TEMA 5

SOLUCIÓN DE

LOS PROBLEMAS

PROBLEMA 1

Encuentra la función polinómica de primer grado $P(x)$ cuyo valor y pendiente coinciden con el valor y pendiente de $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$ en el punto $c = 8$.

Solución:

Utilizaremos la función polinómica $P_1(x) = a_0 + a_1 x$, cuya derivada es $P_1'(x) = a_1$.

Calculamos los valores $f(8)$ y $f'(8)$:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = 4x^{-1/3} \implies f'(x) = -\frac{4}{3}x^{-4/3} = \frac{-4}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{-4}{3x\sqrt[3]{x}}$$

$$f(8) = \frac{4}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4}{2} = 2 \qquad f'(8) = \frac{-4}{3\cdot 8\cdot \sqrt[3]{8}} = \frac{-4}{3\cdot 8\cdot 2} = -\frac{1}{12}$$

Igualamos los valores obtenidos:

$$\left.\begin{array}{l} P_1(8) = f(8) \implies a_0 + 8a_1 = 2 \\ P_1'(8) = f'(8) \implies a_1 = -\dfrac{1}{12} \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} a_0 = \dfrac{8}{3} \\ a_1 = -\dfrac{1}{12} \end{array}\right\} \implies P_1(x) = \frac{8}{3} - \frac{1}{12}x$$

PROBLEMA 2

Determina la función polinómica de primer grado $P(x)$ cuyo valor y pendiente coinciden con el valor y pendiente de $f(x) = \tan(x)$ en el punto $c = \dfrac{\pi}{4}$.

Solución:

Utilizaremos la función polinómica $P_1(x) = a_0 + a_1 x$, cuya derivada es $P_1'(x) = a_1$.

Calculamos los valores $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, recordando que $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

Igualamos los valores obtenidos:

$$\left.\begin{array}{l} P_1\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \implies a_0 + a_1\dfrac{\pi}{4} = 1 \\ P_1'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \implies a_1 = 2 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} a_0 = 1 - \dfrac{\pi}{2} \\ a_1 = 2 \end{array}\right\} \implies P_1(x) = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + 2x$$

PROBLEMA 3

Encuentra el polinomio de Maclaurin de grado 3 para la función $f(x) = e^{-x}$.

Solución:

El polinomio de Maclaurin de grado 3 para la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Al tratarse de un polinomio de grado 3, debemos calcular las tres primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = e^{-x} \implies f(0) = 1$
- $f'(x) = -e^{-x} \implies f'(0) = -1$
- $f''(x) = e^{-x} \implies f''(0) = 1$
- $f'''(x) = -e^{-x} \implies f'''(0) = -1$

Por lo tanto, el polinomio de Maclaurin de grado 3 pedido es:

$$P_3(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 \implies \boxed{P_3(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}$$

PROBLEMA 4

Calcula el polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función $f(x) = xe^x$.

Solución:

El polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv)}(0)}{4!}x^4$$

Al tratarse de un polinomio de grado 4, debemos calcular las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = xe^x \implies f(0) = 0$
- $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x \implies f'(0) = 1$
- $f''(x) = e^x + e^x + xe^x = (2+x)e^x \implies f''(0) = 2$
- $f'''(x) = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x \implies f'''(0) = 3$
- $f^{iv)}(x) = e^x + (3+x)e^x = (4+x)e^x \implies f^{iv)}(0) = 4$

Por lo tanto, el polinomio de Maclaurin de grado 4 pedido es:

$$P_4(x) = 0 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{4}{4!}x^4 \implies \boxed{P_4(x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4}$$

PROBLEMA 5

Determina el polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Solución:

El polinomio de Maclaurin de grado 4 de la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv)}(0)}{4!}x^4$$

Al tratarse de un polinomio de grado 4, debemos calcular las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = \dfrac{x}{x+1} = x(x+1)^{-1} \implies f(0) = 0$
- $f'(x) = \dfrac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2} \implies f'(0) = 1$
- $f''(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3} = -2(x+1)^{-3} \implies f''(0) = -2$
- $f'''(x) = \dfrac{6}{(x+1)^4} = 6(x+1)^{-4} \implies f'''(0) = 6$
- $f^{iv)}(x) = \dfrac{-24}{(x+1)^5} = -24(x+1)^{-5} \implies f^{iv)}(0) = -24$

Por lo tanto, el polinomio de Maclaurin de grado 4 pedido es:

$$P_4(x) = 0 + x - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 - \frac{24}{4!}x^4 \implies \boxed{P_4(x) = x - x^2 + x^3 - x^4}$$

