TEMA 4

SOLUCIÓN DE

LOS PROBLEMAS

PROBLEMA 1

Estudia la derivabilidad de la siguiente función en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x > 0 \end{cases}$$

Solución:

$$f'(0^-) = f'_-(a=0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{(h+h^2) - (0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h}(1+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^-} (1+h) = 1$$

$$f'(0^+) = f'_+(a=0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen}(h)) - (0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \approx \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$

Luego la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$, y su derivada es $f'(0) = 1$.

PROBLEMA 2

Estudia la derivabilidad de la siguiente función en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$f'(0^-) = f'_-(a=0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - (0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^-} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = \operatorname{sen}(-\infty) = ??$$

En este caso, ya no es necesario calcular la otra derivada lateral, puesto que al calcular la derivada por la izquierda nos encontramos con que no podemos determinar el valor de dicha derivada. Por ello, se puede afirmar que no existe la derivada de la función en $x = 0$.

PROBLEMA 3

Estudia la derivabilidad de la siguiente función en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$f'(0^-) = f'_-(a=0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{h}\right) - (0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^{\cancel{2}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{h}\right)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0^-} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

$$f'(0^+) = f'_+(a=0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{h}\right) - (0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^{\cancel{2}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{h}\right)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0^+} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$, y su derivada es $f'(0) = 0$.

PROBLEMA 4

Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = (x^2+x^3)^{1/2}$ en el punto $x = 0$ utilizando el concepto de cociente incremental.

Solución:

Calculamos las derivadas laterales para $f(x) = \left(x^2 + x^3\right)^{1/2} = \sqrt{x^2(1+x)} = |x|\sqrt{1+x}$.

$$f'(0^-) = f'_-(a=0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{h^2+h^3}-\sqrt{0^2+0^3}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{h^2(1+h)}-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{h^2}\sqrt{1+h}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|\sqrt{1+h}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\cancel{h}\sqrt{1+h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^-} \left(-\sqrt{1+h}\right) = -1$$

$$f'(0^+) = f'_+(a=0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+h^3}-\sqrt{0^2+0^3}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2(1+h)}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2}\sqrt{1+h}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|\sqrt{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}\sqrt{1+h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^+} \left(\sqrt{1+h}\right) = 1$$

Puesto que las derivadas laterales no coinciden, podemos afirmar que la función $f(x)$ no es derivable en el punto $x = 0$.

PROBLEMA 5

Estudia si existen o no valores de los parámetros a y b que hagan derivable a la siguiente función a lo largo de toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} a + b\cos(x) & x \leqslant 0 \\ -2ax + 3bx^2 & x > 0 \end{cases}$$

Solución:

Primero estudiaremos la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)$ en los intervalos abiertos:

- Para todo $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) = a + b\cos(x)$ es una función continua y derivable por tratarse de la suma de funciones continuas y derivables, siendo su derivada $f'(x) = -b\operatorname{sen}(x)$.
- Para todo $x \in (0, +\infty)$, $f(x) = -2ax + 3bx^2$ es una función continua y derivable por ser la suma de funciones continuas y derivables, siendo su derivada $f'(x) = -2a + 6bx$.

Ahora estudiaremos la continuidad de la función en $x = 0$, puesto que si la función no es continua en ese punto, entonces se podrá afirmar que no es derivable (ya que si fuera derivable entonces sería continua):

1) $f(x)$ está definida en $x = 0$, siendo $f(0) = a + b$.
2) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a + b\cos(x)) = a + b\cos(0) = a + b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-2ax + 3bx^2\right) = 0 + 0 = 0$$

Para que ambos límites coincidan y la función pueda ser continua, igualamos ambos límites laterales, lo que genera la condición $a + b = 0$.
3) En este caso, si se fuerza a que $a + b = 0$, entonces la condición $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ también se cumple.

Estudiaremos a continuación la derivabilidad de la función en $x = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\big(a + b\cos(h)\big) - (0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{a + b\cos(h)}{h} = \frac{a+b}{0} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \stackrel{L'H}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{-b\operatorname{sen}(h)}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(-2ah + 3bh^2) - (0)}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{h}(-2a + 3bh)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^+} (-2a + 3bh) = -2a$$

Luego para que la función sea derivable en $x = 0$, es necesario que ambos límites coincidan, y por lo tanto debe cumplirse que $-2a = 0$, lo que a su vez implica que $a = 0$. Añadiendo esta condición a la anterior, $a + b = 0$, se obtiene que $b = 0$.

