CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Aplicaciones lineales

Tema 5

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Tema 5. Aplicaciones lineales

Aplicaciones lineales. Definición y propiedades

❑ Aplicación lineal

Si V y W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares K,
una **aplicación lineal (homomorfismo)de V en W** es una aplicación que verifica:

1) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u})+f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
2) $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) \quad \forall \alpha \in R, \forall \vec{u} \in V$

O equivalentemente: $f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) \quad \forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

❖ Ejemplos

- ❖ $f: R^3 \longrightarrow R^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, 0, x_2 + x_3)$ no es aplicación lineal
- ❖ $f: R^3 \longrightarrow R^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3, 0, x_2 + x_3)$ no es aplicación lineal
- ❖ $f: R^3 \longrightarrow R^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, 3x_2 + 2x_3)$ sí es aplicación lineal
- ❖ $f: R^3 \longrightarrow R^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 . x_2, 0, x_2 + x_3)$ no es aplicación lineal

Aplicaciones lineales. Definición y propiedades

❑ Propiedades

1) f(0)=0 2) f(- $\vec{u}$) = - f($\vec{u}$) $\forall x \in V$

2) La imagen de un subespacio vectorial S de V es un subespacio vectorial de W

f(V) se denomina Imf

3) Si T es un subespacio de W, f^{-1}(W) es un subespacio de V

4) Si $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots \overrightarrow{u_n}\}$ es un sistema generador de S, entonces {f($\overrightarrow{u_1}$), f($\overrightarrow{u_2}$),....f($\overrightarrow{u_n}$)} es un sistema generador de f(S)

5) Si $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots \overrightarrow{u_n}\}$ son linealmente dependientes, entonces {f($\overrightarrow{u_1}$), f($\overrightarrow{u_2}$),....f($\overrightarrow{u_n}$)} también son l.d.

6) **Las aplicaciones lineales conservan la dependencia lineal, no la independencia lineal**, es decir, si $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots \overrightarrow{u_n}\}$ son linealmente independientes, entonces {f($\overrightarrow{u_1}$), f($\overrightarrow{u_2}$),....f($\overrightarrow{u_n}$)} **NO** necesariamente son l.i.

$Ejemplo$: $f: R^4 \longrightarrow R^3$ f(x_1, x_2, x_3, x_4)= ($x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3$)

(1,0,0,0) y (0,1,0,0) son linealmente independientes; sus imágenes son l. dependientes

Clasificación de las aplicaciones lineales

Tipos de aplicaciones

- Una aplicación es **inyectiva** (monomorfismo) si no hay dos elementos distintos que tengan imágenes iguales.
- Una aplicación es **suprayectiva** (/sobreyectiva) (epimorfismo)si todos los elementos del conjunto final B son la imagen de algún elemento de A.
- Una aplicación es **biyectiva** si es a la vez inyectiva y suprayectiva. (Isomorfismo)Estas aplicaciones establecen una relación de uno a uno entre los conjuntos A y B, pues a cada elemento de A le corresponde uno de B, y a cada elemento de B le corresponde uno (y no más) de A.
- Si f es **biyectiva** entonces existe su inversa, denotada $f^{-1}: W \to V$

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

❑ Núcleo de una aplicación lineal

Si V y W son espacios vectoriales sobre R, y f: V $\longrightarrow$ W es una aplicación lineal

Se llama núcleo de f y se denota **N(f)=Ker f ={x∈V/ f(x)=0} =** $\boldsymbol{f^{-1}(0_W)}$

- ✓ Es por tanto el conjunto de vectores del espacio de partida que tienen como imagen al vector nulo del espacio de llegada

❑ Propiedades del núcleo

- ❑ Kerf es un subespacio vectorial de V
- ❑ f es una aplicación lineal inyectiva si y sólo si ker f = {0}
- ❑ Ker f = {0} si y sólo si la imagen de cualquier sistema libre de vectores de V es un sistema libre de vectores de W

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

❑ Imagen de una aplicación lineal

- Si V y W son espacios vectoriales sobre R y f: V $\longrightarrow$ W es una aplicación lineal
- Se llama Imagen de f y se denota **Imf ={y∈W/** $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}\ \boldsymbol{t.q.}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$**}**

✓ Es por tanto el conjunto de vectores del espacio de llegada W que son imagen de algún vector de V

❑ Propiedades de Im f

❑ La **imagen de un sistema generador** del subespacio *S* es un sistema generador del subespacio *f(S)*

❑ La **imagen de un conjunto linealmente dependiente de vectores** es otro conjunto linealmente dependiente de vectores

❑ La **imagen de un conjunto linealmente independiente** es un conjunto linealmente independiente <u>sólo si la aplicación lineal es inyectiva</u>.