PROBLEMA 6

Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en el punto $c = 1$ para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución:

El polinomio de Taylor de grado 4 alrededor del punto $c = 1$ para la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{iv)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

Al tratarse de un polinomio de grado 4, debemos calcular las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \Longrightarrow f(1) = 1$
- $f'(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2} = \Longrightarrow f'(1) = -1$
- $f''(x) = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3} \Longrightarrow f''(1) = 2$
- $f'''(x) = -6x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4} \Longrightarrow f'''(1) = -6$
- $f^{iv)}(x) = 24x^{-5} = \dfrac{24}{x^5} \Longrightarrow f^{iv)}(1) = 24$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de grado 4 pedido es:

$$P_4(x) = 1 - (x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_4(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4}$$

PROBLEMA 7

Determina el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en el punto $c = 1$ para $f(x) = \mathrm{Ln}(x)$.

Solución:

El polinomio de Taylor de grado 4 alrededor del punto $c = 1$ para la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{iv)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

Al tratarse de un polinomio de grado 4, debemos calcular las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = \mathrm{Ln}(x) \implies f(1) = 0$
- $f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \implies f'(1) = 1$
- $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2} \implies f''(1) = -1$
- $f'''(x) = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3} \implies f'''(1) = 2$
- $f^{iv)}(x) = -6x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4} \implies f^{iv)}(1) = -6$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de grado 4 de $f(x)$ pedido es:

$$P_4(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 \implies$$

$$\implies \boxed{P_4(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4}$$

PROBLEMA 8

Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 para la función $f(x) = x^2 \cos(x)$ centrado en el punto $c = \pi$.

Solución:

El polinomio de Taylor de grado 2 alrededor del punto $c = \pi$ para la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_2(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2$$

Al tratarse de un polinomio de grado 2, debemos calcular las dos primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = x^2 \cos(x) \implies f(\pi) = -\pi^2$
- $f'(x) = 2x\cos(x) - x^2 \operatorname{sen}(x) \implies f'(\pi) = -2\pi$
- $f''(x) = 2\big(\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)\big) - \big(2x\operatorname{sen}(x) + x^2\cos(x)\big) = (2-x^2)\cos(x) - 4x\operatorname{sen}(x) \implies$
  $\implies f''(\pi) = \pi^2 - 2$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x)$ pedido es:

$$\boxed{P_2(x) = -\pi^2 - 2\pi(x-\pi) + \frac{(\pi^2-2)}{2}(x-\pi)^2}$$

PROBLEMA 9

Determina el polinomio de Maclaurin de grado 3 de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Solución:

El polinomio de Maclaurin de grado 3 para la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Al tratarse de un polinomio de grado 3, debemos calcular las tres primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \implies f(0) = 1$
- $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = -2x(1+x^2)^{-2} \implies f'(0) = 0$
- $f''(x) = -\dfrac{2}{(1+x^2)^2} + \dfrac{8x^2}{(1+x^2)^3} = -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3} \implies f''(0) = -2$
- $f'''(x) = \dfrac{8x}{(1+x^2)^3} + \dfrac{16x}{(1+x^2)^3} - \dfrac{48x^3}{(1+x^2)^4} = \dfrac{24x}{(1+x^2)^3} - \dfrac{48x^3}{(1+x^2)^4} =$
  $= 24x(1+x^2)^{-3} - 48x^3(1+x^2)^{-4} \implies f'''(0) = 0$

Por lo tanto, el polinomio de Maclaurin de grado 4 pedido es:

$$P_3(x) = 1 + 0 - \frac{2}{2!}x^2 + 0 \implies \boxed{P_3(x) = 1 - x^2}$$

PROBLEMA 10

Calcula el polinomio de Maclaurin de grado 2 de la función $f(x) = e^x \operatorname{Ln}(1-x)$.

Solución:

El polinomio de Maclaurin de grado 2 para la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

Al tratarse de un polinomio de grado 2, debemos calcular las dos primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = e^x \operatorname{Ln}(1-x) \implies f(0) = 0$
- $f'(x) = e^x \operatorname{Ln}(1-x) - e^x \dfrac{1}{1-x} = e^x \left(\operatorname{Ln}(1-x) - (1-x)^{-1}\right) \implies f'(0) = -1$
- $f''(x) = e^x \left(\operatorname{Ln}(1-x) - (1-x)^{-1}\right) + e^x \left(-(1-x)^{-1} - (1-x)^{-2}\right) =$

$$= e^x \left(\operatorname{Ln}(1-x) - \frac{2}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) \implies f''(0) = -3$$

Por lo tanto, el polinomio de Maclaurin de grado 2 de $f(x)$ pedido es:

$$P_2(x) = 0 - x - \frac{3}{2!}x^2 \implies \boxed{P_2(x) = -x - \frac{3}{2}x^2}$$

PROBLEMA 11

Determina el desarrollo de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = (1+e^x)^2$ en $c = 0$.

