TEMA 7

SOLUCIÓN DE

LOS PROBLEMAS

PROBLEMA 1

Calcula la integral definida $\int_{-1}^{1} 3xe^{x^2}dx$.

Solución:

$$\int_{-1}^{1} 3xe^{x^2}dx = 3\int_{-1}^{1} xe^{x^2}dx = 3\frac{2}{2}\int_{-1}^{1} xe^{x^2}dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} 2xe^{x^2}dx = \frac{3}{2}\left[e^{x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}(e-e) = 0$$

De manera alternativa, se podría haber argumentado que esta integral es nula puesto que se trata de la integral de una función impar con un intervalo de integración simétrico respecto del origen.

La demostración de que la función es impar es la siguiente:

$$f(-x) = 3(-x)e^{(-x)^2} = -3xe^{x^2} = -f(x)$$

PROBLEMA 2

Utilizando el teorema fundamental del Cálculo, determina las derivadas de estas funciones:

a) $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 dt$

b) $F_2(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^t dt$

c) $F_3(x) = \displaystyle\int_1^{e^{3x}} \operatorname{sen}(t) dt$

d) $F_4(x) = \displaystyle\int_2^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{1-t^2} dt$

Solución:

a) $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 dt \implies F_1'(x) = (x)^2 \cdot 1 - (0)^2 \cdot 0 = x^2$

Comprobación:

$$F_1(x) = \int_0^x t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} \implies F_1'(x) = x^2$$

b) $F_2(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^t dt \implies F_2'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - e^0 \cdot 0 = 2xe^{x^2}$

Comprobación:

$$F_2(x) = \int_0^{x^2} e^t dt = \left[e^t\right]_0^{x^2} = e^{x^2} - e^0 = e^{x^2} - 1 \implies F_2'(x) = 2xe^{e^2}$$

c) $F_3(x) = \displaystyle\int_1^{e^{3x}} \operatorname{sen}(t) dt \implies F_3'(x) = \operatorname{sen}\left(e^{3x}\right) \cdot 3e^{3x} - \operatorname{sen}(1) \cdot 0 = 3e^{3x} \operatorname{sen}\left(e^{3x}\right)$

Comprobación:

$$F_3(x) = \int_1^{e^{3x}} \operatorname{sen}(t) dt = \left[\cos(t)\right]_1^{e^{3x}} = \cos\left(e^{3x}\right) - \cos(1) \implies F_3'(x) = 3e^{3x} \operatorname{sen}\left(e^{3x}\right)$$

d) $F_4(x) = \displaystyle\int_2^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{1-t^2} dt \implies$

$$\implies F_4'(x) = \frac{1}{1-(\operatorname{sen}(x))^2} \cdot \cos(x) - \frac{1}{1-(2)^2} \cdot 0 = \frac{\cos(x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\cancel{\cos(x)}}{\cos^{\cancel{2}}(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Comprobación:

$$F_4(x) = \int_2^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{1-t^2} dt = \left[\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|1+t| - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|1-t|\right]_2^{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right| + \operatorname{Ln}(3) \implies$$

$$\implies F_4'(x) = \frac{1}{2} \frac{\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right)'}{\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right)} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\dfrac{\cancel{2}\cos(x)}{(1-\operatorname{sen}(x))^{\cancel{2}}}}{\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cancel{1-\operatorname{sen}(x)}}} = \frac{\cos(x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\cancel{\cos(x)}}{\cos^{\cancel{2}}(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

PROBLEMA 3

Calcula la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ a la gráfica de $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4-4}dt$.

Solución:

La ecuación de la recta es $y = y_0 + m(x - x_0)$, y en nuestro caso el dato de partida es $x_0 = 1$, por lo que necesitamos calcular el valor de $m = F'(x_0)$ y de y_0:

$$F'(x) = \frac{x^3}{x^4-4}\cdot 1 - \frac{(-1)^3}{(-1)^4-4}\cdot 0 = \frac{x^3}{x^4-4} \implies m = F'(1) = \frac{1^3}{1^4-4} = \frac{1}{3}$$

Por otra parte, podemos afirmar que $y_0 = 0$ puesto que la integral con la que obtendríamos ese valor es la integral de una función impar en un intervalo de integración simétrico respecto del origen.

$$y_0 = F(1) = \int_{-1}^{+1} \frac{t^3}{t^4-4}dt = 0$$

Con todos los elementos ya podemos escribir la ecuación de la recta tangente:

$$y = y_0 + m(x - x_0) = 0 - \frac{1}{3}(x-1) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

Nota: En caso de querer comprobar el resultado, $F(x) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{Ln}\left(\left|x^4-4\right| - \mathrm{Ln}(3)\right)\right)$

PROBLEMA 4

Determina los intervalos en los que la función $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} \arctan(e^t)dt$ es inyectiva.

