \text{给定}$$

■ **Example 8.3** 如图：$\Sigma_f=\sigma_0\sin(\alpha x)\sin(\beta y)$ ■



对于拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi=0$$

假设

$$\varphi=X(x)Y(y)Z(z)$$

则方程化为：

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}+\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{\mathrm{d}z^2}=0$$

鉴于 Σ_f 的形式，考虑解的形式为

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\alpha^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=-\beta^2 \qquad \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}=\alpha^2+\beta^2$$

整理后得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\alpha^2X=0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+\beta^2Y=0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}-(\alpha^2+\beta^2)Z=0$$

其通解为：

$$\begin{aligned}
X(x)&=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x\\
Y(y)&=A\sin\beta x+B\cos\beta x\\
Z(z)&=F\exp\left(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)+G\exp\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)
\end{aligned}$$

在 $z>0$ 的地方，当 $z\to\infty, Z\to 0$，所以 $G=0$：

$$\varphi = FXY\exp\left(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)$$

$$E|_{z=0} = -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}FXY = \frac{\Sigma_f}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\sin(\alpha x)\sin(\beta y)$$

所以解得

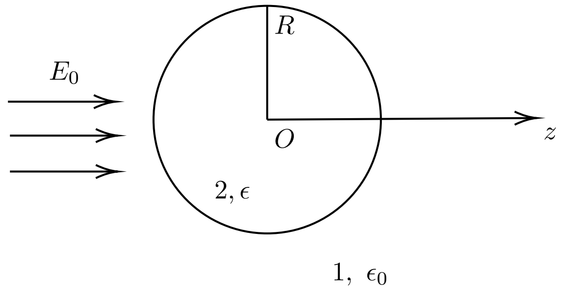
$$B=D=0 \qquad FAC\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

$$\varphi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\exp\left(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right)\sin(\alpha x)\sin(\beta y)$$

即可得到上半平面的解，下半平面的解是类似的，最终得到解为

$$\varphi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\exp\left(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,|z|\right)\sin(\alpha x)\sin(\beta y)$$

■ **Example 8.4** 介电常数为 ϵ 的介质球置于均匀外电场 $\mathbf{E}_0$ 中，求 $\varphi=?$ ■



依然为拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi_1 = 0 \qquad \nabla^2\varphi_2 = 0$$

有边界条件：

$$\begin{aligned}
&\varphi_1|_{r\to\infty} = -E_0 z + C = -E_0 r\cos\theta + C\\
&\varphi_2|_{r\to 0} = \text{有限}\\
&r=R: \varphi_1 = \varphi_2 \qquad \epsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \epsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}
\end{aligned}$$

用球坐标写拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

此体系关于 z 轴对称，因此设想其与 ϕ 无关：

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) = 0$$

分离变量，令 $\psi(\boldsymbol{r}) = R(r)\Theta(\theta)$，得到

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R(r)\right]\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]R(r) = 0$$

约去相同的项，两边都除去 $R(r)\Theta(\theta)$：

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right] = 0$$

即

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right]=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right]=l(l+1)$$

从而化为两个方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right]-l(l+1)R=0 \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right]+l(l+1)\Theta=0$$

第二个方程为勒让德方程，其解为勒让德多项式，其中 $l\in\mathbb{N}$：

$$\Theta(\theta)=P_l(\cos\theta) \qquad R(r)=a_lr^l+\frac{b_l}{r^{l+1}}$$

其中 a_l,b_l 为任意常数，由边界条件确定。解的形式为二者乘积：

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\left(a_lr^l+\frac{b_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

勒让德多项式 $P_l(\cos\theta)$ 具有性质：

$$P_0(\cos\theta)=1,\ P_1(\cos\theta)=\cos\theta,\ P_2(\cos\theta)=\frac{3}{2}(\cos^2\theta-1),\cdots$$

$$\text{正交归一性：}\int_{-1}^{1}P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

