Hoja de problemas nº 4

Espacios vectoriales

Tema 4

Razonar si los siguientes sistemas de vectores constituyen, o no, un subespacio vectorial. En caso afirmativo, encontrar su expresión como subespacio engendrado por un sistema de vectores.

1.- {(x,y,z)∈ R^3 $/2x - y + 3z = 0\}$

2.- {(x,y)∈ R^2 $/x.y = 0\}$

3.- {(x,y,z)∈ R^3 $/2x - y + 3z = 1\}$

4.- {(x,y,z)∈ $R^3/2x - z = 0; x + y + z = 0\}$

5.-Demostrar que $con\ la\ suma\ y\ producto\ por\ escalares$, el conjunto

{(x,y,x+y,-x) ∈ R^4 / $x, y \in R\}$ es un espacio vectorial.

6.- Si F es el conjunto de las funciones definidas en el intervalo [0,1] para las que $2f(0) = f(1)$, probar que forman un espacio vectorial sobre R.

7.- Expresar en forma implícita S= {(α, β, 3α−5β)/ α, β∈ $R\}$ y dar un sistema generador

8.- Determinar si los conjuntos de polinomios A={p(x)∈ $P_2(x)$ $/p(0) = 0,\ p'(0) = 0\}$ y B={p(x)∈ $P_2(x)$ $/p(0) = 0,\ p'(0) = 1\}$ son subespacios de $P_2(x)$.

9.- Expresar en forma implícita el subespacio

S= { (6α+2β, 0, 0, α+4β, 0) } de R^5 y encontrar un sistema generador.

10.- Hallar a y b para que el vector (1,0,a,b) se pueda expresar como combinación lineal de los vectores (1,4,-5,2) y (1,2,3,-1)

11.- Obtener las ecuaciones paramétricas del subespacio M={$(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 0;\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$

Analizar si los siguientes vectores son linealmente independientes:

12.- {(0,1,1,0), (2,1,3,1), (0,1,-1,3), (2,1,5,-2)}

13.- $x^2 + 3x + 1,\ \ 2 - x\ \ y\ 1 + x + x^2$

14.- Si u, v, w son tres vectores linealmente dependientes de V

a) ¿puedes asegurar que z es combinación lineal de x e y?

b) ¿puedes asegurar que uno de ellos depende linealmente de los otros dos?

15.- Calcular la dimensión y una base del subespacio vectorial

$$S = \{M \in M_{2x2}(R)/M^t = -M\}$$

16.- En R^4 considera los subespacios

V_1=L<(1,2,0,1)> V_2={(x,y,z,t)/x-y+z+t=0; y-z=0}

$$V_3 = \left\{ \begin{array}{c} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha + \beta \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \beta \end{array} \right\}$$

Analizar si el vector v=(2,4,0,2) pertenece a cada uno de los subespacios anteriores y en caso afirmativo obtener las coordenadas en unas bases elegidas previamente.

17.- En el espacio vectorial R^4, calcular

a) una base que contenga al vector (1,2,1,1)

b) una base que contenga a los vectores (1,1,0,0), (0,0,2,2) y (0,3,3,0)

18.-Sea S={(x,y,z)∈ R^3 : y = 2x-z}.

a) Calcular una base de S.

b) Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

i) ¿(1,-1,1)∈S ?

ii) ¿Es ⟨(1,1,1), (3,4,2), (-1,-5,3)⟩ un sistema generador de S ?

iii) ¿Es ⟨(-2,-5,1), (2,0,4)⟩ una base de S ?

c) Sea T={(x,y,z)∈S : z = y - 4x}. Calcular dos puntos de T distintos del (0,0,0). ¿Cuál es la dimensión de T?

19.- Dadas B= $\{e_1, e_2, e_3\}\ y\ B' = \{2e_1 + 3e_2, e_1 + e_3, -e_2 + e_3\}$

$a)$ *Si las coordenadas de un vector u respecto a B son* $(1,2,3)$,

¿cuáles son las coordenadas del vector u respecto a B´?

