CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA
Y ARTE DIGITAL

Tema 5

Modelos Probabilísticos Continuos

Ingeniería del software

CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Temario

Modelos probabilísticos continuos

6.1. Variables aleatorias continuas. Función de densidad y función de distribución

6.2. La Distribución Normal

6.3. Otros modelos unidimensionales continuos
- Distribución Uniforme
- Distribuciones Gamma y Exponencial

Variable aleatoria

Variable aleatoria: Es una función que asocia a cada suceso del espacio muestral un número real (una medición)

$$
\begin{aligned}
X:\ \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\
\omega &\rightarrow X(\omega)
\end{aligned}
$$

X = "distancia en km de casa al trabajo"
Y = "número de personas que viajan en el mismo vehículo"
Z = "número de personas que se quedan a comer en el trabajo"

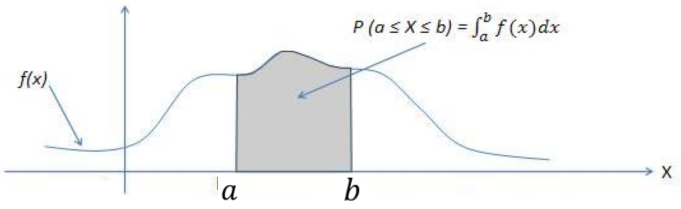
- **Variable aleatoria Discreta:** variable aleatoria que toma un conjunto finito o infinito numerable de valores ("contablemente" infinito)

- **Variable aleatoria Continua:** puede tomar todos los valores de un intervalo, todos los valores de la recta real o todos los números de una unión disjunta de intervalos,

Variable aleatoria continua

Función de densidad (probabilidad): Es la función que asigna a cada **intervalo** de la variable su correspondiente probabilidad calculando el área de la función que encierra el intervalo.

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



- La probabilidad de que X tome un valor en el intervalo $[a, b]$ es el área encerrada bajo la curva correspondiente a $f(x)$ entre los valores a y b.
- La función no puede ser negativa.
- La suma total de su área es igual a 1.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$$

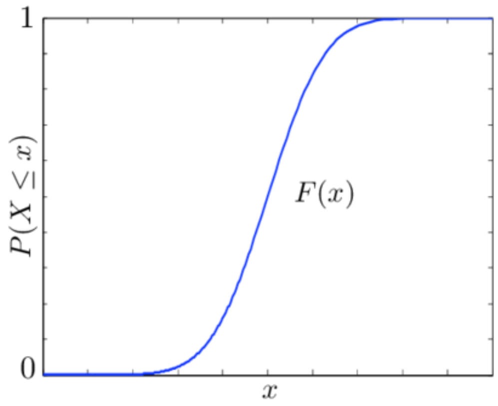
Variable aleatoria continua

Función de distribución (acumulativa): Es la función que mide la probabilidad acumulada en cada punto:

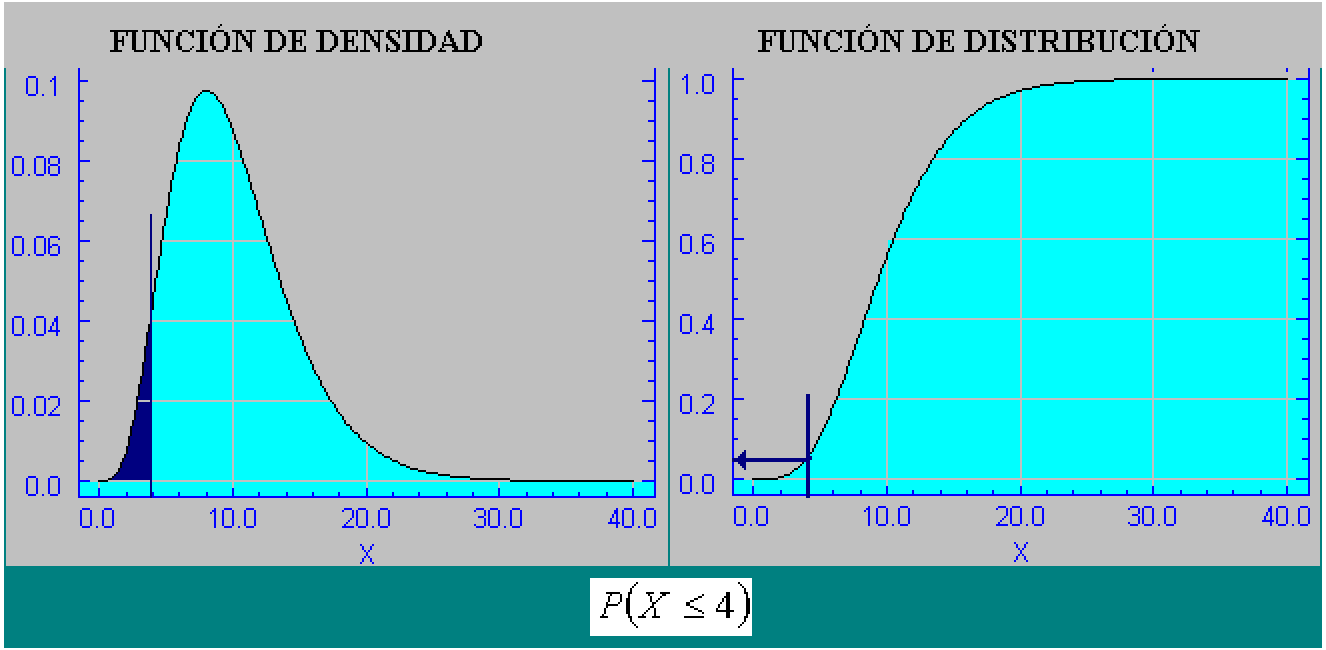
$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Propiedades:

1) $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$
2) F es monótona no decreciente.
3) F es continua.



Variable aleatoria continua



Variable aleatoria continua

Propiedades:

- Como consecuencia de la definición de las funciones de densidad y distribución, la relación que guardan entre ellas es:

$$\boxed{F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)}$$

Variable aleatoria continua

Propiedades:

- La probabilidad de tomar un valor particular es nula:

$$p(X = x) = \int_{x}^{x} f(t)\, dt = 0$$

- La función de distribución facilita el cálculo de probabilidades,

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

- La probabilidad del inverso es igual que en el caso discreto,

$$p(X > x) = 1 - p(X \leq x) = 1 - F(x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Esperanza matemática

Esperanza matemática, Valor esperado o Media poblacional ($\boldsymbol{E[X] = \mu}$): Es el número que formaliza el valor medio de un fenómeno aleatorio:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Propiedades:

- El valor esperado de una variable aleatoria $Y = aX + b$ es

$$E[Y] = E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$$

- El valor esperado de una variable aleatoria $f(X)$ es

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot f(x)\, dx$$

Varianza poblacional

Varianza poblacional ($\boldsymbol{Var[X] = \sigma^2}$): Es el número que formaliza la variabilidad de un fenómeno aleatorio:

$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - \mu^2$$

➢ La **desviación típica poblacional**, es la raíz cuadrada positiva de la varianza: $\boldsymbol{\sigma} = +\sqrt{\boldsymbol{\sigma^2}}$.

Propiedades:

- La varianza de una variable aleatoria $Y = aX + b$ es

$$Var[Y] = Var[aX+b] = a^2 \cdot Var[X] \Longrightarrow \sigma_y = |a| \cdot \sigma_x$$

- La varianza de una variable aleatoria $f(X)$ es

$$Var[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [h(x)]^2 \cdot f(x)\, dx - [E(h(x)]^2$$

Variable aleatoria

Comparativa entre variables aleatorias discretas y continuas:

V.A. Discreta		V.A. Continua	
Función de masa	$p(X = x_i)$	Función de densidad	$f(x)$
Función de distribución	$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i)$	Función de distribución	$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

Variable aleatoria

❖ **Ejemplo 1**

La demanda semanal de cierta materia prima (en Tm) por parte de una empresa es de tipo aleatorio y tiene por función de densidad:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} k(1-x)^2 & si\ 1 < x < 3 \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) ¿para qué valor de k es f(x) realmente una función de densidad?
b) Calcular la Función de distribución F(x)
c) Calcular p(1,2 $\leq X \leq 2{,}3)$
d) Probabilidad de que en una semana la demanda sea mayor que 2
e) Calcular la demanda esperada
f) ¿Qué stock debe disponer la empresa al principio de la semana para garantizar que atenderá la demanda con una probabilidad de 0,95?

