CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Cálculo de Probabilidades

PROBLEMAS TEMA 4

Ideas para resolución

Curso 2022-2023

- **Problema 1**

En un país, la probabilidad de que una empresa industrial contamine, si hay ley ecológica, es 0,01. La probabilidad de que se promulgue una ley ecológica es 0,5 y la probabilidad de que una industria contamine es 0,1.

- Datos: p(C/L)=0,01 p(L)=0,5 p(C)=0,1

a) La probabilidad de que la empresa no contamine y haya ley ecológica

$p(\bar{C} \cap L)=p(\bar{C}/L).p(L)=0{,}99x0{,}5=0{,}495$

b) La probabilidad de que, contaminando la empresa, haya ley ecológica

$p(L/C)=\frac{p(C\cap L)}{p(C)}=\frac{p(C/L).p(L)}{p(C)}=\frac{0{,}01x0{,}5}{0{,}1}=0{,}05$ Habiendo ley ecológica, contaminan el 5% de las empresas

c) La probabilidad de que no habiendo ley ecológica, la empresa no contamine

$p(\bar{C}/\bar{L})=\frac{p(\bar{C}\cap\bar{L})}{p(\bar{L})}=\frac{p(\bar{C})-p(\bar{C}\cap L)}{p(\bar{L})}=\frac{0{,}9-0{,}495}{0{,}5}=0{,}81$

d) La probabilidad de que habiendo ley ecológica, la empresa no contamine

$p(\bar{C}/L)=1-p(C/L)=1-0{,}01=0{,}99$

- **Problema 2**

La probabilidad de que un estudiante A apruebe el examen final de Estadística es 0,7 y la de que otro estudiante B apruebe es 0,5; la probabilidad de que lo aprueben los dos es 0,4.

Obtener la probabilidad de que:

a) al menos uno de los dos apruebe el examen

b) ninguno apruebe el examen

c) solamente uno lo apruebe

- Datos: P(A)=0,7 p(B)=0,5 p(A∩ $B) = 0{,}4$

- a) p(A∪ $B) =$ P(A)+p(B)-p(A∩ $B)$ =0,7+0,5-0,4=0,8
- b) p($\bar{A}$ ∩ $\bar{B}$)=1- p(A∪ $B) =$ 1-0,8=0,2
- c) p($\bar{A}$ ∩ B)+p(A ∩ $\bar{B}$)= p(A∪ $B) -$ p(A∩ $B)$ =0,8-0,4=0,4

- **Problema 3**

Un sistema consta de dos componentes.

La probabilidad de que el segundo componente funcione correctamente durante su duración de diseño es de 0,9, la probabilidad de que por lo menos uno de los dos componentes lo haga es de 0,96 y la probabilidad de que los dos componentes lo hagan es de 0,75. Dado que el primer componente funciona de manera satisfactoria durante toda su duración de diseño, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo componente también lo haga?

- Definimos los sucesos: A: el primer componente funciona;
  B: el segundo componente funciona
- Datos: p(B)=0,9 $p(A\cup B) = 0{,}96$ $p(A \cap B) = 0{,}75$
- Nos piden $p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{0{,}75}{0{,}81}=0{,}926$
- P(A) la despejamos de: $p(A\cup B) = p(A)+p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow pA) = 0{,}96 - 0{,}9 + 0{,}75 = 0{,}81$

- **Problema 4**

Un ladrón es perseguido por un coche de policía y al llegar a un cruce tiene 3 calles por las que huir: A, B y C de forma que B y C son tan estrechas que no cabe por ellas el coche de policía

Si huye por la calle A le atrapan seguro puesto que el otro extremo está ya cortado por una patrulla. Si huye por C se escapa seguro porque no está vigilada y si huye por B se encuentra que está cortada y se bifurca en 2 callejuelas, la BA que conduce a A y la BC que conduce a C.

a) Calcular la probabilidad de atrapar al ladrón
b) Se escapó. ¿Cuál es la probabilidad de que huyera por la calle C desde la callejuela BC?

