Endomorfismos Diagonalización y formas canónicas

TEMA 7

Mar Angulo Martínez

Curso 2021-2022

Tema 7. Endomorfismos. Diagonalización y formas canónicas

1. Autovalores y autovectores de un endomorfismo
2. Subespacios invariantes
3. Matrices diagonalizables
4. Matrices equivalentes, congruentes y semejantes
5. Aplicaciones reales.

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

- **Endomorfismo** es una aplicación lineal f:V $\longrightarrow$ V de un espacio vectorial en sí mismo
- La matriz asociada a un endomorfismo tiene dimensión nxn (si dim V = n)
- Endomorfismo biyectivo: es inyectivo y suprayectivo

- **Caracterización de los endomorfismos biyectivos**

Si f:V V es un endomorfismo y M es su matriz asociada; son equivalentes:

ker f ={0} dim (Imf)=n rang(M)=n detM$\neq$0

f inyectiva f suprayectiva f biyectiva

f transforma bases en bases 0 no es un autovalor

- Son endomorfismos biyectivos los giros, las simetrías y las homotecias

Matriz de cambio de base

Recuerda:

- *La matriz asociada a un endomorfismo es una matriz cuadrada* $M_B(f)$

Si f∈ $\mathcal{L}$(V), para todas las bases B y B´ de V se verifica:

$$M_{B'}(f) = M_{BB'}\, M_B(f)\, M_{B'B}$$

- *Como* $M_{BB'}$ y $M_{B'B}$ son matrices inversas: si las llamamos P^{-1} *y* P, *tenemos*

$$M_{B'}(f) = P^{-1} M_B(f)\, P$$

- *Las matrices asociadas a un endomorfismo en distintas bases son semejantes*

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

En particular, **cuando una de las bases es la base canónica:**

A: matriz de f en la base canónica — M: matriz de f en la base B

P: matriz de cambio de base: de la base B a la canónica

$$M = P^{-1}AP$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f"] & & V \\
\text{base canónica} \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & & \text{base canónica} \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
\text{base B} \arrow[rr, "M"] \arrow[u, shift right, "P"'] & & \text{base B} \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}$$

- Nota: utilizaremos siempre la misma base en el espacio de partida y en el de llegada

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

❑Matrices semejantes

- Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si están asociadas a un mismo endomorfismo, es decir si existe una matriz P cuadrada y regular P_{nxn} $tal\ que\ \ B = P^{-1}\text{AP}$ (P se denomina matriz de paso)

Matrices semejantes:

- ✓ representan al mismo endomorfismo en distintas bases
- ✓ tienen el mismo rango
- ✓ Tienen la misma traza
- ✓ Tienen el mismo determinante

Esto significa que rango, traza y determinante son invariantes para la semejanza de matrices: son en realidad propiedades o características del endomorfismo

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

Vamos a tratar de elegir la base en la que la matriz del endomorfismo sea lo más sencilla posible: diagonal

Dado f ¿existe siempre una base tal que $M_B(f)$ sea diagonal?

No!!!!

Dada A matriz cuadrada, ¿es siempre semejante a una matriz diagonal?

No!!!!

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

- Para que exista una base B = $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ de forma que $M_B(f)$ sea diagonal, los vectores de dicha base tienen que cumplir que

$$f(v_i) = \lambda_i v_i \qquad \lambda_i \in R \qquad 1 \le i \le n$$

- Si existe una base B cuyos vectores cumplen esta condición decimos que el endomorfismo f es diagonalizable

Se trata por tanto de encontrar las soluciones no triviales de la ecuación

$$f(v)=Av=\lambda v \Longleftrightarrow (A-\lambda I)v=0$$

Este sistema homogéneo tendrá solución no trivial cuando rang(A- λI)<n $\longleftrightarrow$ $|A-\lambda I|=0$

