CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Álgebra lineal y geometría en R^3

Tema 2

Mar Angulo Martínez

Curso 2022-2023

Tema 2. Álgebra lineal y geometría en R^3

1. Ecuaciones de rectas y planos en el espacio
2. Posiciones relativas de rectas y planos
3. Producto escalar, vectorial y mixto. Aplicaciones
4. El espacio euclídeo. Ángulos y distancia

Operaciones básicas sobre vectores. Módulo

- **Vector fijo** en el plano es un segmento orientado desde el punto A (origen) hasta el punto B (extremo)
- Elementos de un vector:
  - Módulo: es la distancia entre el origen y el extremo, y por tanto, la longitud del segmento
  - Dirección: es la de la recta que contiene al segmento
  - Sentido: es el que va desde el origen A hasta el extremo B

- Dos vectores fijos son equipolentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

- **Vector libre** es el conjunto de todos los vectores fijos equipolentes entre sí.

Notación: $\vec{u}$ = (a,b) denota un vector libre representado por un vector fijo de extremos a y b

Operaciones básicas sobre vectores. Módulo

❑ Operaciones con vectores

Dados $\vec{u}$ = (a,b) y $\vec{v}$ = (c,d) dos vectores en el plano,

- ❑ Suma de vectores: $\vec{u} + \vec{v}$ = (a,b) +(c,d)
- ❑ Producto de un escalar por un vector: k $\vec{u}$= k.(a,b)

❑ Dos **vectores linealmente independientes** si no es posible expresar uno como producto de un escalar por el otro, es decir si $\vec{v} \neq k\,\vec{u}$

✓ Interpretación geométrica: son vectores cuyos extremos forman un triángulo con el origen

❑ Dos **vectores linealmente dependientes** si es posible expresar uno como producto de un escalar por el otro, es decir si existe k tal que $\vec{v} = k\,\vec{u}$

✓ Interpretación geométrica: son vectores cuyos extremos están alineados con el origen

Operaciones básicas sobre vectores. Módulo

✓ **Combinación lineal de vectores** Un vector x ∈ E *es una combinación lineal de un conjunto S de vectores* $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ *si existen números* reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ tales que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n$$

- **Vectores linealmente independientes** si dada una combinación lineal de ellos igualada a 0, necesariamente todos sus coeficientes son nulos

$$a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \ldots a_n\overrightarrow{u_n} = 0 \longrightarrow a_i = 0 \quad i=1,2\ldots n$$

- **Vectores linealmente dependientes** si dada una combinación lineal de ellos igualada a 0, existe alguno de sus coeficientes que es distinto de 0

$$a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \ldots a_n\overrightarrow{u_n} = 0 \qquad \exists i \ t.q. \quad a_i \neq 0$$

Equivalentemente, son linealmente dependientes cuando alguno de los vectores puede expresarse como combinación lineal del resto

Producto escalar, vectorial y mixto. Aplicaciones

❑ Producto escalar de dos vectores

$Definimos\ el\ producto\ escalar\ de\ dos\ vectores\ (en\ función\ de\ sus\ coordenadas)$
$\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ como: $\vec{u}.\vec{v} = x_{1.}\, y_1 + x_{2.}\, y_2 + x_n . y_n$

❑ Producto escalar de dos vectores

$Definimos\ el\ producto\ escalar\ de\ dos\ vectores$ como: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.\,|\vec{v}|.\, cos\alpha$

siendo $\alpha\ el\ ángulo\ formado\ por\ los\ dos\ vectores$

- Si $\vec{u}.\vec{v} > 0 \longrightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$
- Si $\vec{u}.\vec{v} < 0 \longrightarrow \alpha > \frac{\pi}{2}$
- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se dicen ortogonales (perpendiculares)

Producto escalar, vectorial y mixto. Aplicaciones

Ángulo entre dos vectores

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\,\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{x_{1}.\,y_{1}+x_{2}.\,y_{2}+\,x_{n}.y_{n}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2}\,.\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots y_n^2}}$$

- **Ejemplo1**

En R^3 (en el espacio): ¿y el ángulo formado por los vectores (1,1,-1) y (2,2,1)?

Condición de perpendicularidad de dos vectores

Dos vectores son perpendiculares $\vec{u} \perp \vec{v}$ *si y sólo si* $\vec{u}.\,\vec{v} = 0$

- **Ejemplo 2**

Calcular el valor de a para que $\vec{u}$ = (6,5,2) y $\vec{v}$ = (−3,a,2a) sean perpendiculares

Operaciones básicas sobre vectores. Norma

❑Norma de un vector $||\vec{u}||=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$

❑Norma de un vector **de un vector en el espacio** $\vec{u}$ = (a , b, c)

$$||\vec{u}||=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

- Un vector es **unitario** si $\|v\|$**=1**

❑Propiedades

- $\|\boldsymbol{v}\| \geq \mathbf{0}\ \forall v \in V\ y\ \|\boldsymbol{v}\| = \mathbf{0} \longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
- $\|\boldsymbol{\alpha v}\| = |\boldsymbol{\alpha}|\ \|\boldsymbol{v}\|$
- $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + \mathbf{2} < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >$
- $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 \longleftrightarrow$ $< u, v >$=0 Teorema de Pitágoras
- $| < u, v > | \leq \|\boldsymbol{u}\|.\ \|\boldsymbol{v}\|$ Desigualdad de Cauchy-Schwartz
- $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ Desigualdad de Minkowski (triangular)

Producto escalar, vectorial y mixto. Aplicaciones

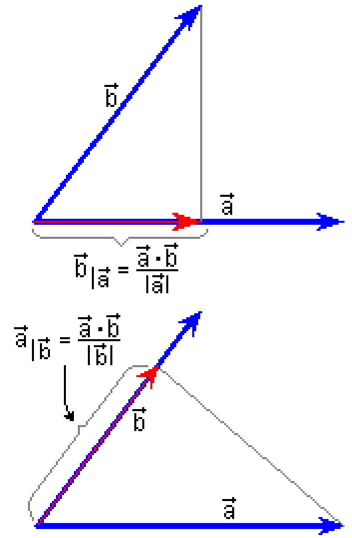
❑ Proyección de un vector $\overrightarrow{v}$ sobre otro vector $\overrightarrow{u}$

$$proy_{\vec{u}}\ (\vec{v}) = |\vec{v}|.\, cos\alpha$$

Es el módulo de la proyección del vector $\vec{u}$ *sobre la dirección del vector* $\vec{v}$

