U-tad
CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Números complejos

Tema 0

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Tema 0. Números complejos

1. Expresiones de un número complejo
2. Operaciones con números complejos
3. Raíces enteras de un número complejo
4. Logaritmo y exponencial de números complejos.

El cuerpo de los números complejos

- Consideramos en el conjunto R^2 las operaciones:

  1) (a,b)+(c,d)=(a+c, b+d)

  2) (a,b).(c,d)=(ac-bd, ad+bc)

1) $(R^2,+)$ verifica propiedades asociativa, elemento neutro (0,0), y conmutativa.

Todo elemento (a,b) tiene elemento opuesto: (-a,-b)

$\Downarrow$

$(R^2,+)$ es un grupo conmutativo

2) $(R^2,.)$ verifica propiedades asociativa, elemento neutro (1,0), y conmutativa.

Todo elemento (a,b) tiene elemento inverso: $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$\Downarrow$

$(R^2,.)$ es un grupo conmutativo

3) El producto es distributivo respecto a la suma: (a,b).[(c,d)+(e,f)]=(a,b).(c,d)+((a,b).(e,f)

$(R^2,+,.)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo. $\mathbb{C}$ es el cuerpo de los números complejos

Números complejos

- **Número complejo** es una expresión de la forma z= a+bi =(a,b) donde a y b son números reales e i es un número tal que i^2=-1
  - ✓ a =Re (z) es la parte real del número complejo
  - ✓ b= Im(z) es la parte imaginaria del número complejo
  - ✓ Si a=0 : z =bi=(0,b) es un número imaginario puro
  - ✓ Si b=0 : z=a=(a,0) es un número real
  - ✓ $\bar{z}$=a-bi =(a,-b) es el conjugado del número complejo z

$\mathbb{C}$={(a,b)/a, b ∈ R} o bien $\mathbb{C}$={a+bi/a, b ∈ R}

z=(a,b) forma cartesiana	z=a+bi forma binómica

Números complejos

- C={z=(a,b)=a+bi/ a,b ∈ $R\}$ es el superconjunto C de los números complejos.
- (C,+,.k) tiene estructura de espacio vectorial sobre R : un espacio vectorial de dimensión 2

- **Unidad imaginaria** $i^2=-1$

  porque (0,1).(0,1)=(-1,0)=-1

  Es decir: (a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0).(0,1)=a+b.i

  $i^2=-1$ $\quad$ *permite dar solución de la ecuación* $x^2+1=0$

  i^2 =-1

  i^3 =-i

  i^4 =+1

  i^5 =i

  ....

  i^n =i^{4k+r} =i^r

$Entonces\ ¿\, i=\sqrt{-1}?$ $\quad$ *Paradoja de Bernoulli* $\quad$ i^2 =-1=i.i=$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$!!!

Operaciones

- **Potencia de números complejos**

❖Ejemplo 1

❖$i^{47}= i^{4.11+3}= i^{4.11}. i^{3}= i^{3}$=-i

❖Ejemplo 2

❖$i^{25}= i^{4.6+1}= i^{4.6}. i^{1}= i^{1}$=i

➢ Los números complejos dan solución a las ecuaciones de segundo grado cuando el discriminante es negativo

❖Ejemplo 3 $x^2 + 2x + 5 = 0$

x=$\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}$ =$\frac{-2\pm4i}{2}$ = -1 $\pm2i$

❑ Igualdad de números complejos

Dados dos números complejos z_1=a+bi y z_2=c+di, $z_1 = z_2$ si a=c y b=d

❑ Suma de números complejos

z_1+z_2= (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i = (a+c, b+d)

❑ Producto de números complejos

$z_1.z_2$= (a+bi) . (c+di) = (a.c-b.d) + (b.c+a.d)i = (ac-bd, bc+ad)

❑ Producto de un número real por un número complejo

kz= k.(a+bi) = k.a + k.bi = (ka, kb)

Operaciones

Cociente de números complejos

Es otro número complejo que se obtiene al multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi).(c-di)}{(c+di).(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)}{c^2+d^2}$

❖Ejemplo 4

$$\frac{(1-i)(1+2i)}{1+i} = \frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i+i-i^2}{1-i+i-i^2} = \frac{4-2i}{2} = 2\text{-}i = (2,-1)$$

$(1-i)(1+2i) = 1 + 2i - i - 2i^2$=3+i

❖Ejemplo 5

$$[(3+2i)^3 \text{-} (i-1)^2] = 27 + 54i - 36 - 8i + 1 + 2i - 1 = -9 + 48i$$

Formas binómica y polar de un número complejo

- **Módulo o valor absoluto de un número complejo** z = a+bi es la longitud del vector que lo representa

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

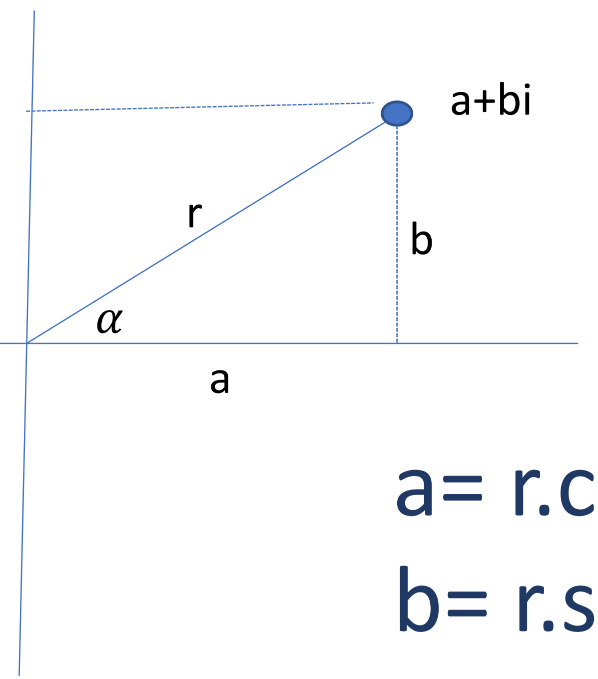
- **Argumento de un número complejo** es el valor del ángulo α que forma la dirección positiva del eje real con el vector que representa al número complejo

$$\alpha = \mathrm{arctg}(b/a)$$

- Dado cualquier z, el argumento admite un conjunto infinito de valores que se diferencian entre sí $2k\pi$, con $k \in Z$
- Se llama **valor principal** a aquel que cumple $0 \leq \alpha < 2\pi$ o que se encuentra en $[-\pi, \pi)$

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$



$$a = r.\cos\alpha$$

$$b = r.\operatorname{sen}\alpha$$

Formas binómica y polar de un número complejo

- Forma binómica a+bi
- Forma cartesiana (a,b)
- Forma polar r_α
- Forma trigonométrica

$$\mathrm{r}(\mathrm{cos}\alpha + i\ sen\alpha) = r.e^{i\alpha}$$

❑ Expresiones de un número complejo

- El punto P (a,b) que representa en el plano a un número complejo z es su **afijo**.
- Las coordenadas cartesianas del afijo son a = r cosα y b = r senα
- Las coordenadas polares de z son r (módulo) y α (argumento).
- Expresión polar del número z= r_α
- Forma trigonométrica de z: z = r(cosα+i senα) =$re^{i\alpha}$ (forma exponencial)

Esta última se deduce de la fórmula de Euler:

sen α= $\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ cos α= $\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2i}$

- **Ejemplo 6** **Ejemplo 7**

Expresar en las distintas formas z= -2+2i Expresar en las distintas formas z= (1,1)

- **Ejemplo 8** **Ejemplo 9**

Expresar en las distintas formas z= $e^{\frac{i\pi}{4}}$ Expresar en las distintas formas z= 3_π

❑ Propiedades del conjugado y del módulo de un número complejo

- $\forall\, z, w \in C$ $\quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\quad \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$ $\quad \overline{z.w} = \bar{z}.\,\bar{w}$
- $\forall\, z \in C$ $\quad \bar{\bar{z}} = z$ $\quad$ Arg $(\bar{z})$=-Arg(z)
- $\forall\, z, w \in C$ $\quad z.\,\bar{z} = |z|^2$ $\quad |\bar{z}| = |z|$ $\quad |z.w| = |z|.|w|$ $\quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
- $z \in R \Longleftrightarrow z = \bar{z}$
- $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- $\forall\, z \in C$ $\quad$ Re(z)=$\frac{z + \bar{z}}{2}$ $\quad$ Im(z)=$\frac{z - \bar{z}}{2}$
- $\forall\, z \in C$ $\quad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ $\quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ $\quad |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$
- $\forall\, z, w \in C$ $\quad ||z| - |w|| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$

Producto y cociente de complejos en forma polar y trigonométrica

Dados $z_1 = r_\alpha = r[\cos\alpha + i sen\alpha] =$ $y\ z_2 = s_\beta = s[\cos\beta + i sen\beta]$

- *El producto de dos números complejos tiene de módulo el producto de módulos y de argumento la suma de argumentos*

$$z_1 . z_2 = (r.s)_{\alpha+\beta} = r.s[\cos(\alpha+\beta) + i sen(\alpha+\beta)]$$

- *El cociente de dos números complejos tiene de módulo el cociente de módulos y de argumento la diferencia de argumentos*

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} = \frac{r}{s}[\cos(\alpha-\beta) + i sen(\alpha-\beta)]$$

Producto y cociente de complejos en forma exponencial

Dados $z_1 = re^{i\alpha} \quad y \quad z_2 = \rho e^{i\beta}$

- *El producto de dos números complejos tiene de módulo el producto de módulos y de argumento la suma de argumentos*

$$z_1 . z_2 = (r.\rho)e^{i(\alpha+\beta)}$$

- *El cociente de dos números complejos tiene de módulo el cociente de módulos y de argumento la diferencia de argumentos*

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r}{\rho}\right) e^{i(\alpha-\beta)}$$

- *El inverso de un número complejo*

$$\frac{1}{z_1} = \left(\frac{1}{r}\right) e^{-i\alpha}$$

- *El conjugado de un número complejo*

$$\overline{z_1} = re^{-i\alpha}$$

Raíces enteras de un número complejo

Potencia de complejos *(Fórmula de De Moivre)*

Dados z= r[cos$\alpha + isen\alpha$]

- *La potencia n-sima de un número complejo es otro número complejo que tiene módulo* r^n *y argumento* $n\alpha$

$$z^n = (r_\alpha)^n = r^n\,[\cos n\alpha + isen\, n\alpha]$$

Ejemplo 10

Calcular $\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)^3 = \left(2_{\frac{5\pi}{6}}\right)^3$

Realizamos la operación de modo más sencillo en forma polar

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 \qquad \alpha = \text{arctg}\,\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\left(2_{\frac{5\pi}{3}}\right)^3 = (2^3)_{3.\frac{5\pi}{3}} = 8_{\frac{15\pi}{3}} = 8_{5\pi} = 8_{\pi} = -8$$

Raíces enteras de un número complejo

❑ Raíces n-simas de un número complejo

Todo número complejo no nulo posee n raíces n-simas que son también números complejos.

Dado un número complejo no nulo ω= s[cos$\beta + isen\beta]$, *del que queremos extraer*

sus raíces n-simas: z= r[cos$\alpha + isen\alpha$]

Entonces $z^n = \omega \longrightarrow$ s[cos$\beta + isen\beta] = r^n$ [cosn$\alpha + isenn\alpha$]

Como dos números complejos iguales tienen módulos y argumentos iguales:

s= $r^n \Longleftrightarrow$ r=$\sqrt[n]{s}$ n $\alpha = \beta$ +2k$\pi \longrightarrow k \in Z$ $\alpha=\frac{\beta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\ k \in Z$

$$\boxed{\text{Por tanto } \omega \textit{ posee n raíces complejas que son } \omega_k = \sqrt[n]{s}_{\frac{\beta}{n}+\frac{2k\pi}{n}} \quad k=0,1,2\ldots n-1}$$

Raíces enteras de un número complejo

Notas importantes

- ✓ las raíces n-ésimas de un mismo número complejo tienen todas el mismo módulo
- ✓ Dos raíces n-simas consecutivas de un número z se diferencian en 2π/n radianes
- ✓ los afijos de las raíces n-simas de un número complejo z forman un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio R = módulo·raíz

❖ **Ejemplo 11** $\sqrt[3]{8\mathrm{i}}$

Ejemplo 12 $\sqrt[5]{-1-i}$

Logaritmo y exponencial de un número complejo

Exponencial de un número complejo

Dado z =x+yi número complejo, Se define *la exponencial de z como*

$$e^{z} = e^{x}\cos y + i\, e^{x}\operatorname{sen} y$$

- ✓ Es decir, *la parte real de* e^{z} es **Re(e^{z}) = $e^{x}\cos y$**
  Y la parte imaginaria de e^{z} es **Im(e^{z}) = $e^{x}\operatorname{sen} y$**

- ✓ Y por tanto, *el módulo de* e^{z} es $|e^{z}| = e^{x}$
  Y el argumento de e^{z} es **Arg(e^{z}) = y**

Propiedades

- $e^{z}\, e^{w} = e^{z+w}$
- $e^{z} \neq 0$ *para todo número complejo z*
- *Si* $x \in R$, $e^{z} = e^{x}$: *es la función exponencial real*
- $e^{z} = e^{z+n2\pi i} \leftrightarrow$ *La exponencial compleja es periódica de período* $2\pi i$
- *Todo número complejo se puede expresar de forma exponencial* $z = r\,.\,e^{i\alpha}\,\cdot$ *donde* $r = |z|$ *y* $\alpha = \arg z + 2n\pi$ *con n un entero cualquiera. Se denota con Argz al argumento principal*

Logaritmo y exponencial de un número complejo

❑ Logaritmo de un número complejo

El logaritmo (neperiano) de un número complejo $\boldsymbol{z = r_\alpha}$ es otro número complejo $\omega \; tal \; que \; e^{\omega}$=z

- ✓ Es por tanto un número complejo cuya parte real es el logaritmo del módulo de z y cuya parte imaginaria es un argumento de z. Es decir:

$$\mathbf{ln\ z = ln\ r + i}\ (\boldsymbol{\alpha + 2k\pi})$$

- ✓ Todos los logaritmos de z están situados en una misma recta vertical de abscisa lnr y a partir de uno de ellos podemos ubicar el resto desplazándolo hacia arriba o hacia abajo un número entero de. El que elegimos, en el intervalo (-$\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}$) se denomina logaritmo principal

❑ *Propiedades*

- $\boldsymbol{ln(-1) = \pi i} \qquad \boldsymbol{ln(i) = \frac{\pi i}{2}}$
- $\boldsymbol{ln(zw) = lnz + lnw + 2n\pi \quad n\ entero}$
- El valor lnz + lnw es un logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo principal
- $\boldsymbol{ln\frac{z}{w} = lnz - lnw + 2n\pi \quad n\ entero}$
- $\boldsymbol{e^{lnz} = z}$

❑ Potencias complejas

- Recuerda que si a>0 y b$\in R$ $son\ dos\ números\ reales,$ la potencia de base a y exponente b se define como a^{b}= $e^{b.loga}$
- Y si z,t$\in C$ $son\ dos\ números\ complejos\ con\ z \neq 0$, y todos ellos forman el conjunto

$$z^{t} = \{e^{t.(logz+i2k\pi)} \ / \ k \in Z\}$$

- z^{t}= $e^{t.logz}$ se denomina valor principal de la potencia de base z y exponente t.

- Si t=a+bi y z = m_{α} Entonces z^{t}= $e^{t.logz}$=$e^{(a+bi).(lnm+\alpha 2k\pi)}$ k$\in Z$

Logaritmo y exponencial de un número complejo

Ejemplo 13

- Escribir en forma exponencial el complejo z = $\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}$ y calcular su logaritmo neperiano.

Teorema fundamental del álgebra (Gauss)

- ✓ Permite resolver ecuaciones polinómicas que no tenían solución en el conjunto de números reales

Si p(z) = $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ *es un polinomio complejo* de grado n ≥ 1 , *entonces existe un número complejo* z_i tal que p(z_i)=0

- Todo polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos, tiene n raíces, contando el grado de multiplicidad

Ejemplo 14

Resolver z^2-4z+8=0

Ejemplo 15

z^3 +4z^2 +9z+36=0

Ejemplo 16 Determinar un polinomio de coeficientes reales que tenga como raíces −3 y 2+i

Logaritmo y exponencial de un número complejo

- Resolución de ecuaciones **donde todos los coeficientes son reales:**
  - Soluciones reales
  - Pares de soluciones complejas conjugadas
- Como las soluciones complejas siempre tienen que aparecer por pares, si un polinomio de grado 3 cuyos coeficientes son todos reales, tendrá siempre al menos tiene una solución real.

Ejemplo 16 Determinar un polinomio de coeficientes reales que tenga como raíces -3 y $2+i$