Cálculo

Tema 4

Derivación de funciones

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2023-2024

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Definiciones **1**
1.1 Derivada de una función en un punto 1
1.2 Derivada de una función en un intervalo 3
1.3 Derivadas sucesivas 3

2 Interpretación geométrica de la derivada **3**

3 Derivación y continuidad **5**

4 Principales funciones y sus derivadas **6**

5 Propiedades de las derivadas **7**
5.1 Derivada de la suma de funciones 7
5.2 Derivada del producto de una función por un escalar 7
5.3 Derivada del producto de funciones 7
5.4 Derivada del cociente de funciones 7
5.5 Derivada de la función compuesta 7
5.6 Derivada de la función inversa 8

6 Aplicación al estudio local de una función **8**
6.1 Cálculo de asíntotas 8
6.2 Crecimiento y decrecimiento 10
6.2.1 Crecimiento y decrecimiento en un punto 10
6.2.2 Crecimiento y decrecimiento en un intervalo 11
6.3 Concavidad y convexidad 11
6.3.1 Concavidad y convexidad en un punto 11
6.3.2 Concavidad y convexidad en un intervalo 12
6.4 Extremos en un intervalo 12
6.5 Máximos y mínimos locales o relativos 13
6.5.1 Criterio de la primera derivada 13
6.5.2 Criterio de la segunda derivada 14

7 Teoremas de interés **15**
7.1 Teorema de Fermat 15
7.2 Teorema de Rolle 15
7.3 Teorema de Lagrange o del valor medio o de los incrementos finitos 16
7.4 Teorema del valor medio de Cauchy 16

8 Problemas **17**

1 Definiciones

1.1 Derivada de una función en un punto

Dada la función $y = f(x)$ de la Figura 1, se verifica que esta función es continua tanto en el punto $x = a$ como en un cierto entorno suyo. En relación a estos elementos se definen los siguientes conceptos:

- Incremento de x: $\Delta x = h$

  Aumento (o disminución) de la variable x en el entorno considerado respecto del valor $x = a$.

- Incremento de y: $\Delta y = f(a+h) - f(a)$

  Aumento (o disminución) de la variable y en el entorno considerado respecto del valor $x = a$.

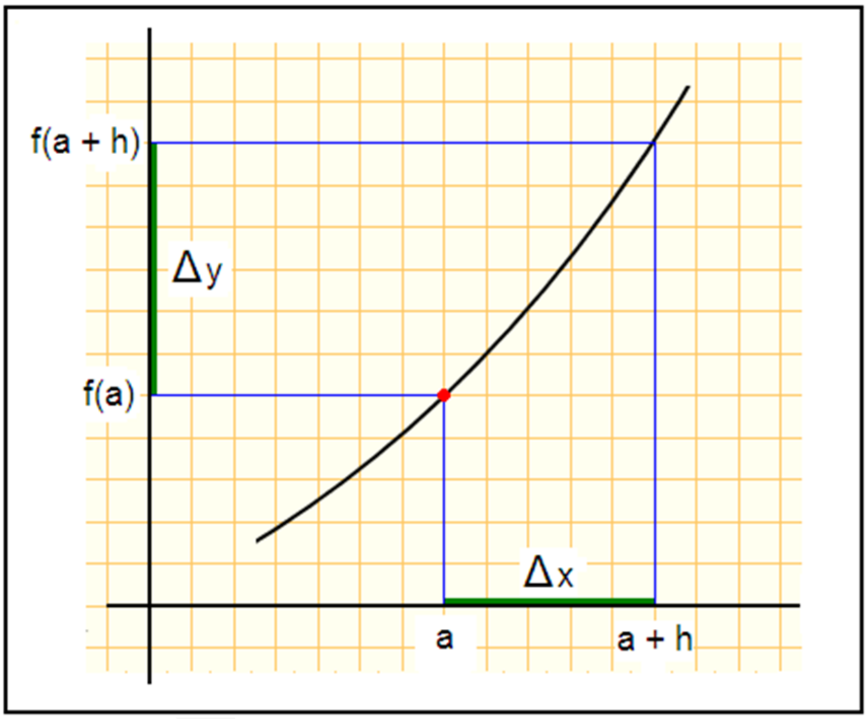

Figura 1: Incrementos en el entorno de $x = a$.

Para calcular la rapidez de variación de la función en el entorno del punto $x = a$ es necesario calcular el cociente incremental, que se define de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (h \neq 0)$$

Cuanto más pequeño es el valor $\Delta x = h$, mayor detalle sobre la rapidez de variación de la función en las proximidades del punto $x = a$ se tendrá. Idealmente, si el valor de $\Delta x = h$ es lo suficientemente pequeño, obtendremos información sobre la velocidad de variación instantánea en el propio punto $x = a$.

La **derivada** de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es el valor del límite (si existe) del cociente incremental cuando el incremento de la variable tiende a cero. Esta derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ se representa mediante la expresión $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La notación para representar el concepto de derivada es muy variada, pudiéndose encontrar las siguientes variantes:

$$y' = f'(x) = D[f(x)] = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

En cuanto a la notación para representar el concepto de derivada en un punto $x = a$, es posible utilizar las siguientes variantes:

$$y'(a) = f'(a) = D[f(a)] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

Se llama **derivada por la izquierda** al límite del cociente incremental cuando $h \to 0^-$, y **derivada por la derecha** al límite del cociente incremental cuando $h \to 0^+$. La derivada existe si y solo si la dos derivadas laterales existen y son iguales. En concreto, las derivadas por la izquierda y por la derecha en el punto $x = a$ tendrían las siguientes expresiones:

Derivada por la izquierda: $f'_-(a) = f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Derivada por la derecha: $f'_+(a) = f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Por lo visto anteriormente, se puede afirmar que una función $y = f(x)$ no es derivable en un punto $x = a$ cuando se presenta alguno de los siguientes casos:

1) El cociente incremental tiende a valores finitos diferentes por la izquierda y por la derecha cuando h tiende 0.

