TEMA 2

SOLUCIÓN DE

LOS EJERCICIOS

EJERCICIO 1

Calcula $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ mediante el procedimiento numérico, dada la función $f(x) = x^2$.

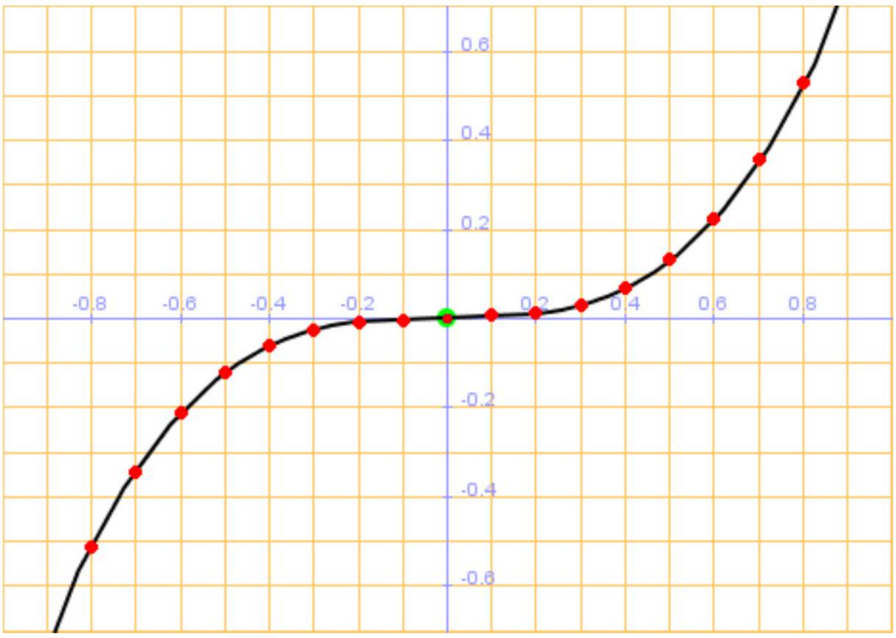
Solución:

x	1.9	1.99	1.999	$\rightarrow$	2	$\leftarrow$	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.61	3.96	3.996	$\rightarrow$	4	$\leftarrow$	4.004	4.04	4.41

EJERCICIO 2

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ mediante el procedimiento gráfico, dada la función $f(x) = x^3$.

Solución:



EJERCICIO 3

Comprueba que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$ utilizando la definición $\epsilon - \delta$, dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Solución:

Buscamos determinar si existe un entorno del punto $x_0 = 1$ cuyos valores cumplan que, si

$$|x - x_0| = |x - 1| < \delta$$

entonces

$$|f(x) - L| = |f(x) - (-2)| = |f(x) + 2| < \epsilon$$

Como la función tiene dos definiciones distintas para valores menores y mayores que $x = 1$, el estudio se realiza de la siguiente manera:

- $x < 1 : \ |f(x) + 2| = |(x-3) + 2| = |x - 1| < \epsilon$
- $x > 1 : \ |f(x) + 2| = |(-2x) + 2| = |-2(x-1)| = |-2||x-1| = 2|x-1| < \epsilon \Longrightarrow |x-1| < \dfrac{\epsilon}{2}$

De las dos condiciones anteriores, nos quedamos con la más restrictiva, $|x-1| < \dfrac{\epsilon}{2}$. De esta forma, si tomamos $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$, conseguiremos que para los valores tales que $|x-1| < \delta = \dfrac{\epsilon}{2}$, su imagen cumpla la condición $|f(x) + 2| < \epsilon$.

Por ejemplo, para $\epsilon = 0.001$ el valor necesario sería $\delta = 0.0005$, de manera que para valores tales que $x \in (0.9995, 1.0005)$ se cumple que $f(x) \in (-2.001, -1.999)$.

