

# Lógica y Matemática Discreta

## Hoja 2

### Conjuntos

**Ejercicio 1.** Sean  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{0, 2, 3, 4\}$ , y  $C = \{0, 3, 6, 9\}$  tres subconjuntos de  $U = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$ .

- a) Calcular  $A \cup B \cup C$  y su complementario.
- b) Calcular  $A \cap B \cap C$  y su complementario.
- c) Representar mediante tiras de bits:  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A^C$ ,  $A \cap B^C$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres conjuntos. Demostrar que

$$(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$$

**Ejercicio 3.** Dados los subconjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  del conjunto  $U$ , cuyo cardinal es  $N$ , determinar el número de elementos que no pertenecen a ninguno de estos conjuntos. Para ello, se sabe que un tercio de los elementos de  $U$  pertenecen a  $A$ , un tercio a  $B$ , y un tercio a  $C$ . Además, un quinto pertenece a cada uno de los pares y un décimo a los tres a la vez. ¿Cuántos elementos hay en  $A - (B \cup C)$ ?

**Ejercicio 4.** ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1000 no son divisibles ni por 3, ni por 7, ni por 11?

**Ejercicio 5.** De una muestra de 100 pacientes recogida en un centro de salud, 74 padecen **artritis**, 17 **fibromialgia** y 25 **osteoporosis**. Además, 4 pacientes padecen las tres enfermedades. Sabiendo que todos los pacientes sufren alguna enfermedad, ¿cuántos padecen dos enfermedades?

**Ejercicio 6.** De un grupo de 100 estudiantes matriculados en los últimos cursos de ingeniería que trabajan en ninguna, una o varias de las empresas ITM, Telecónica y Unión Penosa, se tienen los siguientes datos: 50 trabajan en ITM, 40 en Telecónica y 45 en Unión Penosa. Además, 20 trabajan en ITM y en Telecónica, 20 en ITM y Unión Penosa, 15 en Telecónica y Unión Penosa, y 5 en las tres.

- a) ¿Cuántos estudiantes no trabajan?
- b) ¿Cuántos trabajan solo en ITM?
- c) ¿Cuántos trabajan solo en Unión Penosa?
- d) ¿Cuántos no trabajan ni en ITM ni en Unión Penosa?
- e) De los estudiantes que trabajan en ITM o Telecónica, ¿cuántos no trabajan en Unión Penosa?

**Ejercicio 7.** En una encuesta realizada a 150 personas sobre sus preferencias de tres productos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se obtuvieron los siguientes resultados:

- (i) 82 personas consumen el producto  $A$ .
- (ii) 54 personas consumen el producto  $B$ .

- (iii) 50 personas consumen solo el producto  $A$  y 30 personas consumen solo el producto  $B$ .
- (iv) El número de personas que consumen solo  $B$  y  $C$  es la mitad del número de personas que consumen solo  $A$  y  $C$ .
- (v) El número de personas que consumen solo  $A$  y  $B$  es el triple del número de los que consumen los tres productos.
- (v) Hay tantas personas que no consumen los productos mencionados como los que consumen solo  $C$ .

Calcular:

- a) Número de personas que consumen solo dos de los productos.
- b) Número de personas que no consumen ninguno de los tres productos.
- c) Número de personas que consumen al menos uno de los tres productos.

**Ejercicio 8.** Demostrar que, si  $C = (A - B) \cup (B - A)$ , entonces  $(A - C) \cup (C - A) = B$

**Ejercicio 9.** Determinar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Justificarlo:

- a) Si  $P$  es un elemento de  $Q$  y  $Q$  es un subconjunto de  $R$ , entonces  $P$  es un elemento de  $R$ .
- b) Si  $P$  es un elemento de  $Q$  y  $Q$  es un subconjunto de  $R$ , entonces  $Q$  es un subconjunto de  $R$ .
- c) Si  $P$  es un subconjunto de  $Q$  y  $Q$  es un elemento de  $R$ , entonces  $P$  es un elemento de  $R$ .
- d) Si  $P$  es un subconjunto de  $Q$  y  $Q$  es un elemento de  $R$ , entonces  $Q$  es un subconjunto de  $R$ .

**Ejercicio 10.** Dado  $X = \{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{2\}\}$ , determinar si son subconjunto, elemento, ambos o ninguno, de  $X$ , los siguientes objetos:

- a) 0.
- b)  $\{0, 1\}$ .
- c)  $\{0, \{2\}\}$ .
- d)  $\{2\}$ .
- e)  $\{\{0, 1, 2\}\}$ .
- f)  $\{\{0, 1\}, \{2\}\}$ .
- g)  $\{0, 1, 2\}$ .
- h) 2.

**Ejercicio 11.** ¿Qué se puede decir de dos conjuntos  $X$  e  $Y$  tales que  $X - Y = Y - X$ ?

**Ejercicio 12.** ¿Qué se puede decir de dos conjuntos  $X$  e  $Y$  tales que  $X \cup Y = X \cap Y$ ?

**Ejercicio 13.** La diferencia simétrica de dos conjuntos  $X, Y$  se define como

$$X \Delta Y = (X \cap Y^C) \cup (X^C \cap Y)$$

Sean  $X, Y, Z$  tres conjuntos en un universo  $U$ . Demostrar:

- (i)  $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ .
- (ii)  $(X \Delta Y) \Delta (Z - Y) = X \Delta (Y \cup Z)$ .

**Ejercicio 14.** Demostrar que la suma de los  $n$  primeros impares es  $n^2$ .

**Ejercicio 15.** Demostrar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n^3 - n$  es múltiplo de 3.

**Ejercicio 16.** Demostrar que  $\forall n \geq 1$ ,  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ .

**Ejercicio 17.** Demostrar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $4^{2n+1} + 3^{n+2}$  es múltiplo de 13.

**Ejercicio 18.** Demostrar que  $\forall n \geq 2$ ,  $n + 1 < 2^n$ .

**Ejercicio 19.** Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  de forma que  $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ . Calcular  $f \circ \dots \circ f$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 20.** Demostrar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n^3 + 5n$  es múltiplo de 6.

**Ejercicio 21.** Demostrar que  $\forall n > 6$ ,  $3^n < n!$

**Ejercicio 22.** Demostrar que  $\forall n \geq 10$ ,  $n^3 < 2^n$ .

**Ejercicio 23.**  $\forall n \in \mathbb{N}$ , sea  $P_1(n)$  la proposición  $n^2 + n + 11$  es primo, y sea  $P_2(n)$  la proposición  $3n + 2$  es múltiplo de 3.

- a)  $P_1(1), P_1(2), \dots, P_1(9)$  son ciertas. ¿Es  $P_1(n)$  cierto  $\forall n$ ?
- b)  $P_2(k)$  implica  $P_2(k+1)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . ¿Es  $P_2(n)$  cierto  $\forall n$ ?

**Ejercicio 24.** Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

**Ejercicio 25.** Demostrar que  $10^n + 1$  es múltiplo de 11 para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  impar.

**Ejercicio 26.** Es trivial que todo número natural expresado en binario puede escribirse en notación decimal. Demostrar el recíproco.

**Ejercicio 27.** Encontrar la representación binaria de:

- a) 13.
- b) 101.
- c) 12,141.
- d)  $\frac{1}{3}$ .

**Ejercicio 28.** Encontrar la representación decimal de:

- a) 101.
- b) 11100101.
- c) 11,0111
- d) 100,101

**Ejercicio 29.** Calcular el complemento a dos de los siguientes números binarios.

- a) 001100.
- b) 01101.
- c) 10101.
- d) 00101.