Solución:

El polinomio de Taylor de grado 3 alrededor del punto $c = 0$ para la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Al tratarse de un polinomio de grado 3, debemos calcular las tres primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = (1+e^x)^2 \implies f(0) = 4$
- $f'(x) = 2(1+e^x)e^x = 2e^x + 2e^{2x} \implies f'(0) = 4$
- $f''(x) = 2e^x + 4e^{2x} \implies f''(0) = 6$
- $f'''(x) = 2e^x + 8e^{2x} \implies f''(0) = 10$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x)$ es:

$$P_3(x) = 4 + 4x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{10}{3!}x^3 \implies \boxed{P_3 = 4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3}$$

Por su parte, el resto de Lagrange para este problema tiene la siguiente expresión:

$$R(x) = \frac{f^{iv)}(z)}{4!}x^4, \quad \text{donde } z \in (0,x) \text{ o } z \in (x,0)$$

Vamos a calcular la cuarta derivada de la función:

$$f^{iv)}(x) = 2e^x + 16e^{2x}$$

Con esta información, podemos construir el resto de Lagrange:

$$\boxed{R(x) = \frac{2e^z + 16e^{2z}}{24}x^4 = \frac{e^z + 8e^{2z}}{12}x^4}$$

A partir de estos elementos, el desarrollo de Taylor tiene la siguiente forma, donde $z \in (0,x)$ o bien $z \in (x,0)$:

$$f(x) = P_2(x) + R(x) = \underbrace{4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3}_{P_2(x)} + \underbrace{\frac{e^z + 8e^{2z}}{24}x^4}_{R(x)}$$

PROBLEMA 12

Calcula el desarrollo de Maclaurin de grado 3 de la función $f(x) = e^x \mathrm{Ln}(1-x)$.

Solución:

El polinomio de Maclaurin de grado 3 para la función $f(x)$ tiene la siguiente expresión:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Al tratarse de un polinomio de grado 3, debemos calcular las tres primeras derivadas de $f(x)$:

- $f(x) = e^x \mathrm{Ln}(1-x) \implies f(0) = 0$
- $f'(x) = e^x \mathrm{Ln}(1-x) - e^x \dfrac{1}{1-x} = e^x \left(\mathrm{Ln}(1-x) - (1-x)^{-1}\right) \implies f'(0) = -1$
- $f''(x) = e^x \left(\mathrm{Ln}(1-x) - (1-x)^{-1}\right) + e^x \left(-(1-x)^{-1} - (1-x)^{-2}\right) =$

  $$= e^x \left(\mathrm{Ln}(1-x) - \frac{2}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) \implies f''(0) = -3$$
- $f'''(x) = e^x \left(\mathrm{Ln}(1-x) - 2(1-x)^{-1} - (1-x)^{-2}\right) + e^x \left(-(1-x)^{-1} - 2(1-x)^{-2} - 2(1-x)^{-3}\right) =$

  $$= e^x \left(\mathrm{Ln}(1-x) - \frac{3}{1-x} - \frac{3}{(1-x)^2} - \frac{2}{(1-x)^3}\right) \implies f'''(0) = -8$$

Por lo tanto, el polinomio de Maclaurin de grado 3 de $f(x)$ pedido es:

$$P_2(x) = 0 - x - \frac{3}{2!}x^2 - \frac{8}{3!}x^3 \implies \boxed{P_2(x) = -x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3}$$

Por su parte, el resto de Lagrange para este problema tiene la siguiente expresión:

$$R(x) = \frac{f^{iv)}(z)}{4!}x^4, \quad z \in (0,x) \text{ o } z \in (x,0)$$

Vamos a calcular la cuarta derivada de la función:

$$f^{iv)}(x) = e^x \left(\mathrm{Ln}(1-x) - 3(1-x)^{-1} - 3(1-x)^{-2} - 2(1-x)^{-3}\right) +$$

$$+ e^x \left(-(1-x)^{-1} - 3(1-x)^{-2} - 6(1-x)^{-3} - 6(1-x)^{-4}\right) =$$

$$= e^x \left(\mathrm{Ln}(1-x) - \frac{4}{1-x} - \frac{6}{(1-x)^2} - \frac{8}{(1-x)^3} - \frac{6}{(1-x)^4}\right)$$

