Hoja de problemas nº 5

Aplicaciones Lineales

Tema 5

Estudiar si son aplicaciones lineales

1.- $f\colon R^3 \quad\rightarrow\quad R^4$ : f$(x_1, x_2, x_3)$= $(x_3, x_1 + x_2, 0, -x_3)$

2.- $f\colon R^3 \quad\rightarrow\quad R^2$ : f$(x, y, z)$= $(x + a, y)$

3.- f: $R^3 \quad\rightarrow\quad M_2$(x): f$(x, y, z)$=$\begin{pmatrix} ax & by \\ cz & x + y + z \end{pmatrix}$ a,b,c $\in R$

4.- f: $P_2$(x) $\rightarrow$ $P_1$(x) : f$(a_2x^2 + a_1x + a_0) = p'(x)$

5.- f: $P_3$(x) $\rightarrow$ $R^4$ : f$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_0, a_1 + 1, a_2, a_3)$

6.- Dado el endomorfismo de $R^3$ definido por las ecuaciones

$(y_1, y_2, y_3)$= $(x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_3\ )$

Obtener: a) núcleo e imagen de la aplicación lineal

b) Clasificar la aplicación lineal

c) f(V) siendo V=$\{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

7.- Calcular núcleo e imagen de la aplicación lineal $f\colon R^4 \rightarrow R^3$ definida por la expresión f$(x_1, x_2, x_3, x_4\ )$= $(\ x_1 + x_2, 0,\ x_1 - x_2)$

8.- Determinar el ker f e Imf del endomorfismo : $R^3 \rightarrow R^3$ definido por f$(x_1, x_2, x_3)$= $(\ x_3,\ x_1 + x_2, -x_3)$

Calcular $f^{-1}(0{,}0{,}0)$ $\quad f^{-1}(1{,}2{,}3)$ $\quad f^{-1}(1{,}0{,}-1)$

Obtener la matriz asociada a f en las bases canónicas.

9.- Considerar h: $M_{2x2}(R) \longrightarrow R^4$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow$ (a+b-d, c+d, b-2c+d, a-d)

a) Calcular la matriz asociada a h en las bases canónicas de $M_{2x2}(R)$ $y$ $R^4$

b) Determinar h(A) siendo A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

c) Calcular h(S) siendo S=L<$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$>

10.- Dada la aplicación lineal f: $R^3 \qquad P_3$(t)

$(x_1, x_2, x_3) \quad (x_1 + x_2)+( x_1 - \ x_3)t + x_3t^2 + x_2t^3$

Calcular la imagen del vector de $R^3$ cuyas coordenadas en la base

B={(-1,0,1); (2,1,1); (1,0,2)} son 1, -2, 3

11.- Dadas B=$\{u_1, u_2\}$ y B´=$\{v_1, v_2, v_3\}$ bases de U y V respectivamente, si f es una aplicación lineal tal que:

f$(u_1) = \ 3v_1 + 6v_2 - 3v_3$ f$(u_2) = \ v_1 + 5v_2 - v_3$

Obtener $M_{B,B'}(f)$. Clasificar f

12.- Si C es la base canónica de $\boldsymbol{R}^3$ y C´= {(1,1,0), (1,0,1), (0,-1,2)}

Si f es un endomorfismo cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de f en la base C´.

C´= $\{u_1$ =(1,1,0), $u_2$ = (1,0,1), $u_3$ = (0,-1,2)}

13.- Sea $f: E_3 \rightarrow E_3'$ una aplicación lineal tal que $f(\vec{e}_1) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $f(\vec{e}_2) = \vec{u}_2$, $f(\vec{e}_3) = \vec{u}_1$ donde B=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $y\ B' =$ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ *son bases de los espacios de partida y llegada.*

a) Hallar la matriz asociada a f en las bases B y B´.
b) Hallar una base de $Ker\ (f)$ y otra de $Im(f)$.
c) Obtener las ecuaciones de f(V) siendo V=$\{(\alpha, \alpha, \alpha + \beta)\ /\alpha, \beta \in R\}$

14.- **Examen final mayo 2023**

Dada f: $R^3 \rightarrow R^2$ aplicación lineal tal que f(x,y,z)=(2x-y, 2y+z) y g: $R^2 \rightarrow R^3$ aplicación lineal tal que g(x,y)=(4x+2y, y, x+y);

Consideramos en $R^3$ *la base* $B = \{(1,0,0)\ \ (1,1,0)\ (1,1,1)\}$

*y en* $R^2$ *la base* $B' = \{(1,0)\ (1,1)\}$,

a) Determinar $M_{CC'}(f)$ $y$ $M_{CC'}(g)$ , siendo C y C´ respectivamente las bases canónicas de $R^3 y\ R^2$
b) Obtener una base de ker f y otra base de Im g. Clasificar las aplicaciones f y g.
c) Calcular $[f(2,0,-1)_B]_{B'}$ utilizando la matriz $M_{B,B'}$(f) y comprobar el resultado en las bases canónicas

15.- Dada f: $P_2$(x) $\longrightarrow$ $P_2$(x)

$$P(x) \longrightarrow 2[p(0) - p''(0)]x + [p''(0) - p'(0) - p(0)]x^2$$

¿Es el subespacio vectorial F=L<1+2x, 1-$x^2$> invariante por f?

16.- Sea f: $P_2(x) \quad \rightarrow \quad P_2(x)$ un endomorfismo tal que

$$f(a + bx + cx^2) = (a + 2b + c) + (\alpha a + b)x + (a + 2b + \alpha c)x^2$$

Encontrar las dimensiones de ker $f$ *y de* $Im\ f$ *según los distintos valores de* $\alpha$

17.- **(Examen 2º Parcial U-tad junio 2020)** Consideramos la aplicación lineal del espacio $R^3$ en $R^2$ del que sabemos:

-el núcleo del homomorfismo es

Ker f ={(x,y,z)/ x+ay+z=0; ax+y+z=0}

-f (0,0,a-1) =(0,a-1) y f(1,0,1)=(2,1). a es un número real arbitrario

a) Obtener dimensiones y bases de Ker f y de Im f según los valores de a

b) Calcular la matriz de la aplicación lineal en las bases canónicas de $R^3$ y $R^2$;

c) Para a = 1, hallar, si existen, los vectores que se transforman en el vector (2,1) y en el vector (2,3)

18.- Sea f un endomorfismo de $R^4$ definido por:

1) ker f = {(x,y,z,t)/ 2x+y-z-2t=0; z+2t=0}

2) f(0,0,0,1) = (2,0,0,0) y f(1,0,0,0) = (2,0,2,0)

Resolver las siguientes cuestiones:

a) Calcular la matriz de f respecto de la base canónica de $R^4$
b) Hallar una base del subespacio f(V) siendo
V≡ $\{(x, y, z, t) / \ x + y + z + t = 0\}$
c) Calcular la matriz de f respecto de la base

B={$w_1 = (1,1,0,0), w_2 = (1,-1,0,0), w_3 = (0,0,1,1), w_4 = (0,0,1,-1)$}

19.- Dado f endomorfismo de $\boldsymbol{R}^4$ tal que

f($e_1$) = $e_1$- $e_2$ f($e_3$) = $e_1$ y ker f=L<$e_1$+ $e_2$, $e_3$-$e_4$ >

Estudiar si se verifica que $\boldsymbol{R}^4 = kerf \oplus Imf$