- Llamamos T al suceso "el ladrón es atrapado"
- p(T)=p(T/A).p(A)+p(T/C).p(C)+p(T/BA).p(BA/B).p(B)+ p(T/BC).p(BC/B).p(B)= =1x1/3+0x1/3+1x1/2x1/3+0=1/2
- $P(BC/\bar{T})=\frac{p(\bar{\mathrm{T}}/_{\mathrm{BC}})p(BC)}{p(\bar{T})}=\frac{1.p(BC/B)p(B)}{0{,}5}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

- **Problema 5**

De un test para detectar la presencia de un determinado virus se sabe que la probabilidad de que resulte positivo en personas enfermas es del 96%, y la probabilidad de que el test falle en personas sanas es del 5%.

Se sabe también que las personas infectadas por el virus ascienden al 0.1% de la población.

a) Si una persona ha obtenido un test negativo, ¿cuál es la probabilidad de que esté equivocado?

b) ¿Cuál es el porcentaje total de positivos que se obtienen con ese test?

c) ¿Cuáles son los coeficientes falso-positivo y falso-negativo del test?

- Datos: P(+/E)=0,96 $\quad$ p(+/$\bar{E}$)=0,05 $\quad$ $p(E) = 0{,}001$

a) $p(E/-) = \frac{p(-/E)p(E)}{p(-)} = \frac{p(-/E)p(E)}{p(-/E)p(E)+p(-/\bar{E})p(\bar{E})} = \frac{0{,}04x0{,}001}{0{,}04x0{,}001+0{,}95x0{,}999} = 4{,}214x10^{-5}$

b) p(+)=1-0,94909=0,05091 $\longrightarrow$ Un 5,09%

c) P$(+/\bar{E})$=0,05 es el falso positivo y p(-/E)=0,04 es el falso negativo.

- **Problema 6**

Se está realizando un estudio de pagos de préstamos. La probabilidad de que una persona solicite un préstamo para hipoteca es de 0.3. De los préstamos de hipotecas, el 10% no se paga, y para otro tipo de préstamos, el 80% se paga. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que una persona haya solicitado préstamo para hipoteca sabiendo que el pago se ha realizado.

b) Calcular la probabilidad de no haya solicitado hipoteca sabiendo que no ha pagado el préstamo.

- Definimos los sucesos H: el crédito solicitado es una hipoteca
  P: el crédito se paga
- Datos del problema: p(H)=0,3; p$(\bar{P}/H) = 0{,}1$; p(P/$\bar{H}$) =0,8

- a) p(H/P)= $\frac{p(P/H)p(H)}{p(P)} = \frac{[1-p(\bar{P}/H)].p(H)}{p(P/H)p(H)+p(P/\bar{H})p(\bar{H})} = \frac{0{,}9x0{,}3}{0{,}9x0{,}3+0{,}8x0{,}7}$=0,325
- b) $p(\bar{H}/\bar{P})= \frac{p(\bar{P}/\bar{H})p(\bar{H})}{p(\bar{P})} = \frac{[1-p(P/\bar{H})].p(\bar{H})}{1-p(P)} = \frac{0{,}2x0{,}7}{0{,}17}$=0,8235

Problema 7

En una compañía de seguros se recogen comunicaciones de incidencias de los clientes que cuentan con un seguro de vivienda. Las incidencias se clasifican en dos categorías: D (daños en el hogar) y R (robo).

Durante el último mes se han recibido un total de 86 comunicaciones de las que 24 incluyen incidencias de tipo R y 68 incluyen incidencias de tipo D. No hay incidencias que no sean robo o daños en el hogar.

Una vez analizadas todas las comunicaciones, la compañía decide pagar compensación a un 65% de las reclamaciones por robo y a un 80% de las reclamaciones por daños en el hogar.

a) ¿Qué porcentaje de reclamaciones incluyen incidencias de los dos tipos?
b) Indicar razonadamente si los sucesos R y D son independientes
c) Se seleccionan al azar por la compañía tres comunicaciones de incidencias. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellas sean por robo y no se acepte la compensación?
d) ¿y cuál es la probabilidad de que alguna de las tres lo sea por daños y con compensación?