Con esta información, podemos construir el resto de Lagrange:

$$\boxed{R(x) = \frac{e^z \left(\mathrm{Ln}(1-z) - \dfrac{4}{1-z} - \dfrac{6}{(1-z)^2} - \dfrac{8}{(1-z)^3} - \dfrac{6}{(1-z)^4}\right)}{24}x^4}$$

Partiendo de estos elementos, el desarrollo de Maclaurin tiene la siguiente forma, donde $z \in (0,x)$ o bien $z \in (x,0)$:

$$f(x) = P_3(x) + R(x) = \underbrace{-x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3}_{P_3(x)} + \underbrace{\frac{e^z\left(\mathrm{Ln}(1-z) - \frac{4}{1-z} - \frac{6}{(1-z)^2} - \frac{8}{(1-z)^3} - \frac{6}{(1-z)^4}\right)}{24}x^4}_{R(x)}$$

PROBLEMA 13

Utiliza el teorema de Taylor con el fin de obtener una cota superior para el error de la siguiente aproximación, y calcula a continuación el valor exacto del error:

$$\cos(0.3) \approx 1 - \frac{(0.3)^2}{2!} + \frac{(0.3)^4}{4!}$$

Solución:

Para obtener una cota superior del error en la aproximación de $\cos(0.3)$, podemos utilizar el desarrollo de Taylor. Por la expresión del enunciado es evidente que vamos a emplear un polinomio de Taylor de grado 4 centrado en $c = 0$. En esta situación, el error de la aproximación viene dado por el resto de Lagrange, que tiene la siguiente forma, donde $z \in (0, 0.3)$:

$$R(x) = \frac{f^{v)}(z)}{5!}x^5$$

La quinta derivada de la función $\cos(x)$ es $f^{v)}(x) = -\operatorname{sen}(x)$, por lo que el resto de Lagrange es:

$$R(x) = \frac{-\operatorname{sen}(z)}{120}x^5$$

A continuación vamos a obtener una cota superior del error cometido al aproximar $\cos(0.3)$ mediante la siguiente cadena de desigualdades:

$$\text{Error real} = |f(0.3) - P_4(0.3)| = |R(0.3)| = \left|\frac{-\operatorname{sen}(z)}{120}(0.3)^5\right| =$$

$$= \frac{|\operatorname{sen}(z)|}{120}(0.3)^5 \leqslant \frac{1}{120}(0.3)^5 = 2.025 \cdot 10^{-5} = \text{Error máximo}$$

Por lo tanto, la cota superior del error que se cometería al aproximar $\cos(0.3)$ mediante el polinomio de Taylor de $f(x) = \cos(x)$ de grado 4 centrado en $c = 0$ es $2.025 \cdot 10^{-5}$.

Vamos a comprobar ahora el valor exacto del error:

$$\text{Error real} = \left|f(0.3) - P_4(0.3)\right| = \left|\cos(0.3) - \left(1 - \frac{(0.3)^2}{2} + \frac{(0.3)^4}{24}\right)\right| \approx$$

$$\approx \left|0.9553365 - 0,9553375\right| \approx 1.01087 \cdot 10^{-6} < 2.025 \cdot 10^{-5} = \text{Error máximo}$$

PROBLEMA 14

Determina el grado del polinomio de Maclaurin necesario para que el error en la aproximación de la función $f(x) = e^x$ en el valor $x = 0.6$ sea menor que 0.001.

Solución:

Para determinar el grado del polinomio de Maclaurin requerido para que el error en la aproximación de la función $f(x) = e^x$ en $x = 0.6$ sea menor que 10^{-3} debemos comparar el valor absoluto del resto de Lagrange con el error máximo indicado.

Puesto que todas las derivadas de $f(x) = e^x$ tienen la misma expresión y por ello el mismo valor en el punto $c = 0$, podemos escribir el desarrollo de Maclaurin de grado n de la siguiente manera, donde $z \in (0, 0.6)$:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R(x)}$$

$$= \underbrace{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R(x)}$$

Vamos a analizar en más detalle la condición que hay que imponer al valor absoluto del resto $R(x)$:

$$\text{Error real} = |f(0.6) - P_n(0.6)| = |R(0.6)| = \left|\frac{e^z}{(n+1)!}(0.6)^{n+1}\right| \overset{z\in(0,0.6)}{<}$$

$$\overset{z\in(0,0.6)}{<} \left|\frac{e}{(n+1)!}(0.6)^{n+1}\right| < \left|\frac{3}{(n+1)!}(0.6)^{n+1}\right| < 10^{-3} = \text{Error máximo}$$

En la cadena de desigualdades anteriores hemos supuesto primero que, dado que e^z es una función creciente, el valor de e^z para cualquier $z \in (0, 0.6)$ es menor que e. A continuación hemos aproximado el valor del número e considerando que $e < 3$.