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

❑ Rango de una aplicación lineal

El rango de una aplicación lineal es la dimensión de Im f: **rang f = dim (Imf)**

Cuando los espacios V y W son de dimensión finita, se verifica

dim Ker f + dim Imf = dim V

❑ Propiedades

- ❑ Una aplicación $f: V \to W$ es inyectiva si y sólo si ker f= $\{0\}$
- ❑ Una aplicación $f: V \to W$ es suprayectiva si Imf=W
- ❑ Si *V* tiene dimensión finita, entonces *f* es inyectiva si y sólo si $\dim(V) = \dim(f(V))$.
- ❑ Si *B* es una base de *V*, $f: V \to W$ es inyectiva si y sólo si *f(B)* es una base de *f(V)*, es decir, si es un sistema de vectores linealmente independientes en *W*.

Clasificación

- Si V=W la aplicación lineal se denomina endomorfismo
- Si $f : V \longrightarrow W$ es inyectiva, se llama monomorfismo
- Si $f : V \longrightarrow W$ es suprayectiva, se llama epimorfismo
- Si $f: V \longrightarrow W$ es biyectiva, f es un isomorfismo
- Un endomorfismo biyectivo se denomina automorfismo

Teorema

Si $f:V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal. Son equivalentes:

- 1) f es inyectiva
- 2) f conserva la independencia lineal
- 3) La imagen por f de una base de V es una base de W
- 4) dim V = dim(Imf)
- 5) kerf = {0}

Isomorfismos

- Un isomorfismo es una aplicación lineal biyectiva
- f: V $\longrightarrow$ W es un isomorfismo si y sólo si ker f = {0} e Im f = W
- Dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K de dimensión finita son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión
- La relación de isomorfía entre espacios vectoriales sobre K es una relación de equivalencia.
- Si f: V $\longrightarrow$ W es un isomorfismo, entonces f^{-1}: W $\longrightarrow$ V también es un isomorfismo

Ejemplos

- $R^4=\{(a,b,c,d)\ t.q.\ a,b,c,d \in R\}$
- $P_3(x)=\{a + bx + cx^2 + d.x^3 / a,b,c,d \in R\}$
- $M_2=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a,b,c,d \in R\}$

son espacios vectoriales isomorfos

El espacio vectorial de las aplicaciones lineales

Dados U, V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K y
f: U $\longrightarrow$ V; g: U $\longrightarrow$ V y h: V $\longrightarrow$ W y siendo $\alpha \in K$

- **Suma de aplicaciones lineales**

$$\begin{array}{rcl} f+g:\ U & \longrightarrow & V \\ u & \longrightarrow & (f+g)(u)=f(u)+g(u) \end{array}$$

- **Producto del escalar α por una aplicación lineal**

$$\begin{array}{rcl} \alpha f:\ U & \longrightarrow & V \\ u & \longrightarrow & (\alpha f)(u)=\alpha f(u) \end{array}$$

- **Composición de aplicaciones lineales**

$$\begin{array}{rcl} h_\circ f:\ U & \longrightarrow & W \\ u & \longrightarrow & (h_\circ f)(u)=h[f(u)] \end{array}$$

El espacio vectorial de las aplicaciones lineales

Dadas las aplicaciones lineales
f: U $\longrightarrow$ V; g: U $\longrightarrow$ V y h: V $\longrightarrow$ W y siendo $\alpha \in K$

- **Teorema**
  - La suma f+g es una aplicación lineal
  - El producto αf es una aplicación lineal
  - La composición h∘f es una aplicación lineal