Luego para que la función sea derivable $\forall x \in \mathbb{R}$, debe ser $f(x) = 0$, la función nula.

PROBLEMA 6

Dada la función siguiente función $f(x)$, estudia su continuidad y derivabilidad en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

Antes de analizar la función, es necesario conocer su expresión tras eliminar el valor absoluto. Para ello utilizaremos la siguiente relación:

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Al sustituir el valor absoluto en la función original, se obtiene la expresión equivalente sin el valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{(-\cancel{x})}{\cancel{x}} = x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + \dfrac{(+\cancel{x})}{\cancel{x}} = x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudio de la continuidad:

Para todo $x \in (-\infty, 0)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica definida en un intervalo abierto.

Para todo $x \in (0, +\infty)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica definida en un intervalo abierto.

Pasamos a estudiar el punto frontera $x = 0$:

1) $f(0) = 1$
2) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2 - 1\right) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 + 1\right) = 1$$

Como los límites laterales no coinciden, se puede afirmar que la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$, presentando una discontinuidad inevitable de primera especie (también denominada "de salto finito").

El resultado del estudio de continuidad indica que la función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, y discontinua en $x = 0$.

Estudio de la derivabilidad:

Para todo $x \in (-\infty, 0)$, la función $f(x)$ es derivable por tratarse de una función polinómica definida en un intervalo abierto, y su derivada en ese intervalo es $f'(x) = 2x$.

Para todo $x \in (0, +\infty)$, la función $f(x)$ es derivable por tratarse de una función polinómica definida en un intervalo abierto, y su derivada en ese intervalo es $f'(x) = 2x$.

En $x = 0$ la función no puede ser derivable ya que no es continua.

El resultado del estudio de derivabilidad indica que la función $f(x)$ es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, mientras que no es derivable en $x = 0$.

PROBLEMA 7

Estudia la continuidad y derivabilidad en todos los puntos de la recta real de la función $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Solución:

La función del enunciado es equivalente a la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & x \in (-1,1) \\ \sqrt{x^2-1} & x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \end{cases}$$

Estudio de la continuidad:

La función es continua en $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, ya que su expresión en ese conjunto de puntos está formada por potencias, raíces y diferencias de funciones continuas en ese conjunto, donde el argumento de la raíz nunca es negativo en el conjunto de trabajo.

La función es continua en $(-1,1)$, ya que su expresión en ese intervalo está formada por cocientes, exponenciales y diferencias de funciones continuas en ese intervalo, donde el denominador del cociente no se anula en ningún punto del intervalo de trabajo.

Analizamos la continuidad en el punto frontera $x = -1$:

1) $f(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 1} = 0$
2) Estudiamos los dos límites laterales:

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \sqrt{x^2-1} = 0$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

   Por lo tanto, existe el límite de la función $f(x)$ en $x = -1$.
3) $f(-1) = \lim_{x \to (-1)} f(x)$

Puesto que se cumplen los tres requisitos, se puede afirmar que $f(x)$ es continua en $x = -1$.

Analizamos ahora la continuidad en el punto frontera $x = 1$:

1) $f(1) = \sqrt{(1)^2 - 1} = 0$
2) Estudiamos los dos límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2-1} = 0$$

   Por lo tanto, existe el límite de la función $f(x)$ en $x = 1$.

3) $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$

Al cumplirse los tres requisitos, podemos afirmar que $f(x)$ es continua on $x = 1$.

Por todo lo anterior, podemos concluir que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Estudio de la derivabilidad:

En el conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ la función es derivable por ser composición de funciones derivables en ese conjunto, siendo su derivada $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

En el intervalo $(-1, 1)$ la función es derivable por tratarse de la composición de funciones derivables en ese intervalo, siendo su derivada $f'(x) = \dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2} e^{1/\left(x^2-1\right)}$.

Estudiamos la derivabilidad en el punto frontera $x = -1$:

$$f'_-(-1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{(-1+h)^2 - 1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{h^2 - 2h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \sqrt{\frac{h^2 - 2h}{h^2}} = \lim_{h \to 0^-} \sqrt{1 - \frac{2}{h}} = \sqrt{1 - \frac{2}{0^-}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

Por lo tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Estudiamos finalmente la derivabilidad en el punto frontera $x = 1$:

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{(1+h)^2 - 1} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2 + 2h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sqrt{\frac{h^2 + 2h}{h^2}} = \lim_{h \to 0^+} \sqrt{1 + \frac{2}{h}} = \sqrt{1 + \frac{2}{0^+}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

Luego la función $f(x)$ tampoco es derivable en $x = 1$.

