TEMA 7

SOLUCIÓN DE

LOS EJERCICIOS

EJERCICIO 1

Calcula $\int_1^3 x^2 dx$.

Solución:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{26}{3}$$

EJERCICIO 2

Calcula $\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x}) dx$.

Solución:

El primer paso consiste en hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$, con lo que $dx = 2t dt$ y los límites pasan a ser $t = 0$ y $t = \pi$ en lugar de $x = 0$ y $x = \pi^2$.

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x}) dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t) 2t dt = 2\left(\int_0^{\pi} t \operatorname{sen}(t) dt\right)$$

A continuación se utiliza el método de integración por partes, eligiendo $u = t$ y $dv = \operatorname{sen}(t) dt$, con lo que queda $du = dt$ y $v = -\cos(t)$.

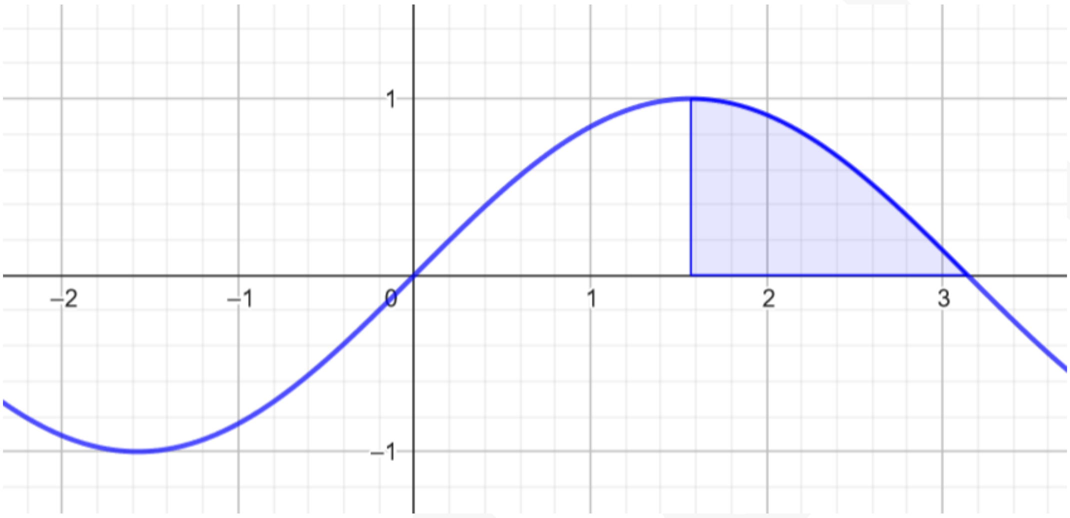
$$2\left(\int_0^{\pi} t \operatorname{sen}(t) dt\right) = 2\left(\Big[-t\cos(t)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(t) dt\right) = 2\left(\Big[-t\cos(t)\Big]_0^{\pi} + \Big[\operatorname{sen}(t)\Big]_0^{\pi}\right) = 2\pi$$

EJERCICIO 3

Halla el área determinada por la curva $f(x) = \text{sen}(x)$, las rectas $x = \pi/2$ y $x = \pi$ y el eje de abscisas.

Solución:

$$\text{Área } = \int_{\pi/2}^{\pi} \text{sen}(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_{\pi/2}^{\pi} = -\Big[\cos(x)\Big]_{\pi/2}^{\pi} = -\Big(\cos(\pi) - \cos(\pi/2)\Big) = 1$$



EJERCICIO 4

Halla el área determinada por la curva $\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^2}$ y los ejes.

Solución:

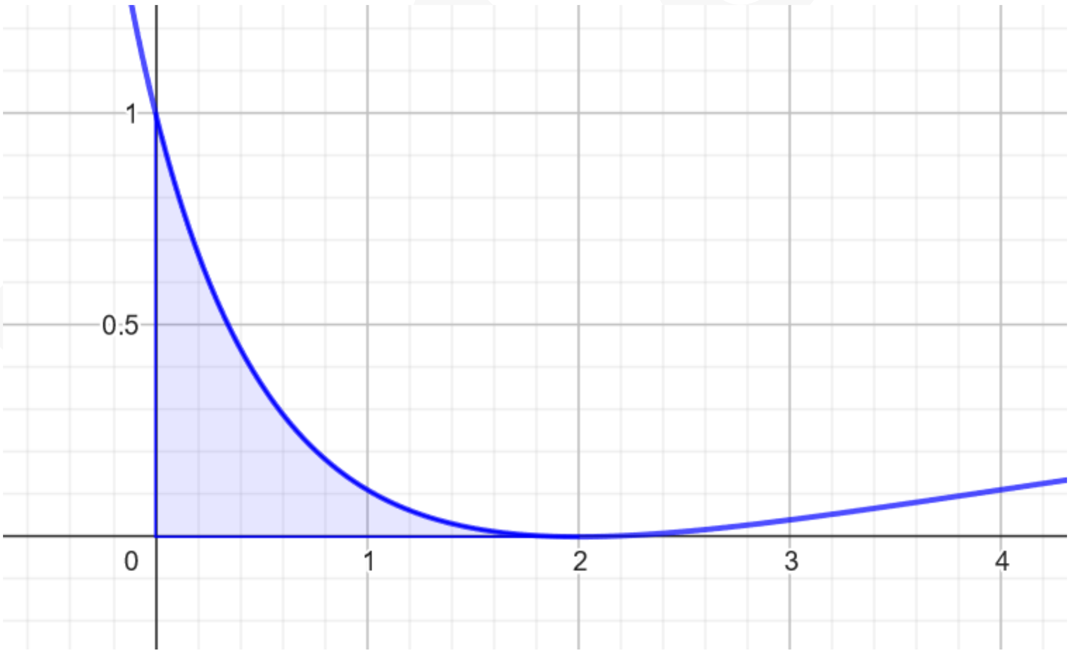
El primer paso consiste en realizar un estudio de la función, para conocer de forma aproximada su forma, dónde corta o toca a los ejes X e Y, y el área a calcular.

En vista de la gráfica, la integral a calcular es la siguiente:

$$\int_0^2 \frac{(x-2)^2}{(x+2)^2}dx = \int_0^2 \frac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4}dx = \int_0^2 \left(1+\frac{-8x}{x^2+4x+4}\right)dx = \int_0^2 \left(1-\left(\frac{8x}{x^2+4x+4}\right)\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \left(1-\left(\frac{8}{x+2}+\frac{-16}{(x+2)^2}\right)\right)dx = \int_0^2 dx - 8\int_0^2 \frac{1}{x+2}dx + 16\int_0^2 \frac{1}{(x+2)^2}dx =$$

$$= \Big[x\Big]_0^2 - 8\Big[\mathrm{Ln}(|x+2|)\Big]_0^2 + 16\Big[-(x+2)^{-1}\Big]_0^2 = 6 - 8\mathrm{Ln}(4) + 8\mathrm{Ln}(2) = 6 - 8\mathrm{Ln}(2)$$



EJERCICIO 5

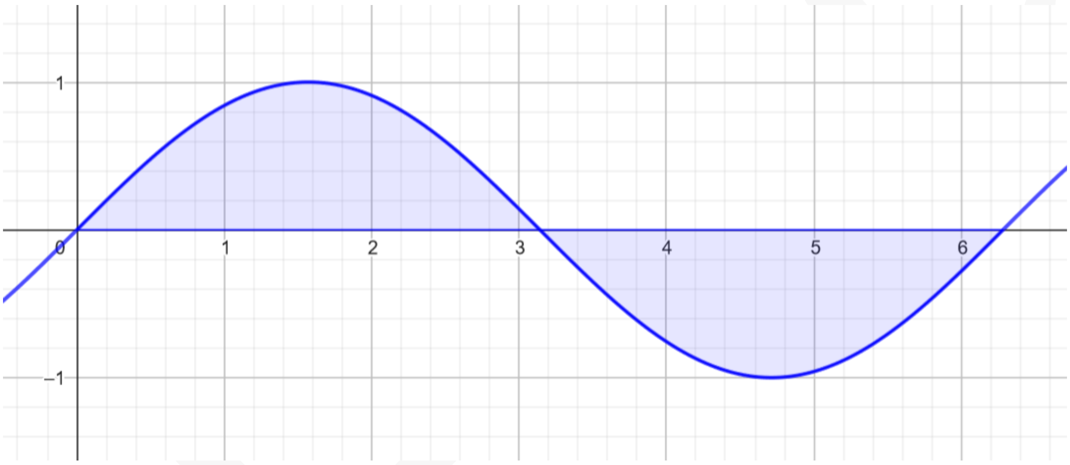
Halla el área algebraica determinada por la curva $f(x) = \text{sen}(x)$, las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$ y el eje de abscisas. Compara el resultado con el valor del área geométrica.