2) El cociente incremental tiende hacia $+\infty$, hacia $-\infty$ o hacia ambos valores (uno por cada lado) cuando h tiende 0.

3) El cociente incremental oscila en un rango entre dos valores definidos cuando h tiende 0.

Ejercicio 1

Estudia la derivabilidad en el punto $x = 0$ de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = \sqrt{x} \qquad f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1.2 Derivada de una función en un intervalo

Una función real de variable real $y = f(x)$ es derivable en un intervalo abierto (a, b) si es derivable en cada punto del intervalo.

Una función real de variable real $y = f(x)$ es derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es derivable en cada punto del intervalo abierto (a, b) y además admite derivada por la derecha en el punto $x = a$ y derivada por la izquierda en el punto $x = b$.

1.3 Derivadas sucesivas

Si la función $y = f(x)$ admite una derivada $y' = f'(x)$ para los valores x de un cierto intervalo, y a su vez esa función es derivable, entonces la función $y = f(x)$ es dos veces derivable y se llama derivada segunda a la derivada de la primera derivada, que se denota así:

$$y'' = f''(x) = D^2\left[f(x)\right] = \frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} = \frac{d}{d\,x}\left(\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right)$$

Por último, a la derivada de orden n se la representa de las siguientes maneras:

$$y^{n)} = f^{n)}(x) = D^n\left[f(x)\right] = \frac{d^n f(x)}{d\,x^n}$$

2 Interpretación geométrica de la derivada

La siguiente figura muestra la función $y = f(x)$ en la que consideramos el punto A de coordenadas $(a, f(a))$. Si incrementamos la variable x hasta que valga $a+h$, entonces el valor de la función pasa a ser $f(a+h)$, por lo que podemos considerar el punto B de coordenadas $(a+h, f(a+h))$.

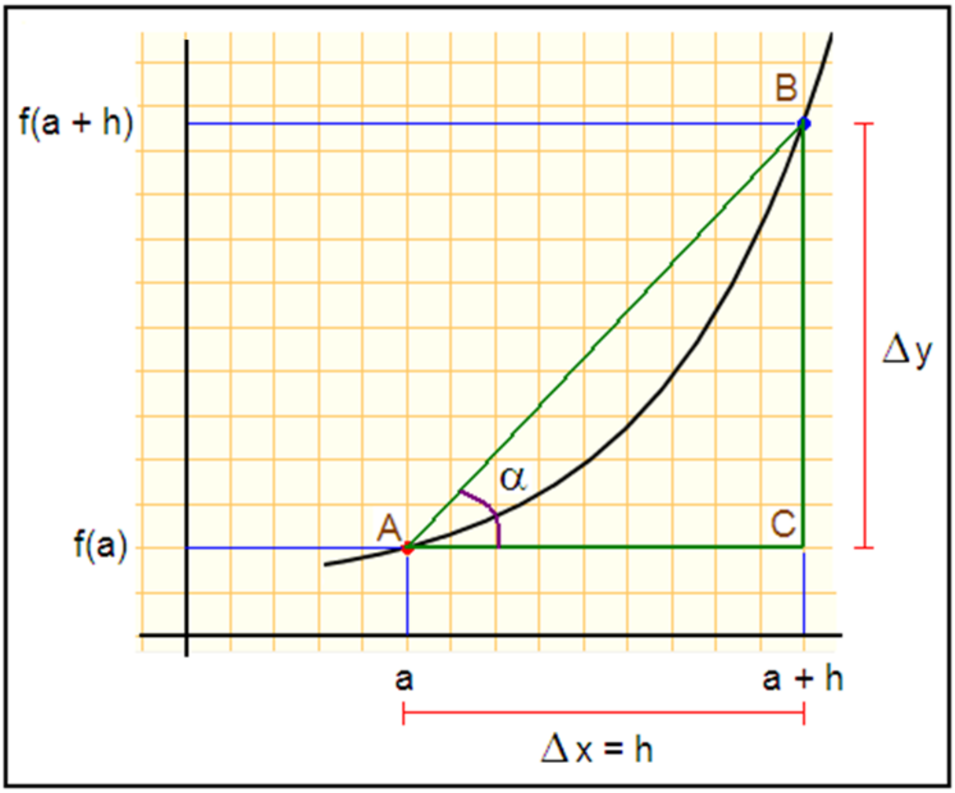

Figura 2: Interpretación geométrica de la derivada.

Como puede apreciarse, la recta $\overline{AB}$ forma un ángulo α con el eje de las abscisas y con cualquier recta paralela a dicho eje. La inclinación de esta recta tendrá como valor $\tan(\alpha) = \Delta y / \Delta x$. Por lo tanto, se puede afirmar que la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es:

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si tomando como punto de partida la Figura 2 se reduce progresivamente el valor $\Delta x = h$, la distancia entre los puntos y disminuye. Cuando $\Delta x = h$ tiende al valor 0, la recta $\overline{AB}$ que anteriormente cortaba a la curva en los puntos A y B se convierte en la recta tangente a la curva en el punto A, tal como puede comprobarse en la siguiente figura.