Es un vector paralelo a $\vec{u}$ *que sumado a otro perpendicular a* $\vec{u}$ sea el vector $\vec{v}$

$$\boxed{proy_{\vec{u}}\ (\vec{v}) = \lambda\vec{u} = \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{||\vec{u}||^2}\,\vec{u}}$$



Producto escalar, vectorial y mixto. Aplicaciones

Cálculo de la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre otro vector $\vec{v}$

Queremos obtener $proy_{\vec{u}}\,(\vec{v}) = \overrightarrow{v_1}$ *conociendo los vectores* $\vec{u}$ o $\vec{v}$

Se trata de descomponer $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ donde $\overrightarrow{v_1} \parallel \vec{u}$ y $\overrightarrow{v_2} \perp \vec{u}$

Entonces $\overrightarrow{v_1} = \lambda\vec{u}$ y $<\overrightarrow{v_2}, \vec{u}> = 0$

Como $\overrightarrow{v_2} = \vec{v} - \overrightarrow{v_1}$ $<\overrightarrow{v_2}, u> = <\vec{v} - \overrightarrow{v_1}, \vec{u}> = <\vec{v} - \lambda\vec{u}, \vec{u}> = 0$

$$\boxed{\lambda = \frac{<\vec{v},\vec{u}>}{<\vec{u},\vec{u}>} = \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{||\vec{u}||^2}}$$

$$proy_{\vec{u}}\,(\vec{v}) = \overrightarrow{v_1} = \lambda\vec{u} = \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$$

Producto escalar, vectorial y mixto. Aplicaciones

Ejemplo 3

Calcular $proy_{(3,1,0)}$ $(1,2,1)= \overrightarrow{v_1}$

Se trata de descomponer $(1,2,1)= \overrightarrow{v_1}+ \overrightarrow{v_2}$ donde $\overrightarrow{v_1} \parallel \vec{u}$ y $\overrightarrow{v_2} \perp \vec{u}$

Entonces $\overrightarrow{v_1}=\lambda(3,1,0)$ y $< \overrightarrow{v_2}, \vec{u} >=0$

Como $\overrightarrow{v_2}=(1,2,1) - \lambda(3,1,0)$ $< \overrightarrow{v_2}$,u>=< $(1-3\lambda, 2-\lambda, 1), (3,1,0)$>= 3-9$\lambda + 2 - \lambda$=0

λ=1/2

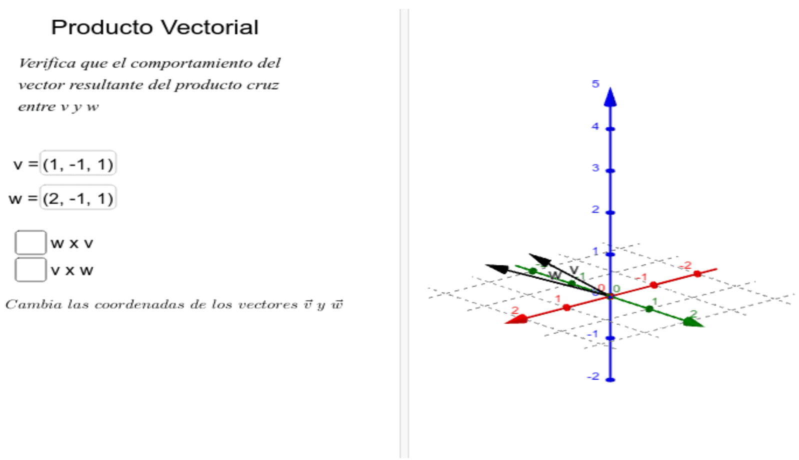
$$proy_{\vec{u}} (\vec{v})= \overrightarrow{v_1} = \frac{1}{2}(3,1,0) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

Producto escalar, vectorial y mixto. Aplicaciones

❑ **Producto vectorial** de dos vectores

$Definimos\ el\ producto\ vectorial\ de\ dos\ vectores\ (en\ función\ de\ sus\ coordenadas)$
$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ como: $\vec{u}$x$\vec{v}$ =($x_2.\ y_3 - x_{3.}\, y_{2,}$ $-(x_1.\ y_3$ - $x_{3.}\, y_1$), $x_1.\ y_2 - x_{2.}\, y_1$)

- Nota: El producto vectorial no está definido en R^2



$$\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right| =$$

$$= 6\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k} - 4\vec{j} - 4\vec{i} - 9\vec{k} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 64 + 49} = \sqrt{117}$$

Producto escalar, vectorial y mixto. Aplicaciones

- *el producto vectorial de dos vectores es por tanto un vector que tiene*:

  -Módulo $\|\vec{u}x\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.sen\alpha$

  -Dirección: Perpendicular al plano que definen los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

  -Sentido: el del sacacorchos que gira desde $\vec{u}$ hasta $\vec{v}$
- Geométricamente, el producto vectorial $\vec{u}x\vec{v}$ define un paralelogramo de lados $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ que tiene área $\|\vec{u}x\vec{v}\|$

- **Ejemplo 4** Calcular un vector unitario perpendicular a u=(1,2,0) y v=(1,0,3)
- **Ejemplo 5** Calcular el área del triángulo definido por los vértices A = (1,1,1), B = (3,1,0) y C = (−2,−4,1)
- **Ejemplo 6** Dados los puntos A = (2,0,2), B = (1,1,1) y C = (−1,3,a) calcular el valor del parámetro “a” para que estén alineados
- **Ejemplo 7** Calcular “a” para que A = (2,0,2), B = (1,1,1) y C = (−1,3,a) sean vértices de un paralelogramo de área 3

