TEMA 1

SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

PROBLEMA 1

Resuelve la inecuación $\dfrac{3x-5}{2} \leqslant \dfrac{x+2}{3} - 2x$.

Solución:

$$\frac{3x-5}{2} \leqslant \frac{x+2}{3} - 2x \overset{\times 6}{\Longrightarrow} 3(3x-5) \leqslant 2(x+2) + 6(-2x)$$

$$\Longrightarrow 9x - 15 \leqslant 2x + 4 - 12x \Longrightarrow 9x - 15 \leqslant -10x + 4$$

$$\overset{+10x}{\Longrightarrow} 19x - 15 \leqslant 4 \overset{+15}{\Longrightarrow} 19x \leqslant 19 \overset{\div 19}{\Longrightarrow} \boxed{x \leqslant 1}$$

PROBLEMA 2

Resuelve la inecuación $x - \dfrac{5x+8}{3} \geqslant \dfrac{3x}{2} + \dfrac{x-2}{4}$.

Solución:

$$x - \frac{5x+8}{3} \geqslant \frac{3x}{2} + \frac{x-2}{4} \overset{\times 12}{\Longrightarrow} 12(x) - 4(5x+8) \geqslant 6(3x) + 3(x-2)$$

$$\Longrightarrow 12x - 20x - 32 \geqslant 18x + 3x - 6 \Longrightarrow -8x - 32 \geqslant 21x - 6 \overset{-21x}{\Longrightarrow} -29x - 32 \geqslant -6$$

$$\overset{+32}{\Longrightarrow} -29x \geqslant 26 \overset{\div 29}{\Longrightarrow} -x \geqslant \frac{26}{29} \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} \boxed{x \leqslant -\frac{26}{29}}$$

PROBLEMA 3

Resuelve la inecuación $x^2 - 5x + 4 > 0$.

Solución:

Resolvemos $x^2 - 5x + 4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Longrightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$

Construimos a continuación la siguiente tabla:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
TOTAL	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, $x^2 - 5x + 4 > 0$ en el conjunto $\boxed{(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)}$

PROBLEMA 4

Resuelve la inecuación $\dfrac{x-5}{2x+4} \geqslant 0$.

Solución:

El numerador se anula en $x = 5$, mientras que el denominador hace lo propio en $x = -2$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 5)$	$(5, \infty)$
$x - 5$	$-$	$-$	$+$
$2x + 4$	$-$	$+$	$+$
TOTAL	$+$	$-$	$+$

Luego $\dfrac{x-5}{2x+4} \geqslant 0$ en el conjunto $\boxed{(-\infty, -2) \cup [5, +\infty)}$

PROBLEMA 5

Resuelve la inecuación $x^3 - 13x + 12 \leqslant 0$.

Solución:

Observamos que $x^3 - 13x + 12 = (x-1)(x-3)(x+4)$. Construimos la tabla:

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 4$	$-$	$+$	$+$	$+$
TOTAL	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, $x^3 - 13x + 12 \leqslant 0$ en $\boxed{(-\infty, 4] \cup [1, 3]}$

PROBLEMA 6

Resuelve la inecuación $\dfrac{x-3}{x^2-1} > 0$.

Solución:

Partimos de la expresión $\dfrac{x-3}{x^2-1} = \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)}$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
TOTAL	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego $\dfrac{x-3}{x^2-1} > 0$ en $\boxed{(-1, 1) \cup (3, \infty)}$

PROBLEMA 7

Resuelve la ecuación $|2x-5|=9$.

Solución:

$$|2x-5| = \left\{ \begin{array}{ll} +(2x-5) & 2x-5 \geqslant 0 \equiv x \geqslant 5/2 \\ -(2x-5) & 2x-5 < 0 \equiv x < 5/2 \end{array} \right.$$

$\boxed{x \geqslant 5/2}$ $|2x-5|=9 \Longrightarrow (2x-5)=9 \Longrightarrow 2x=14 \Longrightarrow x=7 \in [5/2,\infty)$ $\checkmark$

$\boxed{x < 5/2}$ $|2x-5|=9 \Longrightarrow -(2x-5)=9 \Longrightarrow -2x+5=9 \Longrightarrow x=-2 \in (-\infty,5/2)$ $\checkmark$

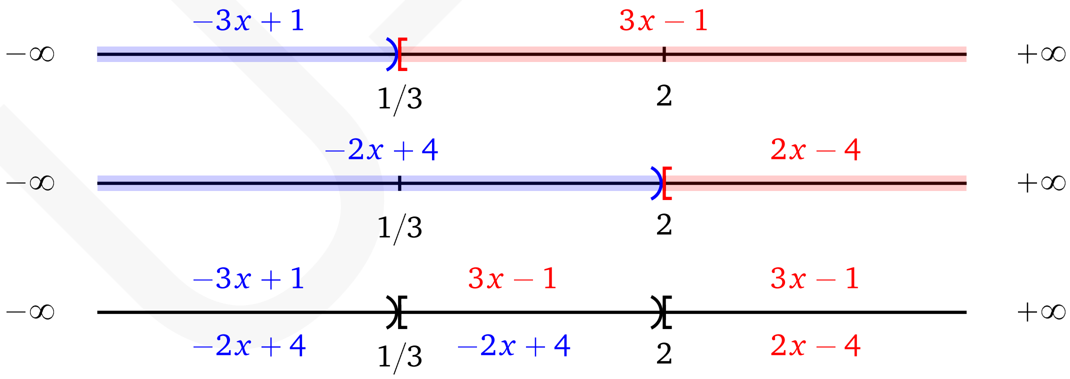
PROBLEMA 8

Resuelve la inecuación $|3x-1|>|2x-4|$.

Solución:

$$|3x-1| = \left\{ \begin{array}{ll} +(3x-1) & 3x-1 \geqslant 0 \equiv x \geqslant 1/3 \\ -(3x-1) & 3x-1 < 0 \equiv x < 1/3 \end{array} \right.$$

$$|2x-4| = \left\{ \begin{array}{ll} +(2x-4) & 2x-4 \geqslant 0 \equiv x \geqslant 2 \\ -(2x-4) & 2x-4 < 0 \equiv x < 2 \end{array} \right.$$



$\boxed{x \in (-\infty,1/3)}$ $|3x-1|>|2x-4| \Longrightarrow -3x+1>-2x+4 \Longrightarrow x<-3 \overset{x\in(-\infty,1/3)}{\Longrightarrow} x \in (-\infty,-3)$ $\checkmark$

$\boxed{x \in [1/3,2)}$ $|3x-1|>|2x-4| \Longrightarrow 3x-1>-2x+4 \Longrightarrow 5x>5 \Longrightarrow x>1 \overset{x\in[1/3,2)}{\Longrightarrow} x \in (1,2)$ $\checkmark$

$\boxed{x \in [2,\infty)}$ $|3x-1|>|2x-4| \Longrightarrow 3x-1>2x-4 \Longrightarrow x>-3 \overset{x\in[2,\infty)}{\Longrightarrow} x \in [2,\infty)$ $\checkmark$

Luego la solución es el conjunto $\boxed{(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)}$

PROBLEMA 9

Resuelve la inecuación $(x-2)^2 \geqslant 1$.

Solución:

$$(x-2)^2 \geqslant 1 \implies \sqrt{(x-2)^2} \geqslant \sqrt{1} \implies |x-2| \geqslant 1$$

$$|x-2| = \begin{cases} +(x-2) & x-2 \geqslant 0 \equiv x \geqslant 2 \\ -(x-2) & x-2 < 0 \equiv x < 2 \end{cases}$$

$\boxed{x \geqslant 2}$ $|x-2| \geqslant 1 \implies x-2 \geqslant 1 \implies x \geqslant 3 \implies \overset{x\geqslant 2}{\implies} x \in [3,\infty)$ ✓

$\boxed{x < 2}$ $|x-2| \geqslant 1 \implies -x+2 \geqslant 1 \implies x \leqslant 1 \implies \overset{x<2}{\implies} x \in (-\infty,1]$ ✓

Por lo tanto, la solución es el conjunto $\boxed{(-\infty,1] \cup [3,\infty)}$

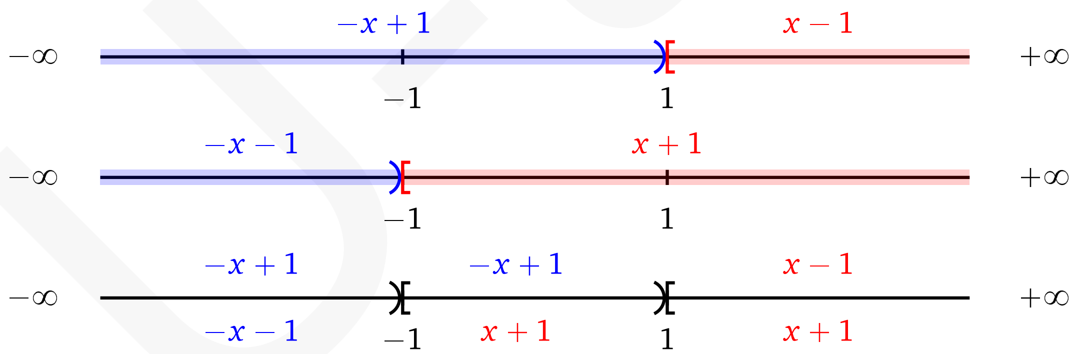
PROBLEMA 10

Resuelve la inecuación $\big||x-1| - |x+1|\big| \leqslant 1$.

