TEMA 3

SOLUCIÓN DE

LOS PROBLEMAS

PROBLEMA 1

Estudia la continuidad de la siguiente función en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 1/x & x \geqslant 1 \end{cases}$$

Solución:

Para todo $x \in (-\infty, 1)$, la función $f(x)$ es constante y por lo tanto continua.

Para todo $x \in (1, \infty)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse del cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula en ningún punto del intervalo de trabajo referido.

Realizamos el estudio de la continuidad para $x = 1$:

1) $f(x)$ está definida en $x = 1$, siendo $f(1) = 1$.

2) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1^+} = 1$$

Puesto que los dos límites laterales en $x = 1$ existen pero no coinciden, se puede afirmar que la función no es continua en $x = 1$, presentando una discontinuidad inevitable de primera especie en dicho punto.

En resumen, la función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, y discontinua en el punto $x = 1$.

PROBLEMA 2

Estudia la continuidad de la siguiente función en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución:

Para todo $x \neq 0$, la función $f(x)$ es continua ya que está construida mediante el producto, cociente y composición de funciones continuas en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, donde respecto al cociente el denominador no se anula en ningún punto del intervalo de trabajo.

Realizamos el estudio de la continuidad para $x = 0$:

1) $f(x)$ está definida en $x = 0$, siendo $f(0) = 0$.

2) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x \cdot \mathrm{sen}(1/x) = 0^- \cdot \mathrm{sen}\left(1/0^-\right) = 0^- \cdot \mathrm{sen}(-\infty) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \mathrm{sen}(1/x) = 0^+ \cdot \mathrm{sen}\left(1/0^+\right) = 0^+ \cdot \mathrm{sen}(+\infty) = 0$$

Puesto que los dos límites laterales coinciden, se puede afirmar que el límite de la función es

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

Nota: En los límites anteriores hay que tener en cuenta que, aunque se desconoce el valor de $\mathrm{sen}(-\infty)$ y $\mathrm{sen}(+\infty)$, se puede afirmar que su valor pertenece al intervalo $[-1, +1]$, y cualquier número de ese intervalo multiplicado por 0 da como resultado 0 .

3) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

Por lo tanto, podemos afirmar que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

En resumen, la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 3

Estudia la continuidad de la siguiente función, indicando claramente los puntos y/o tramos de la recta real donde la función es continua:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución:

Para todo $x \in (-\infty, 0), f(x) = x^3$ es una función continua por tratarse de una función polinómica que a su vez es continua en el intervalo abierto en estudio.

Para todo $x \in (0, \infty), f(x) = e^x - 1$ es una función continua por tratarse de la diferencia de funciones continuas en el intervalo abierto en estudio.

Realizamos el estudio de la continuidad en $x = 0$:

1) $f(x)$ está definida en $x = 0$, siendo $f(0) = e^0 - 1 = 0$.

2) Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^3 = \left(0^-\right)^3 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(e^x - 1\right) = e^{0^+} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Puesto que los dos límites laterales coinciden, se puede afirmar que existe el límite de la función $f(x)$ en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

3) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

Por lo tanto, podemos afirmar que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

En resumen, la función $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$.

PROBLEMA 4

Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$. ¿Se puede ampliar el dominio de $f(x)$ al punto $x = 0$ definiendo $f(0)$ de manera que la función sea continua en $\mathbb{R}$?

Solución:

Para todo $x \neq 0$, se puede afirmar que la función $f(x)$ es continua ya que se trata del cociente, suma y composición de funciones continuas, no anulándose los denominadores en ningún punto del intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

En $x = 0$ la función no está definida, por lo que no puede ser continua en ese punto. Si se quiere ampliar el dominio de la función $f(x)$, añadiendo la imagen de $f(x)$ en $x = 0$ para que la función sea continua en toda la recta real, deberá elegirse la imagen de $f(0)$ de manera que coincida con el límite de la función en ese punto.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \frac{e^{1/0^-}}{1+e^{1/0^-}} = \frac{e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = \frac{\frac{1}{e^{+\infty}}}{1+\frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \frac{e^{1/0^+}}{1+e^{1/0^+}} = \frac{e^{+\infty}}{1+e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{1+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \ldots = 1$$

Puesto que los dos límites laterales en $x = 0$ existen pero no coinciden, la función no podrá ser continua en $x = 0$, independientemente del valor que designemos como $f(0)$.