Datos del problema: p(R)=24/86=0,279;   p(D)=68/86=0,791.

Las probabilidades de compensación en cada uno de los casos son p(C/R)=0,65 y p(C/D)=0,8

No hay incidencias de otro tipo aparte de estos dos: p(DUR)=1

Comprobamos que p(R)+p(D)=1,07>1 luego existen reclamaciones que contienen incidencias tanto por robo como por daños en el hogar

R y D no son sucesos incompatibles porque $p(D \cap R) \neq 0$

Aplicamos el principio de inclusión exclusión para deducir cuál es la proporción de reclamaciones que incluyen tanto robo como daños en el hogar:

De $p(DUR) = p(D) + p(R) - p(D \cap R)$ deducimos la p(D$\cap R) = 0{,}279 + 0{,}791 - 1 = 0{,}07$

$$luego\ hay\ un\ 7\%\ de\ reclamaciones\ que\ contienen\ ambos\ tipos\ de\ incidencias$$

Además, comprobamos que $0{,}07 = p(D \cap R) \neq p(D).p(R)$=0,791x0,279=0,22 luego los sucesos D y R tampoco son independientes.

Si seleccionamos al azar una incidencia, la probabilidad de que sea por robo y no se acepte compensación podemos obtenerla a partir de la probabilidad condicionada: $p(R \cap \bar{C})$=p$\bar{C}/R).p(R) = 0{,}35x0{,}279 = 0{,}098$

Llamamos T al suceso "que la reclamación sea por robo y sin compensación" y así la probabilidad de que al seleccionar tres , dos de ellas sean de ese tipo T puedo expresarla $p(T1 \cap T2 \cap \overline{T3})$+

Si asumimos que podemos admitir independencia porque el número de extracciones es muy pequeño en relación al número total de reclamaciones

Esta probabilidad es

$p(T1)xp(T2)xp(\overline{T3})$+ $p(T1)xp(T3)xp(\overline{T2})$+ $p(T2)xp(T3)xp(\overline{T1})$=3x0,098$^2x0{,}902 = 0{,}026$

- la probabilidad de que una incidencia sea por daño y tenga compensación podemos obtenerla: $p(D \cap C)$=p$C/D).p(D) = 0{,}8x0{,}791 = 0{,}633$

- Llamamos M al suceso “que la reclamación sea por daño y con compensación” y así para cada reclamación i, p(Mi) $= 0{,}633$;así la probabilidad de que al seleccionar tres , alguna sea de ese tipo puedo expresarla

1. $p(\overline{M1} \cap T\overline{M2} \cap \overline{M3}$)=1 $- p(\overline{M1})xp(\overline{M2})xp(\overline{M3}$)=1-0,367x0,367x0,367=0,95

- **Problema 8**

Una gestora de patrimonios administra 3 fondos de inversión:

El patrimonio que gestiona es de 1.400 Meuros en el fondo A, 850M en el fondo B y 750M en el C.

Dada la evolución de los tipos de interés, la probabilidad de que la gestora obtenga rendimientos anuales reales positivos es del 99%, 60% y 75% respectivamente en cada uno de los fondos.

Si un partícipe invirtió en un fondo y obtuvo una rentabilidad real negativa; ¿cuál es la probabilidad de que invirtiera en el fondo de renta variable?

P(A) = p(fondo A)= 1.400/3.000= 0,467   P(R/A) = 0,99

P(B) = p(fondo B)= 850/3.000=0,283   P(R/B) = 0,60

P(C) = p(fondo C)= 750/3.000=0,25   P(R/C) = 0,75

Sabemos que obtuvo rendimiento negativo: $\bar{R}$ y tenemos entonces que calcular

$$P(C/\bar{R}) = \frac{p(\bar{R}/C)p(C)}{p(\bar{R})} = \frac{p(\bar{R}/C)p(C)}{p(\bar{R}/A)p(A)+p(\bar{R}/B)p(B)+p(\bar{R}/C)p(C)}$$

$$= \frac{0,25x0,25}{0,01x0,467+0,40x0,283+0,25x0,25} = \frac{0,0625}{0,18037} = 0,3465$$