Modelos probabilísticos discretos

Problemas resueltos

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

- **Problema 3**

En una constructora se producen por término medio 3 accidentes al mes. Calcular:

a) probabilidad de que no haya ningún accidente en un mes dado

b) probabilidad de que ocurran menos de 5 accidentes en una semana

c) probabilidad de que se produzca algún accidente en un día

X≡ $\textit{número de accidentes al mes} \longrightarrow P(3)$

a) p(X=0)=$e^{-3}\,\frac{3^0}{0!}$= e^{-3}

S≡ $\textit{número de accidentes semanales} \longrightarrow P(0{,}75)$

p(S$< 5) = p(S = 0) + p(S = 1) + \cdots p(S = 4) = e^{-0{,}75}\,\frac{3^0}{0!}$+ $e^{-0{,}75}\,\frac{3^1}{1!}$ ...+ $e^{-0{,}75}\,\frac{3^4}{4!}$

D≡ $\textit{número de accidentes al día} \longrightarrow P(0{,}1)$

P(D$\geq 1) = 1 - p(D = 0) = 1 - e^{-0{,}1}$

- **Problema 4**

- En una región, el número medio de empresas con más de 100 trabajadores que presentaron suspensión de pagos ha sido de 6,8 por año.

a) probabilidad de que ninguna empresa de más de 100 trabajadores presente suspensión de pagos durante un trimestre

X≡ $\textit{número de empresas en suspensión de pagos al trimestre} \longrightarrow P(1{,}7)$

P(X=0)=$e^{-1,7}\frac{1,7^0}{0!}$=$e^{-1,7}$

b) probabilidad de que por lo menos dos empresas de más de 100 trabajadores presenten suspensión de pagos durante un año determinado.

A≡ $\textit{número de empresas en suspensión de pagos al año} \longrightarrow P(6{,}8)$

P(A$\geq 2) = p(A=2)+\cdots = 1-p(A<2) = 1-p(A=0)-p(A=1) = 1-e^{-6,8}(\frac{(6,8)^0}{0!}+\frac{(6,8)^1}{1!})$

- **Problema 5**

La probabilidad de que un consumidor adquiera cierto producto depende de su deliberación tras escuchar un reclamo publicitario, y se ha estimado en 0,2. ¿Cuál es el número esperado de emisiones del reclamo hasta que el consumidor adquiera 100 unidades del producto? ¿cuál es la probabilidad de que los 100 primeros consumidores que escuchan la emisión compren?

- Distribución de probabilidad de X: número de fracasos antes de la compra 100

Se trata de una distribución binomial negativa BN(100;0,2)

P(X=x) = $\binom{x+100-1}{100-1} q^x p^r$ **x=0,1,2,3.....**

Número esperado de fracasos hasta la venta 100: E(X) $=\frac{100x0{,}8}{0{,}2}=400$

Número esperado de emisiones hasta la venta 100= 500

b) **P(X=0) =** $\binom{0+100-1}{100-1}(0,8)^0(0,2)^{100} = (0,2)^{100}$=1,27x$e^{-70} \approx 0$

- **Problema 6**

> • Se sabe que una persona tiene una probabilidad de 0.8 de acertar una pregunta tipo test en un examen. Se pide:
>
> a) Calcular la probabilidad de que la primera pregunta que contesta bien sea la tercera.
>
> b) Para aprobar el examen, es necesario contestar 10 preguntas bien. Calcular la probabilidad de que apruebe al contestar la pregunta 12.

Para cada pregunta definimos una variable Bernoulli

$X_i=\begin{cases} 1 & acierto \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} p = & 0{,}8 \\ q = & 0{,}2 \end{matrix}\right\}$

X≡ $número\ de\ fallos\ antes\ del\ primer\ acierto \rightarrow G(0{,}8)$

a) p(X=2)=$(0{,}2)^2$.0,8=0,032

b) N≡ $número\ de\ fallos\ antes\ del\ décimo\ acierto \rightarrow BN(10; 0{,}8)$

c) P(X=2)= $\binom{n+k-1}{k}p^n q^k$= $\binom{10+2-1}{2}0{,}8^{10}0{,}2^2$

- **Problema 7**

> • La probabilidad de obtener una pieza defectuosa en un proceso de fabricación es de 1 por cada 1000. En un lote de 2 000 piezas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 piezas defectuosas?

