Modelos probabilísticos continuos

Problemas resueltos

- **Problema 4**

La temperatura de reacción en cierto proceso químico sigue una distribución uniforme entre -5 y 5 ºC
a) Calcular la probabilidad de que la temperatura sea negativa
b) p(-2,5<X<2,5)
c) p(-2$\leq X \leq 3$)
d) probabilidad de que la temperatura difiera de la media en más de una desviación típica

X: temperatura de reacción en el proceso químico $\rightarrow$ U(-5,5)

a) probabilidad de que la temperatura sea negativa

$$P(-5<X<0)=\int_{-5}^{0} \frac{1}{10} dx = \left[\frac{x}{10}\right]_{-5}^{0} = 0{,}5$$

b)) p(-2,5<X<2,5)

$$p(-2{,}5<X<2{,}5)= \int_{-2.5}^{2.5} \frac{1}{10} dx = \left[\frac{x}{10}\right]_{-2.5}^{2.5} = 0{,}5$$

c) p(-2$\leq X \leq 3$)

$$p(-2\leq X \leq 3)= \int_{-2}^{3} \frac{1}{10} dx = \left[\frac{x}{10}\right]_{-2}^{3} = 0{,}5$$

d) probabilidad de que la temperatura difiera de la media en más de una desviación típica

EX= $\frac{a+b}{2}$ =0; VarX= $\frac{(b-a)^2}{12} = 8{,}33 \quad \sigma = 2{,}89$

p(−2,89<X<2,89)= $\int_{-2.89}^{2.89} \frac{1}{10} dx = \left[\frac{x}{10}\right]_{-2.89}^{2.89} = 0{,}578\ es\ la\ probabilidad$ de que difiera en menos de una desv. típica.

- **Problema 5**

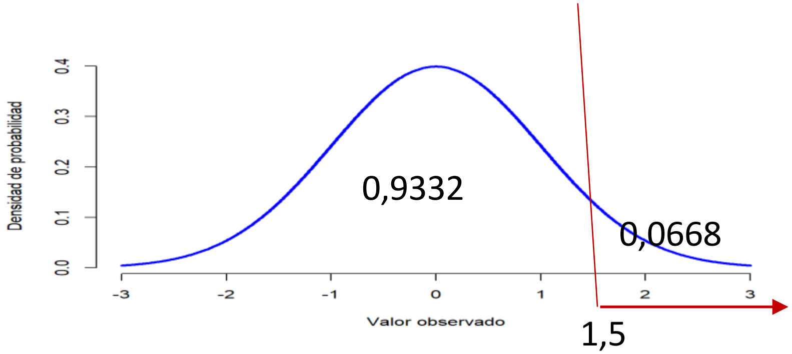
El contenido de un bote de cerveza se distribuye normalmente con media 30cl y desviación típica 2 cl.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un bote determinado tenga más de 33 cl?

b) En un envase de 6 botes ¿cuál es la probabilidad de que alguno de los botes contenga más de 33 cl?

X≡ $contenido\ de\ bote \rightarrow N(30,2)$

p(X>33)= =p($\frac{X-30)}{2} > \frac{33-30}{2}) = p(Z > 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$



Y≡ $número\ de\ botes\ con\ más\ de\ 33\ cl \rightarrow B(6; 0{,}0668)$

p(Y>0)= 1$-p(Y=0) = 1 - \binom{6}{0}(0{,}0668)^0(0{,}9332)^6 = 0{,}3395$

CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

- **Problema 6**

Suponemos que el número de clientes que entran durante un día a un centro comercial por cada una de las puertas de acceso (1, 2 y 3) es una variable aleatoria normal con medias de 500, 300 y 1100 personas respectivamente y desviaciones típicas respectivas para cada una de las puertas de 12, 8 y 18 personas. Las entradas de personas al centro a través de los diferentes accesos se producen de forma independiente.

a) A lo largo de un mes, (se considera que el número de clientes que entran en el centro comercial se distribuye de forma idéntica cada día) ¿qué porcentaje de días entran en el centro comercial más de 1930 clientes?
b) ¿y qué día del mes (comenzando a contar el día 1) cabe esperar que esa situación se produzca por tercera vez?
c) ¿cuál es el porcentaje de días en que el número de clientes que entran en el centro comercial por la puerta 3 es mayor que el número total de clientes que entran por las puertas de acceso 1 y 2?
d) Se ha activado en el centro comercial un protocolo anti-Covid de limitación de aforo que se aplica sólo el 15 por ciento de los días en que la entrada total de personas es mayor. ¿A partir de qué número total de clientes será necesario activar el protocolo?

