TEMA 6

SOLUCIÓN DE

LOS EJERCICIOS

EJERCICIO 1

Calcula $\int \frac{8}{5}x^3 dx$.

Solución:

$$\int \frac{8}{5}x^3 dx = \frac{8}{5}\int x^3 dx = \frac{8}{5}\frac{x^4}{4} = \frac{2x^4}{5} + C$$

EJERCICIO 2

Calcula $\int \left(5x^3 - 7x^2 + 3\right) dx$

Solución:

$$\int \left(5x^3 - 7x^2 + 3\right) dx = \int 5x^3 dx + \int \left(-7x^2\right) dx + \int 3 dx =$$

$$= 5\int x^3 dx - 7\int x^2 dx + 3\int dx = \frac{5x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 3x + C$$

EJERCICIO 3

Calcula $\int e^{4x} dx$.

Solución:

$$\int e^{4x} dx = \frac{1}{4}e^{4x} + C$$

EJERCICIO 4

Calcula $\int 5xe^{3x^2+4} dx$.

Solución: . $$\int 5xe^{3x^2+4} dx = 5\cdot\frac{6}{6}\int xe^{3x^2+4} dx = 5\frac{1}{6}\int 6xe^{3x^2+4} dx = \frac{5}{6}e^{3x^2+4} + C$$

EJERCICIO 5

Calcula $\int \frac{1}{x-3} dx$.

Solución:

$$\int \frac{1}{x-3} dx = \text{Ln}(|x-3|) + C$$

EJERCICIO 6

Calcula $\int \frac{1}{5x-3} dx$.

Solución:

$$\int \frac{1}{5x-3} dx = \frac{5}{5} \int \frac{1}{5x-3} = \frac{1}{5} \int \frac{5}{5x-3} = \frac{1}{5} \text{Ln}(|5x-3|) + C$$

EJERCICIO 7

Calcula $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$.

Solución:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \text{Ln}\left(|1+e^x|\right) + C = \text{Ln}\left(1+e^x\right) + C$$

EJERCICIO 8

Calcula $\int (7x+5)^8 dx$.

Solución:

$$\int (7x+5)^8 dx = \frac{7}{7} \int (7x+5)^8 dx = \frac{1}{7} \int 7(7x+5)^8 dx = \frac{1}{7} \frac{(7x+5)^9}{9} + C = \frac{(7x+5)^9}{63} + C$$

EJERCICIO 9

Calcula $\int \frac{1}{7+x^2} dx$.

Solución:

$$\int \frac{1}{7+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

EJERCICIO 10

Calcula $\int \frac{5}{6+7x^2}dx$.

Solución:

$$\int \frac{5}{6+7x^2}dx = 5\int \frac{1}{6+7x^2}dx = 5\int \frac{1}{6+(\sqrt{7}x)^2}dx = 5\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\int \frac{1}{6+(\sqrt{7}x)^2}dx =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{7}}\int \frac{\sqrt{7}}{6+(\sqrt{7}x)^2}dx = \frac{5}{\sqrt{7}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{6}}\right)\right) + C = \frac{5}{\sqrt{42}}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{6}}\right) + C$$

EJERCICIO 11

Calcula $\int 3\sqrt{5-2x}\,dx$.

Solución:

$$\int 3\sqrt{5-2x}\,dx = 3\int (5-2x)^{1/2}dx = 3\cdot\frac{(-2)}{(-2)}\int (5-2x)^{1/2}dx =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{(-2)}\int (-2)(5-2x)^{1/2}dx = 3\cdot\frac{1}{(-2)}\left(\frac{(5-2x)^{3/2}}{3/2}\right) + C = -(5-2x)^{3/2} + C$$

EJERCICIO 12

Calcula $\int \frac{4}{\sqrt[3]{6+3x}}dx$.