Para cada pieza se define una variable Bernoulli

$X_i = \begin{cases} 1 & defectuosa \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} p = 0{,}001 \\ q = 0{,}999 \end{matrix}\right\}$

X≡ $n\acute{u}mero\ de\ piezas\ defectuosas = \sum_{i=1}^{2000} X_i \longrightarrow B(2000; 0{,}001) \approx P(2)$

$p(X=3) = \binom{2000}{3} (0{,}001)^3 (0{,}999)^{1997} = 0{,}1804 = e^{-2}\frac{2^3}{3!}$

Binomial

Poisson

- **Problema 8**

• Un piloto de líneas aéreas realiza vuelos que en el 35% son internacionales. Obtener:

a) la distribución del número de vuelos nacionales que realiza hasta el primer vuelo internacional

b) el valor esperado y la varianza de la distribución anterior.

X≡ $\textit{número de vuelos nacionales antes del primer vuelo internacional} \rightarrow G(0{,}35)$

- Distribución de probabilidad de X:

$$P(X=k) = (0,65)^k(0,35) \qquad k=0,1,2,3.....$$

Media: $E(X) = \frac{q}{p} = \frac{0,65}{0,35} = 1,857 \approx 2\ vuelos$

Varianza: $Var(X) = \frac{q}{p^2}\ \frac{0,65}{(0,35)^2} = 53\ vuelos^2$

- **Problema 9**

> Un encuestador por teléfono debe obtener respuesta de 50 personas. Sabe que sólo en el 60% de las llamadas consigue respuesta. ¿cuál será el número esperado de llamadas que deberá hacer hasta completar el trabajo?
>
> Sabiendo en un momento dado que ha hecho 35 llamadas sin respuesta, ¿cuál es la probabilidad de que aún tenga que hacer al menos otras 5 llamadas fallidas hasta contactar con la 1ª persona que le responda?

- P(respuesta)=0,6=p
- X≡ $número\ de\ llamadas\ fallidas\ antes\ de\ la\ respuesta\ 50 \longrightarrow BN(50; 0{,}6)$

a) E(X) $=\frac{50x0{,}4}{0{,}6}$ =33,33 es el número esperado de llamadas fallidas

El número esperado total de llamadas será de 33+50 =83

- b) el número de fracasos antes de lograr la primera respuesta: Y $\longrightarrow$ G(0,6)

Nos piden la probabilidad de que haya todavía al menos 5 fracasos más antes de la primera respuesta: $p(Y \geq 35+5/Y \geq 35) = p\,(Y \geq 5) = 1 - p(Y < 5) = 1 - p(Y \leq 4) =$ $1\text{-}0{,}6[(0{,}4)^0 + (0{,}4)^1 + \ldots (0{,}4)^4] = 0{,}01024$

- **Problema 10**

Lanzamos una moneda ideal.

a) Probabilidad de que en 10 lanzamientos se obtengan 6 caras

b) Probabilidad de que salgan 3 cruces antes de conseguir la primera cara

c) Probabilidad de que sean necesarios 12 lanzamientos para obtener la cuarta cara

- Definimos para cada lanzamiento una variable
  - X=$\begin{cases} 1 \;\; si\ sale\ cara & 0{,}5 \\ 0 \;\; si\ sale\ cruz & 0{,}5 \end{cases}$
  - X$\equiv$ $Número\ de\ caras\ en\ 10\ lanzamientos$ → B(10;0,5)

P(X=6) = $\binom{10}{6}(0,5)^6(0,5)^4 = \mathbf{0,205}$

b) Y$\equiv$ $Número\ de\ cruces\ antes\ de\ conseguir\ la\ primera\ cara$ → G(0,5)

P(Y=3) = $(0,5)^3 0,5 = \mathbf{0,0625}$

c) T$\equiv$ $Número\ de\ cruces\ antes\ de\ conseguir\ la\ cuarta\ cara$ → BN(4;0,5)

P(X=8) = $\binom{8+4-1}{4-1}(0,5)^8(0,5)^4 = \binom{11}{3}(0,5)^{12}$

- **Problema 11**

Un jugador de golf emboca el hoyo cuando le quedan dos golpes (dos bajo par) en el 5% de las ocasiones

a) probabilidad de que tenga que realizar 6 intentos antes de hacer por primera vez dos bajo par

X≡ $Número\ de\ fallos\ antes\ de\ conseguir\ el\ primer\ "dos\ bajo\ par"$ → G(0,05)

P(X=5) = $\mathbf{(0,95)^5 0,05 = 0,039}$

b) probabilidad de que tenga que hacer 80 hoyos antes de lograr el tercer "dos bajo par".