Solución:

$$\text{Área algebraica} = \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{2\pi} = -\Big[\cos(x)\Big]_0^{2\pi} = -(1-1) = 0$$

$$\text{Área geométrica} = \int_0^{2\pi} |\text{sen}(x)|dx = \int_0^{\pi} \text{sen}(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\text{sen}(x))dx =$$

$$= \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos(x)\Big]_{\pi}^{2\pi} = 4$$



EJERCICIO 6

Halla el área determinada por la curva $f(x) = (x-1)(x+2)$, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ y el eje de abscisas.

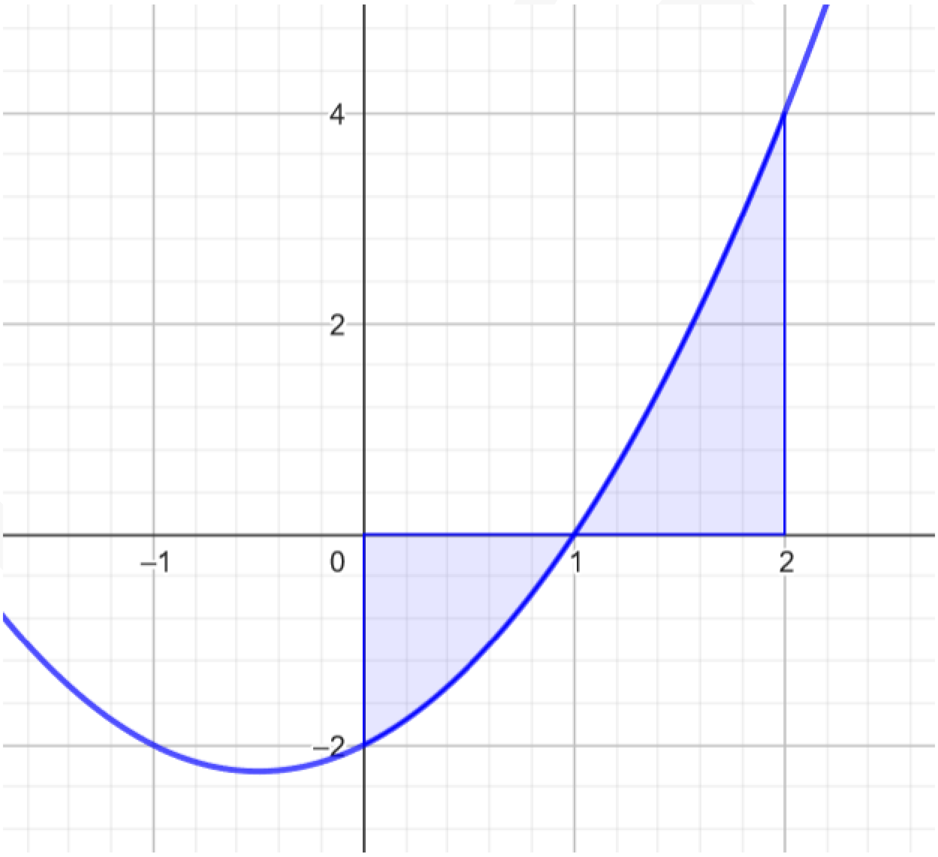
Solución:

En primer lugar realizamos un estudio de la función, para conocer de forma aproximada su forma, dónde corta o toca a los ejes X e Y y el área a calcular.

En vista de la gráfica, la integral a calcular es la siguiente:

$$\int_{-1}^{2} |(x-1)(x+2)| dx = \int_{-1}^{2} |x^2+x-2| dx = \int_{-1}^{1} -(x^2+x-2) dx + \int_{1}^{2} (x^2+x-2) dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} (x^2+x-2) dx + \int_{1}^{2} (x^2+x-2) dx = -\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2} = \frac{31}{6}$$



EJERCICIO 7

Halla el área de la región limitada entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1$.

