

# Soluciones Probabilidad y Modelos Probabilísticos

Juan Rodríguez

January 14, 2025

## 1 Solución Ejercicio 1

- $p(A) = 0.6$
- $p(B) = 0.4$
- $p(T1) = 0.7$
- $p(T1 \cap T2) = 0.3$
- $p(T1 \cup T2) = 1$
- $p(C/A) = 0.1$
- $p(C/B) = 0.15$
- $p(C/T1) = 0.05$

C - Corte de llamada

a) Nos piden la probabilidad de que se corte la llamada (C) (Teorema de Probabilidad Total)

$$p(C) = p(C/A) \cdot p(A) + p(C/B) \cdot p(B) = (0.1 \cdot 0.6) + (0.15 \cdot 0.4) = \boxed{0.12}$$

b) Nos piden la probabilidad de T2 y no T1

$$p(T1 \cup T2) = p(T1) + p(T2) - p(T1 \cap T2) \rightarrow p(T2) = p(T1 \cup T2) - p(T1) + p(T1 \cap T2) = 1 - 0.7 + 0.3 = 0.6$$

$$p(T2 \cap \bar{T1}) = p(T2) - p(T1 \cap T2) = 0.6 - 0.3 = \boxed{0.3}$$

c) Nos piden la probabilidad de T1 condicionado por C

$$p(C/T1) = p(C \cap T1) / p(T1) \rightarrow p(C \cap T1) = p(T1) \cdot p(C/T1) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035$$

$$p(T1/C) = 0.035 / 0.12 = 0.292$$

d) Nos piden la probabilidad de C condicionado por no T1

$$p(C/\bar{T1}) = p(C \cap \bar{T1}) / p(\bar{T1}) = (p(C) - p(C \cap T1)) / (1 - p(T1)) = \frac{0.12 - 0.035}{0.3} = \boxed{0.28}$$

## 2 Solución Ejercicio 2

- $p(R) = 24/86 = 0.28$
- $p(D) = 68/86 = 0.79$
- $p(D \cup R) = 1$
- $p(C/R) = 0.65$
- $p(C/D) = 0.8$

R - Robos, D - Daños, C - Compensaciones

a) Nos piden la intersección de robos y daños

$$p(R \cup D) = p(R) + p(D) - p(R \cap D) \rightarrow p(R \cap D) = p(R) + p(D) - p(R \cup D) = 0.28 + 0.79 - 1 = \boxed{0.07}$$

b) Si los sucesos son independientes, verifican que  $p(R \cap D) = p(R) \cdot p(D)$ , pero  $0.07 \neq 0.28 \cdot 0.79 = 0.22$ . Por lo tanto, no son independientes

c) Nos piden R y no C (C = compensación)

$$p(R \cap \bar{C}) = p(\bar{C}/R) \cdot p(R) = (1 - p(C/R)) \cdot p(R) = 0.35 \cdot 0.28 = \boxed{0.098}$$

d) Nos piden D y C

$$p(D \cap C) = p(C/D) \cdot p(D) = 0.8 \cdot 0.79 = \boxed{0.63}$$

## 3 Solución Ejercicio 3

- $p(E) = 0.01$
- $p(P/E) = 0.97$
- $p(\bar{P}/\bar{E} = 0.98) \rightarrow p(P/\bar{E}) = 0.02$

a) Nos piden la probabilidad de que de positivo y este enfermo

$$p(P \cap E) = p(P/E) \cdot p(E) = 0.97 \cdot 0.01 = \boxed{0.0097}$$

b) Nos piden la probabilidad de que este enfermo sabiendo que ha dado positivo (Bayes)

$$p(P) = p(P/E) \cdot p(E) + p(P/\bar{E}) \cdot p(\bar{E}) = (0.97 \cdot 0.01) + (0.02 \cdot 0.99) = 0.0295$$

$$p(E/P) = p(E \cap P)/p(P) = \frac{0.0097}{0.0295} = \boxed{0.33}$$

## 4 Solución Ejercicio 4

- $p(\bar{A}) = \frac{2}{3} \rightarrow p(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- $p(S/A) = \frac{1}{2}$
- $p(\bar{S}/A) = \frac{1}{2}$
- $p(\bar{S}/\bar{A}) = 0.25 \rightarrow p(S/\bar{A}) = 1 - 0.25 = 0.75$

A - Asistir a clase, S - Suspender el examen

Nos piden la probabilidad de que haya asistido a clase sabiendo que ha suspendido (Bayes)

$$p(S) = p(S/A) \cdot p(A) + p(S/\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(0.75 \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$p(S/A) = p(A \cap S)/p(A) \rightarrow p(A \cap S) = p(S/A) \cdot p(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p(A/S) = p(A \cap S)/p(S) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \boxed{0.25}$$

## 5 Solución Ejercicio 5

a) Nos piden la probabilidad de que ninguna empresa (0) presente suspensión de pagos durante un trimestre. Por lo tanto definimos:

$X \equiv$  número de empresas en suspensión de pagos al trimestre  $P(1.7)$

$$P(X = 0) = e^{-1.7} \frac{1.7^0}{0!} = \boxed{e^{-1.7}}$$

b) Nos piden la probabilidad de que al menos dos empresas presenten suspensión de pagos durante un año. Por lo tanto definimos:

$Y \equiv$  número de empresas en suspensión de pagos al año  $P(6.8)$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1)) = \boxed{1 - \left(e^{-6.8} \frac{6.8^0}{0!} + e^{-6.8} \frac{6.8^1}{1!}\right)}$$

## 6 Solución Ejercicio 6

Nos piden encontrar el radio donde encontrar al menos una langosta tenga probabilidad de 0.99. Por lo tanto definimos:

$X \equiv$  número de langostas por kilómetro cuadrado  $P(2)$

$\rightarrow$  en  $k$  kilómetros cuadrados  $P(2k)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-2k} \frac{2k^0}{0!} = 0.99 \rightarrow e^{-2k} = 1 - 0.99$$

$$\rightarrow \ln(e^{-2k}) = \ln(0.01) \rightarrow k = \frac{-4.605}{-2} = 2.3$$

$$\pi r^2 = 2.3 \rightarrow \boxed{r = 0.856 km}$$

## 7 Solución Ejercicio 7

a) Definimos lo siguiente:  $X \equiv$  dureza de las probetas  $N(70; 3)$

$$p(67 \leq X \leq 75) = p\left(\frac{67-70}{3} \leq \frac{X-70}{3} \leq \frac{75-70}{3}\right) = p(-1 \leq Z \leq 1.67) = 0.9525 - 0.1587 = \boxed{0.7938}$$

b) Primero definimos una variable de bernouilli

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si dureza} < 73.84 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$p(X < 73.84) = p\left(\frac{X-70}{3} < \frac{73.84-70}{3}\right) = p(Z < 1.28) = 0.8997$$

$$p = 0.8997; q = 0.1003$$

Ahora definimos una distribución binomial -  $Y \equiv$  número de probetas con dureza  $< 73.84$   $B(10, 0.8997)$

$$p(Y \leq 8) = 1 - p(Y > 8) = 1 - (p(Y = 9) + p(Y = 10)) =$$

$$= \boxed{1 - \left(\binom{10}{9} 0.8997^9 \cdot 0.1003^1 + \binom{10}{10} 0.8997^{10} \cdot 0.1003^0\right)}$$

c) Definimos una distribución binomial -  $T \equiv$  número de probetas con dureza  $< 73.84$   $B(100, 0.8997)$

Pero podemos aproximarla con una normal  $N(89.97, 3)$

$$p(T \leq 80) = p\left(\frac{T-89.97}{3} \leq \frac{80-89.97}{3}\right) = p(Z \leq -3.32) = \boxed{0.005}$$

## 8 Solución Ejercicio 8

Definimos la variable  $T \equiv$  tiempo antes de fallar  $E(\frac{1}{5})$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

a) Primero definimos una variable de Bernouilli:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si tiempo antes de fallar} > 8 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$p(T > 8) = 1 - F(8) = 0.2$$

$$p = 0.2; q = 0.8$$

Ahora definimos una distribución binomial -  $X \equiv$  Número de componentes que siguen funcionando al cabo de 8 años  $B(7; 0, 2)$

$$p(X > 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \left( \binom{7}{0} (0.2)^0 (0.8)^7 \right) - \left( \binom{7}{1} (0.2)^1 (0.8)^6 \right)$$

b) Reutilizamos la variable de bernouilli definida en el apartado a) -  $X_i$

Ahora definimos una distribución binomial -  $Y \equiv$  Número de componentes que siguen funcionando al cabo de 8 años  $B(20; 0, 2)$

Calculamos la probabilidad de que no funcione ninguna componente del lote

$$p(Y = 0) = \binom{20}{0} (0.2)^0 (0.8)^{20} = 0.0115$$

Ahora definimos una segunda distribución binomial (para los lotes) -  $N \equiv$  Número de lotes de 20 componentes que no funcionan ninguna al cabo de 8 años  $B(4; 0, 0115)$

Calculamos la probabilidad de que al menos un lote cumpla dichas condiciones

$$p(N \geq 1) = 1 - p(N < 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - \left( \binom{4}{0} (0.0115)^0 (0.9885)^4 \right) = 0.045$$

c)

$$F(10) = 1 - f(10) = 1 - e^{-\frac{10}{5}} = 1 - e^{-2}$$

d) Para hallar hasta el tercer éxito, debemos usar una binomial negativa. Por lo tanto, definimos la siguiente variable reutilizando la variable de bernouilli del apartado a).  $K \equiv$  Número de componentes fallidas hasta el tercer éxito  $BN(3; 0, 2)$

Nos piden hallar el valor medio:

$$\mu = \frac{3 * 0.8}{0.2} = 12$$

Por lo tanto necesitamos un total de 15 componentes de media (12 fallos y 3 exitos) para alcanzar 3 exitos