Laboratorul 7 – Corespondența Curry-Howard

Corespondența Curry-Howard ne arată că tipurile din lambda calculul cu tipuri simple pot fi folosite pentru a reprezenta propoziții din logică (propozițională, deocamdată) și faptul de a defini un termen de un astfel de tip corespunde la o demonstrație a adevărului propoziției (în fragmentul intuiționist al logicii propoziționale).

În cadrul acestul laborator vom experimenta cu această corespondență în Haskell, folosind atât tipurile de date algebrice corespunzătoare constructorilor de formule din logică, cât și codările Church corespunzatoare lor în lambda calculul cu tipuri simple.

Pentru fiecare din fișierele `src/CurryHowardTyped.hs` și `src/CurryHowardUntyped.hs` aveți definite tipuri pentru `False`, `True`, `And`, `Or`, `Not` și `Iff`, precum și tipul predefinit `->` pentru implicație.

Va trebui să definiți câte un termen corespunzând unor reguli de deducție sau axiome / tautologii din logica propozițională. Pentru a deosebi implicația logică de tipul săgeată, vom folosi în regulile de mai jos simbolul $\supset$ pentru implicația logică.

Puteți folosi orice în afară de `undefined` sau recursie. Faptul că reușiți să definiți un termen de tipul respectiv înseamnă că tipul este inhabited și deci rezultatul logic corespunzător este demonstrabil.

Reguli de deducție naturală pentru logica propozițională intuiționistă

Următorul sistem de deducție este (mai mult decât) complet pentru deducția în logica propozițională intuiționistă.

Regulile sunt preluate după Automated Theorem Proving de Frank Pfenning

- regulă de introducere pentru `True`

$$\frac{}{\top}$$

- regulă de eliminare pentru `False`

$$\frac{\bot}{\varphi}$$

- o regulă de introducere și una de eliminare pentru implicație

$$\frac{a \vdash b}{a \supset b} 3em \frac{a \supset b \quad a}{b}$$

- o regulă de introducere și două de eliminare pentru `And`

$$\frac{a \quad b}{a \land b} 3em \frac{a \land b}{a} 3em \frac{a \land b}{b}$$

- două reguli de introducere și una de eliminare pentru `Or`

$$\frac{a}{a \lor b} 3em \frac{b}{a \lor b} 3em \frac{a \lor b \quad a \supset c \quad b \supset c}{c}$$

- o regulă de introducere și una de eliminare pentru `Not`

$$\frac{a \vdash p}{\neg a} 3em \frac{a \quad \neg a}{p}$$

- o regulă de introducere și două de eliminare pentru `Iff`

$$\frac{a \supset b \quad b \supset a}{a \leftrightarrow b} 3em \frac{a \leftrightarrow b \quad a}{b} 3em \frac{a \leftrightarrow b \quad b}{a}$$

O axiomatizare Hilbert pentru logica propozițională intuiționistă

Un alt sistem de deducție pentru logica propozițională intuiționistă constă din zece axiome și o singură regulă de deducție (modus ponens): https://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/

- ax1: $a \supset b \supset a$
- ax2: $(a \supset b) \supset ((a \supset (b \supset c)) \supset (a \supset c))$
- ax3: $a \supset (b \supset (a \land b))$
- ax4: $(a \land b) \supset a$
- ax5: $(a \land b) \supset b$
- ax6: $a \supset (a \lor b)$
- ax7: $b \supset (a \lor b)$
- ax8: $(a \supset c) \supset ((b \supset c) \supset ((a \lor b) \supset c))$
- ax9: $(a \supset b) \supset ((a \supset \neg b) \supset \neg a)$
- ax10: $\neg a \supset (a \supset b)$
- the modus ponens rule:

$$\frac{a \supset b \quad a}{b}$$

Câteva tautologii

- $p \supset (\neg p \supset \bot)$

Legile lui de Morgan

1. $(\neg p \wedge \neg q) \supset \neg(p \vee q)$
2. $\neg(p \vee q) \supset (\neg p \wedge \neg q)$
3. $(\neg p \vee \neg q) \supset \neg(p \wedge q)$

Cealaltă implicație rămasă din legile lui de Morgan `DeMorgan4`: $\neg(p \wedge q) \supset \neg p \vee \neg q$ nu poate fi demonstrată în logica intuiționistă

Dubla negație / terțul exclus / legea lui Peirce

Prin adăugarea oricărei din următoarele axiome la logica intuiționistă se obține logica clasică propozițională. Totuși, oricare din ele este independentă de sistemele de mai sus și nu este demonstrabilă în logica intuiționistă (deci nu putem găsi un temen corespunzător tipului lor)

- Axioma terțului exclus: $a \vee \neg a$
- Axioma dublei negații: $\neg\neg a \supset a$
- Legea lui Peirce: $((p \supset q) \supset p) \supset p$

Totuși, în logica intuiționistă, putem demonstra echivalența dintre ele. Scrieți termeni care să arate că: - terțul exclud implică dubla negație - dubla negație implică terțul exclus (mai grea)

Provocări extra

- încercati să definiți termenii corespunzători regulilor de deducție naturală folosind doar definițiile corespunzătoare sistemului de tip Hilbert
- încercați invers: să definiți termenii corespunzători sistemului de tip Hilbert folosind doar regulile de deducție naturală.
- încercați să arătați că terțul exclus / dubla negație sunt echivalente cu legea lui Peirce:

$$((P \supset Q) \supset P) \supset P$$

- încercați să demonstrați că dacă presupunem terțul exclus atunci putem demonstra legea lipsă din regulile lui de Morgan. În Haskell definiți o funcție de la tipul `ExcludedMiddle` la tipul `DeMorgan4`