Solución:

Sabemos que una función es inyectiva cuando no existen dos valores del conjunto de partida con la misma imagen. Expresado de otra manera, una aplicación es inyectiva cuando se cumple lo siguiente:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Es nuestro caso, vamos a demostrar que $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} \arctan(e^t)dt$ comprobando que la función es estrictamente creciente o decreciente en todo su dominio, lo que haría imposible que existieran dos valores x con la misma imagen.

$$F'(x) = \arctan(e^x)\cdot 1 - \arctan(e)\cdot 0 = \arctan(e^x)$$

Por otra parte, sabemos que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y que $\arctan(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.Por composición de funciones, queda claro que $F'(x) = \arctan(e^x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como la derivada de $F(x)$ es mayor que cero para todo valor de x, eso significa que $F(x)$ es una función creciente para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que permite afirmar que $F(x)$ es inyectiva en todo $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 5

Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{|\cos(t^3)|}{t^2+1}dt.$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\left|\cos\left(t^3\right)\right|}{t^2+1}\cdot dt = \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \frac{\left|\cos\left(t^3\right)\right|}{t^2+1}\cdot dt}{x} = \frac{\displaystyle\int_0^0 \frac{\left|\cos\left(t^3\right)\right|}{t^2+1}\cdot dt}{0} =$$

$$= \left\{\frac{0}{0}\right\} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\left|\cos\left(x^3\right)\right|}{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|\cos\left(x^3\right)\right|}{x^2+1} = \frac{\cos(0)}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$$

PROBLEMA 6

Calcula, en caso de que existan, la primera y segunda derivada de $F(x) = x\int_{2x}^{3x} e^{-t^2}dt.$

Solución:

$$F(x) = x\left(\int_{2x}^{3x} e^{-t^2}dt\right)$$

$$F'(x) = 1\cdot\left(\int_{2x}^{3x} e^{-t^2}dt\right) + x\cdot\left(e^{-(3x)^2}\cdot 3 - e^{-(2x)^2}\cdot 2\right)$$

$$F''(x) = \left(3e^{-9x^2} - 2e^{-4x^2}\right) + \left(3e^{-9x^2} - 2e^{-4x^2}\right) + x\left(-54e^{-9x^2} + 16e^{-4x^2}\right) =$$

$$= (6-54x)e^{-9x^2} + (-4+16x)e^{-4x^2}$$

Se puede observar que, aunque la integral todavía está presente en la primera derivada, en la segunda ya ha desaparecido.

PROBLEMA 7

Demuestra que la función $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} \mathrm{Ln}(t)\,dt$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Solución:

Vamos a demostrar que la función es decreciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ comprobando que $F'(x) < 0$ en ese intervalo:

$$F'(x) = \mathrm{Ln}(1+x)\cdot 1 - \mathrm{Ln}(1-x)\cdot(-1) = \mathrm{Ln}(1+x) + \mathrm{Ln}(1-x) =$$

$$= \mathrm{Ln}\big((1+x)(1-x)\big) = \mathrm{Ln}\left(1-x^2\right) < 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Para verificar que $\mathrm{Ln}\left(1-x^2\right) < 0$ en el intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ vamos a evaluar la función en sus extremos:

En $x = 0$ se cumple que $\mathrm{Ln}\big(1-(0)^2\big) = \mathrm{Ln}(1) = 0$.

En $x = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ se cumple que $\mathrm{Ln}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{3}{4}\right) < 0$.

Como $\mathrm{Ln}(1-x^2)$ es una función continua en su dominio por ser la composición de funciones continuas cada una en su dominio, necesariamente tiene que ocurrir que $\mathrm{Ln}\left(1-x^2\right) < 0 \quad \forall x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. En conclusión, podemos afirmar que la función $F(x)$ es decreciente en el intervalo de trabajo.

