# Cálculo

## Tema 9

## Series de números reales

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2023-2024

Versión: 2.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

# Índice

# 1 Definiciones

## 1.1 Convergencia

Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, se considera una nueva sucesión $\{S_n\}$ con la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

La serie así definida se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y a la sucesión $\{S_n\}$ se le denomina sucesión de sumas parciales de la serie.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente** si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es convergente.

En ese caso, al valor $S < \infty$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = S$ se le llama **suma de la serie**. Por el contrario, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ o si la sucesión $\{S_n\}$ es oscilante.

**Ejemplo 1**

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, mientras que en comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ es divergente con límite infinito y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ es oscilante.

Una condición necesaria para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ya que de lo contrario las sumas parciales crecerían de forma indefinida.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente } \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Sin embargo, la implicación no tiene por qué ser cierta en el sentido contrario. Por ejemplo, la serie armónica, donde $a_n = 1/n$, es divergente a pesar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Para poder ofrecer unas condiciones necesarias y suficientes de convergencia es necesario definir el concepto de resto de orden $k$: dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se denomina resto de orden $k$, y se denota como $R_k$, a la serie después de quitarle los primeros $k$ términos, $R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente si y solo si se verifica una de las siguientes condiciones:

- $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N_0(\epsilon)$ tal que $\forall\, p, q > N_0$, $|S_p - S_q| < \epsilon$ (es decir, la sucesión de sumas parciales es una sucesión regular o de Cauchy).
- $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N_0(\epsilon)$ tal que $\forall\, p, q > N_0$, $|R_p - R_q| < \epsilon$ (en realidad, $|S_p - S_q| = |R_p - R_q|$).
- $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

## 1.2 Operaciones con series

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes y sus sumas respectivas son $S_A$ y $S_B$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ es convergente y su suma es $S_A + S_B$.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente con suma $S_A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ es convergente y su suma es $\alpha \cdot S_A$.

## 1.3 Series de términos positivos

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos si $a_n \geq 0$ para todo valor $n \in \mathbb{N}$. La serie será de términos estrictamente positivos si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En la práctica, también se pueden tratar como series de términos positivos aquellas para las que $a_n \geq 0$ para los valores $n > N_0$ y aquellas en las que $a_n < 0$ para todo valor $n \in \mathbb{N}$, puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Las series de términos positivos no pueden ser oscilantes, por lo que o son convergentes o divergentes con límite infinito.

## 1.4 Series alternadas

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es **alternada** si $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o para todo $n \geq N_0$. La forma más común que tienen las series alternadas es $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, con $b_n > 0$ para todo valor $n$.

## 1.5 Convergencia absoluta

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Además, se cumple lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente}$$

Sin embargo, la implicación en sentido contrario no siempre es cierta, como ocurre por ejemplo con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, que es convergente pero no absolutamente convergente. A las series a las que les ocurrra esta circunstancia las llamaremos series **condicionalmente convergentes**.

Este teorema es útil para estudiar el carácter de algunas series donde la convergencia absoluta es más fácil de determinar (por tener un mayor número de herramientas a nuestra disposición) que la convergencia.

# 2 Algunas series importantes

## 2.1 Serie geométrica

La **serie geométrica** de razón $r$ es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n$. La serie es convergente si $|r| < 1$ y divergente en caso contrario. En caso de que sea convergente, su suma es $S = \frac{r}{1-r}$. Otras expresiones útiles asociadas a la serie geométrica cuando $|r| < 1$ son las siguientes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$$

$$\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{(1-r^{N+1})}{1-r} \qquad \sum_{n=1}^{N} r^n = \frac{r(1-r^N)}{1-r}$$

## 2.2 Serie telescópica

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **telescópica** si $a_n$ puede escribirse de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$. La serie telescópica converge si la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso se cumple lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = b_1 - b_{N+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

# 3 Criterios de convergencia

## 3.1 Criterio de la comparación

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N_0$:

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

**Ejemplo 2**

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ es convergente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

**Ejemplo 3**

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ es divergente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es también divergente.

### 3.2 Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

- Si $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces las dos series tienen el mismo carácter (o ambas convergen, o ambas divergen).
- Si $L = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.
- Si $L = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.
- Si $L = \pm\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también converge.
- Si $L = \pm\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

### 3.3 Criterio del cociente o de D'Alembert

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos estrictamente positivos, sea $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

- Si $L < 1$, entonces la serie es convergente.
- Si $L > 1$, entonces la serie es divergente.
- Si $L = 1$, no se pueden sacar conclusiones sobre el carácter de la serie.

### 3.4 Criterio de la raíz

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos, sea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

- Si $L < 1$, entonces la serie es convergente.
- Si $L > 1$, entonces la serie es divergente.
- Si $L = 1$, no se pueden sacar conclusiones sobre el carácter de la serie.