Para obtener el grado más pequeño del polinomio de Maclaurin que nos aseguraría un error menor del requerido debemos ir probando uno a uno diferentes valores del parámetro n.

$\boxed{n=1}$ $$\left|\frac{3}{(n+1)!}(0.6)^{n+1}\right| = \frac{3}{2!}(0.6)^2 = \frac{3}{2}(0.6)^2 = 0.54 > 10^{-3} \quad \times$$

$\boxed{n=2}$ $$\left|\frac{3}{(n+1)!}(0.6)^{n+1}\right| = \frac{3}{3!}(0.6)^3 = \frac{3}{6}(0.6)^3 = 0.108 > 10^{-3} \quad \times$$

$\boxed{n=3}$ $$\left|\frac{3}{(n+1)!}(0.6)^{n+1}\right| = \frac{3}{4!}(0.6)^4 = \frac{3}{24}(0.6)^4 = 0.0162 > 10^{-3} \quad \times$$

$\boxed{n=4}$ $$\left|\frac{3}{(n+1)!}(0.6)^{n+1}\right| = \frac{3}{5!}(0.6)^5 = \frac{3}{120}(0.6)^5 = 0.001944 > 10^{-3} \quad \times$$

$\boxed{n=5}$ $$\left|\frac{3}{(n+1)!}(0.6)^{n+1}\right| = \frac{3}{6!}(0.6)^6 = \frac{3}{720}(0.6)^6 = 0.0001944 < 10^{-3} \quad \checkmark$$

El valor mínimo de n que satisface la desigualdad es $n = 5$, por lo que debemos utilizar $P_5(0.6)$ para aproximar el valor de $e^{0.6}$.

PROBLEMA 15

Calcula $\sqrt[3]{30}$ con un error menor que 10^{-5} utilizando el desarrollo de Taylor adecuado.

Solución:

Para resolver el problema necesitamos elegir cuatro elementos: una función $f(x)$, un valor $x = c$ alrededor del cual generar la aproximación, el grado n del polinomio interpolador y el valor $x = x_0$ a utilizar en el polinomio de forma que consideremos $P_n(x_0) \approx f(x_0)$.

En nuestra elección debemos tener en cuenta que, en general, cuando más cerca se encuentren los valores de c y x_0, menor será el grado necesario para conseguir una determinada cota de error. Además, al elegir el valor c hay que asegurarse de que podremos obtener tanto la imagen como las derivadas de la función en c.

Por ejemplo, podríamos elegir $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $c = 1$, pero entonces tendríamos que $x_0 = 30$, siendo la distancia entre c y x_0 demasiado grande. En su lugar, haremos lo siguiente:

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27 \cdot \frac{10}{9}} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} \implies f(x) = 3\sqrt[3]{1+x}$$

De esta manera calcularemos el desarrollo de Taylor de $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ alrededor de $c = 0$ y calcularemos la aproximación en $x_0 = \frac{1}{9}$, siendo la distancia entre $c = 0$ y $x_0 = \frac{1}{9}$ convenientemente pequeña.

Vamos a calcular la imagen y las primeras derivadas de $f(x)$ en $c = 0$:

- $f(x) = 3\sqrt[3]{1+x} = 3(1+x)^{1/3} \implies f(0) = 3$
- $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} = (1+x)^{-2/3} \implies f'(0) = 1$
- $f''(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+x)^5}} = -\dfrac{2}{3}(1+x)^{-5/3} \implies f''(0) = -\dfrac{2}{3}$
- $f'''(x) = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{(1+x)^8}} = \dfrac{10}{9}(1+x)^{-8/3} \implies f'''(0) = \dfrac{10}{9}$
- $f^{iv)}(x) = -\dfrac{80}{27\sqrt[3]{(1+x)^{11}}} = -\dfrac{80}{27}(1+x)^{-11/3} \implies f^{iv)}(0) = -\dfrac{80}{27}$