Solución:

$$|x-1| = \begin{cases} +(x-1) & x-1 \geqslant 0 \equiv x \geqslant 1 \\ -(x-1) & x-1 < 0 \equiv x < 1 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} +(x+1) & x+1 \geqslant 0 \equiv x \geqslant -1 \\ -(x+1) & x+1 < 0 \equiv x < 1 \end{cases}$$



$\boxed{x \in (-\infty,-1)}$ $\big||x-1| - |x+1|\big| \leqslant 1 \implies |-x+1-(-x-1)| \leqslant 1 \implies 2 \not\leqslant 1$ ✗

$\boxed{x \in [-1,1)}$ $\big||x-1| - |x+1|\big| \leqslant 1 \implies |-x+1-(x+1)| \leqslant 1 \implies |-2x| \leqslant 1 \implies |2x| \leqslant 1$

$\boxed{x \in [-1,0)}$ $|2x| \leqslant 1 \implies -2x \leqslant 1 \implies x \geqslant -1/2 \overset{x\in[-1,0)}{\implies} x \in [-1/2,0)$ ✓

$\boxed{x \in [0,1)}$ $|2x| \leqslant 1 \implies 2x \leqslant 1 \implies x \leqslant 1/2 \overset{x\in[0,1)}{\implies} x \in [0,1/2]$ ✓

$\boxed{x \in [1,\infty)}$ $\big||x-1| - |x+1|\big| \leqslant 1 \implies |x-1-(x+1)| \leqslant 1 \implies 2 \not\leqslant 1$ ✗

Luego la solución es el conjunto $\boxed{[-1/2,1/2]}$

PROBLEMA 11

Resuelve de manera razonada la ecuación $\big|2-|x+|2x||\big|=3$, obteniendo para ello como primer paso una expresión equivalente en la que no aparezca ningún valor absoluto.

Solución:

$$|2x| = \begin{cases} +(2x) & 2x \geqslant 0 \equiv x \geqslant 0 \\ -(2x) & 2x < 0 \equiv x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{x \in (-\infty, 0)}$

$$\big|x+|2x|\big| = |x-2x| = |-x| = |x| = \begin{cases} +x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \overset{x\in(-\infty,0)}{=} -x$$

$$\Big|2-\big|x+|2x|\big|\Big| = |2-(-x)| = |2+x| = \begin{cases} +(2+x) & 2+x \geqslant 0 \equiv x \geqslant -2 \\ -(2+x) & 2+x < 0 \equiv x < -2 \end{cases} \overset{x\in(-\infty,0)}{=}$$

$$\overset{x\in(-\infty,0)}{=} \begin{cases} 2+x & x \in [-2,0) \\ -2-x & x \in (-\infty,-2) \end{cases}$$

$\boxed{x \in [0, \infty)}$

$$\big|x+|2x|\big| = |x+2x| = |3x| = \begin{cases} +3x & x \geqslant 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases} \overset{x\in[0,\infty)}{=} 3x$$

$$\Big|2-\big|x+|2x|\big|\Big| = |2-(3x)| = \begin{cases} +(2-3x) & 2-3x \geqslant 0 \equiv x \leqslant 2/3 \\ -(2-3x) & 2-3x < 0 \equiv x > 2/3 \end{cases} \overset{x\in[0,\infty)}{=}$$

$$\overset{x\in[0,\infty)}{=} \begin{cases} 2-3x & x \in [0,2/3] \\ -2+3x & x \in (2/3,\infty) \end{cases}$$

Recopilamos las opciones:

$\boxed{x \in (-\infty,-2)}$ $\Big|2-\big|x+|2x|\big|\Big| = 3 \implies -2-x = 3 \implies x = -5 \in (-\infty,-2)$ $\checkmark$

$\boxed{x \in [-2,0)}$ $\Big|2-\big|x+|2x|\big|\Big| = 3 \implies 2+x = 3 \implies x = 1 \notin [-2,0)$ $\times$

$\boxed{x \in [0,2/3]}$ $\Big|2-\big|x+|2x|\big|\Big| = 3 \implies 2-3x = 3 \implies x = -1/3 \notin [0,2/3]$ $\times$

$\boxed{x \in (2/3,\infty)}$ $\Big|2-\big|x+|2x|\big|\Big| = 3 \implies -2+3x = 3 \implies x = 5/3 \in (2/3,\infty)$ $\checkmark$

PROBLEMA 12

Calcula el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{3x-5}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2-x-2}$

d) $f(x) = \sqrt{x-2\sqrt{x}}$ e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+5}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-5}$

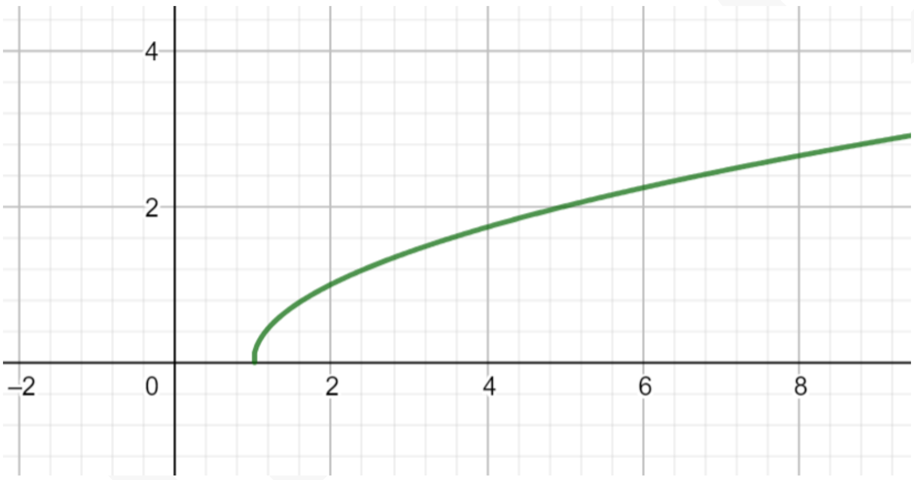
g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$

Solución:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Condición: $x-1 \geqslant 0 \implies x \geqslant 1$

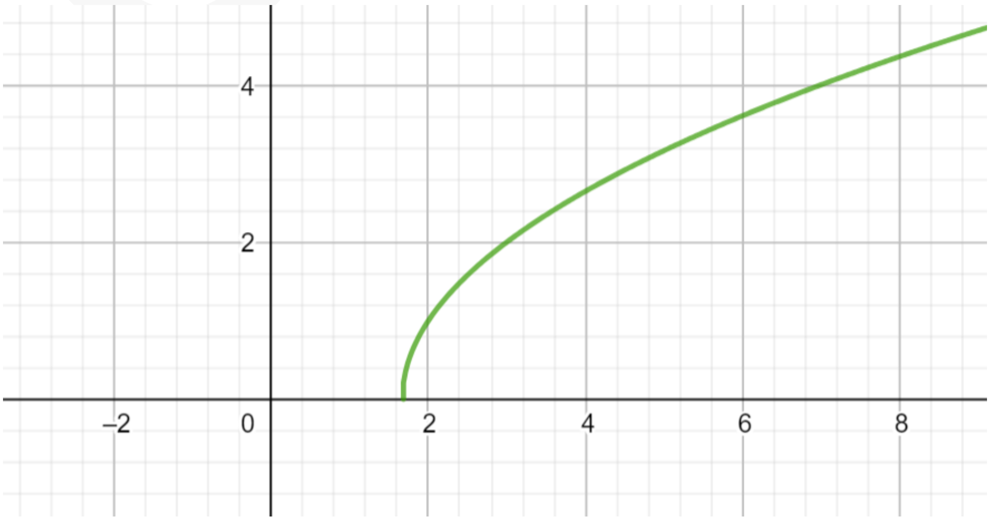
$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = [1, +\infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)}$$



b) $f(x) = \sqrt{3x-5}$

$3x-5 \geqslant 0 \implies 3x \geqslant 5 \implies x \geqslant 5/3$

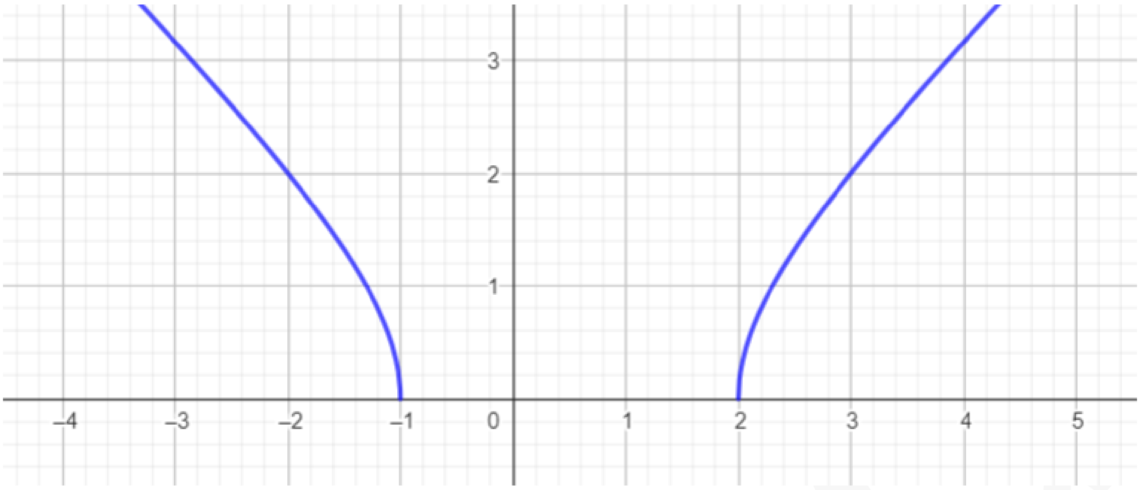
$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = [5/3, +\infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)}$$



c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

Condición: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \geqslant 0$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)}$$



d) $f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x}}$

Condición 1 (interna): $x \geqslant 0$

Condición 2 (externa): $x - 2\sqrt{x} \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 2\sqrt{x} \Longrightarrow x^2 \geqslant 4x \Longrightarrow x^2 - 4x \geqslant 0 \Longrightarrow x(x-4) \geqslant 0$

