CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA
Y ARTE DIGITAL

Tema 4

Cálculo de probabilidades

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Temario

TEMA 4: Probabilidad

1. Sucesos aleatorios. Espacio muestral.
2. Definiciones de probabilidad. Propiedades.
3. Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos.
4. Teorema de probabilidad total.
5. Teorema de Bayes.

Temario

TEMA 4: Probabilidad

1. **Sucesos aleatorios. Espacio muestral.**
2. Definiciones de probabilidad. Propiedades.
3. Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos.
4. Teorema de probabilidad total.
5. Teorema de Bayes.

Introducción

El **Cálculo de Probabilidades** es la parte de las Matemáticas que proporciona un modelo, conceptos y herramientas para describir el comportamiento del azar, que mide el grado de incertidumbre asociado a la ocurrencia de cada suceso.

- **Experimentos determinísticos**: son los que realizados en idénticas condiciones producen el mismo resultado

  medidas biométricas, gravedad, intensidad de corriente…

- **Experimentos aleatorios**: son los que realizándose en condiciones idénticas pueden dar resultados diferentes. Su resultado es por tanto impredecible

  lanzamiento de un dado, extraer carta de la baraja…

Sucesos

El **Espacio muestral** (Ω) es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

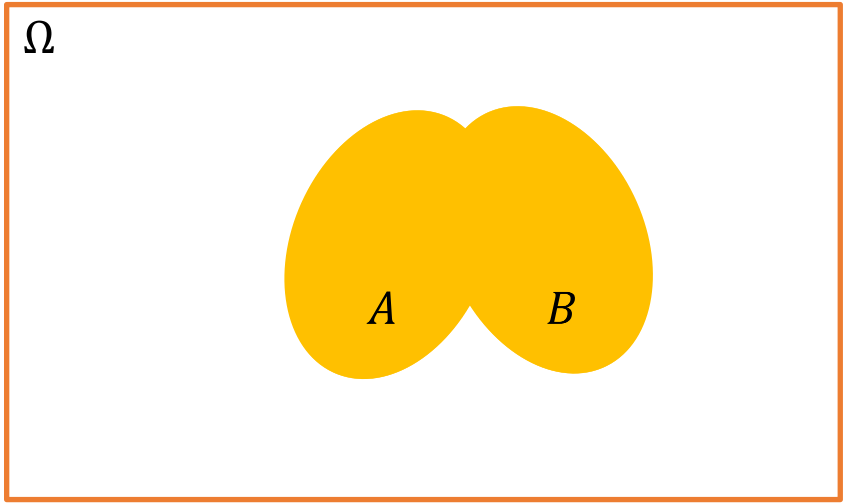
Un **Suceso** es cada uno de los resultados posibles del espacio muestral. Y estos pueden ser:

- **Sucesos elementales:** Cada uno de los elementos del espacio muestral ($A \in \Omega$).
- **Suceso compuesto:** Subconjunto del espacio muestral formado por operaciones entre sucesos elementales y/ sucesos compuestos: $A \cap B$, $A \cup B$, A^c…
- **Suceso seguro:** Siempre se cumple. Es por tanto Ω.
- **Suceso imposible:** No se realiza nunca. Se denota $\emptyset$.

Sucesos (operaciones de sucesos)

$A \cup B$: **Unión de Sucesos**:

se verifica cuando ocurre, al menos, uno de los 2 sucesos



Ejemplo:

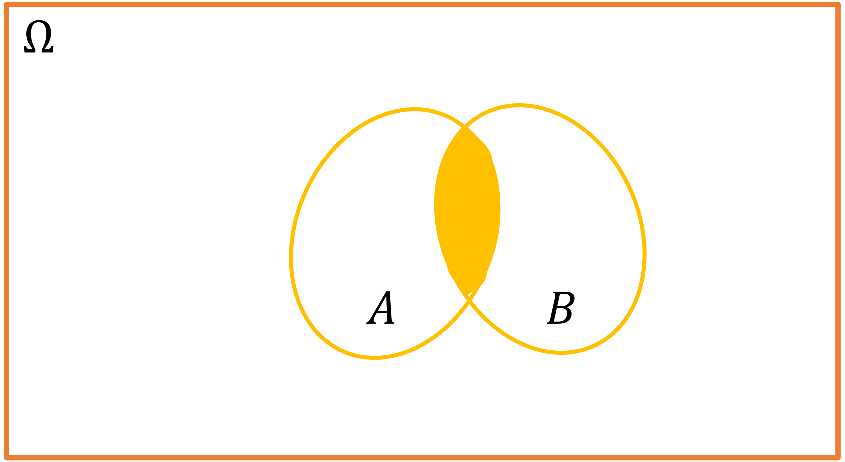
Experimento: Lanzar una moneda dos veces.

$A \cup B$ = Sacar cara en el primer lanzamiento **o** en el segundo lanzamiento.

Sucesos (operaciones de sucesos)

$A \cap B$: **Intersección de sucesos**:

se verifica cuando ocurren, simultáneamente, A y B



Ejemplo:

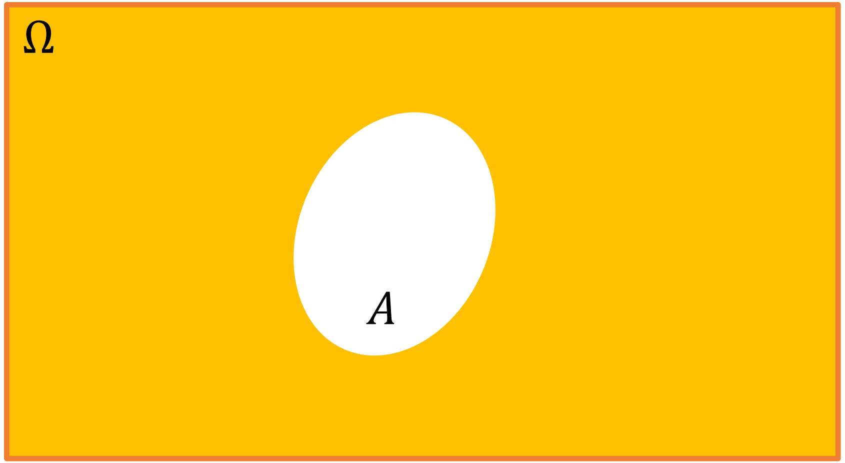
Experimento: Lanzar una moneda dos veces.

$A \cap B$ = Sacar cara en el primer lanzamiento **y** en el segundo lanzamiento.

Sucesos (operaciones de sucesos)

$\bar{A} = A^c$: **Suceso complementario**:

es el que se verifica cuando no se cumple A



Ejemplo:

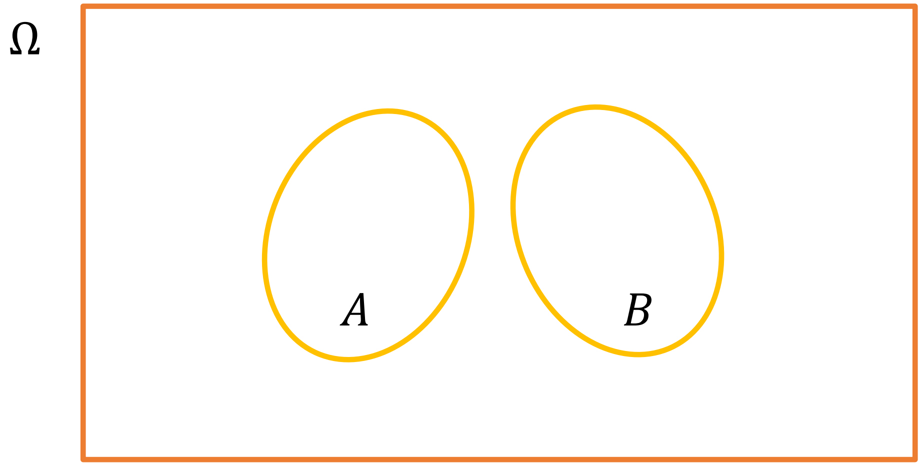
Experimento: Lanzar una moneda dos veces.