Como resumen del estudio realizado, se puede afirmar que $f(x)$ es derivable en todo punto del conjunto $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

PROBLEMA 8

Dada la función $f(x)$, estudia su continuidad y derivabilidad en toda la recta real en función de los valores de α y β.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) + \alpha & \text{si } x \leqslant 0 \\ \arctan(\operatorname{Ln}(x)) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2} + \beta & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Solución:

Estudio de la continuidad:

La función es continua en $(-\infty, 0)$ por tratarse de una suma de funciones continuas en ese intervalo.

La función es continua en todo punto de $(0, 1)$ por tratarse de la composición de funciones continuas en ese intervalo.

La función es continua en $(1, \infty)$ por tratarse de la suma, diferencia, producto y cociente de funciones continuas en ese intervalo, donde el denominador no se anula en ningún punto de ese intervalo.

Analizamos ahora la continuidad en el punto frontera $x = 0$:

1) $f(0) = \operatorname{sen}(0) + \alpha = \alpha$

2) Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen}(x) + \alpha = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan(\operatorname{Ln}(x)) = \arctan\left(\operatorname{Ln}\left(0^+\right)\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Para que exista el límite de $f(x)$ en $x = 0$, debe ocurrir que $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$.

3) Si $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$, entonces se cumple que $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Analizamos ahora la continuidad en el punto frontera $x = 1$:

1) $f(1) = 0 + \beta = \beta$

2) Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2} + \beta = \beta$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \arctan(\operatorname{Ln}(x)) = \arctan(\operatorname{Ln}(1)) = \arctan(0) = 0$$

Para que exista el límite de $f(x)$ en $x = 1$, debe ocurrir que $\beta = 0$.

3) Si $\beta = 0$, entonces $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Luego podemos concluir que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ si $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ y $\beta = 0$.

Estudio de la derivabilidad:

$f(x)$ es derivable en $(-\infty, 0)$ por tratarse de la suma de funciones derivables, siendo su derivada $f'(x) = \cos(x)$.

$f(x)$ es derivable en $(0, 1)$ por tratarse de la composición de funciones derivables en ese intervalo, siendo su derivada $f'(x) = \dfrac{1/x}{1 + (\mathrm{Ln}(x))^2} = \dfrac{1}{x\,(1 + (\mathrm{Ln}(x))^2)}$.

$f(x)$ es derivable en $(1, \infty)$ por tratase de la suma, diferencia, producto y cociente de funciones continuas en ese intervalo, siendo su derivada $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2-x}{x^3}$.

Estudiamos ahora la derivabilidad en el punto frontera $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\arctan\big(\mathrm{Ln}(h)\big) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \frac{\arctan\left(\mathrm{Ln}\left(0^+\right)\right) + \frac{\pi}{2}}{0^+} =$$

$$= \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{0^+} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \overset{L'H}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1/h}{1 + \left(\mathrm{Ln}(h)\right)^2}}{1} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1/h}{1 + \left(\mathrm{Ln}(h)\right)^2} = \frac{1/0+}{1 + \left(\mathrm{Ln}(0+)\right)^2} =$$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \overset{L'H}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{-1/h^{\cancel{2}}}{2\mathrm{Ln}(h)\,\frac{1}{\cancel{h}}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-1/h}{2\mathrm{Ln}(h)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \overset{L'H}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{h^{\cancel{2}}}}{2\frac{1}{\cancel{h}}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Luego $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Estudiamos ahora la derivabilidad en el punto frontera $x = 1$:

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{\cancel{1} + h - \cancel{1}}{(1+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(1+h)^2} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{(1+h)^2} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\arctan\big(\mathrm{Ln}(1+h)\big) - 0}{h} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \overset{L'H}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{\frac{1}{1+h}}{1 + \left(\mathrm{Ln}(1+h)\right)^2}}{1} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{1+h}}{1 + \left(\mathrm{Ln}(1+h)\right)^2} = \frac{1}{1 + (0)^2} = 1$$

Como las dos derivadas laterales existen y tienen el mismo valor, podemos afirmar que $f'(1) = 1$.