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- **Autovector (o vector propio) del endomorfismo f es un vector v no nulo que verifica f(v) = λv con** λ escalar;
- $\boldsymbol{\lambda}$ **es el autovalor (o valor propio) asociado a v**

✓ Un autovector es por tanto un vector no nulo tal que su imagen por f es múltiplo suyo

✓ Todos los autovectores asociados a un mismo autovalor λ forman un subespacio de V, que se denomina **subespacio propio (o invariante)asociado a** $\boldsymbol{\lambda}$, y se denota $S(\lambda)$

✓ $S(\lambda)$ es el conjunto de soluciones no triviales de la ecuación f(v)=Av= λv; es decir

$$S(\lambda) = \{v/(A-\lambda I)v=0\} = \ker(A-\lambda I)$$

✓ $|A-\lambda I| = P(\lambda)$ es un polinomio de grado n en λ: **polinomio característico** que sólo tendrá soluciones no triviales si $|A-\lambda I|=0$ (**ecuación característica** del endomorfismo)

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

❖ Ejemplo 1 Cálculo de autovalores y autovectores de un endomorfismo

$f: \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^3$ **es un endomorfismo cuya matriz en una base B es** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3}-\lambda & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}-\lambda \end{vmatrix} = (\mathbf{1}-\lambda)(\mathbf{3}-\lambda)(-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=1 λ_2=3 λ_3=0
- Calculamos ahora los subespacios propios (invariantes) y una base de autovectores asociada a cada autovalor:

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- S(1) = ker (A-I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=1.v}= {v$\in R^3$/(A-I)v=0}

  (A−I)v=0 $\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y+z=0; 2y+z=0; -z=0$

  S(1) ={(x,0,0)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (1,0,0)**

- S(3) = ker (A-3I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=3.v}= {v$\in R^3$/(A-3I)v=0}

  (A−3I)v=0 $\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -2x+\ y+z=z=0; -3z=0$

  S(1) ={(x,2x,0)/ x ∈R} dimS(3)=1 **Base de S(3): (1,2,0)**

- S(0) = ker (A-0I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=0.v}= {v$\in R^3$/(Av=0}

  (A−0I)v=0 $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x+y+z=0;\ 3y+z=0$

  S(1) ={(2y,y,-3y)/ x ∈R} dimS(0)=1 **Base de S(0): (2,1,-3)**

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- Los tres autovectores v_1=(1,0,0) $\in S(1)$, v_2=(1,2,0) $\in S(3)$ y v_3=(2,1,-3) $\in S(0)$ forman una base B
- La matriz asociada al endomorfismo f respecto a esa base B de autovectores es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son precisamente los autovalores del endomorfismo

$$D = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Tanto el endomorfismo f como la matriz A se dicen diagonalizables
- Vemos cuál es la relación entre A y D

$$\boxed{D = P^{-1} A P}$$

$$\begin{tikzcd} R^3{}_{B_c} \arrow[r, "A"] & R^3{}_{B_c} \arrow[d, "P^{-1}"] \\ R^3{}_B \arrow[u, "P"] \arrow[r, "D"] & R^3{}_B \end{tikzcd}$$

P es la matriz de cambio de base (tiene en sus columnas los autovectores

$P = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B_c}}(v_1 | v_2 | v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- ❑ Un **endomorfismo** f es **diagonalizable** si existe una base B de vectores de V tal que M_B(f) es diagonal

- ❑ Una **matriz** cuadrada A es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existe una matriz regular P tal que P^{-1}AP=D

- Una matriz cuadrada A es diagonalizable si y sólo si el endomorfismo cuya matriz en cierta base es A, es diagonalizable

Endomorfismos y matrices diagonalizables

Si la base de partida es la base canónica:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] & V \\
\mathit{Base\ can\acute{o}nica} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & \mathit{Base\ can\acute{o}nica} \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
\mathit{base\ B} \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[r, "D"] & \mathit{baseB} \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{D = P^{-1}AP}$$

P es la matriz de cambio de la base B a la base canónica: sus columnas son las coordenadas de los vectores de B expresados en la base canónica $P = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B_c}}(v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3)$

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- Diagonalizar un endomorfismo es encontrar una base B en la que la matriz asociada al endomorfismo sea diagonal: B es una base de formada por autovectores de f
- Los elementos diagonales de D son los autovalores de f

¿Es posible siempre formar una base de autovectores de f?

