Cálculo

Tema 1

Conceptos básicos de números y funciones reales

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2023-2024

Versión: 1.1

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Clasificación de los números

1.1 Números naturales

Los **números naturales** son los números que se usan para contar los elementos de los conjuntos finitos. Habitualmente no se incluye el número 0 en los números naturales, aunque en la práctica esta cuestión depende de cada autor.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$$

Se define **número primo** como aquel número natural que solo es divisible de forma exacta por 1 y por sí mismo. Cualquier número no primo es un **número compuesto**.

Si el máximo común divisor de dos números es 1, ello significa que dichos números no tienen factores comunes distintos de 1 y por lo tanto son **primos relativos** o **coprimos**.

1.2 Números enteros

El conjunto de los **números enteros** está formado por los números naturales, sus negativos y el 0.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

A los números $1, 2, 3 \dots$ se les suele llamar enteros positivos, mientras que se denominan enteros negativos a los números $-1, -2, -3 \dots$

El **teorema fundamental de la aritmética** (también llamado teorema de factorización única) afirma que todo entero positivo se puede representar de forma única como producto de factores primos. Es decir, todo número entero $n \geq 2$ admite la factorización

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

donde p_i son primos distintos y e_i son enteros positivos. Esta factorización es única, si no se tiene en cuenta la posible reordenación de elementos. La factorización se dice que es canónica si se cumple que $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$.

1.3 Números racionales

Los **números racionales** son aquellos que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros, llamados numerador y denominador, donde el entero del denominador debe ser distinto de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d} \quad \middle| \quad n, d \in \mathbb{Z}, \quad d \neq 0 \right\}$$

A los números racionales habitualmente se les conoce como fracciones. Un mismo número racional se puede escribir de múltiples formas, generando fracciones equivalentes. La fracción que no se puede simplificar se denomina fracción irreducible o canónica.

La expresión decimal de un número racional es la forma decimal que se obtiene al dividir el numerador por el denominador. En función de la expresión decimal, se pueden dividir las fracciones en tres grupos:

- Fracción exacta: en la división aparece un resto parcial nulo, por lo que el número de decimales es finito (por ejemplo, $1/2 = 0.5$ o $3/4 = 0.75$).
- Fracción periódica pura: las cifras inmediatamente después de la coma se repiten en bloques iguales formados por uno o más dígitos (por ejemplo, $1/3 = 0.3333\ldots$ o $4/11 = 0.363636\ldots$).
- Fracción periódica mixta: las cifras después de la coma se repiten en bloques iguales formados por uno o más dígitos, pero no inmediatamente después de la coma (por ejemplo, $1/6 = 0.1666\ldots$ o $45/22 = 2.04545\ldots$).

A continuación se resumen algunas de las propiedades más importantes de los números racionales:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{c\,d}$$

$$\frac{a}{c}\,\frac{b}{d} = \frac{a\,b}{c\,d} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \qquad \frac{a\,c}{b\,c} = \frac{a}{b} \quad \text{si } b, c \neq 0$$

$$\frac{0}{a} = \frac{0}{b} = 0 \quad \text{si } a, b \neq 0 \qquad \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = 1 \quad \text{si } a, b \neq 0$$

$$k\,\frac{a}{b} = \frac{k\,a}{b} \qquad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\,\sqrt{b}}{b}$$

1.4 Números irracionales

Los **números irracionales** son todos aquellos números que no pueden escribirse como un número racional de la forma m/n, con $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$. Algunos ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}, \pi, e$, etc. En la expresión decimal de los números irracionales, las cifras después de la coma se expanden sin llegar a repetirse periódicamente.

1.5 Números reales

El conjunto de los **números reales** incluye todos los tipos de números mencionados anteriormente (naturales, enteros, racionales e irracionales). Expresado de otra forma, se puede afirmar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

En la recta real todos los números están ordenados de menor a mayor. Además, dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, siempre existe otro número $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$, y por ello se dice que el conjunto de los números reales es denso. Como consecuencia, dado un número real (y lo mismo ocurre con los números racionales), no existe el concepto de siguiente ni de anterior, algo que sin embargo sí tiene sentido tanto en $\mathbb{N}$ como en $\mathbb{Z}$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, los intervalos son subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se definen de la siguiente manera:

- Intervalo abierto: $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$
- Intervalo cerrado: $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$

Unos intervalos muy habituales son los siguientes:

$$(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \} \qquad (a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$$
$$(-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \} \qquad [a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$$

1.6 Resumen

Como resumen de los conceptos presentados en los apartados anteriores, la siguiente figura muestra de manera gráfica la relación entre los distintos tipos de números.

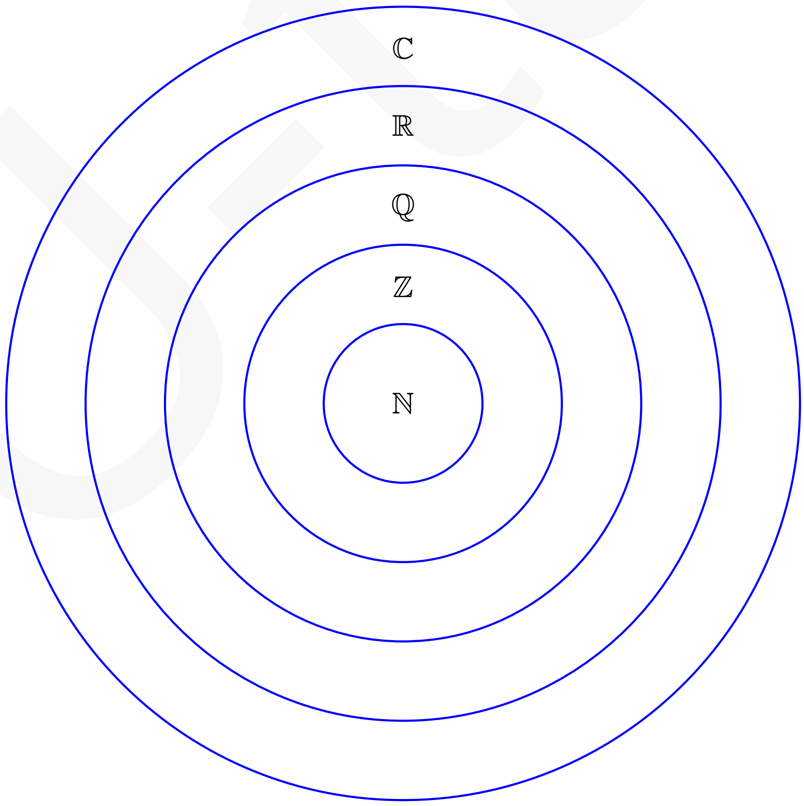

Figura 1: Clasificación de los números.

2 Operaciones

2.1 Potencias

Elevar un número $a \in \mathbb{R}$ a la **potencia** $n \in \mathbb{N}$ es lo mismo que multiplicar el número a por sí mismo tantas veces como indique n. Por ejemplo, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. En la expresión a^n, a es la **base** y n el **exponente**.

Este concepto, presentado para exponentes positivos, se puede generalizar para poder utilizar exponentes negativos: si $n \in \mathbb{N}$, la expresión a^{-n} representa el inverso multiplicativo de a^n. Es decir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

A continuación se resumen algunas de las propiedades más importantes de las potencias. Todas las fórmulas que se incluyen son ciertas si $a > 0$ y $b, c \in \mathbb{Q}$. En los casos en que $a < 0$, pueden aparecer resultados inesperados si en los cálculos se utilizan únicamente números reales.

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad \left(a^b\right)^c = a^{bc} \qquad a^0 = 1 \qquad \frac{a^b}{a^c} = a^b \cdot a^{-c} = a^{b-c} \qquad (a\,b)^c = a^c\,b^c$$

El concepto de raíz (desarrollado en el siguiente apartado) se puede expresar también mediante potencias. Si $a \in \mathbb{R}$, donde $a > 0$, y $p, q \in \mathbb{Z}$ forman una fracción, entonces:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

2.2 Raíces

A partir de la definición de potencia, la **raíz n-ésima** del número real a se define mediante la siguiente equivalencia, donde el número natural n se denomina **índice** de la raíz, y el elemento a **radicando**.

$$b = \sqrt[n]{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b^n$$

Cuando $n = 2$ se habla de raíces cuadradas, mientras que si $n = 3$ nos encontramos en el caso de raíces cúbicas. Aunque es cierto que, por ejemplo, hay dos números reales cuyo cuadrado es 4 (2 y -2), el símbolo usual de raíz cuadrada siempre denota la raíz positiva.

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \longleftrightarrow \qquad \sqrt{4} \cancel{=} -2$$

La confusión procede de la forma en que se resuelven algunas ecuaciones de segundo grado como por ejemplo las del tipo $x^2 = a$, donde $a \in \mathbb{N}$. Respecto a esta ecuación, aunque es habitual ver escrito $x = \pm\sqrt{a}$, lo realmente correcto es decir que las dos soluciones de la ecuación son $x = +\sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$.

$$x^2 = a \implies \sqrt{x^2} = \sqrt{a} \implies |x| = \sqrt{a} \implies x = +\sqrt{a} \text{ y } x = -\sqrt{a}$$

Cuando multiplicamos dos o más raíces que tienen el mismo índice, podemos multiplicar entre sí los radicandos.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}$$

Por otra parte, si las raíces tienen índices distintos, hay que convertirlas antes en raíces equivalentes utilizando el mínimo común múltiplo de todos los índices involucrados.