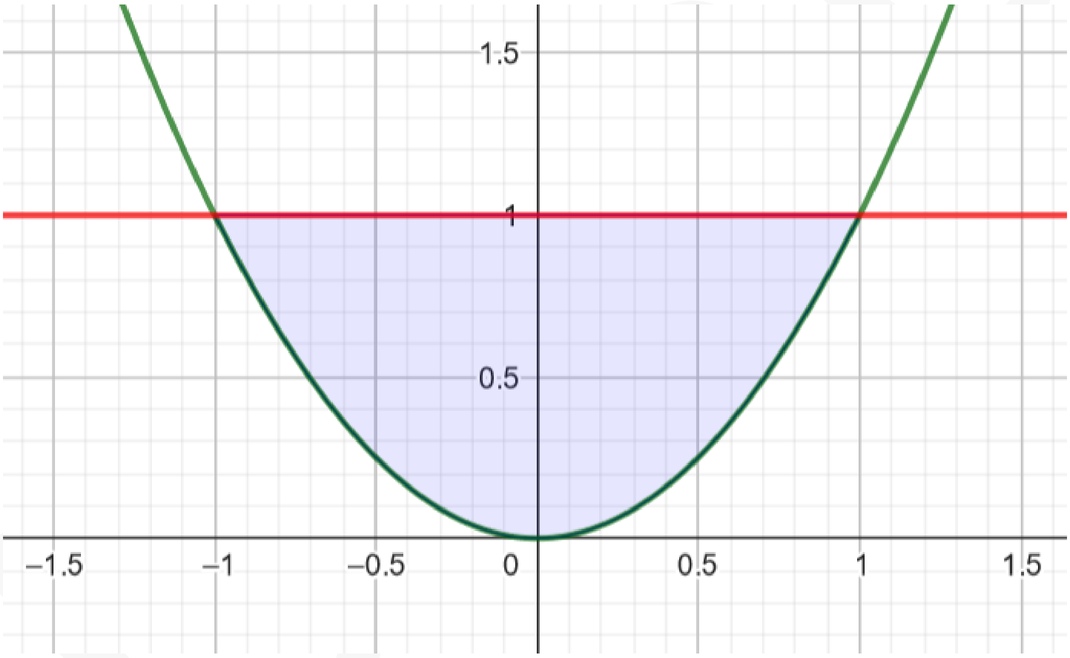
Solución:

El primer paso consiste en determinar la forma general de las gráficas y encontrar los puntos de corte de ambas funciones, lo que se calcula igualando ambas expresiones:

$$f(x) = g(x) \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

En vista de la gráfica, la integral a calcular es la siguiente:

$$\int_{-1}^{1} |x^2 - 1| dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$



EJERCICIO 8

Halla el área de la región limitada entre las curvas $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = x^3 + x$ y las abscisas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

El primer paso consiste en determinar la forma general de las gráficas y encontrar los puntos de corte de ambas funciones, lo que se calcula igualando ambas expresiones:

$$f(x) = g(x) \implies x^2 - x = x^3 + x \implies x^3 - x^2 + 2x = 0 \implies x(x^2 - x + 2) = 0$$