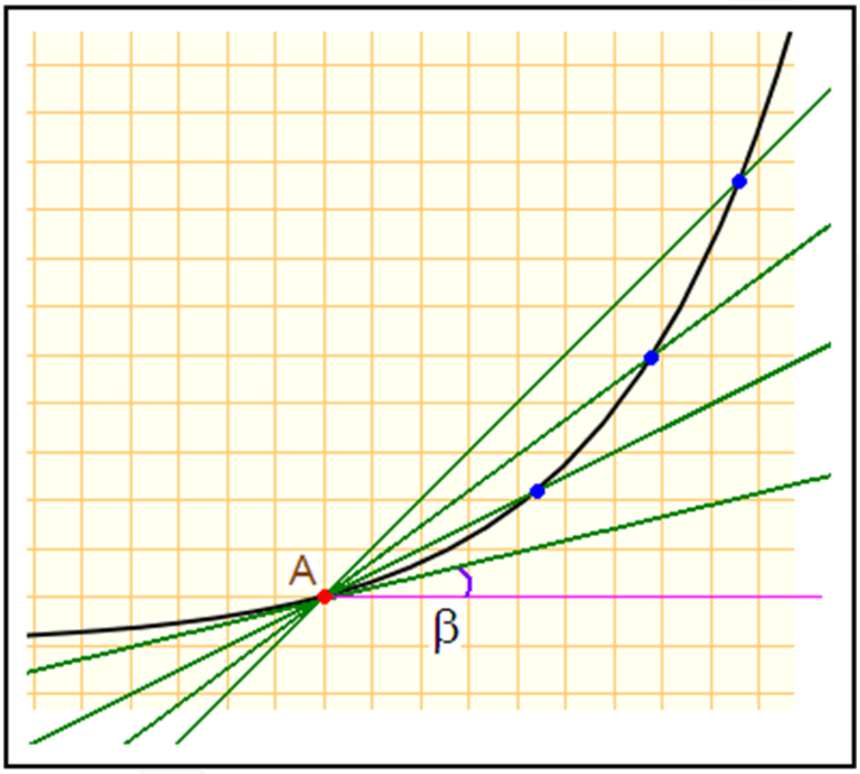

Figura 3: Derivada como tangente a la curva en el punto de trabajo.

Cuando la recta pasa a convertirse en la tangente a la curva en el punto A, se cumple la siguiente igualdad:

$$\tan(\beta) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

Así pues, la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $x = a$, de manera que podemos expresar dicha recta tangente de la siguiente manera:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejercicio 2

Dada la función $y = x^2$, halla la pendiente de la recta tangente a su curva en el punto de abscisa $x = 2$.

3 Derivación y continuidad

La derivada de una función en un punto existe siempre que el límite utilizado en la definición exista. Debido a ello, existen funciones que no son derivables en alguno(s) de sus puntos. Las dos figuras que se muestran a continuación son ejemplo de funciones que no son derivables en el punto $x = 0$. En el primer caso, no existe la derivada en $x = 0$ puesto que los límites de la función por la derecha y por la izquierda no coinciden.

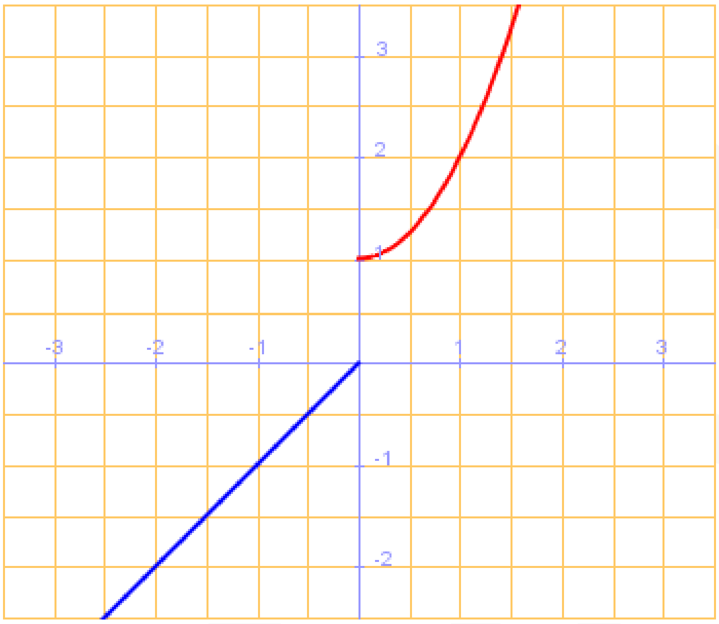

Figura 4: Ejemplo de función no derivable en $x = 0$: $y = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$

En el segundo caso, podemos afirmar que, aunque la función está definida y es continua en $x = 0$, sin embargo no es derivable en ese punto.

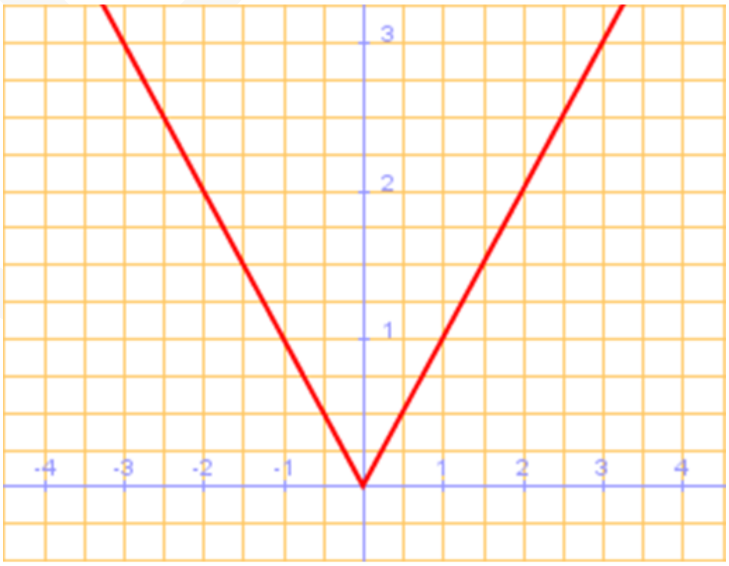

Figura 5: Ejemplo de función no derivable en $x = 0$: $y = |x|$.