2.3 Logaritmos

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces se define el **logaritmo** de la siguiente manera, donde el elemento a constituye la **base** del logaritmo:

$$\log_a(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x$$

Si x e y son números positivos, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$\log_a(x\,y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \log_a\left(x^r\right) = r \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a\left(a^x\right) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad a^{\log_a(x)} = x \quad \forall x > 0$$

Se denomina **logaritmo común** o **decimal** a aquel logaritmo cuya base es el número 10. Se suele denotar como $\log_{10} x$ o como $\log x$, aunque esta última notación es un tanto ambigua.

Si la base es el número e, entonces al logaritmo se le denomina **logaritmo natural** o **neperiano**.

$$\log_e x = \mathrm{Ln}(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x$$

$$\mathrm{Ln}\left(e^x\right) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad e^{\mathrm{Ln}(x)} = x \quad \forall x > 0$$

Si la base es el número 2, entonces al logaritmo se le conoce como logaritmo binario o en base 2. El logaritmo binario de un número natural n permite calcular el número de bits necesarios para representar el rango $[0, 1, \ldots, n-1]$. La siguiente expresión permite calcular el logaritmo binario a partir del logaritmo neperiano y del logaritmo natural.

$$\log_2 x = \frac{\mathrm{Ln}(x)}{\mathrm{Ln}(2)} = \frac{\log(x)}{\log(2)} \qquad \mathit{num\_bits}(x) = \lceil \log_2(x+1) \rceil$$

2.4 Valor absoluto

Formalmente, el **valor absoluto** de todo número $x \in \mathbb{R}$ está definido por la siguiente expresión:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

De manera alternativa, es posible definir el valor absoluto de un valor $x \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Algunas propiedades útiles del valor absoluto son:

- $|x| \leq c \quad (\text{con } c > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad -c \leq x \leq c$
- $|x| \geq c \quad (\text{con } c > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq c \text{ o bien } x \leq -c$
- $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

3 Inecuaciones

3.1 Definición y operaciones básicas

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones en la que aparecen una o varias incógnitas, y en la que en lugar del símbolo de igualdad ($=$) se encuentra presente uno de los símbolos que representan una desigualdad ($<, \leq, >, \geq$). Algunos ejemplos de inecuaciones son:

$$x + 3 > 5 \qquad x^2 - 1 \leq 5x \qquad \frac{x}{x^2+1} \geq 0 \qquad xy < 0$$

Las propiedades que cumplen las inecuaciones (y que se detallan en los siguientes apartados) son las mismas independientemente de cuál sea el símbolo de desigualdad en uso.

3.1.1 Suma de un número real (positivo o negativo)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a > b$ y se le suma un número $c \in \mathbb{R}$ (positivo o negativo), entonces $a + c > b + c$.

Ejemplo 1

Si $5 > 2$ y sumamos el valor $c = 3$, entonces $5 + 3 > 2 + 3 \implies 8 > 5$.

Igualmente, si $5 > 2$ y sumamos el valor $c = -3$, entonces $5 + (-3) > 2 + (-3) \implies 2 > -1$.

De forma similar, si $f(x), g(x)$ son funciones reales de variable real donde $f(x) > g(x)$ y se le suma un número $c \in \mathbb{R}$ (positivo o negativo), entonces $f(x) + c > g(x) + c$.

Ejemplo 2

Si $x + 2 > 3$ y sumamos el valor $c = 4$, entonces $x + 2 + 4 > 3 + 4 \implies x + 6 > 7$.

Igualmente, si tenemos la expresión $x + 2 > 3$ y le sumamos el valor $c = -4$, entonces $x + 2 + (-4) > 3 + (-4) \implies x - 2 > -1$.

3.1.2 Multiplicación por un número positivo

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a > b$ y se le multiplica por un número $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

Ejemplo 3

Si $5 > 2$ y multiplicamos por el valor $c = 3$, entonces $5 \cdot 3 > 2 \cdot 3 \implies 15 > 6$.

De forma similar, si $f(x), g(x)$ son funciones reales de variable real donde $f(x) > g(x)$ y se multiplica por un número número $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $c \cdot f(x) > c \cdot g(x)$.

Ejemplo 4

Si $x+2 > 3$ y multiplicamos por el valor $c = 4$, entonces la expresión resultante es $4\cdot(x+2) > 4 \cdot 3 \implies 4x+8 > 12$.

3.1.3 Multiplicación por un número negativo

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a > b$ y se le multiplica un número $c \in \mathbb{R}^-$, entonces es importante resaltar que cambia el símbolo de la desigualdad, resultando la expresión $a \cdot c < b \cdot c$.

Ejemplo 5

Si $5 > 2$ y multiplicamos por el valor $c = -3$, entonces cambia el signo de la desigualdad obteniendo la expresión $5 \cdot (-3) < 2 \cdot (-3) \implies -15 < -6$.

De forma similar, si $f(x), g(x)$ son funciones reales de variable real donde $f(x) > g(x)$ y se multiplica por un número número $c \in \mathbb{R}^-$, entonces cambia del símbolo de la desigualdad, resultando la expresión $c \cdot f(x) < c \cdot g(x)$.

Ejemplo 6

Si $x+2 > 3$ y multiplicamos por el valor $c = -4$, entonces la expresión resultante sería $(-4) \cdot (x+2) < (-4) \cdot 3 \implies -4x-8 < -12$.

3.1.4 División por un número positivo

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a > b$ y se le divide por un número $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Ejemplo 7

Si $5 > 2$ y dividimos por el valor $c = 3$, entonces $\frac{5}{3} > \frac{2}{3}$.

De forma similar, si $f(x), g(x)$ son funciones reales de variable real donde $f(x) > g(x)$ y se divide por un número número $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $\frac{f(x)}{c} > \frac{g(x)}{c}$.

Ejemplo 8

Si $x+2 > 3$ y dividimos por el valor $c = 4$, entonces la expresión resultante es $\frac{(x+2)}{4} > \frac{3}{4}$.

3.1.5 División por un número negativo

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a > b$ y se le divide por un número $c \in \mathbb{R}^-$, entonces es importante resaltar que cambia el símbolo de la desigualdad, resultando la expresión $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Ejemplo 9

Si $5 > 2$ y dividimos por el valor $c = -3$, entonces cambia el signo de la desigualdad obteniendo la expresión $\frac{5}{(-3)} < \frac{2}{(-3)}$.

De forma similar, si $f(x), g(x)$ son funciones reales de variable real donde $f(x) > g(x)$ y se divide por un número número $c \in \mathbb{R}^-$, entonces debido a ello cambia el símbolo de la desigualdad, resultando $\frac{f(x)}{c} < \frac{g(x)}{c}$.

Ejemplo 10

Si $x+2 > 3$ y dividimos por el valor $c = -4$, entonces el resultado es $\frac{(x+2)}{(-4)} < \frac{3}{(-4)}$.

3.2 Tipos de inecuaciones

3.2.1 Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Una inecuación de primer grado es una expresión de la forma

$$ax+b<0 \qquad ax+b>0 \qquad ax+b\leq 0 \qquad ax+b\geq 0$$

donde $a \neq 0$. Estas inecuaciones se resuelven despejando la incógnita x.

Ejemplo 11

Si la inecuación $4x-3 \geq 6-3x$ equivale a $4x+3x \geq 6+3$, que a su vez equivale a $7x \geq 9$ y a $x \geq 9/7$.

3.2.2 Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Una inecuación de segundo grado es una expresión de la forma

$$ax^2+bx+c<0 \qquad ax^2+bx+c>0 \qquad ax^2+bx+c\leq 0 \qquad ax^2+bx+c\geq 0$$

donde $a \neq 0$.

Para resolver una inecuación de segundo grado se deben calcular las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Si $x=\alpha_1$ y $x=\alpha_2$ son las soluciones reales y se cumple que $\alpha_1 < \alpha_2$, entonces se determinan 3 intervalos en la recta real, en concreto $(-\infty, \alpha_1)$, (α_1, α_2) y $(\alpha_2, +\infty)$. Además de estos intervalos, dependiendo de si en la inecuación aparece una desigualdad estricta o no, será necesario estudiar el comportamiento en los puntos $x=\alpha_1$ y $x=\alpha_2$. Finalmente se comprueba cuáles de los anteriores intervalos y puntos son solución de la inecuación.