X $\equiv$ $número\ de\ clientes\ totales\ del\ centro\ comercial = X_1 + X_2 + X_3$ $\quad N(1.900; 23{,}065)$

EX=E($X_1 + X_2 + X_3$)= 500+300+1100= 1.900 clientes

VarX=Var ($X_1 + X_2 + X_3$)= 144+64+324=532 $\quad \sigma = 23{,}065$

a) p(X >1.930) = p($\frac{X-1.900}{23{,}065} \geq \frac{1.930-1.900}{23{,}065}$)= p(Z>1,3)=0,0968

b) Y$\equiv$ $Número\ de\ días\ en\ que\ no\ hay\ más\ de\ 1.930\ clientes\ hasta\ que\ se\ supera\ esa\ cifra\ por\ tercera\ vez$ $\quad BN(3; 0{,}1587)$

El valor esperado de Y es EY=$\frac{3x0{,}8413}{0{,}1587}$=15,9≈ $16\ días$ $\ luego\ cabe\ esperar\ que\ el\ tercer\ día\ con\ más\ de\ 1.930\ clientes$ sea el 19.

c) p(X_3 >$X_1 + X_2$)= p($X_3 - X_1 - X_2 > 0$)= p($Z > \frac{0-300}{23{,}065}$)= p(Z>-13)=1

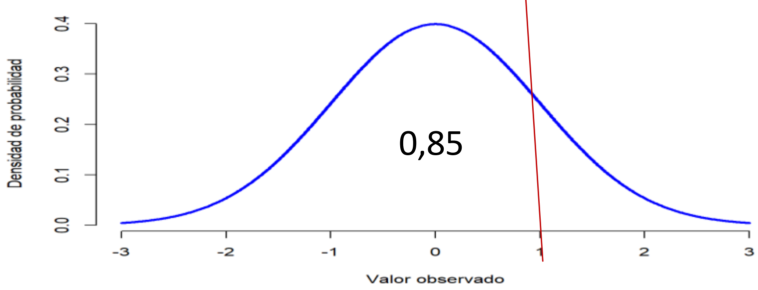
E($X_3 - X_1 - X_2$)= 1100-500-300= 300 clientes

Var ($X_3 - X_1 - X_2$)= 144+64+324=532 $\quad \sigma = 23{,}065$

d) Se ha activado en el centro comercial un protocolo anti-Covid de limitación de aforo que se aplica sólo el 15 por ciento de los días en que la entrada total de personas es mayor. ¿A partir de qué número total de clientes será necesario activar el protocolo?

Se trata de calcular el P_{85}=k para la variable X: número total de clientes

$$p(X \leq k) = p\left(\frac{X-1.900}{23{,}065} \leq \frac{k-1.900}{23{,}065}\right) = 0{,}85$$



$$\frac{k-1.900}{23{,}065} = 1{,}04 \Rightarrow k=1.924 \text{ clientes}$$

A partir de k=1.924 clientes se hace necesario activar el protocolo

- **Problema 7**

La distribución de resistencia de transistores es una distribución normal y la resistencia del 10% de ellos es mayor de 10,256 ohmios y la del 5% es menor de 9,671 ohmios

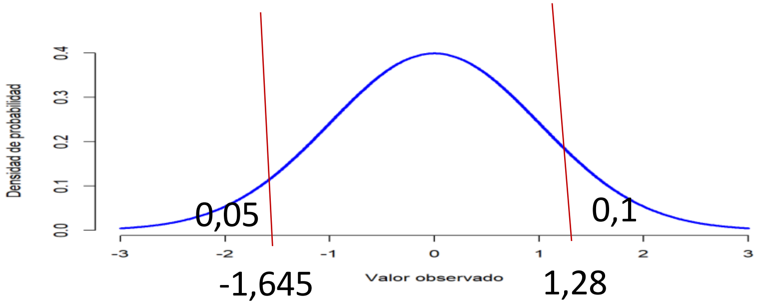
¿cuáles son el valor medio y la desviación típica de la distribución de resistencia?

