Cálculo

Tema 2

Límites de funciones

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2023-2024

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

utad

1 Concepto de límite

1.1 Definición

Sea $f(x)$ una función real de variable real definida en un intervalo abierto que contiene a x_0 (aunque es posible que la función no esté definida en el propio valor x_0) y sea L un número real.

Se dice que L es el límite de $f(x)$ en x_0, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

cuando para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

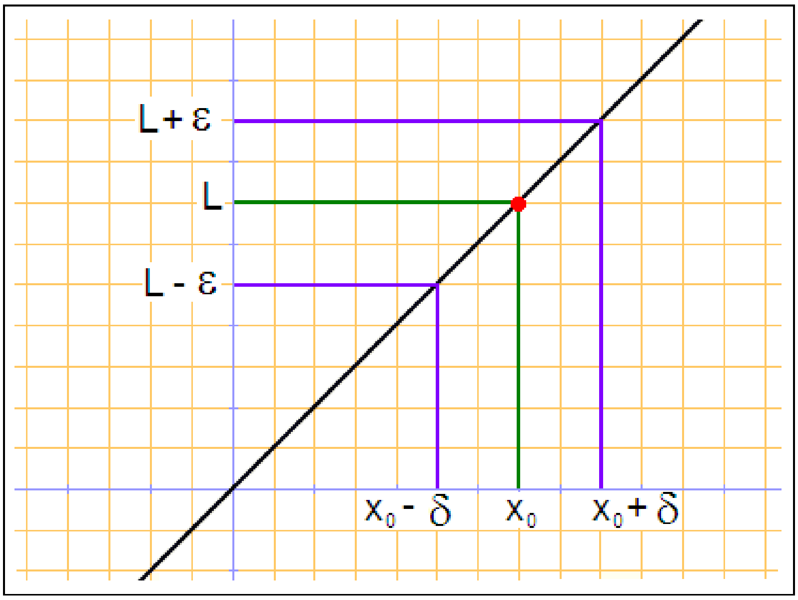

Figura 1: Representación gráfica del concepto de límite

La anterior definición ϵ-δ fue utilizada por primera vez por el matemático Cauchy, y significa que según el valor de la variable x se acerca a x_0, de forma equivalente el valor de $f(x)$ se aproxima a L. La desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$ indica la proximidad deseada entre $f(x)$ y L, mientras que la desigualdad $0 < |x - x_0| < \delta$ fija la proximidad que debe existir entre x y x_0 para que se cumpla la condición $|f(x) - L| < \epsilon$.

Dada una función real de variable real, existen varios procedimientos para obtener el límite en un punto x_0:

1) Numéricamente, formando una tabla con valores de x y $f(x)$.

2) De manera gráfica, obteniendo visualmente el límite.

3) Utilizando la definición ϵ-δ de límite.

4) Mediante un procedimiento analítico, utilizando distintas propiedades.

Ejercicio 1

Calcula $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ mediante el procedimiento numérico, dada la función $f(x) = x^2$.

Ejercicio 2

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ mediante el procedimiento gráfico, dada la función $f(x) = x^3$.

Ejercicio 3

Comprueba que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$ utilizando la definición de límite, dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

En los siguientes apartados nos centraremos en el procedimiento analítico.

1.2 Teoremas derivados de la definición

Teorema 1

Si existe el límite de una función en un punto, entonces dicho límite es único.

Teorema 2

Si existe el límite de una función en un punto, entonces existe un entorno del punto (que puede tomarse como un intervalo centrado en el punto) tal que la función está acotada en dicho entorno.

1.3 Límites laterales

En las funciones reales de variable real, es posible aproximarse al punto x_0 a través de dos trayectorias de la recta real: desde la izquierda del punto, y desde la derecha. Los conceptos de límite por la izquierda y por la derecha en un punto x_0 toman en consideración solo los valores de $f(x)$ en los puntos respectivamente a la izquierda y derecha de x_0.