Propiedades del producto vectorial

- El producto vectorial $\vec{u}x\vec{v}$ de dos vectores es un vector simultáneamente ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

  porque $< \vec{u}\, , \vec{u}x\vec{v} >=0$ y $< \vec{v}\, , \vec{u}x\vec{v} >=0$

- Propiedad distributiva

  porque $\vec{u}\,x(\vec{v}+\vec{w})= \vec{u}\,x\vec{v}+ \vec{u}\,x\vec{w}$

  y $(\vec{v}+\vec{w})x\,\vec{u} = \vec{v}x\vec{u}+\vec{w}x\vec{u}$

- El producto vectorial es anticonmutativo; cumple que $\vec{u}x\vec{v}= - \vec{v}x\vec{u}$

- Propiedad asociativa de escalares y vectores

  porque $\alpha(\vec{u}x\vec{v})= (\alpha\vec{u})x\vec{v}+ \vec{u}\,x(\alpha\vec{v})$

- $\vec{u}x\vec{0} = \vec{0}x\vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u}x\vec{u} = \vec{0}$

❑ Vector normal a uno dado en R^2

Dado $\vec{u}$= (u_x, u_y) vector de R^2, un vector ortogonal a $\vec{u}$ es $(-u_y, u_x)$

❖ **Ejemplo 8**

Calcular un vector v ortonormal a la recta que une los puntos A=(2,0) y B=(5,-1)

❑ Vector normal a uno dado en R^3

El producto vectorial $\vec{u}$x$\vec{v}$ es un vector simultáneamente perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$

❖ **Ejemplo 9**

Calcular dos vectores ortogonales a u = (1,0,2) que sean a su vez ortogonales entre sí

Producto escalar, vectorial y mixto. Aplicaciones

❑ Producto mixto de tres vectores

$$Definimos\ el\ producto\ mixto\ de\ tres\ vectores\ \vec{u}\ .\ (\vec{v}\mathrm{x}\vec{w})$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)\ , \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w, w_3)$$

- El producto mixto de tres vectores se calcula resolviendo el determinante que tiene por filas las coordenadas de dichos vectores $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

- Geométricamente, el producto mixto representa el volumen del paralelepípedo determinado por esos tres vectores
- 3 vectores o 4 puntos son coplanarios (están en el mismo plano) $\Longleftrightarrow$ el volumen que determinan es 0

- **Ejemplo 10** Calcular el volumen del paralelepípedo definido por 4 puntos

  $A = (1,1,1), B = (3,1,4), C = (-2,-4,6)$ y $D = (-3,4,-1)$

Baricentro de un triángulo de vértices A, B y C

Punto intersección de las tres medianas del triángulo.

- Las medianas de un triángulo son los segmentos que unen cada vértice con el punto medio de la cara opuesta
- el baricentro de un triángulo se obtiene sumando las coordenadas de sus vértices y dividiendo por 3.

- **Ejemplo 11**

Calcular el baricentro del triángulo formado por los vértices $A = (-1,-1,0)$, $B = (2,-2,1)$ y $C = (2,5,1)$

❑ El espacio afín

Dados un conjunto A (cuyos elementos llamamos puntos) y un espacio vectorial E (formado por vectores), decimos que A es un espacio afín asociado al espacio vectorial E si existe una aplicación

$$\begin{aligned} A\times E &\longrightarrow A \\ (P,\vec{v}) &\longrightarrow Q = P + \vec{v} \end{aligned}$$

que cumple:

1) Para todo par de puntos P,Q, existe un único vector $\vec{v}$ tal que Q= P+ $\vec{v}$
2) Para todo P punto de A y para todo par de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ de E,

   se verifica que: (P+ $\vec{u}$)+ $\vec{v}$ = P + ($\vec{u} + \vec{v}$)

❑ Sistema de referencia afín

es R={0, e_1, e_2..., e_n} donde O es el origen y B={e_1, e_2..., e_n} es una base del espacio vectorial E

❑ Subespacio afín (o variedad afín)

es cualquier subconjunto de un espacio afín con estructura de espacio afín

❑ **Variedad lineal** que pasa por P y tiene a F como subespacio de dirección

B={P+ $\vec{v}$/ P∈ $A, \vec{v} \in F\}$ $donde\ F\ es\ un\ subespacio\ vectorial\ de\ E$

- ❑ El plano afín R^2 Sistema de referencia: {0=(0,0), e_1= (1,0), e_2=(0,1)}
- ❑ El espacio afín R^3 Sistema de referencia: {0=(0,0,0), e_1= (1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)}

❑ $Rectas\ en\ R^3$ son variedades de dimensión 1 engendradas por 2 puntos (1 vector)

❑ $Planos\ en\ R^3$ son variedades de dimensión 2 engendradas por 3 puntos no alineados (2 vectores linealmente independientes)

El espacio afín. Rectas y planos

❑ $\boldsymbol{Rectas\ en\ R^3}$

Recta que pasa por un punto P=($x_{0,}\ y_{0,}z_0$) y tiene vector director $\vec{v}$ =($v_{1,}\ v_{2,}v_3$)

- Ecuación vectorial de la recta: (x,y,z) = P+t$\vec{v}$ =($x_{0,}\ y_{0,}z_0$) +t($v_{1,}\ v_{2,}v_3$)
- Ecuaciones paramétricas de la recta: x = x_0 +tv_1
  y = y_0 +tv_2
  z = z_0 +tv_3
- Ecuación continua de la recta: $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$
- Recta como intersección de dos planos: Ax+By+Cz+D=0
  A´x+B´y+C´z+D´=0

❑ *Planos en R^3*

Plano que pasa por un punto P=($x_{0,}$ $y_{0,}z_0$) y tiene vectores directores $\vec{u}$ =($u_{1,}$ $u_{2,}u_3$) y $\vec{v}$ =($v_{1,}$ $v_{2,}v_3$)

- Ecuación vectorial del plano: (x,y,z) = P+t$\vec{u}$ +s$\vec{v}$ =($x_{0,}$ $y_{0,}z_0$) + t($u_{1,}$ $u_{2,}u_3$) +s($v_{1,}$ $v_{2,}v_3$)
- Ecuaciones paramétricas del plano: x = x_0 +tu_1+sv_1
  y = y_0 +tu_2+ sv_2
  z = z_0 +tu_3 + sv_3

- Ecuación general (implícita) del plano: Ax+By+Cz+D=0

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0$$

- Ecuación normal (de Hasse) del plano: $\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ =0