将解的形式带回：

$$\varphi_1=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

考虑 $r\to\infty$,有边界条件 $\varphi_1|_{r\to\infty}=-E_0r\cos\theta+C$,所以有 $A_0=C,A_1=-E_0$,对于 $l\geq 2,A_l=0$,所以：

$$\varphi_1=C-E_0r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

在对 B_l 做出限制之前，先看 φ_2，首先解为：

$$\varphi_2=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\alpha_lr^l+\frac{\beta_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

由于当 $r\to 0$ 时，φ_2 有限，所以：

$$\varphi_2=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_lr^lP_l(\cos\theta)$$

然后看 $r=R$ 处电势的连续性给出：

$$C-E_0R\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{1}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_lR^lP_l(\cos\theta)$$

$$C+\frac{B_0}{R}=\alpha_0 \qquad -E_0R+\frac{B_1}{R^2}=\alpha_1R \qquad \frac{B_l}{R^{l+1}}=\alpha_lR^l\ (l\geq 2)$$

电势一阶导的条件给出：

$$\epsilon_0\left(E_0\cos\theta-B_l(l+1)\frac{1}{R^{l+2}}P_l(\cos\theta)\right)=\epsilon\sum_l\alpha_llR^{l-1}P_l(\cos\theta)$$

$$B_0=0 \quad -\epsilon_0E_0-B_1\frac{2}{R^3}=\epsilon\alpha_1 \quad -\epsilon_0B_l(l+1)\frac{1}{R^{l+2}}=\epsilon\alpha_llR^{l-1}\ (l\geq 2)$$

对于 $l \geq 2$，仅有平凡零解，即 $B_l = \alpha_l = 0$，其余系数解得：

$$\alpha_0 = C \quad \alpha_1 = -\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 \quad B_1 = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 R^3$$

所以解得：

$$\varphi_1 = C - E_0 r \cos\theta + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 R^3 \frac{1}{r^2} \cos\theta \qquad \varphi_2 = C - \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 r \cos\theta$$

如果导体球并不存在，即 $\epsilon = \epsilon_0$，那么 $\varphi_1 = \varphi_2$，结果合理。如果极化十分强，导体对电场响应十分强烈，也就是 $\epsilon \gg \epsilon_0$，那么当 $\epsilon \to \infty$ 时，内部为常数，对应于导体。

8.3.3 泊松方程的特解叠加法

对于一个泊松方程：

$$\nabla^2 \varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho_f(\boldsymbol{r})}{\epsilon}$$

有边界条件：

$$\varphi|_{\text{边界}} \text{ or } \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\text{边界}} \quad \text{给定}$$

用 $\varphi = \varphi_0$ 特解——无界空间边界条件，则

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V'$$

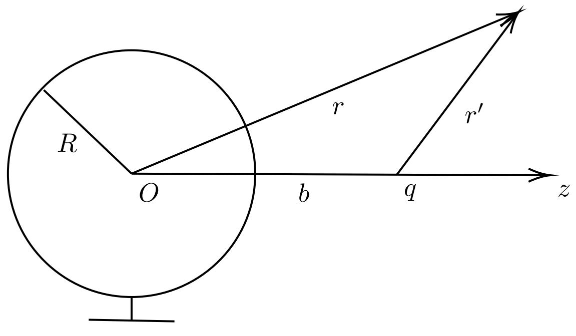
构造

$$\psi = \varphi - \varphi_0 \implies \nabla^2 \psi = 0$$

满足相减后的边界条件。解出即可得到

$$\varphi = \varphi_0 + \psi$$

■ **Example 8.5** 如图导体球 ■



特解为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r'} + \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \right]$$

看边界条件：

$$r \to \infty,\ \varphi \to 0 \implies a_l = 0 \implies \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{4\pi r'} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \right]$$

当 $r = R$ 时，有 $\varphi = 0$：

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{b} \left(\frac{r}{b} \right)^l P_l(\cos\theta)$$