X $\equiv$ *resistencia de los transistores* $\rightarrow$ $N(\mu, \sigma)$

p(X≥10,256)=0,1 $\quad p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{10{,}256-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z \geq \frac{10{,}256-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}1 \Rightarrow \frac{10{,}256-\mu}{\sigma} = 1{,}28$

p(X≥9,671)=0,95 $\quad p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{9{,}671-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z \geq \frac{9{,}671-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{9{,}671-\mu}{\sigma} = -1{,}645$

μ=10,512 $\qquad \sigma$=0,2



- **Problema 8**

El tiempo de espera (en milisegundos) de un servidor web ante la solicitud de un cliente sigue una variable aleatoria X cuya función de densidad es:

$$f(x)=\begin{cases} k.e^{-\frac{x+4}{4}} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

a) Calcular el valor de k para que, efectivamente, f(x) sea una función de densidad.

b) Si en hora punta, el servidor tarda, como mínimo 5 mseg y, como máximo, 10 mseg, ¿cuál es la probabilidad de que tarde menos de 7 mseg?

c) En un determinado intervalo de tiempo, acceden 10 clientes al servidor web. Suponiendo que los tiempos de espera de cada acceso son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que, al menos 3 clientes, tengan que esperar más de 4 milisegundos?

$X \equiv tiempo\ de\ espera\ (msg)$

a) $f(x)=\begin{cases} k.e^{-\frac{x+4}{4}} si\ x \geq 0 \\ 0 \quad\quad si\ x < 0 \end{cases}$ Obtenemos k para que f sea una función de densidad

$k\int_0^{\infty} e^{-\frac{x+4}{4}}dx=1=[-4ke^{-\frac{x+4}{4}}]_0^{\infty}=\frac{4k}{e}=1 \Longrightarrow k=\frac{e}{4}=0{,}68$ $\quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}.e^{-\frac{x}{4}} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$

Es por tanto una exponencial de parámetro $\frac{1}{4}$

b) Si en hora punta, el servidor tarda, como mínimo 5 mseg y, como máximo, 10 mseg, ¿cuál es la probabilidad de que tarde menos de 7 mseg?

$P(X<7/5 \leq X \leq 10) = \frac{p[(X<7)\cap(5\leq X\leq 10)]}{p(5\leq X\leq 10)} = \frac{0,1127}{0,2044} = 0,5514$

Calculamos la función de distribución para X: $F(x)=\frac{1}{4}\int_0^x e^{-\frac{t}{4}}.dt = [1-e^{-\frac{x}{4}}]$

$P(5\leq X \leq 10) = \frac{1}{4}\int_5^{10} e^{-\frac{t}{4}}.dt = F(10)-F(5) = (1-e^{-\frac{10}{4}})-(1-e^{-\frac{5}{4}}) = e^{-\frac{5}{4}} - e^{-\frac{10}{4}} = 0,2044$

$P(5\leq X < 7) = \frac{1}{4}\int_5^{7} e^{-\frac{t}{4}}.dt = F(7)-F(5) = (1-e^{-\frac{7}{4}})-(1-e^{-\frac{5}{4}}) = e^{-\frac{5}{4}} - e^{-\frac{7}{4}} = 0,1127$

c) En un determinado intervalo de tiempo, acceden 10 clientes al servidor web. Suponiendo que los tiempos de espera de cada acceso son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que, al menos 3 clientes, tengan que esperar más de 4 milisegundos?