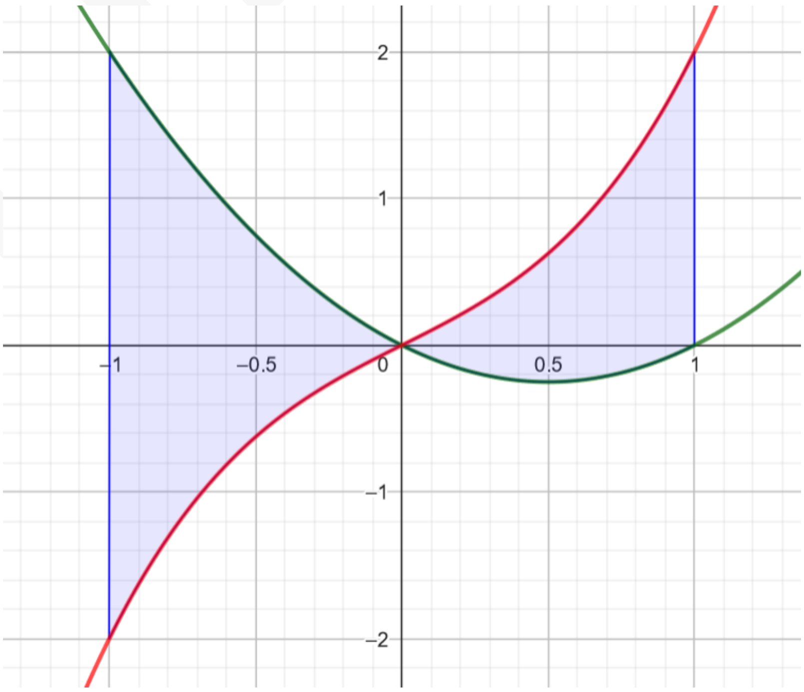
De momento conocemos un punto de corte, $x = 0$. Al estudiar el polinomio $x^2 - x + 2$ comprobamos que no tiene raíces reales, por lo que el único punto del plano real en el que ambas funciones se cruzan o cortan es $x = 0$. A continuación es necesario completar el estudio para determinar de forma aproximada el aspecto de cada función, poniendo especial atención en determinar qué función es mayor en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

En vista de la gráfica, la integral a calcular es la siguiente:

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x)) dx + \int_{0}^{1} (g(x) - f(x)) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_{0}^{1} (x^3 - x^2 + 2x) dx = -\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 + 2x) dx + \int_{0}^{1} (x^3 - x^2 + 2x) dx =$$

$$= -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{1} = \frac{5}{2}$$



EJERCICIO 9

Halla el área de la región limitada entre las curvas $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ y $g(x) = -x^3 - x + 1$ y las abscisas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

El primer paso consiste en determinar la forma general de las gráficas y encontrar los puntos de corte de ambas funciones, lo que se calcula igualando ambas expresiones:

$$f(x) = g(x) \implies x^3 - x^2 + 2 = -x^3 - x + 1 \implies 2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$$

Puesto que las posibles raíces enteras y racionales son ± 1 y $\pm 1/2$, probamos las cuatro opciones y obtenemos que $x = -1/2$ es una raíz. Con ello, tenemos lo siguiente:

$$2x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \implies \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x + 2) = 0 \implies 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - x + 1) = 0$$

De momento conocemos un punto común a las dos funciones, $x = -\frac{1}{2}$. Al estudiar el polinomio $x^2 - x + 1$ comprobamos que no tiene raíces reales, por lo que el único punto del plano real en el que ambas funciones se cruzan o tocan es $x = -\frac{1}{2}$. A continuación es necesario completar el estudio de las funciones para determinar de forma aproximada su aspecto, poniendo especial atención en determinar qué función es mayor en los intervalos $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

En vista de la gráfica, la integral a calcular es la siguiente:

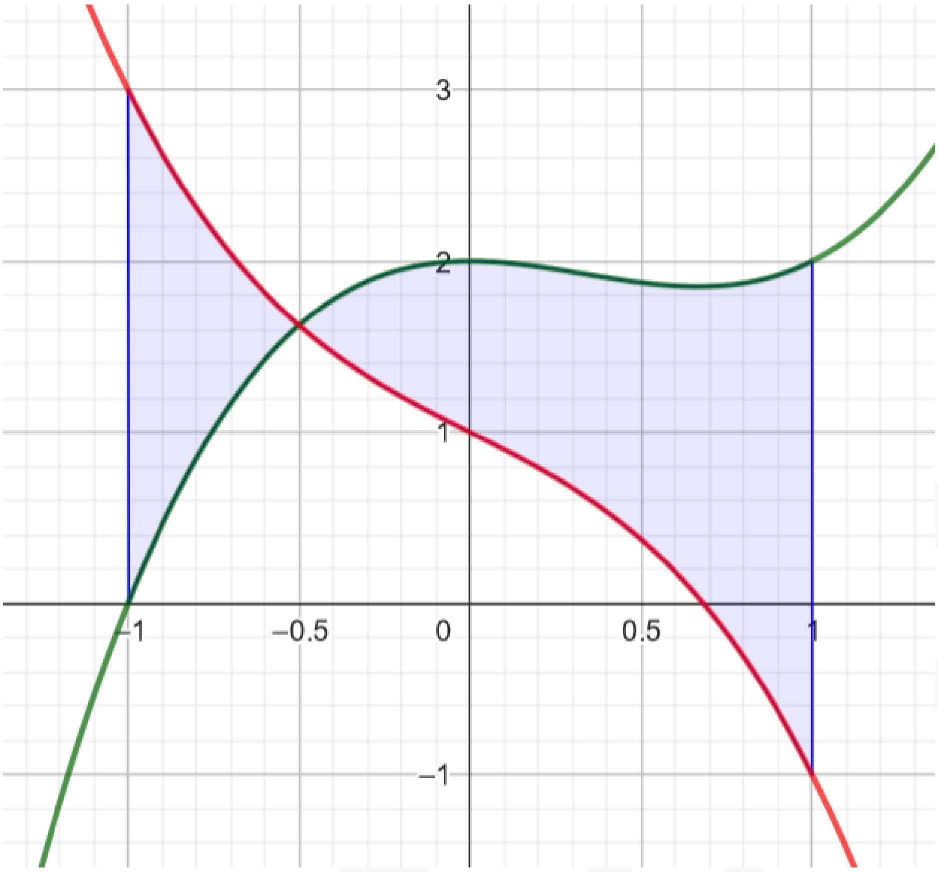
$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^{-1/2} \big(g(x) - f(x)\big) dx + \int_{-1/2}^{1} \big(f(x)) - g(x)\big) dx =$$