Solución:

$$\int \frac{4}{\sqrt[3]{6+3x}}dx = \int \frac{4}{(6+3x)^{1/3}}dx = \int 4(6+3x)^{-1/3}dx =$$

$$= 4\int (6+3x)^{-1/3}dx = 4\cdot\frac{3}{3}\int (6+3x)^{-1/3}dx = 4\cdot\frac{1}{3}\int 3(6+3x)^{-1/3}dx =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{(6+3x)^{2/3}}{2/3} + C = 2(6+3x)^{2/3} + C$$

EJERCICIO 13

Calcula $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}dx.$

Solución:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})}dx =$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})}{x-(x-3)}dx = \frac{1}{3}\int (\sqrt{x}-\sqrt{x-3})dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{x}dx - \frac{1}{3}\int \sqrt{x-3}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int x^{1/2}dx - \frac{1}{3}\int (x-3)^{1/2}dx = \frac{1}{3}\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{3}\frac{(x-3)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}\left(x^{3/2}-(x-3)^{3/2}\right) + C$$

EJERCICIO 14

Calcula $\displaystyle\int \frac{3x^2+8x-1}{x+2}dx.$

Solución:

$$\int \frac{3x^2+8x-1}{x+2}dx = \int \left((3x+2)+\frac{(-5)}{x+2}\right)dx = \frac{3}{2}x^2+2x-5\mathrm{Ln}(|x+2|)+C$$

EJERCICIO 15

Calcula $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+6}{(x-1)^3}dx.$

Solución:

$$\frac{2x^2-5x+6}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+1)+B(x-1)+C}{(x-1)^3} = \frac{Ax^2+(-2A+B)x+(A-B+C)}{(x-1)^3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcccccl} A & & & & & = & 2 \\ -2A & + & B & & & = & -5 \\ A & - & B & + & C & = & 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = 3 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2-5x+6}{(x-1)^3}dx = \int \left(\frac{2}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}\right)dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{(x-1)}dx - \int (x-1)^{-2}dx + 3\int (x-1)^{-3}dx =$$

$$= 2\mathrm{Ln}(|x-1|) - \frac{(x-1)^{-1}}{(-1)} + 3\frac{(x-1)^{-2}}{(-2)} + C = 2\mathrm{Ln}(|x-1|) + \frac{1}{(x-1)} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + C$$

EJERCICIO 16

Calcula $\int \frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)}dx$.

Solución:

$$\frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{A\left(x^2-3x+2\right)+B\left(x^2-2x\right)+C\left(x^2-x\right)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B+C)x^2+(-3A-2B-C)x+2A}{x(x-1)(x-2)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcrcr} A & + & B & + & C & = & 0 \\ -3A & - & 2B & - & C & = & -1 \\ 2A & & & & & = & -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \\ C = -2 \end{cases}$$

$$\int \frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)}dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{3}{(x-1)} - \frac{2}{(x-2)}\right)dx =$$

$$= -\mathrm{Ln}(|x|) + 3\mathrm{Ln}(|x-1|) - 2\mathrm{Ln}(|x-2|) + C$$

EJERCICIO 17

Calcula $\int \frac{1}{x^2-4x+3}dx$.

Solución:

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x+(-A-3B)}{(x-3)(x-1)} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 0 \\ -A & - & 3B & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}dx = \int \left(\frac{1/2}{(x-3)} + \frac{-1/2}{(x-1)}\right)dx = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(|x-3|) - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(|x-1|) + C$$

EJERCICIO 18

Calcula $\int \frac{x+1}{x\left(x^2+4x+4\right)}dx.$

Solución:

$$\frac{x+1}{x\left(x^2+4x+4\right)} = \frac{x+1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx}{x(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2+4x+4) + B\left(x^2+2x\right) + Cx}{x(x+2)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (4A+2B+C)x + 4A}{x(x+2)^2} \implies$$

$$\implies \left.\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ 4A & + & 2B & + & C & = & 1 \\ 4A & & & & & = & 1 \end{array}\right\} \implies \begin{cases} A = 1/4 \\ B = -1/4 \\ C = 1/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{x+1}{x\left(x^2+4x+4\right)}dx = \int \left(\frac{1/4}{x} + \frac{-1/4}{(x+2)} + \frac{1/2}{(x+2)^2}\right) dx =$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(|x|) - \frac{1}{4}\mathrm{Ln}(|x+2|) - \frac{1}{2}(x+2)^{-1} + C$$