El límite de $f(x)$ en x_0 por la izquierda se escribe $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y está definido de la siguiente manera:

$$\boxed{\lim_{x \to +x_0^-} f(x) = L \ \text{ si } \forall \, \epsilon > 0 \ \exists \, \delta(\epsilon) \text{ tal que si } 0 < x_0 - x < \delta(\epsilon) \text{, entonces } |f(x) - L| < \epsilon}$$

El límite de $f(x)$ en x_0 por la derecha se escribe $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ y está definido de la siguiente manera:

$$\boxed{\lim_{x \to +x_0^+} f(x) = L \ \text{ si } \forall \, \epsilon > 0 \ \exists \, \delta(\epsilon) \text{ tal que si } 0 < x - x_0 < \delta(\epsilon) \text{, entonces } |f(x) - L| < \epsilon}$$

Teorema 3

El límite de una función en un punto existe si y solo si existen los dos límites laterales y, además, estos tienen el mismo valor.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

Como consecuencia del teorema anterior, al calcular el límite de una función en un punto es fundamental calcular sus dos límites laterales y comprobar si coinciden.

1.4 Existencia del límite

La existencia de límite en un punto no está afectada por el valor de la función en dicho punto.

Ejemplo 1

La función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

tiene como límite cuando x tiende a 2 el valor 1, a pesar de que $f(2) = 0$. Lo mismo hubiera ocurrido si la función hubiera estado definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$$

Existen tres tipos de causas por las que una función $f(x)$ puede carecer de límite en un punto x_0:

1) $f(x)$ tiende a valores diferentes según x tienda a x_0 por la izquierda o por la derecha.

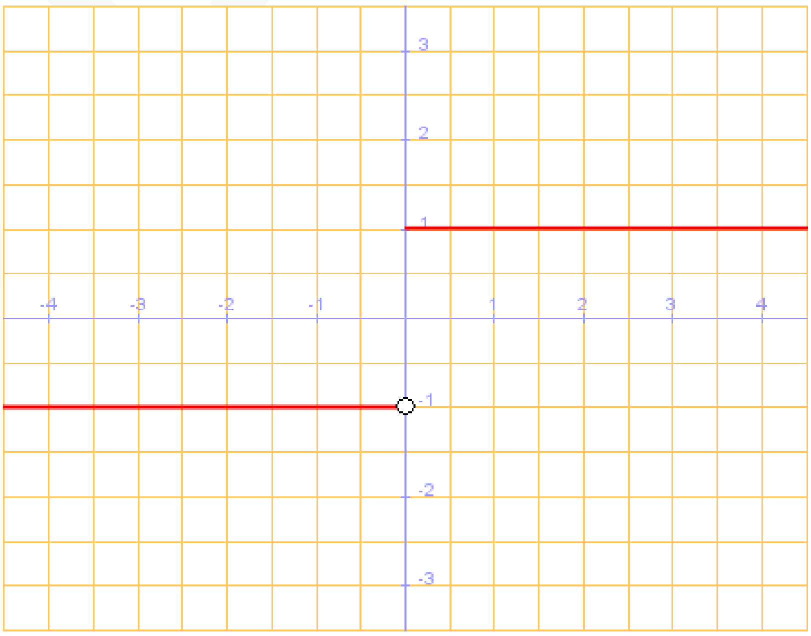

Figura 2: Función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

2) $f(x)$ tiende hacia $+\infty$, hacia $-\infty$ o hacia ambos valores (uno por cada lado) cuando x tiende a x_0. En la Figura 3 la función tiende a $+\infty$ a ambos lados del punto x_0, mientras que en la Figura 4 la función tiende a $-\infty$ a la izquierda y a $+\infty$ a la derecha del punto x_0.