Y≡ $Número\ de\ fallos\ antes\ del\ tercer\ "dos\ bajo\ par"$ → BN(3;0,05)

P(Y=77) = $\mathbf{\binom{77+3-1}{3-1}(0,95)^{77}(0,05)^3 = \binom{79}{2}(0,95)^{77}(0,05)^3}$

c) Probabilidad de que el número de intentos fallidos antes de lograr el segundo "dos bajo par" sea como máximo uno

T≡ $Número\ de\ fallos\ antes\ del\ segundo\ "dos\ bajo\ par"$ → BN(2;0,05)

P(T≤1) = p(T=0)+p(T=1)= $\mathbf{\binom{0+2-1}{2-1}(0,95)^0(0,05)^2 + \binom{1+2-1}{2-1}(0,95)^1(0,05)^2}$

- **Problema 12**

Se capturaron, etiquetaron y liberaron 5 individuos de una población de animales que se cree en peligro de extinción para que se mezclen con la población de otra región.

Tras esto, se toma una muestra de 5 animales; si en realidad hay 25 animales en total, ¿cuál es la probabilidad de que haya en la muestra menos de 2 etiquetados?

¿Cuál es el número de animales etiquetados esperado? ¿y cuál es la probabilidad de que todos los animales de la muestra estén sin etiquetar?

- X número de animales etiquetados (no hay reemplazamiento) → H(25;5;0,2)

P(X<2) =p(X=0)+p(X=1)= $\frac{\binom{5}{0}\binom{20}{5}}{\binom{25}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{20}{4}}{\binom{25}{5}}$=0,2918+0,456=0,7478

Número esperado de animales etiquetados E(X) =$np = 5x0{,}2 = 1$

p(X=0)= $\frac{\binom{5}{0}\binom{20}{5}}{\binom{25}{5}}$ =0,2918

- **Problema 13**

- Un geólogo recolectó 10 ejemplares de roca basáltica y 10 de granito. Pide a su ayudante una muestra de 7 ejemplares para analizarlos.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los ejemplares sean de uno de los dos tipos?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el nº de ejemplares de granito seleccionados esté dentro de 1 desviación típica de su valor medio?

❑ X: nº de ejemplares de rocas de granito $\rightarrow$ H(20;7;0,5)

a) Prob. de que las 7 sean de granito: P(X=7) = $\frac{\binom{10}{0}\binom{10}{7}}{\binom{20}{7}} = 1{,}19x10^{-4}$

b) Media: E(X) = $np = 7x0{,}5 = 3{,}5$ Varianza: Var(X) = $npq\,\frac{N-n}{N-1} = 1{,}75x\,\frac{20-7}{20-1} = 1{,}197$

$$\sigma = 1{,}094$$

P($\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$) = P($2{,}41 \leq X \leq 4{,}59$) = p(X=3)+p(X=4)= $\frac{\binom{10}{3}\binom{10}{4}}{\binom{20}{7}} + \frac{\binom{10}{4}\binom{10}{3}}{\binom{20}{7}}$

- **Problema 14**

- Una empleada de una empresa de telemarketing dispone de un listado de clientes potenciales de un determinado producto. Si la probabilidad de que dicha empleada realice una venta telefónica es del 10%, determinar

c) probabilidad de que tenga que hacer 15 llamadas para hacer la tercera venta.

T≡ $\textit{Número de llamadas fallidas antes de la } 3^{a} \textit{ venta}$ → BN(3;0,1)

P(T=12) = $\binom{\mathbf{12+3-1}}{\mathbf{3-1}}(\mathbf{0,9})^{\mathbf{12}}(\mathbf{0,1})^{\mathbf{3}}$=0,026

a) probabilidad de que en 10 llamadas realice 3 ventas

Para cada llamada definimos

$$X_i=\begin{cases} 1 & \textit{realiza venta} \quad p=0{,}1 \\ 0 & \textit{en caso contrario} \quad q=0{,}9 \end{cases}$$

X≡ $\textit{número de llamadas que consiguen venta}=\sum_{i=1}^{10} X_i$ → $B(10;0{,}1)$

- p(X= 3) $=\binom{10}{3}(0,1)^3\,(0,9)^7$=0,057

b) probabilidad de que tenga que hacer 4 llamadas para hacer la primera venta

Y≡ $\textit{Número de llamadas fallidas antes de conseguir la primera venta}$ → G(0,1)

P(Y=3) = $(\mathbf{0,9})^{\mathbf{3}}(\mathbf{0,1}) = \mathbf{0,0729}$

- **Problema 15**

En un gran campo se distribuyen al azar las langostas de acuerdo con una distribución de Poisson de parámetro 2 por kilómetro cuadrado. ¿Cómo tendrá que ser el radio de una región para que la probabilidad de encontrar allí al menos una langosta sea de 0,99?