EJERCICIO 19

Calcula $\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)(x+1)}dx.$

Solución:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x+1)} =$$

$$= \frac{Ax(x-1)(x+1) + B(x-1)(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{A\left(x^3-x\right) + B\left(x^2-1\right) + C\left(x^3+x^2\right) + D\left(x^3-x^2\right)}{x^2(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(A+C+D)x^3 + (B+C-D)x^2 + (-A)x + (-B)}{x^2(x-1)(x+1)} \implies$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} A & & & + & C & + & D & = & 0 \\ & & B & + & C & - & D & = & 1 \\ -A & & & & & & & = & 0 \\ & - & B & & & & & = & 1 \end{array}\right\} \implies \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \\ C = 1 \\ D = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)(x+1)}dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{(-1)}{(x+1)}\right) dx = \frac{1}{x} + \mathrm{Ln}(|x-1|) - \mathrm{Ln}(|x+1|) + C$$

EJERCICIO 20

Calcula $\displaystyle\int \frac{5x^2-x+3}{x(x^2+1)}dx$.

Solución:

$$\frac{5x^2-x+3}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x\left(x^2+1\right)}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} A+B & = & 5 \\ C & = & -1 \\ A & = & 3 \end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{cases} A= & 3 \\ B= & 2 \\ C= & -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{5x^2-x+3}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int\left(\frac{3}{x}+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{3}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=3\mathrm{Ln}(|x|)+\mathrm{Ln}\left(\left|x^2+1\right|\right)-\arctan(x)+C$$

EJERCICIO 21

Calcula $\displaystyle\int \frac{x^5-x+2}{x^4-1}dx$.

Solución:

$$\frac{x^5-x+2}{x^4-1}=x+\frac{2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}=x+\frac{2}{\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{2}{\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}=$$

$$=\frac{(Ax+B)(x+1)(x-1)+C\left(x^2+1\right)(x-1)+D\left(x^2+1\right)(x+1)}{\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{(A+C+D)x^3+(B-C+D)x^2+(-A+C+D)x+(-B-C+D)}{\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} A+C+D & = & 0 \\ B-C+D & = & 0 \\ -A\ \ B+C+D & = & 0 \\ -B-C+D & = & 2 \end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{cases} A= & 0 \\ B= & -1 \\ C= & -1 \\ D= & 1/2 \end{cases}$$

$$I=\int \frac{x^5-x+2}{x^4-1}dx=\int\left(x+\frac{2}{\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}\right)dx=$$

$$=\int\left(x-\frac{1}{x^2+1}-\frac{1/2}{x+1}+\frac{1/2}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\arctan(x)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(|x+1|)+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(|x-1|)+C$$

EJERCICIO 22

Calcula $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx.$

Solución:

Primero vamos a operar la expresión inicial para dividir la integral en dos:

$$I=\int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx=\frac{2}{2}\int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+x+1}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+1+5}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{5}{x^2+x+1}dx$$

A continuación transformamos el denominador de la segunda integral:

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right) \Longrightarrow \int \frac{5}{x^2+x+1}dx=\int \frac{5}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)}dx$$

Finalmente ya podemos resolver la integral:

$$I=\int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{5}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\left|x^2+x+1\right|\right)+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\right)+C=$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\left|x^2+x+1\right|\right)+\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

EJERCICIO 23

Calcula $\displaystyle\int xe^x dx.$

Solución:

Utilizaremos integración por partes, ya que la integral se ajusta al modelo $\displaystyle\int P(x)e^{ax+b}dx.$

$$\int x^2e^xdx=\left\{\begin{array}{lcl} u=x & \longrightarrow & du=dx \\ dv=e^xdx & \longrightarrow & v=e^x \end{array}\right\}=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C$$

EJERCICIO 24

Calcula $\int x^2 e^x dx$.