- Denotamos $\mathcal{L}$(U,V) al conjunto de aplicaciones lineales de U en V. Entonces;
- ($\mathcal{L}$(U,V),+)es un grupo conmutativo
- ($\mathcal{L}$(U,V), .K) verifica las siguientes propiedades: $\forall f, g \in \mathcal{L}$(U,V) y $\forall \gamma, \mu \in K$

  a) $(\gamma + \mu)f = \gamma f + \mu f$ (distributiva respecto a la suma de escalares)
  b) $\gamma(f+g) = \gamma f + \gamma g$ *(distributiva respecto a la suma de vectores)*
  c) $\gamma(\mu f) = (\gamma\mu)f$ $d)\ 1.f = f$
- Por tanto ($\mathcal{L}$ **(U,V),+,.K)** **tiene estructura de espacio vectorial y tiene dimensión mn**

Matriz de una aplicación lineal

Si V y W son espacios vectoriales sobre R de dimensiones n y m, B=$\{e_1, e_2,\dots e_n\}$ es una base de V y B´=$\{u_1, u_2,\dots u_m\}$ es una base de W

Si f(e_1)=$a_{11}u_1+ a_{21}u_2+\dots a_{m1}u_m$
f(e_2)=$a_{12}u_1+ a_{22}u_2+\dots a_{m2}u_m$
……………………………………………..
f(e_n)=$a_{1n}u_1+ a_{2n}u_2+\dots a_{mn}u_m$

f(x) =f $(x_1e_1+x_2e_2+\dots x_n\ e_n) = x_1$f($e_1$)+ x_2f(e_2)+… x_nf(e_n)= $x_1\ (a_{11}u_1+ a_{21}u_2+\dots a_{m1}u_m)+$
$x_2\ (a_{12}u_1+ a_{22}u_2+\dots a_{m2}u_m)+$
$x_n\ (a_{1n}u_1+ a_{2n}u_2+\dots a_{mn}u_m)$

$\Downarrow$

$y_1u_1+y_2u_2+\dots y_m\ u_m$

Matricialmente: Y=AX

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es decir A=(f(e_1)|….|f(e_n))

Matriz asociada a una aplicación lineal

Importante

- Y=AX $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$

es la expresión analítica de la aplicación lineal f

- La matriz $M_{B,B'}$(f) se denomina **matriz asociada a f en las bases B y B´**
- Es una matriz de dimensión mxn
- La columna j de la matriz está formada por las coordenadas de f(e_j) respecto de B´.
- El rango de la matriz A es la dimensión de Imf
- Si f=Id, entonces la $M_{B,B'}$(Id) es la matriz que transforma las coordenadas de x respecto a la base B en las coordenadas de x respecto a B´: es la matriz del cambio de base de B a B´.

Matriz asociada a una aplicación lineal

Importante

- f es inyectiva $\Longleftrightarrow$ rang A = n
- f es suprayectiva $\Longleftrightarrow$ rang A = m
- f es un isomorfismo $\Longleftrightarrow$ A es cuadrada y regular

Proposición

Dadas las aplicaciones lineales

f: U $\longrightarrow$ V; g: U $\longrightarrow$ V y h: V $\longrightarrow$ W ;

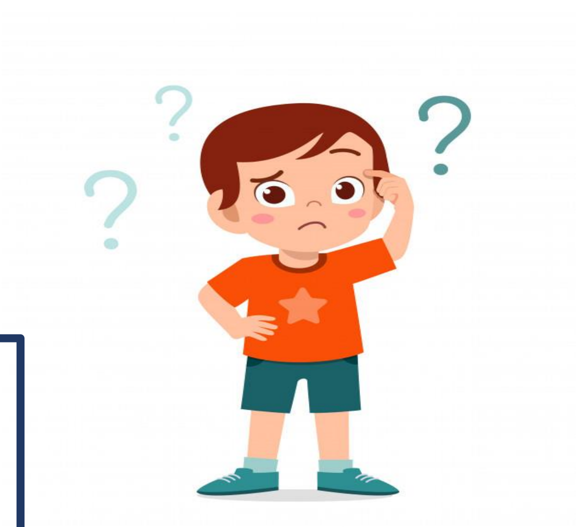
$B, B', y\ B''$ *son bases respectivas de los mismos* y $\alpha \in K$; *entonces*

- $M_{B,B'}$(f+g)= $M_{B,B'}$(f)+ $M_{B,B'}$(g)
- $M_{B,B'}(\alpha$f)= $\alpha M_{B,B'}$(f)
- $M_{B,B''}$(h∘f)= $M_{B',B''}$(h). $M_{B,B'}$(f)

Cambio de base

¿Qué relación existe entre las matrices de una misma aplicación lineal en distintas bases?