Ejemplo 12

Para resolver la inecuación $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ hay que determinar las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, que son $x = 1$ y $x = 2$, lo que implica que es necesario comprobar cuáles de los intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$ son compatibles con la inecuación, finalizando con el estudio del comportamiento de la inecuación en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

Para estudiar los intervalos, basta probar con algún punto contenido en el correspondiente intervalo. Por ejemplo, se puede probar con el valor 0 que está en el intervalo $(-\infty, 1)$ (con el que obtenemos la expresión $2 \geq 0$, que es correcta), el valor 3/2 que pertenece al intervalo $(1, 2)$ (con el que obtenemos la expresión $-0.25 \geq 0$, que es falsa) y el valor 3 del intervalo $(2, +\infty)$ (con el que obtenemos la expresión $2 \geq 0$, que es correcta). Además, tanto en el punto $x = 1$ como $x = 2$ obtenemos la expresión $0 \geq 0$, que es correcta.

Con todo lo anterior, se concluye que la solución es $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

3.2.3 Inecuaciones de grado mayor que dos con una incógnita

Las inecuaciones de grado mayor que dos como

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 > 0,$$

donde debe cumplirse que $a_n \neq 0$, se resuelven de forma similar a las de grado 2, de manera que es necesario encontrar todas las soluciones de la ecuación ($x = \alpha_1, x = \alpha_2, \ldots, x = \alpha_n$) y determinar todos los intervalos posibles después de ordenar las soluciones (en este caso se supondrá sin pérdida de generalidad que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$).

Los intervalos resultantes serían $(-\infty, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \ldots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n), (\alpha_n, +\infty)$. Además de estos intervalos, dependiendo de si en la inecuación aparece una desigualdad estricta o no, será necesario estudiar el comportamiento en los puntos $x = \alpha_1, x = \alpha_2, \ldots, x = \alpha_n$. Finalmente se comprueba cuáles de los anteriores intervalos y puntos son solución de la inecuación.

Ejemplo 13

Para resolver la inecuación $x^3 - 3x^2 + 2x \geq 0$ hay que determinar las soluciones de la ecuación $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$, que son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. lo que implica que es necesario comprobar cuáles de los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$ son solución de la inecuación, finalizando con el estudio del comportamiento de la inecuación en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

De todo lo anterior se concluye que la solución es $[0, 1] \cup [2, +\infty)$.

3.2.4 Inecuaciones racionales con una incógnita

Las inecuaciones racionales con una incógnita típicamente tienen la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, donde tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son polinomios.

Ejemplo 14

La inecuación racional $\frac{x-2}{x} \geq \frac{2x-1}{x+1}$ es equivalente a $\frac{x-2}{x} - \frac{2x-1}{x+1} \geq 0$, y realizando algunas operaciones se llega a la forma $\frac{-x^2-2}{x(x+1)} \geq 0$.

Es importante observar que la inecuación $\frac{x-2}{x} \geq \frac{2x-1}{x+1}$ no tiene porqué ser equivalente a la forma que se obtiene multiplicando en cruz, $(x-2)(x+1) \geq x(2x-1)$, ya que la desigualdad puede cambiar de signo dependiendo del signo de los denominadores x y $x+1$.

Ejemplo 15

Resolver la inecuación $\frac{2x^3-3x^2-3}{x^2-1} \geq x$ equivale, pasando al primer término, a resolver la inecuación $\frac{2x^3-3x^2-3}{x^2-1} - x \geq 0$ y con ello la inecuación $\frac{x^3-3x^2+x-3}{x^2-1} \geq 0$, que tras factorizar el numerador y denominador se puede expresar como $\frac{(x-3)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$.

Puesto que los valores de los factores reales (tanto del numerador como del denominador) son $x=-1$, $x=1$, y $x=3$ estudiamos en cuáles de los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,3)$ y $(3,+\infty)$ la fracción adopta valores positivos o negativos. A la hora de estudiar el comportamiento en los valores $x=-1$, $x=1$ y $x=3$ será necesario comprobar que en esos puntos la fracción no tiende a infinito.

Con estas consideraciones, la solución de la inecuación es el conjunto $(-1,1) \cup [3,+\infty)$.

3.2.5 Otros tipos de inecuaciones con una incógnita

Para resolver inecuaciones en las que aparecen raíces, logaritmos, funciones exponenciales, etc. se puede proceder, en algunos casos, de manera similar a lo expuesto en los apartados anteriores, teniendo en cuenta propiedades específicas de las funciones que aparezcan en la inecuación.

Ejemplo 16

Para resolver la inecuación $\frac{e^x}{e^{3x-2}} < e^{-x}$ se pueden multiplicar ambos miembros por la expresión del denominador, ya que esta expresión siempre es positiva, obteniendo la inecuación equivalente $e^x < e^{-x}e^{3x-2}$, y con ello $e^x < e^{2x-2}$. Al ser la exponencial una función estrictamente creciente se cumple que si $e^x < e^{2x-2}$, entonces también se debe cumplir que $x < 2x-2$, lo que implica que la inecuación es válida en el intervalo $(2,+\infty)$.

3.2.6 Inecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas

Una inecuación lineal de primer grado con dos incógnitas es una expresión de la forma

$$ax+by+c>0 \qquad ax+by+c \geq 0 \qquad ax+by+c<0 \qquad ax+by+c \leq 0$$

El conjunto de soluciones de estas inecuaciones es uno de los dos semiplanos determinados por la recta $ax+by+c=0$, y si la desigualdad no es estricta entonces la solución también incluirá los puntos de la recta.

Ejemplo 17

Para resolver la inecuación $2x+3y>6$, se representa la recta $y=\dfrac{6-2x}{3}$ y se comprueba que la solución la componen los puntos a la derecha de esta recta.

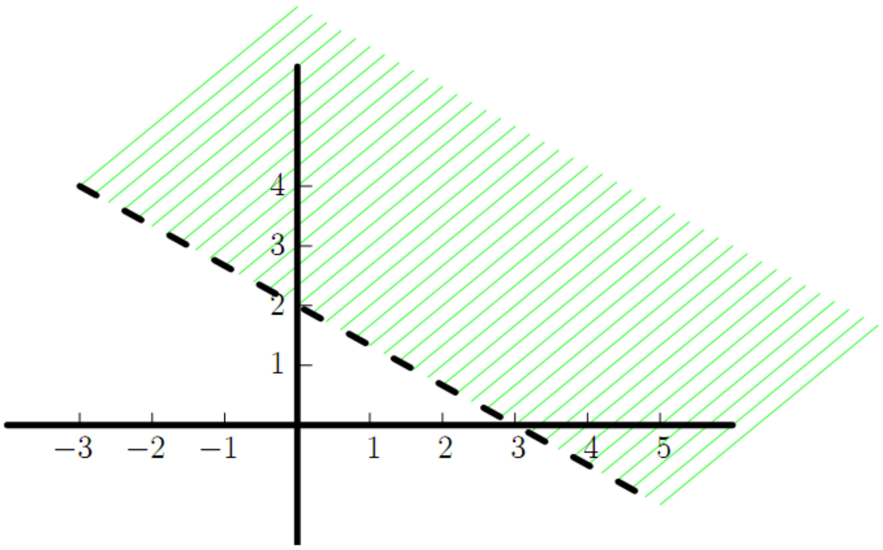

Figura 2: Solución del ejemplo de inecuación de primer grado con dos incógnitas.

4 Definiciones asociadas a las funciones

4.1 Par ordenado y producto cartesiano

Denominamos **par ordenado** al conjunto de 2 elementos, uno de los cuales recibe el nombre de primer elemento del par, y el otro segundo elemento del par. En un par ordenado el orden de los elementos sí importa, a diferencia de los elementos de un conjunto donde el orden no importa. El par ordenado cuyo primer elemento es x y cuyo segundo elemento es y se representa mediante la expresión (x,y).

Sean A y B dos conjuntos. Se define $A\times B$ como el conjunto formado por todos los pares ordenados (x,y), donde $x\in A$ e $y\in B$. Al conjunto $A\times B$ se le denomina **producto cartesiano** (en honor al matemático René Descartes).

Ejemplo 18

Si $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{a,b\}$, entonces $A\times B=\big\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\big\}$.

4.2 Correspondencias

Decimos que existe una correspondencia entre A y B cuando al menos un elemento de A está relacionado con al menos un elemento de B. Una correspondencia se puede expresar, por tanto, como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

> **Ejemplo 19**
>
> Siguiendo con el ejemplo anterior, tanto el subconjunto de un elemento $\{(1,a)\}$ como el subconjunto $\{(1,a),(2,a),(2,b),(3,b)\}$ serían correspondencias.

4.3 Funciones o aplicaciones

A ciertos subconjuntos de $A \times B$ (que cumplen más requisitos que el de mera correspondencia) se les denomina **función** o **aplicación**. Se dice que un subconjunto f de $A \times B$ es una función o aplicación de A en B, y se denota $f \subset A \times B$, cuando cumple las siguientes condiciones:

1) $\forall x \in A \quad \exists y \in B$ tal que $(x,y) \in f$

2) $(x,y_1) \in f, (x,y_2) \in f \implies y_1 = y_2$

Es decir, una correspondencia se puede considerar como aplicación cuando a todo elemento de A le corresponde un único elemento de B.

> **Ejemplo 20**
>
> Siguiendo con el ejemplo anterior, el subconjunto $\{(1,a),(2,a),(3,b)\}$ de $A \times B$ podría considerarse una aplicación.