El espacio afín. Rectas y planos

❖ **Ejemplo 12**

Obtener todas las ecuaciones de la recta r: $x=2-t$; $y=1+t$; $z=3+2t$

❖ **Ejemplo 13**

Obtener todas las ecuaciones del plano de ecuaciones paramétricas

$x = 2+s-t$

$y = 1-s+2t$

$z = -1+2s+t \qquad s,t \in R$

❖ **Ejemplo 14**

Calcular las ecuaciones paramétricas del plano de ecuación implícita: $x-2y+z = 2$

❑ *Ángulo entre rectas y planos*

- ✓ Ángulo que forman dos rectas: es el ángulo que forman sus vectores directores
- ✓ Ángulo que forman dos planos: es el ángulo que forman sus vectores característicos
- ✓ Ángulo que forman una recta y un plano: es el complementario del ángulo que forman el vector director de la recta y el vector característico del plano

❑ *Paralelismo y perpendicularidad*

✓ Si r_1 y r_2 son dos rectas cuyos vectores directores son $\overrightarrow{v_1}=(a_1, a_2, a_3)$ $\overrightarrow{v_2}=(b_1, b_2, b_3)$

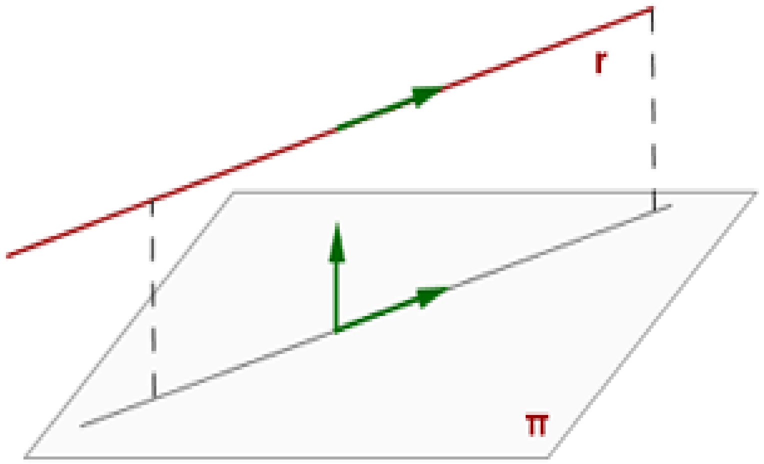
Las rectas r_1 y r_2 son paralelas si $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

✓ Si π_1 y π_2 son dos planos cuyos vectores característicos (normales) son $\overrightarrow{v_1}=(A_1, A_2, A_3)$ y $\overrightarrow{v_2}=(B_1, B_2, B_3)$, los planos π_1 y π_2 son paralelos si $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}$

El espacio afín. Rectas y planos

- ✓ r_1 y r_2 son dos rectas perpendiculares si sus vectores directores son $ortogonales, es\ decir, si\ a_1\ b_1 + a_2\ b_2 + a_3\ b_3 = 0$

- ✓ π_1 y π_2 son dos planos perpendiculares si sus vectores directores son $ortogonales, es\ decir, si\ A_1\ B_1 + A_2\ B_2 + A_3\ B_3 = 0$



- ✓ $La\ recta\ r\ es\ paralela\ al\ plano\ \pi\ si\ el$ vector director de r yel vector normal de π son ortogonales

- ✓ $La\ recta\ r\ es\ perpendicular\ al\ plano\ \pi\ si\ el$ vector director de r yel vector normal de π son proporcionales

El espacio afín. Rectas y planos

❑ *Posiciones relativas de rectas y planos*

Idea: los puntos de corte (intersección) entre rectas, planos o entre rectas y planos son las soluciones del sistema de las ecuaciones correspondientes