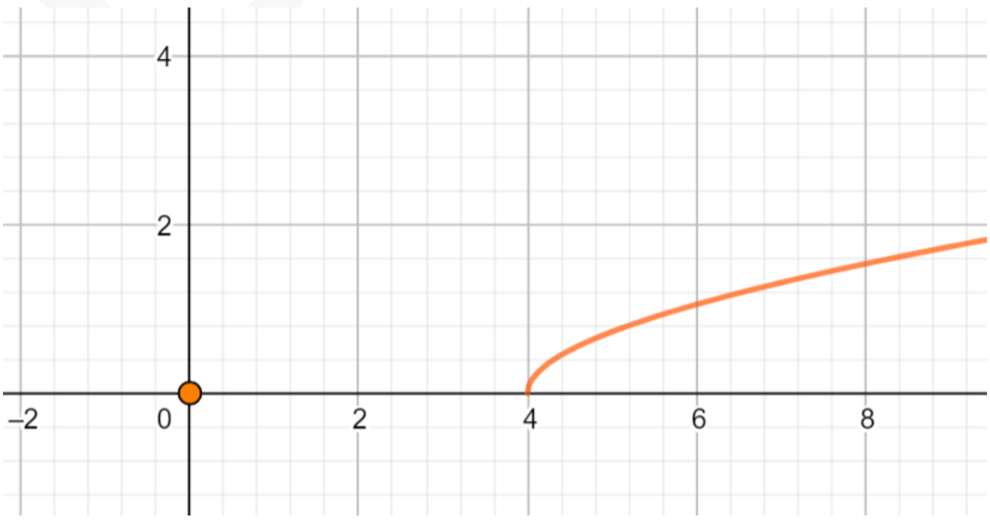
Hay dos opciones para que se cumpla $x(x-4) \geqslant 0$:

$$\left.\begin{array}{r} x \geqslant 0 \\ x - 4 \geqslant 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x \geqslant 4 \qquad \left.\begin{array}{r} x \leqslant 0 \\ x - 4 \leqslant 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x \leqslant 0$$

Ahora debemos juntar las condiciones interna y externa:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Condición 1: } x \geqslant 0 \\ \text{Condición 2: } x \geqslant 4 \end{array}\right] \Longrightarrow x \geqslant 4 \qquad \left.\begin{array}{r} \text{Condición 1: } x \geqslant 0 \\ \text{Condición 2: } x \leqslant 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x = 0$$

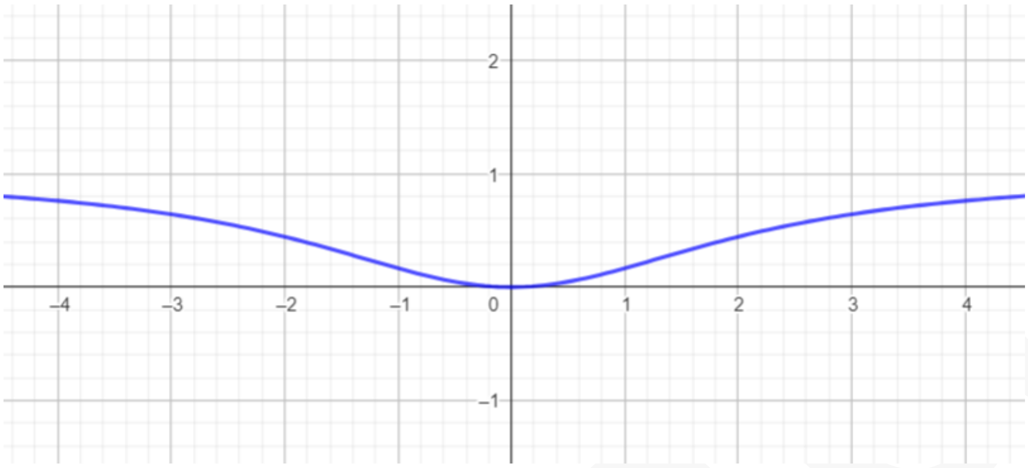
$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{0\} \cup [4, +\infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)}$$



e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+5}$

Claramente el numerador es siempre menor que el denominador. Además, no existe ningún valor $x \in \mathbb{R}$ tal que se anule el denominador.

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, \infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = [0, 1)}$$

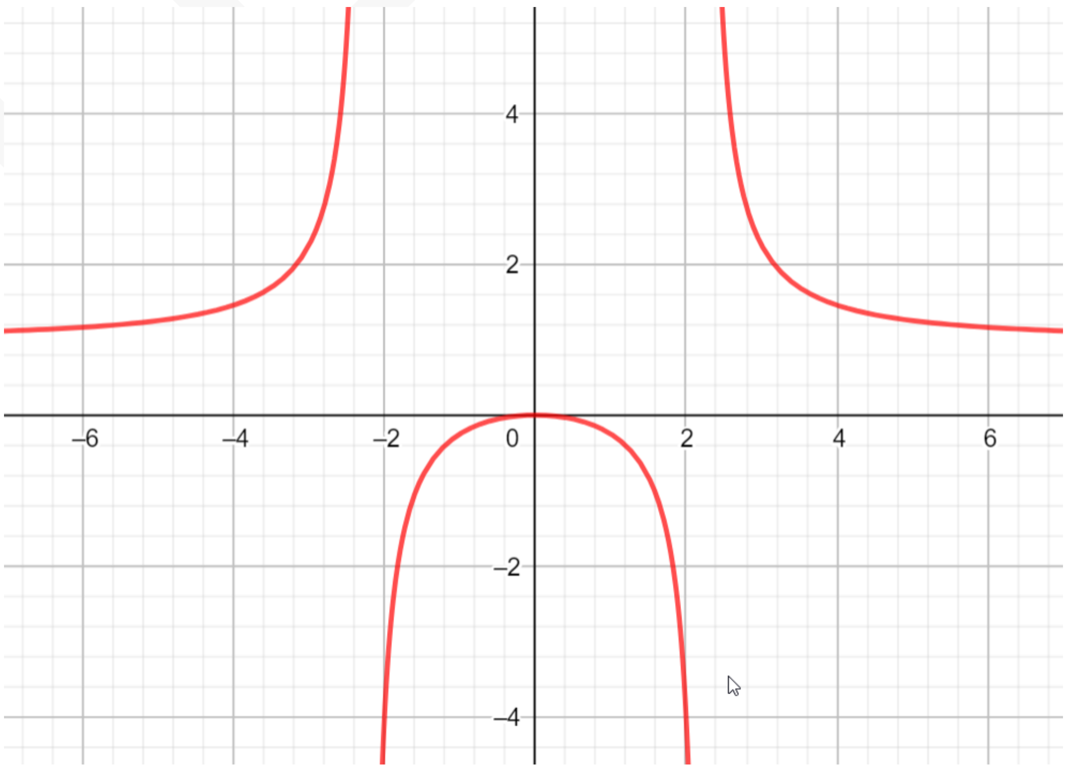


f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-5}$

Podemos apreciar que el denominador siempre es menor que el denominador, aunque el signo de $f(x)$ dependerá del valor exacto de x. Por ello, se puede concluir que no existirán imágenes que pertenezcan al intervalo $(0, 1]$.

Por otra parte, es evidente que el denominador se anula en $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$.