## 3.5 Criterio de la integral

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $f(x)$ una función definida en $[1,\infty)$ tal que $f(n) = a_n$ para todo valor $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe un número $\alpha \geq 1$ tal que $f(x)$ es decreciente y positiva para todo $x > \alpha$. Entontonces se cumple que

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

son convergentes o divergentes simultáneamente.

**Ejemplo 4**

Aplicando este criterio, es posible determinar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.

## 3.6 Criterio del producto o de Pringsheim

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos, sea $\alpha$ un número real tal que $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot n^{\alpha} = L$.

- Si $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces si $\alpha > 1$ la serie converge y si $\alpha \leq 1$ la serie diverge.
- Si $L = 0$ y $\alpha > 1$ la serie converge.
- Si $L = \infty$ y $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

## 3.7 Criterio de Raabe

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos, supongamos que existe

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

- Si $L > 1$, la serie converge.
- Si $L < 1$, la serie diverge.
- Si $L = 1$, no se puede concluir nada sobre el carácter de la serie.

Suele ser conveniente utilizar este criterio cuando nos encontremos un caso dudoso según el criterio del cociente.

### 3.8 Criterio logarítmico o de Cauchy

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos, supongamos que existe:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\mathrm{Ln}(n)}$$

- Si $L > 1$, la serie converge.
- Si $L < 1$, la serie diverge.
- Si $L = 1$, no se puede concluir nada sobre el carácter de la serie.

### 3.9 Criterio de condensación

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos decrecientes ($a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Entonces las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$$

tienen el mismo carácter.

Este criterio puede ayudar a estudiar la convergencia de algunas series en las que aparecen expresiones con logaritmos.

### 3.10 Criterio de Leibniz

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie alternada que verifica que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, entonces la serie es convergente.

**Ejemplo 5**

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ es convergente.

### 3.11 Criterio de Abel

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ es convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y la sucesión $\{b_n\}$ es monótona acotada.

Cuando una serie no es absolutamente convergente, para estudiar su convergencia condicional se puede utilizar tanto el criterio de Leibniz, si la serie es alternada, como el criterio de Abel.

### 3.12 Criterio de Dirichlet

Si $\{b_n\}$ es una sucesión de números positivos decrecientes hacia 0 y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie con sumas parciales acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ es convergente.

## 4 Problemas

1) Estudia la naturaleza de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$.

2) Estudia la naturaleza de la serie de término general $a_n = \frac{5\log_a n}{3\log_b n}$ cuando $a$ y $b$ son ambos números positivos distintos de 1.

3) Sabiendo que la suma de los $n$ primeros términos de una serie es $S_n = \frac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1}$, halla el término general y estudia su naturaleza.

4) Estudia la naturaleza de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n - 5}{3^n + n}\right)$.

5) Estudia la naturaleza de las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ utilizando el criterio de la integral.

6) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$.

7) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

8) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

9) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n^2+5n-27}$.

10) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^7-n+1)^{1/3}}$.

11) Estudia la convergencia de las siguientes series de términos positivos:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\operatorname{sen}(n)}{n^2+n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln}(n)}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Ln}(n)}{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\sqrt{n}+323}{n^2+\cos(n)}$

12) Estudia la convergencia de las siguientes series de términos positivos:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{n^2+7}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-1)^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

13) Estudia la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+n}$

14) Estudia la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)}{5^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{4+n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n 5^{-\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\mathrm{Ln}(n))^n}$

15) Estudia la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{b^n}$ con $a>0$, $b\neq 0$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ln}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

16) Estudia el carácter de la serie cuyo término general es $a_n=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^a$.

17) Estudia el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\pi+\arctan^5\left(e^{-n}+2^{-\frac{n}{2}}\right)}{6\left(n^4+5n^3+1\right)^{\frac{1}{3}}+3\left(\mathrm{Ln}\left(n^5+e\right)\right)^{\frac{8}{7}}}$.

18) Calcula la suma de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(-1)^n}{4^{n-1}}$

19) Utiliza una serie geométrica para expresar el número $3.262626\ldots$ como una fracción.

20) Estudia el carácter de la serie cuyo término general es $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$ y calcula el valor de la suma de los primeros $N$ términos, es decir, $S_N$.

21) Estudia el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

22) Calcula el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

23) Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$.

24) Calcula el valor de las siguientes series utilizando polinomios de Taylor:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{(2n)!}$

# Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:


- *Problemas de Cálculo Infinitesimal*. E. Tébar Flores. Ed. Tébar.
- *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*. A. García et al. Ed. CLAGSA
- *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. D. Pestana et al. Ed. Ariel.