CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Tema 1

Mar Angulo Martínez
Mar.angulo@u-tad.com

Tema 1. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Concepto de matriz. Operaciones con matrices

- **Matriz A de orden mxn** es un conjunto de m.n elementos de un conjunto K (en adelante, R), dispuestos en m filas y n columnas

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij}) \quad i=1,2\ldots m \qquad j=1,2\ldots n$$

a_{ij} se denominan elementos de la matriz

- *Si* $m \neq n$ *la matriz es rectangular* — *Si* $m = n$, *A es una matriz cuadrada*
- *Si m= 1 A es una matriz fila* — *Si n=1, A es una matriz columna*

$\boldsymbol{M_{\mathrm{mxn}}}$ **conjunto de matrices de orden mxn**

$\boldsymbol{M_n}$**: conjunto de matrices cuadradas de orden n**

- **Matriz nula**: $a_{ij}=0 \quad \forall\, i = 1,2 \ldots m, \quad \forall j = 1,2, \ldots n$

Operaciones con matrices

- **Matrices iguales:** son dos matrices mxn t.q
  $a_{ij} = b_{ij}\ \forall\ i = 1,2 \dots m, \quad \forall j = 1,2, \dots n$

- **Suma de matrices (**del mismo orden mxn**):** es una matriz C de orden mxn cuyos elementos $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \forall\ i = 1,2 \dots m, \quad \forall j = 1,2, \dots n$

- **Producto de un número ($\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}$)por una matriz $\boldsymbol{A_{mxn}}$:**
  es una matriz $\boldsymbol{\alpha}$A de orden mxn cuyos elementos $c_{ij} = \boldsymbol{\alpha}\ a_{ij}\ \forall\ i = 1,2 \dots m, \quad \forall j = 1,2, \dots n$

- **Producto de matrices $\boldsymbol{A_{mxn}}$ y $\boldsymbol{B_{nxp}}$: $\boldsymbol{es\ una\ matriz\ C_{mxp}}$ cuyos elementos** $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots\, a_{in}\, b_{nj}$

Concepto de matriz. Operaciones con matrices

- El conjunto de M_{mxn} *de matrices de orden mxn* para las operaciones suma y producto por un número tiene estructura es espacio vectorial.

- 1) (M_{mxn},+) es un grupo conmutativo:
  - a) $\forall A, B \in M_{mxn},\ A + B \in M_{mxn}$(+ es operación interna)
  - b) $\forall A, B, C \in M_{mxn},\ (A + B) + C = A + (B + C)\ (propiedad\ asociativa)$
  - c) $\forall A \in M_{mxn},\ A + 0 = A\ (elemento\ neutro\ es\ la\ matriz\ nula)$
  - d) $\forall A \in M_{mxn}, \exists -A \in M_{mxn} tal\ que\ A + (-A) = 0\ (matriz\ opuesta)$
  - e) $\forall A, B \in M_{mxn},\quad A + B = B + A\ (propiedad\ conmutativa)$

- 2) (M_{mxn}, .k) verifica las siguientes propiedades: $\forall A, B \in M_{mxn}$ y $\forall \gamma, \mu \in K$
  - a) $(\gamma + \mu)A = \gamma A + \mu$B (distributiva respecto a la suma de escalares)
  - b) $\gamma(A + B) = \gamma A + \gamma B\ (distributiva\ respecto\ a\ la\ suma\ de\ vectores)$
  - c) $\gamma\ (\mu A) = (\gamma\mu)A$ $\qquad d)\ 1. A = A$

Concepto de matriz. Operaciones con matrices

❑ Propiedades del producto de matrices

1) $\forall A, B, C \in M_{mxn},\ A(B+C) = AB + AC$
2) $\forall A, B, C \in M_{mxn},\ (A+B).C = AC + B.C$
3) $\forall A, B \in M_{mxn}, y\ \forall k \in R,\ k(AB) = (kA)$B=A.(kB)
4) $\forall A \in M_{mxn},$ existen matrices I_m e I_n, denominadas matrices de identidad, cuadradas de tamaño m ×m y n ×n respectivamente, cuyas diagonales son todo unos y el resto de los elementos cero, que cumplen: I_mA=A A$I_n = A$

- El producto de matrices NO verifica en general la propiedad conmutativa

Concepto de matriz. Operaciones con matrices

- **Matriz traspuesta** (de una matriz A mxn): es una matriz $A^t = A'$ nxm cuyos elementos $(a_{ij})'= a_{ji}$
  $(Es\ la\ matriz\ que\ se\ obtiene\ al\ intercambiar\ filas\ y$ columnas)