¿Es posible siempre diagonalizar la matriz de un endomorfismo?

NO

Endomorfismos y matrices diagonalizables

❖ Ejemplo 2 Un endomorfismo no siempre es diagonalizable

$$f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3 \text{ tal que } A_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

No va a ser posible encontrar una base de autovectores, por tanto f no es diagonalizable

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) = |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$$

- Autovalores: λ_1=1 con multiplicidad 2 λ_2=-1 con multiplicidad 1
- Tratamos ahora de conformar una base de autovectores:
- S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=1.v}= {v∈ R^3/(A-I)v=0}

(A−I)v=0 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $y = 0;\ -2z = 0;$

S(1) ={(x,0,0)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (1,0,0)**

- S(-1) = ker (A-3I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=(-1).v}= {v∈ R^3/(A+I)v=0}

(A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x + y = 0;\ 2y = 0$

S(1) ={(0,0,z)/ z ∈R} dimS(-1)=1 **Base de S(-1): (0,0,1)**

¿Dónde está el problema?

λ_1=1 tiene multiplicidad 2 Pero dimS(1)=1 Para que f fuese diagonalizable la dimensión de cada subespacio propio tendrá que coincidir con la multiplicidad algebraica del autovalor

Recuerda:

- A es diagonalizable si existe una base en la cual M_B(f) es diagonal
  - Los elementos diagonales de D son los autovalores de f :

    $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$
  - La base B es una base de autovectores de f asociados a esos autovalores: $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$
  - La matriz P es la que tiene en sus columnas los autovectores de B

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- ¿Y cuándo es posible encontrar una base en la que el endomorfismo f se represente mediante una matriz diagonal?

- ¿En qué condiciones podemos asegurar la existencia de dicha base?

Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor

Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r\}$ son autovalores distintos de un endomorfismo f de V (dimV=n)

- La **multiplicidad algebraica** del valor propio λ_i es la multiplicidad de dicho valor como raíz del polinomio característico. Se denota a_i

- La **multiplicidad geométrica** del valor propio λ_i es la dimensión del subespacio propio S(λ_i). Se denota g_i.

$$g_i = \dim S(\lambda_i) = n - \text{rang}(A - \lambda_i I)$$

Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor

Nota

- $S(\lambda_i)$ es el subespacio solución de un sistema compatible indeterminado
  $(A-\lambda_i I)X=0$ por tanto g_i=dim $S(\lambda_i)$ =n- rang $(A-\lambda_i I)$.

Así que

1) dim $S(\lambda_i)>0$
2) $1\leq$ dim $S(\lambda_i) \leq a_i$ (exponente con el que aparece el factor x- λ_i)

Por tanto, si un autovalor tiene multiplicidad algebraica 1, dim $S(\lambda)$ =1

Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor

❑ Proposición

La multiplicidad algebraica de un autovalor siempre es mayor o igual que su multiplicidad geométrica $a_i \geq g_i$

¿Cuál era el problema en el ejemplo 2?