EJERCICIO 4

Calcula $\lim\limits_{x\to 0} (f \circ g)(x)$, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 4$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to 0} f\left(g(x)\right) = \lim_{x\to 0} f\left(x^2+4\right) = \lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+4} = \sqrt{0^2+4} = 2$$

Se cumple que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(x^2+4\right) = 4 = L$ y que $\lim\limits_{x\to L} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2 = f(L)$, de manera que se verifica que

$$\lim_{x\to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(L) = 2$$

EJERCICIO 5

Calcula $\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)$ y $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

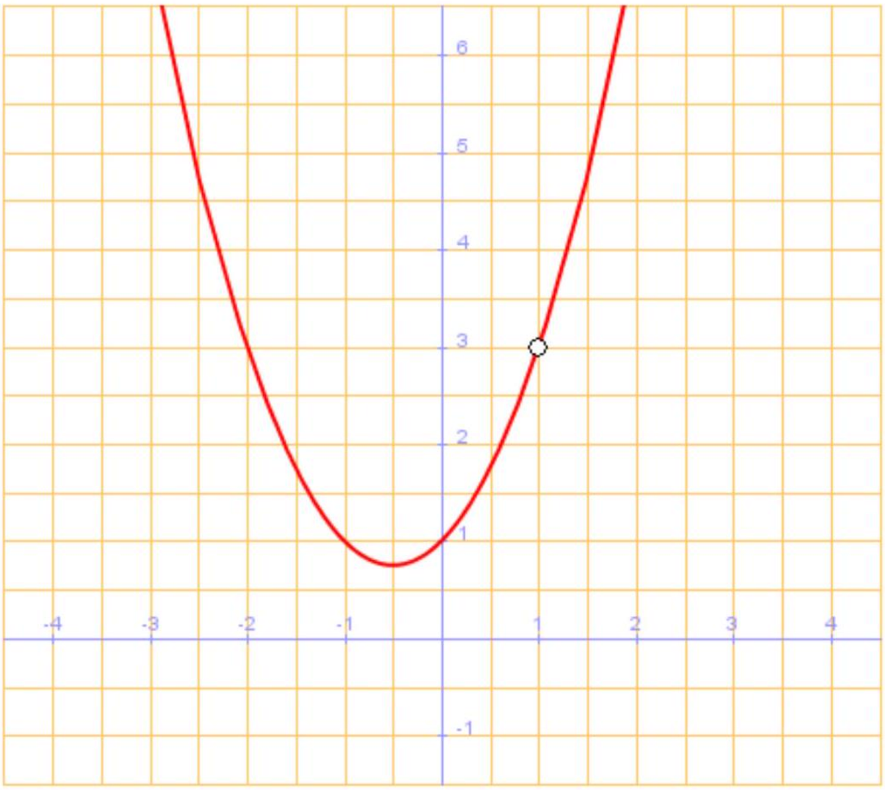
Solución:

Puesto que

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)}=\left(x^2+x+1\right)\quad \forall x\neq 1$$

y como $\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3$, entonces se puede afirmar que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3$$



EJERCICIO 6

Calcula $\lim_{x\to 3} f(x)$ mediante el teorema del encaje dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 3$, $g(x) = x^2 - 6x + 11$ y $h(x) = -x^2 + 6x - 7$.