A^c = **No** sacar cara en el primer lanzamiento.

Sucesos (operaciones de sucesos)

Sucesos incompatibles:

Son aquellos que no pueden darse simultáneamente: $A \cap B = \emptyset$



Ejemplo:

Experimento: Lanzar una moneda dos veces.

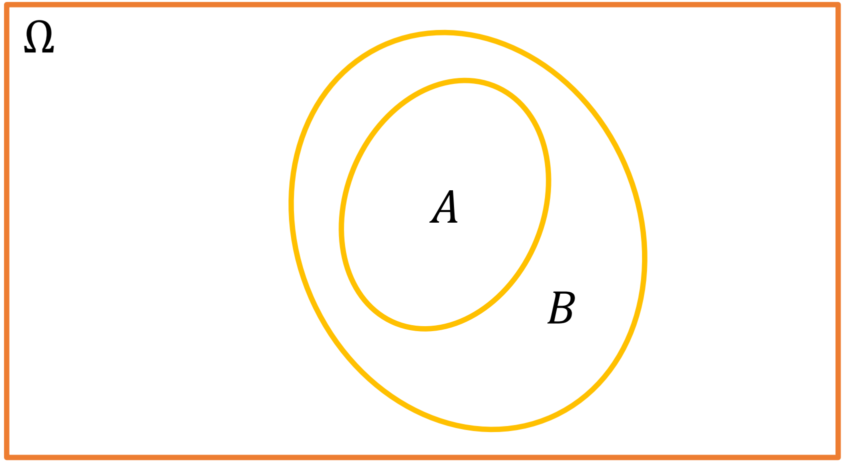
A: Sacar cara en el primer lanzamiento.

B: Sacar cruz en el primer lanzamiento.

Sucesos (operaciones de sucesos)

Sucesos A contenido en B:

Siempre que ocurre A ocurre también B: $A \subseteq B$



Ejemplo:

Experimento: Lanzar una moneda dos veces.

A: Sacar cara en el primer lanzamiento.

B: Sacar, al menos, una cara en el experimento.

Sucesos (operaciones de sucesos)

Propiedades:

1. Conmutativa:
   - $A \cap B = B \cap A$
   - $A \cup B = B \cup A$

2. Asociativa:
   - $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   - $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

3. Distributiva:
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Sucesos (operaciones de sucesos)

Propiedades:

4. Idempotente:
   - $A \cap A = A$
   - $A \cup A = A$

5. Neutralidad:
   - $A \cap \emptyset = \emptyset$
   - $A \cup \emptyset = A$
   - $A \cap \Omega = A$
   - $A \cup \Omega = \Omega$

