

Mathematics Marathon 05/08/2023 Tasks

MODULO EQUATIONS

05.08.23

$N \equiv 1-5$; $N \equiv 3-8$

$N \equiv 1-5$

$$1. |x^2 + 2x - 4| > 4$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 4 = 4 \\ x^2 + 2x - 4 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 4 = 4 \\ x^2 + 2x - 4 = -4 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x^2 = -2x \dots \cdot x$$

$$x^2 + 2x = 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(a^2 \quad 1208 \quad 16^2)$$

$$2^2 + 2 \cdot 2$$

$$-12 + 2 \mid 2 - 2 \mid$$

$$4 = 4 + 4 = 8$$

Значит x может быть только отрицательным;

$$\rightarrow x < 0 \text{ и } x + 2 < 0$$

$$-2 < x < 0$$

$$(-2; 0)$$

$$B: x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 0) \cup (2; +\infty)$$

$$x^2 + 16x - 24 \leq 16$$

$$x^2 + 16x - 24 \geq -16$$

$$x^2 + 16x - 24 \leq 16$$

$$x^2 + 16x - 40 \leq 0$$

$$|x + 10| |x - 4| \leq 0$$

Если оба множителя отрицательны:

$$x - 4 < 0 \text{ и } x + 10 < 0, \quad x < 4 \text{ и } x < -10$$

оба положительных:

$$x - 4 > 0 \text{ и } x + 10 > 0, \text{ то есть } x > 4 \text{ и } x > -10$$

То есть уравнение выполняется когда $x < -10$
или $4 < x$

MODULO EQUATIONS

$$N \subseteq 1-5; \quad N \subseteq 3-8$$

$$1) |x^2 + 2x - 4| > 4$$

$$1) - |x^2 + 2x - 4| > 4$$

$$0) x^2 + 2x - 4 > 4$$

$$x^2 + 2x - 8 > 0$$

$$(x-2)(x+4) > 0$$

Если $x-2 > 0$ и $x+4 > 0$, то

$$x > 2 \text{ и } x > -4$$

Если $x-2 < 0$ и $x+4 < 0$,

не имеют решения. Так как оба

выражения отрицательны, то не могут быть

больше нуля

$$2) x^2 + 2x - 4 < -4$$

$$x^2 + 2x < 0$$

$$x(x+2) < 0$$

Если $x > 0$, то уравнение не решается,

так как

$$1) 1+2 = 3 < 0$$

$$x^2 + 6x + 8 \geq 0$$

$$(x+2)(x+4) \geq 0$$

$$x+2 < 0 \text{ u } x+4 < 0 \rightarrow x < -4 \text{ u } x < -2$$

$$x+2 > 0 \text{ u } x+4 > 0, \quad x > -4 \text{ u } x > -2$$

$$x < -4 \text{ u } x > -2$$

$$D: x \in]-10; -4[\cup]-2; 4]$$

$$|x+3| + |x-4| \geq 11$$

$$|x+3| + |x-4| \leq -11$$

$$x+3 + x-4 - 11 = 0$$

$$2x - 12 = 0$$

$$2x = 12$$

$$\underline{x = 6}$$

$$x+3 + x-4 + 11 = 0$$

$$2x + 10 = 0$$

$$2x = -10$$

$$x = -5$$

$$0; [-5, 6]$$

$$|x^2 - 1| < x^2 - |x| + 1$$

$$x^2 - 1 = |x-1|(x+1)$$

$$x-1 |x+1| \in [-\infty; -1] \cup [-1; 0] \cup [0; 1] \cup [1; +\infty]$$

$$\text{Пусть } x = -2$$

$$|-2-1| |-2+1| < -2^2 - |-2| + 1$$

$$-2^2 - 2 \cdot (-1 \cdot -2) + 1 < 4 \quad \neq -2 + 1$$

$$4 - 2 + 2 - 1$$

$$3 < 4 - 2 + 1$$

$$\neq 3 < 13$$

~~Взяв~~ Значит $x = -2$ в нем
не подходит не входит

$$-1 < x + 1$$

$$x > -2, x \in (-\infty, -1) \rightarrow x \in [-2, -1)$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$-|x^2 - 1| < x^2 - |-x| + 1$$

$$-x^2 + 1 < x^2 + x + 1$$

$$-2x^2 - x < 0$$

$$2x^2 + x > 0$$

$$x(2x+1) > 0$$

$$x(2x+1) > 0 \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$$

$$x \in [-1, 0] \quad x \in [-1, -\frac{1}{2})$$

$$\text{Пусть } x = -2$$

$$|-2-1| |-2+1| < -2^2 - |-2| + 1$$

$$-2^2 - 2 \cdot |-1 \cdot -2| + 1 < 4 \quad * -2 + 1$$

$$+4 - 2 + 2 - 1$$

$$3 < 4 - 2 + 1$$

$$* 3 < 13$$

~~Одна~~ Значит $x = -2$ в каче-
стве порока не входит

$$-1 < x + 1$$

$$x > -2, x \in (-\infty, +\infty) \rightarrow x \in [-2, -1]$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$-|x^2 - 1| < x^2 - |-x| + 1$$