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)}$$



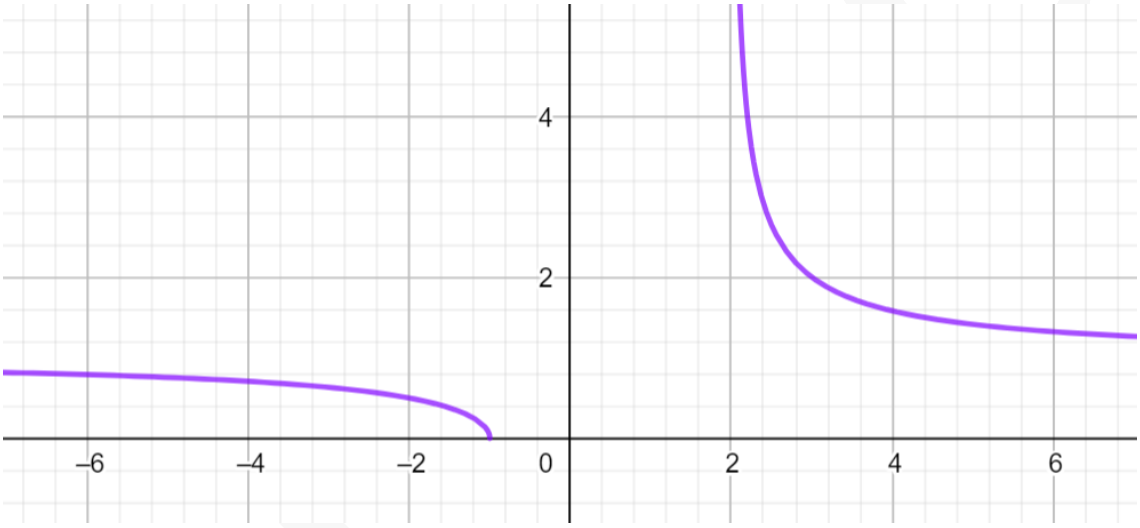
g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$.

Puesto que la condición que se debe cumplir es que el argumento de la raíz cuadrada sea un positivo o nulo, vamos a determinar en qué intervalos se cumple esa condición.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
TOTAL	$+$	$-$	$+$

A la vista de los resultados de la tabla podemos deducir cuál es el dominio de la función.

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty,-1] \cup (2,+\infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = (0,1) \cup (1,+\infty)}$$



PROBLEMA 13

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x}$

c) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

d) $f(x) = (x+|x|)\sqrt{\mathrm{sen}^2(x)}$

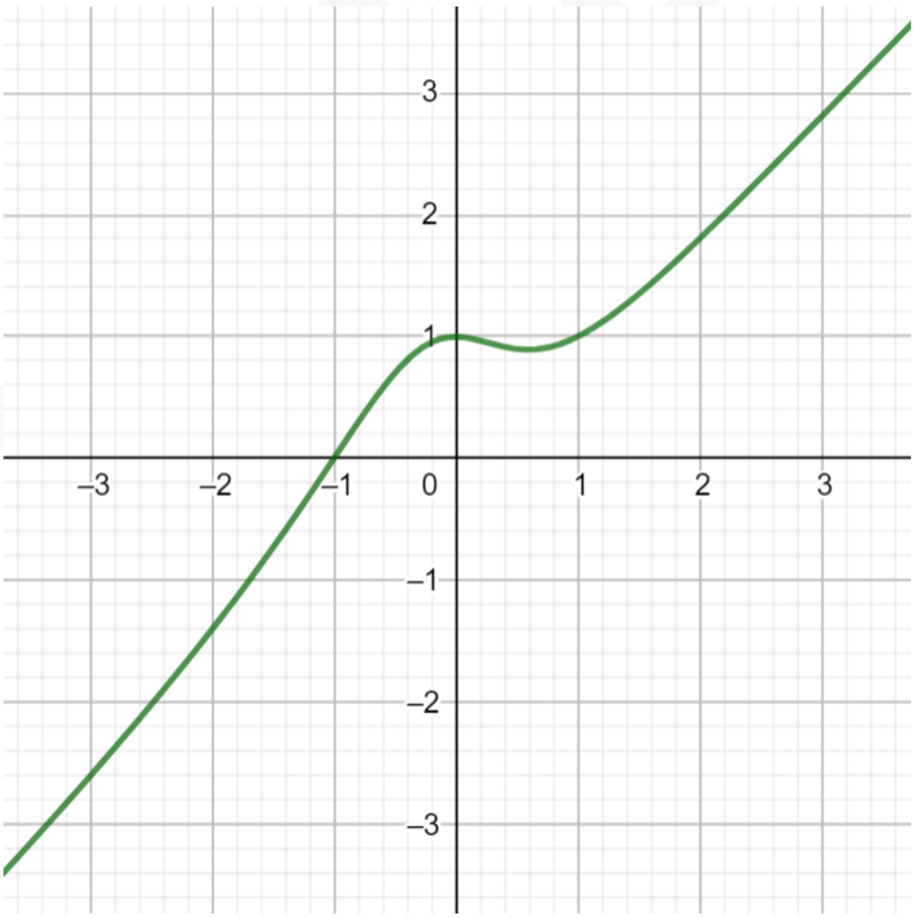
e) $f(x) = \mathrm{Ln}[x(x^2+x-4)]$

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

Podemos comprobar que el denominador nunca se anula y no existen puntos problemáticos debido a raíces, logaritmos, etc. Igualmente, podemos apreciar que el valor de la imagen puede ser tanto mayor como menor que 1.

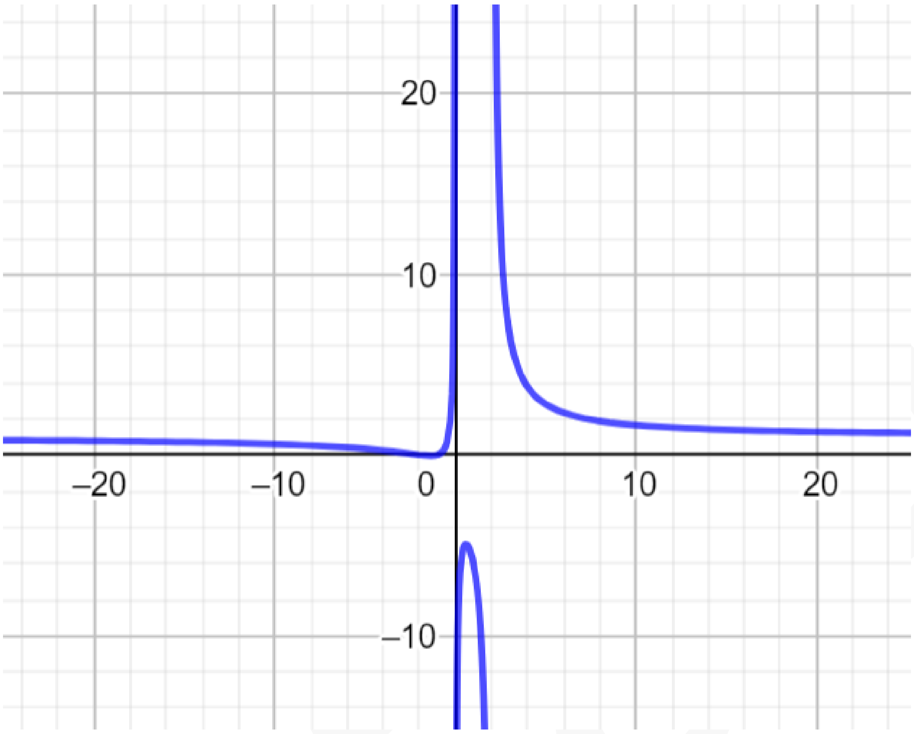
$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, \infty)}$$



b) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x}$

Claramente el denominador se anula en $x=0$ y $x=2$. En esos puntos, la función tiene hacia $\pm\infty$.

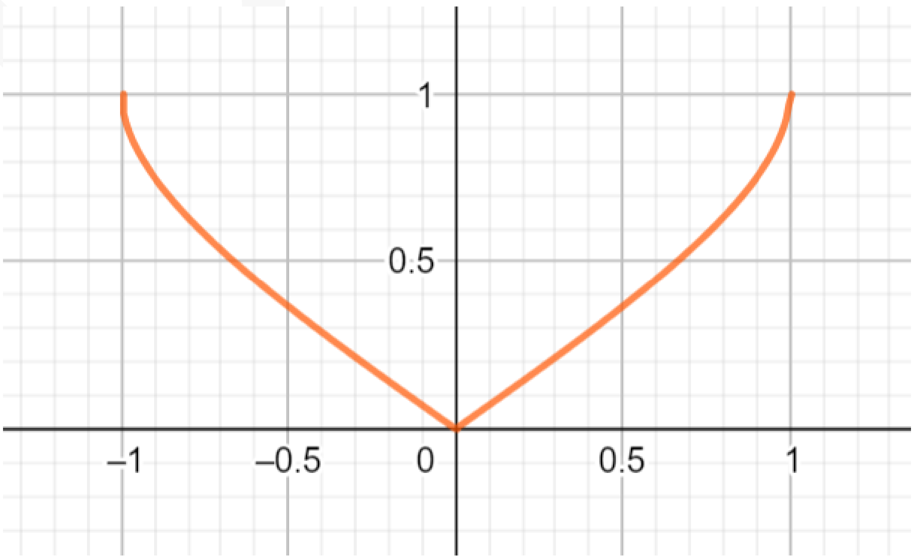
$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)}$$



c) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Condición 1: (interna)} & 1-x^2 \geqslant 0 \implies x^2 \leqslant 1 \implies x \in [-1,1] \\ \text{Condición 2: (externa)} & 1-\sqrt{1-x^2} \geqslant 0 \implies 1 \geqslant \sqrt{1-x^2} \implies 1 \geqslant 1-x^2 \\ & \implies x^2 \geqslant 0 \implies x \in (-\infty,\infty) \end{array}\right] \implies x \in [-1,1]$$

