CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

ESPACIOS VECTORIALES

Tema 4

Mar Angulo Martínez

Curso 2022-2023

Tema 4. Espacios vectoriales

4.1. Subespacios. Expresiones implícitas y paramétricas

4.2. Combinaciones lineales y matrices

4.3. Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

4.4. Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base.

4.5. Matrices y construcción de bases

4.6. Suma e intersección de subespacios. Suma directa.

4.7 Espacio vectorial producto. Espacio vectorial cociente.

Espacio vectorial sobre un cuerpo K

- Un **espacio vectorial** es un conjunto E no vacío de elementos, que denominamos **vectores**, que verifica:

- 1) (E,+) es un grupo conmutativo:
  a) $\forall x, y \in E,\ x + y \in E$ (+ es operación interna)
  b) $\forall x, y, z \in E,\ (x + y) + z = x + (y + z)\ (propiedad\ asociativa)$
  c) $\forall x \in E,\ x + 0 = x\ (elemento\ neutro)$
  d) $\forall x \in E, \exists -x \in E\ tal\ que\ x + (-x) = 0\ (elemento\ opuesto)$
  e) $\forall x, y \in E,\ x + y = y + x\ (propiedad\ conmutativa)$

- 1) (E, .k) verifica las siguientes propiedades: $\forall x, y \in E$ y $\forall \gamma, \mu \in K$
  a) $(\gamma + \mu)x = \gamma x + \mu$x (distributiva respecto a la suma de escalares)
  b) $\gamma(x + y) = \gamma x + \gamma y\ (distributiva\ respecto\ a\ la\ suma\ de\ vectores)$
  c) $\gamma\ (\mu x) = (\gamma\mu)x$ $d)\ 1.x = x$

Propiedades de un espacio vectorial

1) $\forall x \in E, \quad 0.x = 0$
2) $\forall \gamma \in K, \quad \gamma.0 = 0$
5) $\gamma u = \mu u$, $u \neq 0 \longrightarrow \gamma = \mu$

3) Si γx=0 $\longrightarrow$ γ=0 ó x=0
4) $\forall x \in E$ y $\forall \gamma \in K$, $(-\gamma)$x=- γx= γ(-x)
6) $\gamma u = \gamma v$, $\gamma \neq 0 \longrightarrow u = v$

Ejemplos

- R^n es un espacio vectorial (En particular, R^2 y R^3 son espacios vectoriales
- El conjunto P_n (x) de polinomios con coeficientes reales y grado n es un espacio vectorial
- El conjunto M_{mxn}(R) de las matrices mxn con coeficientes reales es un producto vectorial

Espacio vectorial. Subespacios vectoriales

Subespacio vectorial

- Un subespacio vectorial de (E,+, .K) es un subconjunto no vacío de E que tiene estructura de espacio vectorial

Teorema

- S es subespacio vectorial de E

1) S$\neq \emptyset$

2) $\forall x, y \in S, \quad x + y \in S$

3) $\forall \alpha \in R \; y \; \forall x \in S, \quad \alpha x \in S$

O de forma equivalente:

- S es subespacio vectorial de E

1) S$\neq \emptyset$

2)$\forall \alpha, \beta \in R y \; \forall x, y \in S, \quad \alpha x + \beta y \in$

Ejemplo 2 El conjunto de soluciones de la ecuación 2x-y+z= 0 es un subespacio vectorial de R^3

Espacio vectorial. Subespacios vectoriales

- **Ejemplos**
  - El conjunto S={(x,y,z,t)/ x+2y-z+3t=0} es un subespacio vectorial de R^4
  - El conjunto T= ={(x,y,z)/ x-3y+z=0; 2x-z=0} es subespacio vectorial de R^3
  - El conjunto M= ={(x,y,z)/ x.y=0} no es subespacio vectorial de R^3
  - El conjunto S={(x,y,z,t)/ x+2y-z+3t=1} no es un subespacio vectorial de R^4
  - El conjunto P_3(x) (polinomios en una variable de grado ≤ 3) $es\ subespacio$
  - El conjunto M_{2x2}(R) (matrices $cuadradas\ de\ orden\ 2$) $es\ subespacio$

