Soluciones Estadística Descriptiva

Juan Rodriguez

October 28, 2024

1 Solución Problema 1

- Media Yodo: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1307.5}{14} = 93.39$ gr de Yodo
- Media Cetano: $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{779.2}{14} = 55.66$
- Varianza Yodo: $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{128913.93}{14} - 93.39^2 = 486.45$ $s_x = 22.06$
- Varianza Cetano: $s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{43745.22}{14} - 55.66^2 = 26.62$ $s_y = 5.16$
- Covarianza: $s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} = \frac{71347.3}{14} - (93.39 \cdot 55.66) = -101.85$

a) Nos piden predecir el numero de cetano (Y) sabiendo que tiene un índice de yodo de 115 (X). Por lo tanto, usamos una recta $Y|X$

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}) \rightarrow y - 55.66 = -\frac{101.85}{486.45}(x - 93.39) \rightarrow y = -0.21x + 75.27$$

$$y = -0.21(115) + 75.27 = \boxed{51.12}$$

El numero de cetano teniendo un indice de yodo de 115 es 51.12
b) Una medida de bondad del ajuste nos la da el coeficiente de correlación de Pearson

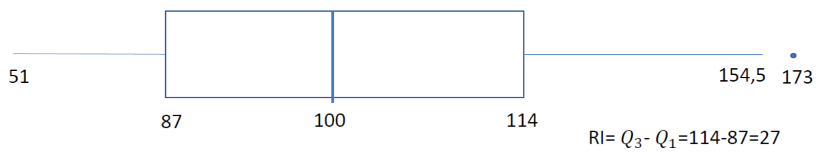
$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = -\frac{101.85}{22.06 \cdot 5.16} = \boxed{-0.89}$$

$$R^2 = r^2 = (-0.89)^2 = \boxed{79.21\%}$$

Interdependencia inversa fuerte: el número de cetano disminuye con el aumento de índice de yodo
Los valores teóricos están cerca de los observados
Las predicciones tienen una fiabilidad del 79.21% y el ajuste es bueno
Las dos rectas de regresión forma un ángulo pequeño
c) Nos piden la varianza residual

$$V_r = s_y^2(1 - r^2) = 26.62 \cdot (1 - 0.7921) = \boxed{5.53}$$

No quedan explicadas 5.53 unidades de varianza del numero de cetano por el indice de yodo. Representan un 20.79% de la variabilidad total
d)



$$A_B = \frac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{14 - 13}{27} = \boxed{0.04}$$

No hay valores atípicos por la izquierda, pero vemos que el valor máximo es atípico por la derecha (173), pero no es un valor extremo ya que no supera $Q_3 + 3RI = 195$
Hay una ligera asimetría a la derecha poco significante
e) Calculamos el coeficiente de variación de Pearson para ver representatividad de la media

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{22.06}{93.39} = 0.24$$

$$CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{5.16}{55.66} = 0.09$$

La media del numero de cetano es más representativa ya que la dispersión de la muestra es menor

2 Solución Problema 2

- $\bar{x} = 6$
- $\bar{y} = 4$
- $b_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_y^2} = 1.15$
- $b_{yx} = \frac{s_{yx}}{s_x^2} = 0.81$
- $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = 0.5 \to s_y = 0.5 \cdot 4 = 2 \to s_{xy} = 1.15 \cdot 2^2 = 4.6 \to s_x^2 = \frac{4.6}{0.81} = 5.68 \to s_x = 2.38$

a) Nos piden predecir las exportaciones de la empresa (Y) teniendo 25M de euros en ventas totales. Usamos una recta $Y|X$

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}) \to y - 4 = 0.81(x - 6) \to y = 0.81x - 0.86$$

$y = 0.81(25) - 0.86 = 19.39$

Las exportaciones serán 19.39M de euros por 25M de euros en ventas totales
b)

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4.6}{2.38 \cdot 2} = \boxed{0.97}$$

$$R^2 = r^2 = (0.97)^2 = \boxed{94.09\%}$$

Interdependencia directa muy fuerte: las exportaciones aumentan con las ventas totales
Los valores teóricos están muy cerca de los observados
Las predicciones tienen una fiabilidad del 94.09% y el ajuste es muy bueno
Las dos rectas de regresión son casi coincidentes
c) Calculamos el coeficiente de variación de Pearson para ver representatividad de la media

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{2.38}{6} = 0.4$$

$$CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{2}{4} = 0.5$$

La media de las ventas totales es más representativa ya que la dispersión de la muestra es menor
d) Varianza residual: $s_y^2(1 - r^2) = 4(1 - 0.9409) = 0.24$. Varianza explicada: $s_y^2 \cdot r^2 = 4 \cdot 0.9409 = 3.76$
Casi toda la variabilidad de las exportaciones queda explicada por las ventas totales. Solo 0.24 unidades de variabilidad no quedan explicadas.