En resumen, la función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, y discontinua en el punto $x = 0$.

PROBLEMA 5

Indica la relación que debe existir entre los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & x < 2 \\ bx^2 - a & x \geqslant 2 \end{cases}$$

Solución:

Para todo $x \neq 2$, la función $f(x)$ es continua ya que en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$ su expresión es la de una función polinómica (de distinta expresión en cada intervalo).

El único punto donde puede existir una discontinuidad es en $x = 2$. Procedemos a realizar el estudio de continuidad en ese punto:

1) $f(x)$ está definida en $x = 2$, siendo $f(2) = 4b - a$.

2) Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} ax + 2 = 2^- a + 2 = 2(a + 1)$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} bx^2 - a = b\left(2^+\right)^2 - a = 4b - a$$

Para que los dos límites coincidan, debe cumplirse lo siguiente:

$$4b - a = 2 + 2a \implies 3a - 4b + 2 = 0$$

3) En este caso, la condición $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ se cumple de manera trivial si se cumple el anterior requisito.

Por lo tanto, la condición requerida es $3a - 4b + 2 = 0$.

PROBLEMA 6

Dada la siguiente función $f(x)$, elige a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los puntos de la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} -3\,\text{sen}(x) & x \leqslant -\pi/2 \\ a\,\text{sen}(x) + b & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos(x) & x \geqslant \pi/2 \end{cases}$$

Solución:

Para todo punto $x \neq -\pi/2$ y $x \neq \pi/2$, la función $f(x)$ es continua ya que está formada mediante sumas y productos de funciones continuas en los intervalos $(-\infty, -\pi/2), (-\pi/2, \pi/2)$ y $(\pi/2, \infty)$.

Los únicos puntos donde puede existir una discontinuidad es en $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$. Procedemos a realizar el estudio de continuidad en esos puntos, comenzando con $x = -\pi/2$:

1) $f(x)$ está definida en $x = -\pi/2$, siendo $f(-\pi/2) = -3\,\text{sen}(-\pi/2) = -3(-1) = 3$.

2) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} -3\,\text{sen}(x) = -3 \cdot \text{sen}(-\pi/2) = +3$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} a\,\text{sen}(x) + b = a\,\text{sen}\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+\right) + b = -a + b$$

Para que los dos límites coincidan, debe cumplirse que $-a + b = 3$.

3) Si los límites laterales son iguales, la condición $\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ se cumple de manera automática.

Continuamos con el estudio de las condiciones de continuidad en el punto $x = \pi/2$:

1) $f(x)$ está definida en $x = +\pi/2$, siendo $f(+\pi/2) = \cos(+\pi/2) = 0$.

2) Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to\left(+\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(+\frac{\pi}{2}\right)^-} a \cdot \text{sen}(x) + b = a \cdot \text{sen}\left(\left(+\frac{\pi}{2}\right)^-\right) + b = a + b$$

$$\lim_{x\to\left(+\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(+\frac{\pi}{2}\right)^+} \cos(x) = \cos\left(\left(+\frac{\pi}{2}\right)^+\right) = 0$$

Para que los dos límites coincidan, debe cumplirse que $a + b = 0$.

3) Si los límites laterales son iguales, la condición $\lim_{x\to\left(+\frac{\pi}{2}\right)} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ se cumple de manera automática.

