CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Examen Parcial

Problemas

Problema 1 (2 ptos)

Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determinar para qué valores de k, la ecuación matricial $XA = B - X$ admite una solución única

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial anterior para k=2

a) (1 punto) Determinar para qué valores de k, la ecuación matricial $XA = B - X$ admite una solución única

- $XA = B - X$ XA+X=B
- X(A+I)=B tiene solución única X=B.$(A+I)^{-1}$ $cuando\ A + I\ \ admite\ inversa$ $\Longleftrightarrow$ $|A+I| \neq 0$
- Como $|A+I|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq 1$

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial anterior para k=2

- Como la solución es $X=B.(A+I)^{-1}$ necesitamos calcular $(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}$
- $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{F2-2F1}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix} \underset{F1+F2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$
- $(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $X=B.(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

Problema 2 (2 ptos)

a) (0,75 puntos) Discutir utilizando el teorema de Rouché-Frobenius el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\left\{\begin{array}{c} x + z = k \\ 4x + (k-2)y + (k+2)z = k+2 \\ 2(k+1)x - (k+6)z = -k \end{array}\right\}$$

b) (0,75 puntos) Dado que esas tres ecuaciones son respectivamente las ecuaciones de tres planos $\pi_1, \pi_2, y\ \pi_3$, $realizar$ la interpretación geométrica de la posición relativa de esos tres planos para los distintos valores de k

c) (0,5 puntos) Y si todos los términos independientes fuesen nulos, ¿existe algún valor de k para el que se trate de tres planos paralelos?

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k \\ 4 & k-2 & k+2 & k+2 \\ 2k+2 & 0 & -k-6 & -k \end{pmatrix} \underset{F2-4F1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k \\ 0 & k-2 & k-2 & 2-3k \\ 2k+2 & 0 & -k-6 & -k \end{pmatrix} \underset{F3-(2k+2)F1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k \\ 0 & k-2 & k-2 & 2-3k \\ 0 & 0 & -3k-8 & -k(2k+3) \end{pmatrix}$

- <u>Caso 1</u> Si k$\neq$ {2; $\frac{-8}{3}$} rang A=rang A*=3   Sistema compatible determinado

  Se trata de tres planos que se cortan en un punto

- <u>Caso 2</u> Si k= $\frac{-8}{3}$ el sistema es incompatible

  Comprobamos cuáles son las posiciones relativas de los planos analizados dos a dos:

  $\pi\ y\ \pi´: \frac{1}{4} \neq 0$ $\pi\ y\ \pi´$ se cortan

  $\pi\ y\ \pi´´: \frac{1}{-10/3} = \frac{1}{-10/3} = \frac{0}{0} \neq -1$ $\pi\ y\ \pi´´$ son paralelos

  $\pi´\ y\ \pi´´: \frac{4}{-10/3} \neq \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{10}{3}}$ $\pi´\ y\ \pi´´$ se cortan

  Se trata por tanto de dos planos paralelos $\pi\ y\ \pi´´$ y un tercero $\pi´\ \ que\ los\ corta$

- Caso 3 Si k=2 el sistema es incompatible

  Comprobamos cuáles son las posiciones relativas de los planos analizados dos a dos:

  $\pi\ y\ \pi': \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{4}$ $\quad$ $\pi\ y\ \pi'$ son paralelos

  $\pi\ y\ \pi'': \frac{1}{6} \neq \frac{1}{-8}$ $\quad$ $\pi\ y\ \pi''$ se cortan

  $\pi'\ y\ \pi'': \frac{4}{6} \neq \frac{4}{-8}$ $\quad$ $\pi'\ y\ \pi''$ se cortan

  Se trata por tanto de dos planos paralelos $\pi\ y\ \pi'$ y un tercero π'' *que los corta*

c) (0,5 puntos) Y si todos los términos independientes fuesen nulos, ¿existe algún valor de k para el que se trate de tres planos paralelos?

Si todos los términos independientes fuesen nulos, tendríamos un sistema de ecuaciones lineales **homogéneo** que siempre es compatible (al menos tiene la solución (0,0,0)), por tanto NO puede tratarse para ningún valor de k de tres planos paralelos (sistema incompatible).

Problema 3 (2 ptos)

Si consideramos las rectas r≡ $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ y s≡ $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$

a) ***(0,75 puntos)*** Estudiar razonadamente la posición relativa de las rectas r y s

b) ***(0,5 puntos)*** Obtener la ecuación del plano que contenga a r y sea perpendicular a s. Hallar en ese caso la ecuación de dicho plano

c) ***(0,75 puntos)*** Obtener la proyección ortogonal del vector (1,1,-1) sobre el vector director de r.

a) Posición relativa de las rectas r y s.

