МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский Авиационный Институт»
(Национальный Исследовательский Университет)

Институт: №8 «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовая работа
по курсу «Фундаментальная информатика»Iсеместр
Задание 3
«Вещественный тип. Приближенные вычисления. Табулирование функций»

Группа	М8О-109Б-22
Студент	Гиголаев А.А.
Преподаватель	Сысоев М.А.
Оценка	
Дата	

Москва, 2022

Постановка задачи

Составить программу на Си, которая печатает таблицу значений элементарной функции, вычисленной двумя способами: по формуле Тейлора и с помощью встроенных функций языка программирования. В качестве аргументов таблицы взять точки разбиения отрезка [a, b] на n равных частей (n+1 точка включая концы отрезка), находящихся в рекомендованной области хорошей точности формулы Тейлора. Вычисления по формуле Тейлора проводить по экономной в сложностном смысле схеме с точностью $\varepsilon * 10^k$, где ε - машинное эпсилон аппаратно реализованного вещественного типа для данной ЭВМ, а k – экспериментально подбираемый коэффициент, обеспечивающий приемлемую сходимость. Число итераций должно ограничиваться сверху числом порядка 100. Программа должна сама определять машинное ε и обеспечивать корректные размеры генерируемой таблицы.

Вариант 9:

Ряд Тэйлора:

$$1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Функция:

$$\operatorname{ch} x$$

Значения a и b: 0.1 и 0.6

Теоретическая часть

Формула Тейлора — формула разложения функции в бесконечную сумму степенных функций. Формула широко используется в приближённых вычислениях, так как позволяет приводить трансцендентных функций к более простым. Сама она является следствием теоремы Лагранжа о среднем значении дифференцируемой функции. В случае a=0 формула называется рядом Маклорена.

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Машинное эпсилон — числовое значение, меньше которого невозможно задавать относительную точность для любого алгоритма, возвращающего вещественные числа. Абсолютное значение для машинного эпсилон зависит от разрядности сетки применяемой ЭВМ и от разрядности используемых при расчёте чисел. Формально это машинное эпсилон определяют как число, удовлетворяющее равенству $1 + \varepsilon = 1$. Фактически, два отличных от нуля числа являются равными с точки зрения машинной арифметики, если их модуль разности меньше или не превосходит машинное эпсилон.

В языке Си машинные эпсилон определено для следующих типов: float – $1.19 * 10^{-7}$, double – $2.20 * 10^{-16}$, long double – $1.08 * 10^{-19}$.

Описание алгоритма

Рассмотрим алгоритм решения. Сперва нужно найти машинное эпсилон, на котором будет основываться точность вычисления. Это можно сделать, просто деля 1 на 2.

Для каждой N+1 строки нужно просуммировать i членов формулы Тейлора, пока $|A_1-A_2|> \varepsilon$. Для этого просто ищем каждый новый член из формулы Тэйлора и суммируем с результатом

Использованные в программе переменные

Название переменной	Тип переменной	Смысл переменной
n	int	Кол-во разбиений отрезка
iterat	int	Глубина ряда Тейлора
tal_ans	double	Сумма ряда Тейлора
tal_ch	double	Член ряда Тейлора
func	double	Значение функции
a	double	Левая граница отрезка
b	double	Правая граница отрезка
x	double	Шаг
eps	long double	Вычисление машинного епсилон

Исходный код программы:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

//функция факториала
long double fac_num (long double n)
{
   long double fa;
   for (fa = 1; n > 1; fa *= (n--)); return fa;
}

int main()
{
   int n, iterat;
   double tal_ans, func, tal_ch, a = 0.1, b = 0.6, x = 0.0;
   long double eps = 1.0l;
   //Вычисляем машинный епсилон
   while (2.0l + eps / 2.0l > 2.0l) {
      eps /= 2.0l;
   }
   printf("Machine eps double = %.16Le\n", eps); printf("Write n: \n");
   scanf("%d", &n);
   printf("n = %d, \n", n);
   printf("Table of Teylor values and stand f(x) = cos(x)\n");

   printf("            \n");
   printf("| x   |    sum     |           f(x)      |count iter |\n");

   printf("            \n");
   for (int i = 1; i <= n; i++) {
      iterat = 1;
      tal_ch = 1;
      func = cosh(x);
      tal_ans = 1;
      while (fabs(tal_ch) > eps && iterat < 100) {
      tal_ch = (pow(x, 2*iterat))/fac_num(2*iterat);
      tal_ans += tal_ch;
      iterat++;
   }
   printf("| %.3f | %.18lf | %.18lf |         %d       |\n", x, tal_ans, func, iterat);

   printf("                        \n");
   x += fabs(a - b) / n;
}
```

```
return 0;
}
```

Входные данные

Единственная строка содержит два целых числа N (0≤N≤100) – число разбиений отрезка на равные части, K (0≤K≤16) — коэффициент для вычисления точности формулы Тейлора.

Выходные данные

Программа должна вывести значение машинного эпсилон, а затем N+1 строку.

В каждой строке должно быть значение x, для которого вычисляется функция, число A_1 — значение, вычисленное с помощью формулы Тейлора, A_2 – значение, вычисленное с помощью встроенных функций языка, i – количество итерация, требуемых для вычисления, и Δ – разница значений A_1 и A_2 по модулю. A_1, A_2 и Δ должны быть выведены с точностью K знаков после запятой.

Протокол исполнения и тесты

Тест №1

Ввод:

5

Вывод:

```
Machine eps double = 2.1684043449710089e-19
Write n:
5
n = 5,
Table of Teylor values and stand f(x) = cos(x)

-------------------------------------------------------------------
| x     |        sum            |         f(x)          |count iter |
-------------------------------------------------------------------
| 0.000 | 1.000000000000000000 | 1.000000000000000000 | 2          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.100 | 1.005004168055803282 | 1.005004168055803504 | 7          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.200 | 1.020066755619075893 | 1.020066755619075893 | 8          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.300 | 1.045338514128860474 | 1.045338514128860474 | 9          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.400 | 1.081072371838454949 | 1.081072371838454949 | 9          |
-------------------------------------------------------------------
```

Тест №2

Ввод:

10

Вывод:

```
Machine eps double = 2.1684043449710089e-19
Write n:
10
n = 10,
Table of Teylor values and stand f(x) = cos(x)

-------------------------------------------------------------------
| x     |         sum           |          f(x)          |count iter |
-------------------------------------------------------------------
| 0.000 | 1.0000000000000000000 | 1.0000000000000000000 | 2         |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.050 | 1.0012502604383688844 | 1.0012502604383690066 | 6         |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.100 | 1.0050041680558032820 | 1.0050041680558035040 | 7         |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.150 | 1.0112711095766704350 | 1.0112711095766704350 | 8         |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.200 | 1.0200667556190758930 | 1.0200667556190758930 | 8         |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.250 | 1.0314130998795734140 | 1.0314130998795731920 | 8         |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.300 | 1.0453385141288604740 | 1.0453385141288604740 | 9         |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.350 | 1.0618778191559856690 | 1.0618778191559852250 | 9         |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.400 | 1.0810723718384549490 | 1.0810723718384549490 | 9         |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.450 | 1.1029701685559714090 | 1.1029701685559709650 | 9         |
-------------------------------------------------------------------
```

Тест №3

Ввод:

15

Вывод:

```
Machine eps double = 2.1684043449710089e-19
Write n:
15
n = 15,
Table of Teylor values and stand f(x) = cos(x)

-------------------------------------------------------------------
| x     |          sum          |          f(x)         |count iter |
-------------------------------------------------------------------
| 0.000 | 1.0000000000000000000 | 1.0000000000000000000 | 2          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.033 | 1.0005556069977789893 | 1.0005556069977790115 | 6          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.067 | 1.0022223045389432077 | 1.0022223045389432077 | 7          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.100 | 1.0050041680558035282 | 1.0050041680558035504 | 7          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.133 | 1.0089020654193350026 | 1.0089020654193350026 | 7          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.167 | 1.0139210688781300161 | 1.0139210688781299939 | 8          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.200 | 1.0200667556190755893 | 1.0200667556190755893 | 8          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.233 | 1.0273459548152916673 | 1.0273459548152916451 | 8          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.267 | 1.0357667552148004439 | 1.0357667552148004439 | 8          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.300 | 1.0453385141288600474 | 1.0453385141288600474 | 9          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.333 | 1.0560718678299399670 | 1.0560718678299399448 | 9          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.367 | 1.0679787433708889383 | 1.0679787433708889161 | 9          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.400 | 1.0810723718384454949 | 1.0810723718384454949 | 9          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.433 | 1.0953673030558841957 | 1.0953673030558842179 | 9          |
-------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------------
| 0.467 | 1.1108794217506855658 | 1.1108794217506855880 | 10         |
-------------------------------------------------------------------
```

Тест №4

Ввод:

3

Вывод:

```
Machine eps double = 2.1684043449710089e-19
Write n:
3
n = 3,
Table of Teylor values and stand f(x) = cos(x)

---------------------------------------------------------------------
| x     |         sum           |          f(x)          |count iter |
---------------------------------------------------------------------
| 0.000 | 1.000000000000000000 | 1.000000000000000000 | 2         |
---------------------------------------------------------------------
---------------------------------------------------------------------
| 0.167 | 1.013921068878130161 | 1.013921068878129939 | 8         |
---------------------------------------------------------------------
---------------------------------------------------------------------
| 0.333 | 1.056071867829939670 | 1.056071867829939448 | 9         |
---------------------------------------------------------------------
```

Вывод

В работе описано определение машинного эпсилон, приведены его значения для разных переменных языка Си, описана формула Тейлора и составлен алгоритм реализации вычисления значения функции с заданной точностью для заданного числа точек на отрезке. На основе алгоритма составлена программа на языке Си, проведено её тестирование на различных тестах, составлен протокол исполнения программы. В целом, работа понравилась. Приятно применять знания из других областей для решения какой-либо задачи по программированию.

Список литературы

1. Машинный ноль – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Машинный_ноль
2. Ряд Тейлора – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Ряд_Тейлора