Actividad 5

Juan Rodriguez y Alejandro Castellanos

Problema 1

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{-x^2+2x+1}}\,dx = a\sqrt{-x^2+2x+1} + k\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+1}}$$

A continuación, se deriva respecto de x:

$$\frac{x-2}{\sqrt{-x^2+2x+1}} = \frac{d}{dx}\left(a\sqrt{-x^2+2x+1}\right) + \frac{k}{\sqrt{-x^2+2x+1}}$$

$$\frac{x-2}{\sqrt{-x^2+2x+1}} = \frac{a(-2x+2)}{2\sqrt{-x^2+x+1}} + \frac{k}{\sqrt{-x^2+2x+1}}$$

$$x-2 = \sqrt{-x^2+2x+1}\cdot\frac{-2ax+2a+2k}{2\sqrt{-x^2+2x+1}}$$

Simplificamos:

$$x-2 = \cancel{\sqrt{-x^2+2x+1}}\cdot\frac{-\cancel{2}ax+\cancel{2}a+\cancel{2}k}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{-x^2+2x+1}}}$$

$$x-2 = -ax+a+k$$

$$x^1: \quad 1=-a \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

$$x^0: \quad -2=a+k \quad \Rightarrow \quad k=-1$$

Sustituimos a y k en la primera igualdad:

$$-\sqrt{-x^2+2x+1} - \int\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}}\,dx = -\sqrt{-x^2+2x+1} - \int\frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}}\,dx =$$

$$-\sqrt{-x^2+2x+1} - \int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = -\sqrt{-x^2+2x+1} - \int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$\boxed{-\sqrt{-x^2+2x+1} - \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

Problema 2

$$\text{Elipse: } x^2 + 4y^2 = 1$$

Volumen al girar al rededor del eje X:

$$V_x = \pi \int_a^b [F(x)]^2 \, dx$$

donde a y b son los puntos de corte con el eje x.

Dada la ecuación de la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$, podemos despejar y como:

$$y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{4}}$$

Por lo tanto, la función $F(x)$ es:

$$F(x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{4}}$$

Puntos de corte de $F(x) = 0$:

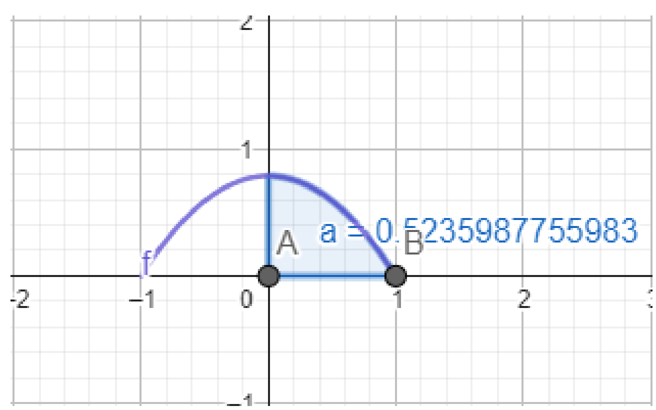
$$\sqrt{\frac{1 - x^2}{4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Por lo tanto, $x \in [-1, 1]$.

En el primer cuadrante, esto se reduce a $x \in [0, 1]$.

La expresión para V_x es:

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1 - x^2}{4}} \right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{3} - 0 \right) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$



Volumen al girar al rededor del eje Y:

$$V_y = \pi \int_c^d [F(y)]^2 \, dy$$

donde c y d son los puntos de corte con el eje y.

Dada la ecuación de la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$, podemos despejar x como:

$$x = \sqrt{1 - 4y^2}$$

Por lo tanto, la función $F(y)$ es:

$$F(y) = \sqrt{1 - 4y^2}$$

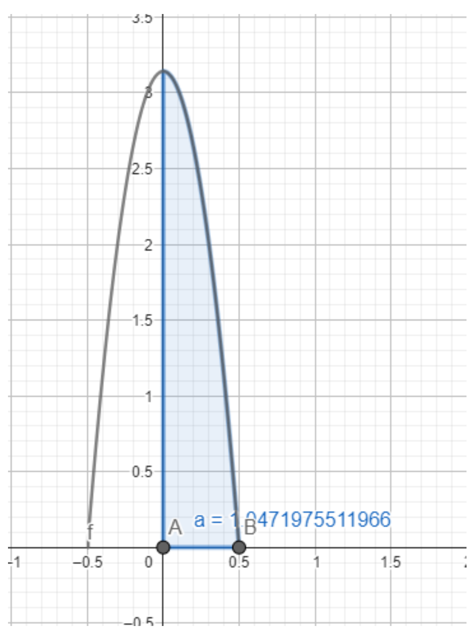
Puntos de corte de $F(y) = 0$:

$$\sqrt{1 - 4y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

En el primer cuadrante, esto se reduce a $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
La expresión para V_y es:

$$V_y = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1 - 4y^2}\right)^2 \, dx = \pi \left[y - \frac{4y^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \pi \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$



Problema 3

La longitud de la curva definida por las ecuaciones $x(t) = \frac{1}{3}t^3$ y $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ desde $t = 1$ hasta $t = 2$ es:

$$L = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3\right)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{2}t^2\right)\right)^2}\, dt$$

Las derivadas de las funciones paramétricas son $x'(t) = t^2$ y $y'(t) = t$.

$$L = \int_1^2 \sqrt{t^4 + t^2}\, dt = \int_1^2 t\sqrt{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^2 2t\sqrt{t^2+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(t^2+1)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(2^2+1)^3} - \sqrt{(1^2+1)^3}\right] = \frac{1}{3}\left[\sqrt{125} - \sqrt{8}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})\right] \approx \boxed{2.784}$$