Con estas derivadas podemos crear el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en $c = 0$ para $f(x)$:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv)}(0)}{4!}x^4 =$$

$$= 3 + x - \frac{2}{3}\frac{1}{2!}x^2 + \frac{10}{9}\frac{1}{3!}x^3 - \frac{80}{27}\frac{1}{4!}x^4 = 3 + x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{27}x^3 - \frac{10}{81}x^4$$

A continuación, vamos a generar el resto de Lagrange asociado a este polinomio, para lo que necesitaremos la quinta derivada de $f(x)$:

$$f^{v)}(x) = \frac{880}{81}(1+x)^{-14/3} = \frac{880}{81\sqrt[3]{(1+x)^{14}}} \implies R(x) = \frac{f^{v)}(z)}{5!}x^5 = \frac{\dfrac{880}{81\sqrt[3]{(1+z)^{14}}}}{120}x^5$$

Ahora vamos a operar con esa expresión para comprobar si efectivamente la cota superior del error es inferior a 10^{-5}.

$$\text{Error real} = \left|f\left(\frac{1}{9}\right) - P_5\left(\frac{1}{9}\right)\right| = \left|R\left(\frac{1}{9}\right)\right| = \left|\frac{\dfrac{880}{81\sqrt[3]{(1+z)^{14}}}}{120}\left(\frac{1}{9}\right)^5\right| =$$

$$= \frac{880}{120\cdot 81\sqrt[3]{(1+z)^{14}}}\left(\frac{1}{9}\right)^5 \overset{z\in(0,1/9)}{<} \frac{880}{120\cdot 81}\left(\frac{1}{9}\right)^5 \approx 1.53\cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$

Puesto que hemos conseguido asegurar que el error real será menor de 10^{-5}, ya podemos calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{30}$:

$$\sqrt[3]{30} = f\left(\frac{1}{9}\right) \approx P_4\left(\frac{1}{9}\right) = 3 + \left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{5}{27}\left(\frac{1}{9}\right)^3 - \frac{10}{81}\left(\frac{1}{9}\right)^4 \approx 3.10723109$$

Comprobamos por curiosidad el error real que habríamos cometido al utilizar esta aproximación:

$$\text{Error real} = \left|\sqrt[3]{30} - P_4\left(\frac{1}{9}\right)\right| \approx 1.41\cdot 10^{-6} < 1.53\cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$

Como era de esperar, el error real cometido no solo es menor de 10^{-5}, sino que también es menor que la cota superior del error que habíamos obtenido, $1.53\cdot 10^{-6}$.

PROBLEMA 16

Calcula el siguiente límite utilizando polinomios de Taylor.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\mathrm{Ln}(1+x)+\dfrac{x^2}{2}-x\right)^{10}}{\left(e^x-x-1\right)^{15}}$$

Solución:

Para resolver este ejercicio vamos a considerar los siguientes polinimios de Maclaurin:

$$f_1(x)=\mathrm{Ln}(1+x)\longrightarrow P_{f_1}(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\cdots$$

$$f_2(x)=e^x\longrightarrow P_{f_2}(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots$$

A continuación vamos a sustituir las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ por sus correspondientes polinomios:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{2}-x\right)^{10}}{\left(e^x-x-1\right)^{15}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\left(\cancel{x}-\cancel{\dfrac{x^2}{2}}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\right)+\cancel{\dfrac{x^2}{2}}-\cancel{x}\right)^{10}}{\left(\left(\cancel{1}+\cancel{x}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots\right)-\cancel{x}-\cancel{1}\right)^{15}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\right)^{10}}{\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots\right)^{15}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{4}+\cdots\right)\right)^{10}}{\left(x^2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{6}+\cdots\right)\right)^{15}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^{30}}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{4}+\cdots\right)^{10}}{\cancel{x^{30}}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{6}+\cdots\right)^{15}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{4}+\cdots\right)^{10}}{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{6}+\cdots\right)^{15}}=\frac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}}=\frac{2^{15}}{3^{10}}=\frac{32768}{59049}\approx 0.5549$$

PROBLEMA 17

Demuestra que, para todo $x \geqslant 0$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1+\frac{x}{2}$$

Solución:

Para demostrar que para todo $x \geqslant 0$ se cumple la desigualdad del enunciado vamos a utilizar primero polinomios de Taylor para aproximar la función $f(x)=\sqrt{1+x}$ alrededor de $c=0$. Para ello, calcularemos el valor de la imagen y de las primeras derivadas en $c=0$:

- $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}} \implies f(0)=1$
- $f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \implies f'(0)=\frac{1}{2}$
- $f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}} \implies f''(0)=-\frac{1}{4}$
- $f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}} \implies f'''(0)=\frac{3}{8}$