Para cada uno de los clientes definimos una variable aleatoria de Bernoulli $C_i = \begin{cases} 1 & \text{si el tiempo de espera es} > 4 \text{ msg} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

P(un cliente tenga que esperar más de 4 msgs) =p(X>4)=1-F(4)=$e^{-1} = 0,3678$

C≡ $\textit{Número de clientes que han de esperar más de 4 msgs} \sim B(10; 0,3678)$

$P(C\geq 3) = 1 - p(C<3) = 1 - \binom{10}{0} 0,3678^0 (1-0,3678)^{10} - \binom{10}{1} 0,3678^1 (1-0,3678)^9 - \binom{10}{2} 0,3678^2 (1-0,3678)^8 = 0,7754$

Problema 9

Examen Parcial MAIS 2022

El peso de los bebés nacidos en una población durante el último año sigue una distribución normal con media 3,43kg y desviación típica 0,48 kg.

- Se plantea realizar un estudio sobre los bebés que pesaron menos de 2 kgs o más de 5 kgs al nacer. ¿Cuál es la proporción total de bebés objeto del estudio?
- Si en el último año nacieron 1000 niños ¿Cuál es la probabilidad de que más de 20 nacieran con un peso inferior a 2,5 kgs?
- ¿Entre qué 2 valores se encuentra el 95% central de la distribución? Interpretar el resultado.

X $\equiv$ $peso\ de\ los\ bebés \rightarrow N(3{,}43; 0{,}48)$

a) p(X<2)+p(X>5)=p($\frac{X-3{,}43}{0{,}48} < \frac{2-3{,}43}{0{,}48}$) + p($\frac{X-3{,}43}{0{,}48} > \frac{5-3{,}43}{0{,}48}$) =p(Z<-2,98)+p(Z>3,27)= $0{,}0014 + 0{,}0005 = 0{,}0019$

Son objeto de estudio 19 de cada 10.000 niños

b) Para cada niño definimos una variable $Y_i = \begin{cases} 1 & peso\ inferior\ a\ 2{,}5\ kgs \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} p = 0{,}0262 \\ q = 0{,}9738 \end{matrix}\right\}$

p=p(X<2,5)=p($\frac{X-3{,}43}{0{,}48} < \frac{2{,}5-3{,}43}{0{,}48}$) $=$ p(Z<-1,94)=0,0262

N $\equiv$ $número\ de\ niños\ con\ peso\ inferior\ a\ 2{,}5\ kgs \rightarrow$ B(1000; 0,0262)$\approx N(26{,}2; 5{,}05)$

p(N> 20)=$p(\frac{N-26{,}2}{5{,}05} < \frac{20-26{,}2}{5{,}05})$ = p(Z>-1,23)=0,8907

c) p(a<X<b)= p($\frac{a-3{,}43}{0{,}48} < Z < \frac{b-3{,}43}{0{,}48}$) $= 0{,}95$ $\frac{a-3{,}43}{0{,}48} = -1{,}96 \Rightarrow a = 2{,}49\ kgs$; $\frac{b-3{,}43}{0{,}48} = 1{,}96 \Rightarrow b = 4{,}37\ kgs$

- **Problema 10**

- Se sabe que el voltaje de ruptura de un diodo seleccionado al azar está normalmente distribuido con valor medio de 40V y $\sigma = 1{,}5V$
- a) ¿cuál es la probabilidad de que el voltaje de un diodo esté entre 39 y 42
- b) ¿a partir de qué valor están el 15% de los diodos de mayor voltaje?
- c) Si se seleccionan 4 diodos independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno tenga un voltaje mayor de 42?

X $\equiv$ *voltaje de ruptura de los diodos* → $N(40; 1{,}5)$

- p(39<X<42)= $p(\frac{39-40}{1{,}5} < \frac{X-40}{1{,}5} < \frac{42-40}{1{,}5}) = p(-0{,}67 < Z < 1{,}33) = 0{,}9082 - 0{,}2514 = 0{,}6568$
- P(X>42)=$p(< \frac{X-40}{1{,}5} > \frac{42-40}{1{,}5}) = p(Z > 1{,}33) = 1 - 0{,}9082$=0,0918

b) p(X≥k)=0,15 ⟶ $p(\frac{X-40}{1{,}5} \geq \frac{k-40}{1{,}5})$ =0,15 ⟶ $\frac{k-40}{1{,}5}$=1,04 ⟶ k=41,56

c) Para cada díodo definimos una variable Y_i

$$=\begin{cases} 1 & \text{voltaje mayor de } 42 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} p = 0{,}0918 \\ q = 0{,}9082 \end{matrix}\right\}$$