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_l\left[\frac{q}{b}\left(\frac{r}{b}\right)^l+b_l\frac{1}{r^{l+1}}\right]P_l(\cos\theta)$$

代入 $r=R$ 时:

$$\varphi(R)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{b}\left(\frac{R}{b}\right)^l+b_l\frac{1}{R^{l+1}}\right]P_l=0$$

分别有:

$$\begin{aligned}&l=0:\ \frac{q}{b}+\frac{b_0}{R}=0\implies b=-\frac{R}{b}q\\&\text{任意的}l:q\frac{R^l}{b^{l+1}}=-\frac{b_l}{R^{l+1}}\implies b_l=\frac{q}{b^{l+1}}R^{2l+1}=-\frac{q}{R}\left(\frac{R^2}{b}\right)^{l+1}\end{aligned}$$

所以有:

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Rq/b}{r}+\frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\sum_l\frac{q}{R}\left(\frac{R^2}{b}\right)^{l+1}\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\\&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Rq}{b}\sum_{l=0}\left(\frac{R^2}{b}\right)^l\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\\&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Rq/b}{\left|\boldsymbol{r}-\frac{R^2}{b}\mathbf{e}_z\right|}\end{aligned}$$

后一项相当于在 $\frac{R^2}{b}\mathbf{e}_z$ 有一个电荷 $q'=-\frac{R}{b}q$，与镜像法的结果一致。

静磁学

介质中静磁学的方程有:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_f\qquad\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

对于线性介质有:

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$

从而得到静磁学要解的方程为:

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}_f$$

事实上这仍然是三个泊松方程，解法与静电问题相比并没有更多的内容。此外有磁标势的方法，它是考虑 $\boldsymbol{j}_f=0$ 的区域:

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=0\implies\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m$$

这样就回到了类似于静电问题的拉普拉斯方程和泊松方程，但是这是需要一些特殊的条件的，并不具有普遍性。

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\implies\nabla\cdot\boldsymbol{H}=-\nabla^2\varphi_m=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}\sim\rho_m$$

8.4 电磁波的反射和折射

真空中当无源时，电磁场满足波动方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\qquad\nabla^2\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0$$

电磁波是横波，因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，并且电磁场并不独立，电磁场之间有关系：

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\mathbf{e}_k\times\boldsymbol{E}$$

所以只有两个自由度，对应两个分量，决定了电磁波的偏振情况。

在介质 (ϵ,μ) 中，依然只是考虑均匀线性介质，麦克斯韦方程组是“一样”的：

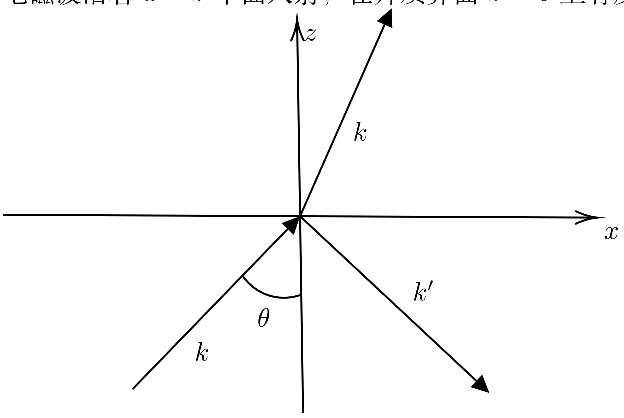
$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\text{线性介质：}\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}\qquad\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\qquad\text{无源：}\rho_f=0,\ \boldsymbol{j}_f=0$$

形式上和真空中相比并无本质的变化，所以介质中电磁波的速度

$$v=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\qquad\epsilon>\epsilon_0\quad\mu\sim\mu_0\implies v<c$$

但是需要考虑边界条件，看平面单色波的反射与折射，复杂情况可看做平面单色波的叠加。设入射电磁波沿着 $x-z$ 平面入射，在介质界面 $z=0$ 上有反射和折射现象。