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Combinación lineal de vectores

- ✓ Un vector x ∈ E *es una combinación lineal de un conjunto S de vectores* $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ *si existen números* reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ tales que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n$$

- **Ejemplo 1** En el espacio vectorial R^3: (1,-1,3) =1 (1,0,0)+(-1) (0,1,0)+3 (0,0,1)
  Por tanto, el vector (1,-1,3) es una combinación lineal de esos 3 vectores

- **Ejemplo 2** el polinomio $x^2 - x + 3$ es combinación lineal de {1+ x^2, x+2x^2}
  porque 3 $-x + x^2$= 3(1+ x^2)- (x+2x^2)
- ✓ 3 y -1 son los coeficientes de dicha combinación lineal
- ✓ En el caso de los polinomios, podríamos escribir: (3,-1,1)=3(1,0,1)-(0,1,2)

Subespacio generado por S

- ✓ El subespacio L(S) engendrado por los vectores de S es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S.
- ✓ Es decir, si S={v_1, v_2,… v_n} tales que

  L(S) = {$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n$} con α_1, α_2,… α_n ∈ K
- ✓ L(S) es el menor de todos los subespacios que contienen a S

❖ **Ejemplo 3** el subespacio S= { (α, β, 2α+β, −α+3β) } de R^4

- Admite una expresión implícita dada por las relaciones que existen entre las coordenadas de un vector genérico de S: {(x,y,z,t)∈ R^4/ z=2x+y, t=-x+3y}

- Admite una expresión en forma de subespacio engendrado por :

  S= { (α, β, 2α+β, −α+3β) }= α(1,0,2,-1)+ β(0,1,1,3)

Sistema generador

- ✓ Si L(S) es el subespacio engendrado por los vectores de S, entonces todo vector de L(S) puede escribirse como combinación lineal de los vectores de S.

  Entonces se dice que **S es un sistema generador de L(S)**
- ✓ S=$\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es un sistema generador de un espacio vectorial V si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de S, es decir,

  si $\forall v \in V$, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ∈ K tal que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n$