N $\equiv$ *número de díodos con duración* > 42 B(4; 0,0918)

$$1\text{-}p(N= 0)=1\text{-}\binom{4}{0}(0{,}0918)^0\,(0{,}9082)^4=1\text{-}(0{,}9082)^4$$

- **Problema 11**

La duración de vida de un cierto componente eléctrico sigue una distribución exponencial con media de 8 meses. Se pide:

Calcular la probabilidad de que un elemento tenga una vida entre 3 y 12 meses;

El percentil 95 de la distribución

la probabilidad de que un componente que ha vivido ya más de 10 meses viva más de 25 meses.

X $\equiv$ *duración de un componente eléctrico* $\rightarrow exp(1/8)$

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8}e^{-x/8}, & x \geq 0 \end{cases}$ *Obtenemos la función de distribución*

$F(x)=\left\{\begin{matrix} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x/8} & x \geq 0 \end{matrix}\right\}$ $F(x)=\int_0^x \frac{1}{8} e^{-t/8}\,dt = -e^{-t/8}\Big]_0^x = 1-e^{-x/8}$

Calculamos $p(3 \leq X \leq 12) = F(12) - F(3) = 1-e^{-12/8}-(1-e^{-3/8})$=0,687-0,223=0,464.

- El percentil 95 de la distribución

b) Es el valor de k tal que $p(X \leq k) = 0{,}95$=F(k)

$1-e^{-x/8}$=0,95 $\Rightarrow$ $e^{-x/8}$=0,05 $\Rightarrow$ $\frac{-x}{8}$=ln0,05 $\Rightarrow$ x=23,97$\approx$ $24\ meses$

c) la probabilidad de que un componente que ha vivido ya más de 10 meses viva más de 25 meses.

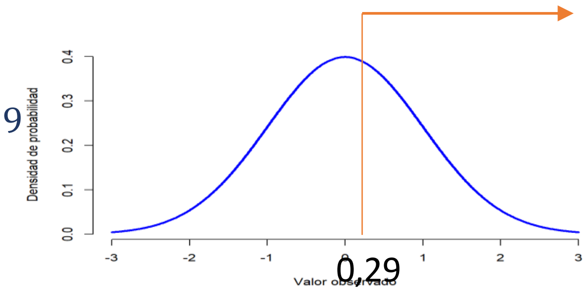
p(X>25/X>10)=$\frac{p(X>25)}{p(X>10)}$=$\frac{1-F(25)}{1-F(10)} = \frac{1-(1-e^{-25/8})}{1-(1-e^{-10/8})}$= $e^{-15/8}$=0,153

- **Problema 12**

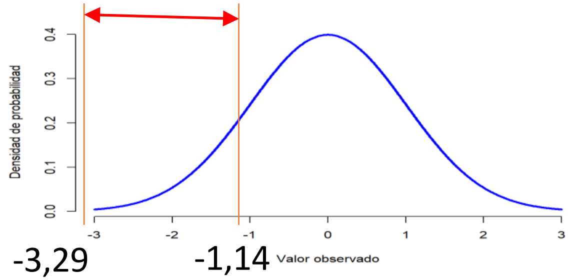
> El tamaño (mm) de grano de un tipo de aluminio es una distribución normal de media 96 y desviación típica 14.
>
> a) ¿cuál es la probabilidad de que el tamaño de grano exceda de 100?
>
> b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tamaño de grano esté entre 50 y 80?
>
> c) ¿Qué intervalo incluye el 90% central de todos los tamaños de grano?