Si utilizáramos el desarrollo de Taylor de primer grado centrado en $c=0$, obtendríamos la siguiente igualdad:

$$f(x)=P_1(x)+R_1(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)+R_1(x) \;\text{ donde } R_1(x)=-\frac{1}{8\sqrt{(1+z)^3}}x^2 \;\text{ y }\; z\in(0,x)$$

En comparación, si utilizáramos el desarrollo de Taylor de segundo grado centrado en $c=0$, obtendríamos esta igualdad:

$$f(x)=P_2(x)+R_2(x)=\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)+R_2(x) \;\text{ donde } R_2(x)=\frac{1}{16\sqrt{(1+z)^5}}x^3 \;\text{ y }\; z\in(0,x)$$

Podemos observar que $R_1<0$ para todo $x>0$, mientras que $R_2(x)>0$ para todo $x>0$. Partiendo de esta información, podemos establecer las siguientes relaciones:

$$f(x)=\sqrt{1+x}=\left(1+\frac{x}{2}\right)+\underbrace{R_1(x)}_{<0} \implies \sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$$

$$f(x)=\sqrt{1+x}=\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}\right)+\underbrace{R_2(x)}_{>0} \implies \sqrt{1+x}>1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}$$

Puesto que cuando $x=0$ se cumple la igualdad, ya tenemos todos los elementos para afirmar lo siguiente:

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1+\frac{x}{2}$$

PROBLEMA 18

Dados los tres puntos del plano $(0,-2)$, $(1,6)$ y $(3,40)$, encuentra el polinomio interpolador de Lagrange que pasa por ellos.

Solución:

El polinomio interpolador de Lagrange que pasa por los puntos $P_0=(0,-2)$, $P_1=(1,6)$ y $P_2=(3,40)$ tiene el siguiente aspecto:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{2} f(x_i)\cdot L_i(x)=f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+f(x_2)L_2(x)$$

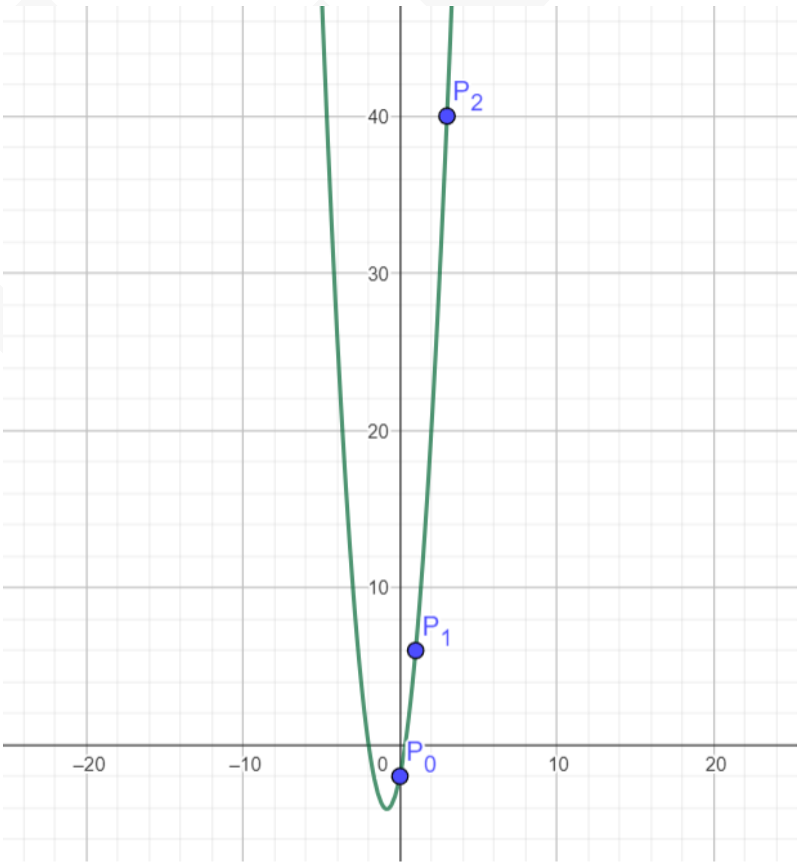
$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}=\frac{x^2-4x+3}{3}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}=\frac{x^2-3x}{-2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}=\frac{x^2-x}{6}$$

Luego el polinomio de Lagrange solicitado es:

$$P(x)=-2\left(\frac{x^2-4x+3}{3}\right)+6\left(\frac{x^2-3x}{-2}\right)+40\left(\frac{x^2-x}{6}\right)=3x^2+5x-2$$