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por $-a + b = 3$ y $a + b = 0$ se obtiene que los valores con los que la función $f(x)$ es continua en toda la recta real son $a = -\frac{3}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 7

Estudia la continuidad de la siguiente función en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in(-\infty,0] \\ x^6+x^3 & x\in(0,1) \\ (x^2-1)^2+2 & x\in[1,2) \\ \dfrac{x^3}{2x+4}+x^2 & x\in[2,\infty) \end{cases}$$

Solución:

Para todo punto $x\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$, la función $f(x)$ es continua ya que está formada por sumas, productos, potencias y cocientes de funciones continuas en los intervalos $(-\infty,0),(0,1),(1,2)$ y $(2,\infty)$, donde respecto al cociente el denominador no se anula en ningún punto del intervalo asociado a su expresión. Los únicos puntos donde pueden existir discontinuidades son $x=0$, $x=1$ y $x=2$, por lo que procedemos a realizar el estudio de continuidad en esos puntos, comenzando con $x=0$:

1) $f(x)$ está definida en $x=0$, siendo $f(0)=0$.
2) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x=0 \qquad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^6+x^3\right)=0$$

3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

   Es decir, la función $f(x)$ es continua en $x=0$

Continuamos con el estudio de las condiciones de continuidad en el punto $x=1$:

1) $f(x)$ está definida en $x=1$, siendo $f(1)=\left(1^2-1\right)^2+2=2$.
2) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(x^6+x^3\right)=2 \qquad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\left(x^2-1\right)^2+2\right)=2$$

3) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=2$.

   Es decir, la función $f(x)$ es continua en $x=1$.

Seguimos con el estudio de las condiciones de continuidad en el punto $x=2$:

1) $f(x)$ está definida en $x=2$, siendo $f(2)=\dfrac{2^3}{2\cdot2+4}+2^2=5$.
2) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(\left(x^2-1\right)^2+2\right)=\left(2^2-1\right)^2+2=11$$
$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(\frac{x^3}{2x+4}+x^2\right)=5$$

   Puesto que los dos límites laterales no coinciden, la función no podrá ser continua en $x=2$.

En resumen, la función $f(x)$ es continua en $(-\infty,+2)\cup(+2,\infty)$ y discontinua en $x=2$.

PROBLEMA 8

Estudia la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 2$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\mathrm{Ln}(x)}{x^2 - 1} & x \neq 1 \\ 1/2 & x = 1 \end{cases}$$

Solución:

La función $f(x)$ es continua en $x = 2$ ya que en cualquier intervalo abierto de radio menor que 1 que rodee a dicho punto, la función está formada por diferencias, productos y cocientes de funciones continuas, donde respecto al cociente el denominador no se anula en ningún punto del intervalo de trabajo. De forma alternativa, se podría estudiar la continuidad en $x = 2$ comprobando que se cumplen los tres requisitos de la continuidad en un punto.

Realizamos el estudio de las condiciones de continuidad para el punto $x = 1$:

1) $f(x)$ está definida en $x = 1$, siendo $f(1) = \dfrac{1}{2}$.
2) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x\mathrm{Ln}(x)}{x^2-1}\right) = \frac{1^- \cdot \mathrm{Ln}(1^-)}{(1^-)^2 - 1} = \frac{1 \cdot \mathrm{Ln}(1)}{1-1} = \frac{0}{0} =$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{Ln}(x) + x\dfrac{1}{x}}{2 \cdot x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{Ln}(x)+1}{2\cdot x} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x\mathrm{Ln}(x)}{x^2-1}\right) = \frac{1^+ \cdot \mathrm{Ln}(1^+)}{(1^+)^2 - 1} = \frac{1 \cdot \mathrm{Ln}(1)}{1-1} = \frac{0}{0} =$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{Ln}(x) + x\dfrac{1}{x}}{2 \cdot x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{Ln}(x)+1}{2\cdot x} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

3) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{2}$

Es decir, la función $f(x)$ es continua en $x = 1$.