- X≡ $\textit{tamaño del grano del aluminio} \rightarrow N(96,14)$

a) p(X>100)= $=p(\frac{X-96)}{14} > \frac{100-96}{14}) = p(Z > 0{,}29) = 1 - 0{,}6141 = 0{,}3859$



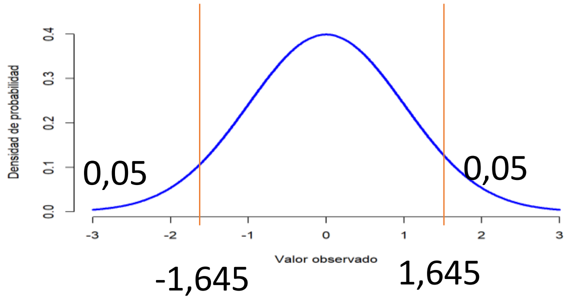
b) p(50<X<80)= $=p(\frac{50-96}{14} < \frac{X-96}{14} < \frac{80-96}{14}) = p(-3{,}29 < Z < -1{,}14) = 0{,}1271 - 0{,}0005 = 0{,}1266$



c) ¿Qué intervalo incluye el 90% central de todos los tamaños de grano?

c) p(a<X<b)= =p($\frac{a-96}{14} < \frac{X-96}{14} < \frac{b-96}{14}) = 0,90$

- El 90% de los granos de aluminio tienen un diámetro comprendido entre 72,97 mm y 119,03 mm



$$\frac{a-96}{14} = Z_{0,05} \longrightarrow p\left(Z < \frac{a-96}{14}\right) = 0,95 \longrightarrow \frac{a-96}{14} = -1,645 \longrightarrow a = 72,97$$

$$\frac{b-96}{14} = Z_{0,95} \longrightarrow p\left(Z < \frac{b-96}{14}\right) = 0,95 \longrightarrow \frac{b-96}{14} = 1,645 \longrightarrow b = 119,03$$

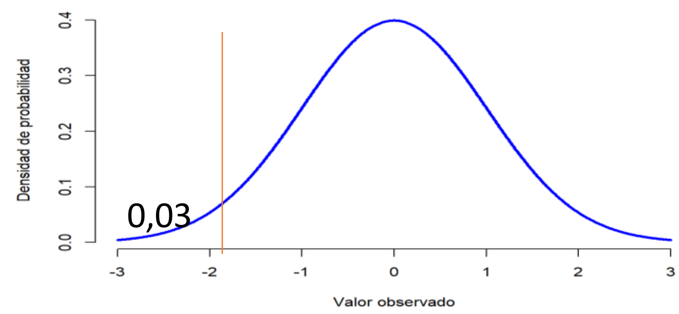
- **Problema 13**

Supongamos que el ingreso medio por familia en un país es 780 euros, y la desviación típica es 150. Asumiendo que los ingresos siguen una distribución normal y sabiendo que el gobierno da ayudas al 3% de las familias más pobres. ¿A partir de qué ingresos se beneficiarán las familias?

- X$\equiv$ $ingresos\ de\ las\ familias \rightarrow N(780, 150)$
- Tenemos que calcular el Percentil 3 es decir el valor k tal que

$$p(X \leq k) = 0.03$$

$$p(X \leq k) = p(\frac{X-780)}{150} \leq \frac{k-780}{150}) = p(Z \leq \frac{k-780}{150})$$



$$\frac{k-780}{150} = -1{,}88 \longrightarrow k = 498\ euros$$

- **Problema 14**

Un individuo puede elegir dos autobuses para ir a su casa. Ambos tienen parada en el mismo lugar. El primero de ellos tiene un tiempo de espera que se distribuye como una exponencial cuya media es 6 minutos; y el segundo tiene una media de 10 minutos. Si X es el tiempo de espera, se pide calcular la probabilidad de que espere más de 20 minutos el autobús.

$$p(X_1 \leq 20 \cup X_2 \leq 20)$$

$X_1 \equiv tiempo\ de\ espera\ en\ el\ primer\ autobús \qquad exp(1/6)$

$X_2 \equiv tiempo\ de\ espera\ en\ el\ segundo\ autobús \qquad exp(1/10)$

X$\equiv$ $tiempo\ de\ espera\ hasta\ que\ llegue\ alguno\ de\ los\ dos\ autobuses$