Ejemplo 4

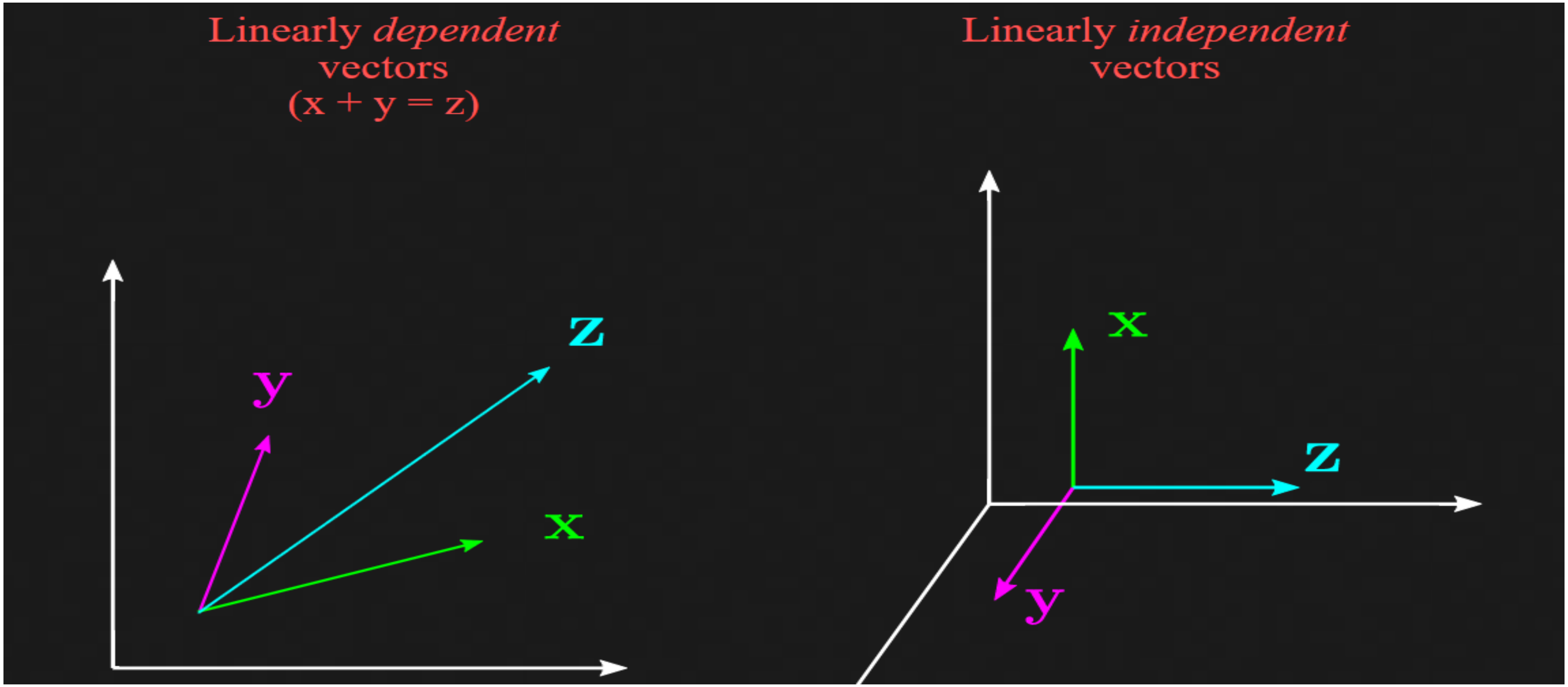
- En R^4, los vectores S={u=(1,2,0,0), v=(0,3,-1,0) y w=(0,0,5,4)} son un sistema generador de L(S)= {($\alpha, 2\alpha+3\beta$, -β+5$\gamma, 4\gamma\}$ (Observa que son vectores que dependen de 3 parámetros)
- Sin embargo S no es sist. generador de R^4. (un S.G. de R^4 ha de tener como mínimo 4 vectores)

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Independencia lineal de vectores

- Los vectores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2},\dots \boldsymbol{v_n} \in \boldsymbol{E}$ ***son linealmente independientes*** *si*
  $\alpha_1\, v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots\ \alpha_n v_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = 0, \dots\ \alpha_n = 0$
- Es decir, cualquier combinación lineal de dichos vectores igual a 0, implica que todos los coeficientes necesariamente tienen que ser nulos
- Si, por el contrario, algún coeficiente es no nulo, los **vectores** son **linealmente dependientes** (existe algún vector que es linealmente dependiente del resto, es decir se puede expresar como combinación lineal del resto)
- **Sistema libre de vectores** es un conjunto de vectores linealmente independientes
- Un conjunto de vectores linealmente dependientes se denomina **sistema ligado de vectores**

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión



Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Propiedades de los sistemas libres y ligados de vectores

- Un vector v$\neq 0$ *conforma un sistema libre de vectores*: S={v} es libre
- Si un sistema S de vectores es libre, cualquier subconjunto S´$\subset S$ también es un sistema libre de vectores
- Si un sistema S de vectores es ligado, cualquier conjunto que lo contenga, S´´$\supset$S también es un sistema ligado de vectores
- Si un sistema contiene al vector 0, es un sistema ligado
- Un sistema $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es ligado $\Longleftrightarrow$ $\exists$ algún v_i que es combinación lineal de los vectores restantes
- Un sistema $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es libre si ninguno de los vectores del mismo puede expresarse como combinación lineal de los vectores restantes

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❖ Ejemplo 5

Analizar si son ó no linealmente independientes los vectores: (1,0,0), (1,1,0) y (1,1,-3)