电磁场边界条件为：

$$(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)\times\boldsymbol{n}=0\qquad(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\times\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{K}_f\qquad(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{n}=\Sigma_f\qquad(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0$$

设入射波为平面波，则反射和折射都为平面波：

$$\begin{aligned}&\text{入射：}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\\&\text{反射：}\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}_0'e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)}\\&\text{折射：}\boldsymbol{E}''=\boldsymbol{E}_0''e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega'' t)}\end{aligned}$$

在界面上，应用边界条件第一式：

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E}'')\times\boldsymbol{n}=0$$

即

$$\boldsymbol{n}\times\left[\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}+\boldsymbol{E}_0'e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)}\right]=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0''e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega'' t)}$$

要求对任意的 x,y,z,t 都成立，则必须有：

$$\omega=\omega'=\omega''\qquad k_x=k_x'=k_x''\qquad k_y=k_y'=k_y''=0$$

故入射线，反射线和折射线共平面。而且：

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=k_x^2+k_z^2=k'^2=k_x^2+k_z'^2\implies k_z'=-k_z$$

从而反射角 θ' 满足反射定律：

$$\theta = \theta'$$

然后看折射线：

$$k = \frac{\omega}{v_1} = \sqrt{\epsilon_1\mu_1}\omega \qquad k'' = \frac{\omega}{v_2} = \sqrt{\epsilon_2\mu_2}\omega \qquad k_x = k''_x$$

所以：

$$k\sin\theta = k''\sin\theta'' \implies \frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{\sqrt{\epsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1\mu_1}} \equiv n_{21}\text{—介质 2 相对于介质 1 的折射率}$$

即折射定律。

下面讨论振幅关系，前述得到相位一致，所以有：

$$(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'_0 - \boldsymbol{E}''_0) \times \mathbf{e}_z = 0$$

$$(\epsilon_1\boldsymbol{E}_0 + \epsilon_1\boldsymbol{E}'_0 - \epsilon_2\boldsymbol{E}''_0) \cdot \mathbf{e}_z = 0 \text{ (绝缘介质)}$$

$$(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{E}'_0 - \boldsymbol{k}'' \times \boldsymbol{E}''_0) \cdot \mathbf{e}_z = 0$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{E}'_0 - \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{k}'' \times \boldsymbol{E}''_0\right) \times \mathbf{e}_z = 0$$

首先看 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直于入射面的情况，由边界条件知，可以证明 $\boldsymbol{E}'_0, \boldsymbol{E}''_0$ 也垂直于入射面，看第一个边界条件：

$$E_0 + E'_0 = E''_0$$

然后看第四个边界条件：

$$H_0\cos\theta - H'_0\cos\theta = H''_0\cos\theta'' \qquad H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E$$

结果如下：

$$\frac{E'_{0,\perp}}{E_{0,\perp}} = \frac{\cos\theta - n_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}\cos\theta''}{\cos\theta + n_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}\cos\theta''} \overset{\mu_1=\mu_2}{\approx} -\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}$$

$$\frac{E''_{0,\perp}}{E_{0,\perp}} = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + n_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}\cos\theta''} \overset{\mu_1=\mu_2}{\approx} \frac{2\sin\theta''\cos\theta}{\sin(\theta+\theta'')}$$

然后是 $\boldsymbol{E}_0$ 平行于入射面的情况，同样的 $\boldsymbol{E}'_0, \boldsymbol{E}''_0$ 也平行于入射面，有边界条件：

$$H_0 + H'_0 = H''_0 \qquad (E_0 - E'_0)\cos\theta = E''_0\cos\theta'' \qquad H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E$$

可得：

$$\frac{E'_{0,\parallel}}{E_{0,\parallel}} \simeq \frac{n_{21}\cos\theta - \cos\theta'}{n_{21}\cos\theta + \cos\theta'} = \frac{\tan(\theta-\theta')}{\tan(\theta+\theta')}$$

$$\frac{E''_{0,\parallel}}{E_{0,\parallel}} \simeq \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$$