  1) $(A^t)^t$=A   2) $(A+B)^t$= A^t+ B^t 3) $(kA)^t$ =k.A^t 4) $(A.B)^t$= B^t. A^t

- Los elementos a_{ii} de una matriz cuadrada se denominan elementos diagonales de la matriz

- **Traza de una matriz cuadrada** es la suma de sus elementos diagonales
  Tr(A) = a_{11}+ a_{22}+….. a_{nn}

Matrices cuadradas

A Matriz cuadrada de orden n es:

- ❑ **Diagonal** si a_{ij}=0 para i$\neq j$
- ❑ **Escalar** si es diagonal y a_{ii}=k $\forall\, i = 1,2 \ldots n$
- ❑**Unidad** si es escalar y a_{ii}=1 $\forall\, i = 1,2 \ldots n$
- ❑**Triangular superior** si a_{ij}=0 para i$> j$ (todos los elementos por debajo de la diagonal principal son 0)
- ❑**Triangular inferior** si a_{ij}=0 para i$< j$ (todos los elementos por encima de la diagonal principal son 0)

Matrices cuadradas

- **Simétrica** si $A^t = A$ $(coincide\ con\ su\ traspuesta)$
- **Antisimétrica** si $A^t = -A$ $(la\ traspuesta\ coincide\ con\ la\ opuesta)$

- Toda matriz se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica

$$A = \frac{1}{2}(A + A + A^t - A^t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)}_{Simétrica} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)}_{Antisimétrica}$$

Matrices cuadradas

- **Idempotente** si $A^2 = A$
- **Involutiva** si $A^2 = I$
- **Nilpotente** si existe un número entero k>0 tal que $A^k = 0$
- **Regular** si existe A^{-1} tal que A^{-1}. A= A. A^{-1}= I_n (Una matriz regular es la que tiene rango n, su determinante es distinto de 0)
- **Singular** es una matriz no regular (su determinante vale 0 y no admite inversa)
- **Ortogonal** si $A^t = A^{-1}$ (la traspuesta coincide con la inversa)

  Para que una matriz sea ortogonal, los vectores columnas han de ser ortogonales dos a dos y de módulo la unidad. Del mismo modo, los vectores la también serán ortogonales dos a dos y de módulo la unidad.

Preguntas:

- Si con dos matrices podemos hacer AB y BA ¿tienen que ser cuadradas?
- ¿cuál es la traza de la matriz I_5?
- Si A y B son dos matrices cuadradas regulares de orden 2 ¿A+B es regular?
- ¿Cuál es un ejemplo sencillo de matriz ortogonal?

Rango de una matriz

- **Rango de una matriz A de orden mxn** es el número de filas que tiene linealmente independientes; también es el número de columnas linealmente independientes de la matriz. Por tanto, dada una matriz A

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ & . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =(a_{ij}) \quad i=1,2\ldots m \qquad j=1,2\ldots n$$

$$rang\ A \leq \text{mín}\ (m,n)$$

Rango de una matriz

❑Teorema

El número de vectores fila de una matriz A que son linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes y es igual al número de filas no nulas de la matriz equivalente triangular superior

❑Teorema

Si el rango de una matriz cuadrada A coincide con el orden de la matriz (A es de rango completo) entonces A se puede transformar en la matriz unidad mediante operaciones elementales en sus filas

❖ **Ejemplo 1**

Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Rango de una matriz

❑Propiedades del rango de una matriz

- rang(A.B) $\leq mín(rangA, rangB)$
- Rang A^t=rang A
- Una matriz cuadrada tiene inversa si y sólo si rang A =n
- Una matriz cuadrada nxn tiene rango n (completo) si y sólo si det(A)$\neq$ 0
- El rango de una matriz A es el mismo que el de cualquier matriz obtenida de A mediante operaciones elementales
- Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango

❑Transformación de matrices

❑ Operaciones elementales

En una matriz se definen las siguientes operaciones elementales por filas (o por columnas) a:

- La permutación de las filas i y j (intercambio de dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$): matriz Escriba aquí la ecuación.
- El producto de la fila i por una constante <u>no nula</u> : k F_i
- La suma de la fila i más la fila j multiplicada por k$\neq$ 0: F_i+ k F_j

❑Matriz elemental

Es una matriz cuadrada que se obtiene de la matriz unidad al efectuar una sola operación elemental en sus filas (o columnas)