- **1ª forma: Aplicamos la definición**

$$Si\ partimos\ de\ una\ combinación\ lineal\ de\ esos\ vectores\ igualada\ a\ 0$$

$$\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)+\gamma\,(1,1,-3)=0$$

$$los\ vectores\ serán\ linealmente\ independientes \Longleftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$
$$\beta+\gamma=0$$
$$-3\gamma=0$$

$$Por\ tant, todos\ los\ coeficientes\ son\ nulos \longrightarrow vectores\ l. independientes$$

- **2ª forma: Estudiamos el rango de la matriz cuyas filas son esos vectores**

$$\text{rangA} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 3 \text{ (completo)}$$

- **3ª forma: Estudiamos el determinante de la matriz cuyas filas (o columnas) son esos vectores**

Recuerda: vectores linealmente independientes $\Longleftrightarrow$ rangA completo $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❑ Teorema fundamental de la independencia lineal

Si S=$\{v_1, v_2,\ldots v_n\}$ es un sistema generador de un espacio vectorial V formado por un número finito n de vectores y

T =$\{w_1, w,\ldots w_p\}$ es un sistema de vectores linealmente independientes, formado por p vectores de V,

entonces, **p**$\leq \boldsymbol{n}$

Si un espacio vectorial está generado por un número finito de vectores se dice que es un **espacio vectorial de dimensión finita**

❖ **Ejemplo 6**

Extender un conjunto de vectores linealmente independientes para que también sean S.G.

- (1,0,2), (1,0,–1) son linealmente independientes (no son proporcionales)
- No son sistema generador de R^3 $porque\ no\ todo\ vector\ de\ R^3$ se puede expresar como combinación lineal de ellos: p. ej.: (0,1,0) = α $(1{,}0{,}2)$+ $\beta(1{,}0{,}\text{-}1)$----→sistema incompatible
- Basta añadir un 3º vector que sea linealmente independiente con ellos; p. ej: (0,1,0)

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❖ **Ejemplo 7**

- Los vectores (2,0,0), (0,3,0), (4,1,0) forman un sistema generador del plano OXY de R^3 porque si planteamos (x,y,z) = $\alpha(2,0,0)+\beta(0,3,0)+\gamma\,(4,1,0)$ obtenemos un sist. compatible
- Los vectores (2,0,0), (0,3,0), (4,1,0) **no** son linealmente independientes (se puede comprobar que |A|=0)
- Basta eliminar el último para obtener un sistema linealmente independiente

Los restantes vectores (2,0,0), (0,3,0) siguen generando el mismo subespacio S y son independientes. Son por tanto base de dicho plano.

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Base de un espacio vectorial

Si V es un espacio de dimensión finita, B={e_1, e_2,… e_n} es una **base de V** si verifica una cualquiera de las dos condiciones equivalentes:

1) los vectores de B son linealmente independientes y sistema generador
2) Todo vector de V se puede expresar de forma **<u>única</u>** como combinación lineal de los vectores de B

Bases canónicas

- En el espacio vectorial R^n: (1,0,….0) ,(0,1,….0),….(0,0,….1,0) y (0,0,….0,1) constituyen la base canónica
- En el espacio vectorial M_{2x2} las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ constituyen la base canónica del espacio de matrices cuadradas 2x2
- B={1, x, x^2, x^3, … x^n} es la base canónica del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que n.

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❑ Teorema

En un espacio vectorial de dimensión finita todas las bases son finitas y tienen el mismo número de elementos.

❑ Dimensión de un espacio vectorial

Es el número de elementos de una base de un espacio vectorial de tipo finito

Recuerda

- ***dimV es el máximo número de vectores de V que son linealmente independientes***
- ***dimV es el mínimo número de vectores de V que forman un sistema generador***
- ***Si dimV =n, todo conjunto de n vectores linealmente independientes de V forman una base***

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Notas sobre la dimensión de un espacio vectorial

- La dimensión de un subespacio en el espacio R^n coincide con el número de parámetros libres en su forma paramétrica.
- Significado geométrico

R^3 es un espacio de dimensión 3, un plano tiene dimensión 2, un espacio de dimensión 1 es una recta y el punto tiene dimensión 0

- Si S y T son subespacios y S está contenido en T, dim S ≤ dim T. dim S = dim T, entonces ambos espacios han de coincidir.