Si f es una aplicación de A en B, podemos escribir

$$f : A \longrightarrow B$$

Al conjunto A se le denomina **dominio** de f, y al conjunto B se le denomina **codominio** o **conjunto final** de f. Cuando $(x,y) \in f$, escribimos $y = f(x)$ y decimos que y es la imagen de x por f, e igualmente que x es un antecedente de y por f.

Por último, las aplicaciones puede ser **inyectivas**, **sobreyectivas** (o suprayectivas) y **biyectivas**.

4.4 Funciones reales de variable real

Las **funciones reales de variable real** son aquellas en las que tanto su conjunto origen como su conjunto destino son los números reales $\mathbb{R}$ (o un subconjunto suyo), es decir:

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

Se denomina **gráfica** o **gráfico** de una función f real de variable real al conjunto de puntos del plano donde la función tiene representación:

$$\text{Gráfica } f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \}$$

Es decir, dada una función f, para cada $x \in \text{Dom}(f) = A \subset \mathbb{R}$ el par ordenado de números reales $(x, f(x))$ puede interpretarse como las coordenadas de un punto del plano respecto de un sistema de coordenadas cartesianas, de manera que la gráfica de f, es decir, el conjunto de los puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$, representará un subconjunto del plano, que da la representación gráfica de la función f.

4.5 Elementos característicos de una función

Dada una función f real de variable real, se llama **dominio** de f al conjunto

$$\text{Dom}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ está definido} \}$$

Se llama **imagen**, **rango** o **recorrido** de f al conjunto

$$\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in \text{Dom}(f) \text{ tal que } y = f(x) \}$$

El dominio de una función puede describirse de forma implícita o explícita. El **dominio implícito** es el conjunto de todos los números reales para los que está definida la función y genera como resultado un número real (por ejemplo, la función $1/x$ tiene como dominio implícito el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$). En comparación, un **dominio explícito** es el que se proporciona junto con la función.

> **Ejemplo 1**
>
> La función $f(x) = 1/x$, con $1 \leq x \leq 4$ tiene como dominio explícito el intervalo $[1, 4]$.

Dada una función f, se dice que está **acotada superiormente** (es decir, tiene una cota superior) en un conjunto S cuando existe un número real M tal que, para todo $x \in S$, se verifica que $f(x) \leq M$.

La función f se dice que está **acotada inferiormente** (es decir, tiene una cota inferior) en un conjunto S cuando existe un número real L tal que, para todo $x \in S$, se verifica que $f(x) \geq L$. La función f está acotada en el conjunto S cuando se encuentra acotada tanto inferior como superiormente.

4.6 Funciones crecientes y decrecientes

Una función f se dice que es **monótona no creciente** si dados cualesquiera $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$. Una función f se dice que es **monótona estrictamente decreciente** si dados cualesquiera $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.

Una función f se dice que es **monótona no decreciente** si dados cualesquiera $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Una función f se dice que es **monótona estrictamente creciente** si dados cualesquiera $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

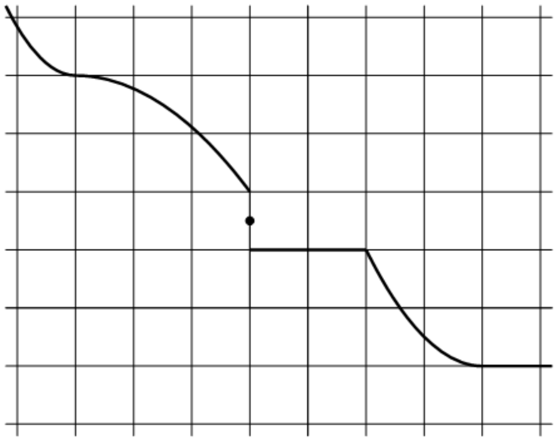

Figura 3: Ejemplo de función monónotona no creciente.

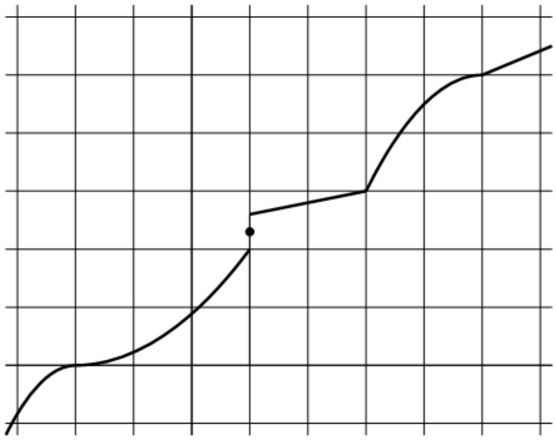

Figura 4: Ejemplo de función estrictamente creciente.

4.7 Funciones pares e impares

Una función real de variable real se dice que es **par** si para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple $f(-x) = f(x)$ (su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas). Esto es equivalente a decir que, si el punto (x, y) pertenece a la gráfica, entonces el punto $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica.

Una función real de variable real se dice que es **impar** si para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple $f(-x) = -f(x)$ (su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas). Esto es equivalente a decir que, si el punto (x, y) pertenece a la gráfica, entonces el punto $(-x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Alternativamente se puede expresar diciendo que la gráfica de la función queda inalterada si se gira 180 grados alrededor del origen.

Toda función real de variable real puede escribirse de manera única como suma de una función par y una función impar, $f(x) = f_P(x) + f_I(x)$, que se obtienen de la siguiente manera:

$$f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

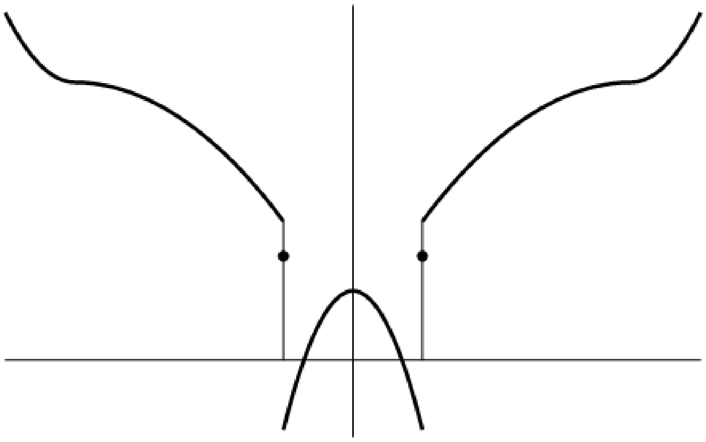

Figura 5: Ejemplo de función par (simétrica respecto al eje de ordenadas).

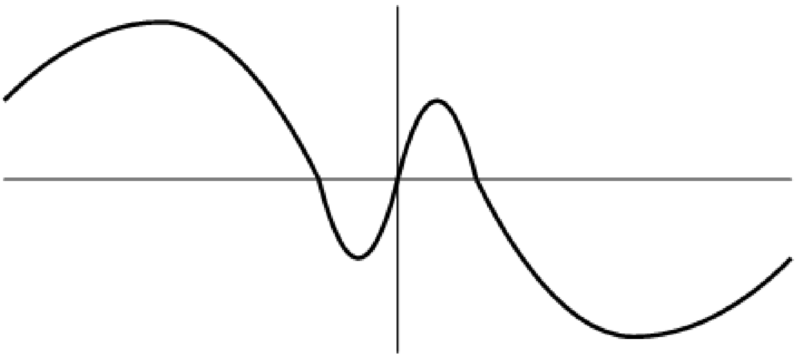

Figura 6: Ejemplo de función impar (simétrica respecto del origen de coordenadas).

4.8 Clasificación de funciones

Las funciones reales de variable real pueden clasificarse de la siguiente manera:

- Clasificación de funciones
  - Algebraicas
    - Polinómicas
    - Racionales
    - Radicales
  - Trascendentes
    - Trigonométricas
    - Logarítmicas
    - Exponenciales
  - Funciones definidas mediante múltiples expresiones

En los siguientes apartados se detallarán las principales características de todas estas aplicaciones, junto con ejemplos para su mejor comprensión.

5 Funciones algebraicas

Las **funciones algebraicas** son aquellas que pueden expresarse mediante un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces que contengan potencias del tipo x^n.

5.1 Funciones polinómicas

El tipo más habitual de función algebraica son las **funciones polinómicas**, que tienen el siguiente aspecto:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

donde el entero n es el **grado** de la función polinómica, siendo a_n el **coeficiente principal** o dominante y a_0 el **término independiente** o término constante. Atendiendo al grado de la función polinómica podemos establecer la siguiente clasificación:

Grado cero	$f(x) = a$	Función constante
Grado uno	$f(x) = ax + b$	Función lineal
Grado dos	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Función cuadrática
Grado tres	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Función cúbica

Las funciones polinómicas tienen como dominio $(-\infty, +\infty)$.

5.1.1 Funciones polinómicas de grado cero

La función polinómica de grado cero es la función constante, de expresión $y = a$, con $a \in \mathbb{R}$.