6. Complementación:
   - $A \cap A^c = \emptyset$
   - $A \cup A^c = \Omega$

7. Leyes de Morgan:
   - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

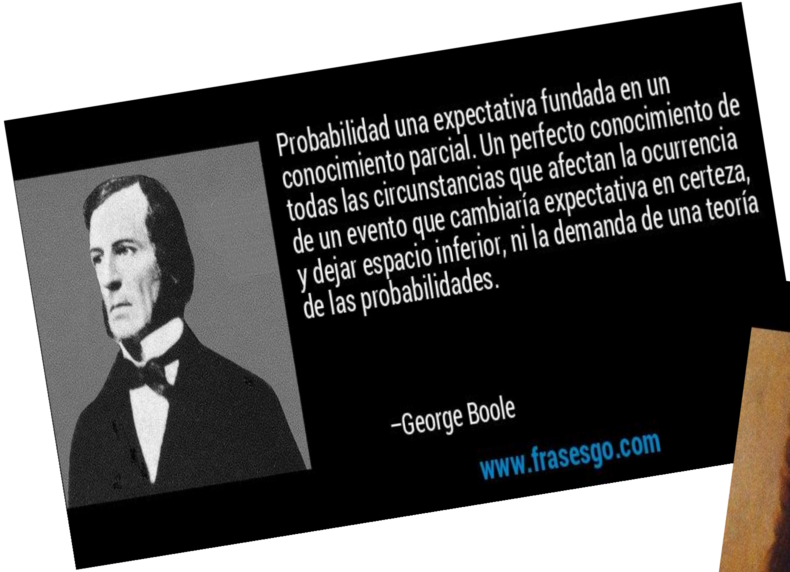
8. Otras propiedades útiles:
   - $(A^c)^c = A$
   - $A \setminus B = A \cap B^c = A \setminus (A \cap B)$

Temario

TEMA 4: Probabilidad

1. Sucesos aleatorios. Espacio muestral.
2. **Definiciones de probabilidad. Propiedades.**
3. Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos.
4. Teorema de probabilidad total.
5. Teorema de Bayes.

Probabilidad



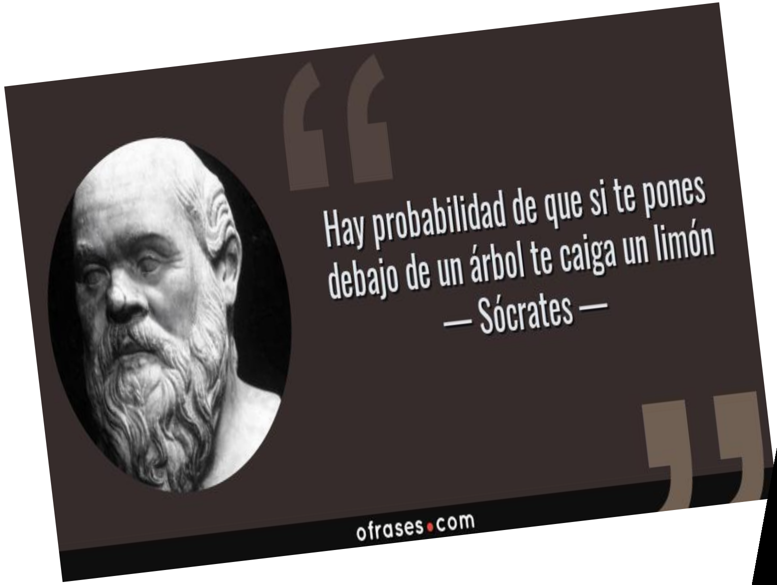
¿qué es la probabilidad?

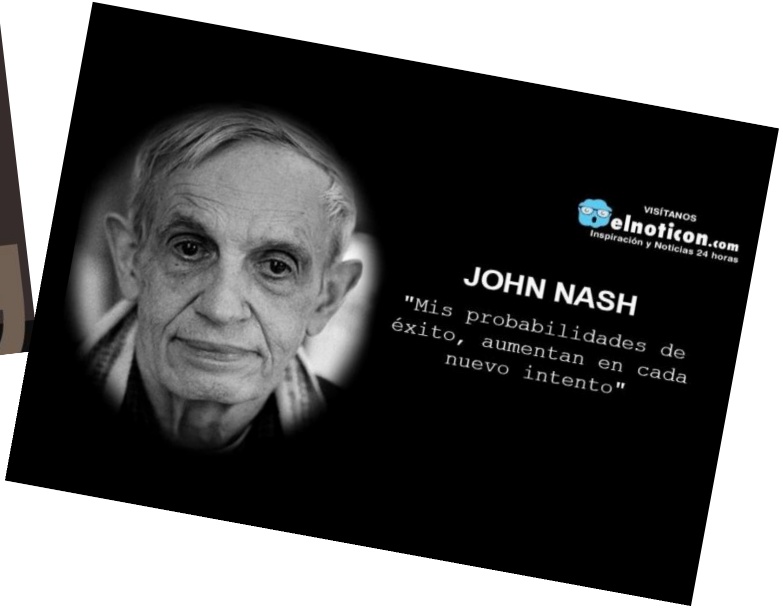
Probabilidad

¿qué es la probabilidad?