如上四个公式称为菲涅尔 (Fresnel) 公式。**说明：这些推导是对 Maxwell 理论的重要验证**。自然光经过反射和折射后偏振程度会改变，和入射角有关。

1. 振幅之比恰好是实数，就是物理的振幅之比 (实部之比)；
2. 反射波有半波损失：垂直偏振光从光疏介质进入光密介质，反射光相差相位 π，所以振幅之比出现一个负号；

3. 平行偏振光反射波的消失，当分母为 $\tan(\theta+\theta'') = \tan\pi/2 \to \infty$ 时，反射波平行分量振幅为 0，此时这个角度 θ 称为布儒斯特角；
4. 全反射：从光密介质到光疏介质，由 $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta''} = n_{21} < 1$，当 $\sin\theta = n_{21}$ 时，$k''_z = 0$。当 $\sin\theta > n_{21}$ 时，

$$k''^2_z = k''^2 - k''^2_x = k''^2\left(1 - \frac{\sin\theta^2}{n_{21}^2}\right) \implies \boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}''_0 e^{-|k_z|z} e^{i(k''_x x - \omega t)}$$

最后看反射与折射的能流，简单起见，考虑入射角为 0，即垂直入射，则 $\theta' = \theta'' = 0$，可以证明：

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{1 - n_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}}{1 + n_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}} \qquad \frac{E''_0}{E_0} = \frac{2}{1 + n_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

则能流比：

$$\text{反射：}\ \frac{E'^2_0}{E^2_0} = \left(\frac{1 - n_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}}{1 + n_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right)^2 \qquad \text{折射：}\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\frac{4}{\left(1 - n_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}\frac{v_2}{v_1}$$

二者相加，能流比为 1。

8.5 导体中的电磁波

导体中的自由电流 $\boldsymbol{j}_f = \sigma\boldsymbol{E}$，即电导率和电场的乘积。静电情况下，导体中的自由电荷 $\rho_f = 0$，自由电荷聚集在表面，内部无电场。对于随时间变化的电场，假设

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$$

根据电荷守恒定律：

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{j}_f = -\nabla\cdot(\sigma\boldsymbol{E}) = -\sigma\frac{\rho_f}{\epsilon_0}$$

即可解得：

$$\rho_f = \rho_{f,0}\exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}t\right)$$

对于导体而言，如果电场频率远小于自由电荷衰减的速度，那么认为是导体。例如对于 Cu，$\dfrac{\sigma}{\epsilon_0} \sim 10^{-18}$ s。

对于导体中的电磁波，其中 $\rho_f = 0$，所以有：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0 \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

注意到：

$$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} = \epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = -i\omega\epsilon_0\boldsymbol{E}$$

所以

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = (\sigma - i\omega\epsilon_0)\boldsymbol{E} = -i\omega\left(\epsilon_0 + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E}$$

令

$$\epsilon' \equiv \epsilon_0 + i\frac{\sigma}{\omega}$$

则有关系式：

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{D} = \epsilon'\boldsymbol{E}$$

如此定义 $\boldsymbol{D}$ 并不改变 $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0$，因为实质上 Nabla 算符是作用在 $\boldsymbol{E}$ 上。

所以只需要将 $\epsilon_0 \to \epsilon'$，即可化为无源情况下的麦克斯韦方程组，可以导出波动方程，有平面波解：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

其中波矢：

$$k = \omega\sqrt{\epsilon'\mu} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}\right)^2}+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} + i\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}\right)^2}-1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

对于**不良导体**：$\dfrac{\sigma}{\epsilon_0\omega} \ll 1$，则：

$$k \simeq \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} + i\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

而

$$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\Big/\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\mu_0} \ll 1$$