Solución:

Utilizaremos el método de integración por partes, ya que la integral se ajusta al modelo $\int P(x)e^{ax+b}dx$.

$$\int x^2 e^x dx = \left\{ \begin{array}{lcl} u = x^2 & \longrightarrow & du = 2x dx \\ dv = e^x dx & \longrightarrow & v = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{lcl} u = x & \longrightarrow & du = dx \\ dv = e^x dx & \longrightarrow & v = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C = e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + C$$

EJERCICIO 25

Calcula $\int x \operatorname{sen}(x) dx$.

Solución:

Utilizaremos integración por partes, ya que la integral se ajusta al modelo $\int P(x)\operatorname{sen}(ax+b)dx$.

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx = \left\{ \begin{array}{lcl} u = x & \longrightarrow & du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(x) dx & \longrightarrow & v = -\cos(x) \end{array} \right\} =$$

$$= x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) dx = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$$

EJERCICIO 26

Calcula $\int 5x(3x+5)^{4/5} dx$.

Solución:

Utilizaremos integración por partes, ya que la integral se ajusta al modelo $\int P(x)(ax+b)^{\alpha} dx$.

$$\int 5x(3x+5)^{4/5} dx = \left\{ \begin{array}{lcl} u = 5x & \longrightarrow & du = 5dx \\ dv = (3x+5)^{4/5} dx & \longrightarrow & v = \dfrac{5}{27}(3x+5)^{9/5} \end{array} \right\} =$$

$$= 5x\frac{5}{27}(3x+5)^{9/5} - \frac{5}{27}\int (3x+5)^{9/5} 5dx = \frac{25}{27}x(3x+5)^{9/5} - \frac{25}{27}\int (3x+5)^{9/5} dx =$$

$$= \frac{25}{27}x(3x+5)^{9/5} - \frac{25}{27}\frac{5}{14}\frac{1}{3}(3x+5)^{14/5} = \frac{25}{27}\left(x(3x+5)^{9/5} - \frac{5}{42}(3x+5)^{14/5}\right) + C$$

EJERCICIO 27

Calcula $\displaystyle\int x^3 \text{Ln}(x)\,dx$.

Solución:

Utilizaremos integración por partes, ya que la integral se ajusta al modelo $\displaystyle\int P(x)\text{Ln}(ax+b)\,dx$.

$$\int x^3\text{Ln}(x)\,dx = \left\{\begin{array}{lcl} u=\text{Ln}(x) & \longrightarrow & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=x^3dx & \longrightarrow & v=\dfrac{x^4}{4}\end{array}\right\} = \frac{x^4}{4}\text{Ln}(x) - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\text{Ln}(x) - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\text{Ln}(x) - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}\text{Ln}(x) - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\left(\text{Ln}(x)-\frac{1}{4}\right)+C$$

EJERCICIO 28

Calcula $\displaystyle\int \frac{1}{e^x-1}dx$.

Solución:

Realizamos el siguiente cambio de variables en la integral:

$$t=e^x \quad\Longrightarrow\quad dt=e^xdx=t\,dx \quad\Longrightarrow\quad dx=\frac{dt}{t}$$

$$\int\frac{1}{e^x-1}dx = \int\frac{1}{(t-1)}\frac{dt}{t} = \int\frac{1}{t(t-1)}dt$$

Resolvemos la nueva integral teniendo en cuenta que se trata de una función racional (es decir, un cociente de polinomios donde la variable independiente es t) y deshacemos el cambio al final.

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)} = \frac{(A+B)t-A}{t(t-1)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 0 \\ -A & & & = & 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1\end{cases}$$

$$I=\int\frac{1}{e^x-1}dx = \int\frac{1}{t(t-1)}dt = \int\left(\frac{-1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt = -\text{Ln}(|t|)+\text{Ln}(|t-1|)+C$$

$$= -\text{Ln}\left(|e^x|\right)+\text{Ln}\left(|e^x-1|\right)+C =$$

$$= -\text{Ln}\left(e^x\right)+\text{Ln}\left(|e^x-1|\right)+C = -x+\text{Ln}\left(|e^x-1|\right)+C$$