Tendremos que utilizar las matrices de cambio de base



Si f∈ $\mathscr{L}$(U,V), para todas las bases A, A´ de U y B, B´ de V se verifica:

$$M_{A'B'}(f) = M_{BB'}\, M_{AB}(f)\, M_{A'A}$$

Cambio de base

Procedimiento

- $M_{A'A}$ transforma las coordenadas de un vector u$\in U$ respecto a la base A´ en las coordenadas de u respecto a A: tiene en sus columnas los vectores de A´ en la base A
- $M_{AB}(f)$ es la matriz de la aplicación lineal: transforma u en f(u)
- $M_{BB'}$ transforma las coordenadas de un vector f(u) $\in V$ respecto a la base B en las coordenadas de f(u) respecto a B´: tiene en sus columnas los vectores de B en la base B´.

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{M_{A'B'}(f)} & B' \\ {\scriptstyle M_{A'A}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle M_{BB'}} \\ A & \xrightarrow{M_{AB}(f)} & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle Id_U}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle Id_V} \\ U & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

$M_{A'B'}(f) = M_{BB'}\, M_{AB}(f)\, M_{A'A}$ Es la matriz asociada a la composición de aplicaciones f= Id_V o f o Id_U

Cambio de base

¿Y si la aplicación lineal es un endomorfismo?

- *La matriz asociada a un endomorfismo es una matriz cuadrada* $M_B(f)$

Si f∈ $\mathfrak{L}$(V), para todas las bases B y B´ de V se verifica:

$$\boxed{M_{B'}(f) = M_{BB'}\, M_B(f)\, M_{B'B}}$$

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r] \arrow[d, "M_{B'B}"'] & B' \\ B \arrow[r, "M_B(f)"] & B \arrow[u, "M_{BB'}"'] \end{tikzcd}$$

- *Como* $M_{BB'}$ y $M_{B'B}$ son matrices inversas: si las llamamos P^{-1} $y\ P, tenemos$

$$M_{B'}(f) = P^{-1} M_B(f)\, P$$

- ***Las matrices asociadas a un endomorfismo en distintas bases son semejantes***

Cambio de base

Procedimiento

- $M_{B'B}$ transforma las coordenadas de un vector u$\in U$ respecto a la base B´ en las coordenadas de u respecto a B: tiene en sus columnas los vectores de B´ en la base B
- $M_B(f)$ es la matriz de la aplicación lineal: transforma u en f(u)
- $M_{BB'}$ transforma las coordenadas de un vector f(u) $\in V$ respecto a la base B en las coordenadas de f(u) respecto a B´: tiene en sus columnas los vectores de B en la base B´.

$$
\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "M_{B'}(f)"] \arrow[d, "M_{B'B}"'] & B' \\
B \arrow[r, "M_B(f)"] & B \arrow[u, "M_{BB'}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_U"'] & V \\
U \arrow[r, "f"] & V \arrow[u, "Id_V"']
\end{tikzcd}
$$

$M_{A'B'}(f) = M_{BB'}\, M_{AB}(f)\, M_{B'B}$ Es la matriz asociada a la composición de aplicaciones f= Id_V o f o Id_U

Cambio de base

- ***Ejemplo***

$$M_{B_c,B_c}(\mathrm{f})=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz asociada a f en las bases B={(1,3,0), (1,0,2), (0,4,-2)} de $\boldsymbol{R}^3$ y B´={(2,1), (4,3)} de $\boldsymbol{R}^2$