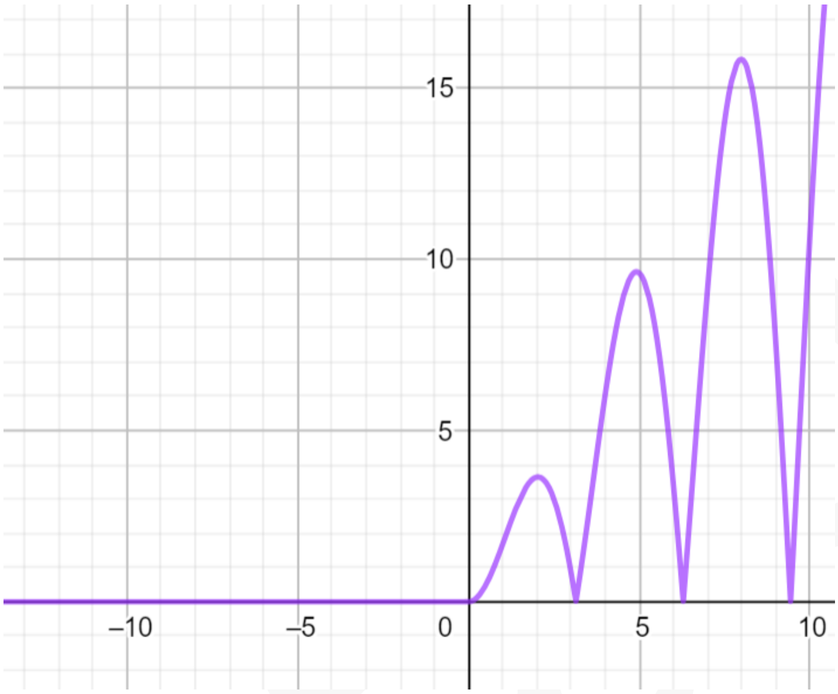
$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = [-1,1]}$$



d) $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\text{sen}^2(x)}$

Al observar la función podemos apreciar que se anula para todo $x \in \mathbb{R}^-$, mientras que las imágenes son mayores o iguales que cero para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)}$$



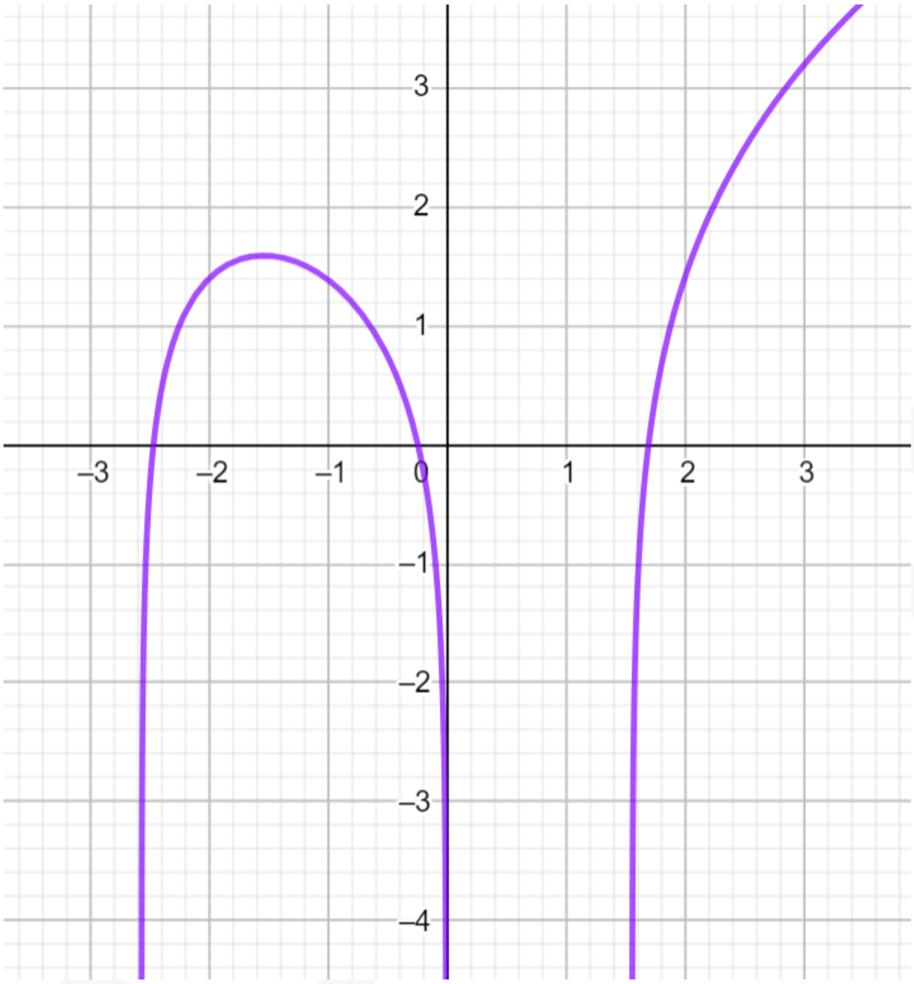
e) $f(x) = \text{Ln}[x(x^2 + x - 4)]$

Al tratarse de un logaritmo, para obtener una imagen real el argumento del logaritmo debe ser estrictamente mayor que cero.

$$x(x^2 + x - 4) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

	$\left(-\infty, -\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$	$\left(-\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, 0\right)$	$\left(0, \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x - \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$
TOTAL	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \left(-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \infty\right)}$$



PROBLEMA 14

Comprueba si las funciones $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = 1 + \cos(x)$ son pares o impares.

Solución:

La función $f(x) = x^3 - x$ es una función *impar*, puesto que se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

La función $g(x) = 1 + \cos(x)$ es una función *par*, puesto que se cumple que $g(-x) = g(x)$.

$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos(x) = g(x)$$

PROBLEMA 15

Demuestra la relación $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.

Solución:

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

PROBLEMA 16

Dada la función $f(x) = x^3 - x + 1$, determina la expresión de la función $g(x)$ construida como:

a) La función $f(x)$ desplazada 3 unidades hacia la derecha.

b) La función $f(x)$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda.

c) La función $f(x)$ desplazada 4 unidades hacia arriba.

d) La función $f(x)$ desplazada 1 unidad hacia abajo.

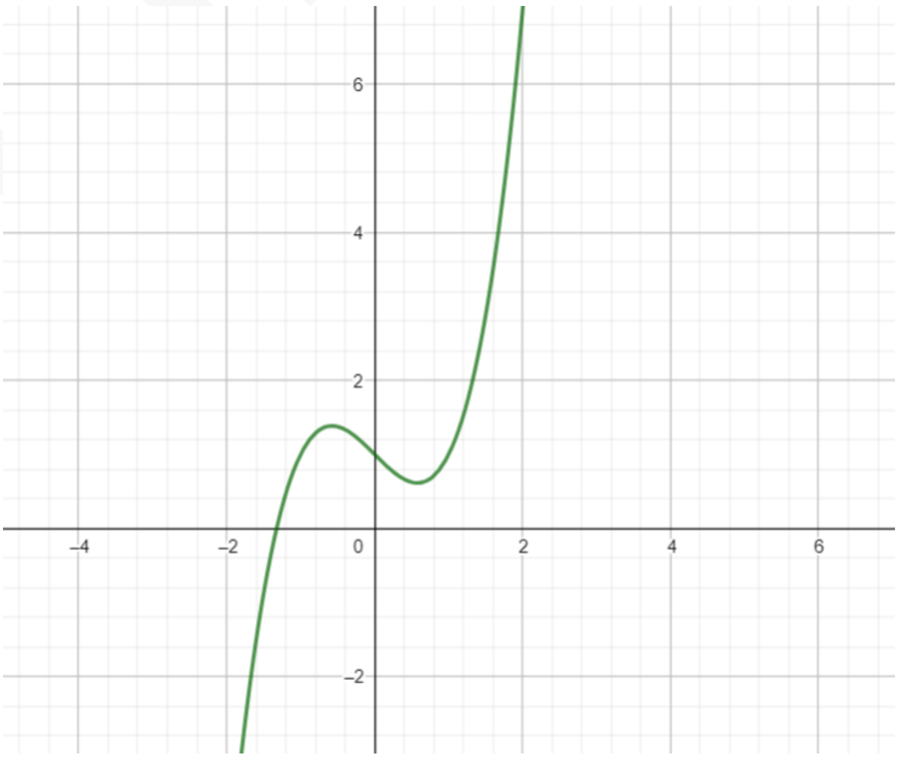
e) La imagen especular de la función $f(x)$ respecto del eje X.

f) La imagen especular de la función $f(x)$ respecto del eje Y.

g) La imagen especular de la función $f(x)$ respecto del origen de coordenadas.