Probabilidad

¿qué es la probabilidad?





Probabilidad

Definición clásica (Bernouilli) :

Valor al que se aproximan las frecuencias relativas cuando repetimos de forma indefinida el experimento

Definición sistemática (Laplace):

Si en un experimento aleatorio se pueden dar N resultados igualmente posibles y son incompatibles 2 a 2:

$$p(A) = \frac{nº\ casos\ favorables\ de\ A}{nº\ total\ casos\ posibles}$$

Probabilidad

Definición axiomática (Kolmogorov) :

Es una función p entre el conjunto de todos los subconjuntos posibles del espacio muestral, $\mathcal{A}$, y el intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$

$$p: \mathcal{A} \to [0,1]$$

Tal que se cumplen los siguientes axiomas:

(1) $p(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

(2) $p(\Omega) = 1$,

(3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, si $A, B \in \mathcal{A}$ y $(A \cap B) = \emptyset$.

U-tad
CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Probabilidad

Propiedades:

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A^c) = 1 - p(A)$
- $p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$, si $\left(A_i \cap A_j\right) = \emptyset, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $i \neq j$
- Si $A \subseteq B$, entonces $p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) +$
  $+\, p(A \cap B \cap C)$

Probabilidad

Ejemplo 1: Sean A, B, C tres sucesos del espacio muestral en un experimento aleatorio. Con $p(A) = 1/2$, $p(B) = 1/3$ y $p(C) = 1/4$ y tales que $p(A \cap B) = 1/6$, $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap C = \emptyset$.

Calcular:

a) $p(\overline{A \cap B})$

b) $p(A \cap \overline{B})$

c) $p(\overline{A \cup B})$

d) $p(\overline{A} \cap \overline{B})$

e) $p(A \cup B \cup C)$

Probabilidad

Ejemplo 1: Sean A, B, C tres sucesos del espacio muestral en un experimento aleatorio. Con $p(A) = 1/2$, $p(B) = 1/3$ y $p(C) = 1/4$ y tales que $p(A \cap B) = 1/6$, $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap C = \emptyset$.

Calcular:

a) $p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

b) $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

c) $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \big(p(A) + p(B) - p(A \cap B)\big) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$

d) $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{3}$

e) $p(A \cup B \cup C) = p\big(A \cup (B \cup C)\big) = p(A) + p(B \cup C) - p\big(A \cap (B \cup C)\big) = p(A) + \big(p(B) + p(C) - p(B \cap C)\big) - p\big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big) = p(A) + \big(p(B) + p(C) - p(\emptyset)\big) - p\big((A \cap B) \cup (\emptyset)\big) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = 1$

Temario

TEMA 4: Probabilidad

1. Sucesos aleatorios. Espacio muestral.
2. Definiciones de probabilidad. Propiedades.
3. **Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos.**
4. Teorema de probabilidad total.
5. Teorema de Bayes.

Probabilidad condicionada

La **Probabilidad de A condicionada por el suceso B** es el cálculo de la probabilidad de un suceso en el que existe una información adicional: el hecho de que ha ocurrido el suceso B.