- f: $R^3 \longrightarrow R^2$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M_{B,B'}(f)"] \arrow[d, "M_{BB_c}"'] & B' \\ B_c \arrow[r, "M_{B_c}(f)"'] & B_c \arrow[u, "M_{B_cB'}"'] \end{tikzcd}$$

1ª forma: utilizando las matrices de cambio de base

$$\boxed{M_{BB'}(f) = M_{B_cB'}M_{B_cB_c}(\mathrm{f})M_{BB_c}}$$

- ➢ M_{BB_c} es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B en la base B_c : M_{B_c} $(|vectores\ de\ B|)$
  ➢ $M_{B_cB'}$ es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B_c en la base B´ : $M_{B'}$ $(|vectores\ de\ B_c|)$

Cambio de base

- $M_{BB'}(f)$=$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}\frac{-35}{2} & \frac{-39}{2} & -6\\ \frac{19}{2} & \frac{19}{2} & 4\end{pmatrix}$

coordenadas de los vectores de B_c en la base B´

Matriz del homomorfismo $M_{B_cB_c}$(f)

coordenadas de los vectores de B en la base B_c

2ª forma: directamente por coordenadas

- Calculamos las imágenes de los vectores de la base B
- f(1,3,0) = $\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}3\\ 11\end{pmatrix}$
- f(1,0,2) = $\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}-1\\ 9\end{pmatrix}$ f(0,4,-2) = $\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 4\\ -2\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}4\\ -4\end{pmatrix}$

Cambio de base

- Hemos cambiado la base en el espacio de partida; tenemos que hacer ahora el cambio de base en el espacio de llegada ¿Cómo?
- Obteniendo las coordenadas de esos vectores imagen en la base B´: los coeficientes de la combinación lineal
- (3,11) =$\alpha(2,1)+\beta(4,3)$ $\longrightarrow$ $\alpha=\frac{-35}{2}$; $\beta=\frac{19}{2}$
- (-1,9) =$\alpha(2,1)+\beta(4,3)$ $\longrightarrow$ $\alpha=\frac{-39}{2}$; $\beta=\frac{19}{2}$ $\quad M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix} \frac{-35}{2} & \frac{-39}{2} & -6 \\ \frac{19}{2} & \frac{19}{2} & 4 \end{pmatrix}$
- (4,-4) =$\alpha(2,1)+\beta(4,3)$ $\longrightarrow$ $\alpha=-6$; $\beta=4$

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- **Problema 12**

Si C es la base canónica de $\boldsymbol{R}^3$ y C´= {u_1 =(1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,-1,2)}

Si f es un endomorfismo cuya matriz asociada respecto a la base canónica es $M_C(f) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de f en la base C´.

- Se trata de hacer un cambio de base tanto en el espacio de partida como en el de llegada

1ª forma: directamente por coordenadas

- 1º Calculamos las imágenes de los vectores de la base del espacio de partida C´:

$$f(1,1,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Esta es la f(1,1,0) en la base canónica

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- 2º) Queremos hallar las coordenadas de esta imagen en la base C´: son los coeficientes de la combinación lineal
- (1,1,0)= $\alpha(1,1,0)+\beta(1,0,1)$)+$\gamma(0,-1,2)$)) ⟶ α=1 ; β=0 ; γ= 0

  Es la 1ª columna de la matriz $M_{C'}(f)$
- De la misma forma haríamos con f(1,0,1) y con f(0,-1,2)

2ª forma: utilizando las matrices de cambio de base

$$\boxed{M_{C'}(f) = M_{CC'} M_C(f)\, M_{C'C}}$$

Matriz de cambio de base en espacio de llegada

Matriz de cambio de base en espacio de partida

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[r, "M_{C'}(f)"] \arrow[d, "M_{C'C}"'] & C' \\
C \arrow[r, "M_C(f)"'] & C \arrow[u, "M_{CC'}"']
\end{tikzcd}$$

Recuerda

- $M_{C'C}$ es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de C´ en la base C : $M_{\boldsymbol{C}}\,(|vectores\ de\ C'|)$=P
- $M_{CC'}$ es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de C en la base C´ : $M_{\boldsymbol{C'}}\,(|vectores\ de\ C|)$=$P^{-1}$

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- $Entonces\ M_{C'C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

- $y\ por\ tanto\ \ M_{CC'}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

- $M_{C'}\ (f)=M_{CC'}M_C(f)\ M_{C'C}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \boxed{0} & 0\\ 0 & \boxed{1} & 0\\ 0 & \boxed{0} & 2\end{pmatrix}$

❖ ¿Qué significado tienen cada una de las columnas de esta matriz $M_{C'}(f)$?