$El\ autovalor\ \lambda_1$=1 tiene multiplicidad algebraica 2 pero multiplicidad geométrica 1 (dimS(1)=1)

$$Como \sum g_i = \sum \dim S(\lambda_i) < n$$

no se podía completar una base de autovectores

Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor

❑ Teorema. Caracterización de endomorfismos diagonalizables

Si f es un endomorfismo en V y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ son los autovalores distintos de f con multiplicidades algebraicas $a_1, a_2, \ldots a_k$ y geométricas $g_1, g_2, \ldots g_k$ respectivamente, Entonces,

f es diagonalizable si y sólo si se cumplen:

1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ La suma de todas las multiplicidades algebraicas es n
2) $a_i = g_i \; i = 1 \ldots k$ Las multiplicidades algebraica y geométrica de cada λ_i coinciden

A es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ dim S(λ_1)+ ….+ dim S(λ_k)=n

Endomorfismos y matrices diagonalizables

Volvamos al ejemplo 2…

Autovalores: λ_1=1 con multiplicidad 2: a_1=2
λ_2=-1 con multiplicidad 1 a_2=1

Por tanto a_1+ a_2=3

Pero g_1=dim S$(\lambda_1) = 1 < a_1$

Por tanto f no es diagonalizable

❑ Corolario

Si un endomorfismo f de un espacio vectorial sobre K de dimensión n tiene n autovalores distintos, entonces f es diagonalizable.

Endomorfismos y matrices diagonalizables

❖ **Ejemplo 3 ¿Para qué valores de "a" son los endomorfismos f_a diagonalizables?**

- $f_a: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ f_a**(x,y,z,t)= (ax, (a-1)x+y, (a-1)x+(1-a)y+az+(1-a)t, t)**
- $\boldsymbol{M}_{B_c}(f_a) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1-a} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$
- **Calculamos el polinomio característico:** $|M - \lambda I| = 0$
- $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a-\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} & \boldsymbol{a-\lambda} & \boldsymbol{1-a} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1-\lambda} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\boldsymbol{a}-\lambda) \begin{vmatrix} \boldsymbol{1-\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1-a} & \boldsymbol{a-\lambda} & \boldsymbol{1-a} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1-\lambda} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a}-\lambda)^2 (1-\lambda)^2$

Tenemos por tanto 2 casos:

- Si a$\neq$ 1: f_a tiene dos autovalores λ_1=a con multiplic. a_1=2 y λ_2=1 con multiplic. a_2=2
- Si a$=$ 1: f_a tiene un solo autovalor λ_1=1 con multiplic. a_1=4
-

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- Caso 1: a$\neq$ 1 λ_1=a con multiplic. a_1=2 y λ_2=1 con multiplic. a_2=2
- Vemos cuáles son las dimensiones de los subespacios propios asociados a cada uno de los autovalores:
- dim S(a) = dim ker (f_a-aI)=4- rang (M- aI)=4- rang $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} & \mathbf{0} & \boldsymbol{1-a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{1-a} \end{pmatrix}$=2
- dim S(1)=dim ker (f_a-I)=4- rang (M- I)=4- rang $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} & \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$=2

- ***Por tanto a_1= g_1 y también a_2= g_2 y además a_1+ a_2=4, es decir las dimensiones de cada subespacio propio coinciden con las multiplicidades algebraicas de sus respectivos autovalores asociados: por tanto en este caso $f_a$es diagonalizable***

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- Caso 2: a= 1 λ_2=1 con multiplic. a_2=4

- Vemos cuáles son las dimensiones de los subespacios propios asociados a ese autovalor

- dim S(1)=dim ker (f_a-I)=4- rang (M- I)=4- rang $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ =4

- ***Por tanto*** $\boldsymbol{a_1}$***=*** $\boldsymbol{g_1}$ ***y también la dimensión del único subespacio propio coincide con la multiplicidad del autovalor asociado: por tanto en este caso*** $\boldsymbol{f_a}$ ***también es diagonalizable***

Procedimiento de diagonalización

- Obtener el polinomio característico $|A-\lambda I|=0$ y calcular los autovalores (sus raíces)
- Para cada autovalor λ, calcular la dimensión del subespacio propio $S(\lambda)$
- Si algún autovalor no verifica que dim $S(\lambda)$= multiplic. algebraica de λ, f no diagonalizable
- Si $\sum \dim S(\lambda)$=n, el endomorfismo es diagonalizable. En caso contrario, no lo es.