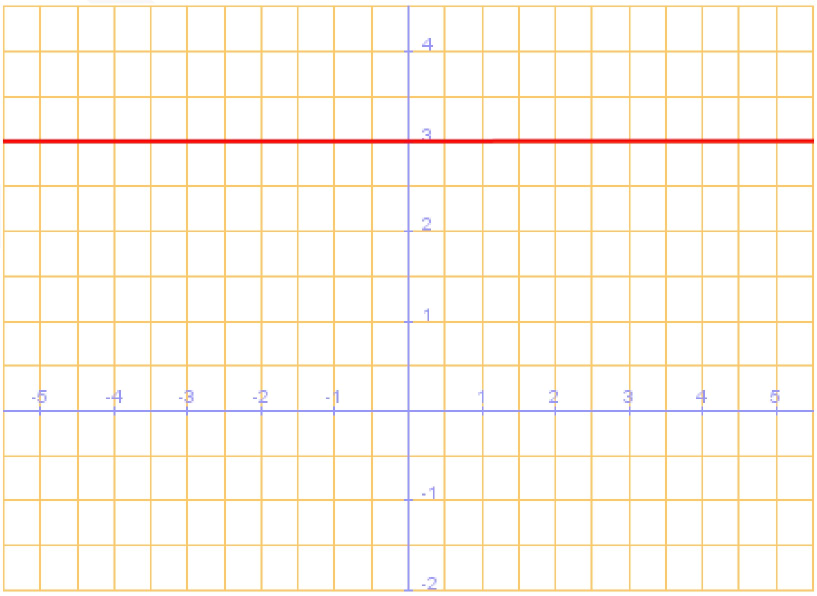

Figura 7: Función $y = 3$.

5.1.2 Funciones polinómicas de primer grado

La gráfica de una función polinómica de primer grado es una recta, y tiene como expresión general $y = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

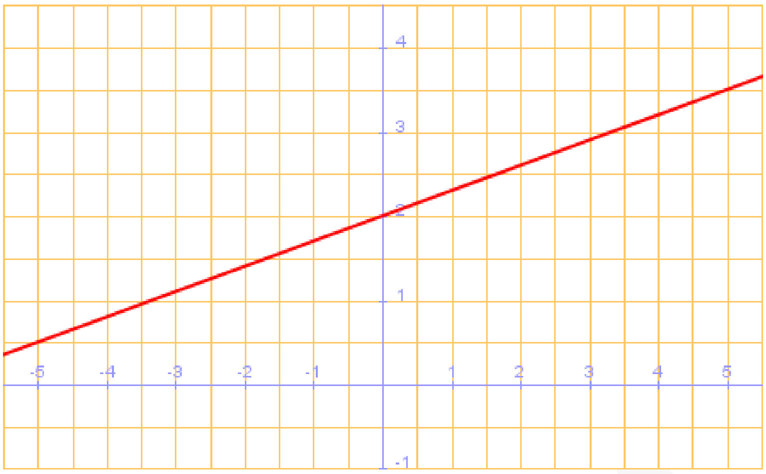

Figura 8: Función $y = 0.3\,x + 2$.

De la expresión $y = a\,x + b$ de una recta se puede obtener la siguiente información: la pendiente m de la recta tiene valor a, y la recta corta el eje Y en el punto $(0, b)$.

Dos rectas no verticales distintas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales, es decir, si y solo si $m_1 = m_2$. Por otra parte, dos rectas no verticales son perpendiculares si y solo si sus pendientes son una opuesta de la inversa de la otra, es decir, si y solo si $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.

5.1.3 Funciones polinómicas de segundo grado

Las funciones polinómicas de segundo grado se denominan funciones cuadráticas, su gráfica es una parábola, y tienen como expresión $y = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

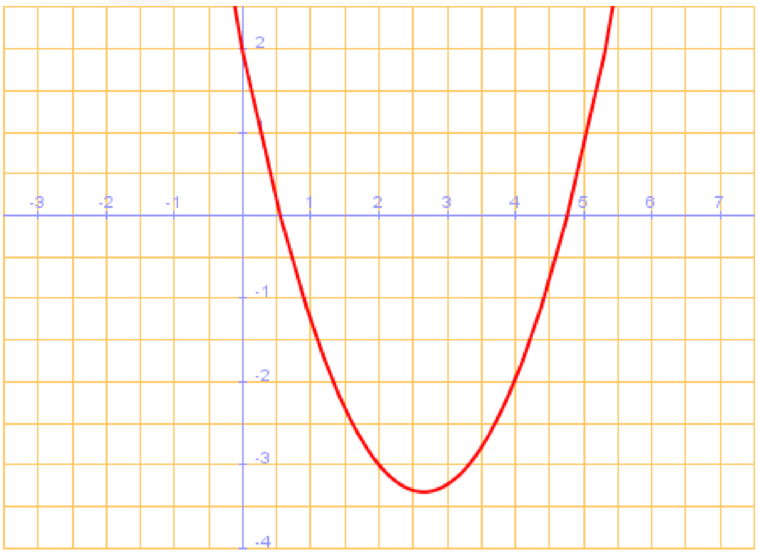

Figura 9: Función $y = 0.75\,x^2 - 4\,x + 2$.

5.1.4 Funciones polinómicas de tercer grado

Las funciones polinómicas de tercer grado se denominan funciones cúbicas, y tienen como expresión $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

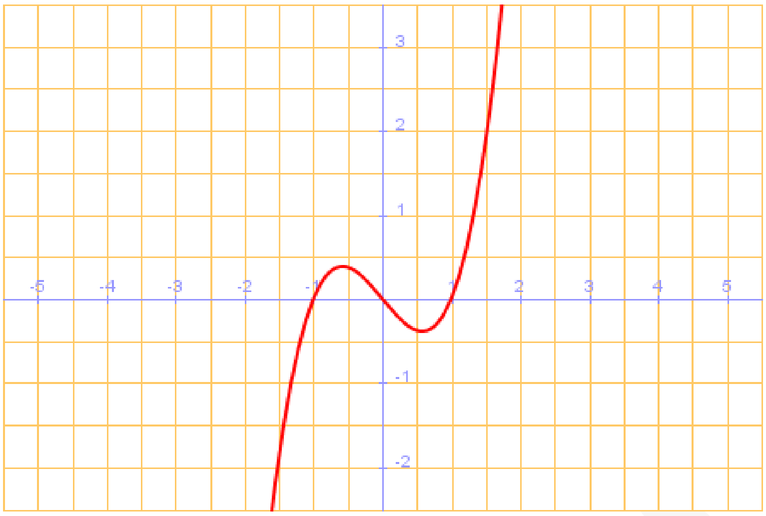

Figura 10: Función $y = x^3 - x$.

5.2 Funciones racionales

Una **función racional** es aquella que se expresa como el cociente de dos polinomios. Más concretamente, una función racional tiene el siguiente aspecto:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad q(x) \neq 0$$

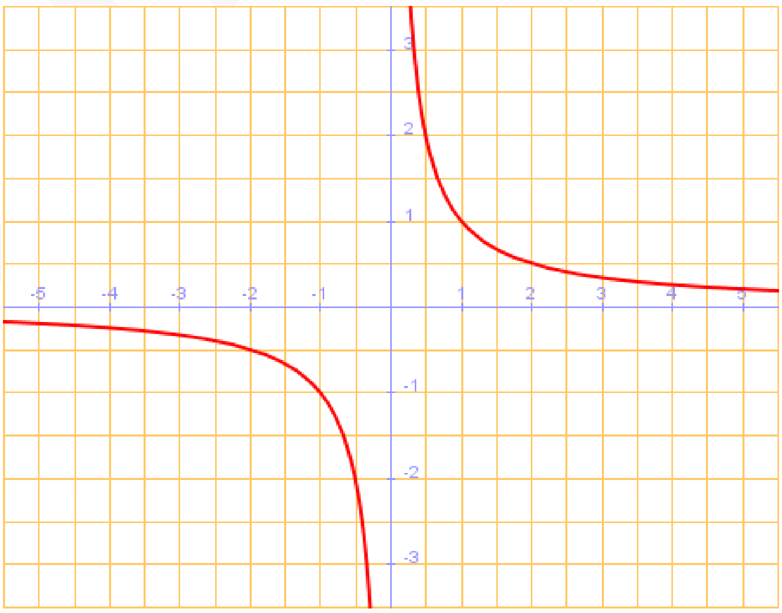

Figura 11: Función $y = 1/x$.

5.3 Funciones radicales

Las **funciones radicales** están compuestas en general por raíces de funciones polinómicas. La función radical más sencilla de todas es la función $y = \sqrt{x}$, cuyo dominio es $[0, \infty)$.