虚部相比于实部很小，和真空类似，属于绝缘体。

对于**良导体**：$\dfrac{\sigma}{\epsilon_0\omega} \gg 1$，则波矢：

$$k \simeq (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$$

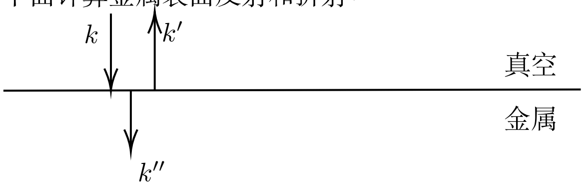
实部和虚部大小相等，其虚部产生穿透深度的问题，穿透深度为 $\sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$，超过穿透深度一倍以上，电磁波基本消失。所以如果导体中有电磁波，一定在导体表面 (一个穿透深度的范围内) 流动，在导体内无电磁波，只集中于表面。对于 Cu，60 Hz 的电磁波，穿透深度为 0.8 cm，如果频率为 1×10^8 Hz，穿透深度约为 10^{-3} cm。

在导体中仍然有磁场和电场的关系：

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{E} = \frac{1}{v}\mathbf{e}_k\times\boldsymbol{E} = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{\omega}}e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbf{e}_k\times\boldsymbol{E}$$

导体内电磁波 $\boldsymbol{B}$ 比 $\boldsymbol{E}$ 落后 $\dfrac{\pi}{4}$，金属中电磁波的能量密度主要由磁场贡献 (真空中二者贡献是同等的)。

下面计算金属表面反射和折射：



设入射垂直，沿 X 方向偏振：

$$E_0 + E_0' = E_0'' \qquad k(E_0 - E_0') = k''E_0''$$

从而可以解得反射波和透射波：

$$\frac{E_0'}{E_0} = -\frac{k''-k}{k+k''} \qquad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{2k}{k+k''}$$

由于：

$$\frac{k''}{k}=\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}(1+i)\Big/\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}=\sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

所以有：

$$\frac{E_0'}{E_0}=-\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}}e^{i\frac{\pi}{4}}-1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}}e^{i\frac{\pi}{4}}+1}\simeq-1\qquad\frac{E_0''}{E_0}=\frac{2}{1+\sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}}e^{i\frac{\pi}{4}}}\simeq 0$$

所以对于良导体，入射波全被金属表面反射。

电阻为 0 或者电导率无穷大的导体称为**理想导体**，根据如上对电磁波的讨论，理想导体内部无电磁波，因此也没有静常数电场，因为 $\boldsymbol{j}_f=\sigma\boldsymbol{E}$，即使导体内有 $\boldsymbol{j}_f$，但 σ 是无穷大，所以 $\boldsymbol{E}$ 只能是无穷小。

如果一开始没有磁场，则因常数电场 $\boldsymbol{E}_c=0$，所以 $\dfrac{\partial\boldsymbol{B}_c}{\partial t}=0$，那么永远没有常数磁场，$\boldsymbol{B}_c=0$。这也可以从电磁感应来理解。

假设 $B_c=0$，那么理想导体的边界条件：

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0\qquad\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\Sigma_f\qquad\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{K}_f$$

其中：

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}\qquad\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

电场 $\boldsymbol{E}$ 垂直于表面，而磁场 $\boldsymbol{B}$ 平行于表面，从而能流一定是沿着表面的。

8.6 简单的波导

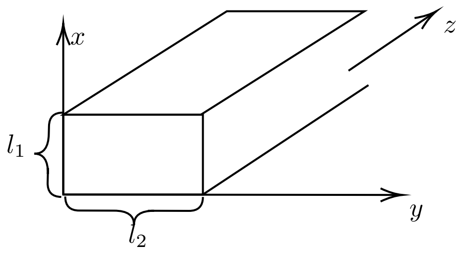
微波 ($\lambda\sim$ cm) 在波导管内传播，波导管由理想导体构成，所以 $\boldsymbol{E}$ 只有法向，$\boldsymbol{B}$ 只有切向，从而能流：