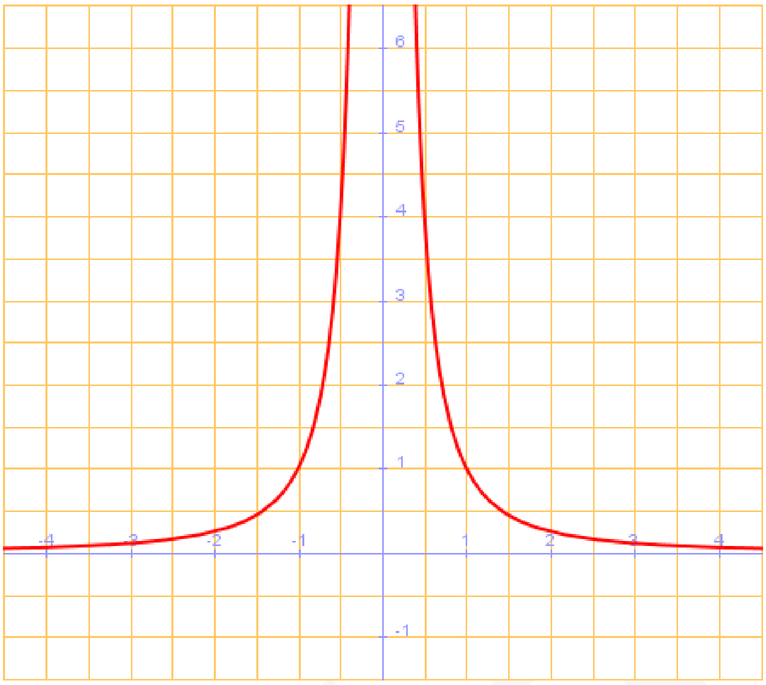

Figura 3: Función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

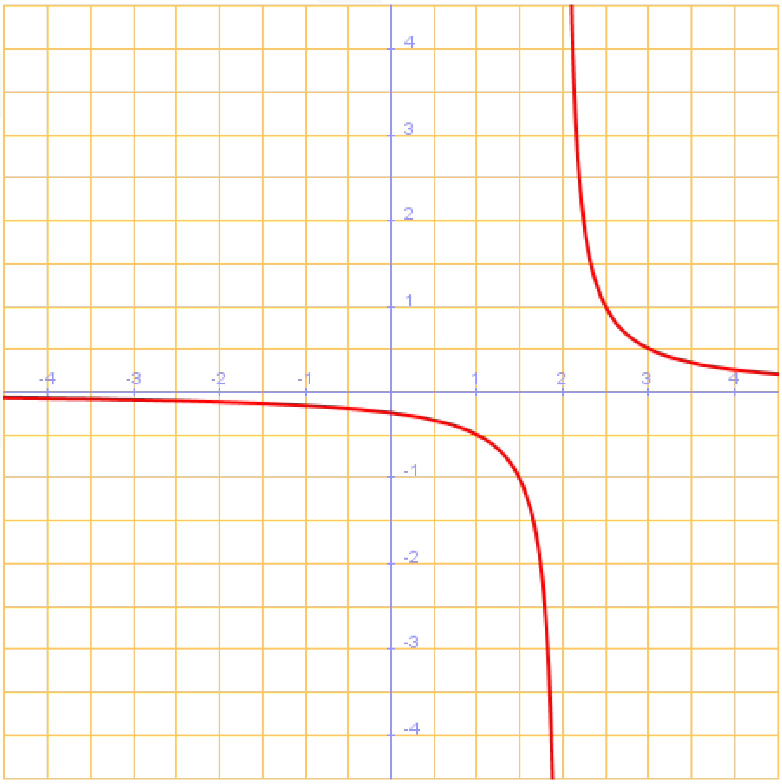

Figura 4: Función $f(x) = \dfrac{0.5}{x-2}$

3) $f(x)$ oscila en un rango entre dos valores definidos cuando x tiende a x_0.