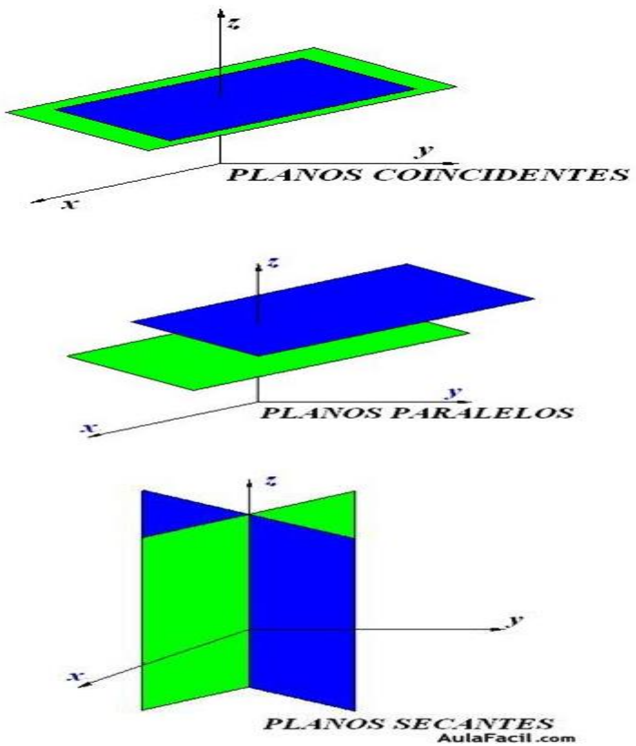
❑ *Posición relativa de 2 planos*

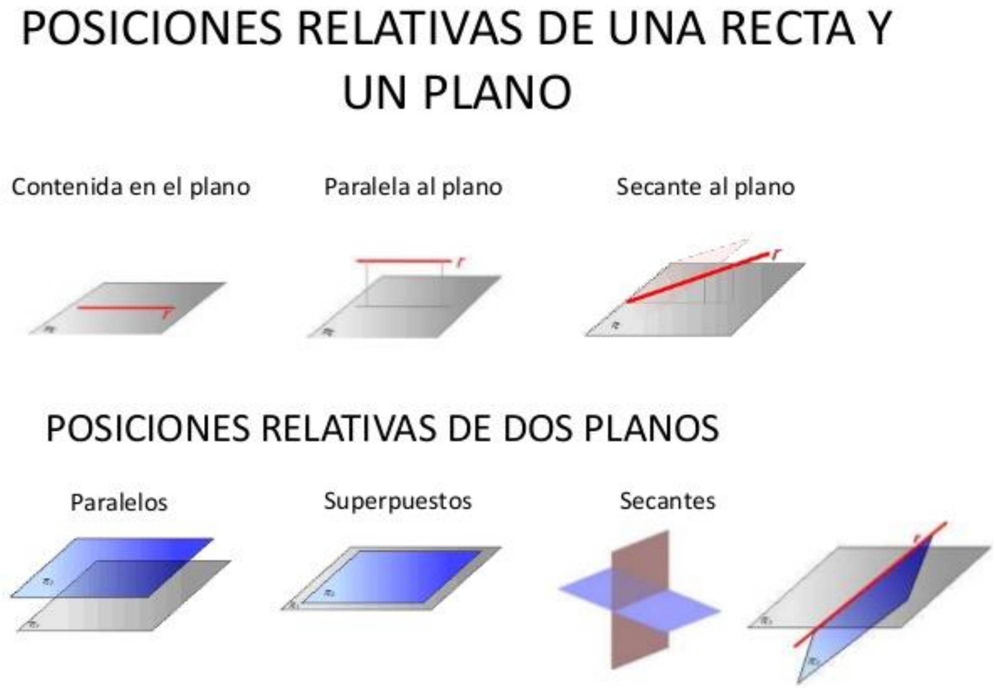
Idea: los puntos de corte (intersección) entre rectas, planos o entre rectas y planos son las soluciones del sistema de las ecuaciones correspondientes

- Dados dos planos: $\pi_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $\pi_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Si M es la matriz de coeficientes y N es la matriz ampliada (con términos independientes)
- ✓ Si rangM =rangN = 2 Sist. Compatible Indeterminado de orden 1
  Solución: 2 planos que se cortan en una recta
- ✓ Si rang M=rangN = 1 SCI de orden 2: Solución: 2 planos coincidentes
- ✓ Si rangM=1 y rangN=2 Sist. Incompatible: planos paralelos

El espacio afín. Rectas y planos





El espacio afín. Rectas y planos

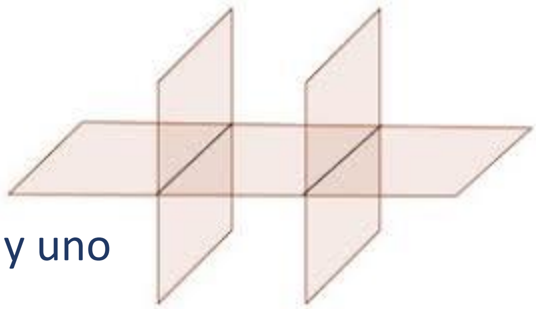
❑ *Posición relativa de 3 planos*

Dados tres planos: $\pi_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $\pi_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ $\pi_3 = a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$

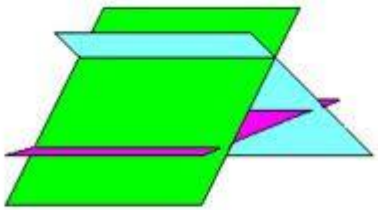
Si M es la matriz de coeficientes y N es la matriz ampliada (con términos independientes)

- ✓ Si rangM =rangN = 3 Sist. Compatible Determinado : 3 planos que se cortan en un punto (forman un ángulo triedro)
- ✓ Si rang M=rangN = 2 SCI de orden 1: Solución: 3 planos que se cortan en una recta (haz de planos)
- ✓ Si rangM=1 y rangN=1 Sist. Compatible Indeterminado de orden 2 : 3 planos coincidentes
- ✓ Si rangM=2 y rang N = 3: Sistema Incompatible $\longrightarrow$ Analizar planos 2 a 2
  - ✓ Si en M hay 2 filas proporcionales, son dos planos paralelos y uno que los corta
  - ✓ Si en M no hay 2 filas proporcionales: son 3 planos que se cortan dos a dos
- ✓ Si rangM=1 y rangN=2: Sistema Incompatible Analizar planos 2 a 2
  - ✓ Hay dos planos coincidentes y un tercero paralelo a ambos
  - ✓ ó los 3 planos son paralelos

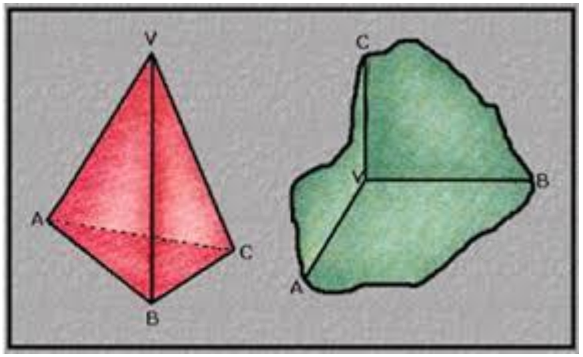
El espacio afín. Rectas y planos



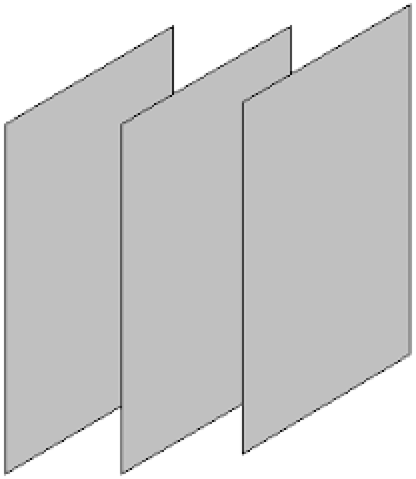
2 planos paralelos y uno que los corta



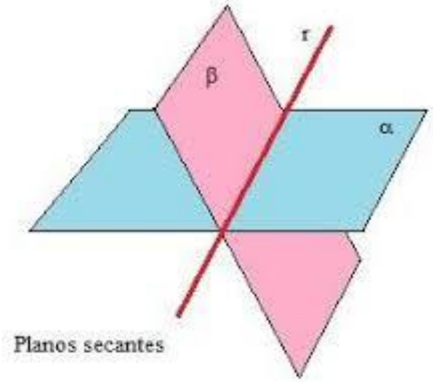
Se cortan dos a dos



3 planos que se cortan en un punto



3 planos paralelos



Planos que se cortan en una recta

❑ *Posición relativa de recta y plano*

Dados un plano: $\pi = a_1$x+ b_1y+ c_1z+ d_1 =0 y una recta expresada como intersección de dos planos $\sigma = a_2$x+ b_2y+ c_2z+ d_2 =0 $\delta = a_3$x+ b_3y+ c_3z+ d_3 =0