$$-x^2 + 1 < x^2 + x + 1$$

$$-2x^2 - x < 0$$

$$2x^2 + x > 0$$

$$x(2x+1) > 0$$

$$x(2x+1) > 0 \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$$

$$x \in [-1, 0] \quad x \in [-1, -\frac{1}{2}]$$

$$x \in [0, 1]$$

$$-|x^2 - 1| < x^2 - x + 1$$

$$-x^2 + 1 < x^2 - x + 1$$

$$2x^2 - x > 0$$

$$x |2x - 1| > 0 \iff x \in (-\infty; 0) \cup \left| \frac{1}{2}, +\infty \right|$$

$$\text{Zusammen } x \in [0, 1], \text{ so } x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$x \in [1, +\infty)$$

$$x^2 - 1 < x^2 - x + 1$$

$$x < 2$$

$$x \in [1, 2]$$

$$0: x \in \left[-2, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$$

$$|x^2 - 2x - 3| + 2|x - 2| < 5$$

$$x^2 - 2x - 3 + 2x - 4 = 5$$

$$x^2 - 7 = 5$$

$$x^2 - 12 = 0$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$x^2 - 2x - 3 + 2x - 4 = -5$$

$$x^2 - 2x - 3 + 2x - 4 = 5 \Rightarrow 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$0: x \in (\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$$

$$N^0 = 3, \dots, 8$$

$$2(x+1)+1=3$$

$$2x+2+1=-3$$

$$2x+2+1-3=0$$

$$2x+2+1+3=0$$

$$2x-2=0$$

$$2x=2$$

$$x=1 \quad x+1=1, x=0$$

$$2x+6=0$$

$$2x=-6$$

$$x=-3$$

$$-6+2+1=3$$

$$-3 \neq 3$$

$$x + 7 = -1$$

$$x = -8$$

$$0; -2; 0$$

$$4 - |x| = 2$$

$$4 - |x| = 2$$

$$|x| = 4 - 2$$

$$|x| = 2$$

$$\text{Für } x = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$\text{Für } x = -2$$

$$4 - |-2|$$

$$4 - 2 = 2$$

$$|x| = 2$$

$$x > 2 \text{ oder } x < -2$$

$$4 - |x| = -2$$

$$-|x| = -6$$

$$|x| = 6$$

$$x > 6 \text{ oder } x < -6$$

$$0; -6, -2, 2, 6$$

$$|x-1| + |x-2| = 1$$

$$x-1 + x-2-1=0$$

$$2x-4=0$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

$$x-1 + x-2+1=0$$

$$2x-2=0$$

$$x=1$$

$$D: [1, 2]$$

$$|2x-1| + |3x+2| = 3-|x|$$

$$2x-1 + 3x+2-3-x=0$$

$$4x-2=0$$

$$4x=2$$

$$x = \frac{2}{4}, x = \frac{1}{2}$$

$$3x+2=0 \quad 3x=-2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$x=0$$

$$x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$$

$$|2x-1| = -(2x-1)$$

$$|3x+2| = -3x-2$$

$$|x| = -x$$

$$|2x-1| + |3x+2| = 3 - |x|$$

$$-(2x-1) - (3x+2) = 3 - (-x)$$

$$-2x+1 - 3x-2 = 3+x$$

$$-5x-1 = 3+x$$

$$-6x = 4$$

$$x = -\frac{2}{3} \notin (-\infty, -\frac{2}{3})$$

$$x \in [-\frac{2}{3}, 0]$$

$$-(2x-1) + (3x+2) = 3 - (-x)$$

$$-2x+1 + 3x+2 = 3+x$$

$$x+3 = 3+x$$

$$0 \cdot x = 0 \quad x \in [-\frac{2}{3}, 0]$$

$$x \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$|x| = x$$

$$-(2x-1) + (3x+2) = 3-x$$

$$|2x-1| = -|2x-1|$$

$$|3x+2| = |3x+2|$$

$$|x| = x$$

$$-2x+1+3x+2 = 3-x$$

$$x+3 = 3-x$$

$$2x+3=0$$

$$x = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$|2x-1| = |2x-1|$$

$$|x| = x$$

$$|2x-1| + |3x+2| = 3-x$$

$$2x-1+3x+2 = 3-x$$

$$5x+1 = 3-x$$

$$6x = 2$$

$$x = \frac{1}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad x$$

$$0: x \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

$$|2x-1| = |2x-1|$$

$$|3x+2| = |3x+2|$$

$$|x| = x$$

$$|2x-1| + |3x+2| = 3-x$$

$$2x-1+3x+2 = 3-x$$

$$5x+1 = 3-x$$

$$6x = 2$$

$$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

$$0, x \in \left[-\frac{2}{3}, 0 \right]$$

$$|2x+3| = |2x^2 - x - 1| + 1$$

$$\begin{cases} 2x+3 + 2x^2 - x - 1 + 1 = 0 \\ 2x+3 - (2x^2 - x - 1) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$2x+3 - 2x^2 + x + 1 + 1 = 0$$