$$= \int_{-1}^{-1/2} \big((-x^3 - x + 1) - (x^3 - x^2 + 2)\big) dx + \int_{-1/2}^{1} \big((x^3 - x^2 + 2) - (-x^3 - x + 1)\big) dx =$$

$$= \int_{-1}^{-1/2} (-2x^3 + x^2 - x - 1) dx + \int_{-1/2}^{1} (2x^3 - x^2 + x + 1) dx =$$

$$= -\int_{-1}^{-1/2} (2x^3 - x^2 + x + 1) dx + \int_{-1/2}^{1} (2x^3 - x^2 + x + 1) dx =$$

$$= -\left[2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{-1/2} + \left[2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1/2}^{1} = \frac{125}{48}$$


3
2
1
0
−1
−1
−0.5
0.5
1

EJERCICIO 10

Determina la longitud de arco de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ en el intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$. Repetir el cálculo para el intervalo $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.

Solución:

Cálculo para el intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$:

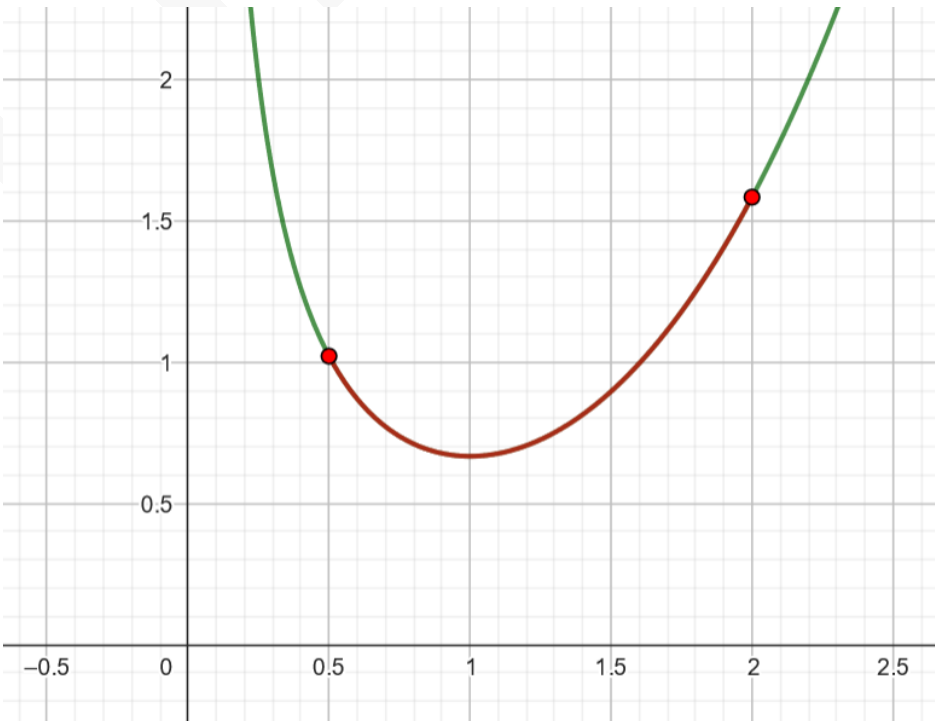
$$\text{Longitud } = \int_{1/2}^{2} \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} dx = \int_{1/2}^{2} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2} dx =$$