3 Solución Problema 3

- $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{7.1}{5} = 1.42$
- $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{131}{5} = 26.2$
- $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{15.565}{5} - 1.42^2 = 1.1$ $s_x = 1.05$
- $s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{5313}{5} - 26.2^2 = 376.16$ $s_y = 19.4$
- $s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} = \frac{285.6}{5} - (1.42 \cdot 26.2) = 19.92$

a) Para saber si las variables están linealmente relacionadas, calculamos r

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{19.92}{1.05 \cdot 19.4} = \boxed{0.98}$$

$$R^2 = r^2 = (0.98)^2 = \boxed{96.08\%}$$

Interdependencia directa muy fuerte: la velocidad de reacción aumenta con la concentración de glucosa
Los valores teóricos están muy cerca de los observados
Las predicciones tienen una fiabilidad del 96.08% y el ajuste es muy bueno
Las dos rectas de regresión son casi coincidentes
b) Nos piden predecir la concentración de glucosa a partir de una velocidad de 45 micromoles/minuto. Por lo tanto, usamos una recta de $X|Y$

$$x - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \bar{y}) \rightarrow x - 1.42 = 0.05(y - 26.2) \rightarrow x = 0.05y + 0.11$$

$$x = 0.05(45) + 0.11 = 2.36$$

La concentración de glucosa sera 2.36 milimoles/litro con una velocidad de 45 micromoles/minuto
c) $b_y x = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{19.92}{1.1} = 18.11$ Por cada milimol/litro de glucogenosa, la velocidad de reacción aumenta 18.11 micromoles/minuto d)

$$V_r = s_y^2(1 - r^2) = 376.16 \cdot (1 - 0.9608) = \boxed{14.9}$$

No quedan explicadas 14.9 unidades de varianza de la velocidad de reacción por la concentración de glucosa. Representan un 3.92% de la variabilidad total
f) $Q_1 = 10$, $Me = 18$, $Q_3 = 35$

Vemos que presenta asimetría hacia la derecha ya que $Q_3 - Me > Me - Q_1$. Por lo que la media es mayor que la mediana. Además, se evidencia que hay mayor dispersión en los valores más altos (35 - 60)

4 Solución Problema 4

- $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 28$
- $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = 0.414$
- $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{3958}{5} - 28^2 = 7.6$ $s_x = 2.76$
- $s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{0.86}{5} - 0.414^2 = 0.0006$ $s_y = 0.02$
- $s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} = \frac{57.68}{5} - (28 \cdot 0.414) = -0.056$

a) Para saber si las variables están linealmente relacionadas, calculamos r

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = -\frac{0.056}{2.76 \cdot 0.024} = \boxed{-0.82}$$

$R^2 = r^2 = (-0.82)^2 = \boxed{67.24\%}$

Interdependencia inversa fuerte: la producción del trigo disminuye con el aumento del precio de harina
Los valores teóricos están cerca de los observados
Las predicciones tienen una fiabilidad del 67.24% y el ajuste es bueno
Las dos rectas de regresión son forman un ángulo pequeño
b) Nos piden predecir la produccion de trigo a partir de un precio de harina de 0.47 euros. Por lo tanto, usamos una recta de $X|Y$

$$x - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \bar{y}) \rightarrow x - 28 = -2.28(y - 0.414) \rightarrow x = -2.28y + 28.94$$

$$x = -2.28(0.47) + 28.94 = 27.86$$

La producción de trigo serán 27.86 Tm con un precio de harina de 0.47 euros
c) $b_y x = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = -\frac{0.056}{7.6} = -0.0074$
Por cada Tm de trigo, el precio de la harina disminuye 0.0074 euros
d)

x_i	25	28	30	32
n_i	2	1	1	1

El 50% central estará entre 25 y 28 Tm

5 Solución Problema 5

- $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{50.1}{5} = 10.02$
- $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{125}{5} = 25$
- $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{614.21}{5} - 10.02^2 = 22.44$ $s_x = 4.74$
- $s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{3753}{5} - 25^2 = 125.6$ $s_y = 11.21$
- $s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} = \frac{1514.6}{5} - (10.02 \cdot 25) = 52.42$

a) Para saber si las variables están linealmente relacionadas, calculamos r

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{52.42}{11.21 \cdot 4.74} = \boxed{0.98}$$

$$R^2 = r^2 = (0.98)^2 = \boxed{96.04\%}$$

Interdependencia directa muy fuerte: el tiempo que tarda aumenta con la distancia
Los valores teóricos están muy cerca de los observados