Si M es la matriz de coeficientes y N es la matriz ampliada (con términos independientes)

- ✓ Si rangM =rangN = 2 Sist. Compatible Indeterminado de orden uno: la solución es una recta: la recta está contenida en el plano
- ✓ Si rang M=rangN = 3 Sistema Compatible Determinado: Solución:un punto;
- ✓ la recta es secante al plano
- ✓ Si rangM=2 y rangN=3 Sist. Incompatible: la recta es paralela al plano

❑ *Posición relativa de 2 rectas*

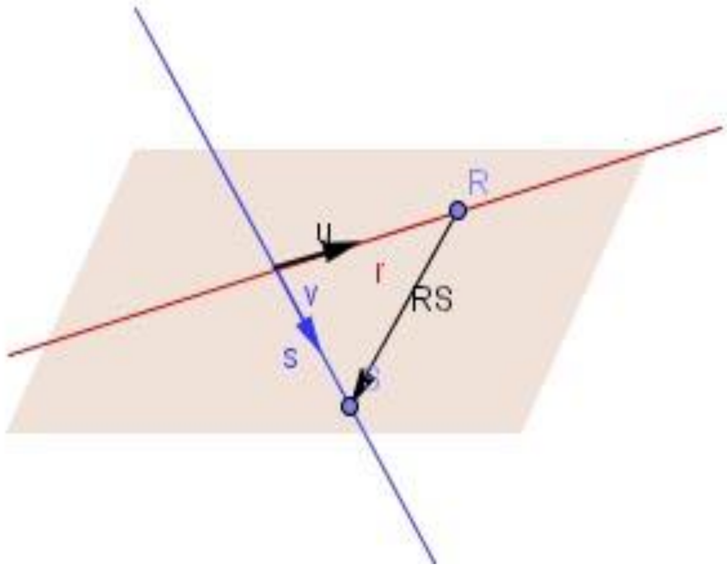
Dadas una recta r (como intersección de dos planos):

$$r \equiv \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases} \text{ y } \qquad s \equiv \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$$

Si M es la matriz de coeficientes y N es la matriz ampliada (con términos independientes)

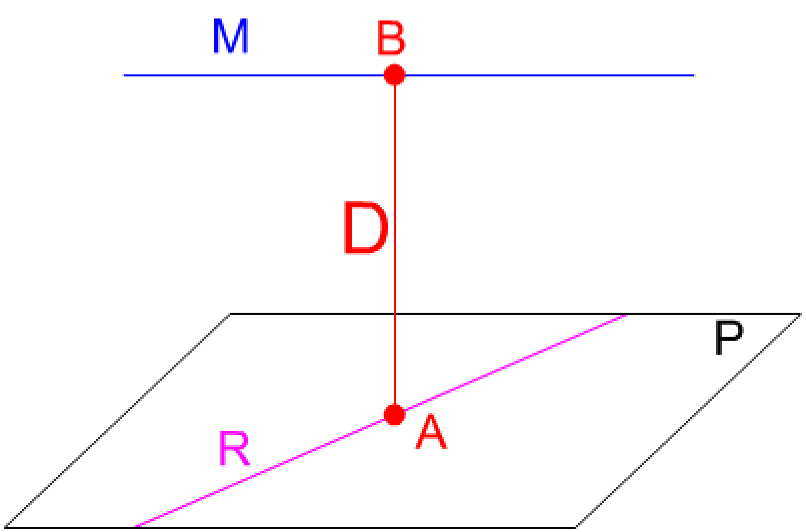
- ✓ Si rangM =rangN = 2 Sist. Compatible Indeterminado de orden uno: la solución es una recta: las rectas son coincidentes
- ✓ Si rang M=rangN = 3 Sistema Compatible Determinado: Solución:un punto;
- ✓ Las 2 rectas se cortan en un punto
- ✓ Si rangM=2 y rangN=3 Sist. Incompatible: las rectas son paralelas
- ✓ Si rangM =3 y rang N =4 Sist. Incompatible: las rectas se cruzan en el espacio

El espacio afín. Rectas y planos



Rectas que se cortan
(están en el mismo plano)

Rectas que se cruzan
(están en planos distintos)



Norma. Distancias

❑ *Norma de un vector*

Se llama longitud, norma o módulo de un vector $\overrightarrow{u}$ y se denota $\|\vec{u}\| = |\vec{u}|$ =u, a la raíz cuadrada del producto escalar de ese vector por sí mismo.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$$

❑ *Propiedades de la norma*

- ✓ Si $|\vec{u}|$=1, el vector se denomina unitario
- ✓ $|\vec{u}|$=0 $\Longleftrightarrow$ $\vec{u}$ =0
- ✓ $|\gamma\vec{u}| = |\gamma|\,|\vec{u}|\ \forall\, \gamma \in R\ y\ \forall\, \vec{u} \in$E
- ✓ $\forall\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in$ E, $-|\vec{u}|.|\vec{v}| \leq \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (Desigualdad de Schwarz)
- ✓ $\forall\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in$ E, $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (Desigualdades triangulares)

$$\big||\vec{u}| - |\vec{v}|\big| \leq |\vec{u}-\vec{v}|$$

❑ *Distancias*

- ***Distancia entre dos puntos*** $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- ***Distancia de un punto P a una recta r*** es la distancia de P al punto Q, intersección de r con el plano perpendicular a dicha recta
  - Otra forma de calcularla: $d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{RT} \times \overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{RT}|}$

