Cálculo

Tema 5

Interpolación de funciones

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2023-2024

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Aproximaciones polinómicas de funciones elementales

La aproximación de funciones mediante polinomios se puede realizar desde dos puntos de vista: el global, en un intervalo completo, y el local, en el entorno de un punto. El teorema de Taylor trata acerca de las condiciones en las que una función se puede aproximar localmente mediante polinomios, y es utilizado principalmente para realizar diversos tipos de cálculos aproximados y para demostrar desigualdades de funciones. Por su parte, el método interpolador de Lagrange permite obtener un polinomio que pase por un determinado número de puntos.

Para encontrar una función polinómica $P(x)$ que aproxime otra función $f(x)$, se comienza por elegir un número $x = c$ en el dominio de $f(x)$ en el que $P(x)$ y $f(x)$ tengan el mismo valor. Es decir, se elige un valor $x = c$ tal que $P(c) = f(c)$. En esta situación, se dice que la aproximación polinómica se expande alrededor de $x = c$ o que está centrada en $x = c$.

Es evidente que existen muchos polinomios que pasan por el punto geométrico $(c, f(c))$, pero el objetivo es encontrar un polinomio cuya gráfica se parezca a la de $f(x)$ en las cercanías del punto $x = c$. Una manera de aumentar el parecido de las dos gráficas consiste en imponer la condición de que tanto $P(x)$ como $f(x)$ no solo tengan el mismo valor en $x = c$, sino que además tengan la misma pendiente en el punto $x = c$. Es decir, las condiciones a tener en cuenta pasan a ser:

- $P(c) = f(c)$
- $P'(c) = f'(c)$

Ejemplo 1

La Figura 1 muestra la función polinómica de primer grado cuyo valor y pendiente en $c = 0$ coinciden con los de la función $f(x) = e^x$. Se puede comprobar que, en las cercanías del punto geométrico $(0, 1)$, la gráfica de la función polinómica se encuentra razonablemente cercana a la gráfica de $f(x) = e^x$. Sin embargo, al alejarse del punto $(0, 1)$, la precisión de la aproximación disminuye.

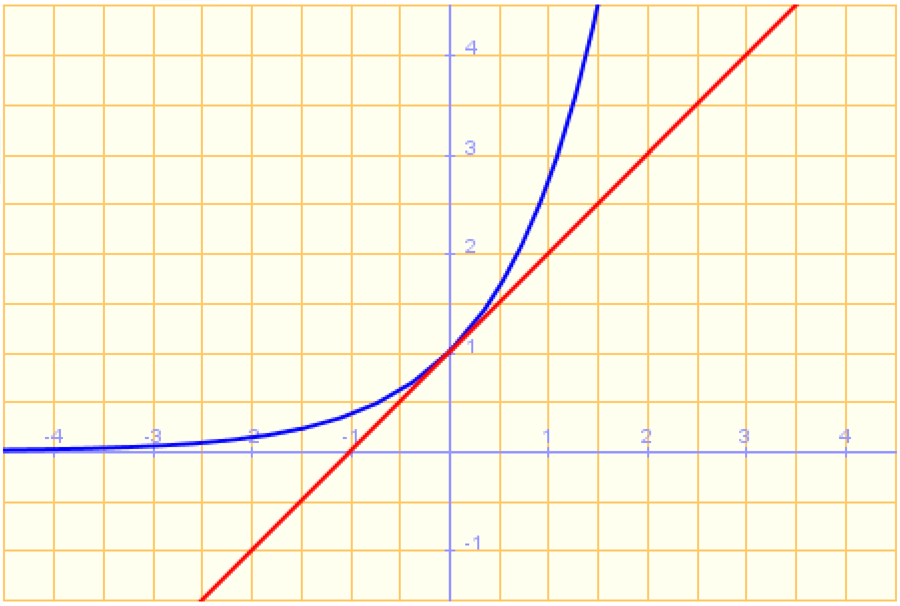

Figura 1: Función $y = e^x$ y polinomio del Ejemplo 1

Una forma de mejorar la aproximación consiste en imponer un nuevo requisito: que los valores de las segundas derivadas de $P(x)$ y $f(x)$ sean iguales, con lo que las condiciones a cumplir por $P(x)$ pasan a ser las siguientes:

- $P(c) = f(c)$
- $P'(c) = f'(c)$
- $P''(c) = f''(c)$

Ejemplo 2

La Figura 2 muestra la función polinómica de segundo grado cuyo valor y primeras dos derivadas en $c = 0$ coinciden con los de la función $f(x) = e^x$. El resultado es una función de tipo parabólico.

