TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	23/11/2023
CURSO	1º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	2 HORAS
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN		

PROBLEMA 1

Demuestra la siguiente igualdad:

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$$

Solución:

$$\tan(x-y) = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)-\cos(x)\operatorname{sen}(y)}{\cos(x)\cos(y)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)-\cos(x)\operatorname{sen}(y)}{\cos(x)\cos(y)}}{\dfrac{\cos(x)\cos(y)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{\cos(x)\cos(y)}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)\cancel{\cos(y)}}{\cos(x)\cancel{\cos(y)}} - \dfrac{\cancel{\cos(x)}\operatorname{sen}(y)}{\cancel{\cos(x)}\cos(y)}}{\cancel{\dfrac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)}} + \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{\cos(x)\cos(y)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \dfrac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\dfrac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}} = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	23/11/2023
CURSO	1º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	2 HORAS
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN		

PROBLEMA 2

Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{\tan(x)} - e}{x - \frac{\pi}{4}}$, completa los siguientes apartados:

a) Determina su dominio, identificando claramente todos los puntos en los que la imagen de la función $f(x)$ no existe.

b) Calcula $f'(\pi)$ y proporciona tanto una expresión exacta de dicha derivada como un valor numérico con al menos cuatro decimales.

c) Determina si es posible extender el dominio de la función de forma que sea continua en el máximo número de puntos del intervalo $[0, 2\pi]$. En caso afirmativo, identifica el valor que tendría que tener $f(x)$ en dicho punto (o puntos).

Solución:

a) Cuando $x = \dfrac{\pi}{4}$ se anula tanto el numerador como el denominador de la expresión, por lo que la imagen no está definida en ese punto.

Adicionalmente, en los puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, el numerador es infinito, por lo que en esos puntos la imagen tampoco existe.

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) El punto $x = \pi$ no es un punto frontera ni un punto problemático, dado que se encuentra en el interior de un intervalo donde la función es derivable por tratarse de la composición, diferencia y cociente de funciones derivables en ese intervalo. Debido a ello, podemos calcular $f'(\pi)$ tanto utilizando la definición del cociente incremental como las propiedades de derivación:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{\cos^2(x)} e^{\tan(x)} \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \left(e^{\tan(x)} - e\right)}{\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$f'(\pi) = \frac{\dfrac{1}{\cos^2(\pi)} e^{\tan(\pi)} \left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) - e^{\tan(\pi)} + e}{\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{(-1)^2} \cdot e^0 \cdot \dfrac{3\pi}{4} - e^0 + e}{\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{3\pi}{4} - 1 + e}{\dfrac{9\pi^2}{16}} = \frac{12\pi - 16 + 16e}{9\pi^2} \approx 0.73392$$

c) En $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$ no es posible extender el dominio para que la función sea continua, puesto que al menos uno de los dos límites laterales en esos puntos tiene como resultado infinito:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{\tan(x)} - e}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{e^{\tan\left(\frac{\pi}{2}^-\right)} - e}{\frac{\pi}{2}^- - \frac{\pi}{4}} = \frac{e^{\frac{1}{0^+}} - e}{\frac{\pi}{4}} = \frac{e^{+\infty} - e}{\frac{\pi}{4}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} \frac{e^{\tan(x)} - e}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{e^{\tan\left(\frac{3\pi}{2}^-\right)} - e}{\frac{3\pi}{2}^- - \frac{\pi}{4}} = \frac{e^{\frac{-1}{0^-}} - e}{\frac{5\pi}{4}} = \frac{e^{+\infty} - e}{\frac{5\pi}{4}} = +\infty$$

En cambio, el límite sí existe en el punto $x = \dfrac{\pi}{4}$, tal como se puede apreciar a continuación.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan(x)} - e}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{e^{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} - e}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} e^{\tan(x)}}{1} = \frac{e^{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{e}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2e$$

Por lo tanto, podemos extender el dominio de la función de la siguiente manera para maximizar el número de puntos del intervalo $[0, 2\pi]$ donde la función es continua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\tan(x)} - e}{x - \frac{\pi}{4}} & x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ 2e & x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	23/11/2023	U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL
CURSO	1º	HORA	11:00	
GRUPO	A	DURACIÓN	2 HORAS	
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN			

PROBLEMA 3

Dada la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$, completa los siguientes apartados:

a) Determina el polinomio de Maclaurin de grado cinco asociado a $f(x)$.

b) Calcula el valor aproximado de la función en $x = 0.5$ con al menos cuatro decimales utilizando para ello el polinomio de Maclaurin obtenido en el apartado anterior.

c) Determina el error máximo que se cometería al utilizar la aproximación presentada en el apartado anterior.

Solución:

a) Comenzaremos calculando la imagen y el valor de las primeras cinco derivadas en $c = 0$:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} \longrightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(2x) \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2\operatorname{sen}(2x) \longrightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -4\cos(2x) \longrightarrow f'''(0) = -4$$

$$f^{iv)}(x) = 8\operatorname{sen}(2x) \longrightarrow f^{iv)}(0) = 0$$

$$f^{v)}(x) = 16\cos(2x) \longrightarrow f''(0) = 16$$

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{iv)}(0)\frac{x^4}{4!} + f^{v)}(0)\frac{x^5}{5!}$$

$$P_5(x) = 0 + x + 0 - \frac{4}{6}x^3 + 0 + \frac{16}{120}x^5 \implies P_5(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

b) Vamos a utilizar ahora el polinomio construido en el apartado anterior para aproximar el valor de $f(0.5)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx P_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{2}{15}\frac{1}{2^5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{240} = \frac{101}{240} \approx 0.42083$$

c) Para acotar el error máximo necesitaremos la expresión del resto de Lagrange.

$$f^{vi)}(x) = -32\operatorname{sen}(2x) \implies R(x) = \frac{-32\operatorname{sen}(2z)x^6}{6!}, \text{ donde } z \in (0, 0.5)$$

$$\text{Error real} = |f(0.5) - P_5(0.5)| = |R(0.5)| = \left|\frac{f^{vi)}(z)\,(0.5)^6}{6!}\right| =$$

$$= \left|\frac{-32\,\text{sen}(2z)}{720 \cdot 64}\right| \leqslant \frac{32}{720 \cdot 64} = \frac{1}{1440} \approx 6.94 \cdot 10^{-4} = \text{ Error máximo}$$

Luego el error real que se cometería al utilizar $P_5(0.5)$ para aproximar el valor de $f(0.5)$ será menor que $6.94 \cdot 10^{-4}$.

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	23/11/2023
CURSO	1º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	2 HORAS
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN		

PROBLEMA 4

Consideremos una caja de cartón sin tapa superior (es decir, con cinco caras) y de base cuadrada. Si la suma del área de todas las caras de la caja así definida es c^2, con $c > 0$, calcula el volumen máximo de la caja.

Solución:

Si consideramos una caja de base cuadrada donde la longitud de cada arista de la base es x y la altura de la caja es y, entonces podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\text{Área} = x^2 + 4xy = c^2 \qquad \text{Volumen} = x^2 y$$

La función a maximizar es el volumen. Vamos a comenzar obteniendo una expresión de la variable y que dependa de la variable x:

$$x^2 + 4xy = c^2 \implies y = \frac{c^2 - x^2}{4x} = \frac{c^2}{4}\frac{1}{x} - \frac{x}{4}$$

A continuación utilizaremos la relación encontrada para expresar el volumen únicamente en función de la variable x:

$$V(x) = x^2 y = x^2\left(\frac{c^2}{4}\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) = \frac{c^2}{4}x - \frac{x^3}{4} \implies V'(x) = \frac{c^2}{4} - \frac{3x^2}{4}$$

$$V'(x) = 0 \implies \frac{c^2}{4} - \frac{3x^2}{4} = 0 \implies x^2 = \frac{c^2}{3} \implies x = \pm\frac{c}{\sqrt{3}}$$

En el anterior desarrollo tenemos que descartar el valor $x = -\dfrac{c}{\sqrt{3}}$ por ser un valor negativo incompatible con el sentido físico del problema.

A continuación, vamos a comprobar que el valor $x = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$ sea un máximo utilizando el criterio de la segunda derivada:

$$V''(x) = -\frac{3}{2}x \implies V''\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{2}\frac{c}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}c < 0$$

Queda claro que la función $V(x)$ tiene un máximo relativo en $x = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$. Por último, calcularemos el volumen máximo:

$$V_{\text{máx}} = x^2 y = \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{c^2}{4}\frac{1}{c/\sqrt{3}} - \frac{c}{\sqrt{3}}\frac{1}{4}\right) = \frac{c^2}{12}\left(\sqrt{3}c - \frac{c}{\sqrt{3}}\right) = \frac{c^3}{6\sqrt{3}}$$