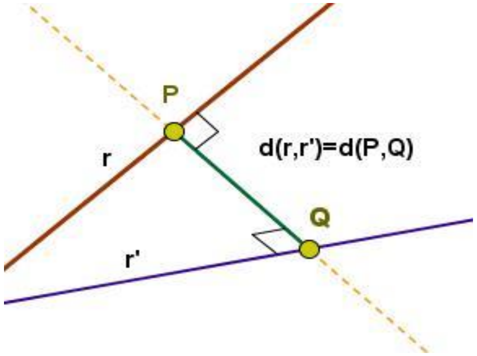
  donde R y T son puntos cualesquiera de la recta r

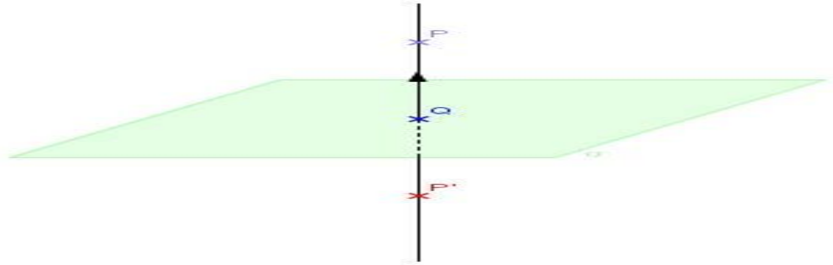
Norma. Distancias

- ***Distancia de un punto P a un plano*** $\boldsymbol{\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0}$

es la distancia de $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$al punto Q intersección del plano con la recta perpendicular a π

  - Otra forma de calcular la distancia es: **d(P,π)=** $\left|\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$





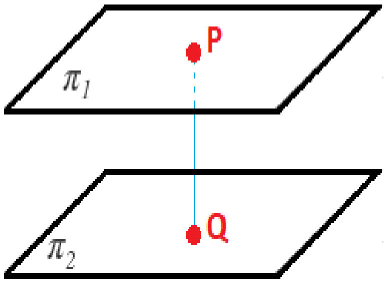
- ***Distancia de un plano*** $\boldsymbol{\pi}$ ***a una recta*** $\boldsymbol{r \equiv Ax + By + Cz + D = 0}$

✓ *Si el plano y la recta son secantes o si la recta está contenida en el plano,* $d = 0$

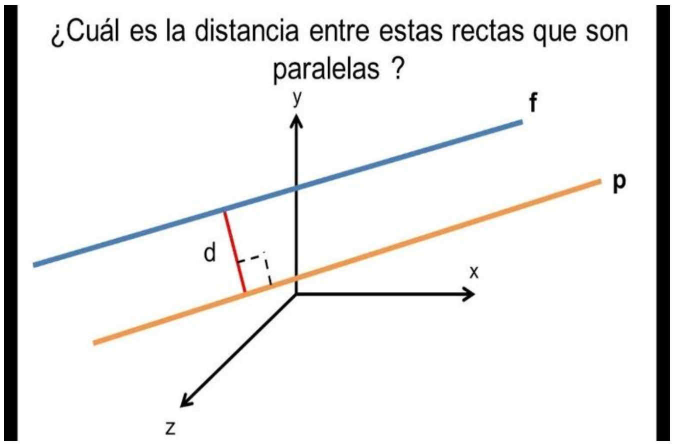
✓ Si son paralelos, d(r, π)=d(R, π) donde R es un punto cualquiera de r

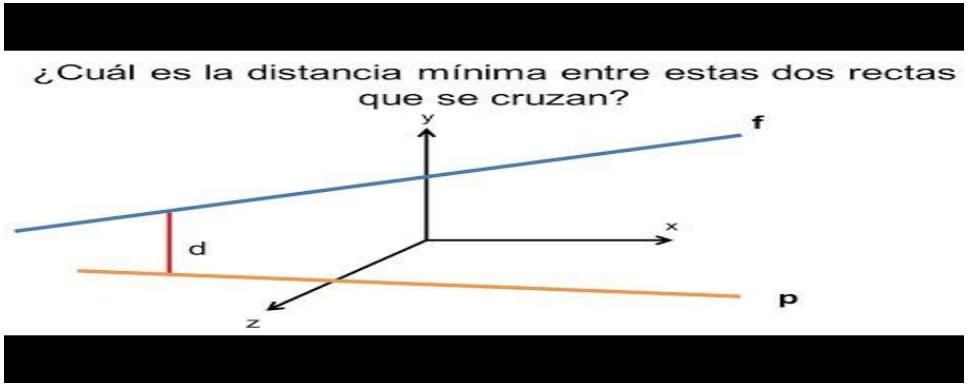
Norma. Distancias

- ***Distancia entre dos planos π y π'***



- ✓ Si no son paralelos, d(π, π')=0
- ✓ Si son paralelos, d(π, π')=d(P, π') siendo P un punto cualquiera de P





- ***Distancia entre dos rectas r y s***
- ✓ Si las rectas se cortan d(r, s)=0
- ✓ Si son paralelas, d(r, s)=d(P, s) siendo P un punto cualquiera de r
- ✓ Si se cruzan, d(r, s)=d(P, Q) , siendo P y Q los puntos de corte con su perpendicular común.

Norma. Distancias

❑ *Ejemplo (Problema 19)*

Hallar la distancia entre las rectas

$$\mathrm{r} \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad y$$

$$\mathrm{s} \equiv \frac{x-1}{-1} = y - 4 = z + 1$$

- 1) Comprobamos cuál es la posición relativa de las dos rectas:
  - Los vectores directores (1,2,3) y (-1,1,1) no son proporcionales luego r y s se cortan o se cruzan
  - Para saberlo, basta comprobar si los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ son o no coplanarios

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \; por\ tanto\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan$$

- La distancia entre dos rectas que se cruzan d(r,s) es la distancia entre dos puntos R y S (de r y s respectivamente) que estén sobre la perpendicular común a ambas rectas.
  - Tomamos R: punto genérico de r: (t,2t,3t) y tomamos S: punto genérico de s: (1-s, 4+s, -1+s)
  - El vector $\overrightarrow{RS}$ =(1-s-t, 4+s-2t,-1+s-3t) ha de ser perpendicular tanto a $\overrightarrow{d_r}$ como a $\overrightarrow{d_s}$