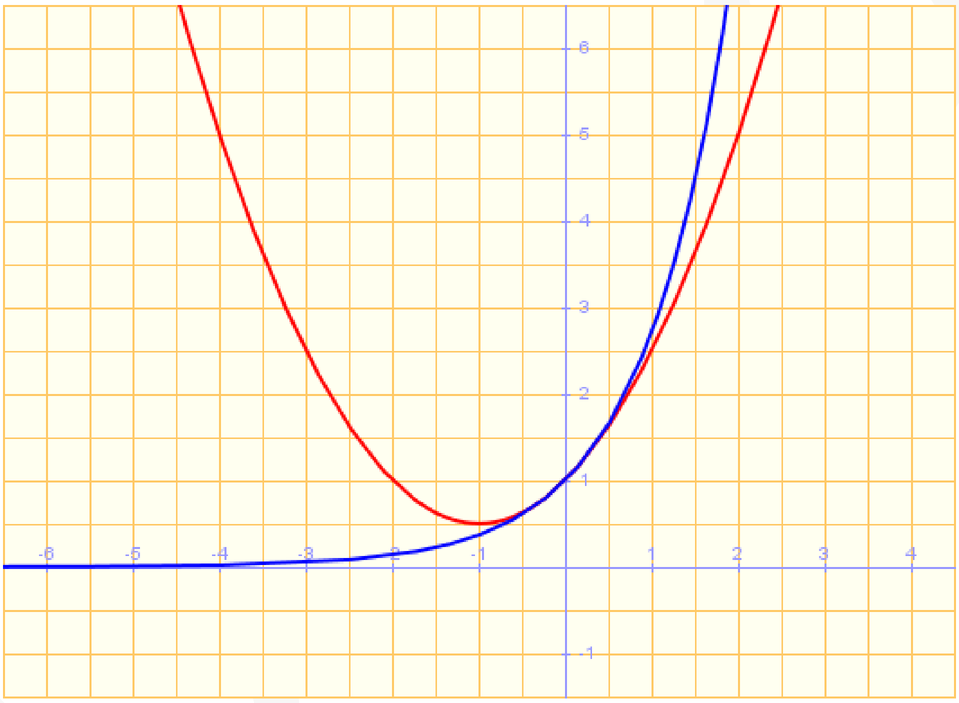

Figura 2: Función $y = e^x$ y polinomio del Ejemplo 2

2 Polinomio de Taylor y de Maclaurin

2.1 Polinomio de Taylor

En los ejemplos anteriores se intentó aproximar la función $f(x) = e^x$ utilizando como elemento de partida el punto $x = 0$. Para aproximaciones centradas en un valor arbitrario $x = c$, es conveniente escribir el polinomio de la siguiente forma:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n$$

De esta manera, las derivadas sucesivas dan como resultado:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots + na_n(x-c)^{n-1}$$

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-c) + \cdots + n(n-1)(x-c)^{n-2}$$

$$P'''(x) = 6a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-c)^{n-3}$$

$$\ldots$$

$$P^{n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_n$$

Para $x = c$, se obtienen los siguientes resultados:

$$P(c) = a_0 \quad P'(c) = a_1 \quad P''(c) = 2a_2 \quad \cdots \quad P^{n)}(c) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!a_n$$

Como el valor de $f(x)$ y sus n primeras derivadas debe coincidir con el valor de $P(x)$ y sus n primeras derivadas en $x = c$, se sigue que:

$$f(c) = P(c) = a_0 \qquad f'(c) = P'(c) = a_1 \qquad f''(c) = P''(c) = 2a_2 \qquad \cdots \qquad f^{n)}(c) = P^{n)}(c) = n!a_n$$