Distribución Normal

- La distribución Normal es la más importante y utilizada de todas las distribuciones continuas.

- Permite describir y modelizar muchos conjuntos de datos procedentes de la naturaleza, de la industria y de la investigación:

  Datos de alturas, pesos… en general datos biométricos
  Datos meteorológicos correspondientes a lluvias, temperaturas…
  Tiempo de vida/duración de un aparato de cualquier tipo
  Numerosas medidas e indicadores económicos
  Mediciones de inteligencia y aptitud
  Tiempos de reacción a experimentos psicológicos
  Calificaciones de pruebas o exámenes…

- La probabilidad de que X tome un valor en cualquier subintervalo es proporcional a la longitud del subintervalo

Distribución Normal

Se dice que una variable aleatoria sigue una **distribución normal de media $\boldsymbol{\mu}$ y desviación típica $\boldsymbol{\sigma}$**, $X \sim N(\mu, \sigma)$, cuando su función de densidad es:

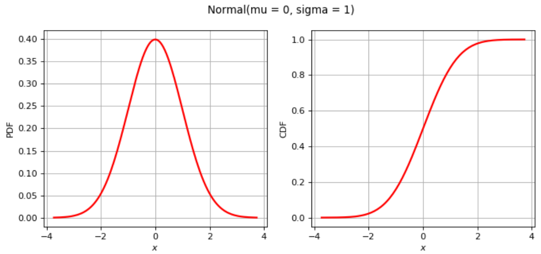
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Y, por tanto, su función de distribución:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

- En el caso de la distribución normal estándar, $N(0{,}1)$, la función de densidad quedaría así:

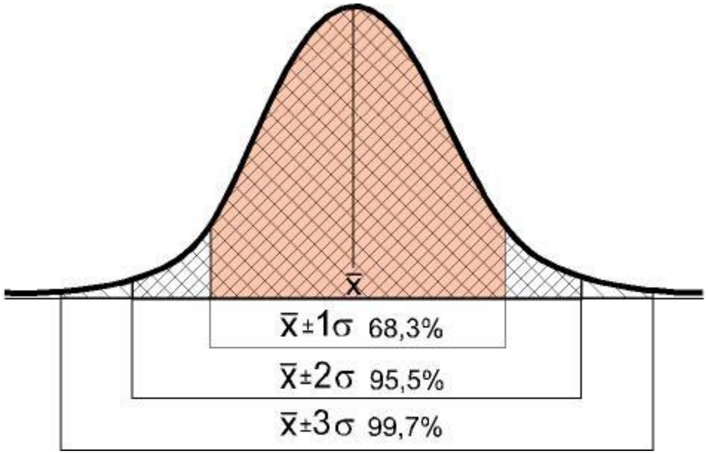
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Distribución Normal

Propiedades:

- Si la distribución de una variable es (aproximadamente) Normal: N(μ, σ)
  - Aproximadamente el 68,3% de los valores están comprendidos en $(\boldsymbol{\mu - \sigma, \mu + \sigma})$
  - Aproximadamente el 95,5% de los valores están comprendidos en $(\boldsymbol{\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma})$
  - Aproximadamente el 99,7% de los valores están comprendidos en $(\boldsymbol{\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma})$



Distribución Normal

Propiedades:

- La función de densidad es simétrica respecto su valor máximo $x = \mu$.
- La media, la mediana y la moda coinciden en μ.
- Si tenemos una serie de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas (v.a.i.i.d) bajo una Normal, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i), i = 1 \dots n$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \,, + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

Equivalentemente,

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N\left(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}\right)$$

Distribución Normal

Propiedades:

- Dada v.a. normal $X \sim N(\mu, \sigma)$, la nueva variable

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

También sigue una distribución normal, pero de media cero y desviación típica la unidad. Es decir, $Z \sim N(0,1)$. A esta variable se le denomina **variable tipificada** de X.