Ejercicio 3

Demuestra que la función $y = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

En vista de lo anterior, podemos concluir el siguiente resultado:

$$f(x) \text{ derivable en } x=a \implies f(x) \text{ continua en } x=a$$

$$f(x) \text{ derivable en } x=a \not\Longleftarrow f(x) \text{ continua en } x=a$$

4 Principales funciones y sus derivadas

$y = x \longrightarrow y' = 1$	$y = u(x) \longrightarrow y' = u'(x)$
$y = a \cdot x \longrightarrow y' = a$	$y = a \cdot u(x) \longrightarrow y' = a \cdot u'(x)$
$y = x^n \longrightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = (u(x))^n \longrightarrow y' = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$
$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u(x)} = (u(x))^{1/2} \longrightarrow y' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \longrightarrow y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{u(x)} = (u(x))^{1/n} \longrightarrow y' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$
$y = \mathrm{Ln}(x) \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$	$y = \mathrm{Ln}(u(x)) \longrightarrow y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \cdot \mathrm{Ln}(a)$	$y = a^{u(x)} \longrightarrow y' = u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot \mathrm{Ln}(a)$
$y = e^x \longrightarrow y' = e^x$	$y = e^{u(x)} \longrightarrow y' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$
$y = \log_b(x) \longrightarrow y' = \frac{1}{x} \log_b e$	$y = \log_b(u(x)) \longrightarrow y' = \frac{u'(x)}{u(x)} \log_b e$
$y = \mathrm{sen}(x) \longrightarrow y' = \cos(x)$	$y = \mathrm{cosec}(x) \longrightarrow y' = -\frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}^2(x)}$
$y = \cos(x) \longrightarrow y' = -\mathrm{sen}(x)$	$y = \sec(x) \longrightarrow y' = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)}$
$y = \tan(x) \longrightarrow y' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$y = \mathrm{cotan}(x) \longrightarrow y' = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)}$
$y = \mathrm{arc\,sen}(x) \longrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \mathrm{arc\,cos}(x) \longrightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

5 Propiedades de las derivadas

5.1 Derivada de la suma de funciones

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, ambas derivables en el intervalo de trabajo, la derivada de la suma (o diferencia) de ambas funciones es la suma (o diferencia) de sus derivadas respectivas.

$$y = f(x) \pm g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) \pm g'(x)$$

5.2 Derivada del producto de una función por un escalar

Dada una función $f(x)$ derivable en el intervalo de trabajo, y un escalar λ, la derivada de su producto tiene la siguiente expresión:

$$y = \lambda \cdot f(x) \quad \rightarrow \quad y' = \lambda \cdot f'(x)$$

5.3 Derivada del producto de funciones

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, ambas derivables en el intervalo de trabajo, la derivada de su producto tiene la siguiente expresión:

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

5.4 Derivada del cociente de funciones

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, donde $g(x) \neq 0$, siendo ambas funciones derivables en el intervalo de trabajo, la derivada de su cociente tiene la siguiente expresión:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

5.5 Derivada de la función compuesta

Se consideran las funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas y derivables en el intervalo de trabajo. Estableciendo que es posible su composición y que dicha función compuesta es, a su vez, continua y derivable, se comprueba lo siguiente:

$$y = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \quad \rightarrow \quad y' = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

A la expresión de la derivada de la función compuesta también se la conoce como *regla de la cadena*, fácilmente identificable de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

donde se pueden expresar las funciones como $y = g(z)$ y $z = f(x)$.

Ejercicio 4

Calcula la derivada de la función $(g \circ f)(x)$ dadas las funciones $f(x) = 4x - 3$ y $g(x) = x^2$.

En el caso de composición de tres funciones, la derivada tiene la siguiente expresión:

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'\big(g(f(x))\big) \cdot g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

Ejercicio 5

Calcula la derivada de la función $y = \sqrt{e^{3x^2+4}}$.

5.6 Derivada de la función inversa

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones inversas, es decir:

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \qquad y \xrightarrow{g} x = g(y) = f^{-1}(y)$$

Estableciendo que $f(x)$ es derivable en su dominio, y que $g(x)$ es derivable en el recorrido de $f(x)$, entonces si $f(a) = b$ y $f'(a) \neq 0$, obtenemos la siguiente relación:

$$(f^{-1})'(b) = g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Ejercicio 6

Calcula la derivada de la función inversa de $y = x^2$.

6 Aplicación al estudio local de una función

6.1 Cálculo de asíntotas

Dada una función $y = f(x)$ cuya gráfica es la curva C, se dice que la recta r es una **asíntota** de $f(x)$ si la curva C se acerca a r de manera que en el límite se encuentren infinitesimalmente cercanas pero sin llegar a coincidir plenamente con la propia r.

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** cuando aparece alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

La recta $y = k$ (siendo k un valor real finito) es una **asíntota horizontal** si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

Por último, si uno de los siguientes pares de expresiones contiene límites que existen y son finitos, entonces la recta $y = mx + b$ es una **asíntota oblicua**:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = b$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = b$$

Las asíntotas horizontales y oblicuas son mutuamente excluyentes en cada semiplano. Es decir, si existe una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ entonces no puede haber una asíntota oblicua en el semiplano determinado por los valores $x > 0$. De la misma manera, si existe una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ entonces no puede haber una asíntota oblicua en el semiplano determinado por los valores $x < 0$. Lo que sí es posible es que exista una asíntota de cada tipo en cada semiplano. Las asíntotas verticales no presentan este tipo de limitaciones.