P(X>20)=1-p(X$\leq 20) = 1 - p(X_1 \leq 20 \cup X_2 \leq 20)$=1-$p(X_1 \leq 20)$ –p($X_2 \leq 20)$+$p(X_1 \leq 20)$ .p($X_2 \leq 20)$=

a) Para el primer autobús: $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{6} e^{-x/6}, & x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad Obtenemos\ la\ función\ de\ distribución$

F(x)=$\begin{Bmatrix} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x/6} & x \geq 0 \end{Bmatrix}$ $\qquad$ F(x)=$\int_0^x \frac{1}{6} e^{-t/6}$ dt=$-e^{-t/6}]_0^x$=1$-e^{-x/6}$

Calculamos p(X$\leq 20) = F(20) = 1 - e^{-20/6}$=0,964.

a) Para el segundo autobús: $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{10} e^{-x/10}, & x \geq 0 \end{cases}$ *Obtenemos la función de distribución*

F(x)=$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x/10} & x \geq 0 \end{cases}$ F(x)=$\int_0^x \frac{1}{10} e^{-t/10}$ dt=$-e^{-t/10}]_0^x$=1$-e^{-x/10}$

Calculamos p(X$\leq 20) = F(20) = 1 - e^{-20/10}$=0,393.

Entonces:

P(X>20)=1-p(X$\leq 20) = 1 - p(X_1 \leq 20$ U $X_2 \leq 20)$=1-$p(X_1 \leq 20)$ –p($X_2 \leq 20)$+$p(X_1 \leq 20)$.p($X_2 \leq 20)$=
=1-0,964-0,393+0,964x0,393=0,02186

- **Problema 15**

La distribución de probabilidad del precio de acciones de una empresa digital tiene un valor esperado de 200 €, una desviación estándar de 100 € y se asume normalidad. Si se compran 30 acciones, ¿cuál es la probabilidad de que el precio medio de las acciones compradas sea menor a 175 €?

- X≡ $precio\ de\ las\ acciones\ de\ la\ empresa\ digital \rightarrow N(200, 100)$
- $\bar{X} \equiv precio\ medio\ de\ las\ acciones\ de\ la\ empresa\ digital \quad N(200, 100)$

Si X $\rightarrow$ N(μ , σ)

$$\bar{\boldsymbol{X}} \rightarrow \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right) \Longleftrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\boldsymbol{\sigma}/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$$

Si X $\rightarrow$ N(200 , 100) $\quad \bar{X} \rightarrow N(200, \frac{100}{\sqrt{30}})= N(200, 18{,}26)$

p($\bar{X}$ <175)= =p($\frac{\bar{X}-200)}{18{,}26} < \frac{175-200}{18{,}26}) = p(Z < -1{,}37) = 0{,}0853$

Problema 16

- La dureza Rockwell de una aleación de metales está normalmente distribuida con una media de 70 unidades y una desviación típica de 3

a) Si una probeta se considera aceptable sólo cuando su dureza está comprendida entre 67 y 75, ¿cuál es el porcentaje de probetas que se rechazan?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 8 de 10 probetas independientemente seleccionadas tengan una dureza inferior a 73,84?

c) ¿y cuál es la probabilidad de que esa misma situación se de en un máximo de 80 de un total de 100 probetas?

X $\equiv$ *dureza de las probetas* $\rightarrow N(70;3)$

a) p(67≤X≤75)=p($\frac{67-70}{3} \leq \frac{X-70}{3} \leq \frac{75-70}{3}$) $=$ p$(-1 \leq Z \leq 1{,}67) = 0{,}9525 - 0{,}1587 = 0{,}7938$

b) Para cada probeta definimos una variable $Y_i = \begin{cases} 1 & dureza < 73{,}84 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$ $\quad \left.\begin{matrix} p = 0{,}8997 \\ q = 0{,}1003 \end{matrix}\right\}$

p=p(X<73,84)=p($\frac{X-70}{3} < \frac{73{,}84-70}{3}$) $=$ p(Z<1,28)=0,8997

N $\equiv$ *número de probetas con dureza inferior a* $73{,}84$ $\rightarrow$ B(10; 0,8997) *NO puede aproximarse por una Normal*