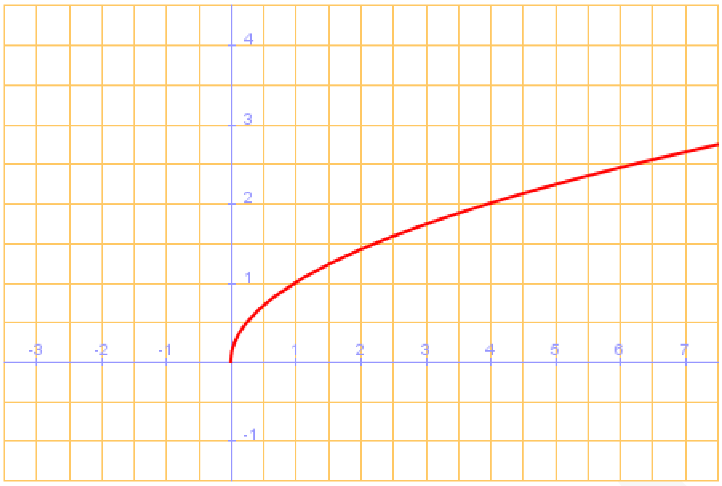

Figura 12: Función $y = \sqrt{x}$.

6 Funciones trascendentes

6.1 Funciones trigonométricas circulares

A partir del siguiente triángulo rectángulo con ángulo $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ se derivan las definiciones de las **funciones trigonométricas circulares**: seno, coseno, tangente y sus inversas cosecante, secante y cotangente.

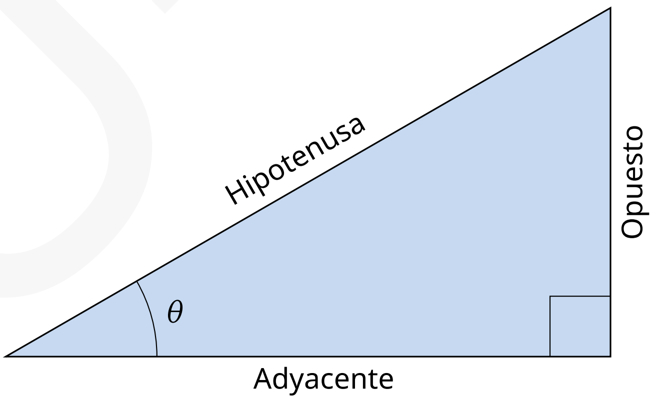

Figura 13: Elementos trigonométricos.

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \cos(\theta) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \tan(\theta) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}} \qquad \sec(\theta) = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}} \qquad \operatorname{cotan}(\theta) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}}$$

A continuación se muestran las gráficas de las funciones $\mathrm{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$.

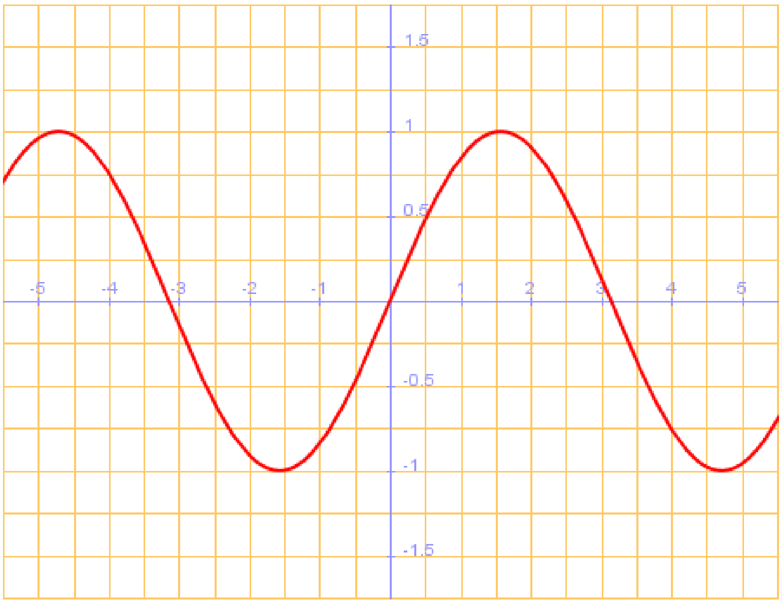

Figura 14: Función $y = \mathrm{sen}(x)$.

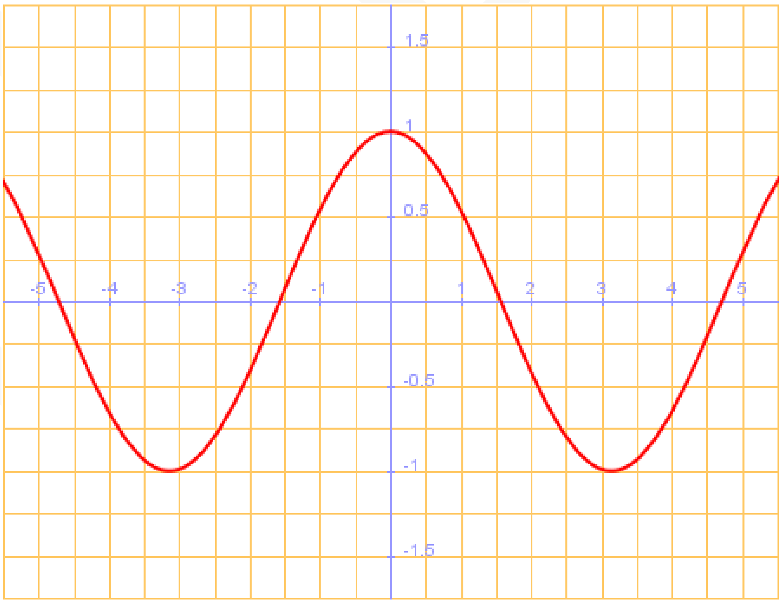

Figura 15: Función $y = \cos(x)$.

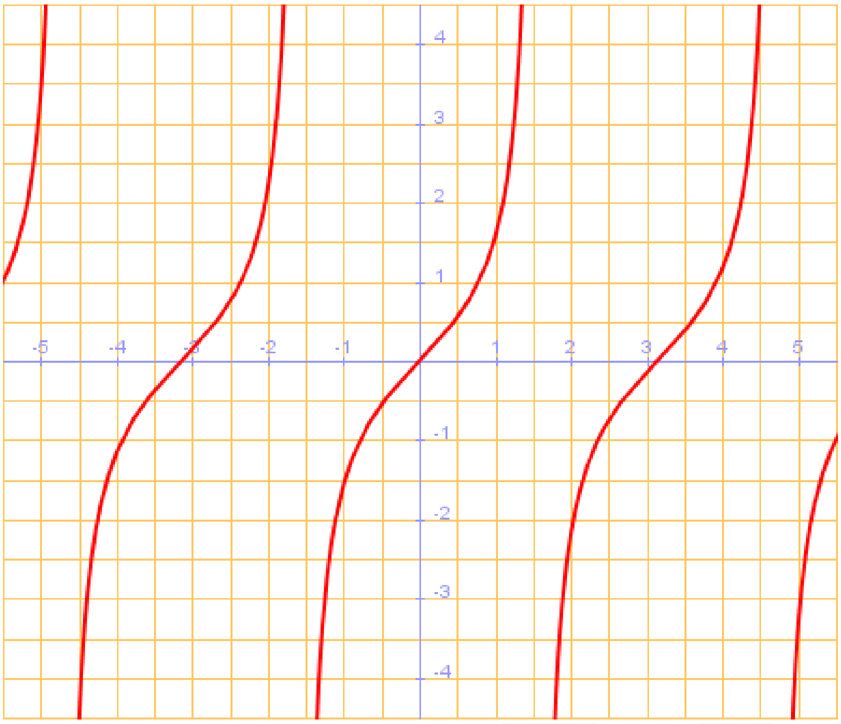

Figura 16: Función $y = \tan(x)$.

6.1.1 Relaciones trigonométricas circulares

$$\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \qquad \tan(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)=\cos(\alpha) \qquad \cos(\pi/2-\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$$

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha) \qquad \tan(\alpha+\pi/2)=-\operatorname{cotan}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\pi/2)=\cos(\alpha) \qquad \cos(\alpha+\pi/2)=-\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\pi)=-\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(\alpha+\pi)=-\cos(\alpha)$$

$$\tan(\alpha+\pi)=\tan(\alpha) \qquad \tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(2\,\alpha)=2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \qquad \cos(2\,\alpha)=\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)$$

6.2 Funciones trigonométricas hiperbólicas

Las **funciones trigonométricas hiperbólicas** se basan en la función exponencial, y se denominan así por su parecido a las funciones trigonométricas circulares.