En función de las características específicas de las asíntotas de una función, se puede establecer la siguiente clasificación:

- Asíntotas horizontales:
  - Funciones que no tienen asíntotas horizontales: $y = x^3$.
  - Funciones con una asíntota horizontal definida únicamente en un semiplano: $y = e^x$.
  - Funciones con la misma asíntota horizontal definida en los dos semiplanos: $y = \dfrac{x}{x-1}$.
  - Funciones con dos asíntotas horizontales distintas: $y = \arctan(x)$.
- Asíntotas verticales:
  - Funciones que no tienen asíntotas verticales: $y = \operatorname{sen}(x)$.
  - Funciones con una asíntota vertical solo por un lado: $y = \dfrac{e^{1/x}}{x}$.
  - Funciones con una asíntota vertical por ambos lados: $y = \dfrac{x}{x+1}$.
  - Funciones con infinitas asíntotas verticales: $y = \tan(x)$.
- Asíntotas oblicuas:
  - Funciones que no tienen asíntotas oblicuas: $y = x^2$.
  - Funciones con asíntota oblicua definida únicamente en un semiplano: $y = x^{|x|/x} + \dfrac{1}{x}$.
  - Funciones con una asíntota oblicua definida en los dos semiplanos: $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.
  - Funciones con dos asíntotas oblicuas distintas: $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Ejercicio 7

Identifica las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

6.2 Crecimiento y decrecimiento

6.2.1 Crecimiento y decrecimiento en un punto

Una función $f(x)$ es **estrictamente creciente** ("gráfica hacia arriba") en $x = c$ cuando existe un cierto entorno alrededor de $x = c$ de manera que se cumple lo siguiente:

- $x < c \implies f(x) < f(c)$
- $x > c \implies f(x) > f(c)$

Una función $f(x)$ es **creciente** ("gráfica hacia arriba u horizontal") en $x = c$ cuando existe un cierto entorno alrededor de $x = c$ de manera que se cumple lo siguiente:

- $x < c \implies f(x) \leq f(c)$
- $x > c \implies f(x) \geq f(c)$

Una función $f(x)$ es **estrictamente decreciente** ("gráfica hacia abajo") en $x = c$ cuando existe un cierto entorno alrededor de $x = c$ de manera que se cumple lo siguiente:

- $x < c \implies f(x) > f(c)$
- $x > c \implies f(x) < f(c)$

Una función $f(x)$ es **decreciente** ("gráfica hacia abajo u horizontal") en $x = c$ cuando existe un cierto entorno alrededor de $x = c$ de manera que se cumple lo siguiente:

- $x < c \implies f(x) \geq f(c)$
- $x > c \implies f(x) \leq f(c)$

Ejemplo 1

La función $y = x^2$ es estrictamente creciente en $x = 2$ y estrictamente decreciente en $x = -1$, mientras que en $x = 0$ no es creciente ni decreciente.

Si la función es derivable en $x = c$, es posible utilizar la derivada para estudiar las características de crecimiento o decrecimiento de una función en un punto.

- $f'(c) > 0 \implies f$ es estrictamente creciente en $x = c$
- $f'(c) < 0 \implies f$ es estrictamente decreciente en $x = c$

Si $f'(c) = 0$ pueden darse distintas circunstancias: en ese punto la función puede ser creciente, decreciente, o tener un mínimo o máximo (es decir, no se puede garantizar ninguna de esas características a menos que se conozca la forma exacta de la función).

Es importante notar que las implicaciones en sentido contrario no son exactamente las mismas, tal como se entenderá mejor en el apartado relativo a los puntos de inflexión:

- $f(x)$ es estrictamente creciente en $x = c \implies f'(c) \geq 0$
- $f(x)$ es estrictamente decreciente en $x = c \implies f'(c) \leq 0$
- $f(x)$ es creciente en $x = c \implies f'(c) \geq 0$
- $f(x)$ es decreciente en $x = c \implies f'(c) \leq 0$

6.2.2 Crecimiento y decrecimiento en un intervalo

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). Las definiciones de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ se pueden extender al intervalo (a,b) cuando se cumplen para todos los valores $x \in (a,b)$. Es decir:

- $f(x)$ estrictamente creciente en $(a,b) \iff f(x)$ estrictamente creciente $\forall\, x \in (a,b)$
- $f(x)$ estrictamente decreciente en $(a,b) \iff f(x)$ estrictamente decreciente $\forall\, x \in (a,b)$
- $f(x)$ es creciente en $(a,b) \iff f(x)$ es creciente $\forall\, x \in (a,b)$
- $f(x)$ es decreciente en $(a,b) \iff f(x)$ es decreciente $\forall\, x \in (a,b)$
- $f(x)$ es constante en $(a,b) \iff f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

6.3 Concavidad y convexidad

6.3.1 Concavidad y convexidad en un punto

Sea $f(x)$ una función derivable en un punto $x = c$. La función $f(x)$ es **cóncava** en $x = c$ si existe un entorno del punto $x = c$ en el que la tangente en $x = c$ se encuentra por debajo de la gráfica de $f(x)$.

De manera equivalente, la función $f(x)$ es **convexa** en $x = c$ si existe un entorno del punto $x = c$ en el que la tangente en $x = c$ se encuentra por encima de la gráfica de $f(x)$.

Si tanto $f(x)$ como $f'(x)$ son derivables en $x = c$, es posible utilizar la segunda derivada para estudiar las características de concavidad y convexidad de una función en un punto.

- $f''(c) > 0 \implies$ es cóncava en $x = c$
- $f''(c) < 0 \implies$ es convexa en $x = c$

Este concepto se pude generalizar de la siguiente manera: sea $f^{n)}(c)$ la primera derivada distinta de cero en $x = c$. Aparecen los siguientes casos:

- n es par:
  - Si $f^{n)}(c) > 0 \implies f(x)$ es cóncava en $x = c$
  - Si $f^{n)}(c) < 0 \implies f(x)$ es convexa en $x = c$
- n es impar:
  - El elemento en cuestión es un punto de inflexión.