PROBLEMA 8

Determina el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función $F(x) = \int_0^x t^2 \cos(t^2) dt$ y utiliza el resultado para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^3}$.

Solución:

Vamos a comenzar calculando las derivadas de $F(x)$ y particularizando esas derivadas en $x_0 = 0$:

$$F(x) = \int_0^x t^2 \cos\left(t^2\right) dt \longrightarrow F(0) = \int_0^0 t^2 \cos\left(t^2\right) dt = 0$$

$$F'(x) = x^2 \cos\left(x^2\right) \longrightarrow F'(0) = 0$$

$$F''(x) = 2x \cos\left(x^2\right) + x^2(2x)\left(-\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right) = 2x \cos\left(x^2\right) - 2x^3 \operatorname{sen}\left(x^2\right) \longrightarrow F''(0) = 0$$

$$F'''(x) = 2\cos\left(x^2\right) + 2x(2x) \cdot \left(-\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right) - 6x^2 \operatorname{sen}\left(x^2\right) - 2x^3(2x)\cos\left(x^2\right) =$$

$$= (2 - 4x^4)\cos\left(x^2\right) - 10x^2 \operatorname{sen}\left(x^2\right) \longrightarrow F'''(0) = 2$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x_0 = 0$ es el siguiente:

$$F(x) \approx P_3(x) = F(0) + F'(0)x + F''(x)x^2 + \frac{F'''(x)}{2!}x^3 = \frac{2}{6}x^3 = \frac{1}{3}x^3$$

Una vez obtenido el polinomio, podemos calcular el límite requerido:

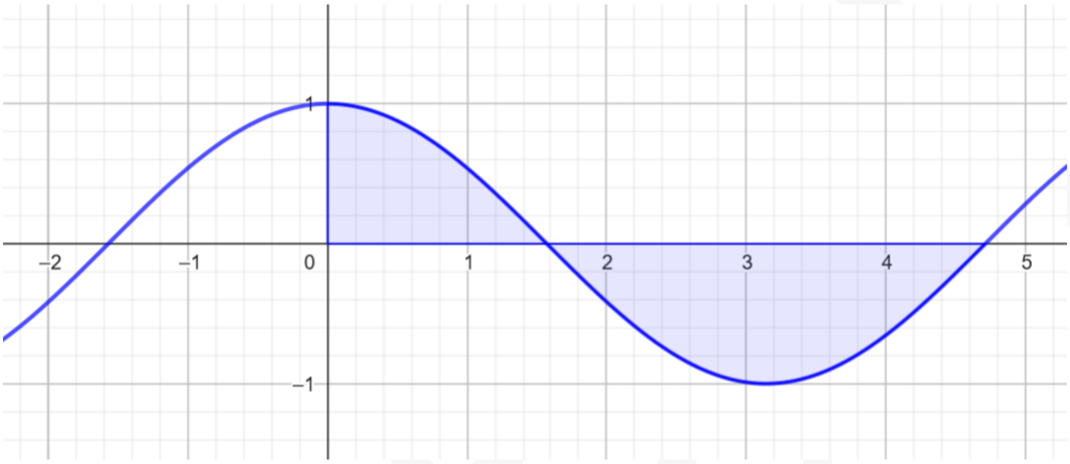
$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + \cdots}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3} + \cdots\right)}{\cancel{x^3}} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 9

Calcula el área geométrica de la función $f(x) = \cos(x)$ entre $x = 0$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$. Con los mismos datos, calcula el área algebraica.

Solución:

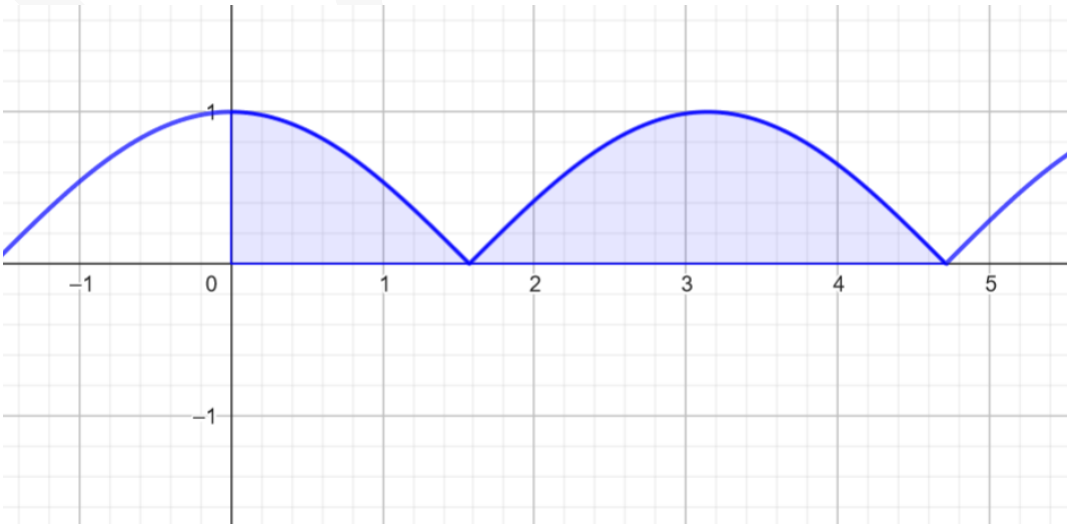
$$\text{Área algebraica } = \int_0^{3\pi/2} \cos(x)dx = \Big[\operatorname{sen}(x)\Big]_0^{3\pi/2} = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{1}\right) - \operatorname{sen}(0) = -1 - 0 = -1$$



$$\text{Área geométrica } = \int_0^{3\pi/2} |\cos(x)|dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos(x))dx =$$

$$= \Big[\operatorname{sen}(x)\Big]_0^{\pi/2} - \Big[\operatorname{sen}(x)\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0)\right) - \left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= (1-0) - (-1-1) = 1 + 2 = 3$$



PROBLEMA 10

Halla el área geométrica de la región limitada entre las curvas dadas por $f(x) = -x^3 - x + 1$ y $g(x) = x^3 - x^2 + 2$ y las abscisas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

Para resolver este problema primero vamos a calcular los puntos de toque o corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

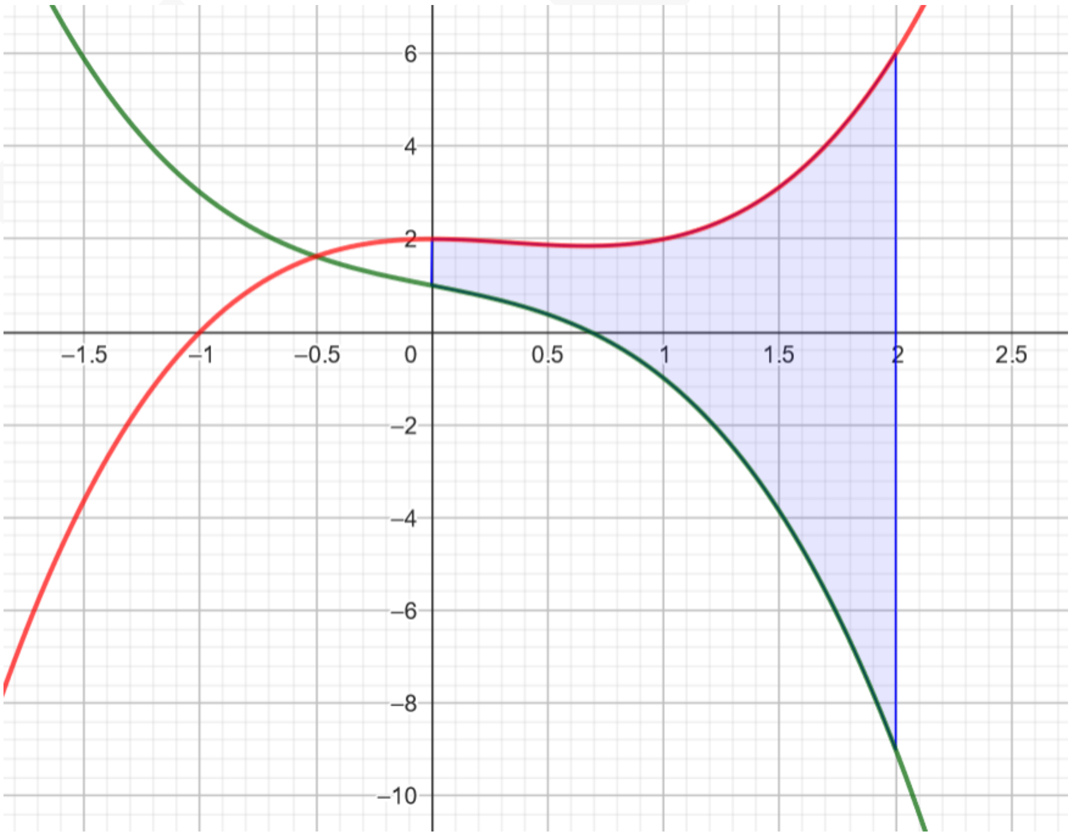
$$x^3 - x^2 + 2 = -x^3 - x + 1 \implies 2x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \implies 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x + 1\right) = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