$\boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}}$

- Son las coordenadas de la imagen del segundo vector de la base C´ expresadas en la base C´

Aplicaciones lineales. Problemas

- **Problema 18**

> Sea f un endomorfismo de R^4 definido por:
>
> 1) ker f = {(x,y,z,t)/ 2x+y-z-2t=0; z+2t=0}
>
> 2) f(0,0,0,1) = (2,0,0,0) y f(1,0,0,0) = (2,0,2,0)
>
> a) Calcular la matriz de f respecto de la base canónica de R^4
> b) Hallar una base del subespacio f(V) siendo
> V$\equiv \{(x, y, z, t)/\ x + y + z + t = 0\}$
> c) Calcular la matriz de f respecto de la base
> B=$\{w_1 = (1,1,0,0), w_2 = (1,-1,0,0), w_3 = (0,0,1,1), w_4 = (0,0,1,-1)\}$

- f: $R^4 \longrightarrow R^4$
- ker f = {(x,y,z,t)/ 2x+y-z-2t=0; z+2t=0}={x,-2x,-2t,t)/ x,t$\in R\}$

  Base del ker f={(1,-2,0,0);(0,0,-2,1)}

- Necesitamos las imágenes de los vectores de la base canónica
- Tenemos f(1,0,0,0) = (2,0,2,0) y f(0,0,0,1) = (2,0,0,0)

Aplicaciones lineales. Problemas

$(0,1,0,0)=\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,0,0,1)+\gamma(1,-2,0,0)+\delta(0,0,-2,1)$ $\alpha=\frac{1}{2};\ \beta=0;\ \gamma=\frac{-1}{2};\ \delta=0$

$f(0,1,0,0)=\frac{1}{2}(2,0,2,0)-\frac{1}{2}(0,0,0,0)=(1,0,1,0)$ $\longrightarrow$ 2ª columna de la matriz asociada

$(0,0,1,0)=\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,0,0,1)+\gamma(1,-2,0,0)+\delta(0,0,-2,1)$ $\alpha=0;\ \beta=\frac{1}{2};\ \gamma=0;\ \delta=\frac{-1}{2}$

$f(0,1,0,0)=\frac{1}{2}(2,0,0,0)=(1,0,0,0)$ $\longrightarrow$ 3ª columna de la matriz asociada

$$M_{B_cB_c}(f)=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Aplicaciones lineales. Problemas

$V \equiv \{(x, y, z, t) / \ x + y + z + t = 0\}$ =\{(x,y,z,-x-y-z)\}/ x,y, $z \in R\}$

- Calculamos las imágenes de los vectores de una base de V
- f(1,0,0,-1)= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- f(0,1,0,-1)= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- f(0,0,1,-1)= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aplicaciones lineales. Problemas

- f(V)=L<(0,0,2,0), (-1,0,-1,0), (-1,0,0,0)> ¿constituyen una base?
- Comprobamos que el rango de este conjunto de vectores es 2: es decir

  f(V)= L< (-1,0,-1,0), (-1,0,0,0)>

c) ¿$M_B(f)$?

- B=$\{w_1 = (1,1,0,0), w_2 = (1,-1,0,0), w_3 = (0,0,1,1), w_4 = (0,0,1,-1)\}$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "M_B(f)"] \arrow[d, "M_{BB_c}"'] & B \\
B_c \arrow[r, "M_{B_c}(f)"'] & B_c \arrow[u, "M_{B_cB}"']
\end{tikzcd}$$

$$M_B(f) = M_{B_CB} M_{B_C}(f)\, M_{BB_C} = P^{-1} M_{B_C}(f) P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones lineales. Problemas