Un **punto de inflexión** es aquel valor $x = c$ donde la tangente atraviesa la gráfica. En los puntos de inflexión, la función no es cóncava ni convexa, sino que hay cambio de concavidad a convexidad o al revés. Si tanto $f(x)$ como $f'(x)$ son funciones derivables en $x = c$, y el punto $x = c$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$, entonces $f''(c) = 0$. Es importante resaltar que esta afirmación no es necesariamente cierta en el sentido contrario (el hecho de que $f''(c) = 0$ no garantiza que $x = c$ sea un punto de inflexión).

Ejercicio 8

Estudia la concavidad y convexidad de las funciones $f(x) = x^4$ y $g(x) = x^5$ en $x = 0$.

$$f''(c) > 0 \; : \; f(x) \text{ cóncava en } x = c$$

$$f''(c) < 0 \; : \; f(x) \text{ convexa en } x = c$$

$$f''(c) = 0 \begin{cases} f'''(c) \neq 0 : \; x = c \; \text{ es punto de inflexión} \\ f'''(c) = 0 \begin{cases} f^{iv)}(c) > 0 : \; f(x) \text{ cóncava en } x = c \\ f^{iv)}(c) < 0 : \; f(x) \text{ convexa en } x = c \\ f^{iv)}(c) = 0 \begin{cases} f^{v)}(c) \neq 0 : \; x = c \; \text{ es punto de inflexión} \\ f^{v)}(c) = 0 : \; \ldots \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Figura 5: Condiciones de concavidad, convexidad y puntos de inflexión

6.3.2 Concavidad y convexidad en un intervalo

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Las definiciones de concavidad y convexidad de $f(x)$ se pueden extender al intervalo (a, b) cuando se cumplen para todos los valores $x \in (a, b)$. Es decir:

- $f(x)$ es cóncava (a, b) $\iff$ $f(x)$ es cóncava $\forall\, x \in (a, b)$
- $f(x)$ es convexa (a, b) $\iff$ $f(x)$ es convexa $\forall\, x \in (a, b)$

6.4 Extremos en un intervalo

Sea $f(x)$ una función definida sobre un intervalo I (ya sea abierto o cerrado) que contiene al punto $x = c$. Se definen los siguientes conceptos:

- Si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$, entonces $f(c)$ es un valor **mínimo** de $f(x)$ en I.
- Si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$, entonces $f(c)$ es un valor **máximo** de $f(x)$ en I.

Los mínimos y máximos de una función en un intervalo son los **extremos** de la función $f(x)$ en el intervalo I. El mínimo y máximo de una función en un intervalo también reciben el nombre de mínimo absoluto y máximo absoluto en el intervalo.

Una función no siempre tiene un mínimo o un máximo en un intervalo. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo cerrado $[-1, 2]$, pero no tiene un máximo en el intervalo abierto $(-1, 2)$.

El teorema del valor extremo indica que si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo $[a, b]$.

6.5 Máximos y mínimos locales o relativos

Definimos el concepto de máximo y mínimo local o relativo de la siguiente manera:

- Si hay un intervalo abierto (a,b) que contiene al punto $x=c$ y en el cual $f(c)$ es un máximo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **máximo local** o **relativo** de $f(x)$.
- Si hay un intervalo abierto (a,b) que contiene al punto $x=c$ y en el cual $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **mínimo local** o **relativo** de $f(x)$.

Además, definimos **punto crítico** como aquel punto $x=c$ en el que su primera derivada o bien no existe o tiene valor nulo. Por ejemplo, $x=0$ es un punto crítico tanto para la función $y=|x|$ como para la función $y=x^2$. En vista de esta definición, podemos afirmar que si la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x=c$, entonces $x=c$ es un punto crítico de $f(x)$. Sin embargo, lo contrario no siempre es cierto.

$f(x)$ tiene mínimo o máximo relativos en $x=c$ $\Longrightarrow$ $x=c$ es un punto crítico

$f(x)$ tiene mínimo o máximo relativos en $x=c$ $\not\Longleftarrow$ $x=c$ es un punto crítico

Ejercicio 9

Identifica los puntos críticos de las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$ y $h(x)=|x|$ en $[-1,1]$.

Ejercicio 10

Identifica los puntos críticos de la función $f(x)=(3x-2)\sqrt[3]{x}$.

En resumen, para determinar los extremos de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a,b]$ deben seguirse los siguientes pasos:

1) Encontrar los puntos críticos de $f(x)$ en (a,b).

2) Evaluar $f(x)$ en cada punto crítico de (a,b).

3) Evaluar $f(x)$ en $x=a$ y $x=b$.

4) El más pequeño de los anteriores valores será el mínimo, y el más grande el máximo.

6.5.1 Criterio de la primera derivada

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $I=[c-\delta,c+\rho]$, continua en dicho intervalo y derivable en $(c-\delta,c)\cup(c,c+\rho)$, de forma que si se cumplen las siguientes dos condiciones, entonces la función $f(x)$ tiene un **mínimo local** en el punto $x=c$.

- $f'(x)\leq 0$ en $x\in(c-\delta,c)$.
- $f'(x)\geq 0$ en $x\in(c,c+\rho)$.

Si por el contrario las desigualdades que se cumplen son las siguientes, entonces la función $f(x)$ tiene un **máximo local** en el punto $x = c$.

- $f'(x) \geq 0$ en $x \in (c - \delta, c)$.
- $f'(x) \leq 0$ en $x \in (c, c + \rho)$.

Por último, si $f'(x)$ es o positiva o negativa a ambos lados de $x = c$, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.