Norma. Distancias

- Exigimos la ortogonalidad
  - $< \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{d_r} >=0$ ⇒ (1-s-t, 4+s-2t, -1+s-3t).(1,2,3)=0 ⇒ 1-s-t+8+2s-4t-3+3s-9t=0 ⇒ 4s-14t=-6
  - $< \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{d_s} >=0$ ⇒ (1-s-t, 4+s-2t, -1+s-3t).(-1,1,1)=0 ⇒ -1+s+t+4+s-2t-1+s-3t=0 ⇒ 3s-4t=-2

⇓

t=5/13 s=-2/13

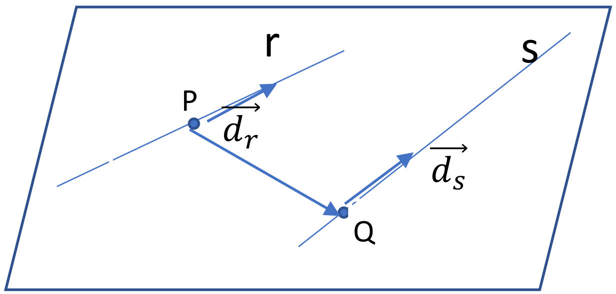
- *Tenemos ya por tanto los puntos*
- R=(t,2t,3t)=$(\frac{5}{13}, \frac{10}{13}, \frac{15}{13})$ y S=(1-s, 4+s, -1+s)=$(\frac{15}{13}, \frac{50}{13}, \frac{-15}{13})$
- Y la distancia(r,s)= distancia (R,S)= $\sqrt{\frac{100}{169}+\frac{1600}{169}+\frac{900}{169}}=\frac{10\sqrt{26}}{13}$

Problema 22

a) Ecuación del plano que contiene las rectas r y s

1) Conocer la posición relativa de r y s

Obtenemos en cada una de las rectas el punto y el vector director



r≡ $\left\{\begin{matrix} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} x=t \\ y=3+t \\ z=3+2t \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$

Un punto de la recta r es P=(0,3,3) y $\overrightarrow{d_r}=(1,1,2)$

s≡ $x=y+1=\frac{z-2}{2}$ $\Longrightarrow$ Un punto de la recta s es Q=(0,-1,2) y $\overrightarrow{d_s}=(1,1,2)$

Comprobamos que son paralelas: basta ver que P $no\ pertenece\ a\ s$

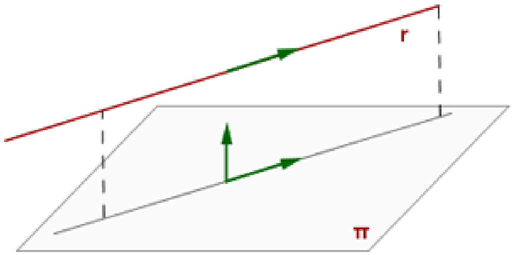
- ¿por qué es necesario conocer la posición de r y s?
  - Si r y s son coincidentes: existen infinitos planos que las contienen
  - Si r y s se cruzan: no existe ningún plano que las contenga
  - Si r y s se cortan o si r y s son paralelas: existe un plano que las contiene

- Necesitamos un punto y dos vectores
  - Un punto cualquiera de una de las dos rectas: P=(0,3,3)
  - El vector director (es el mismo en ambas): $\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{d_s} = (1,1,2)$
  - Como segundo vector basta tomar el vector $\overrightarrow{PQ}$=(0,-4,-1)

$Un\ punto\ X(x,y,z) pertenece\ al\ plano\ \pi\ si\ y\ sólo\ si\ los\ vectores\ \overrightarrow{d_r},\ \overrightarrow{PQ}\ y\ \overrightarrow{PX}$

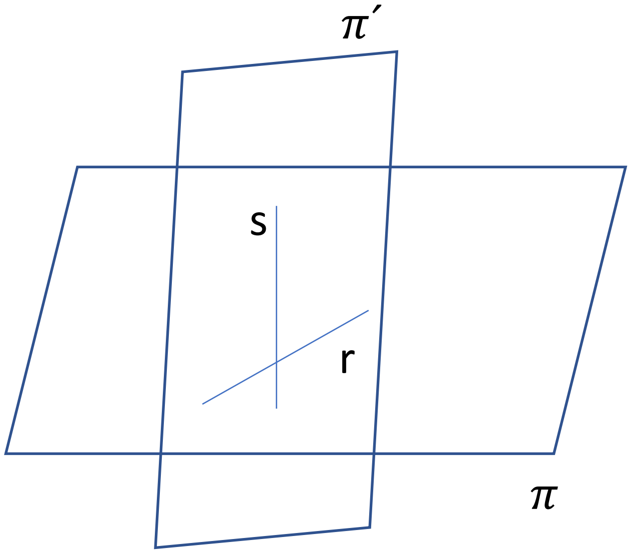
$son\ coplanarios\ (tienen\ por\ tanto\ rango\ 2) \longrightarrow \begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}$=0

$\pi \equiv$ 7x+y-4z+9=0



b) **recta que pasa por P = (0, −1,2) y corta perpendicularmente a la recta r**

1) Obtenemos el plano perpendicular a r que pasa por P: π'



- El vector normal del plano π' *es proporcional al vector director de r*:
- $\overrightarrow{n_{\pi'}}$=(1,1,2)
- π': 1(x-0)+1(y+1)+2(z-2)=0 ⟶ x+y+2z-3=0

2)Obtenemos el punto de intersección $\pi' \cap$ r: M

M= es un punto de r:(t,3+t,3+2t) que verifica la ecuación de π'

t+3+t+6+4t-3=0 ⟶ t=-1 ⟶ M=(-1, 2,−1)

3) La recta s es la que pasa por P y tiene vector director $\overrightarrow{PM}$

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$$ *Ecuación continua*

c) valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi \equiv x - 2y + az = b$

1) Expresamos la recta s$\equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

2) Analizamos el sistema compuesto por las ecuaciones de plano y recta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & a & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2a-1 & 2b-6 \end{array}\right)$$

✓ la recta está contenida en el plano $\longleftrightarrow$ la solución es una recta $\longleftrightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado de orden uno $\longleftrightarrow$ Si rangM =rangN = 2 $\longleftrightarrow$ a=1/2 y b=3