$$= \int_{1/2}^{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}\right)} dx = \int_{1/2}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)} dx = \int_{1/2}^{2} \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\right]^2} dx =$$

$$= \int_{1/2}^{2} \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{2} = \frac{33}{16}.$$

Cálculo para el intervalo $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$:

$$\text{Longitud } = \int_{1}^{3/2} \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} dx = \ldots = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_{1}^{3/2} = \frac{9}{16}$$

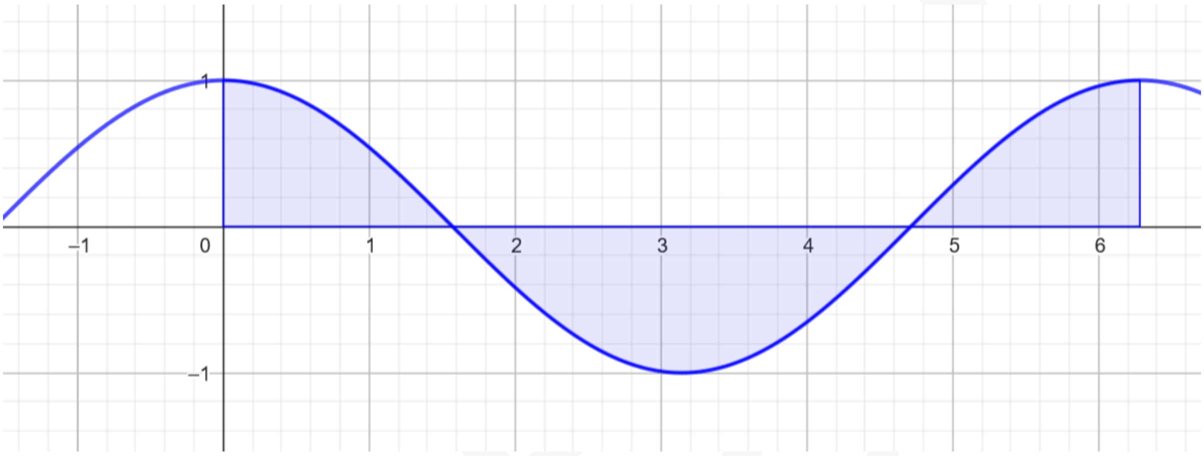


EJERCICIO 11

Halla el volumen obtenido al girar alrededor del eje X el área comprendida entre la gráfica de $f(x) = \cos(x)$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Solución:

$$\text{Volumen } = \pi \int_0^{2\pi} (\cos(x))^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{\text{sen}(2x)}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi^2$$



EJERCICIO 12

Halla el volumen obtenido al girar alrededor del eje X el área comprendida entre la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

Solución:

El primer paso consiste en determinar la forma general de las gráficas y encontrar los puntos comunes de ambas funciones, lo que se calcula igualando ambas expresiones:

$$f(x) = g(x) \implies x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

De momento conocemos dos puntos comunes a las dos funciones, $x = 0$ y $x = 1$. Al estudiar el polinomio $x^2 + x + 1$ comprobamos que no tiene raíces reales, por lo que los únicos puntos del plano real en los que ambas funciones se cruzan o se tocan son $x = 0$ y $x = 1$. A continuación se completa el estudio para determinar de forma aproximada el aspecto de cada función, poniendo especial atención en determinar qué función es mayor en el intervalo $(0, 1)$.

En vista de la gráfica, la integral a calcular es la siguiente:

$$\text{Volumen } = \pi \int_0^1 \left|(f(x))^2 - (g(x))^2\right| dx = \pi \int_0^1 \left|(x^2)^2 - (\sqrt{x})^2\right| dx =$$

$$= \pi \int_0^1 \left|x^4 - x\right| dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi$$