

Lógica y Matemática Discreta

Hoja 3

Combinatoria y Recursividad

Ejercicio 1. ¿De cuántas formas se puede rellenar una quiniela de 15 casillas?

Ejercicio 2. ¿Cuántos coches matriculados en España tienen los dígitos 3, 5, 6, 1 y las letras K, M, P? ¿Y los dígitos 3, 5, 1, 3 y las letras K, M, P?

Ejercicio 3. Un equipo de baloncesto dispone de 12 jugadores: 3 bases, 4 aleros y 5 pívots. ¿Cuántos equipos diferentes puede presentar el entrenador como quinteto titular (1 base, 2 aleros, 2 pívots)?

Ejercicio 4. Calcular de cuántas formas se pueden distribuir 20 bolas idénticas en 5 cajas diferentes de forma que:

- (a) en cada caja haya, como mínimo, 2 bolas.
- (b) en la primera caja no haya más de 5 bolas.
- (c) haya, como mucho, 2 cajas vacías.

Ejercicio 5. En un país muy supersticioso, un número de teléfono consta de 7 cifras de forma que:

- (a) la primera cifra tiene que ser entre un 4 y un 6.
- (b) las tres cifras siguientes tienen que estar comprendidas entre 3 y 7.

¿Cuántos números distintos pueden formarse?

Ejercicio 6. El consejo directivo de una empresa informática tiene 10 miembros. Se van a designar un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas puede hacerse esto? Si tres miembros del consejo son matemáticos, calcular cuántas de las listas anteriores tienen:

- (a) un matemático en la presidencia.
- (b) exactamente un matemático en la lista.
- (c) al menos un matemático en la lista.

Ejercicio 7. Calcular todos los divisores positivos de 112000. ¿Cuántos son impares?

Ejercicio 8. ¿Cuántos números enteros positivos menores de 120 son múltiplos de 2 o de 5?

Ejercicio 9. Luis planea invitar a sus n amigos a jugar al póker una vez por semana. Sabemos que puede invitar cada vez a 3 personas distintas durante dos años completos.

- (a) ¿Cuánto vale, como mínimo, n ?

- (b) Para ese valor de n ¿cuántas partidas puede jugar, como máximo, sin que coincidan dos amigos prefijados?

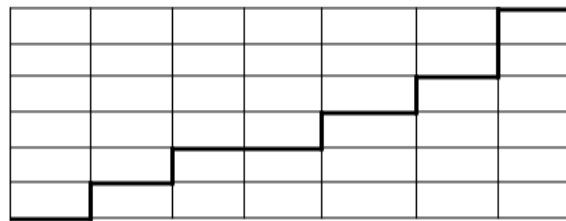
Ejercicio 10. En un lote de 100 ordenadores se sabe que 10 de ellos contienen circuitos integrados dañados. Se selecciona una muestra aleatoria de 7 ordenadores con el fin de realizar un chequeo.

- (a) ¿Cuántas muestras contienen 3 circuitos defectuosos?
 (b) ¿Cuántas contienen al menos un circuito defectuoso?

Ejercicio 11. ¿De cuántas formas se pueden elegir 8 monedas de una hucha que contiene 100 monedas de un euro y 80 monedas de 2 euros?

Ejercicio 12. ¿Cuántas cadenas de 11 caracteres se pueden formar con las letras de “pasapalabra”?

Ejercicio 13. La cuadrícula de la figura representa un conjunto de calles de una ciudad. Existen diferentes formas de ir desde el ángulo Suroeste al ángulo Noreste. Suponiendo que las únicas direcciones permitidas son el norte y el este, ¿Cuántos caminos posibles existen?



Ejercicio 14. ¿Cuántos enteros positivos menores que 10000 tienen la suma de sus cifras igual a 25?

Ejercicio 15. En un centro de enseñanza se reciben solicitudes de ingreso, que se atienden según las calificaciones de Matemáticas, Física, Química e Inglés. Cada asignatura tiene una puntuación entera entre 5 y 10.

- (a) ¿Cuántos expedientes académicos con diferentes puntuaciones se pueden recibir?
 (b) ¿Cuántos de ellos tienen de nota media 7?

Ejercicio 16. Hallar el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(2 - x + x^2)^5$.

Ejercicio 17. Hallar el coeficiente de x^{11} en el desarrollo de $(3\sqrt[3]{x^2} - x\sqrt{x})^9$.

Ejercicio 18. Hallar el coeficiente de x^2 en el desarrollo de $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^6$.

Ejercicio 19. Se pretende incrementar el aforo de un cine que cuenta con 4 salas distintas: A, B, C, D. Para ello, se introducen entre las cuatro salas un total de 54 butacas auxiliares, pero en la última sala no caben más de 20. ¿De cuántas formas podemos realizar la distribución de butacas entre las diferentes salas?

Ejercicio 20. Demostrar la identidad $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$ a partir del siguiente ejemplo: ¿De cuántas maneras es posible elegir k diputados de un grupo de n candidatos y, de los k diputados elegidos, seleccionar m miembros para formar parte del Gobierno?

Ejercicio 21. Sea S_n el conjunto de todos los strings binarios de longitud n tal que dos 0 no aparecen consecutivamente en ningún string de S . Entótrar la relación de recurrencia para $|S_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 22. Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz $m \times m$ tal que

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sea $n \geq 1$ y consideremos la matriz A^n . Entonces, todos los elementos de la diagonal de A^n son todos iguales a $x_n \in \mathbb{N}$ y todos los elementos de fuera de la diagonal de A^n son todos iguales a $y_n \in \mathbb{N}$.

- (a) Probar que $y_n = (m-1)x_{n-1}$ y que $x_n = y_{n-1} + (m-2)x_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.
- (b) Obtener una relación de recurrencia para x_n con condiciones iniciales apropiadas.
- (c) Resolver la recurrencia para x_n .
- (d) Encontrar, a partir de la solución x_n , el valor de y_n .

Ejercicio 23. Resolver la recurrencia

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 4a_{n-1} + 6n^2 \end{cases}$$