PROBLEMA 19

Dada la siguiente tabla, estima $f(4)$ utilizando la interpolación de Lagrange.

x_k	-1	0	3	7
$f(x_k)$	2	0	4	7

Solución:

El polinomio interpolador de Lagrange que pasa por los puntos $P_0 = (-1, 2)$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (3, 4)$ y $P_3 = (7, 7)$ tiene el siguiente aspecto:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \cdot L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-7)}{(-1-0)(-1-3)(-1-7)} = \frac{x(x-3)(x-7)}{-32}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-(-1))(x-3)(x-7)}{(0-(-1))(0-3)(0-7)} = \frac{(x+1)(x-3)(x-7)}{21}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-7)}{(3-(-1))(3-0)(3-7)} = \frac{x(x+1)(x-7)}{-48}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-3)}{(7-(-1))(7-0)(7-3)} = \frac{x(x+1)(x-3)}{224}$$

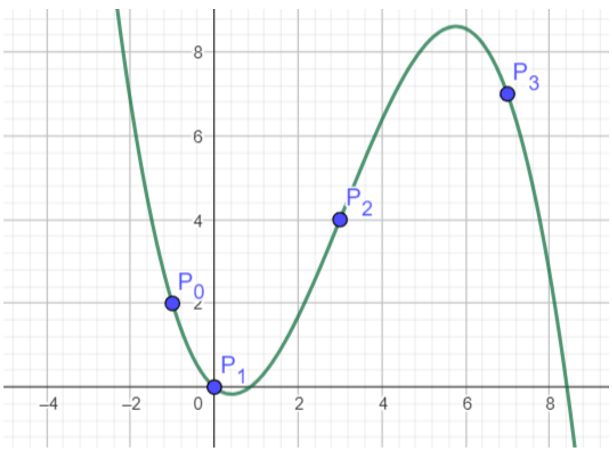
El polinomio de interpolador de Lagrange es:

$$P(x) = 2\left(\frac{x(x-3)(x-7)}{-32}\right) + 0 + 4\left(\frac{x(x+1)(x-7)}{-48}\right) + 7\left(\frac{x(x+1)(x-3)}{224}\right)$$

Puesto que solo se pide evaluar el polinomio en $x = 4$, no es necesario desarrollar más los polinomios de los numeradores, con lo que ya podemos obtener el valor aproximado de $f(4)$.

$$f(4) \approx P(4) = 2\left(\frac{4(4-3)(4-7)}{-32}\right) + 0 + 4\left(\frac{4(4+1)(4-7)}{-48}\right) + 7\left(\frac{4(4+1)(4-3)}{224}\right) =$$

$$= 2\frac{3}{8} + 0 + 4\frac{5}{4} + 7\frac{5}{56} = \frac{51}{8} \approx 6.375$$



PROBLEMA 20

Dada la siguiente tabla, aproxima $f(0.25)$ y $f(0.75)$ utilizando la interpolación de Lagrange.

x_k	0	1	2
$f(x_k)$	1	2.71828	7.38906

Solución:

El polinomio interpolador de Lagrange que pasa por los puntos $P_0 = (0,1)$, $P_1 = (1, 2.71828)$ y $P_2 = (2, 7.38906)$ tiene el siguiente aspecto:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \cdot L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x^2-2x}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

Luego el polinomio de Lagrange solicitado es:

$$P(x) = 1\left(\frac{x^2-3x+2}{2}\right) + 2.71828\left(\frac{x^2-2x}{-1}\right) + 7.38906\left(\frac{x^2-x}{2}\right)$$

Puesto que solo se pide evaluar el polinomio en $x = 0.25$ y 0.75, no es necesario simplificar la expresión de $P(x)$ antes de realizar las sustituciones:

$$f(0.25) \approx P(0.25) =$$

$$= 1\left(\frac{(0.25)^2-3(0.25)+2}{2}\right) + 2.71828\left(\frac{(0.25)^2-2(0.25)}{-1}\right) + 7.38906\left(\frac{(0.25)^2-(0.25)}{2}\right) \approx$$

$$\approx 1.152773$$

$$f(0.75) \approx P(0.75) =$$

$$= 1\left(\frac{(0.75)^2-3(0.75)+2}{2}\right) + 2.71828\left(\frac{(0.75)^2-2(0.75)}{-1}\right) + 7.38906\left(\frac{(0.75)^2-(0.75)}{2}\right) \approx$$

$$\approx 2.011913$$