Rango de un sistema de vectores

- El rango de un sistema de vectores S es la dimensión del subespacio engendrado por S Es decir, es el máximo número de vectores linealmente independientes de S
- Por tanto, en un espacio vectorial de dimensión n, un sistema de n vectores linealmente independientes **siempre** es sistema generador : su rango es n.

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

Coordenadas de un vector en una base

- Si E es un espacio vectorial de dimensión finita y $B = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots \boldsymbol{e_n}\}$ *es una base de* V, entonces si x=$\alpha_1\ v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ \alpha_n v_n$,

los coeficientes de la combinación lineal se denominan **coordenadas del vector x en la base B**

- *Un vector tiene tantas coordenadas como la dimensión del espacio*
- *Las coordenadas de un vector en una base son únicas*

Ejemplo 8

Coordenadas del polinomio p(x) = 15x^2-3x+6 en la base B={5x^2, x+1,-3}

Escribimos el vector (6,-3,15) = α(0,0,5)+$\beta(1,1,0) + \gamma(-3,0,0)$

Entonces: $\beta - 3\gamma = 6 \quad \beta = -3 \quad 5\alpha = 15 \qquad\qquad \alpha = 5; \quad \beta = -3; \quad \gamma = 3$

Las coordenadas del vector (6,-3,15) en la base B serían (5,-3,3)

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

❑ Cambio de base

Si V es un espacio vectorial de dimensión n;

$\mathrm{B} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots \boldsymbol{e_n}\}$ *es una base de V*, en la que las coordenadas de un vector $x \in V$ *son* $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots \boldsymbol{x_n})$

$\mathrm{B}' = \{\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, \ldots \boldsymbol{e'_n}\}$ *es otra base de V*, en la que las coordenadas del mismo vector $x \in V$ *son* $(\boldsymbol{x'_1}, \boldsymbol{x'_2}, \ldots \boldsymbol{x'_n})$

Si conocemos la expresión de los vectores de B´ en función de los vectores de B:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} e_i \qquad \text{j=1...n}$$

Entonces las coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \ldots \boldsymbol{x_n})$ se podrán expresar en función de las $(\boldsymbol{x'_1}, \boldsymbol{x'_2}, \ldots \boldsymbol{x'_n})$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x'_j \qquad \text{i=1...n}$$

Matricialmente: X=QX´

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \ldots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{2n} \\ & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'_1} \\ \boldsymbol{x'_2} \\ \ldots \\ \boldsymbol{x'_n} \end{pmatrix}$$

Q: Matriz del cambio de coordenadas

$Q = M_{B'B} = (|vectores\ de\ B'|)_B$

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

- En resumen: En un espacio vectorial V, dadas dos bases B y B' , se llama **matriz de cambio de base** (o de cambio de coordenadas) de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'. $M_{BB'}$=$(vectores\ de\ B)_{B'}$

Aplicación

- Q=$M_{B'B}$= $(|vectores\ de\ B'|)_B$ es la matriz de cambio de base (de B´a B) y permite calcular las coordenadas en la base B conocidas las coordenadas en la base B'.
- Q^{-1}=$M_{BB'}$=$(|vectores\ de\ B|)_{B'}$ es la matriz de cambio de base de B a B´: permite calcular las coordenadas en la base B' conocidas las coordenadas en la base B

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

❑ Propiedades de las matrices de cambio de base

- ❑ Una matriz de cambio de base es cuadrada (si dimV=n, será nxn)
- ❑ Una matriz de cambio de base es siempre regular ($|Q| \neq 0$) y la matriz de cambio de B a B´es inversa

❑ En particular:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "P"] & B_{can\acute{o}nica} \arrow[l, bend left, "Q"] \end{tikzcd}$$