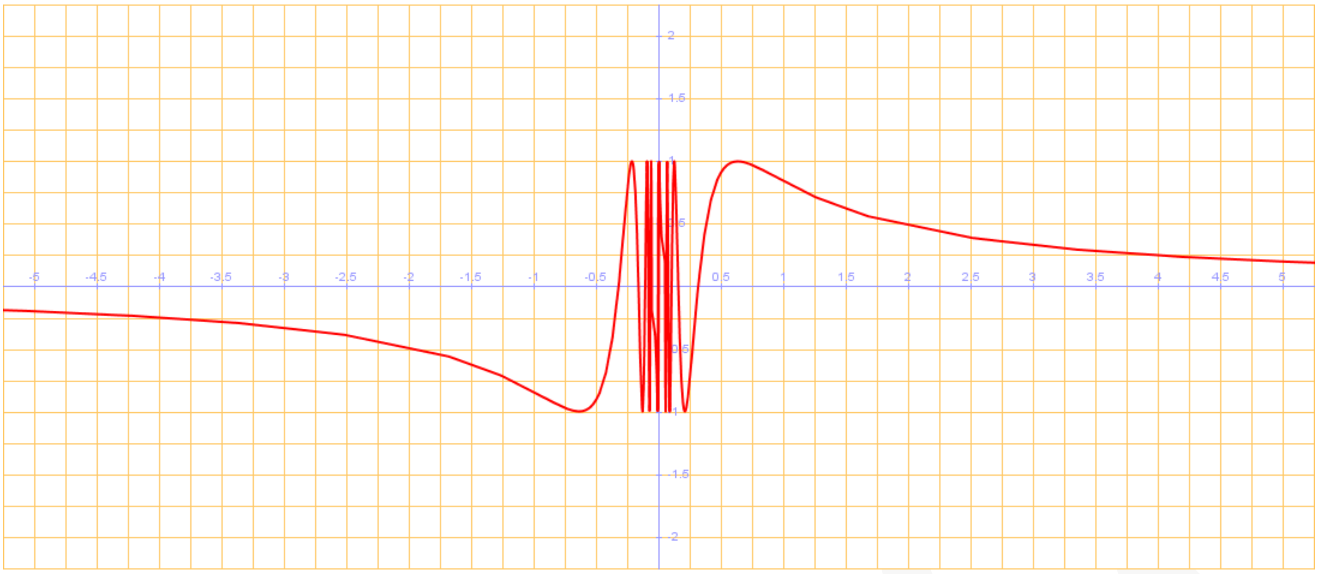

Figura 5: Función $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Existen muchas otras funciones con comportamientos inusuales en lo que se refiere a los límites. Por ejemplo, la función de Dirichlet definida de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

carece de límite para cualquier número real.

2 Propiedades de los límites

Siendo $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites en x_0 existen y valen L y M respectivamente, se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = L \cdot M$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (si $M \neq 0$)

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x)\big)^n = L^n$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \text{Ln}\big(f(x)\big) = \text{Ln}(L)$ (si $L > 0$)

6) $\lim\limits_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^L$ (si $a > 0$)

7) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = L^M$ (si $L > 0$)

8) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$

3 Resultados posibles al operar con límites

A continuación se recogen los resultados que pueden aparecer al operar con límites. En todos ellos la variable k representa un número real positivo ($k > 0$).

$+\infty \pm k = +\infty$ $\quad$ $-\infty \pm k = -\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$ $\quad$ $-\infty - \infty = -\infty$

$+\infty - \infty$: INDETERMINACIÓN $\quad$ $-\infty + \infty$: INDETERMINACIÓN

$\pm\infty \cdot k = \pm\infty$ $\quad$ $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

$\pm\infty \cdot \mp\infty = \mp\infty$ $\quad$ $\pm\infty \cdot 0$: INDETERMINACIÓN

$\frac{k}{0} = +\infty$ $\quad$ $\frac{k}{\pm\infty} = 0$

$\frac{0}{k} = 0$ $\quad$ $\frac{0}{0}$: INDETERMINACIÓN

$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$ $\quad$ $\frac{0}{\pm\infty} = 0$

$\frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$ $\quad$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$: INDETERMINACIÓN

$k^0 = 1$ $\quad$ $k^{+\infty} = +\infty$ (si $k > 1$) $\quad$ $+\infty^{-\infty} = 0$

$0^k = 0$ $\quad$ $k^{-\infty} = 0$ (si $k > 1$) $\quad$ $\pm\infty^k = \pm\infty$

$0^{-k} = +\infty$ $\quad$ $k^{+\infty} = 0$ (si $k < 1$) $\quad$ 0^0: INDETERMINACIÓN

$0^{+\infty} = 0$ $\quad$ $k^{-\infty} = +\infty$ (si $k < 1$) $\quad$ ∞^0: INDETERMINACIÓN

$0^{-\infty} = +\infty$ $\quad$ $+\infty^{+\infty} = +\infty$ $\quad$ $1^{+\infty}$: INDETERMINACIÓN

4 Cálculo de límites por sustitución directa

4.1 Límites básicos

1) Sea $f(x)$ la función constante $f(x)=a$, y sea x_0 un número real. Entonces $\lim\limits_{x\to x_0} a = a$.