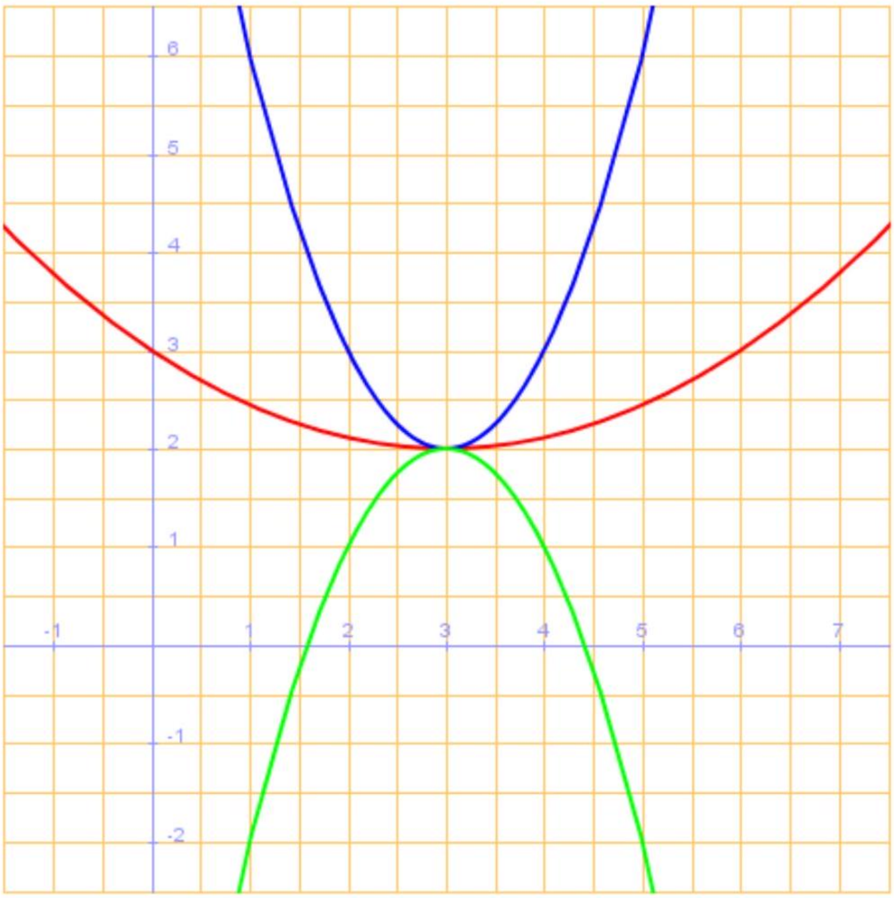
Solución:

Puesto que

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} h(x) = 2$$

y como $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene al punto 3 , entonces se puede afirmar que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$$



EJERCICIO 7

Calcula $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-2x-4}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{2x^2-2x-4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(2x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{2x+2} = \frac{7}{6}$$

EJERCICIO 8

Calcula $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}$$

EJERCICIO 9

Calcula $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4x^2+13}-7}{6-2x}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{4x^2+13}-7}{6-2x} = \frac{\sqrt{36+13}-7}{6-6} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{4x^2+13}-7\right)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)}{(6-2x)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(4x^2+13)-49}{(6-2x)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{4x^2-36}{(6-2x)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{4\,(x^2-9)}{2(3-x)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{4(x+3)(x-3)}{2(3-x)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{4(x+3)(x-3)}{-2(x-3)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{4(x+3)}{-2\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)} = \frac{24}{-28} = -\frac{6}{7}$$

EJERCICIO 10

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-2x-4}$.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-10}{2x^2-2x-4} = \frac{(+\infty)^2+3(+\infty)-10}{2(+\infty)^2-2(+\infty)-4} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2+3x-10}{x^2}}{\dfrac{2x^2-2x-4}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{10}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2}}{2-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{1+\dfrac{3}{(+\infty)}-\dfrac{10}{(+\infty)^2}}{2-\dfrac{2}{(+\infty)}-\dfrac{4}{(+\infty)^2}} = \frac{1+0+0}{2-0-0} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 11

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^4-2x+4}{3x^5+x^2-2}$.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4-2x+4}{3x^5+x^2-2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{5x^4-2x+4}{x^5}}{\dfrac{3x^5+x^2-2}{x^5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{5x^4}{x^5}-\dfrac{2x}{x^5}+\dfrac{4}{x^5}}{\dfrac{3x^5}{x^5}+\dfrac{x^2}{x^5}-\dfrac{2}{x^5}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{4}{x^5}}{3+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^5}} = \frac{\dfrac{5}{+\infty}-\dfrac{2}{(+\infty)^4}+\dfrac{4}{(+\infty)^5}}{3+\dfrac{1}{(+\infty)^3}-\dfrac{2}{(+\infty)^5}} = \frac{0-0+0}{3+0-0} = 0$$

EJERCICIO 12

Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - x$.