Estas consideraciones sirven para definir los polinomios de Taylor: si $f(x)$ tiene n derivadas en $x = c$, entonces el **polinomio de Taylor** de grado n para $f(x)$ en el punto $x = c$ es el siguiente:

$$\boxed{P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(c)}{n!}(x-c)^n}$$

Ejemplo 3

La Figura 3 muestra la gráfica de la función $f(x) = \mathrm{Ln}(x)$ junto con las de los polinomios de Taylor de grado 1, 2 y 3 centrados en $c = 1$ para esa función.

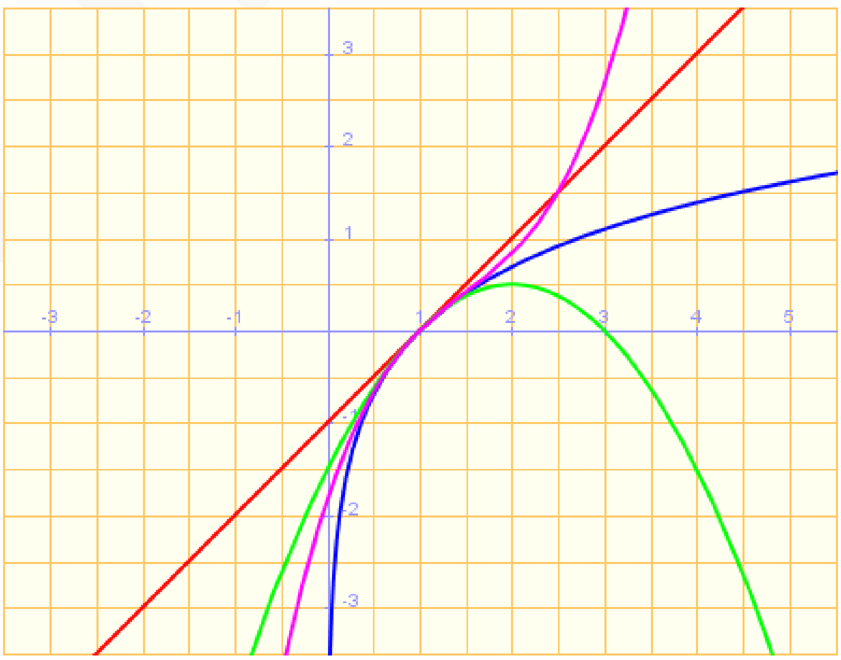

Figura 3: Polinomios de Taylor del Ejemplo 3.

Ejemplo 4

La Figura 4 muestra la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ junto con las de los polinomios de Taylor de grado 1, 2 y 3 desarrollados a partir de $c = \pi/6$, pudiéndose comprobar la semejanza de las gráficas en las cercanías del punto de trabajo.

Figura 4: Figura 4: Polinomios de Taylor del Ejemplo 4

2.2 Polinomio de Maclaurin

Una vez presentado el polinomio de Taylor, el polinomio de Maclaurin pude verse como un caso particular del mismo. En efecto, si $c = 0$, entonces el polinomio anterior puede expresarse de una forma más sencilla, conociéndose la nueva expresión como **polinomio de Maclaurin** de grado n para la función $f(x)$.

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n}$$

Ejemplo 5

Puesto que la imagen de $f(x) = e^x$ y todas sus derivadas en $x = 0$ tienen el mismo valor, su polinomio de Maclaurin de grado n es $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

Ejemplo 6

La Figura 5 muestra la gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$ junto con la de su polinomio de Maclaurin $P_6(x)$. Puede comprobarse la similitud de las dos gráficas en el entorno del origen.