6.5.2 Criterio de la segunda derivada

Sea $f(x)$ una función derivable dos veces en un intervalo que contiene a un punto $x = c$ y que verifica lo siguiente:

- $f'(c) = 0$
- $f''(c) < 0$

En estas condiciones se puede afirmar que la función $f(x)$ tiene un **máximo local** en el punto $x = c$.

Por el contrario, si las condiciones que verifica son las siguientes, entonces se puede afirmar que la función $f(x)$ tiene un **mínimo local** en el punto $x = c$.

- $f'(c) = 0$
- $f''(c) > 0$

$$f'(c) > 0 \ : \ f(x) \text{ creciente en } x = c$$

$$f'(c) < 0 \ : \ f(x) \text{ decreciente en } x = c$$

$$f'(c) = 0 \begin{cases} f''(c) > 0 : \ x = c \ \text{ mínimo} \\ f''(c) < 0 : \ x = c \ \text{ máximo} \\ f''(c) = 0 \begin{cases} f'''(c) > 0 : \ f(x) \text{ creciente en } x = c \\ f'''(c) < 0 : \ f(x) \text{ decreciente en } x = c \\ f'''(c) = 0 \begin{cases} f^{iv)}(c) > 0 : \ x = c \ \text{ mínimo} \\ f^{iv)}(c) < 0 : \ x = c \ \text{ máximo} \\ f^{iv)}(c) = 0 : \ \ldots \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Figura 6: Condiciones de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

7 Teoremas de interés

7.1 Teorema de Fermat

Teorema de Fermat

Si una función tiene un extremo (máximo o mínimo) local en un punto $x = c$ y es derivable en dicho punto, entonces $f'(c) = 0$.

Es importante que el teorema no se cumple necesariamente en el sentido contrario, ya que el hecho de que $f'(c) = 0$ no implica que el punto $x = c$ sea un máximo o mínimo.

7.2 Teorema de Rolle

Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función que verifica lo siguiente:

- $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$
- $f(x)$ es derivable en el intervalo (a, b)
- $f(a) = f(b)$

En estas condiciones, se puede afirmar que existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Es decir, en las citadas condiciones, existe al menos un punto donde la tangente a la gráfica es horizontal, y por lo tanto dicho punto constituye un máximo o mínimo relativo (y, dependiendo de la función, en algunos casos será un máximo o mínimo absoluto).

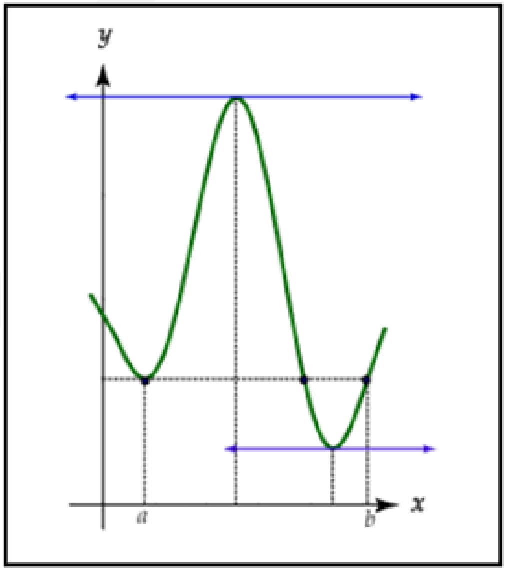

Figura 7: Representación gráfica del teorema de Rolle.

Ejercicio 11

Aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[-2, 1]$.

7.3 Teorema de Lagrange o del valor medio o de los incrementos finitos

Teorema de Lagrange

Sea $f(x)$ una función que verifica lo siguiente:

- $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$
- $f(x)$ es derivable en el intervalo (a,b)

En estas condiciones, se puede afirmar que existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Desde un punto de vista geométrico, este teorema garantiza la existencia de una recta tangente en algún punto $x = c$ de manera que dicha tangente sea paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

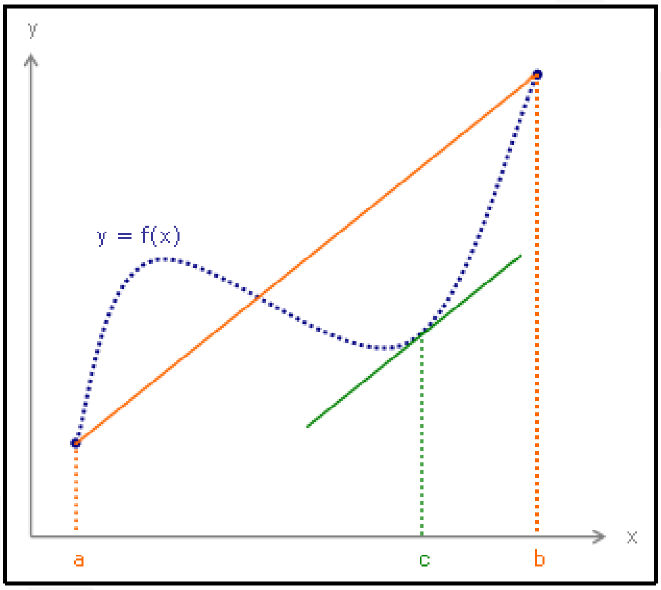

Figura 8: Representación gráfica del teorema de Lagrange

En cambio, en términos del ritmo o velocidad de cambio, este teorema implica que debe haber un punto en el intervalo abierto (a,b) en el cual el ritmo o velocidad de cambio instantáneas es igual al ritmo o velocidad de cambio promedio sobre el intervalo $[a,b]$.