Las predicciones tienen una fiabilidad del 96.04% y el ajuste es muy bueno
Las dos rectas de regresión son casi coincidentes
b) Nos piden predecir el tiempo que tarda a partir de que vive a 14km de distancia. Por lo tanto, usamos una recta de $Y|X$

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}) \rightarrow y - 25 = 2.34(x - 10.02) \rightarrow y = 2.34x + 1.55$$

$$y = 2.34(14) + 1.55 = 34.31$$

El tiempo que tarda será de 34.31 minutos viviendo a 14km de distancia
c) Calculamos el coeficiente de variación de Pearson para ver representatividad de la media y dispersión

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{4.74}{10.02} = 0.47$$

$$CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{11.21}{25} = 0.45$$

La media del tiempo es más representativa ya que la dispersión de la muestra es menor
d)

$$V_r = s_y^2(1 - r^2) = 125.6 \cdot (1 - 0.9604) = \boxed{4.97}$$

No quedan explicadas 4.97 unidades de varianza del tiempo de llegada por la distancia. Representan un 3.94% de la variabilidad total

6 Solución Problema 6

- $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{288}{5} = 57.6$
- $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{11}{5} = 2.2$
- $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{16612}{5} - 57.6^2 = 4.64 \; s_x = 2.15$
- $s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{31}{5} - 2.2^2 = 1.36 \; s_y = 1.17$
- $s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} = \frac{623}{5} - (57.6 \cdot 2.2) = -2.12$
- $r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = -\frac{2.12}{2.15 \cdot 1.17} = -0.84$
- $R^2 = r^2 = (-0.84)^2 = 70.56\%$

a) Nos piden predecir el diámetro de un neumático con 0 pinchazos. Por lo tanto, usamos una recta de $X|Y$

$$x - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \bar{y}) \rightarrow x - 57.6 = -1.81(y - 2.2) \rightarrow x = -1.81y + 61.58$$

$$x = -1.81(0) + 61.58 = 61.58$$

El diámetro será de 61.58 cm con 0 pinchazos. Hay un grado de fiabilidad del 70.56%
b) Calculamos el coeficiente de variación de Pearson para ver representatividad de la media y dispersión

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{2.15}{57.6} = 0.04$$

$$CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{1.17}{2.2} = 0.53$$

La media del diámetro es más representativa ya que la dispersión de la muestra es menor
c) Dado que $r = -0.84$ y $R^2 = 70.56\%$ podemos interpretar que:
Interdependencia inversa fuerte: el diámetro disminuye cuando el numero de pinchazos aumenta
Los valores teóricos están cerca de los observados
Las predicciones tienen una fiabilidad del 70.56% y el ajuste es bueno
Las dos rectas de regresión forman un ángulo pequeño
d)

$$V_e xpl = s_y^2(r^2) = 1.36 \cdot 0.7056 = \boxed{0.96}$$

Quedan explicadas 0.96 unidades de varianza del diámetro del neumático por el numero de pinchazos. Representan un 70.56% de la variabilidad total

7 Solución Problema 7

- $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{509}{5} = 101.8$
- $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{69}{5} = 13.8$
- $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{52855}{5} - 101.8^2 = 207.76$ $s_x = 14.41$
- $s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{1095}{5} - 13.8^2 = 28.56$ $s_y = 5.34$
- $s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} = \frac{7017}{5} - (101.8 \cdot 13.8) = -1.44$
- $r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = -\frac{1.44}{14.41 \cdot 5.34} = -0.02$

- $R^2 = r^2 = (-0.02)^2 = 0.04\%$

a) Nos piden predecir el número de semanas en cartel a partir de que la película dura 2 horas. Por lo tanto, usamos una recta de $Y|X$

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}) \rightarrow y - 13.8 = -0.007(x - 101.8) \rightarrow y = -0.007x + 14.51$$

$$y = -0.007(2) + 14.51 = 14.49$$

El número de semanas en cartel será de 14.49 si la película dura 2 horas. Tiene una fiabilidad del 0.04%
b)

$$V_r = s_y^2(1 - r^2) = 28.56 \cdot (1 - 0.0004) = \boxed{28.55}$$

No quedan explicadas 28.55 unidades de varianza de las semanas en cartel por la duración de la película. Representan un 99.96% de la variabilidad total
c) Dado que $r = -0.02$ y $R^2 = 0.04\%$ podemos interpretar que:
Interdependencia inversa muy débil (casi nula): el número de semanas disminuye cuando el numero de minutos de la película aumenta
Los valores teóricos están muy lejos de los observados
Las predicciones tienen una fiabilidad del 0.04% y el ajuste es pésimo
Las dos rectas de regresión forman un ángulo casi perpendicular