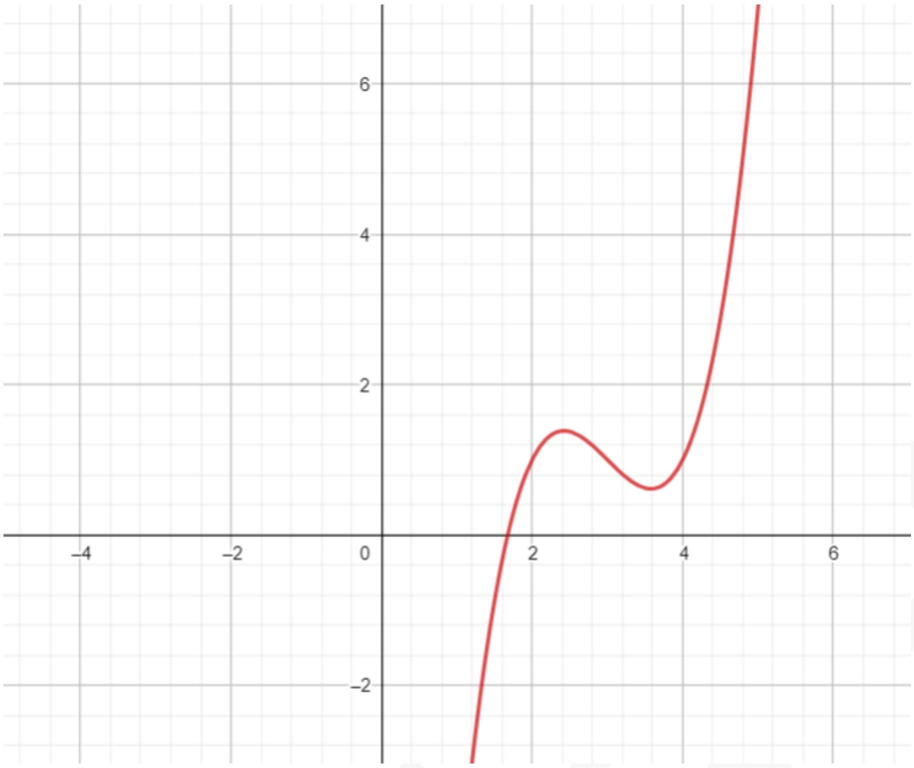
Solución:

La función $f(x) = x^3 - x + 1$ es una función polinómica de tercer grado cuya gráfica se muestra a continuación.



a) Definimos $g(x)$ como la función que equivale a $f(x)$ desplazada 3 unidades a la derecha.

$g(x) = f(x-3) = (x-3)^3 - (x-3) + 1 = x^3 - 9x^2 + 26x - 23$

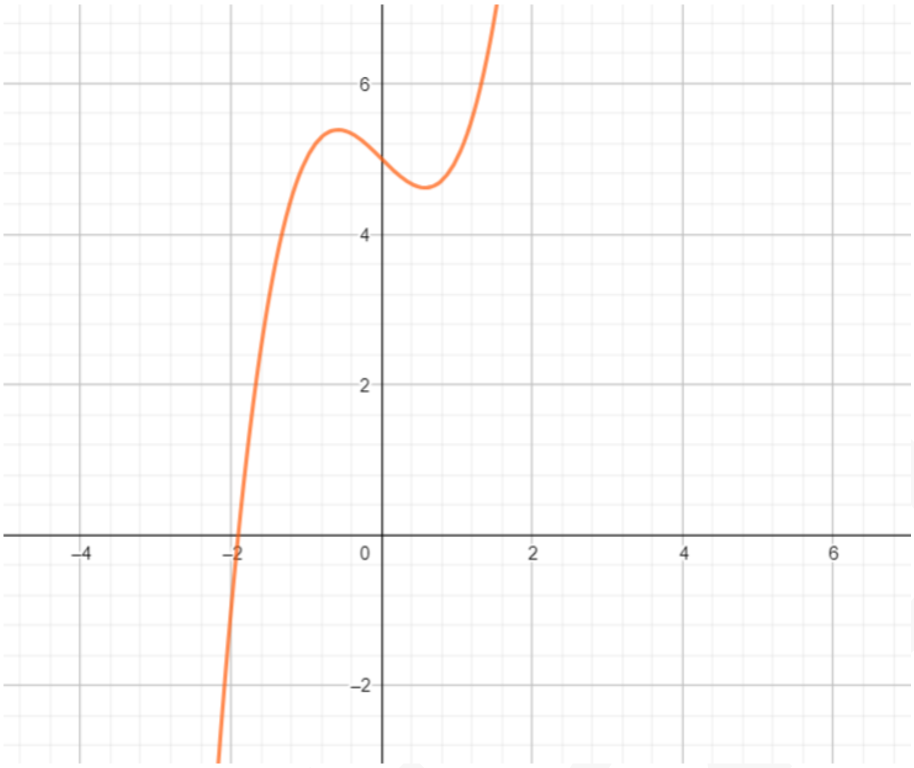


b) Definimos $g(x)$ como la función que equivale a $f(x)$ desplazada 2 unidades a la izquierda.

$g(x) = f(x+2) = (x+2)^3 - (x+2) + 1 = x^3 + 6x^2 + 11x + 7$

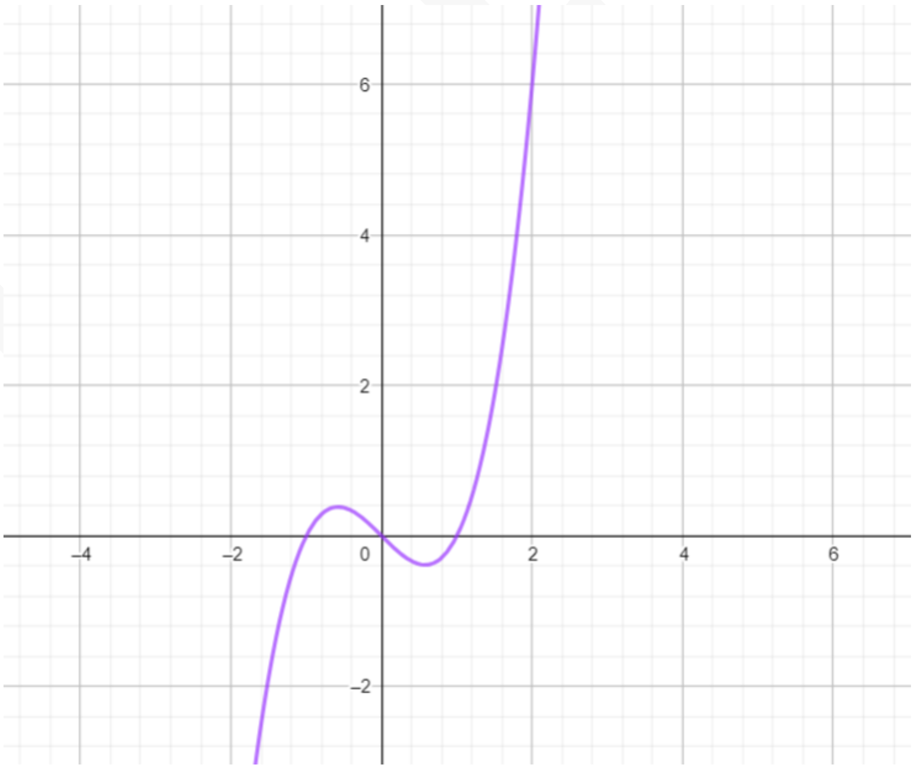
c) Definimos $g(x)$ como la función que equivale a $f(x)$ desplazada 4 unidades hacia arriba.

$g(x) = f(x) + 4 = x^3 - x + 5$



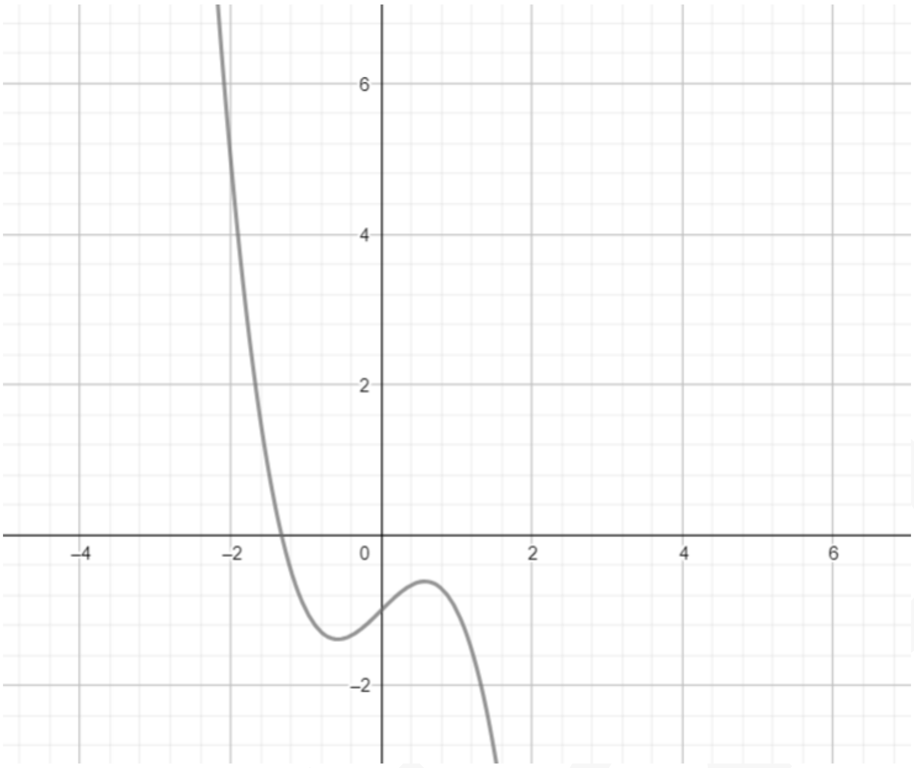
d) Definimos $g(x)$ como la función que equivale a $f(x)$ desplazada 1 unidad hacia abajo.