Ejemplo 3

$\lim\limits_{x\to 3} 5 = 5.$

2) La función identidad $f(x)=x$ verifica $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Ejemplo 4

$\lim\limits_{x\to 3} x = 3.$

3) La función $f(x)=x^n$ verifica $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = (x_0)^n$.

Ejemplo 5

$\lim\limits_{x\to 3} x^3 = 3^3 = 27.$

4.2 Límites de funciones polinómicas

Sea $p(x)$ una función polinómica y sea x_0 un número real. Entonces $\lim\limits_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$.

Ejemplo 6

$\lim\limits_{x\to 3} \left(-x^2+x+1\right) = -(3)^2+(3)+1 = -5.$

4.3 Límites de funciones racionales

Sea $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ una función racional, y x_0 un número real tal que $q(x_0)\neq 0$. Entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$

Ejemplo 7

$\lim\limits_{x\to 1} \left(-3+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x^2}\right) = -3+\dfrac{1}{(1)-3}+\dfrac{2}{(1)^2} = -\dfrac{3}{2}.$

Ejemplo 8

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-3+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x^2}\right) = -3+\dfrac{1}{(\infty)-3}+\dfrac{2}{(\infty)^2} = -3+\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{2}{\infty} = -3+0+0 = -3.$

4.4 Límites de funciones radicales

Sea n un entero positivo. El siguiente límite es válido para todo x_0 si n es impar, y para todo $x_0 > 0$ si n es par.

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

Ejemplo 9

$\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3.$

Ejemplo 10

$\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-8} = -2.$

4.5 Límites de funciones compuestas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ y $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f(L)$$

Ejercicio 4

Calcula $\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x)$, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 4$.

4.6 Límites de funciones trigonométricas

Sea x_0 un número real en el dominio de la función trigonométrica dada. Entonces

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \tan(x) = \tan(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{cosec}(x) = \operatorname{cosec}(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \sec(x) = \sec(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \operatorname{cotan}(x) = \operatorname{cotan}(x_0)$$

Ejemplo 11

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2(x) = \lim_{x \to 0} \big(\operatorname{sen}(x)\big)^2 = \big(\operatorname{sen}(0)\big)^2 = 0^2 = 0.$

Ejemplo 12

$\lim_{x \to \pi} \big(x \cdot \cos(x)\big) = \left(\lim_{x \to \pi} x\right) \cdot \left(\lim_{x \to \pi} \cos(x)\right) = \pi \cdot \cos(\pi) = \pi \cdot (-1) = -\pi.$

Ejemplo 13

$$\lim_{x\to 0} \tan(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

A continuación se presentan dos límites trigonométricos especiales:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

Ejemplo 14

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\cdot\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = 1 \cdot \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

5 Funciones que coinciden salvo en un punto

Sea x_0 un número real y sea $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq x_0$ en un intervalo abierto que contiene a x_0. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a x_0, entonces también existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 y dicho límite es

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Ejercicio 5

Calcula $\lim_{x\to 1} \left(x^2+x+1\right)$ y $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.

6 Teorema del encaje

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene al punto x_0 (excepto posiblemente x_0), y

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Ejercicio 6

Calcula $\lim_{x\to 3} f(x)$ mediante el teorema del encaje dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 3$, $h(x) = -x^2+6x-7$ y $g(x) = x^2-6x+11$.