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$$

也沿着金属的表面。

波导：考虑一个金属矩形管，电磁波在其中传播。

$$\text{电波：}\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\qquad\text{磁波：}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$



电场在 z 方向为行波，而 x,y 方向为驻波，具有形式：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y)e^{i(k_zz-\omega t)}$$

x 方向的驻波可以写成形式：

$$a_xe^{i(k_xx-\omega t)}+b_xe^{i(-k_xx-\omega t)}=\left[(a_x+b_x)\cos k_xx+i(a_x-b_x)\sin k_xx\right]e^{-i\omega t}$$

所以：

$$E_{0x}=(\alpha_{x_1}\cos k_xx+\alpha_{x_2}\sin k_xx)(\beta_{x_1}\cos k_yy+\beta_{x_2}\sin k_yy)$$

$$E_{0y} = (\alpha_{y_1}\cos k_x x + \alpha_{y_2}\sin k_x x)(\beta_{y_1}\cos k_y y + \beta_{y_2}\sin k_y y)$$
$$E_{0z} = (\alpha_{z_1}\cos k_x x + \alpha_{z_2}\sin k_x x)(\beta_{z_1}\cos k_y y + \beta_{z_2}\sin k_y y)$$

考虑边界条件，四个侧面上切向电场为 0，即：

$$x = 0,\ l_1 \to E_y = E_z = 0 \qquad y = 0,\ l_2 \to E_x = E_z = 0$$

立刻得到：

$$\alpha_{y_1} = \alpha_{z_1} = 0$$
$$E_{0x} = 0 \implies \beta_{x_1} = 0, k_y = \frac{n\pi}{l_2}$$
$$E_{0y} = 0 \implies \alpha_{y_1} = 0, k_x = \frac{n\pi}{l_1}$$
$$E_{0z}\text{四个面都为 } 0 \implies \alpha_{z_1} = \alpha_{z_2} = 0$$

从而得到 (注意系数的改变)：

$$E_{0x} = (A_1\cos k_x x + A_2\sin k_x x)\sin k_y y$$
$$E_{0y} = \sin k_x x(B_1\cos k_y y + B_2\sin k_y y)$$
$$E_{0z} = C\sin k_x x\sin k_y y$$

应用横波条件：$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ 可得 $A_2 = B_2 = 0$，$A_1k_x + B_1k_y - iCk_z = 0$，最后得到：

$$E_{0x} = A_1\cos k_x x\sin k_y y \qquad E_{0y} = B_1\sin k_x x\cos k_y y \qquad E_{0z} = C_1\sin k_x x\sin k_y y$$

其中：

$$A_1k_x + B_1k_y - iC_1k_z = 0 \qquad k_x = \frac{n\pi}{l_1} \qquad k_y = \frac{n\pi}{l_2}$$

最后看 k_z，其数值为：

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2} \qquad m, n\in\mathbb{N},\ \text{且不同时为 } 0$$

波能传播的最低频率为：

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{\max\{l_1, l_2\}}$$

也称为截止频率。磁场可以通过法拉第方程求出即：

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

求得的 $\boldsymbol{B}$ 自动满足边界条件 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量为 0。

对于确定的频率 ω, m, n，分两种基本波型：

1. $C_1 = 0 \implies E_{0z} = 0$，$\boldsymbol{E}$ 与 k_z 垂直，称为横电 $\mathrm{TE}_{\mathrm{mn}}$
2. $B_1k_x = A_1k_y \implies B_{0z} = 0$，$\boldsymbol{B}$ 与 k_z 垂直，称为横磁 $\mathrm{TM}_{\mathrm{mn}}$