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} \qquad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \qquad \operatorname{cotanh}(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$$

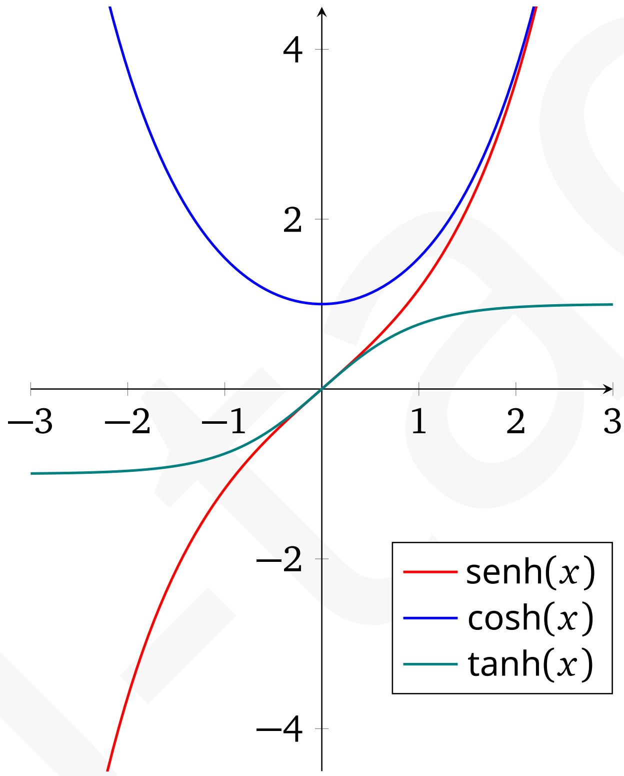

Figura 17: Principales funciones hiperbólicas.

6.2.1 Relaciones trigonométricas hiperbólicas

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}$$

$$\operatorname{cotanh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotanh}(x)\operatorname{cotanh}(y) \pm 1}{\operatorname{cotanh}(x)\operatorname{cotanh}(y)}$$

$$\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$$

$$\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$$

6.3 Función logaritmo

La **función logaritmo natural** (o logaritmo neperiano, con base el número $e \approx 2.718281...$) se define de la siguiente manera:

$$\mathrm{Ln}(x) = \log_e(x) = n \iff x = e^n$$

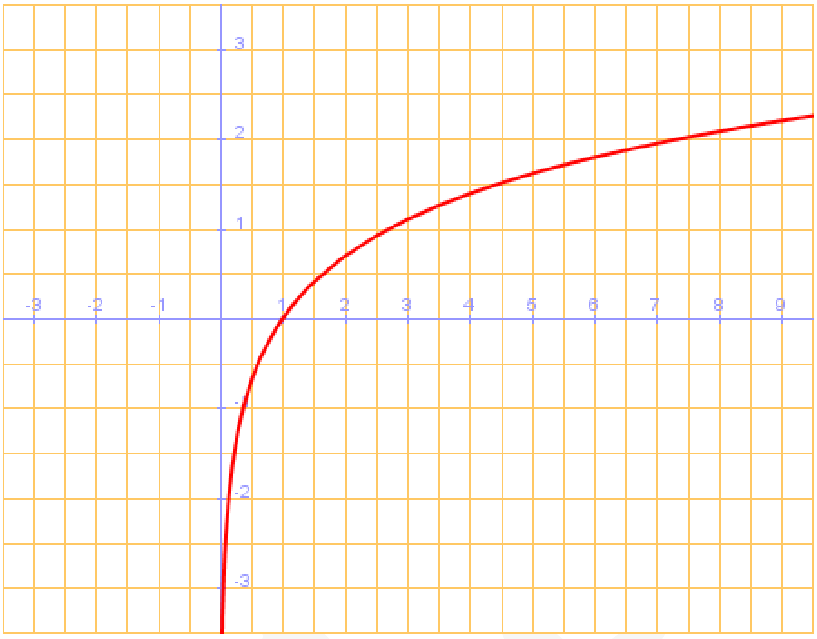

Figura 18: Función $y = \mathrm{Ln}(x)$.

La función logaritmo natural tiene las siguientes propiedades:

- El dominio de la función es $(0, \infty)$ y el recorrido es $(-\infty, +\infty)$.
- El valor de $\mathrm{Ln}(x)$ es positivo para $x > 1$ y negativo para $x < 1$.
- El valor de $\mathrm{Ln}(x)$ en $x = 1$ es 0.
- La función es continua, creciente e inyectiva.
- $\mathrm{Ln}(ab) = \mathrm{Ln}(a) + \mathrm{Ln}(b)$
- $\mathrm{Ln}(a^n) = n\,\mathrm{Ln}(a)$
- $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \mathrm{Ln}(a) - \mathrm{Ln}(b)$

6.4 Función exponencial

La **función exponencial** es la función inversa del logaritmo natural, y se define como

$$f(x) = e^x$$

Es decir, $y = e^x$ si y solo si $x = \mathrm{Ln}(y)$.

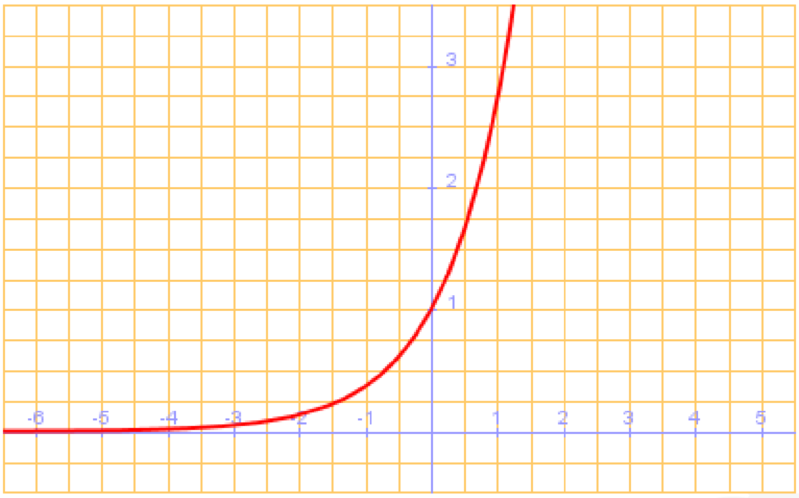

Figura 19: Función $y = e^x$.

La función exponencial tiene las siguientes propiedades:

- El dominio de la función es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $(0, +\infty)$.
- La función es continua, creciente e inyectiva.
- La gráfica de $y = e^x$ es cóncava en todo su dominio.
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

7 Funciones definidas mediante múltiples expresiones

Una función normalmente está definida por una única expresión matemática (por ejemplo, $y = x^2$). Sin embargo, también es posible que una función esté definida mediante varias expresiones, en cuyo caso se debe indicar claramente cuál es el dominio en el que es válida cada expresión.

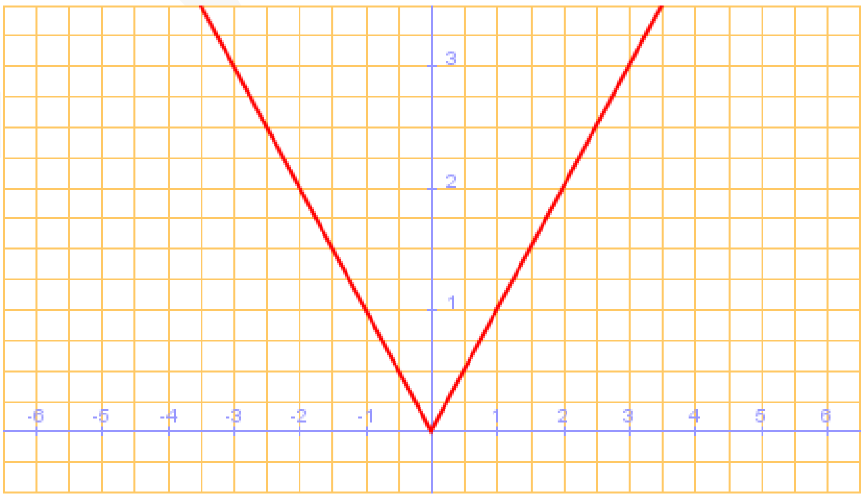

Figura 20: Función $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

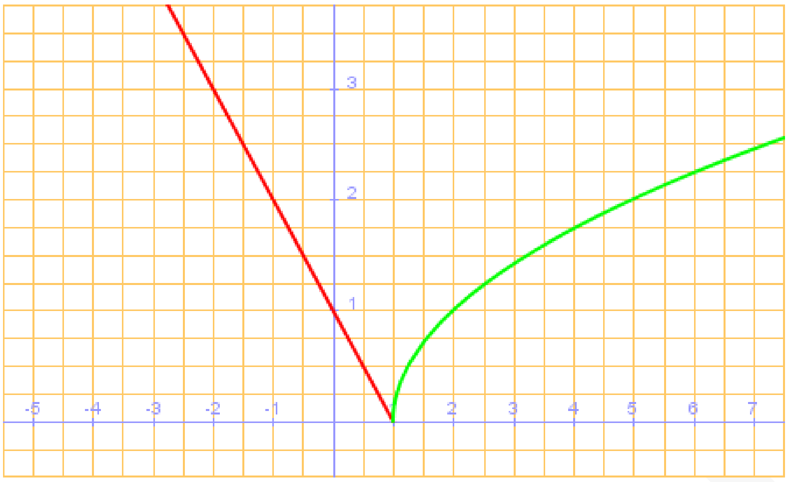

Figura 21: Función $y = \begin{cases} 1-x & x<1 \\ \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$

8 Transformaciones de funciones

Dada una función $y = f(x)$ es posible realizar distintas transformaciones sobre ella. Los tipos de transformaciones básicos son las **traslaciones verticales**, las **traslaciones horizontales** y las **reflexiones**.