- **Problema 17** el núcleo del homomorfismo es

Ker f ={(x,y,z)/ x+ay+z=0; ax+y+z=0}

-f (0,0,a-1) =(0,a-1) y f(1,0,1)=(2,1). a es un número real arbitrario

- f: $R^3 \longrightarrow R^2$
- Ker f ={(x,y,z)/ x+ay+z=0; ax+y+z=0} (a-1)(x-y)=0
- **Caso 1: Si a$\neq$ 1**: $x = y \Longrightarrow z =$-(1+a)y

  ker f={(x,x,-(1+a)x)/ x∈ R} $\dim \ker f = 1$ $Base \ker f: \{(1,1,-1-a)$

  dim Im f= 2 Base Im f:{(0,a-1) (2,1)}

- **Caso 2: Si a= 1**: $z =$-x-y

  ker f={(x,y,-x-y/ x∈ R} $\dim \ker f = 2$ $Base \ker f: \{(1,0,-1)(0,1,-1)\}$

  dim Im f= 1 Base Im f :{(2,1)}

Aplicaciones lineales. Problemas

b) matriz de la aplicación lineal en las bases canónicas de R^3 y R^2

- **Caso 1: Si a$\neq$ 1**

¿Qué sabemos? f(1,1,-1-a)=(0,0)

f(0,0,a-1)=(0,a-1)

f(1,0,1) =(2,1)

- Necesitamos las imágenes de los vectores de la base canónica de R^3

$(1,0,0)=\alpha(1,1,-1-a)+\beta(0,0,a-1)+\gamma\,(1,0,1)$ $\quad \alpha=0;\ \beta=\frac{-1}{a-1};\ \gamma=1$

$f(1,0,0)=\frac{-1}{a-1}(0,a-1)+(2,1)=(2,0)$ $\longrightarrow$ 1ª columna de la matriz asociada

$(0,1,0)=\alpha(1,1,-1-a)+\beta(0,0,a-1)+\gamma\,(1,0,1)$ $\quad \alpha=1;\ \beta=\frac{2+a}{a-1};\ \gamma=-1$

$f(0,1,0)=\frac{2+a}{a-1}(0,a-1)-(2,1)=(-2,1+a)$ $\longrightarrow$ 2ª columna de la matriz asociada

Aplicaciones lineales. Problemas

$(0,0,1)=\alpha(1,1,-1-a)+\beta(0,0,a-1)+\gamma\,(1,0,1)$ $\alpha=0;\ \beta=\frac{1}{a-1};\ \gamma=0$

$f(0,0,1)=\frac{1}{a-1}(0,a-1)=(0,1)$ → 3ª columna de la matriz asociada

$$M_{B_cB_c}(f)=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 1+a & 1\end{pmatrix}$$

Caso 2: Si a=1

¿Qué sabemos?

f(1,0,-1)=(0,0)

f(0,1, -1)=(0,0)

f(1,0,1) =(2,1)

$(1,0,0)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)+\gamma\,(1,0,1)$ $\alpha=\frac{1}{2};\ \beta=0;\ \gamma=\frac{1}{2}$

$f(1,0,0)=\frac{1}{2}(0,0)+\frac{1}{2}(2,1)=(1,\frac{1}{2})$ → 1ª columna de la matriz asociada

Aplicaciones lineales. Problemas

$(0,1,0)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)+\gamma\ (1,0,1)$ $\alpha=\frac{-1}{2};\ \beta=1;\ \gamma=\frac{1}{2}$

$f(0,1,0)=\frac{1}{2}\ (2,1)=(1,\frac{1}{2})$ → 2ª columna de la matriz asociada

$(0,0,1)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)+\gamma\ (1,0,1)$ $\alpha=\frac{-1}{2};\ \beta=0;\ \gamma=\frac{1}{2}$

$f(0,0,1)=\frac{1}{2}\ (2,1)=(1,\frac{1}{2})$ → 3ª columna de la matriz asociada

$$M_{B_cB_c}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Puedes comprobar que si a= 1, efectivamente rang M = dim Im f =1

- $f^{-1}(2,1)=\{(x,y,z)/\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\}=\{(x,y,z)/x+y+z=2\};$ $f^{-1}(2,3)=\emptyset$