- **Tipificación**:

Es el proceso de transformar una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ, a una variable aleatoria con distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Su principal utilidad es el cálculo de probabilidades.

Distribución Normal

Ejemplo:

Para realizar el cálculo de $P(X \leq 70)$, conocida la distribución de $X \sim N(\mu = 60, \sigma = 10)$, se realiza la siguiente transformación:

$$P(X \leq 70) = P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{70-60}{10}\right) = P(Z \leq 1)$$

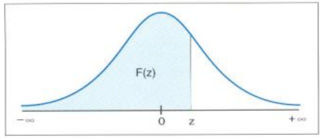
siendo $Z \sim N(0{,}1)$.

La función de distribución de una $N(0{,}1)$, viene listada en la Tabla anexa.

Por tanto, para poder calcular la probabilidad de que una distribución normal estándar sea menor o igual a 1, $P(Z \leq 1)$, tenemos que buscar en la Tabla.

Tabla de distribución normal $N(0, 1)$

$F(z) = P(Z \leq z)$



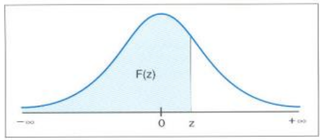
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

U-tad
CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Distribución Normal

Tabla de distribución normal $N(0, 1)$

$F(z) = P(Z \leq z)$



Ejemplo:

$$P(Z \leq 1) = P(Z \leq 1,00) = 0,8413$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	$\boxed{0,8413}$	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706

Distribución Normal

Distribución de Normal como límite de una binomial:

Sea una distribución $X \sim B(n, p)$ tal que:

- $p \leq 0{,}5$ y $np > 5$ o,
- $p \geq 0{,}5$ y $n(1-p) > 5$

Entonces, la binomial "tipificada" se puede aproximar a una distribución normal estándar,

$$\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

Equivalentemente,

$$X \sim N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$$

Distribución Normal

Teorema Central del Límite:

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. con la misma media, μ, y varianza, σ, entonces la siguiente variable aleatoria se distribuye como una normal estándar:

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$$

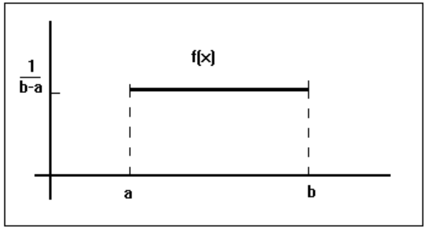
En el caso particular de $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, la distribución de la variable aleatoria media, $\bar{X}$, tiende a distribuirse bajo la siguiente distribución normal

$$\boxed{\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

Distribución Uniforme

Se dice que una variable aleatoria sigue una **distribución uniforme** sobre el intervalo $[a,b]$, $X \sim U(a,b)$, cuando su función de densidad es:

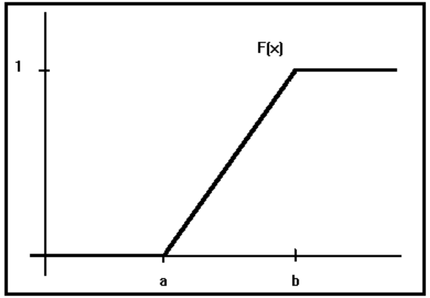
$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & si\ x < a \\ \frac{1}{b-a} \ , & si\ a \leq x \leq b \\ 0 \ , & si\ x > b \end{cases}$$



- La probabilidad de que X tome un valor en cualquier subintervalo es proporcional a la longitud del subintervalo

Por tanto, su función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & si \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \ , & si \ \ a \leq x \leq b \\ 1 \ , & si \quad x > b \end{cases}$$



Su media, varianza y desviación típicas son:

$$\mu = (a+b)/2 \quad | \quad \sigma^2 = (b-a)^2/12 \quad | \quad \sigma = +(b-a)/+\sqrt{12}$$

Distribución Uniforme

❖ **Ejemplo 6**

De la parada del autobús que recorre Madrid-Las Rozas sale un autobús cada 15 minutos. Una persona llega de improviso en cualquier momento.