❖ **Ejemplo 2**

- la matriz I_3 se transforma en la matriz E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con la operación $F_3 = F_1 + F_2 + F_3$

Recuerda:

MATRIZ ELEMENTAL (POR FILAS). Se obtiene a partir de la matriz identidad I_m de la siguiente manera:

- F_{ij} : matriz elemental obtenida a partir de la matriz identidad I_m a la que se le han intercambiado las filas i, j
- $F_i(\alpha)$: matriz elemental obtenida a partir de la matriz identidad I_m a la que se le ha multiplicado la fila i por $\alpha \in \mathbb{K}$
- $F_{ij}(\alpha)$: matriz elemental obtenida a partir de la matriz identidad I_m a la cual se le ha sumado a la fila i la fila j multiplicada por α

Matrices equivalentes, congruentes y semejantes

Ejemplo: Triangularizar $la\ matriz\ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$

- A= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} \underset{f_1(\frac{1}{4})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 -20f_1 \\ f_3 +8f_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix} \underset{f_2(\frac{1}{3})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix}$

$\underset{f_3 -9f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$= U(matriz triangular superior equivalente a A)

- U=$F_{32}(-9).\ F_2\left(\frac{1}{3}\right).\ F_{31}(8).\ F_{21}(-20).F_1\left(\frac{1}{4}\right)$A $\longrightarrow$ A=$\left(F_{32}(-9).\ F_2\left(\frac{1}{3}\right).\ F_{31}(8).F_{21}(-20).F_1\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{-1}$.U

Matrices equivalentes, congruentes y semejantes

¿Cómo se construye la matriz L?

- $L = \left(F_{32}(-9).\ F_2\left(\frac{1}{3}\right)\ .\ F_{31}(8)\ .F_{21}(-20)\ .F_1\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{-1} = F_1\ (4)F_{21}(20)F_{31}(-8)F_2(3)F_{32}(9) =$
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 20 & 3 & 0 \\ -8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
(matriz triangular inferior)

- Podemos comprobar que LU= $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 20 & 3 & 0 \\ -8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$ =A

Matrices equivalentes, congruentes y semejantes

❑Matrices equivalentes

- Dos matrices A y B de orden mxn se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante operaciones elementales de filas y columnas.
- Dos matrices A y B son equivalentes si y sólo si existen dos matrices regulares M, N tales que $A=MBN$ $\longrightarrow$ 2 matrices son equivalentes $\Longleftrightarrow$ rang A=rang B

❑Matrices escalonadas

Una matriz escalonada es una matriz triangular superior (con 0 debajo de la diagonal principal) que se obtiene a partir de una matriz A mxn mediante operaciones elementales.

- El primer elemento no nulo de cada fila se denomina **pivote**

❑Proposición

El rango de la matriz A es el número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada obtenida a partir de A a partir de operaciones elementales.

❑Inversa de una matriz

- Una matriz A$\in M_{nxn}$ es inversible, regular o no singular si existe una matriz A^{-1} *que llamamos matriz inversa tal que* $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

- A$\in M_{nxn}$ es inversible si y sólo si su rango es completo: n

- Si A y B son dos matrices $\in M_{nxn}$ inversibles:
  - A^{-1} es única
  - A^{-1} es inversible y $\left(A^{-1}\right)^{-1}$=A
  - *El producto AB es inversible y* $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Aplicación: Método de Gauss

Cálculo de matrices inversas

Si A es una matriz cuadrada de orden n regular, A es equivalente a la matriz Identidad (es decir podemos llegar a la matriz identidad a través de operaciones elementales en los elementos de la matriz A)

Eso significa que existen M y N regulares tales que I=MAN

Si realizamos sólo transformaciones de tipo fila (N=I_n) $\longrightarrow$ $MA = I_n$ $\longrightarrow$ M=A^{-1}

$$\boldsymbol{(A|I_n)} \longrightarrow \boldsymbol{(I_n|A^{-1})}$$

- **Ejemplo 3**

Calcular la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

❑ Construcción de la matriz inversa

- ❑ Dada la matriz A ∈ Mn×n, si rango(A) = n y por tanto A es inversible, a través de transformaciones elementales podemos transformar la matriz A en la matriz unidad, de modo que el producto de las matrices resultantes de esas transformaciones nos dará la matriz inversa de A.

$$P_r\, P_{r-1} \dots P_2 P_1 A = I_n \longrightarrow P_r\, P_{r-1} \dots P_2 P_1 A\, A^{-1} = I_n\, A^{-1}$$

$$\longrightarrow P_r\, P_{r-1} \dots P_2 P_1 = A^{-1}$$

- ❑ Para aplicar este método de forma mecánica, se colocan las matrices A e identidad juntas en una matriz ampliada, y a través de transformaciones elementales se transforma la matriz A en la identidad. Aplicando las mismas transformaciones a la matriz identidad que ocupa la parte derecha de la matriz ampliada, obtenemos la inversa de A.