Si f es diagonalizable…

- Resolver, para cada autovalor, el sistema $(A-\lambda I)X=0$ y obtener así una base de cada $S(\lambda)$
- Uniendo esas bases obtenemos una base de autovectores del espacio vectorial
- La matriz P es la que tiene en sus columnas los vectores propios
- La matriz diagonal D es la que tiene en su diagonal los valores propios repetidos tantas veces como indique su multiplicidad
- Se puede comprobar que $P^{-1}AP = D$

Cómo saber que f NO es diagonalizable…

cuando las raíces del polinomio característico no pertenecen al cuerpo K en el que trabajamos

Cuando dim $S(\lambda)$ es menor que la multiplicidad algebraica del valor λ

Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

¿Cuál es el significado real de esta expresión?

- *f(v)=Av* es una transformación lineal; puede ser un giro o un estiramiento.
- *f(v)=Av=* λ*v* es un estiramiento
- La importancia de esto es ver claramente en qué aspectos una matriz puede producir el mayor efecto (potencia), y clasificar y discutir e investigar de acuerdo a cada vector propio generado (generalmente se estudian los que tienen los valores propios más grandes).
- Cuando la matriz tiene una dimensión grande, n, esa transformación puede tener muchas direcciones de transformación.
- Se trata de investigar cuáles son las direcciones cambiantes más importantes de una matriz (los nodos con mayor influencia de un grafo)
    - Los autovectores nos proporcionan las características más importantes de la matriz
    - Los autovalores nos dan una medida de la importancia de esas características.

$$f(v)=Av=\lambda v$$

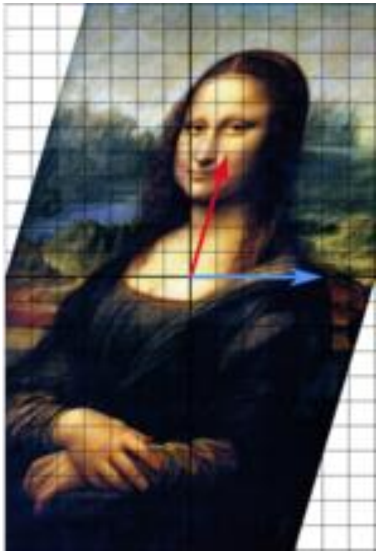
Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

- ***Principal Component Analysis (PCA)*** es un método estadístico que permite simplificar la complejidad de problemas con muchas dimensiones a la vez que conserva su información (Reducción de dimensionalidad).
  - PCA permite encontrar un número de factores subyacentes que explican una parte importante de la variabilidad observada en los datos originales.
  - Principal Component Analysis es una técnica de tipo “unsupervised learning” :el objetivo no es predecir YY sino extraer información empleando los predictores, por ejemplo, para identificar subgrupos.
  - El método de PCA permite por lo tanto “condensar” la información aportada por múltiples variables en solo unas pocas componentes. Esto lo convierte en un método muy útil de aplicar previa utilización de otras técnicas estadísticas tales como

- ***Interpretación geométrica del PCA***
  - El vector que define la primera componente principal (Z1Z1) sigue la dirección en la que las observaciones varían más La proyección de cada observación sobre esa dirección equivale al valor de la primera componente para dicha observación. La proyección de cada observación sobre esa dirección equivale al valor de la primera componente para dicha observación.
  - La segunda componente sigue la segunda dirección en la que los datos muestran mayor varianza y que no está correlacionada con la primera. La condición de no correlación entre componentes principales equivale a decir que sus direcciones son perpendiculares/ortogonales.
  - Cada componente principal se obtiene por combinación lineal de las variables originales.

