Hoja de problemas nº 6

Endomorfismos. Diagonalización

Tema 6

1.- Dada la matriz M

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 2 \end{pmatrix} \quad c \in R$$

a) Determinar el espectro de M
b) ¿Para qué valores de c es la matriz M diagonalizable?

2.- a) Obtener el polinomio característico del endomorfismo cuya matriz asociada es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Demostrar que A es diagonalizable si y sólo si a=0

c) Para a=0: obtener dos matrices P y D tales que A=PDP^{-1}

3.- ¿Son semejantes las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$?

4.- Calcular los autovalores y los subespacios invariantes asociados a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- Dado el endomorfismo f: P_3(x) $\longrightarrow$ P_3(x) que verifica

f(1)=0 f(x)=x f(x^2) $= 2$ f(x^3) $= 6x$

Analizar si es o no diagonalizable

6.- Siendo f el endomorfismo de R^3 tal que $f(x,y,z) = (3x, -y+az, 3x+bz)$

Estudiar para qué valores de a y b es f diagonalizable

7.- ¿Existe alguna base de $P_2(x)$ vectores propios del endomorfismo f cuya matriz asociada en la base canónica $\{1, x, x^2\}$ sea A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$

8.- Estudiar la diagonalización, según los valores de a y b, (constantes reales no nulas) del endomorfismo que tiene como matriz asociada en la base canónica

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 1/a & 1 & b \\ 1/ab & 1/b & 1 \end{pmatrix}$$

9.- Sea f: $R^3 \quad \rightarrow \quad R^3$ el endomorfismo definido por

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, -2x + 4y - 2z, -2x + 2y)$$

a) Demostrar que f es diagonalizable y encontrar una base de R^3 *respecto a la que la matriz asociada a* f *es diagonal.*
b) Escribir la expresión matricial de la diagonalización

10.-

a) Si A es una matriz diagonalizable con matriz de paso P y D matriz diagonal, demostrar que A^n es diagonalizable con matriz diagonal D^n y deducir cuál es la matriz A^n

b) ¿Qué debe verificar el parámetro a para que el endomorfismo de matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable sobre R? Cuando lo sea, hallar la matriz diagonal, la matriz de paso P y obtener A^n.

11.- Demostrar que si λ *es autovalor de* A, *entonces* λ^k es autovalor de A^k

12.- sea T: P_2(x) $\longrightarrow$ P_2(x) tal que T(p)=p(2x+1)

Encontrar una base de vectores respecto a la cual la matriz asociada a T sea diagonal.

13.- Sea f: $R^3 \longrightarrow R^3$ un endomorfismo del que

$B_1 = \{v_1 = (1,0,1), v_1 = (1,4,-1), v_1 = (2,1,-2)\}$ es una base de vectores propios.

Calcular la matriz asociada al endomorfismo f en la base canónica de R^3, *sabiendo que los valores propios asociados a los vectores de* B_1 son, por este orden 3, -7 y 10.