Matrices equivalentes, congruentes y semejantes

❑Inversa de una matriz rectangular

- ❑ Una matriz que no es cuadrada no tiene inversa propiamente dicha
- ❑ Sin embargo necesitamos para resolver AX=B encontrar una matriz que multiplicada por ella resulte la matriz identidad.
- ❑ La **inversa por la derecha de una matriz rectangular** A es una matriz R tal que AR= I_n y se obtiene R=$A^t(AA^t)^{-1}$
- ❑ La **inversa por la izquierda de una matriz rectangular** A es una matriz L tal que LA=I_n y se obtiene L=$(A^tA)^{-1}A^t$

❑Matrices congruentes

➢ Dos matrices A y B cuadradas de orden n son congruentes si existe una matriz P regular P_{nxn} *tal que* $A = P^t\text{BP}$ (P se denomina matriz de paso)

❑Consecuencias

- Si dos matrices A y B son congruentes, entonces A y B son equivalentes
  Basta considerar M $= P^t$ y N=P
- Si dos matrices A y B son congruentes, entonces rang A = rang B
- La congruencia de matrices es una relación de equivalencia en M_{nxn}
  - Propiedad reflexiva $A = I^t\text{AI}$ P=I
  - Propiedad simétrica $A = P^t\text{BP} \longrightarrow$ B=$(P^{-1})^t AP^{-1}$
  - Propiedad transitiva $A = P^t\text{BP}$ y $B = Q^t\text{CQ} \longrightarrow$ A= $P^t Q^t\text{CQP}$= $(QP)^t CQP$

Matrices semejantes

- Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz P regular P_{nxn} *tal que* $A = P^{-1}\text{BP}$ (P se denomina matriz de paso)

Consecuencias

- Si dos matrices A y B son semejantes, entonces A y B son equivalentes
  Basta considerar M $= P^{-1}$ y N=P
- Si dos matrices A y B son semejantes, entonces rang A = rang B
- La semejanza de matrices es una relación de equivalencia en M_{nxn}
  - Propiedad reflexiva $A = I^{-1}\text{AI}$ P=I
  - Propiedad simétrica $A = P^{-1}\text{BP} \Longrightarrow \text{B}=(P^{-1})^{-1}AP^{-1}$
  - Propiedad transitiva $A = P^{-1}\text{BP}$ y $B = Q^{-1}\text{CQ} \Longrightarrow \text{A}= P^{-1}Q^{-1}\text{CQP}= (QP)^{-1}CQP$

❑ Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones (lineales) que tienen más de una incógnita.

- Las incógnitas aparecen en varias de las ecuaciones, pero no necesariamente en todas.
- **Resolver un sistema** de ecuaciones consiste en encontrar sus soluciones, es decir calcular el valor de cada incógnita que verifica todas las ecuaciones del sistema.

❑ Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

✓ Método de sustitución:

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir su expresión en la otra ecuación.

A partir de ahí ya sólo quedará resolver la ecuación resultante

❖ *Ejemplo* 1 $5x - \frac{y}{2} = -1$ *Ejemplo* 2 $-10x - 5y = 0$

$3x\text{-}2y = 1$ $21x - 7y = 28$

Métodos de sustitución, igualación y reducción

✓ Método de reducción

consiste en realizar operaciones sencillas entre las ecuaciones de modo que una de las incógnitas desaparezca.

A partir de ahí, resolvemos la ecuación resultante con una sola incógnita.

✓**Método de igualación**: consiste en despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita para poder igualar las expresiones, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita.

