Cálculo

Tema 6

Integrales indefinidas

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2023-2024

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Definiciones

Dada una función $f(x)$ real de variable real, se llama **función primitiva** de $f(x)$ a toda función $F(x)$ que verifique la expresión $F'(x) = f(x)$. A $F(x)$ se le llama también **integral indefinida** de $f(x)$ y se denota mediante la siguiente expresión:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

A la función $f(x)$ así expresada se le denomina **integrando**. Al referirnos a $F(x)$, se dice que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, puesto que en realidad para una función $f(x)$ existen infinitas primitivas $F(x)$. Es decir, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(x)+C$ también es una primitiva de $f(x)$, donde C representa el valor de una constante, ya que al calcular la derivada se cumple que $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$, y por ello habitualmente se escribe de la siguiente forma, donde la constante C se denomina **constante de integración**.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$$

En cuanto a la terminología, podemos dividir las integrales en dos grandes grupos: las integrales indefinidas y las integrales definidas, que serán objeto de estudio en el siguiente tema.

2 Propiedades

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales de variable real, y k es una constante, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2) $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

De forma equivalente, es importante aclarar que las siguientes propiedades no se cumplen en general:

- $\displaystyle\int (f(x)\cdot g(x))dx \neq \left(\int f(x)dx\right)\cdot\left(\int g(x)dx\right)$
- $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$
- $\displaystyle\frac{1}{g(x)}\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx$

3 Integrales elementales o inmediatas

Las siguientes integrales elementales se pueden obtener utilizando directamente la tabla de derivadas incluida en el Tema 4.

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \left(n \neq -1\right)$

$$\int u'(x)u(x)^n dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad \left(n \neq -1\right)$$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \mathrm{Ln}(|x|) + C \quad \left(x \neq 0\right)$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \mathrm{Ln}(|u(x)|) + C \quad \left(u(x) \neq 0\right)$$

3) $\int e^x dx = e^x + C$

$$\int u'(x)e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C$$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{Ln}(a)} + C \quad \left(a > 0, a \neq 1\right)$

$$\int u'(x)a^{u(x)} dx = \frac{a^{u(x)}}{\mathrm{Ln}(a)} + C \quad \left(a > 0, a \neq 1\right)$$

5) $\int \mathrm{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$

$$\int u'(x)\,\mathrm{sen}(u(x)) dx = -\cos\left(u(x)\right) + C$$

6) $\int \cos(x) dx = \mathrm{sen}(x) + C$

$$\int u'(x)\cos\left(u(x)\right) dx = \mathrm{sen}\left(u(x)\right) + C$$

7) $\int \tan(x) dx = -\mathrm{Ln}(|\cos(x)|) + C \quad \left(x \neq \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right)$

$$\int u'(x)\tan(u(x)) dx = -\mathrm{Ln}\left(\left|\cos\left(u(x)\right)\right|\right) + C \quad \left(u(x) \neq \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

8) $$\int \sec(x)dx = \mathrm{Ln}(|\sec(x)+\tan(x)|)+C \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\int u'(x)\sec(u(x))dx = \mathrm{Ln}\left(\left|\sec\left(u(x)\right)+\tan\left(u(x)\right)\right|\right)+C \quad \left(u(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

9) $$\int \operatorname{cosec}(x)dx = -\mathrm{Ln}(|\operatorname{cosec}(x)+\operatorname{cotan}(x)|)+C \quad (x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

$$\int u'(x)\operatorname{cosec}(u(x))dx = -\mathrm{Ln}\left(\left|\operatorname{cosec}(u(x))+\operatorname{cotan}(u(x))\right|\right)+C \quad \left(u(x)\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

10) $$\int \operatorname{cotan}(x)dx = \int \frac{1}{\tan(x)}dx = \mathrm{Ln}(|\operatorname{sen}(x)|)+C \quad (x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

$$\int u'(x)\operatorname{cotan}(u(x))dx = \mathrm{Ln}\left(\left|\operatorname{sen}\left(u(x)\right)\right|\right)+C \quad \left(u(x)\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

11) $$\int \sec^2(x)dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x)+C \quad \left(x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\int u'(x)\sec^2(u(x))dx = \int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}dx = \tan\left(u(x)\right)+C \quad \left(u(x)\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