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Nota: $p(B) > 0$

- *Si p(A/B) $\geq p(A)$ → el suceso B favorece la ocurrencia del suceso A*
- *Si p(A/B) $\leq p(A)$ → el suceso B desfavorece la ocurrencia del suceso A*
- ***Si p(A/B) $= p(A)$ → los sucesos A y B son independientes***

Probabilidad condicionada

Propiedades:

- $p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B) = p(B \cap A) = p(B/A) \cdot p(A)$
- Si A y B son independientes, entonces $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$
- $p(\Omega/B) = \frac{p(\Omega \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$
- Si $(A \cap B) = \emptyset$, $p((A \cup B)/C) = p(A/C) + p(B/C)$
- $p(\bar{A}/B) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} - \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = 1 - p(A/B)$

Temario

TEMA 5: Probabilidad

1. Sucesos aleatorios. Espacio muestral.
2. Definiciones de probabilidad. Propiedades.
3. Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos.
4. **Teorema de probabilidad total.**
5. Teorema de Bayes.

Teorema de Probabilidad total

Teorema de la Probabilidad total:

Sea $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n} \subseteq \mathcal{A}$ una partición de sucesos de Ω, entonces para todo suceso $B \subseteq \mathcal{A}$ se cumple que

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)$$

Nota: Una partición de sucesos es un conjunto de sucesos tales que:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

Temario

TEMA 4: Probabilidad

1. Sucesos aleatorios. Espacio muestral.
2. Definiciones de probabilidad. Propiedades.
3. Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos.
4. Teorema de probabilidad total.
5. **Teorema de Bayes.**

Teorema de Bayes

Teorema de la Bayes:

Sea $\{A_i\}_{i=1,\dots,n} \subseteq \mathcal{A}$ una partición de sucesos de Ω, entonces para todo suceso $B \subseteq \mathcal{A}$ se cumple que

$$p(A_i/B) = \frac{p(B/A_i) \cdot p(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)}$$

Probabilidad

Ejemplo 2: Se está realizando un estudio de pagos de préstamos. La probabilidad de que una persona solicite un préstamo para hipoteca es de 0.3. De los préstamos de hipotecas, el 10% no se paga, y para otro tipo de préstamos, el 80% se paga.

Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que una persona haya solicitado préstamo para hipoteca sabiendo que el pago se ha realizado.

b) Calcular la probabilidad de no haya solicitado hipoteca sabiendo que no ha pagado el préstamo.

Probabilidad

Ejemplo 2: Se está realizando un estudio de pagos de préstamos. La probabilidad de que una persona solicite un préstamo para hipoteca es de 0.3. De los préstamos de hipotecas, el 10% no se paga, y para otro tipo de préstamos, el 80% se paga.

Toma de requisitos del enunciado:

$p(A) = 0.3 \Rightarrow p(\bar{A}) = 0.7$

$p(\bar{B}/A) = 0.1 \Rightarrow p(B/A) = 0.9$

$p(B/\bar{A}) = 0.8 \Rightarrow p(\bar{B}/\bar{A}) = 0.2$

a) Calcular la probabilidad de que una persona haya solicitado préstamo para hipoteca sabiendo que el pago se ha realizado.

$$p(A/B) = \frac{p(A) \cdot p(B/A)}{p(A) \cdot p(B/A) + p(\bar{A}) \cdot p(B/\bar{A})} = \frac{0.9 \cdot 0.3}{0.9 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.8} = 0.32$$

Probabilidad

Ejemplo 2: Se está realizando un estudio de pagos de préstamos. La probabilidad de que una persona solicite un préstamo para hipoteca es de 0.3. De los préstamos de hipotecas, el 10% no se paga, y para otro tipo de préstamos, el 80% se paga.

b) Calcular la probabilidad de no haya solicitado hipoteca sabiendo que no ha pagado el préstamo.

$$p(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}/\bar{A})}{p(A) \cdot p(\bar{B}/A) + p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}/\bar{A})} = \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.3 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.2} = 0.82$$

Otra forma:

$$p(A/\bar{B}) = \frac{p(A) \cdot p(\bar{B}/A)}{p(A) \cdot p(\bar{B}/A) + p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}/\bar{A})} = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.3 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.2} = 0.18$$

$$p(\bar{A}/\bar{B}) = 1 - p(A/\bar{B}) = 1 - 0.18 = 0.82$$