EJERCICIO 29

Calcula $\int \frac{e^{6x}}{e^{2x}+1}dx.$

Solución:

Realizamos el siguiente cambio de variables:

$$t = e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad dt = 2e^{2x}dx = 2t dx \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{1}{2t}dt$$

Sustituimos en la integral:

$$\int \frac{e^{6x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{(t)^3}{(t+1)}\frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t+1}dt = \frac{1}{2}\int \left((t-1)+\frac{1}{t+1}\right)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - t + \text{Ln}(|t+1|)\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{4x}}{2} - e^{2x} + \text{Ln}\left(e^{2x}+1\right)\right) + C$$

EJERCICIO 30

Calcula $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx.$

Solución:

Realizamos el siguiente cambio de variables:

$$x = t^6 \quad \Longrightarrow \quad dx = 6t^5 dt$$

Sustituimos en la integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^6}-\sqrt[3]{t^6}}6t^5dt = \int \frac{1}{(t^6)^{1/2}-(t^6)^{1/3}}6t^5dt = \int \frac{1}{t^3-t^2}6t^5dt =$$

$$= \int \frac{6t^5}{t^2(t-1)}dt = 6\int \frac{t^3}{t-1}dt = 6\left(\int \left(t^2+t+1\right) + \frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\text{Ln}(|t-1|)\right) + C = 2t^3+3t^2+6t+6\text{Ln}(|t-1|)+C =$$

$$= 2\left(x^{1/6}\right)^3 + 3\left(x^{1/6}\right)^2 + 6\left(x^{1/6}\right) + 6\text{Ln}\left(\left|\left(x^{1/6}\right)-1\right|\right) + C =$$

$$= 2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6\left(x^{1/6}\right) + 6\text{Ln}\left(\left|\left(x^{1/6}\right)-1\right|\right) + C$$

EJERCICIO 31

Calcula $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Solución:

Realizamos el siguiente cambio de variables:

$$x = t^2 \quad \Longrightarrow \quad dx = 2t\,dt$$

Sustituimos en la integral:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{t^2}} 2t\,dt = \int e^t 2t\,dt = 2\int te^t dt = 2\left(e^t(t-1)\right) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$$

EJERCICIO 32

Calcula $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$.

Solución:

Realizamos el siguiente cambio de variables:

$$x = 2\operatorname{sen}(t) \quad \Longrightarrow \quad dx = 2\cos(t)\,dt$$

Sustituimos en la integral:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{2\cos(t)\,dt}{\left(2\operatorname{sen}(t)\right)^2\sqrt{4-\left(2\operatorname{sen}(t)\right)^2}} = \int \frac{2\cos(t)}{4\operatorname{sen}^2(t)\sqrt{4\left(1-\operatorname{sen}^2(t)\right)}} dt =$$

$$= \int \frac{2\cos(t)}{4\operatorname{sen}^2(t)\sqrt{4\cos^2(t)}} dt = \int \frac{1}{4\operatorname{sen}^2(t)} dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(t)} dt = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\tan(t)}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}\right) + C = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{1-(x/2)^2}}{x/2}\right) + C = -\frac{1}{4}\left(\frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)/2}{x/2}\right) + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$$

Nota: La integral $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(t)} dt$ se puede resolver directamente utilizando las integrales inmediatas del apartado 3 o bien las técnicas para integrales trigonométricas del apartado 7 de los apuntes.

EJERCICIO 33

Calcula $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx$.

Solución:

Para resolver este ejercicio realizamos el siguiente cambio de variable:

$$x = 3\sec(t) = \frac{3}{\cos(t)} \implies dx = 3\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)}dt$$

A continuación insertamos el cambio en la integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx = \int \frac{\left(\frac{3\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)}dt\right)}{\sqrt{\frac{9}{\cos^2(t)}-9}} = \int \frac{\left(\frac{3\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)}dt\right)}{3\sqrt{\frac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)}}} = \int \frac{\left(\frac{\cancel{3\operatorname{sen}(t)}}{\cos^{\cancel{2}}(t)}dt\right)}{\left(\frac{\cancel{3\operatorname{sen}(t)}}{\cancel{\cos(t)}}\right)} = \int \frac{1}{\cos(t)}dt =$$

$$= \operatorname{Ln}\left(\left|\frac{1}{\cos(t)} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}\right|\right) + C = \operatorname{Ln}\left(\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{1-(3/x)^2}}{3/x}\right|\right) + C = \operatorname{Ln}\left(\left|\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}\right|\right) + C$$