- X:número de langostas por km^2 $\rightarrow P(2)$
- En h km^2, el número de langostas $\rightarrow P(2h)$

$$\mathbf{1\text{-}P(X=0) = 1 - e^{-2h}\frac{(2h)^0}{0!} = 0,99}$$

e^{-2h}=0,01 $\longrightarrow$ -2h=ln(0,01)=-4,605 $\longrightarrow$ h=2,3km^2

- En una superficie de 2,3km^2 se verifica la condición

πr^2=2,3km^2 $\longrightarrow$ r=0,856km

Problema 16

Parcial 1

Problema 4 [3 ptos]

En una agencia de viajes que cuenta con dos operadores se consideran las variables aleatorias

X="número de paquetes vendidos al día por el operador A"

Y="número de paquetes vendidos al día por el operador B"

En la tabla siguiente se muestran las correspondientes probabilidades conjuntas

X/Y	0	1	2
0	0,15	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,05
2	0,10	0,05	0,15

a) Obtener la función de cuantía marginal de la variable Y

b) De los días en que el operador B vende algún paquete, ¿cuál es la probabilidad de que el operador A no haya vendido ninguno?

c) ¿Qué porcentaje de días venden entre los dos más de 3 paquetes de viajes?

d) ¿Qué porcentaje de días vende más el operador A que el operador B?

e) ¿Son las variables X e Y independientes?

X≡ $número\ de\ paquetes\ vendidos\ al\ día\ por\ el\ operador\ A$

Y≡ $número\ de\ paquetes\ vendidos\ al\ día\ por\ el\ operador\ B$

X↓ Y→	0	1	2
0	0,15	0,15	0,1
1	0,05	0,2	0,05
2	0, 1	0,05	0,15

→ P(Y=0) =0,15+0,05+0,1=0,3

→ P(Y=1) =0,15+0,2+0,05=0,4

→ P(Y=2) =0,1+0,05+0,15=0,3

- Obtener la función de cuantía marginal de la variable Y

y_j	P(Y=y_j)
0	0,3
1	0,4
2	0,3

- De los días en que el operador B vende algún paquete, ¿cuál es la probabilidad de que el operador A no haya vendido ninguno?

- P(X=0/Y>0)= $\frac{\text{P(X=0,Y>0)}}{p(Y>0)}$= $\frac{\text{P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)}}{p(Y=1)+p(Y=2)}$ = $\frac{0{,}15+0{,}1}{0{,}4+0{,}3}$=0,357

- ¿Qué porcentaje de días venden entre los dos más de tres paquetes de viajes?

- P(X+Y>3)= $p(X=2,Y=2)=0{,}15$

- ¿Qué porcentaje de días vende más el operador A que el operador B?

- P(X>Y)= $p(X=1,Y=0)+p(X=2,Y=0)+p(X=2,Y=1)=0{,}05+0{,}1+0{,}05=0{,}2$
- ¿Son las variables X e Y independientes?

- P(X=0,Y>0)= $0{,}15 \neq p(X=0).p(Y=0)=0{,}4x0{,}3=0{,}12 \Rightarrow$ *no son independientes*

Problema 17

Se consideran para una serie de familias las variables aleatorias:
X$\equiv$*cuota anual de una póliza de seguro de la vivienda*
Y$\equiv$*cuota anual de una póliza de seguro del automóvil*

En la tabla se muestran las correspondientes probabilidades conjuntas:
•Obtener la función de cuantía marginal de la variable Y
•De los que pagan por un seguro de su vivienda, ¿qué porcentaje pagan más de 400 euros en el seguro de su automóvil?
•Calcular la probabilidad de que, una familia elegida al azar, esté pagando más de 500 euros entre los dos seguros?
•¿A cuántas familias de ese grupo tendremos que consultar de media hasta encontrar la primera que no tiene seguro de vivienda?

X↓ Y→	250	350	600	800
0	0,12	0,05	0,03	0,01
120	0,21	0,1	0,09	0,04
200	0,01	0,04	0,1	0,2