PROBLEMA 9

Estudia la continuidad de la función $f(x)$ en toda la recta real, indicando los intervalos en los que la función es continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

Antes de analizar la función, es necesario conocer su expresión tras eliminar el valor absoluto. Para ello utilizaremos la siguiente relación:

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Al sustituir el valor absoluto en la función original, se obtiene la expresión equivalente sin el valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{(-x)}{x} = x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + \dfrac{(+x)}{x} = x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Procedemos a estudiar la continuidad de la función:

- Para todo $x \in (-\infty, 0)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica definida en un intervalo abierto.
- Para todo $x \in (0, \infty)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica definida en un intervalo abierto.
- Pasamos a estudiar el punto frontera $x = 0$:

  1) $f(0) = 1$

  2) Estudiamos los límites laterales:

  $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x^2 - 1\right) = -1$$

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + 1\right) = 1$$

  Como los límites laterales no coinciden, se puede afirmar que la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$, presentando una discontinuidad inevitable de primera especie.

El resultado del estudio de continuidad indica que la función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y discontinua en $x = 0$.

PROBLEMA 10

Estudia la continuidad de la función $f(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right|$ en toda la recta real, indicando los intervalos en los que la función es continua.

Solución:

Antes de analizar la función, es necesario conocer su expresión tras eliminar el valor absoluto. Para ello utilizaremos la siguiente relación:

$$|g(x)| = \begin{cases} +g(x) & \text{si } g(x) \geqslant 0 \\ -g(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$

La función $f(x)$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$f(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right| = x\left|\frac{x+1}{x}\right|$$

Por lo tanto, para eliminar el valor absoluto hay que evaluar la expresión $\left|\frac{x+1}{x}\right|$ y determinar cuándo el cociente $\frac{x+1}{x}$ es positivo y cuándo es negativo. Para ello utilizamos la siguiente tabla, en la que los intervalos se han construido a partir de las raíces de los polinomios del numerador y denominador:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$x+1$	-	+	+
x	-	-	+
$\frac{x+1}{x}$	+	-	+

En función de los resultados de la tabla se obtiene la siguiente expresión:

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \in (-\infty,-1) \cup (0,\infty) \\ -\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x \in (-1,0) \end{cases}$$

Al sustituir el valor absoluto en la función original, se obtiene la expresión equivalente sin el valor absoluto:

$$f(x) = x\left|\frac{x+1}{x}\right| = \begin{cases} x\left(\frac{x+1}{x}\right) = (x+1) & \text{si } x \in (-\infty,-1) \cup (0,\infty) \\ -x\left(\frac{x+1}{x}\right) = -(x+1) & \text{si } x \in (-1,0) \end{cases}$$

En $x=-1$, la función $f(x)$ claramente se anula, por lo que a las condiciones anteriores se puede añadir que $f(-1)=0$. Respecto de $f(0)$ de momento no podemos afirmar nada, ya que en ese punto tenemos un cociente $0/0$.

Procedemos a estudiar la continuidad:

- Para todo $x \in (-\infty, -1)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica.
- Para todo $x \in (-1, 0)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica.
- Para todo $x \in (0, \infty)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica.
- Estudiamos la continuidad en $x = -1$:

  1) $f(-1) = 0$

  2) Calculamos los límites laterales:

     $$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x+1) = 0$$

     $$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} -(x+1) = 0$$

     Por lo tanto, $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$

  3) $f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = 0$

     En conclusión, $f(x)$ es continua en $x = -1$.

- Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

  1) La función no está definida en $x = 0$. Solo por este motivo ya podríamos afirmar que $f(x)$ es discontinua en este punto. En cualquier caso, vamos a continuar el estudio por si pudiéramos definir $f(0)$ de forma que la función fuera continua en $x = 0$.

  2) Calculamos los límites laterales:

     $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -(x+1) = -1$$

     $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1$$

     Como los límites laterales no coinciden, aunque fijáramos un valor para $f(0)$ la función $f(x)$ no sería continua en $x = 0$.

El resultado del estudio de continuidad indica que la función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, mientras que es discontinua en $x = 0$.