Nota: La integral $\int \frac{1}{\cos(t)}dt$ se puede resolver directamente utilizando las integrales inmediatas del apartado 3 o bien las técnicas para integrales trigonométricas del apartado 7 de los apuntes.

EJERCICIO 34

Calcula $\int \operatorname{sen}(5x)\cos(6x)dx$.

Solución:

Comenzaremos el problema utilizando la siguiente relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2} \implies \operatorname{sen}(5x)\cos(6x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)+\operatorname{sen}(11x)}{2}$$

Por ser el seno una función impar, podemos hacer el cambio $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ antes de continuar con el desarrollo:

$$\int \operatorname{sen}(5x)\cos(6x)dx = \int \frac{\operatorname{sen}(-x)+\operatorname{sen}(11x)}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int \operatorname{sen}(x)dx + \int \operatorname{sen}(11x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) - \frac{1}{11}\cos(11x)\right) + C$$

EJERCICIO 35

Calcula $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^6(x)\,dx$.

Solución:

Esta integral se ajusta al tipo $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$ cuando m es impar y n es par, por lo que utilizaremos el siguiente cambio de variable:

$$t = \cos(x) \quad \Longrightarrow \quad dt = -\operatorname{sen}(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Sustituimos a continuación en la integral:

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^6(x)\,dx = \int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 t^6 \frac{(-dt)}{\sqrt{1-t^2}} = -\int t^6 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 dt =$$

$$= -\int t^6\left(1-t^2\right)dt = \int t^6\left(t^2-1\right)dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\cos^9(x)}{9} - \frac{\cos^7(x)}{7} + C$$

EJERCICIO 36

Calcula $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)\,dx$.

Solución:

Esta integral se ajusta al tipo $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$ cuando m es par y n es impar, por lo que utilizamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \operatorname{sen}(x) \Longrightarrow dt = \cos(x)\,dx \Longrightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Sustituimos a continuación en la integral:

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)\,dx = \int t^2\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^2\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 dt =$$

$$= \int t^2\left(1-t^2\right)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{5} + C$$

EJERCICIO 37

Calcula $\displaystyle\int 2\operatorname{sen}^5(x)\cos^5(x)\,dx$.

Solución:

Esta integral se ajusta al tipo $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$ cuando tanto m como n son impares, ocurriendo en este caso además que $m = n$, por lo que podemos utilizar cualquiera de los dos cambios de variable propuestos:

$$t = \cos(x) \implies dt = -\operatorname{sen}(x)dx \implies dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Sustituimos en la integral:

$$\int 2\operatorname{sen}^5(x)\cos^5(x)dx = 2\int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^5 t^5 \frac{(-dt)}{\sqrt{1-t^2}} = -2\int t^5\left(1-t^2\right)^2 dt =$$

$$= -2\int t^5\left(1-2t^2+t^4\right)dt = -2\int \left(t^5-2t^7+t^9\right)dt = -2\left(\frac{t^6}{6}-2\frac{t^8}{8}+\frac{t^{10}}{10}\right)+C =$$

$$= -\frac{\cos^6(x)}{3}+\frac{\cos^8(x)}{2}-\frac{\cos^{10}(x)}{5}+C$$

Nota: Si se hubiera utilizado el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$, el resultado hubiera sido

$$\int 2\operatorname{sen}^5(x)\cos^5(x)dx = \frac{\operatorname{sen}^6(x)}{3}-\frac{\operatorname{sen}^8(x)}{2}+\frac{\operatorname{sen}^{10}(x)}{5}+C$$

EJERCICIO 38

Calcula $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\,dx$.