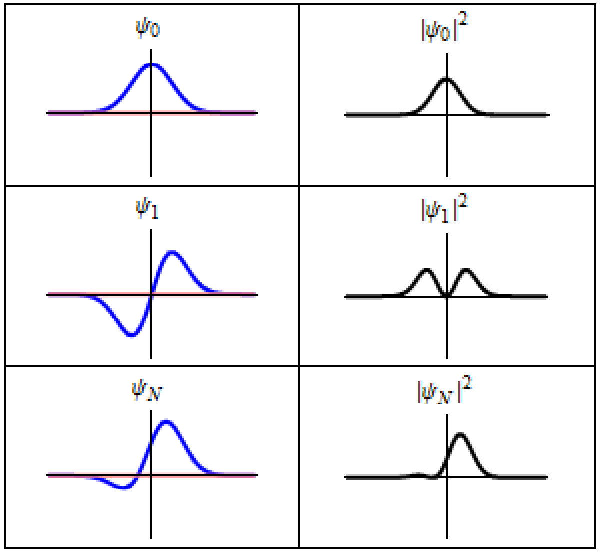
Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

- Cada punto del cuadro se representa mediante un vector de posición
- La transformación lineal aquí se llama shear mapping..
- A base de transformaciones lineales se pueden obtener modificaciones de la imagen mapeando vectores en una variedad de espacios.



Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

- ***Ecuación de Schrödinger***
  - Cuando el operador Hamiltoniano actúa sobre cierta función de onda Ψ, y el resultado es proporcional a la misma función de onda Ψ, entonces Ψ es un estado estacionario, y la constante de proporcionalidad, el autovalor, es la energía del estado Ψ.



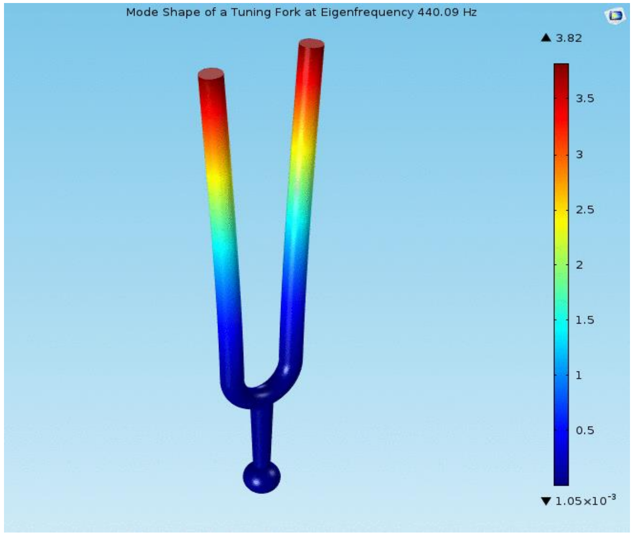
- ***Molecular orbitals***

En mecánica cuántica y en particular en la física atómica y molecular, eigenvalues y eigenvectors aparecen en la teoría de Hartree-Fock .
Los autovalores serían los potenciales de ionización (teorema de Koopman) y los autovectores los orbitales moleculares

Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

- ***Análisis vibratorio en estructuras mecánicas*** con un gran número de grados de libertad.

- Los autovalores son las frecuencias de vibración y los autovectores las formas.
- Movimiento sin amortiguación:
  mx´´=-kx aceleración proporcional a la posición
- Al estudiar el problema en n dimensiones m es una matriz de masa y k una matriz de rigidez:
  Las soluciones se obtienen a partir de autovalores y autovectores



Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

- ***Eigenfaces/Eigenvoices***
  - En procesamiento de imágenes, el número de pixels sería la dimensión del subespacio vectorial
  - Es una aplicación de PCA que tiene muchas aplicaciones en reconocimiento e identificación facial.
  - De modo similar las “eigenvoices” representan una dirección de variabilidad en la pronunciación de una determinada persona.
  - A partir de combinaciones lineales de una serie de eigenvoices, podemos obtener/construir una nueva voz.