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - x = \sqrt{\infty + 1} - \infty = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{(\sqrt{x+1} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1) - x^2}{(\sqrt{x+1} + x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + x + 1}{(\sqrt{x+1} + x)} = \frac{-\infty^2 + \infty + 1}{(\sqrt{+\infty + 1} + \infty)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{-x^2 + x + 1}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{x+1} + x}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{-x^2 + x + 1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x^4}} + \dfrac{x}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}} + \dfrac{1}{x}} =$$

$$= \frac{-1 + \dfrac{1}{+\infty} + \dfrac{1}{(+\infty)^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{(+\infty)^3} + \dfrac{1}{(+\infty)^4}} + \dfrac{1}{+\infty}} = \frac{-1 + 0 + 0}{\sqrt{0 + 0} + 0} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

EJERCICIO 13

Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)$.

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x}\right) = +\infty - \sqrt{(+\infty)^2 + (+\infty)} = \{\infty - \infty\} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)\left(x + \sqrt{x^2 + x}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 + x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x)}{\left(x + \sqrt{x^2 + x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\left(x + \sqrt{x^2 + x}\right)} =$$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x}{x} + \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{x}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{+\infty}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{1}{2}$$

EJERCICIO 14

Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{1}{\cos(0)}\right)^{\frac{1}{0^2}} = \left(\frac{1}{1}\right)^{+\infty} = \{1^\infty\} = L = e^A$$

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right)\frac{1}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)}\right)\frac{1}{x^2} \approx \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2/2}{\cos(x)}\right)\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = L = e^A = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

EJERCICIO 15

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x-2}\right)^{2x^2}$.

Solución:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-2}\right)^{2x^2} = \left(\lim_{x\to +\infty}\frac{3x-5}{3x-2}\right)^{\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2} = \left\{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right\} = \{1^{+\infty}\} = L = e^A$$

$$A = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-2} - 1\right)2x^2 = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-5-(3x-2)}{3x-2}\right)2x^2 = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-3}{3x-2}\right)2x^2 =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-6x^2}{3x-2} = \frac{-6(+\infty)^2}{3(+\infty)-2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{-6x^2}{x^2}}{\frac{3x-2}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-6}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{-6}{\frac{3}{+\infty}-\frac{2}{(+\infty)^2}} =$$

$$= \frac{-6}{0-0} = -\frac{6}{0} = -\infty$$

$$L = e^A = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

EJERCICIO 16

Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^4}\right)^{\frac{3}{\operatorname{arcsen}(x^4)}}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^4}\right)^{\frac{3}{\operatorname{arcsen}(x^4)}} = 1^{3/0} = \{1^\infty\} = L = e^A$$

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)\frac{3}{\operatorname{arcsen}\left(x^4\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{3\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)}{\operatorname{arcsen}\left(x^4\right)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)}{\left(\operatorname{arcsen}\left(x^4\right)\right)\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{3\left(\left(1+x^4\right)-1\right)}{\left(\operatorname{arcsen}\left(x^4\right)\right)\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x^4}{\left(\operatorname{arcsen}\left(x^4\right)\right)\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)} \approx \lim_{x\to 0}\frac{3x^4}{\left(x^4\right)\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{1+x^4}+1} = \frac{3}{2}$$

$$L = e^A = e^{3/2} = \sqrt{e^3} = e\sqrt{e}$$

EJERCICIO 17

Calcula $\lim_{x\to +\infty} x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}-1\right)$.

Solución:

$$\lim_{x\to +\infty} x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}-1\right) = \{(\infty)\cdot 0\} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}+1\right)}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{A}{x}\right)-1\right)}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{A}{x}}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{A}{\left(\sqrt{1+\frac{A}{x}}+1\right)} = \frac{A}{\left(\sqrt{1+\frac{A}{+\infty}}+1\right)} = \frac{A}{2}$$

EJERCICIO 18

Calcula $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{2x^2-5}\right)^{\frac{x-2}{x^2+3}}$.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{2x^2-5}\right)^{\frac{x-2}{x^2+3}}=\left(\frac{+\infty+5}{2(+\infty)^2-5}\right)^{\frac{+\infty-2}{(+\infty)^2+3}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{\frac{+\infty}{+\infty}}=\left\{0^0\right\}=e^A$$