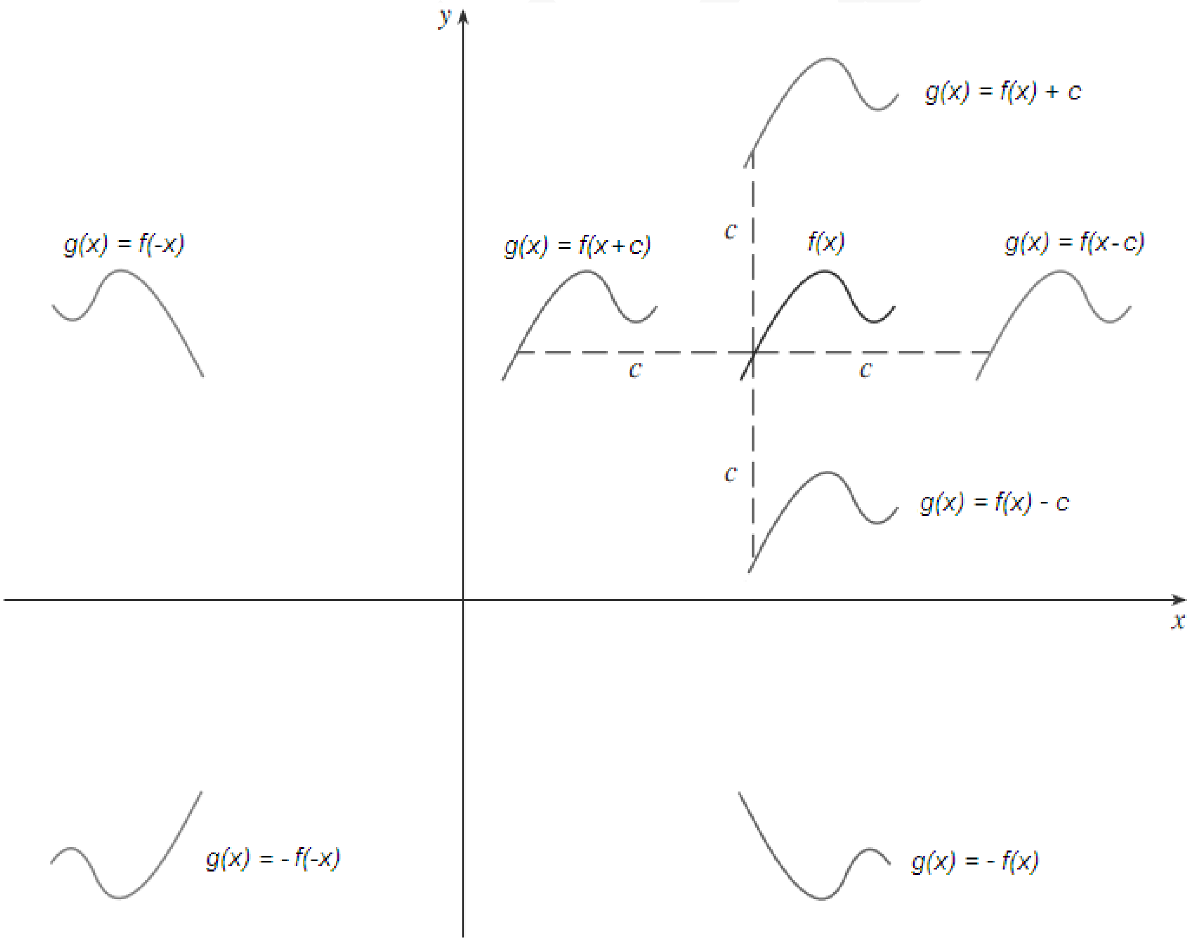

Figura 22: Transformaciones de funciones ($c > 0$)

Suponiendo una gráfica $y = f(x)$ y un valor $c > 0$, las opciones son las siguientes:

- Traslación horizontal de c unidades a la derecha: $y = f(x-c)$
- Traslación horizontal de c unidades a la izquierda: $y = f(x+c)$
- Traslación vertical de c unidades hacia abajo: $y = f(x)-c$
- Traslación vertical de c unidades hacia arriba: $y = f(x)+c$
- Reflexión (respecto al eje X): $y = -f(x)$
- Reflexión (respecto al eje Y): $y = f(-x)$
- Reflexión (respecto del origen): $y = -f(-x)$

9 Composición de funciones

Sean f y g dos funciones. La función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama **función compuesta** de f con g. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los valores x del dominio de g tales que $g(x)$ pertenece al dominio de f.

La función composición de f con g no suele ser igual, en general, a la de g con f. Por ejemplo, dadas las funciones $f(x) = 2x-3$ y $g(x) = \cos(x)$, las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ se calculan de la siguiente manera:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x)) - 3 = 2\cos(x) - 3$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos(f(x)) = \cos(2x-3)$

10 Representación gráfica de funciones

Los pasos para obtener una representación aproximada de cualquier función son:

1) Estudiar los puntos de intersección con los ejes ($x = 0$ e $y = 0$).
2) Identificar (si existen) las asíntotas verticales.
3) Identificar (si existen) las asíntotas horizontales.
4) Identificar (si existen) las asíntotas oblicuas.
5) Calcular sus máximos y mínimos mediante el uso de derivadas.
6) Calcular sus puntos de inflexión mediante el uso de derivadas.
7) Identificar los intervalos donde la función es creciente o decreciente.
8) Identificar los intervalos donde la función es cóncava o convexa.
9) Observar su comportamiento cuando la variable x toma valores muy grandes ($x \to +\infty$) y muy pequeños ($x \to -\infty$).
10) Calcular cuatro o cinco puntos de la función e intentar hacer una representación inicial.

La siguiente figura muestra algunos de los elementos de la lista anteriormente mencionada.

Figura 23: Representación gráfica de la función $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

11 Problemas

1) Resuelve la inecuación $\dfrac{3x-5}{2} \leq \dfrac{x+2}{3} - 2x$.

2) Resuelve la inecuación $x - \dfrac{5x+8}{3} \geq \dfrac{3x}{2} + \dfrac{x-2}{4}$.

3) Resuelve la inecuación $x^2 - 5x + 4 > 0$.

4) Resuelve la inecuación $\dfrac{x-5}{2x+4} \geq 0$.

5) Resuelve la inecuación $x^3 - 13x + 12 \leq 0$.

6) Resuelve la inecuación $\dfrac{x-3}{x^2-1} > 0$.

7) Resuelve la ecuación $|2x-5| = 9$.

8) Resuelve la inecuación $|3x-1| > |2x-4|$.

9) Resuelve la inecuación $(x-2)^2 \geq 1$.

10) Resuelve la inecuación $\big||x-1| - |x+1|\big| \leq 1$.

11) Resuelve de manera razonada la ecuación $\Big|2 - \big|x + |2x|\big|\Big| = 3$, obteniendo para ello como primer paso una expresión equivalente en la que no aparezca ningún valor absoluto.

12) Calcula el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x-1}$

b) $f(x)=\sqrt{3x-5}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$

d) $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x}}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+5}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-5}$

g) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$

13) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x}$

c) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

d) $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}$

e) $f(x)=\operatorname{Ln}[x(x^2+x-4)]$

14) Comprueba si las funciones $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=1+\cos(x)$ son pares o impares.

15) Demuestra la relación $\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x)=1$.

16) Dada la función $f(x)=x^3-x+1$, determina la expresión de la función $g(x)$ construida como:

a) La función $f(x)$ desplazada 3 unidades hacia la derecha.

b) La función $f(x)$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda.

c) La función $f(x)$ desplazada 4 unidades hacia arriba.

d) La función $f(x)$ desplazada 1 unidad hacia abajo.

e) La imagen especular de la función $f(x)$ respecto del eje X.

f) La imagen especular de la función $f(x)$ respecto del eje Y.

g) La imagen especular de la función $f(x)$ respecto del origen de coordenadas.

17) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$ y $g(x)=\sqrt{x}$, halla las funciones compuestas $f\circ g$ y $g\circ f$ y determina su dominio.

18) Calcula las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & x<1 \\ 1+x & x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1-x & x \geq 0 \end{cases}$$

19) Sea f una función real de variable real tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica la siguiente relación:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Demuestra que:

a) $f(0) = 0$.

b) La función f es impar.

c) $f(mx) = mf(x)$ para todo número $m \in \mathbb{Z}$.

d) Si $f(1) = a$, entonces para todo número racional x, $f(x) = ax$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- D. Pestana, J.M. Rodríguez, E. Romera, E. Tourís, V. Álvarez y A. Portilla. *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. Tercera edición. Ed. Ariel Ciencia.
- M. Soler Dorda. *Cálculo infinitesimal e integral*. Ed. Madrid.
- E. Tébar Flores. *Problemas de Cálculo Infinitesimal*. Ed. Flores.
- M. Bilbao Llorente, F. Castañeda Bravo y J.C. Peral Alonso. *Problemas de Cálculo*. Ed. Pirámide.
- Wiris. https://www.educa2.madrid.org/web/matematicas/fuentes-de-recursos/-/visor/wiris-la-calculadora-online