$g(x) = f(x) - 1 = x^3 - x$



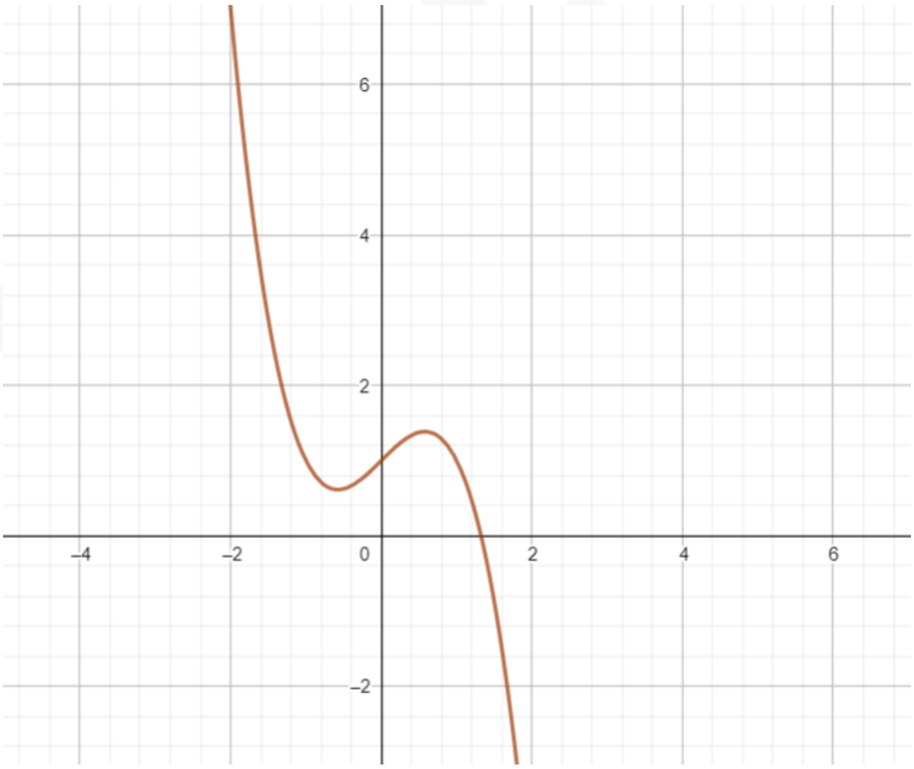
e) Definimos $g(x)$ como la imagen especular de $f(x)$ respecto del eje X.

$$g(x) = -f(x) = -\left(x^3 - x + 1\right) = -x^3 + x - 1$$



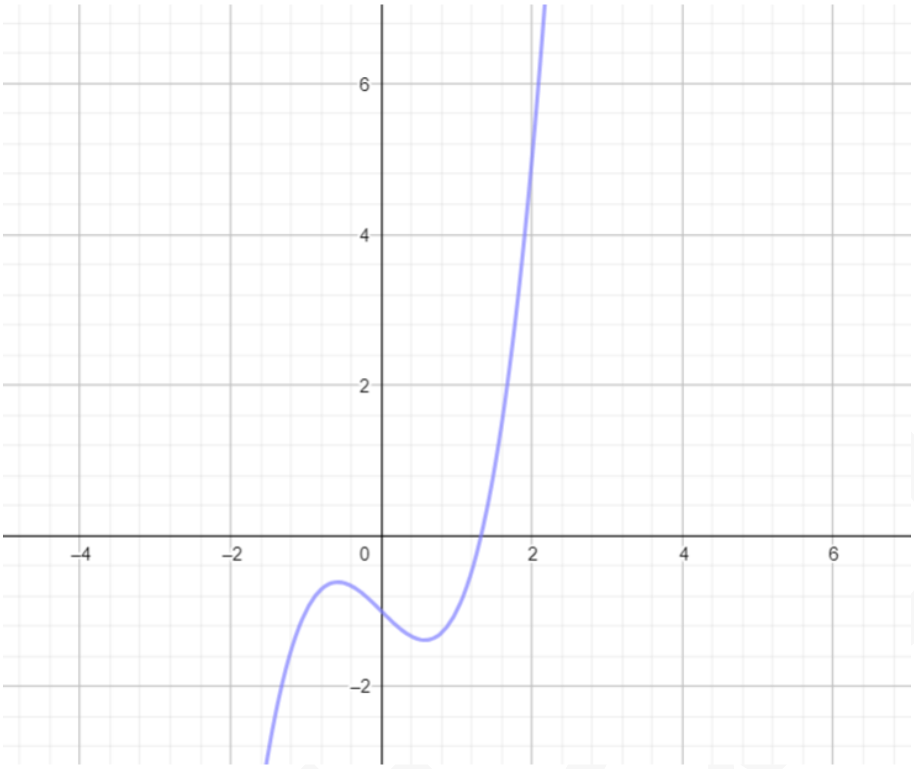
f) Definimos $g(x)$ como la imagen especular de $f(x)$ respecto del eje Y.

$$g(x) = f(-x) = (-x)^3 - (-x) + 1 = -x^3 + x + 1$$



g) Definimos $g(x)$ como la imagen especular de $f(x)$ respecto del origen de coordenadas.

$g(x) = -f(-x) = -(-x^3 + x + 1) = x^3 - x - 1$



PROBLEMA 17

Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ y determina su dominio.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$$

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty) \qquad \mathrm{Dom}(g) = [0, \infty)$$

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = [0, +\infty) \qquad \mathrm{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -2] \cup (-1/2, +\infty)$$

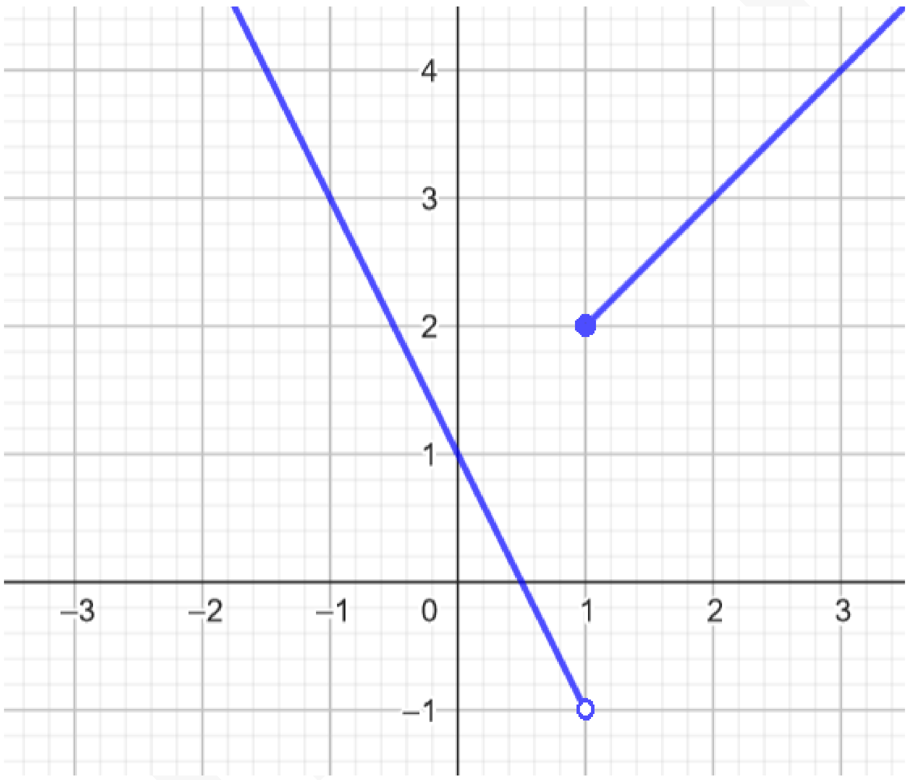
PROBLEMA 18

Calcula las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ definidas por

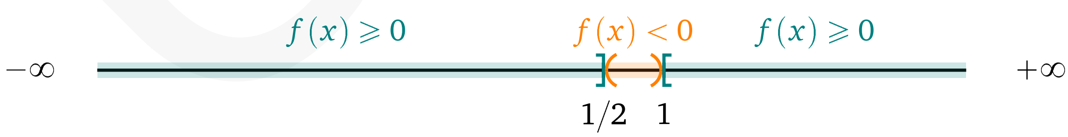
$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & x<1 \\ 1+x & x \geqslant 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1-x & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Solución:

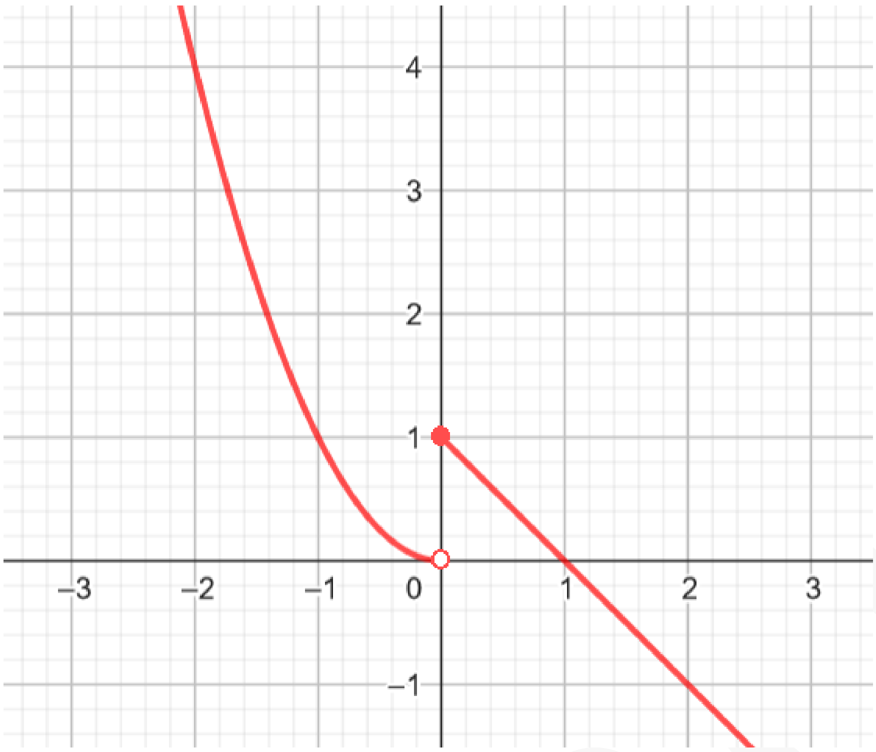
A continuación se muestra la gráfica de la función $f(x)$.

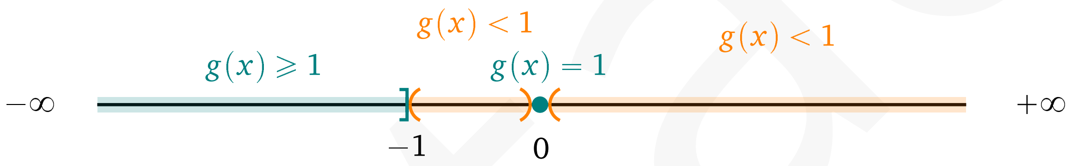


Puesto que luego será necesario, vamos a analizar cuándo la función $f(x)$ tiene imágenes mayores, iguales o menores que 0.



De forma similar, dada la gráfica de la función $g(x)$ analizaremos cuándo la función tiene imágenes mayores, iguales o menores que 1.





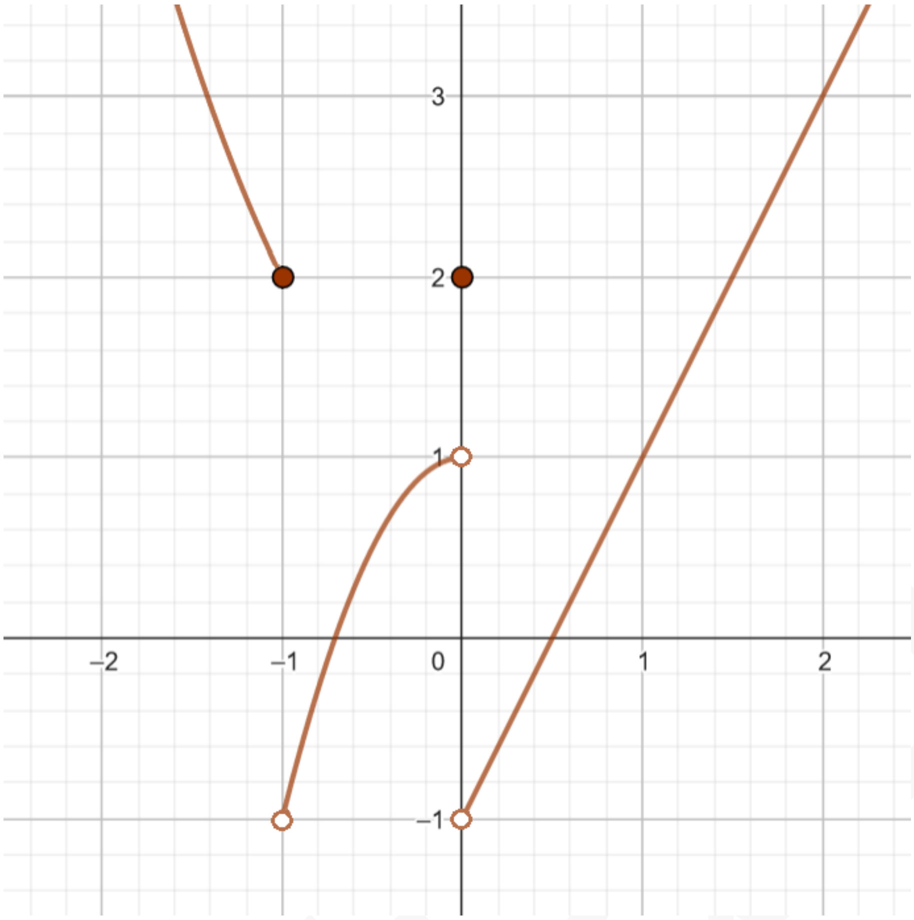
a) Calcularemos primero $(f \circ g)(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x < 1 \\ 1 + x & x \geqslant 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 - x & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \begin{cases} 1 - 2g(x) & g(x) < 1 \\ 1 + g(x) & g(x) \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - 2g(x) & x \in (-1, 0) \cup (0, \infty) \\ 1 + g(x) & x \in (-\infty, -1] \cup \{0\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - 2x^2 & x \in (-1, 0) \\ 1 - 2(1 - x) & x \in (0, +\infty) \\ 1 + x^2 & x \in (-\infty, -1] \\ 1 + (1 - 0) & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 + x^2 & x \in (-\infty, -1] \\ 1 - 2x^2 & x \in (-1, 0) \\ 2 & x = 0 \\ -1 + 2x & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

A continuación se muestra la gráfica de $(f \circ g)(x)$.



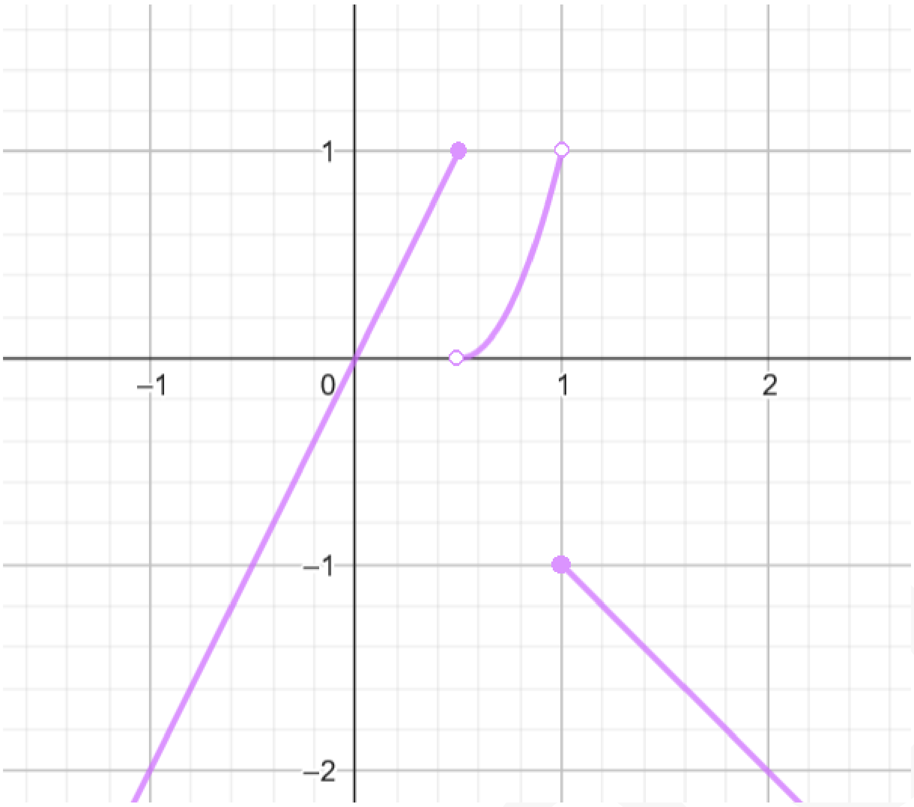
b) Calcularemos ahora $(g \circ f)(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & x<1 \\ 1+x & x \geqslant 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1-x & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} (f(x))^2 & f(x)<0 \\ 1-f(x) & f(x) \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} (f(x))^2 & x \in (1/2,1) \\ 1-f(x) & x \in (-\infty,1/2] \cup [1,\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1-2x)^2 & x \in (1/2,1) \\ 1-(1-2x) & x \in (-\infty,1/2] \\ 1-(1+x) & x \in [1,\infty) \end{cases} = \begin{cases} 2x & x \in (-\infty,1/2] \\ (1-2x)^2 & x \in (1/2,1) \\ -x, & x \in [1,\infty) \end{cases}$$

A continuación se muestra la gráfica de $(g \circ f)(x)$.


1
−1
0
1
2
−1
−2