12) $$\int \operatorname{cosec}^2(x)dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}dx = -\operatorname{cotan}(x)+C = -\frac{1}{\tan(x)}+C \quad (x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

$$\int u'(x)\operatorname{cosec}^2(u(x))dx = -\operatorname{cotan}\left(u(x)\right)+C = -\frac{1}{\tan\left(u(x)\right)}+C \quad \left(u(x)\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

13) $$\int \sec(x)\tan(x)dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}dx = \sec(x)+C \quad \left(x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\int u'(x)\sec(u(x))\tan(u(x))dx = \sec\left(u(x)\right)+C \quad \left(u(x)\neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

14) $$\int \operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotan}(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}dx = -\operatorname{cosec}(x)+C \quad (x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

$$\int u'(x)\operatorname{cosec}(u(x))\operatorname{cotan}(u(x))dx = -\operatorname{cosec}(u(x))+C \quad \left(u(x)\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

15) $$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x)+C$$

$$\int \frac{u'(x)}{(u(x))^2+1}dx = \arctan\left(u(x)\right)+C$$

16) $$\int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)+C \quad (a>0)$$

$$\int \frac{u'(x)}{(u(x))^2+a}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{u(x)}{\sqrt{a}}\right)+C \quad (a>0)$$

17) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arc\,sen}(x)+C \quad \big(x\in(-1,+1)\big)$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-\big(u(x)\big)^2}}dx = \operatorname{arc\,sen}\big(u(x)\big)+C \quad \big(u(x)\in(-1,+1)\big)$$

Ejercicio 1

Calcular $\int \frac{8}{5}x^3\,dx$.

Ejercicio 2

Calcular $\int (5x^3-7x^2+3)dx$.

Ejercicio 3

Calcular $\int e^{4x}\,dx$.

Ejercicio 4

Calcular $\int 5xe^{3x^2+4}\,dx$.

Ejercicio 5

Calcular $\int \frac{1}{x-3}dx$.

Ejercicio 6

Calcular $\int \frac{1}{5x-3}dx$.

Ejercicio 7

Calcular $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$.

Ejercicio 8

Calcular $\displaystyle\int (7x+5)^8\,dx$.

Ejercicio 9

Calcular $\displaystyle\int (7x+5)^8\,dx$.

Ejercicio 10

Calcular $\displaystyle\int \frac{5}{6+7x^2}\,dx$.

Ejercicio 11

Calcular $\displaystyle\int 3\sqrt{5-2x}\,dx$.

Ejercicio 12

Calcular $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt[3]{6+3x}}\,dx$.

Ejercicio 13

Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}\,dx$.

4 Integrales racionales

Decimos que una función es una función racional, y la denotamos por $R(x)$, si es el cociente de dos polinomios. Es decir, si

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$.

Para la resolución de las integrales racionales es conveniente seguir los siguientes pasos:

1) Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador (es decir, si $n \geq m$), es necesario dividir el numerador entre el denominador. Si $C(x)$ es el cociente y $R(x)$ el resto de la división, se obtiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Al ser $C(x)$ un polinomio, su integral es inmediata, por lo que ya solo nos queda calcular la integral de una nueva función racional donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Nota: Si inicialmente el grado del numerador ya es estrictamente menor que el grado del denominador, no es necesario realizar este primer paso.

2) Comprobar a continuación si la función se puede tratar como una integral inmediata, en función de las siguientes fórmulas ya vistas en el apartado anterior:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \text{Ln}|u(x)| + C$$

$$\int u'(x)u(x)^n dx = \frac{\left(u(x)\right)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{(u(x))^2 + a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{u(x)}{\sqrt{a}}\right) + C$$

Ejercicio 14

Calcular $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 8x - 1}{x + 2} dx$.

Si no se puede utilizar ninguna de esas tres fórmulas, se pasa al siguiente punto.

3) Descomposición de la función racional en fracciones simples. El objetivo de este tercer paso es transformar la función, de forma que con la nueva expresión la función se pueda tratar como una integral elemental. De hecho, la idea es escribir la función racional como suma de funciones a las que sea posible aplicar alguna de las tres fórmulas del paso 2.

En los siguientes apartados se presentan las técnicas de descomposición a emplear en función del tipo de expresión racional.