7 Infinitésimos equivalentes

Se dice que una función es un infinitésimo para $x = x_0$ si se cumple que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Los siguientes infinitésimos son equivalentes y pueden ser utilizados en el cálculo de los límites siempre que aparezcan como factores multiplicando o dividiendo:

$$\operatorname{sen}\big(f(x)\big) \sim \tan\big(f(x)\big) \sim \operatorname{arc\,sen}\big(f(x)\big) \sim \arctan\big(f(x)\big) \sim \operatorname{Ln}\big(1+f(x)\big) \sim f(x)$$

$$1-\cos\big(f(x)\big) \sim \frac{\big(f(x)\big)^2}{2} \qquad \big(1+f(x)\big)^n - 1 \sim nf(x)$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x) \qquad a^{f(x)} - 1 \sim f(x)\operatorname{Ln}(a)$$

$$\sqrt[n]{1+f(x)} - 1 \sim \frac{f(x)}{n}$$

En la siguiente imagen pueden observarse de forma gráfica las equivalencias entre infinitésimos de distintos tipos.

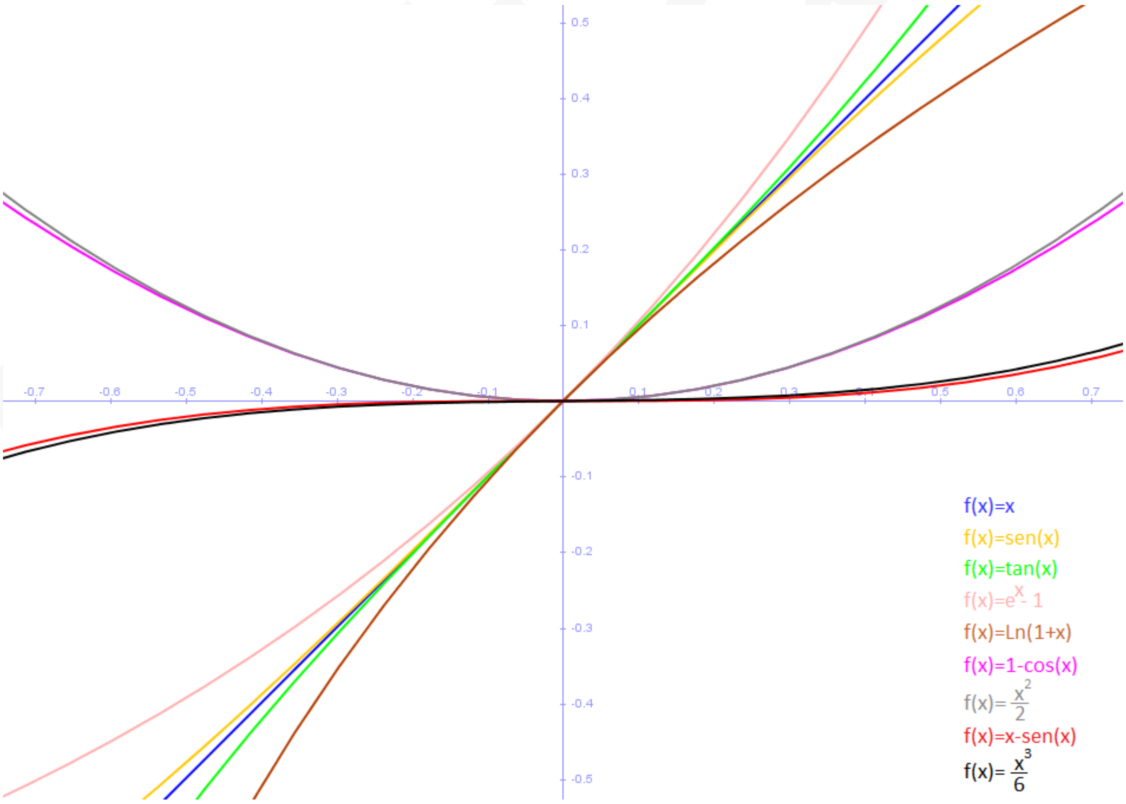

Figura 6: Infinitésimos de algunas funciones representativas

Al calcular límites se pueden sustituir los infinitésimos que aparezcan como factores de productos o cocientes por otros equivalentes, sin que el límite varíe. Sin embargo, esto no es válido en general para las sumas, por lo que no debe emplearse este método en esos casos.

