Hoja de problemas nº 1

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Tema 1

1.- Demostrar que la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $verifica\ la\ ecuación$

$$A^2 + \alpha A + \beta I = 0, determinando\ \alpha\ y\ \beta$$

b) Calcular, si existe, la matriz inversa de A.

2.- Resolver, indicando cuando existe solución, la siguiente ecuación matricial

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$X= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.- Demostrar las siguientes propiedades de una matriz cuadrada:

a) Si A es involutiva y ortogonal, entonces es simétrica

b) Si A es involutiva y simétrica, entonces es ortogonal

c) Si A es ortogonal y simétrica, entonces es involutiva

Calcular el rango de:

4.- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

5.- $Dadas\ las\ matrices\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calcular el rango de A, de B y de BA.

6.- Si A es una matriz idempotente, probar que la matriz

B=I-A es también idempotente. Calcular AB y BA

7.- ¿Para qué valores $x \in R$ *de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & x^2 \end{pmatrix}$ pueden existir matrices B cuadradas de orden 2 no nulas tales que AB=0?

8.- Descomponer la matriz A $= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

9.- Demostrar que la siguiente matriz verifica que $A^n = 3^{n-1} A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10.- Calcular el rango de

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

11.- Calcular si existe la matriz inversa

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

12.- Determinar sin son afirmaciones verdaderas o falsas.

a) Si las columnas 1 y 3 de B son iguales también lo son las columnas 1 y 3 de AB

b) Si las filas 1 y 3 de B son iguales también lo son las filas 1 y 3 de AB

c) Si las filas 1 y 3 de A son iguales también lo son las filas 1 y 3 de ABC

d) $(AB)^2$=A^2B^2

e) Si Ax=0 para un vector x no nulo, entonces A no admite inversa.

13.- Determinar para qué valores de α, *el rango de la siguiente matriz es completo*

$$M=\begin{pmatrix} 2+\alpha & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+\alpha & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+\alpha & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

14.- Siendo $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

hallar una matriz X tal que A.X =C

15.- Hallar la matriz inversa, si existe, de

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

16.- Para cada x$\in$ R *se define* $A_x=\begin{pmatrix} x & \sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{1+x^2} & x \end{pmatrix}$

Demostrar que $(A_x)^{-1} = A_{-x}$

17.- Calcular, si existe, la matriz inversa de

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

18.- Es cierto que si una matriz A es 3x4, su rango es necesariamente 3 ó 4?

19.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Resolver AX=B utilizando la inversa de una matriz rectangular

b) Calcular X tal que X(A=B)=C

Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros

20.- $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 3x + a\,y + az = 5 \\ 4x + ay = 5 \end{array}\right\}$

21.- $\left\{\begin{array}{l} x + ay = 1 \\ -2x - (a+1)y + z = -1 \\ x + (2a-1)y + (a+2)\,z = 4 \end{array}\right\}$

22.- $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + \alpha\,z = \beta \end{array}\right\}$

23.- $\left\{\begin{array}{l} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + +y + az + t = b^2 \\ x + y + z + t = b^3 \end{array}\right\}$

24.- Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

1) Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.
2) Un sistema compatible determinado no puede tener más ecuaciones que incógnitas