P: vectores de B en columnas

Q= P^{-1}

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

❖ **Ejemplo 9**

B= {(2,3), (1,-1)} y B´={(1,0), (0,1)}

✓ **matriz de paso de B a B´**

Escribimos los vectores de B como combinación lineal de los vectores de B´

(2,3) = 2(1,0)+3(0,1) (1,-1)=1(1,0)+(-1)(0,1)

Entonces P=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

✓ **matriz de cambio de base de B’ a B**

expresamos los vectores de la base canónica B’ en función de la base B

(1,0) = $\alpha(2,3) + \beta$(1,-1) $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ Entonces Q=$\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$

(0,1)=$\gamma(2,3) + \delta(1,-1)$ $(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5})$

✓ **coordenadas en base B del vector v=(1,2)** (en la base canónica B’) Utilizamos la matriz Q de cambio de base de B’ a B: $\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

❖ Ejemplo 10

V es un espacio vectorial de dimensión 3 y B´= $\{v_1', v_2', v_3'\}$ es una base de V.

Sea B =$\{v_1= 3v_1' - v_2' + v_3', v_2= -5v_1' + 4v_2' + v_3', v_3= 2v_1' + 2v_2' - 4v_3'\}$ otra base de V

¿Cuáles son las coordenadas del vector $(2,-1,1)_B$ en la base B´?

matriz de paso de B a B´: $\boldsymbol{M_{B\,B'}} = \boldsymbol{M_{B'}}(v_1|v_2|v_3)=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{13} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} \Longrightarrow (2,-1,1)_B= (13,-4,-3)_{B'}$$

matriz de paso de B´ a B: $\boldsymbol{M_{B'\,B}} = \boldsymbol{M_B}(v'_1|v'_2|v'_3)=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{13} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Suma e intersección de subespacios. Suma directa

Intersección de subespacios

- Dados dos subespacios vectoriales S_1 y S_2, la intersección de subespacios se define como $\boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2}$=$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} / \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S_1}$ **y** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S_2}\}$
- La intersección de subespacios vectoriales de E es siempre otro subespacio vectorial

Suma de subespacios

- Dados dos subespacios vectoriales S_1 y S_2, la suma de subespacios se define como
$\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$=$\{\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} \ / \boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{S_1}$ **y** $\boldsymbol{u_2} \in \boldsymbol{S_2}\}$
- La suma de subespacios es siempre otro subespacio; es de hecho el menor subespacio de V que contiene a S_1 y a S_2

Fórmula de Grassmann (de las dimensiones)

Si $S_1 \ y \ S_2$ son subespacios de E, dim $(\boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2})$+ dim $(\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2})$ = dim $\boldsymbol{S_1}$+ dim $\boldsymbol{S_2}$

Suma e intersección de subespacios. Suma directa

❑ Suma directa

❑ $Suma\ directa\ de\ subespacios\ S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots .\ S_n$ si

u_1+u_2+…u_n=0 ($u_i \in S_1$ i=1,2…n) $\longrightarrow$ u_i=0 ∀i

❑ La suma de dos subespacios S y T es directa si S∩ $T = \{0\}$

✓ Entonces, uniendo dos bases respectivas de S y T obtendremos una base de la suma

✓ En caso de suma directa cualquier vector de S+T se puede expresar de forma única como suma de un vector de S y otro de T

✓ Si además S ⊕ T =E, S y T se denominan subespacios suplementarios

✓ dim S ⊕ T = dimS + dimT

❖ **Ejemplo 10**

En R^4, sea S el subespacio cuya base es B={(1,0,2,0), (3,0,0,0)}

Obtener una base del suplementario de S Basta añadir (0,1,0,0) y (0,0,0,1)

Suma e intersección de subespacios. Suma directa

- **Problema 24**

$V_1 = L(\{(1,2,1,0),(-1,1,1,1)\})$ $V_2 = L(\{(2,-1,0,1),(1,-1,3,7)\})$

Obtener una base para la suma y para la intersección de dichos subespacios.