- Expresamos la recta r en paramétricas para conocer un punto y su vector director:

$$z=1-x+y \Longrightarrow 2x+y-1+x-y=2 \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases} \Longrightarrow \quad P = (1,0,0) \qquad \overrightarrow{d_r} = (0,1,1)$$

- Recta s: $Q = (2,-1,0) \qquad \overrightarrow{d_s} = (3,2,-2)$

Los vectores directores $\overrightarrow{d_r}$ *y* $\overrightarrow{d_s}$ *no son proporcionales: por tanto r y s se cortan o se cruzan*

- *Tenemos que comprobar entonces si los vectores* $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{d_r}\ y\ \overrightarrow{d_s}$ *son o no coplanarios*
- *Los vectores* $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{d_r}\ y\ \overrightarrow{d_s}$ *son coplanarios* $\Longleftrightarrow$ *rang* $(\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{d_r},\ \overrightarrow{d_s})=2 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \end{vmatrix}=0$
- *Calculamos el determinante* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow$ *las rectas r y s se cruzan*

b) (0,5 puntos) Obtener la ecuación del plano que contenga a r y sea perpendicular a s. Hallar en ese caso la ecuación de dicho plano

- *Como el plano* π *ha de ser perpendicular a la recta s, el vector* $\overrightarrow{n_\pi}$ =(3,2,-2)
- *Entonces* $\pi = 3x+2y-2z+k=0$
- *Como contiene a la recta r, contiene a todos sus puntos y en particular al punto P*
  El punto $P=(1,0,0)$ *verifica por tanto la ecuación y* $3+k=0 \Longrightarrow k=-3$
  y obtenemos el plano $\pi = 3x+2y-2z-3=0$

c) (0,75 puntos) Obtener la proyección ortogonal del vector (1,1,-1) sobre el vector director de r.

- $proy_{\overrightarrow{d_r}}\, \vec{v} = \frac{<\vec{v},\overrightarrow{d_r}>}{\|\overrightarrow{d_r}\|^2}\, \overrightarrow{d_r}$=(0,0,0)
- Otra forma: Descomponemos $\vec{v} =$ (1,1,-1)=$\vec{s} + \vec{w}$ donde s=$proy_{\overrightarrow{d_r}}\, \vec{v}$ y $w\ ortogonal\ a\ \overrightarrow{d_r}$

  Entonces s=(0, λ, λ) y $w = (1{,}1,-1) - (0, \lambda, \lambda)$ =(1, 1- λ, -1- λ)

  Imponemos que $\vec{w}\ sea\ ortogonal\ a\ \overrightarrow{d_r}$ $\Longleftrightarrow$ < $\vec{w}$, $\overrightarrow{d_r}$ > 1- λ-1- $\lambda = 0$ $\Longleftrightarrow$ λ=0

- Entonces $proy_{\overrightarrow{d_r}}\, \vec{v}$ =(0,0,0)

Examen Parcial

Cuestiones

Cuestión 1 (1 punto)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, razonar si es posible encontrar una matriz M de rango 1 tal que AM=B

- Para que AM=B la matriz M tiene que ser cuadrada de dimensión 2x2
- Además si AM=B det(AM)=detB .

  Si M tiene rango 1, detM=0 y como det(AM)=detA.detM=0 pero detB=1$\neq$ 0
- Por tanto, no puede existir ninguna matriz M de rango 1 que verifique dicha ecuación.

Cuestión 2 (1 punto)

Calcular el determinante de la matriz M=$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sabiendo que $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}$=8

$$8 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 2\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-4\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Cuestión 3 (1 punto)

Dado el vector columna v=$\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ $determinar\ para\ qué\ valores\ de\ se\ cumple\ que\ vv^t v{=}v$

- $vv^tv = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ (a a a)$\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}.3a^2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $3a^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ a=$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
- Y de forma trivial, a=0 verifica también la expresión

Cuestión 4 (1 punto)

Razonar si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS:

Un sistema de n+1 ecuaciones y n incógnitas tal que el rango de su matriz ampliada es n + 1 puede ser compatible indeterminado.

- FALSO. Si el rango de A* es n+1, como tiene n incógnitas rang A<n+1 y por tanto el sistema sería incompatible.

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tal que el rango de la matriz de coeficientes es igual al número de incógnitas puede ser compatible indeterminado

- FALSO. El sistema es homogéneo y por tanto es compatible: por el teorema de Rouché: rang A=rang A* . Si el rango de A es igual al número de incógnitas, el sistema será compatible determinado