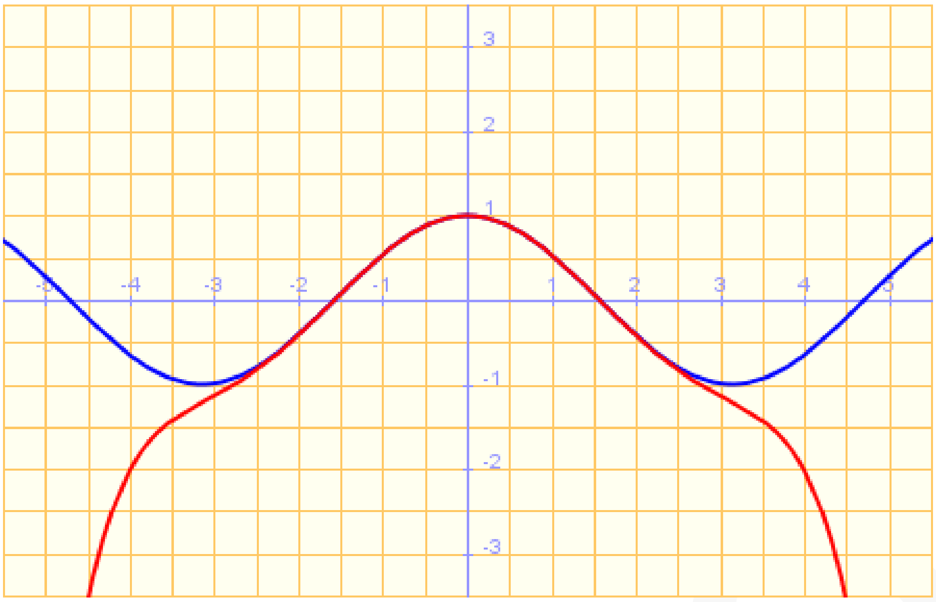

Figura 5: Función $f(x)$ y polinomio $P_6(x)$ del Ejemplo 6

3 Desarrollos de Taylor y de Maclaurin y concepto de resto

3.1 Desarrollo de Taylor y resto de un polinomio de Taylor

Al utilizar polinomios de Taylor para aproximar funciones, la precisión de la aproximación conseguida dependerá en gran medida de la complejidad del polinomio utilizado como aproximación. En general, el error cometido al utilizar la aproximación depende de la propia función $f(x)$, del polinomio $P(x)$ y del punto en el que se esté realizando el cálculo, por lo que podemos establecer la siguiente relación:

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

A la función $R(x)$ se le denomina resto, y queda definida como la diferencia entre $f(x)$ y $P(x)$. Al valor absoluto de esta diferencia se le llama error de la aproximación. Es decir:

$$\text{Error } = |R(x)| = |f(x) - P(x)|$$

El conocido como **Teorema de Taylor** indica que, si una función $f(x)$ es derivable hasta el orden $n+1$ en un intervalo I que contiene al punto $x = c$ entonces, para todo valor x perteneciente al intervalo I, existe un elemento z perteneciente al intervalo cuyos extremos son x y c tal que

$$\boxed{f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R(x)}$$

La anterior expresión es propiamente el desarrollo de Taylor, donde $R(x)$ es el **resto de Lagrange**.

$$\boxed{R(x) = \frac{f^{n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}$$

Por ejemplo, para $n=0$, el teorema de Taylor establece que si $f(x)$ es derivable en un intervalo I que contiene al valor $x=c$, entonces para cada $x \in I$, existe un valor z del intervalo definido por x y c tal que se cumple lo siguiente:

$$f(x)=f(c)+f'(z)(x-c) \quad \Longrightarrow \quad f'(z)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Una consecuencia útil del teorema de Taylor es la siguiente acotación:

$$\boxed{|R(x)|=\frac{f^{n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{\text{máx}(|f^{n+1}(z)|)}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}}$$

Otra forma de expresar el desarrollo de Taylor es la siguiente:

$$f(c+h)=f(c)+f'(c)h+\frac{f''(c)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{n)}(c)}{n!}h^n+R(x), \quad R(x)=\frac{f^{n+1)}(c+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

3.2 Desarrollo de Maclaurin y resto de un polinomio de Maclaurin

De manera equivalente a lo visto anteriormente, es posible presentar el desarrollo de Maclaurin de la siguiente manera, donde z pertenece al intervalo cuyos extremos son 0 y x:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n+R(x), \qquad R(x)=\frac{f^{n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

4 Convergencia de los polinomios de Taylor y Maclaurin

Los polinomios de Taylor pueden expresarse como la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

Si la función $f(x)$ tiene derivadas de cualquier orden en un intervalo $I=(a,b)$ que contiene al punto $x=c$, entonces la serie de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(x)}{n!}(x-c)^n$ converge a $f(x)$ para todo $x \in I$ si y solo si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R(x)=0$ para todo $x \in I$.

