Cálculo

Tema 7

Integrales definidas

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2023-2024

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Definiciones

Dado un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, se llama partición de $[a,b]$ a un conjunto finito de puntos del intervalo, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tales que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Con estos puntos, el intervalo $[a,b]$ queda dividido en n subintervalos que siguen la siguiente notación:

$$[x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Se definen a continuación los conceptos de suma inferior y suma superior:

- La suma inferior de $f(x)$ en relación a P, denotada $L(P,f)$ se define como

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{donde } \; m_i = inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

- La suma superior de $f(x)$ en relación a P, denotada $U(P,f)$ se define como

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{donde } \; M_i = sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Tras las anteriores definiciones, se puede afirmar que el área A comprendida entre la gráfica de una función continua positiva $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ verifica que

$$L(P_i, f) \leq A \leq U(P_i, f)$$

para toda partición P_i que se pueda crear.

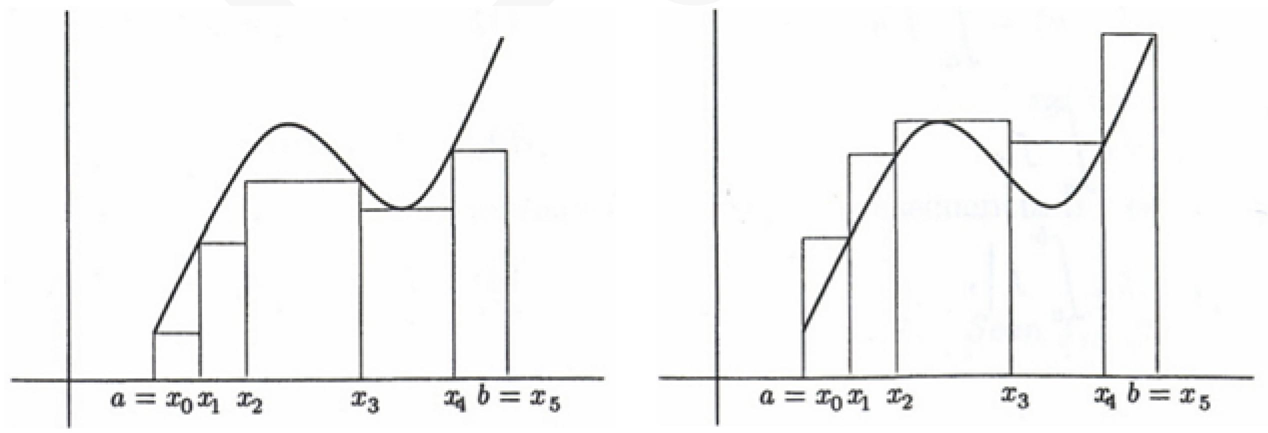

Figura 1: Ejemplo de suma inferior y suma superior.

Sea $f(x)$ una función acotada en $[a,b]$. Entonces se cumple que

$$\sup\{L(P_i, f)\} \leq \inf\{U(P_i, f)\}$$

donde el supremo y el ínfimo se toman sobre todas las posibles particiones P_i del intervalo $[a,b]$.

En base a las anteriores definiciones, se dice que una función $f(x)$ acotada en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$ si existe un número $I \in \mathbb{R}$ que verifique lo siguiente:

$$I = \sup\{L(P_i, f)\} = \inf\{U(P_i, f)\}$$

A ese número I se le denomina **integral definida** o integral de Riemann de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, y se denota de la siguiente forma:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx}$$

Por lo comentado anteriormente, el área comprendida entre la gráfica de una función continua positiva $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

2 Propiedades generales

1) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

3) $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx \geq \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

4) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

5) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

6) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, con $a \leq c \leq b$.

7) Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

8) Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

9) Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$.

3 Teorema fundamental del Cálculo y regla de Barrow

Primer teorema fundamental del Cálculo

Si $f(x)$ es una función continua y acotada en el intervalo $[a,b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

entonces $F(x)$ es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

A partir de esa definición, si utilizamos la regla de la cadena con las mismas condiciones y añadimos que $a(x)$ y $b(x)$ sean funciones derivables, podemos obtener la siguiente relación que es aún más general:

$$\boxed{F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = f\big(b(x)\big)\cdot b'(x) - f\big(a(x)\big)\cdot a'(x)}$$

Segundo teorema fundamental del Cálculo (regla de Barrow)

Si $f(x)$ y $F(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$, donde $F(x)$ es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Para aplicar la regla de Barrow es suficiente con obtener una primitiva, por lo que no es necesario escribir la constante de integración.

Ejercicio 1

Calcula $\displaystyle\int_1^3 x^2 dx$.

Como resultado del teorema fundamental y de la regla de Barrow, se deducen las siguientes propiedades:

1) Integración por partes: $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

2) Cambio de variable: $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$

Ejercicio 2

Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx$.

4 Aplicaciones de la integral definida

4.1 Área de una región plana

El área comprendida entre la gráfica de una función continua positiva $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a la siguiente expresión, que coincide con el **área algebraica**:

$$\text{Área algebraica} = \int_a^b f(x)dx$$

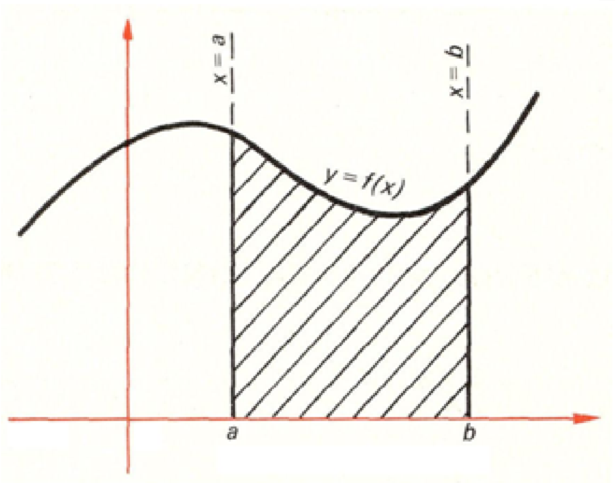

Figura 2: Área de una función continua positiva.

Ejercicio 3

Halla el área determinada por la curva $f(x) = \text{sen}(x)$, las rectas $x = \pi/2$ y $x = \pi$ y el eje de abscisas.

Ejercicio 4

Halla el área determinada por la curva $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^2}$ y los ejes.

Si $f(x)$ no es una función positiva, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es igual al área comprendida entre la gráfica de $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ en la parte en la que $f(x)$ es positiva, menos el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ en la parte en la que $f(x)$ es negativa. Esto es el área algebraica, que puede ser positiva, negativa o cero.

Ejercicio 5

Halla el área algebraica determinada por la curva $f(x) = \text{sen}(x)$, las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$ y el eje de abscisas. Compara el resultado con el valor del área geométrica.

Por su parte, el **área geométrica**, que es el área comprendida (desde un punto de vista geométrico) entre la gráfica de una función continua $f(x)$ no necesariamente positiva, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a la siguiente expresión:

$$\text{Área geométrica} = \int_a^b |f(x)|dx$$

Ejercicio 6

Halla el área determinada por la curva $f(x) = (x-1)(x+2)$, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ y el eje de abscisas.

Dadas dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ tal que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, el área comprendida entre las gráficas de las dos funciones y las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Nota: Si el enunciado no indica qué valores representan $x = a$ y $x = b$, deben considerarse como dichos valores las componentes x_a y x_b de los puntos $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$ donde se cortan las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Dadas dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ tales que $f(x)$ y $g(x)$ se entrecruzan entre sí en $[a, b]$, el área comprendida entre las gráficas de las dos funciones y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a la siguiente expresión, que en cualquier caso representa la fórmula más general para el cálculo de áreas geométicas:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Ejercicio 7

Halla el área de la región limitada entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1$.

Ejercicio 8

Halla el área de la región limitada entre las curvas $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = x^3 + x$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 9

Halla el área de la región limitada entre las curvas $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ y $g(x) = -x^3 - x + 1$ y las abscisas $x = -1$ y $x = 1$.

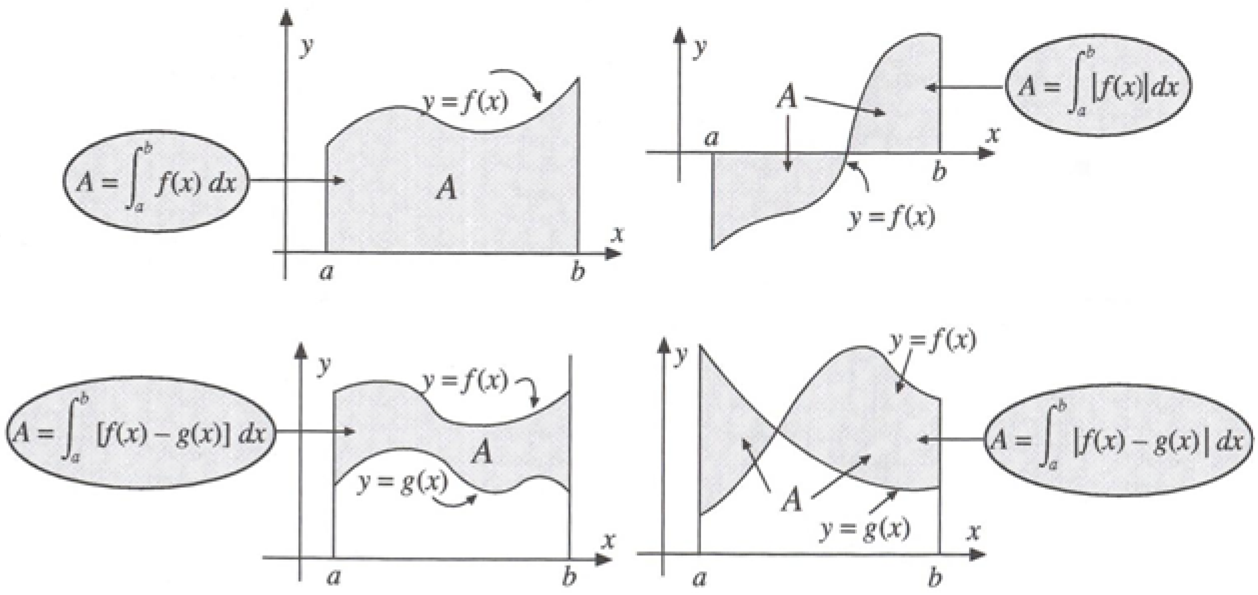

Figura 2: Cálculo de áreas de regiones planas mediante integrales

4.2 Longitud de un arco de curva

Sea la curva $y = f(x)$, siendo $f(x)$ una función derivable y con derivada continua en $[a, b]$. La longitud del arco de dicha curva entre los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ viene dada por

$$\text{Longitud} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Ejercicio 10

Determina la longitud de arco de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ en el intervalo $[1/2, 2]$. Repetir el cálculo para el intervalo $[1, 3/2]$.

4.3 Volumen de un cuerpo de revolución

El volumen obtenido al girar alrededor del eje X la región $\{a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq |f(x)|\}$ es:

$$\text{Volumen} = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Conviene darse cuenta de que en esta integral no importa cuándo $f(x)$ es positiva o negativa, ya que se integra $(f(x))^2$, que siempre es positiva.

Ejercicio 11

Halla el volumen obtenido al girar alrededor del eje X el área comprendida entre la gráfica de $f(x) = \cos(x)$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Por otra parte, el volumen obtenido al girar alrededor del eje X la región $\{a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ es:

$$\text{Volumen} = \pi \int_a^b \left|\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right| dx$$

Ejercicio 12

Halla el volumen obtenido al girar alrededor del eje X el área comprendida entre la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

5 Integrales impropias

En los apartados anteriores se ha supuesto siempre que las funciones a integrar eran continuas y acotadas y que los intervalos de integración eran cerrados y acotados. Sin embargo, es posible que alguna de esas condiciones no se cumpla, lo que daría lugar a los dos tipos siguientes de integrales impropias.

Las integrales impropias de primera especie son aquellas integrales en las que los intervalos de integración no están acotados (mientras que la función a integrar sí está acotada en el intervalo correspondiente), apareciendo los siguientes casos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Para calcularlas se recurre al uso de límites. Por ejemplo, el primero de los casos anteriores se resolvería mediante el siguiente cálculo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_a^k f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \big(F(k) - F(a)\big)$$

Las integrales impropias de segunda especie son aquellas integrales en las que las funciones a integrar no están acotadas, por lo que en algún punto del intervalo $[a, b]$ su valor tiende a $-\infty$ o $+\infty$. Dependiendo de si la asíntota se encuentra en $x = a$, en $x = b$ o en un punto $x = c$ del intervalo (a, b), será necesario realizar los siguientes cálculos para resolver las integrales:

$$I_1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \qquad I_2 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \qquad I_3 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx$$

Las integrales impropias que contienen ambos casos a la vez se solucionan aplicando las dos técnicas anteriormente señaladas.

6 Problemas

1) Calcula la integral definida $\int_{-1}^{1} 3xe^{x^2}dx$.

2) Utilizando el teorema fundamental del Cálculo, determina las derivadas de las siguentes funciones:

a) $F_1(x) = \int_0^x t^2 dt$

b) $F_2(x) = \int_0^{x^2} e^t dt$

c) $F_3(x) = \int_1^{e^{3x}} \operatorname{sen}(t) dt$

d) $F_4(x) = \int_2^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{1-t^2} dt$

3) Calcula la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ a la gráfica de $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4-4} dt$.

4) Determina los intervalos en los que la función $F(x) = \int_1^x \arctan(e^t) dt$ es inyectiva.

5) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{|\cos(t^3)|}{t^2+1} dt$.

6) Calcular, en caso de que existan, la primera y segunda derivada de $F(x) = x \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt$.

7) Demuestra que la función $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} \operatorname{Ln}(t) dt$ es decreciente en $(0, 1/2)$.

8) Determina el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función $F(x) = \int_0^x t^2 \cos(t^2) dt$ y utiliza el resultado para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}$.

9) Calcula el área geométrica de la función $f(x) = \cos(x)$ entre $x = 0$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. Con los mismos datos, calcula el área algebraica.

10) Halla el área geométrica de la región limitada entre las curvas dadas por $f(x) = -x^3 - x + 1$ y $g(x) = x^3 - x^2 + 2$ y las abscisas $x = 0$ y $x = 2$.

11) Halla el volumen obtenido al girar alrededor del eje X el área comprendida entre el eje X y la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

12) Halla el área de la región limitada entre las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$.

13) Halla el área determinada por la curva $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ y el eje de abscisas.

14) Determina la longitud de arco de la función $f(x) = \mathrm{Ln}(\cos(x))$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.

15) Encuentra el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ alrededor del eje X.

16) Encuentra el volumen del sólido formado al girar la región limitada por $f(x) = \sqrt{\mathrm{sen}(x)}$ alrededor del eje X entre $x = 0$ y $x = \pi$.

17) Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x} - 1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. D. Pestana Galván et al. Ed. Ariel.
- *Cálculo*. R. E. Larson, R. P. Hostetler y B. H. Edwards. Ed. McGraw-Hill.
- *Problemas de Cálculo*. M. Bilbao, F. Castañeda y J. C. Peral. .
- *Análisis Matemático I*. J. de Burgos. García-Maroto editores.
- *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*. A. García et al. CLAGSA.