7.4 Teorema del valor medio de Cauchy

Teorema del valor medio de Cauchy

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que verifican lo siguiente:

- $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo $[a,b]$
- $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en el intervalo (a,b)

En estas condiciones, se puede afirmar que existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$\big(f(b)-f(a)\big)\cdot g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)\cdot f'(c)$$

Si $g(a) \neq g(b)$ y además las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$ no se anulan en un mismo punto del intervalo, se puede modificar la anterior expresión de la siguiente manera:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Nótese el caso particular en el cual $g(x) = x$, donde entonces la expresión se reduce al teorema del valor medio de Lagrange.

El teorema de Cauchy es usado para la demostración de otros teoremas. Por ejemplo, puede ser utilizado para demostrar la regla de L'Hôpital. De manera equivalente, el teorema de Rolle se puede utilizar para demostrar el teorema de Lagrange.

Ejercicio 12

Determina los valores $c \in (a, b)$ tales que satisfacen el teorema de Cauchy del valor medio para las funciones $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ y $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ cuando $a = 0$ y $b = 2$.

8 Problemas

1) Estudia la derivabilidad de la siguiente función en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x > 0 \end{cases}$$

2) Estudia la derivabilidad de la siguiente función en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3) Estudia la derivabilidad de la siguiente función en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

4) Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = (x^2 + x^3)^{1/2}$ en el punto $x = 0$ utilizando el concepto de cociente incremental.

5) Estudia si existen o no valores de los parámetros a y b que hagan derivable a la siguiente función a lo largo de toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} a + b\cos(x) & x \leq 0 \\ -2ax + 3bx^2 & x > 0 \end{cases}$$

6) Dada la función siguiente función $f(x)$, estudia su continuidad y derivabilidad en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

7) Estudia la continuidad y derivabilidad en todos los puntos de la recta real de la función $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & |x| \geq 1 \end{cases}$$

8) Dada la función $f(x)$, estudia su continuidad y derivabilidad en toda la recta real en función de los valores de α y β.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) + \alpha & \text{si } x \leq 0 \\ \arctan(\operatorname{Ln}(x)) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2} + \beta & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

9) Dada la ecuación de movimiento rectilíneo $x(t) = t^3 + \dfrac{3}{t}$, calcula la velocidad promedio entre $t = 4$ y $t = 6$ y a continuación determina la velocidad instantánea en $t = 4$.

10) Si el radio en centímetros de un globo esférico viene dado por la expresión $r(t) = 3\sqrt[3]{t+8}$ donde $0 \leq t \leq 10$ y la variable t representa el tiempo en minutos, calcula la razón de cambio en $t = 8$ de los siguientes elementos:

a) El radio $r(t)$.

b) El volumen del globo.

c) El área de la superficie esférica.

11) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

b) $g(x) = (\operatorname{sen}(x))^4$

c) $h(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^3\, e^{x^2+x}))$

12) Obtén la derivada de la función $f(x) = \cos\left(\operatorname{Ln}\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)$.

13) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = x^x$

c) $h(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen}(x)}$

14) Calcula y simplifica al máximo la expresión de la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{\frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1}}\right) \qquad g(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan(x)$$

15) Halla a, b y c de forma que la función $y = a\,x^2 + b\,x + c$ pase por el punto $(1,3)$ y sea tangente a la recta $x - y + 1 = 0$ en el punto $(2,3)$.

16) Estudia la presencia de asíntotas y de extremos locales, así como las características de crecimiento y concavidad, de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.

17) Analiza las características de crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, máximos/mínimos y asíntotas de la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ para todo x de $\mathbb{R}$.

18) Dada la función $f(x) = 2\,x - 3\,x^{2/3}$, calcula sus extremos absolutos en el intervalo $[-1,2]$ y sus puntos de inflexión.

19) Dada la función $f(x) = (x^2 + 2\,x + 1)\,e^{-x}$, determina sus extremos absolutos y sus puntos de inflexión en el intervalo $[-2,2]$.

20) Calcula las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de la función $f(x) = x^{|x|/x} + \dfrac{1}{x}$. Representa gráficamente la función, estudiando para ello las características de crecimiento/decrecimiento y concavidad/convexidad de la función, así como sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.

21) Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$ en toda la recta real y dibuja su gráfica.

22) Halla las constantes a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ verifique las siguientes condiciones:

a) La función tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 3$.

b) $f(0) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}\right)$

23) Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie posible. ¿Qué longitud deben tener los postes y el largero?

24) Dos postes, uno de 12 metros de altura y el otro de 28 metros están situados a 30 metros de distancia. Si de la parte más alta de cada poste parte un cable y ambos se unen en el mismo punto del suelo entre los postes, ¿dónde deben unirse los cables para que se use la menor longitud de cable?

25) Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno, y los laterales 1 cm cada uno. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

26) Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Calcula las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

27) Utiliza el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $2x^5 + x + 5 = 0$ no puede tener más de una solución real.

28) Demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + \alpha = 0$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo $(0, 1)$.

29) Sin calcular la derivada de la función $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, determina cuántas raíces tiene $f'(x)$ e indica en qué intervalos están.

30) Utiliza el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad $|\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x)| \leq |y - x|$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- *Cálculo*. R. E. Larson, R. P. Hostetler y B. H. Edwards. Ed. McGraw-Hill.
- *Problemas de Cálculo*. M. Bilbao, F. Castañeda y J. C. Peral.
- *Análisis Matemático I*. J. de Burgos. García-Maroto editores.
- *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*. A. García et al. CLAGSA.
- *Análisis Matemático*. R. Losada Rodríguez. Ed. Pirámide.
- *Problemas de análisis. Tomo I*. M. Anzola, J. Caruncho y G. Pérez-Canales. Ed. Primer Ciclo.
- *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. D. Pestana Galván et al. Ed. Ariel.
- *Curso básico de matemáticas para estudiantes de Económicas y Empresariales*. G. Jarne, E. Minguillón y T. Zabal. Universidad de Zaragoza.
- Página web `www.gaussianos.com`.