Ejemplo 7

La serie de Taylor de la función $f(x)=\text{sen}(x)$ desarrollada alrededor de $c=0$ converge en todo punto de la recta real, puesto que su resto de Lagrange en valor absoluto se puede expresar como $R(x)=\dfrac{|\cos(z)|x^n}{(n+1)!}$ o como $R(x)=\dfrac{|\text{sen}(z)|x^n}{(n+1)!}$, dependiendo del valor exacto de n. En cualquier caso, se comprueba que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R(x)=0$.

Si una función $f(x)$ tiene una serie de potencias que converge a dicha función en un intervalo abierto que contiene a $x=c$, entonces esa serie de potencias es el polinomio de Taylor para $f(x)$ en $x=c$ de grado infinito.

5 Polinomio interpolador de Lagrange

Dado un conjunto de $n+1$ puntos x_i de los cuales se conoce el valor de sus imágenes $f(x_i)$, el método interpolador de Lagrange permite generar un polinomio $P(x)$ de como máximo grado n que pase por dichos puntos, es decir, tal que $P(x_i) = f(x_i)$. El **polinomio interpolador de Lagrange** tiene la siguiente expresión:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \left(i \in \{0, 1, \dots, n\}\right)$$

Por ejemplo, la expresión del polinomio interpolador cuando se parte de tres puntos x_0, x_1 y x_2 es la siguiente:

$$P(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Ejemplo

El polinomio de Lagrange que pasa por los puntos $(-1,3)$, $(2,1)$, y $(3,2)$ es

$$P(x) = 3\frac{(x-2)(x-3)}{12} + \frac{(x+1)(x-3)}{-3} + 2\frac{(x+1)(x-2)}{4} = \frac{1}{12}(5x^2 - 13x + 18)$$