$V_1 = \{(\alpha-\beta, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta, \beta)\}/\alpha,\beta \in R\}$ dim S=2;
$V_2 = \{(2\gamma+\delta, -\gamma-\delta, 3\delta, \gamma+7\delta)\}/\gamma,\delta \in R\}$ dim S=2;
$V_1 \cap V_2$=conjunto de vectores que se ajustan a esos "2 patrones"
$(\alpha-\beta, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta, \beta) = (2\gamma+\delta, -\gamma-\delta, 3\delta, \gamma+7\delta) \longrightarrow \alpha = -\delta, \beta = 4\delta, \gamma = -3\delta$
Entonces $V_1 \cap V_2 = \{(-5\delta, 2\delta, 3\delta, 4\delta)/\delta \in R\}$
dim $V_1 \cap V_2$=1 Base (-5,2,3,4)
De la fórmula de Grassmann deducimos que dim ($V_1 + V_2$)=3
Basta considerar 3 vectores de las bases de V_1 y V_2 que sean linealmente independientes
$(1,2,1,0), (-1,1,1,1)$ $(2,-1,0,1)$ (Comprobar que el rango es 3)

Espacio vectorial producto. Espacio vectorial cociente

❑ Espacio vectorial producto

- Si E y F son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, el *conjunto ExF, con las operaciones suma y producto por escalar*

$$(u_1, u_2)+ (v_1, v_2)=(u_1 + u_2 \, , v_1 + v_2) \ \forall\, u_1, v_1 \in E, \ \ u_2 \, , +v_2 \in F$$

$$\gamma\,(u,v)=(\gamma u, \gamma v) \quad \forall\, \gamma \in K, \forall\, u \in E, \forall\, v \in F$$

es un espacio vectorial que se denomina ***espacio vectorial producto***

- Si $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots\boldsymbol{e}_n\}$ *es una base de E* y $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2,\ldots\boldsymbol{f}_m\}$ *es una base de E* entonces,
  - ***La dimensión de ExF es n+m***
  - ***$\{(e_1,0), (e_2,0), \ldots.(e_n,0), (0, f_1), (0, f_2),\ldots. (0, f_m)\}$ base de ExF***

Espacio vectorial cociente

- **Problema 27**

Sean los espacios vectoriales E =F=R^2
Calcular una base del espacio vectorial producto ExF asociada a la base canónica de R^2

Dim V = ExF=4   Base de ExF: {v_1=(e_1,0); v_2=(e_2,0); v_3=(0, e_1); v_4=(0, e_2)}

- En forma de coordenadas: {(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); 0,0,0,1)}
- Es la base canónica de R^2xR^2=R^4

Espacio vectorial producto. Espacio vectorial cociente

❑ Espacio vectorial cociente

- ❑ Si E y F son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K,
  la relación xRy $\longleftrightarrow$ x-y$\in V$ *es una relación de equivalencia*

- ❑ *El conjunto cociente (conjunto de las clases de equivalencia)* : $\frac{E}{V}$ **=$\{C(x)/x \in E\}$**

  con las operaciones C(x)+C(y) =C(x+y)

  γC(x) = C(γx)

  Se denomina espacio vectorial cociente de E módulo V

  Si dim E =n , dimV=m $\quad$ ***dim*** $\frac{E}{V}$***=n-m***

Espacio vectorial cociente

- **Problema 28**

Obtener una base del espacio vectorial cociente R^4 *módulo* V *siendo* V *el subespacio generado por* los vectores (1,0,1,1), (1,2,1,1) y (2,2,2,2)

Dim V = rang $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$=2 Entonces dim $\frac{R^4}{V} = 4 - 2 = 2$

Necesitamos 2 vectores l.i. de $\frac{R^4}{V}$: son dos clases de equivalencia de 2 vectores del suplementario de V (de vectores que no están en V)

V=L< (1,0,1,1), (1,2,1,1) >={($\alpha + \beta$,2β,$\alpha + \beta, \alpha + \beta$)} $= \{(x, y, z, t) \;/\; x = z = t\}$

(1,0,0,0) y (0,0,0,1) no pertenecen a V y son l.i.: son una base del espacio cociente.