一般的波是 TE, TM 的叠加。

群速度和相速度：如

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}$$

其相速度为：

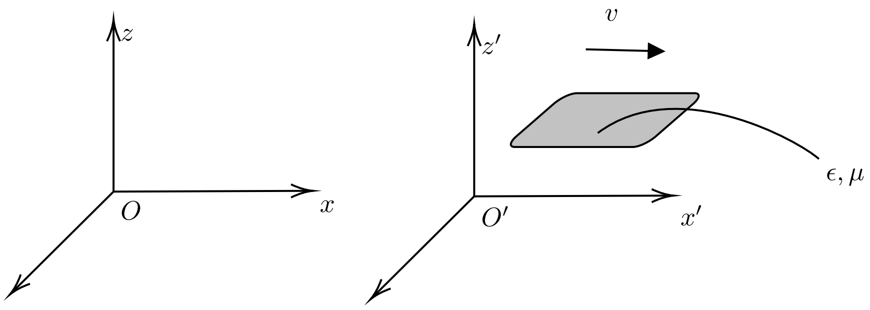
$$v_{\text{phase}} = v = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{\min}/\omega)^2}} > c$$

群速度为：

$$v_{\text{group}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^2} < c$$

群速度是能量传播的速度。

8.7 专题：低速运动介质的 Maxwell 方程组



在 O 系中看，略去 (开始) $\frac{v}{c}$ 的项：

$$E_1'(x') = E_1(x) \qquad E_2'(x') = E_2(x) - vB_3(x) \qquad E_3'(x') = E_2(x) + vB_2(x)$$

$$B_1'(x') = B_1(x) \qquad B_2'(x') = B_2(x) \qquad B_3'(x') = B_3(x)$$

或者写成：

$$\boldsymbol{E}_{||}' = E_{||} \qquad \boldsymbol{E}_{\perp}' = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_{\perp}$$

$$\boldsymbol{B}_{||}' = \boldsymbol{B}_{||} \qquad \boldsymbol{B}_{\perp}' = \gamma\left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}\right)_{\perp}$$

无论介质是否运动，麦克斯韦方程组不变：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \qquad \nabla' \times \boldsymbol{E}' = -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} \qquad \nabla' \cdot \boldsymbol{B}' = 0 \qquad \nabla' \times \boldsymbol{B}' = \mu_0 \boldsymbol{j}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t}$$

此外还有洛伦兹力也是不变的。对于均匀线性介质，在 O' 系中，有：

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' = \rho_f' \qquad \nabla' \times \boldsymbol{E}' = -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} \qquad \nabla' \cdot \boldsymbol{B}' = 0 \qquad \nabla' \times \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{j}_f' + \frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t}$$

其中：

$$\boldsymbol{D}' = \epsilon \boldsymbol{E}' = \epsilon_0 \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{P}' \qquad \boldsymbol{H}' = \frac{\boldsymbol{B}'}{\mu}$$

然后进行参考系之间的变换：

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

即

$$x = x' + vt' \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$$

这时考虑低速情况，进行的是伽利略变换，需要注意否则出问题。看偏微分：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'}$$

可得：

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \qquad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}$$

可以从：

$$\nabla' \times \boldsymbol{E}' = -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} \implies \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

另外明显有：

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{B}' = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

可是要从

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \qquad \nabla' \times \boldsymbol{B}' = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t'}$$

推导得到另一参考系，则不可能。需要把前面的伽利略变换修正为洛伦兹变换，需要引入 $\frac{v}{c}$ 的修正：

$$j_x' = j_x - v\rho \qquad \rho' = \rho - \frac{v_x j_x}{c} \qquad t' = t - \frac{v}{c^2}x$$

$$B_2' = B_2 + \frac{v}{c^2}E_3 \qquad B_3' = B_3 - \frac{v}{c^2}E_2$$

最后变换得到：

$$\nabla \cdot [\boldsymbol{D} + (\epsilon\mu - \epsilon_0\mu_0)\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}] = \rho_f \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f + \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{D} + (\epsilon\mu - \epsilon_0\mu_0)\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}] - \left(1 - \frac{\epsilon_0\mu_0}{\epsilon\mu}\right)[\rho_f \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)]\boldsymbol{D}$$

其中：

$$\boldsymbol{D} \equiv \epsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{H} \equiv \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$