a) Obtener la función de distribución de la variable tiempo de espera hasta que salga el próximo autobús
b) Probabilidad de que el viajero tenga que esperar menos de 5 minutos
c) Probabilidad de que espere más de 10 minutos
d) Probabilidad de que la espera dure entre 5 y 10 minutos
e) Probabilidad de que tenga que esperar exactamente 10 minutos
f) Tiempo medio de espera

Distribución Exponencial

Es un caso particular de la distribución Gamma, concretamente cuando $a = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

- Solo definida para $x > 0$ y $\lambda > 0$.
- Solo depende de un parámetros → $\boldsymbol{X \sim Exp(\lambda)}$

Su media, varianza y desviación típicas son:

$$\mu = 1/\lambda \quad | \quad \sigma^2 = 1/\lambda^2 \quad | \quad \sigma = 1/\lambda$$

Distribución Gamma

La **distribución Gamma** tiene por función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{b^a \cdot \Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-\frac{x}{b}}$$

- Solo definida para $x > 0$ y $a, b > 0$.
- Solo depende de dos parámetros → $\boldsymbol{X \sim \Gamma(a, b)}$
- Recordatorio: $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$

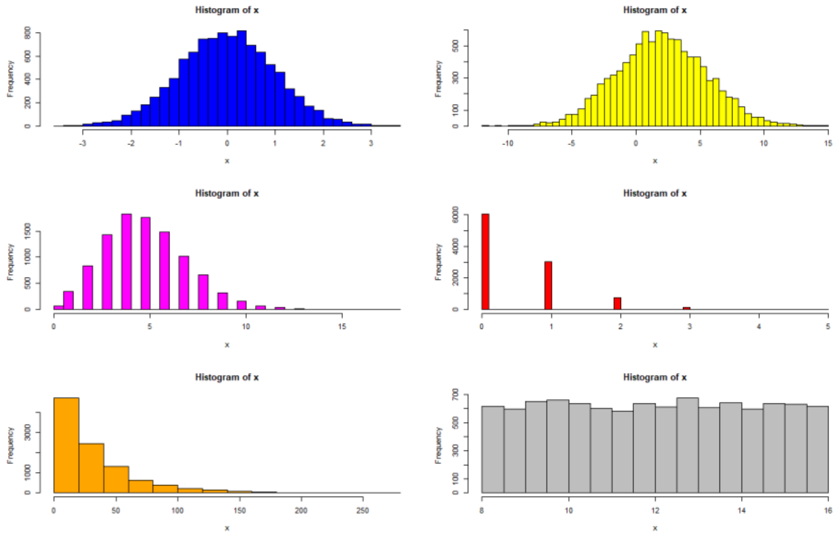
Su media, varianza y desviación típicas son:

$$\mu = ab \quad | \quad \sigma^2 = ab^2 \quad | \quad \sigma = +\sqrt{a} \cdot b$$

- ➢ La familia de distribuciones exponenciales proporciona modelos de probabilidad muy utilizados en ciencias
- ➢ Permiten modelizar situaciones prácticas en las que la variable de interés no es simétrica

Generación de números aleatorios

En la práctica, en muchos fenómenos naturales la distribución de muestras distribuyen como variables aleatorias de distribución conocida. Ello nos permite generar números que simulan estos comportamientos mediante la computación.




```r
n <- 10000

par(mfrow=c(3,2))

# Normal distribution
mu <- 0
sigma <- 1
x <- rnorm(n, mu, sigma)
hist(x, breaks = 50, col = 'blue')

mu <- 2
sigma <- 3.5
x <- rnorm(n, mu, sigma)
hist(x, breaks = 50, col = 'yellow')

# Poisson distribution
lambda <- 5
x <- rpois(n, lambda)
hist(x, col = 'magenta', breaks = 50)

lambda <- 0.5
x <- rpois(n, lambda)
hist(x, col = 'red', breaks = 50)

# Geometric distribution
p <- 0.03
x <- rgeom(n, p)
hist(x, col = 'orange')

# Uniform distribution
a <- 8
b <- 16
x <- runif(n, a, b)
hist(x, col = 'grey')
```

U-TAD CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL