Lógica y Matemática Discreta

Ejercicios de ampliación

Relaciones

Ejercicio 1. Sobre $\mathbb{R}^2$ definimos la relación

$$(x_1,\, y_1) \sim (x_2,\, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = \lambda y_2^2 - \mu y_1^2,\ \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$$

¿Para qué valores de λ y μ la relación definida es de equivalencia?

Ejercicio 2. Sobre $\mathbb{N}$ se define la relación

$$m \sim n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } m^2 = kn$$

(a) ¿Qué propiedades satisface la relación?

(b) ¿Quiénes son los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} \,:\, 4 \sim n\}$ y $\{m \in \mathbb{N} \,:\, m \sim 4\}$?

Ejercicio 3. Dados los elementos $(x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define la siguiente relación:

$$(x_1,\, y_1) \sim (x_2,\, y_2) \Leftrightarrow d((x_1,\, y_1),\, (0,\, 0)) = d((x_2,\, y_2),\, (0,\, 0))$$

donde

$$d((a,\, b),\, (c,\, d)) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

es la distancia euclídea.

(a) Demostrar que es una relación de equivalencia.

(b) Definir la clase de equivalencia $[(0,\, 1)]$ y dibujarla.

(c) Definir la clase de equivalencia $[(a,\, b)]$, donde $(a,\, b)$ es un punto genérico de $\mathbb{R}^2$, y mostrar el conjunto cociente $\dfrac{\mathbb{R}^2}{\sim}$.

Ejercicio 4. Dados dos conjuntos A y B, se define la distancia entre ambos conjuntos como

$$d(A,\, B) = \inf\{d(a,\, b) \,:\, a \in A,\, b \in B\}$$

Sean $(x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Decimos que

$$[(x_1,\, y_1)] \preceq [(x_2,\, y_2)] \Leftrightarrow d([(x_1,\, y_1)],\, [(0,\, 0)]) \leq d([(x_2,\, y_2)],\, [(0,\, 0)])$$

donde las clases de equivalencia quedan definidas por la relación de equivalencia del ejercicio anterior.

(a) Demostrar que $\preceq$ es una relación de orden parcial no estricto en $\dfrac{\mathbb{R}^2}{\sim}$.

(b) ¿Es un orden total?

(c) Si restringimos la relación al conjunto $\dfrac{(-3,\, 3) \times (-2,\, 2)}{\sim}$, comprobar si hay maximales, minimales, máximos, mínimos, supremos e ínfimos. En caso afirmativo, explicitarlos.

Ejercicio 5. Dados n, $m \in \mathbb{N}$, se define la siguiente relación:

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow [\sqrt{n}] = [\sqrt{m}]$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x.

(a) Razonar si $\mathcal{R}$ es o no una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}$.

(b) En caso afirmativo, obtener la clase de equivalencia $[2]$.

(c) Justificar, en su caso, si los números 10 y 14 pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Ejercicio 6. Consideramos el conjunto parcialmente ordenado con la relación de divisibilidad

$$X = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12,\ 15,\ 24,\ 90,\ 180,\ 360\}$$

(a) Calcular los elementos maximales y minimales de X.

(b) Calcular, si existen, el máximo y el mínimo de X.

(c) Obtener el conjunto de cotas superiores de $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12,\ 180\}$ y, si existe, el supremo de A.

(d) Obtener el conjunto de cotas inferiores de A y, si existe, el ínfimo de A.