Solución:

Esta integral se ajusta al tipo $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$ cuando tanto m como n son pares, por lo que es necesario utilizar las siguientes equivalencias trigonométricas:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Sustituimos en la integral:

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)dx = \int \frac{1-\cos^2(2x)}{4}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}dx = \frac{x}{4}-\frac{x}{8}-\frac{1}{8}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} = \frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+C$$

EJERCICIO 39

Calcula $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}dx.$

Solución:

La función es impar en el seno, ya que

$$R\big(-\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)=\frac{(-\operatorname{sen}(x))}{1+\cos(x)}=-\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}=-R\big(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)$$

Debido a ello, utilizaremos el siguiente cambio de variable:

$$t=\cos(x)\implies dt=-\operatorname{sen}(x)dx\implies dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Sustituimos en la integral:

$$\int\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}dx=\int\frac{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}{1+t}\left(-\frac{dt}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}\right)=-\mathrm{Ln}(|1+t|)+C=-\mathrm{Ln}(|1+\cos(x)|)+C$$

EJERCICIO 40

Calcula $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}^2(x)}dx.$

Solución:

La función es impar en el coseno, ya que

$$R\big(\operatorname{sen}(x),-\cos(x)\big)=\frac{-\cos(x)}{4-\operatorname{sen}^2(x)}=-\frac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}^2(x)}=-R\big(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)$$

Debido a ello, utilizaremos el siguiente cambio de variable:

$$t=\operatorname{sen}(x)\implies dt=\cos(x)dx\implies dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Sustituimos en la integral:

$$\int\frac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}^2(x)}dx=\int\frac{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}{4-t^2}\left(\frac{dt}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}\right)=\int\frac{1}{(2+t)(2-t)}dt=\int\frac{1/4}{(2+t)}+\frac{1/4}{(2-t)}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(|2+t|)+\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(|2-t|)+C=\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(|2+\operatorname{sen}(x)|)+\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(|2-\operatorname{sen}(x)|)+C$$

EJERCICIO 41

Calcula $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}dx.$

Solución:

La función es simultáneamente par en el seno y coseno, puesto que

$$R\big(-\operatorname{sen}(x),-\cos(x)\big)=\frac{(-\cos(x))^2}{1+(-\operatorname{sen}(x))^2}=\frac{\cos^2(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}=R\big(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)$$

Debido a ello, utilizaremos el siguiente cambio de variable:

$$t=\tan(x)\implies dt=\frac{1}{\cos^2(x)}dx\implies \cos^2(x)=\frac{1}{1+t^2}\implies \operatorname{sen}^2(x)=\frac{t^2}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral:

$$\int \frac{\cos^2(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}dx=\int\frac{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}{1+\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\int\frac{1}{(1+t^2)(1+2t^2)}dt=$$

$$=\int\left(\frac{-1}{1+t^2}+\frac{2}{1+2t^2}\right)dt=-\arctan(t)+\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)+C=-x+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)\right)+C$$

EJERCICIO 42

Calcula $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen}(x)+4\cos(x)}dx.$

Solución:

Puesto que esta función no se ajusta a ninguno de los casos expuestos anteriormente, utilizamos el siguiente cambio de variable:

$$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\implies \operatorname{sen}(x)=\frac{2t}{1+t^2}\implies \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\implies dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Sustituimos en la integral:

$$\int\frac{1}{3\operatorname{sen}(x)+4\cos(x)}dx=\int\frac{1}{3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+\left(\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}\right)}\left(\frac{2dt}{1+t^2}\right)=\int\frac{dt}{2+3t-2t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{-2(t-2)(t+(1/2))}=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t-2)(t+(1/2))}dt=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{2/5}{t-2}-\frac{2/5}{t+(1/2)}\right)dt=$$

$$-\frac{1}{5}\operatorname{Ln}(|t-2|)-\frac{1}{5}\operatorname{Ln}\left(\left|t+\frac{1}{2}\right|\right)+C=-\frac{1}{5}\operatorname{Ln}\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-2\right|\right)+\frac{1}{5}\operatorname{Ln}\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|\right)+C$$