Ejemplo 15

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \approx \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Ejemplo 16

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \approx \lim_{x\to 0} \frac{a\,x}{b\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Ejemplo 17

$$\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 1}{e^x - 1} = \frac{10^0 - 1}{e^0 - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \approx \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{Ln}(10)}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{Ln}(10) = \operatorname{Ln}(10).$$

8 Límites infinitos

Se dice que una función es infinitamente grande, o que es un infinito, cuando $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Dos infinitos se dice que son del mismo orden cuando su cociente tiene un límite finito. Dos infinitos se llaman equivalentes cuando su cociente tiene como límite la unidad. Al calcular límites se pueden sustituir los infinitos que aparezcan como factores de productos o cocientes por otros equivalentes, sin que el límite varíe.

Para $x > M$, con M lo suficientemente grande, se verifican las siguientes desigualdades:

$$\boxed{\big(\operatorname{Ln}(x)\big)^a < x^b < c^x < x^x \qquad (a, b > 0,\ c > 1)}$$

9 Formas indeterminadas

9.1 Límites del tipo 0/0

Este tipo de indeterminación puede aparecer en distintos casos, según si se emplean polinomios o raíces.

1) En el caso de fracciones de polinomios, el que se anulen numerador y denominador indica que ambos términos son divisibles por el mismo factor, por lo que la indeterminación se resuelve eliminando el factor común antes de calcular el límite.

Ejercicio 7

Calcula $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 2x - 4}$.

2) Cuando en la indeterminación del tipo 0/0 aparezcan raíces, la forma de resolverlo consistirá en multiplicar el numerador y el denominador por la forma conjugada apropiada. Algunas fórmulas útiles son:

$$\sqrt{u}-\sqrt{v}=\frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}} \qquad \sqrt{u}-v=\frac{u-v^2}{\sqrt{u}+v} \qquad \sqrt{u}+v=\frac{u-v^2}{\sqrt{u}-v}$$

Ejercicio 8

Calcula $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

Ejercicio 9

Calcula $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4x^2+13}-7}{6-2x}$.

9.2 Límites del tipo ∞/∞

En el caso de fracciones de polinomios, esta indeterminación se puede resolver dividiendo numerador y denominador por la máxima potencia.

Ejercicio 10

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-2x-4}$.

Ejercicio 11

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^4-2x+4}{3x^5+x^2-2}$.

9.3 Límites del tipo $\infty-\infty$

En el caso de raíces, se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado de la raíz, tal como puede comprobarse en los siguientes ejercicios.

Ejercicio 12

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-x$.

Ejercicio 13

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$.

9.4 Límites del tipo 1^∞

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites en el punto x_0 son 1 y $+\infty$ respectivamente. Entonces, para calcular

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)}$$

podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^A \qquad A = \lim_{x\to x_0} \left(f(x)-1\right)g(x)}$$

Demostración

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1+f(x)-1\right)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left[\left(1+f(x)-1\right)^{\frac{1}{(f(x)-1)}}\right]^{(f(x)-1)g(x)} = e^A$$

Otro método válido consiste en utilizar la siguiente expresión:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^A \qquad A = \lim_{x\to x_0} g(x)\,\mathrm{Ln}\big(f(x)\big)}$$

Demostración

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\mathrm{Ln}(f(x))^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\,\mathrm{Ln}(f(x))} = e^A$$

Ejercicio 14

Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ejercicio 15

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x-5}{3x-2}\right)^{2x^2}$.

Ejercicio 16

Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x^4}\right)^{\frac{3}{\operatorname{arc\,sen}(x^4)}}$.

9.5 Límites del tipo $\infty \cdot 0$

Las indeterminaciones del tipo $\infty \cdot 0$ se resuelven transformándolas en indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, teniendo en cuenta que $x = \dfrac{1}{1/x}$.

Ejercicio 17

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}-1\right)$.

9.6 Límites del tipo 0^0

Las indeterminaciones del tipo 0^0 se pueden resolver teniendo en cuenta la siguiente fórmula ya vista anteriormente:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)} = e^A \qquad A = \lim_{x\to x_0} g(x)\mathrm{Ln}\big(f(x)\big)$$

Ejercicio 18

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{2x^2-5}\right)^{\frac{x-2}{x^2+3}}$.

9.7 Límites del tipo ∞^0

Las indeterminaciones del tipo ∞^0, al igual que las del tipo anterior, se pueden resolver teniendo en cuenta la siguiente fórmula ya vista anteriormente:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)} = e^A \qquad A = \lim_{x\to x_0} g(x)\mathrm{Ln}\big(f(x)\big)$$

Ejercicio 19

Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+}\big(\mathrm{cotan}(x)\big)^{\mathrm{sen}(x)}$.

10 Regla de L'Hopital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un entorno de x_0, entonces:

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, y existe $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, y existe $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Ejercicio 20

Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x-10}{2x^2-2x-4}$ utilizando la regla de L'Hopital.

Ejercicio 21

Calcula $\lim\limits_{x \to +2} \frac{\operatorname{Ln}(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ utilizando la regla de L'Hopital.

Ejercicio 22

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(3x)}{x+\operatorname{sen}(5x)}$ utilizando la regla de L'Hopital.

11 Inexistencia del límite

A continuación se muestran varios ejemplos de límites que no existen.

Ejercicio 23

Calcula $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$.

Ejercicio 24

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ejercicio 25

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} e^{|x|/x}$.

12 Problemas

1) Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \left(x+e^x\right)^{1/x}$.

2) Calcula $\lim\limits_{x \to 0^+} x\operatorname{Ln}(x)$.

3) Calcula $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$.

4) Calcula $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\operatorname{Ln}(x)}-\frac{1}{x-1}\right)$.

5) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x}$.

6) Calcula $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/x}$.

7) Calcula $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-7x^2+7x-2}{x^2-4}$.

8) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

9) Calcula $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{Ln}(x)}{x-1}$.

10) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Ln}(1+4x)}{x}$.

11) Calcula $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

12) Calcula $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^3+125}{x+5}$.

13) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}$.

14) Calcula $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$.

15) Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x-\dfrac{1}{x^3}\right)$.

16) Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{Ln}(x)$.

17) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{Ln}\big(\mathrm{sen}(x)\big)$.

18) Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(\mathrm{sen}(x)\big)^x$.

19) Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

20) Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(x-\mathrm{Ln}(x)\big)$.

21) Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

22) Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

23) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\,\mathrm{sen}(1/x)}{\mathrm{sen}(x)}$.

24) Calcula $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{sen}(x-a)}{x^2-a^2}$.

25) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)}{\operatorname{Ln}\left(1+\dfrac{x+3}{x^2+7}\right)}$.

26) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}$.

27) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}$.

28) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}}$.

29) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{4x}$.

30) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \arctan(x/2)}{\cos(x)\operatorname{sen}^3(2x)}$.

31) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+\operatorname{sen}(x)}{3x}$.

32) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$.

33) Calcula $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^2+\operatorname{sen}(x-1)\right)^{\frac{1}{x^2-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)}}$.

34) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}}$.

35) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{\operatorname{sen}(x)}$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- R. E. Larson, R. P. Hostetler y B. H. Edwards. *Cálculo*. Ed. McGraw-Hill.
- M. Bilbao, F. Castañeda y J. C. Peral. *Problemas de cálculo*. Ed. Pirámide.
- M. Anzola, J. Caruncho y G. Pérez-Canales. *Problemas de análisis. Tomo I*. Ed. Primer Ciclo.
- D. Pestana Galván, J. M. Rodríguez García y E. Tourís Lojo. *Curso Cero: Apuntes de Matemáticas*. Universidad Carlos III Madrid.
- G. Jarne, E. Minguillón y T. Zabal. *Curso básico de matemáticas para estudiantes de Económicas y Empresariales*. Universidad de Zaragoza.
- Wiris. https://www.educa2.madrid.org/web/matematicas/fuentes-de-recursos/-/visor/wiris-la-calculadora-online