$$x + 2x^2 + 3 = 0$$

$$2x+3 - 2x^2 + x + 1 - 1 = 0$$

$$x + 2x^2 + 3 = 0$$

$$3x - 2x^2 + 3 = 0$$

$$x(1+2x) + 2-3$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = |1|^2 - 4|2||3|$$

$$D = 1 - 24$$

$$D = -23$$

$D < 0$, ~~откуда~~ уравнение не имеет
решений среди действительных чисел

$$1) |2x+3| \geq 0, \text{ То } |2x+3| = 2x+3$$

$$2) |2x+3| < 0, \text{ То } |2x+3| = -2x-3$$

$$3) |2x^2 - x - 1| \geq 0, \text{ То } |2x^2 - x - 1| = 2x^2 - x - 1$$

$$4) |2x^2 - x - 1| < 0, \text{ То } |2x^2 - x - 1| = -2x^2 + x + 1$$

$$1) 2x+3 = 2x^2 - x$$

$$2x^2 - x - (2x+3) = 0$$

$$2x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 2, b = -3, c = -3$$

$$x = \frac{(3 \pm \sqrt{1-3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{8+24}}{4}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{32}}{4}$$

$$21 - 2x - 3 = 2x^2 - x$$

$$2x^2 + x + 2x + 3 = 0$$

$$2x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$x = -23$$

$$D < 0$$

, решений нет

$$3 | 2x + 3 = -2x^2 + x$$

$$-2x^2 - x - 3 = 0$$

$$a = -2; b = -1; c = -3$$

$$x = 1 - 1 \pm \sqrt{1 - 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)} / 2 \cdot (-2)$$

$$x = 1 - 1 \pm \sqrt{1 - 24} / 1 - 4$$

$$x = 1 - 1 \pm \sqrt{1 - 23} / 1 - 4$$

$$\sqrt{1 - 23} = \sqrt{-22}, \text{ так как } \sqrt{\text{отрицательное}}$$

не может быть квадратом полусуммы отрицательного числа в корне, следовательно и уравнение не имеет решений

$$4 | 1 - 2x - 3 = -2x^2 + x$$

$$-2x^2 + x + 2x + 3 = 0$$

$$D = 1 - 3^2 = 4 \cdot 2^2 - 31$$

$$D = 9 - 24$$

$$D = 33$$

$$x = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$$

$$x = (-1 \pm \sqrt{33}) / 2$$

$$x = (3 \pm \sqrt{33}) / 4$$

$$x = (3 + \sqrt{33}) / 4$$

$$x = (3 - \sqrt{33}) / 4$$

$$D: \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$$

$$|2-x| + |3x-1| = 5x - 2|x-4|$$

Случай а;

$$2-x+3x-1=5x-2x+8$$

Случай б/

$$-2+x-3x+1=5x-2x+8$$

Случай в/

$$2-x+3x-1=-5x+2x+8$$

$$|2-x| \geq 0 \quad x = 2$$

$$|3x-1| \geq 0 \quad x = \frac{1}{3}$$

$$|x-4| \geq 0 \quad x = 4$$

$$| = \infty, \frac{1}{3} \cup [\frac{1}{3}, 2) \cup [2, 4] \cup [4, +\infty)$$

$$2-x \quad + \quad - \quad -$$

$$+$$

$$2-4 = -2 \quad 2-4 = -2 \neq 0$$

$$3x-1 \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$3 \cdot \frac{1}{2} - 1$$

$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$4x-4 \quad - \quad - \quad + \quad +$$

1 так как

это, конечно же

меньше 4х

так как тут

4 не больше 4
в разное

Случай 2

$$|2-x| - |3x-1| = 5x + 2|x-4|$$

$$2-x-3x+1 = 5x+2x-8$$

$$-4x+3 = 7x-8$$

$$-4x-7x = -8-3$$

$$-11 < -11$$

$$x > 1 \notin (-\infty, \frac{1}{3}]$$

Случай 2. $x \in [\frac{1}{3}, 2]$

$$|2-x| + |3x-7| = 5x + 2|x-4|$$

$$2-x+3x-7 = 5x+2x-8$$

$$2x-5 = 7x-8$$

$$2x-7x = -8+5$$

$$-5x = -3$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5} \in (\frac{1}{3}, 2) \rightarrow +$$

Случай 3. $x \in [2, 4]$

$$-(2-x) + (3x-7) = 5x + 2(x-4)$$

$$-2+x+3x-7 = 5x+2x-8$$

$$4x-9 = 7x-8$$

$$4x-7x = -8+9$$

$$-3x = 1$$

$$3x = -\frac{1}{3} \notin [2, 4] \rightarrow x$$

Случай 4. $x \in [4, +\infty)$

$$|2-x| = -|2-x|$$

$$-|2-x| + |3x-1| = 5x - 2(x-4)$$

$$-2+x+3x-1 = 5x-2x+8$$

$$4x-3 = 3x+8$$

$$4x-3x = 8+3$$

$$x = 11 \in [4, +\infty) \quad +$$

$$O: \frac{8}{5}, 11$$