p(N$\leq$ 8))=1-$p(N>8)) =$ 1-p(N=9)-p(N=10)=1-$\binom{10}{9}$ $0{,}8997^9.0{,}1003^1$-$\binom{10}{10}$ $0{,}8997^{10}.0{,}1003^0$

c) T $\equiv$ *número de probetas con dureza inferior a* $73{,}84$ B(100; 0,8997) $\approx N(89{,}97;3)$ *SI puede aproximarse por una Normal*

p(T$\leq 80) = p(\frac{T-89{,}97}{3} \leq \frac{80-89{,}97}{3}$)=p(Z$\leq -3{,}32) = 0{,}0005$

- **Problema 17**

Tres carreteras diferentes entroncan en la entrada de una autovía. Suponemos que durante un día el número de vehículos que llegan a la autovía por cada una de las carreteras es una variable aleatoria normal con medias de 800, 1000 y 600 vehículos respectivamente y desviaciones típicas respectivas para cada una de las carreteras de 16, 25 y 18 vehículos. Las entradas de vehículos a la autovía desde las diferentes carreteras se producen de forma independiente.

a) A lo largo de un año, (se considera que el tráfico que entra en la autovía se distribuye de forma idéntica cada día) ¿Qué número de días cabe esperar que el número total de vehículos que se incorporan a la autovía esté comprendido entre 2.350 y 2.410?

b) ¿cuál es el porcentaje de días en que el número de vehículos que entran en un día determinado desde la carretera 2 sea mayor que el número de vehículos totales que entran desde las carreteras 1 y 3?

c) Se decide activar en la autovía un protocolo determinado sólo el 15 por ciento de los días en que la entrada total de vehículos es mayor. ¿Cuál es el número mínimo de vehículos que deben entrar en la autovía para que sea necesario activar el protocolo?

d) Si sabemos que un día determinado han entrado en la autovía más de 3.000 vehículos, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan incorporado más de 1.000 vehículos desde cada una de las carreteras?

X $\equiv$ *Número total de vehículos que entran en la autovía*

$$X_1 + X_2 + X_3 \longrightarrow N(2400; 34{,}71)$$

EX=E($X_1 + X_2 + X_3$)= 800+1000+600=2400

VarX=Var ($X_1 + X_2 + X_3$)= 256+625+324=1205 $\qquad \sigma = 34{,}71$

X $\equiv$ *Número total de vehículos que entran en la autovía*

$$X_1 + X_2 + X_3 \quad N(2400; 34{,}71)$$

EX=E($X_1 + X_2 + X_3$)= 800+1000+600=2400

VarX=Var ($X_1 + X_2 + X_3$)= 256+625+324=1205 $\quad \sigma = 34{,}71$

- a) p(2350<X<2410)= p($\frac{2350-2400}{34{,}71} < \frac{X-2400}{34{,}71} < \frac{2410-2400}{34{,}71}$) $= p(-1{,}44 < Z < 0{,}29) = 0{,}6141 - 0{,}0749 = 0{,}5392$
- b) p($X_2 - X_1 - X_3$>0)

$$X_2 - X_1 - X_3 \quad N(-400; 34{,}71)$$

EY=E($X_2 - X_1 - X_3$)= 1000-800-600=-400

VarY=Var ($X_2 - X_1 - X_3$)= 256+625+324=1205 $\longrightarrow \sigma = 34{,}71$

P(Y>0)=p($\frac{Y+400}{34{,}71} > \frac{0+400}{34{,}71}$)=p(Z>11,52)$\approx 0$

c) p(X≥k)=0,15 $\longrightarrow$ p($\frac{X-6{,}3}{2{,}5} \geq \frac{k-2400}{34{,}71}$) =p(Z≥ $\frac{k-6{,}3}{2{,}5}$)=0,15 $\longrightarrow$ $\frac{k-2400}{34{,}71}$=1,04 $\longrightarrow$ k=2436,1

d) p(X> 3000)= p($\frac{X-2400}{34{,}71} > \frac{3000-2400}{34{,}71}$) =p(Z> 17,29) ≈ 0 *El condicionante es un suceso imposible*