$b)$ *Si las coordenadas de un vector u respecto a B´ son* $(-2,1,0)$,

¿cuáles son las coordenadas del vector u respecto a B?

20.- Dada la base B={(1,1,1), (0,1,-1), (1,-1,0)} de R^3 $y\ la\ matriz\ H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz de cambio de base de B a la base canónica de R^3

b) Obtener una base de N(H) (subespacio nulo de H)

c) Si v=$(1, \alpha, \beta)_B$, determinar los valores de $\alpha\ y\ \beta$ para los que $v \in N(H)$

21.-Examen final Curso 2021-2022

En , espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3, se consideran los subespacios

$$S_1 = \{p(x) \in P_3(x) / \ p(0) = 0\ y\ las\ tangentes\ a\ p(x) en\ los\ puntos\ de\ abscisas\ 1\ y -1\ son\ paralelas\ \}$$

S_2=$\{p(x) \in P_3(x) / \ p(2) = 0\ \}$

Calcular la dimensión y obtener una base de cada uno de esos dos subespacios

Calcular el subespacio $S_1 \cap S_2$, una base del mismo y razonar si $S_1 + S_2$ es o no una suma directa.

Si p(x) es un vector de $S_1 \cap S_2$, calcular cuáles son sus coordenadas en la base

$B = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3\ , x^3\}$

Demostrar, utilizando la matriz de cambio de base apropiada, que las coordenadas en la base canónica del vector obtenido en c) son efectivamente las mismas.

22.- Dados los subespacios S y T

$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / \ x_1 - x_2 = 0\}$ $\quad T = L < (1,1,2,1), (2,3,-1,1) >$

$Obtener\ bases\ de\quad S\ , T,\ S \cap T$ y $S + T$

23.- Si v es un vector de dimensión n$\geq$ 3 de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y las coordenadas de v en una base B son $(x_1, x_2, \dots x_n)$

con $x_2 \neq x_3$; ¿podremos encontrar otra base B´ en la que las coordenadas del vector v sean (1,0,0,…,0)?

24.- En R^4 se consideran los subespacios V_1 y V_2 engendrados respectivamente por

$V_1 = L(\{(1,2,1,0),(-1,1,1,1)\}) \quad V_2 = L(\{(2,-1,0,1),(1,-1,3,7)\})$

Obtener una base para la suma y para la intersección de dichos subespacios.

25.- Si U,W$\leq V$ *son dos subespacios distintos de V*

$$y \dim(V) = n; \quad \dim(U) = \dim(W) = n-1$$

Calcular la dimensión de $U \cap W$.

26.- Consideramos los subespacios V y W de R^3:

V$\equiv \left\{ \begin{array}{c} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \gamma + \beta \\ x_3 = \alpha + \gamma + 2\beta \end{array} \right\}$ W$\equiv$\{(y_1, y_2, y_3) / y_1-y_2+ $2y_3 = 0$\}

a) Obtener una base de V y otra de W
b) Hallar una base de V+W y de V$\cap W$
c) Ecuaciones implícitas de V$\cap W$
d) Coordenadas del vector (2,3,5) respecto de la base de V+W obtenida en el apartado b

27.- Examen Parcial curso 2021-2022

Si $P_2(x)$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y p(x) es un polinomio de grado exactamente 2

a) Demostrar que tanto B={p(x), p´(x), p´´(x)} como B´={p(x), p(x)+p´(x), p´(x)+p´´(x)} son bases de $P_2(x)$
b) Analizar si S =$\{x(x-a)/a \in R\}$ es un subespacio vectorial de $P_2(x)$
c) Si p(x) pertenece a S y tiene raíz -1, obtener las coordenadas de $q(x)$=$x^2 + x + 2$ en la base B´
d) Demostrar, utilizando la matriz de cambio de base apropiada, que el vector obtenido en c) es precisamente q(x).