❖ *Ejemplo* 3

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=\frac{2}{7}$$
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{10}=\frac{3}{7}$$

❑ Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

- ❑ Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}\right\}$$

- ✓ Cada fila corresponde a una ecuación de n incógnitas
- ✓ Los elementos a_{ij} se denominan coeficientes
- ✓ Los elementos b_i se denominan términos independientes
- ✓ Coeficientes y términos independientes son elementos de R o de C

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones

- El sistema de ecuaciones se expresa de la forma **AX=B** donde

A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ Vector de las incógnitas: solución del sistema

A^*=(A|B)= $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ es la matriz ampliada

Método de Gauss-Jordan. Teorema de Rouché-Fröbenius

❑ Discusión y clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

- Sistema compatible es el que tiene solución (Si no la tiene, es incompatible)
- Sistema compatible determinado (SCD) es el que tiene una única solución
- Sistema compatible indeterminado (SCI) es el que tiene infinitas soluciones

❑ Sistemas equivalentes

❑ Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones

Es decir, si toda solución del primer sistema es también solución del segundo, y viceversa

❑ Un sistema de ecuaciones lineales es siempre equivalente a cualquier otro que obtengamos a través de operaciones elementales en sus ecuaciones

Método de Gauss-Jordan. Teorema de Rouché-Fröbenius

➢ Recuerda

❑Operaciones elementales

En una matriz se definen las siguientes operaciones elementales por filas (o por columnas) a:

- La permutación de las filas i y j (intercambio de dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$)
- El producto de la fila i por una constante <u>no nula</u> : k F_i
- La suma de la fila i más la fila j multiplicada por k$\neq$ 0: F_i+ k F_j

➢ Idea

Transformar nuestro sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente, pero que sea Triangular, es decir que tenga todo “0” por debajo de la diagonal principal.

Método de Gauss-Jordan. Teorema de Rouché-Fröbenius

❑ Método de Gauss-Jordan

- ✓ Se plantea como objetivo obtener un sistema de ecuaciones lineales equivalente al dado, pero en el que realizando operaciones elementales en sus filas, llegamos a tener una matriz (A|B) triangular
- ✓ En un 2º paso se resuelven las ecuaciones, comenzando por la última, en cascada

❖ *Ejemplo 4*

$$x + y + 2z = 9$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$

Matrices equivalentes, congruentes y semejantes

Aplicación: Método de Gauss-Jordan

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Si la matriz de coeficientes A es una matriz regular de orden n, mediante transformaciones elementales en sus filas, podemos obtener una matriz equivalente a A, que sea triangular superior

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ & & . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)=(a_{ij}\,|\,b) \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a`_{12} & \dots & & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & & a'_{2n} & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33} & & & b_{3'} \\ & & \dots\dots\dots & & & \\ & & & . & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)=(a_{ij}\,|\,b)$$

Los dos sistemas son equivalentes $\Longrightarrow$ Tienen las mismas soluciones

Método de Gauss-Jordan. Teorema de Rouché-Fröbenius

❑ Teorema de Rouché-Fröbenius

✓ El sistema de ecuaciones AX=B es compatible si y sólo si rang A =rang A^*=k

✓ Si rang A = n (nº de incógnitas), entonces el sistema es compatible determinado:SCD

- Es un sistema que tiene solución única.
- Es equivalente a un sistema de Cramer

✓ Si rang A < n el sistema es compatible indeterminado de orden n-rangA = n-k

- Tiene infinitas soluciones que despejaremos en función de n-k parámetros

Método de Gauss-Jordan. Teorema de Rouché-Fröbenius

Sistema de m ecuaciones y n incógnitas

- *No homogéneo*
  Algún $b_i \neq 0$
  - *Compatible*
    $rangA = rangA^*$
    $\exists$*solución*
    - *rangA=n*
      Determinado
      solución única
    - $rangA < n$
      Indeterminado de orden n-rangA
      Infinitas soluciones
  - *Incompatible*
    $rangA \neq rangA^*$
    $\nexists$*solución*
- *Homogéneo*
  $b_i = 0 \quad i = 1 \ldots m$
  - *Compatible*
    $rangA = rangA^*$
    $\exists$*solución*
    - *rangA=n*
      Determinado
      solución única
    - *Rango A<n*
      Indeterminado de orden n-rang A
      Infinitas soluciones

Regla de Cramer

❑ Sistemas de Cramer

✓ Son sistemas de ecuaciones lineales de tipo $AX = B$ con n incógnitas y con $|A| \neq 0$.
✓ Tienen solución única que se obtiene haciendo $X = A^{-1}B$
✓ Otra forma de obtener la solución de un sistema de Cramer: la regla de Cramer

✓ ***Nota:*** ***son sistemas con igual número de ecuaciones que de incógnitas en los que*** $|A| \neq \mathbf{0}$

❑ Regla de Cramer

✓ $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ donde $|A_i|$ es el determinante de la matriz que resulta de sustituir la columna i por la de términos independientes