Puesto que el único punto de toque o corte se encuentra fuera del intervalo $[0,2]$, ello significa que en el intervalo de trabajo la gráfica de una de las dos funciones siempre se encuentra por encima de la gráfica de la otra función. Comprobamos en un punto cualquiera del interior del intervalo cuál de las funciones tiene mayor imagen, utilizando por ejemplo $x = 1$. Como $f(1) = -1$ y $g(1) = 2$, podemos afirmar que $g(x) > f(x)$ en el intervalo de trabajo.

$$\text{Área geométrica } = \int_0^2 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx =$$

$$= \int_0^2 \big((x^3 - x^2 + 2) - (-x^3 - x + 1)\big)\,dx = \int_0^2 (2x^3 - x^2 + x + 1)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} + 2 + 2 = \frac{28}{3}$$



PROBLEMA 11

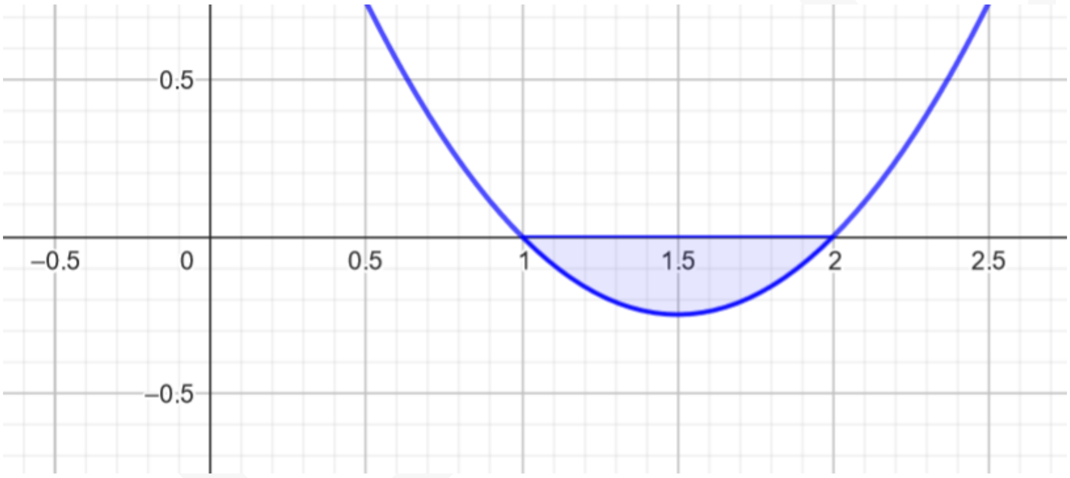
Halla el volumen obtenido al girar alrededor del eje X el área comprendida entre el eje X y la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Solución:

$$\text{Volumen } = \pi \int_1^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx =$$

$$\pi \int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{2} + 13\frac{x^3}{3} - 6x^2 + 4x \right]_1^2 =$$

$$= \left(\left(\frac{32}{5} - \frac{48}{2} + \frac{104}{3} - 24 + 42 \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{13}{3} - 6 + 4 \right) \right) = \frac{\pi}{30}$$



PROBLEMA 12

Halla el área de la región limitada entre las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$.

Solución:

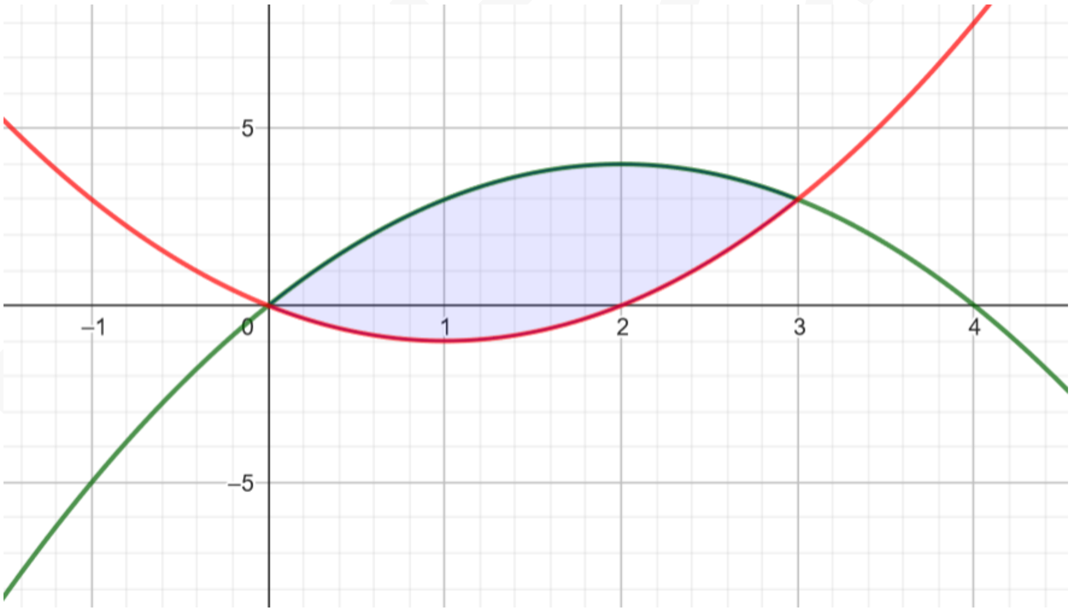
Para resolver este problema primero vamos a calcular los puntos de toque o corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \implies 2x^2 - 6x + 1 = 0 \implies 2x(x-3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Puesto que hay dos puntos de toque o corte, ello significa que la región que queda completamente limitada entre las dos gráficas es la situada en el intervalo $[0,3]$. Comprobamos en un punto cualquiera del interior del intervalo cuál de las funciones tiene mayor imagen, utilizando por ejemplo $x = 1$. Como $f(1) = -1$ y $g(1) = 3$, podemos afirmar que $g(x) > f(x)$ en el intervalo de trabajo.

$$\text{Área geométrica } = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^3 \big(g(x) - f(x)\big) dx =$$

$$\int_0^3 \big((-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)\big) dx = \int_0^3 \big(-2x^2 + 6x\big) dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3 = -18 + 27 = 9$$



PROBLEMA 13

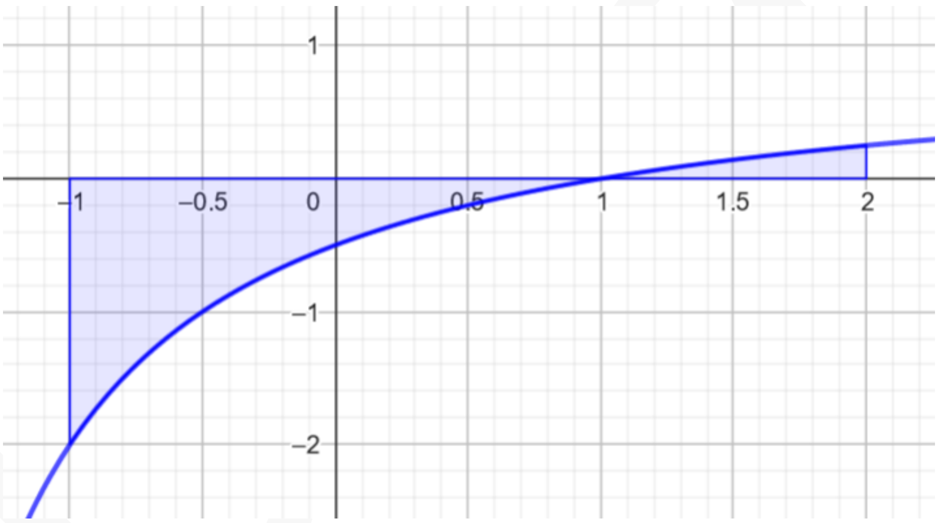
Halla el área determinada por la curva $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ y el eje de abscisas.

Vamos a comprobar primero cuándo la función es positiva o negativa. Para ello analizamos los puntos en los que $f(x) = 0$, y claramente el único punto en el que esto ocurre es $x = 1$. Utilizando un valor cualquiera a la izquierda y a la derecha de dicho punto es inmediato comprobar que $f(x) < 0$ en el intervalo $(-1, 1)$ y $f(x) > 0$ en el intervalo $(1, 2)$. Con esta información ya podemos calcular la integral:

$$\text{Área geométrica } = \int_{-1}^{2} |f(x)| dx = \int_{-1}^{2} \left| \frac{x-1}{x+2} \right| dx = \int_{-1}^{1} -\left(\frac{x-1}{x+2} \right) dx + \int_{1}^{2} \frac{x-1}{x+2} dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right) dx + \int_{1}^{2} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right) dx = -\Big[x - 3\mathrm{Ln}|x+2| \Big]_{-1}^{1} + \Big[x - 3\mathrm{Ln}|x+2| \Big]_{1}^{2} =$$

$$= -\Big((1 - 3\mathrm{Ln}(3)) - (-1 - 3\cancel{\mathrm{Ln}(1)}) \Big) + \Big((2 - 3\mathrm{Ln}(4) - (1 - 3\mathrm{Ln}(3)) \Big) = -1 + 6\,\mathrm{Ln}(3) - 3\,\mathrm{Ln}(4)$$



PROBLEMA 14

Determina la longitud de arco de la función $f(x) = \mathrm{Ln}(\cos(x))$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.

Comenzaremos el problema calculando la expresión de la derivada de $f(x)$:

$$f(x) = \mathrm{Ln}(\cos(x)) \implies f'(x) = -\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$$

A continuación sustituiremos la expresión de la derivada en la fórmula para determinar la longitud del arco de curva:

$$\text{Longitud } = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left(-\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{\mathrm{sen}^2(x) + cos^2(x)}{\cos^2(x)}}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)}\, dx = \left[\mathrm{Ln}\left|\frac{1}{\cos(x)} + \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\right|\right]_0^{\pi/4} = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right) - \mathrm{Ln}\left(1-0\right) = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

PROBLEMA 15

Encuentra el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ alrededor del eje X.

Para resolver este problema primero vamos a calcular los puntos de toque o corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$2 - x^2 = 1 \implies x^2 - = 1 \implies \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

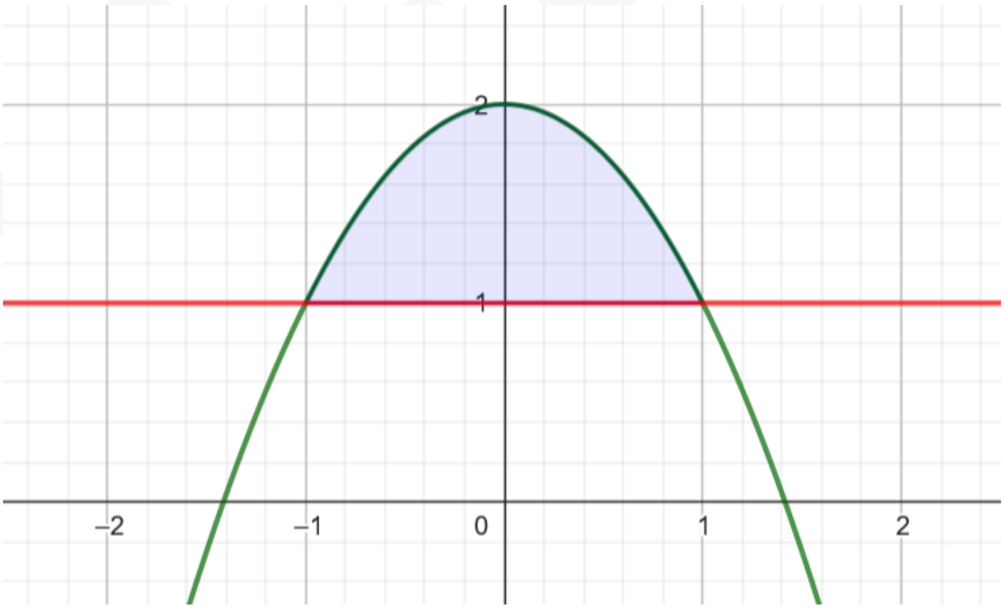
Puesto que hay dos puntos de corte, ello significa que la región que queda completamente limitada entre las dos gráficas es la situada en el intervalo $[-1, 1]$. Comprobamos en un punto cualquiera del interior del intervalo cuál de las funciones tiene mayor imagen, utilizando por ejemplo $x = 0$. Como $f(0) = 2$ y $g(0) = 1$, podemos afirmar que $f(x) > g(x)$ en el intervalo de trabajo.