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x^2+3}\right)\mathrm{Ln}\left(\frac{x+5}{2x^2-5}\right)=0\cdot\mathrm{Ln}(0)=\{0\cdot\infty\}=A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Ln}\left(\dfrac{x+5}{2x^2-5}\right)}{\dfrac{x^2+3}{x-2}}=$$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\left(\dfrac{2x^2-5-4x(x+5)}{(2x^2-5)^2}\right)}{\left(\dfrac{x+5}{2x^2-5}\right)}}{\dfrac{2x(x-2)-(x^2+3)}{(x-2)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\left(\dfrac{-2x^2-20x-5}{(2x^2-5)}\right)}{x+5}}{\dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-2x^2-20x-5}{(2x^2-5)(x+5)}}{\dfrac{x^2-4x-3}{(x^2-4x+4)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^4\dots}{2x^5+\dots}=0\implies L=e^A=e^0=1$$

EJERCICIO 19

Calcula $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(\cot(x))^{\mathrm{sen}(x)}$.

Solución:

$$\lim_{x\to0^+}(\mathrm{cotan}(x))^{\mathrm{sen}(x)}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}\right)^{\mathrm{sen}(x)}=\left(\frac{1}{0}\right)^0=\left\{\infty^0\right\}=e^A$$

$$A=\lim_{x\to0^+}\mathrm{sen}(x)\mathrm{Ln}(\mathrm{cotan}(x))=\lim_{x\to0^+}\mathrm{sen}(x)\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)\approx$$

$$\approx\lim_{x\to0^+}x\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{x}\right)=0\cdot\mathrm{Ln}(+\infty)=0\cdot(+\infty)=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{Ln}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{-1/x^2}{1/x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}x=0\implies L=e^A=e^0=1$$

EJERCICIO 20

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-2x-4}$ utilizando la regla de L'Hopital.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-10}{2x^2-2x-4} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{4x-2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 21

Calcula $\lim\limits_{x\to+2} \dfrac{\mathrm{Ln}\,(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ utilizando la regla de L'Hopital.

Solución:

$$\lim_{x\to+2} \frac{\mathrm{Ln}\,(x^2-3)}{x^2+3x-10} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to+2} \frac{\dfrac{2x}{x^2-3}}{2x+3} = \lim_{x\to+2} \frac{2x}{(x^2-3)\,(2x+3)} = \frac{4}{7}$$

EJERCICIO 22

Calcula $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\mathrm{sen}(3x)}{x+\mathrm{sen}(5x)}$ utilizando la regla de L'Hopital.

Solución:

$$\lim_{x\to0} \frac{x-\mathrm{sen}(3x)}{x+\mathrm{sen}(5x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to0} \frac{1-3\cos(3x)}{1+5\cos(5x)} = \frac{1-3\cos(0)}{1+5\cos(0)} = \frac{1-3}{1+5} = -\frac{1}{3}$$

EJERCICIO 23

Calcula $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-3}$.

Solución:

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{3^- - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{3^+ - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Puesto que los límites laterales no coinciden, se puede afirmar que no existe el límite solicitado.

EJERCICIO 24

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Solución:

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{1}{0^-}\right) = \cos(-\infty) = ??$$
$$\lim_{x \to 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{1}{0^+}\right) = \cos(+\infty) = ??$$

Puesto que los límites no se pueden determinar, se puede afirmar que el límite solicitado no existe.

EJERCICIO 25

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} e^{|x|/x}$.

Solución:

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{|x|/x} = \lim_{x \to 0^-} e^{-x/x} = \lim_{x \to 0^-} e^{-1} = \frac{1}{e}$$
$$\lim_{x \to 0^+} e^{|x|/x} = \lim_{x \to 0^+} e^{+x/x} = \lim_{x \to 0^+} e^{+1} = e$$

Puesto que los límites laterales no coinciden, se puede afirmar que no existe el límite solicitado.