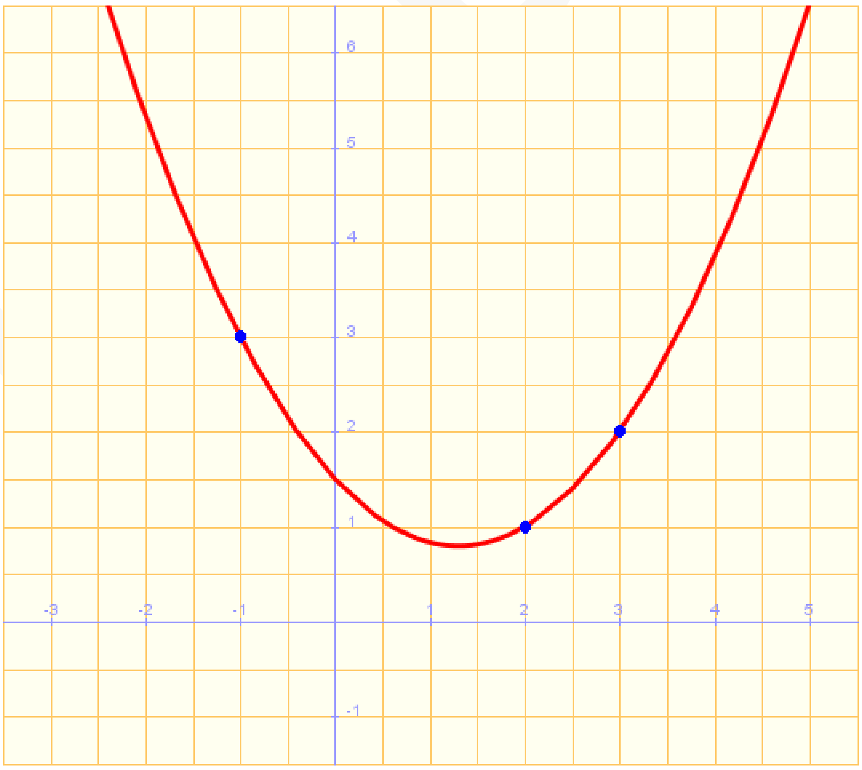

Figura 6: Ejemplo de polinomio interpolador de Lagrange

6 Problemas

1) Encuentra la función polinómica de primer grado $P(x)$ cuyo valor y pendiente coinciden con el valor y pendiente de $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$ en el punto $c = 8$.

2) Determina la función polinómica de primer grado $P(x)$ cuyo valor y pendiente coinciden con el valor y pendiente de $f(x) = \tan(x)$ en el punto $c = \dfrac{\pi}{4}$.

3) Encuentra el polinomio de Maclaurin de grado 3 para la función $f(x) = e^{-x}$.

4) Calcula el polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función $f(x) = xe^{x}$.

5) Determina el polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

6) Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en el punto $c = 1$ para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

7) Determina el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en el punto $c = 1$ para la función $f(x) = \mathrm{Ln}(x)$.

8) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 para la función $f(x) = x^2\cos(x)$ centrado en el punto $c = \pi$.

9) Determina el polinomio de Maclaurin de grado 3 de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

10) Calcula el polinomio de Maclaurin de grado 2 de la función $f(x) = e^{x}\,\mathrm{Ln}(1-x)$.

11) Determina el desarrollo de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = (1+e^{x})^2$ en $c = 0$.

12) Calcula el desarrollo de Maclaurin de grado 3 de la función $f(x) = e^{x}\,\mathrm{Ln}(1-x)$.

13) Utiliza el teorema de Taylor con el fin de obtener una cota superior para el error de la siguiente aproximación, y calcula a continuación el valor exacto del error:

$$\cos(0.3) \approx 1 - \frac{(0.3)^2}{2!} + \frac{(0.3)^4}{4!}$$

14) Determina el grado del polinomio de Maclaurin requerido para que el error en la aproximación de la función $f(x) = e^{x}$ en el valor $x = 0.6$ sea menor que 0.001.

15) Calcula $\sqrt[3]{30}$ con un error menor que 10^{-5} utilizando el desarrollo de Taylor adecuado.

16) Calcula el siguiente límite utilizando polinomios de Taylor.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\mathrm{Ln}\big(1+x\big) + \dfrac{x^2}{2} - x\right)^{10}}{\big(e^{x} - x - 1\big)^{15}}$$

17) Demuestra que, para todo $x \geq 0$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$$

18) Dados los tres puntos del plano $(0,-2)$, $(1,6)$ y $(3,40)$, encuentra el polinomio interpolador de Lagrange que pasa por ellos.

19) Dada la siguiente tabla, estima $f(4)$ utilizando la interpolación de Lagrange.

x_k	-1	0	3	7
$f(x_k)$	2	0	4	7

20) Dada la siguiente tabla, aproxima $f(0.25)$ y $f(0.75)$ utilizando la interpolación de Lagrange.

x_k	0	1	2
$f(x_k)$	1	2.71828	7.38906

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- *Cálculo*. R. E. Larson, R. P. Hostetler y B. H. Edwards. Ed. McGraw-Hill.
- *Problemas de Cálculo*. M. Bilbao, F. Castañeda y J. C. Peral.
- *Problemas de análisis*. Tomo I. M. Anzola, J. Caruncho y G. Pérez-Canales. Ed. Primer Ciclo.
- *Problemas de Cálculo Infinitesimal*. Tomo II. E. Tebar Flores.
- *Análisis Matemático I*. J. de Burgos. García-Maroto editores.
- *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*. A. García et al. CLAGSA.
- *Análisis Matemático*. R. Losada Rodríguez. Ed. Pirámide.
- *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. D. Pestana Galván et al. Ed. Ariel.