Utilizaremos ahora la fórmula para obtener el volumen:

$$\text{Volumen } = \pi \int_{-1}^{1} \left| (f(x))^2 - (g(x))^2 \right| dx = \pi \int_{-1}^{1} \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx =$$

$$= pi \int_{-1}^{1} \left((2 - x^2)^2 - (1)^2 \right) dx = \pi \int_{-1}^{1} \left((2 - x^2)^2 - (1)^2 \right) dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(3 - 4x^2 + x^4 \right) dx =$$

$$2\pi \int_{0}^{1} \left(3 - 4x^2 + x^4 \right) dx = 2\pi \left[3x - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 2\pi \left(3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{56}{15}\pi$$

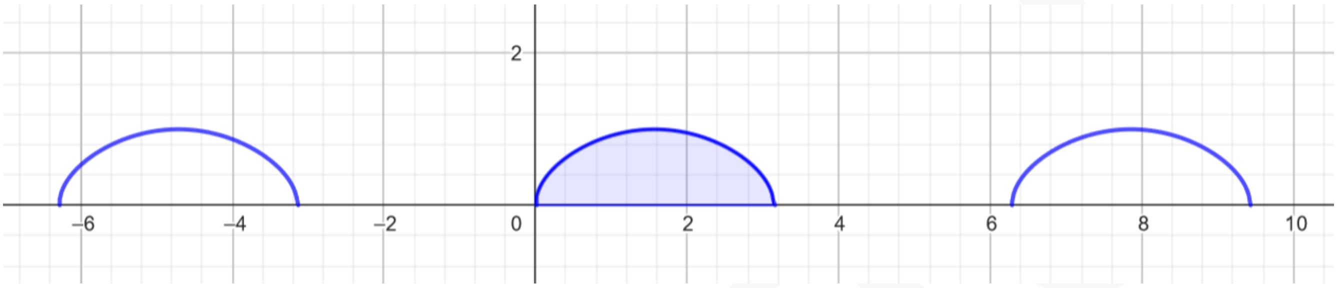


PROBLEMA 16

Encuentra el volumen del sólido formado al girar la región limitada por $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$ alrededor del eje X entre $x = 0$ y $x = \pi$.

$$\text{Volumen } = \pi \int_0^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\sqrt{\operatorname{sen}(x)}\right)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) dx =$$

$$= \pi \Big[-\cos(x) \Big]_0^{\pi} = -\pi\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right) = -\pi(-1-1) = 2\pi$$



PROBLEMA 17

Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x} - 1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Para resolver este problema primero vamos a calcular los puntos de toque o corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$e^x = e^{-x} - 1 \implies e^x = \frac{1}{e^x} - 1 \implies e^{2x} = 1 - e^x \implies (e^x)^2 + e^x - 1 = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} e^x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ e^x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \cancel{x = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)} \end{cases}$$

Luego el único punto de corte es $x = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, pero como el argumento del logaritmo es menor que la unidad ello implica que el punto donde las gráficas se cruzan es un valor negativo, y por ello en el intervalo $[0,1]$ la gráfica de una de las dos funciones se encuentra siempre por encima de la gráfica de la otra función. Puesto que $f(x) = e^x$ siempre tiene imágenes positivas y $g(x) = e^{-x} - 1$ tiene imágenes negativas para todo $x > 0$, está claro que en el intervalo de trabajo $f(x) > g(x)$.

$$\text{Área geométrica} = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(e^x - (e^{-x} - 1)\big)\,dx =$$

$$= \Big[e^x + e^{-x} + x\Big]_0^1 = \left(e + \frac{1}{e} + 1\right) - \big(1 + 1 + 0\big) = e + \frac{1}{e} - 1$$