4.1 Denominador como potencia de un polinomio de primer grado

En este caso, la descomposición a realizar tiene el siguiente aspecto:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Ejercicio 15

Calcular $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} dx$.

4.2 Denominador como producto de polinomios de primer grado distintos

De forma general la descomposición a realizar en este caso es la siguiente:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

Ejercicio 16

Calcular $\int \frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)} dx$.

Ejercicio 17

Calcular $\int \frac{1}{x^2-4x+3} dx$.

4.3 Denominador como producto de potencias de polinomios de primer grado

En este caso, la descomposición a realizar tiene el siguiente aspecto:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^r(x-a_2)^s\cdots(x-a_n)^t} =$$

$$= \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \cdots + \frac{A_{1r}}{(x-a_1)^r} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_{2s}}{(x-a_2)^s} + \frac{A_{n1}}{(x-a_n)} + \cdots + \frac{A_{nt}}{(x-a_n)^t}$$

Ejercicio 18

Calcular $\int \frac{x+1}{x(x^2+4x+4)} dx$.

Ejercicio 19

Calcular $\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)(x+1)} dx$.

4.4 Denominador como producto de polinomios de segundo grado (sin raíces reales) y potencias de polinomios de primer grado

Si el polinomio de segundo grado que no tiene raíces reales es de la forma (x^2+c), en su descomposición es necesario utilizar de forma general la expresión $(Mx+N)$ y, en casos especiales, (Px^2+Qx+R).

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^r(x-a_2)^s(x^2+c)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \cdots + \frac{A_{1r}}{(x-a_1)^r} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_{2s}}{(x-a_2)^s} + \frac{Mx+N}{(x^2+c)}$$

Ejercicio 20

Calcular $\int \frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2+1)} dx.$

Ejercicio 21

Calcular $\int \frac{x^5 - x + 2}{x^4 - 1} dx.$

En cambio, si el polinomio que no tiene raíces reales es de la forma $(x^2 + bx + c)$, entonces la técnica a utilizar consiste en determinar los valores α y β de la siguiente expresión equivalente:

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = (x+\alpha)^2 + \beta$$

De esta manera, ajustando los valores del numerador es posible conseguir integrales de tipo logarítmico y arcotangente.

Ejercicio 22

Calcular $\int \frac{x+3}{x^2 + x + 1} dx.$

5 Integración por partes

Como ya es conocido, la derivada de un producto de dos funciones está dada por la fórmula

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando ambos extremos de la igualdad, obtenemos lo siguiente:

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))' dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

De la expresión anterior se obtiene la siguiente:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Esta ecuación es la fórmula de integración por partes. Identificando los factores $u = f(x)$ y $v = g(x)$, se suele escribir de la siguiente forma:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Nota: En las anteriores expresiones, se ha utilizado la siguiente notación: si $u(x)$ es una función derivable, se define su diferencial como $du = u'(x)dx$.

En principio, la regla de integración por partes puede utilizarse siempre, aunque no se tengan garantías de obtener una integral inmediata. Sin embargo, existen unos casos en los que su uso es altamente recomendable, pues transforma la integral en otra más simple.

1) Si $P(x)$ es un polinomio y $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$ conviene integrar por partes en los siguientes casos buscando la equivalencia $u(x) = P(x)$:

$$\int P(x)e^{ax+b}dx \qquad \int P(x)\,\mathrm{sen}(ax+b)dx$$

$$\int P(x)(ax+b)^{\alpha}dx \qquad \int P(x)\cos(ax+b)dx$$

La razón para seguir esta estrategia es que las integrales anteriores serían elementales si $P(x)$ fuera una constante. Como al derivar el polinomio disminuye en una unidad su grado, al integrar por partes tantas veces como el grado de $P(x)$, se llega a una integral elemental.

Ejercicio 23

Calcular $\displaystyle\int x e^x dx$.

Ejercicio 24

Calcular $\displaystyle\int x^2 e^x dx$.

Ejercicio 25

Calcular $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(x)dx$.

Ejercicio 26

Calcular $\displaystyle\int 5x(3x+5)^{4/5}dx$.

2) Si $P(x)$ es un polinomio y $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, conviene integrar por partes en los siguientes casos buscando la equivalencia $dv = P(x)dx$:

$$\int P(x)\mathrm{Ln}(ax+b)dx \qquad \int P(x)\,\mathrm{arc\,sen}(ax+b)dx$$

$$\int P(x)\arccos(ax+b)dx \qquad \int P(x)\arctan(ax+b)dx$$

La razón para seguir esta estrategia es que las integrales anteriores no serían elementales aunque $P(x)$ fuera una constante. Sin embargo, las derivadas de estas funciones son mucho más fáciles de manipular.

Ejercicio 27

Calcular $\int x^3 \mathrm{Ln}(x) dx$.

6 Cambio de variable

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones y $g(x)$ es derivable, entonces:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Para llegar a esta fórmula lo que se ha realizado es el cambio de variable $x = g(t)$, siguiendo el siguiente razonamiento:

$$x = g(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dx} = \frac{dg(t)}{dx} \quad \Longrightarrow \quad 1 = \frac{dg(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = g'(t)\frac{dt}{dx} \quad \Longrightarrow \quad dx = g'(t)dt$$

Si se aplica un cambio de variable, la integral inicial se transforma en otra. Por lo tanto, si se consigue resolver la nueva integral, el resultado depende de una variable que no es la original, por lo que es necesario deshacer el cambio tras haber resuelto la integral. Como comentario adicional, al método del cambio de variable también se le denomina a veces método de sustitución.

En principio, se puede aplicar cualquier cambio de variable que tenga sentido (por ejemplo, no tiene sentido realizar el cambio $x = \mathrm{Ln}(-t^2)$, ya que el argumento del logaritmo sería negativo para cualquier valor de la variable). A continuación se presentan algunos tipos de funciones para los que se conocen cambios de variable que suelen simplificar considerablemente las integrales.

1) Para calcular la integral de una función en la que aparezca e^x, se puede hacer el cambio de variable $t = e^x$, ya que entonces $x = \mathrm{Ln}(t)$ y $t dx = dt$. En los casos con varios exponentes distintos, suele ser más cómodo utilizar el máximo común divisor de los exponentes.

Ejercicio 28

Calcular $\int \frac{1}{e^x - 1} dx$.

Ejercicio 29

Calcular $\int \frac{e^{6x}}{e^{2x} + 1} dx$.

2) Para calcular la integral de una función con componentes $(a + bx)^{1/p_1}, (a + bx)^{1/p_2}, \ldots, (a + bx)^{1/p_m}$, con $p_1, p_2, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$, se puede hacer el cambio de variable $(a + bx) = t^n$, donde $n = m.c.m.(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, ya que entonces $(a + bx)^{1/p_j} = t^{n/p_j}$ y $n/p_j \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 30

Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx.$

Ejercicio 31

Calcular $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx.$

3) Para calcular la integral de una función racional en la que aparece el término $\sqrt{a^2-x^2}$, se puede hacer el cambio de variable $x = a\,\text{sen}(t)$, con lo que $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos(t)$.

Ejercicio 32

Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx.$

4) Para calcular la integral de una función racional en la que aparece el término $\sqrt{x^2-a^2}$, se puede hacer el cambio de variable $x = a\sec(t)$, con lo que $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan(t)$.

Ejercicio 33

Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx.$

7 Integrales trigonométricas

En las integrales trigonométricas es posible emplear las relaciones trigonométricas más conocidas, y que ya fueron presentadas en el Tema 1:

$$\text{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad \tan^2(x)+1=\sec^2(x) \qquad 1+\text{cotan}^2(x)=\text{cosec}^2(x)$$

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$2\,\text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta)=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) \implies \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$2\cos(\alpha)\cos(\beta)=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta) \implies \cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$2\,\text{sen}(\alpha)\cos(\beta)=\text{sen}(\alpha-\beta)+\text{sen}(\alpha+\beta) \implies \text{sen}(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\text{sen}(\alpha-\beta)+\text{sen}(\alpha+\beta)}{2}$$

Ejercicio 34

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x)\cos(6x)dx$.

Además de las relaciones anteriores, a continuación se exponen algunos métodos adicionales para la resolución de integrales de la siguiente forma:

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)dx \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

1) Si m es impar y n es par, es conveniente utilizar el cambio de variable $t = \cos(x)$.

Ejercicio 35

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^6(x)dx$.

2) Si m es par y n es impar, es conveniente utilizar el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$.

Ejercicio 36

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$.

3) Si tanto m como n son impares, se pueden utilizar los dos cambios anteriores. Si $m > n$, es preferible utilizar el cambio $t = \operatorname{sen}(x)$. Si, por el contrario, $n > m$, es preferible emplear el cambio $t = \cos(x)$.

Ejercicio 37

Calcular $\displaystyle\int 2\operatorname{sen}^5(x)\cos^5(x)dx$.

4) Si tanto m como n son pares, en lugar de utilizar cambios de variable, conviene emplear las fórmulas del coseno del ángulo doble:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Ejercicio 38

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx$.

Por último, a continuación se detalla la forma de calcular las integrales racionales con senos y cosenos, las cuales se expresan de forma general de la siguiente forma:

$$\int R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))dx$$

1) Si la función es **impar en el seno**, es decir, si

$$R\big(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big) = -R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$$

entonces es conveniente utilizar el cambio de variable $t = \cos(x)$.

Ejercicio 39

Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}\,dx$.

2) Si la función es **impar en el coseno**, es decir, si

$$R\big(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)\big) = -R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$$

entonces es conveniente utilizar el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$.

Ejercicio 40

Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

3) Si la función es **par simultáneamente en el seno y coseno**, es decir, si

$$R\big(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)\big) = R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$$

entonces es conveniente utilizar el cambio de variable $t = \tan(x)$, con lo que se obtienen las siguientes relaciones:

$$dt = \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx \quad , \quad \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Ejercicio 41

Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

4) Si no estamos en ninguno de los tres casos anteriores, se puede aplicar el cambio $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Con este cambio resulta

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Ejercicio 42

Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen}(x)+4\cos(x)}\,dx$.

8 Problemas

1) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-4x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4-4x^3+4x^2}dx$

3) $\displaystyle\int (2x^3-5x+3)e^{-x}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{3x^3+4x^2+3x-1}{2x^4+2x^2}dx$

5) $\displaystyle\int (x^2-3x+2)e^{x}dx$

6) $\displaystyle\int (x+2)\mathrm{Ln}(x+3)dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x-3}dx$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$

9) $\displaystyle\int \frac{2x^2+9x-1}{x^2+2x-3}dx$

10) $\displaystyle\int \frac{3x-10}{x^2+2x+1}dx$

11) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x-3}dx$

12) $\displaystyle\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}dx$

13) $\displaystyle\int \frac{-x^3+3x^2-7x+1}{x^4-x^3-x^2+x}dx$

14) $\displaystyle\int \frac{3x^3+4x^2+3x-1}{2x^4+2x^2}dx$

15) $\displaystyle\int (x^2-3x+2)e^{x}dx$

16) $\int (x+2)\text{Ln}(x+3)dx$

17) $\int x^3 e^{2x} dx$

18) $\int x^3 e^{x^2} dx$

19) $\int \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x+3} dx$

20) $\int \cos(5x)\,\text{sen}(3x) dx$

21) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

22) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

23) $\int \frac{e^{5x}+8}{e^{3x}-8} dx$

24) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

25) $\int \frac{1}{\cos^2(x)\,\text{sen}^6(x)} dx$

26) $\int \frac{1}{7x^2-8} dx$

27) $\int \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx$

28) $\int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx$

29) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

30) $\int x(3x+1)^7 dx$

31) $\int \cos^3(x)dx$

32) $\int e^x \cos 2x\,dx$

33) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

34) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$

35) $\int x\,\mathrm{sen}^2(x)dx$

36) $\int \frac{1}{4x^2+4x+2}dx$

37) $\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$

38) $\int \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)\left(1+\cos^2(x)\right)}dx$

39) $\int \frac{1}{2-\cos(x)}dx$

40) $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$

41) $\int \frac{1}{\cos(x)+2\,\mathrm{sen}(x)+3}dx$

42) $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}dx$

43) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}dx$

44) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

45) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx$

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. D. Pestana Galván et al. Ed. Ariel.
- *Cálculo*. R. E. Larson, R. P. Hostetler y B. H. Edwards. Ed. McGraw-Hill.
- *Problemas de Cálculo*. M. Bilbao, F. Castañeda y J. C. Peral. Ed. Pirámide.
- *Análisis Matemático I*. J. de Burgos. García-Maroto editores.
- *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*. A. García et al. CLAGSA.