En resumen, si $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ y $\beta = 0$ entonces $f(x)$ es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

PROBLEMA 9

Dada la ecuación de movimiento rectilíneo $x(t) = t^3 + \frac{3}{t}$, calcula la velocidad promedio entre $t = 4$ y $t = 6$ y a continuación determina la velocidad instantánea en $t = 4$.

Solución:

La velocidad promedio entre $t_1 = 4$ y $t_2 = 6$ se calcula mediante el cociente incremental:

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(6) - x(4)}{6 - 4} = \frac{\left(216 + \frac{1}{2}\right) - \left(64 + \frac{3}{4}\right)}{6 - 4} = \frac{607}{8} = 75.875$$

En comparación, la velocidad instantánea en $t = 4$ se calcula mediante el límite del cociente incremental:

$$\lim_{t \to 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{\left(t^3 + \frac{3}{t}\right) - \left(64 + \frac{3}{4}\right)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{\left(t^3 - 64\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{t}\right)}{t - 4} =$$

$$= \lim_{t \to 4} \left(\frac{\cancel{(t-4)}\,(t^2 + 4t + 16)}{\cancel{t-4}} - 3\frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{t}\right)}{t - 4} \right) = \lim_{t \to 4} \left(t^2 + 4t + 16 - 3\left(\frac{\cancel{t-4}}{4t\,\cancel{(t-4)}} \right) \right) =$$

$$= \lim_{t \to 4} \left(t^2 + 4t + 16 - \frac{3}{4t} \right) = 48 - \frac{3}{16} = \frac{765}{16} = 47.8125$$

PROBLEMA 10

Si el radio en centímetros de un globo esférico viene dado por la expresión $r(t) = 3\sqrt[3]{t+8}$, donde $0 \leqslant t \leqslant 10$ y la variable t representa el tiempo en minutos, calcula la razón de cambio en $t = 8$ de los siguientes elementos:

a) El radio.

b) El volumen del globo.

c) El área de la superficie esférica.

Solución:

a) Calculamos la razón de cambio instantánea de la función $r(t)$ en $t = 8$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(8+h)-r(8)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\sqrt[3]{16+h}-3\sqrt[3]{16}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(16+h)^{1/3}-3\cdot 16^{1/3}}{h} =$$

$$= \left\{\frac{0}{0}\right\} \stackrel{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3}\,\frac{1}{\cancel{3}}(16+h)^{-2/3}}{1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(16+h)^{2/3}} = \frac{1}{16^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}}$$

b) Utilizando la expresión de $r(t)$ podemos obtener el volumen de la esfera en función del tiempo:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \implies V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3 = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt[3]{t+8})^3 = 36\pi(t+8)$$

A partir de la anterior fórmula, podemos calcular la razón de cambio instantánea en $t = 8$ de la siguiente manera:

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(8+h)-V(8)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{36\pi(16+h)-36\pi(16)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{36\pi(\cancel{16}+\cancel{h}-\cancel{16})}{\cancel{h}} = 36\pi$$

c) Utilizando de nuevo la expresión de $r(t)$ podemos conseguir una expresión del área de la superficie esférica en función del tiempo

$$A = 4\pi r^2 \implies A(t) = 4\pi r(t)^2 = 4\pi(3\sqrt[3]{t+8})^2 = 36\pi(t+8)^{\frac{2}{3}}$$

Con ello, la razón razón de cambio instantánea en $t = 8$ es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(8+h)-A(8)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{36\pi(16+h)^{\frac{2}{3}}-36\pi(16)^{\frac{2}{3}}}{h} = 36\pi \lim_{h\to 0} \frac{(16+h)^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{2}{3}}}{h} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \stackrel{L'H}{=}$$

$$= 36\pi \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{3}(16+h)^{-\frac{1}{3}}}{1} = 24\pi \lim_{h\to 0} \frac{1}{(16+h)^{\frac{1}{3}}} = \frac{24\pi}{16^{\frac{1}{3}}} = \frac{12\pi}{\sqrt[3]{2}}$$

PROBLEMA 11

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

b) $g(x) = (\operatorname{sen}(x))^4$

c) $h(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^3 e^{x^2+x}))$

Solución:

a) Recordemos cuál es la fórmula de la derivada de la función compuesta:

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \Longrightarrow \quad y' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

Consideremos ahora que $f(x) = x^4$ y que $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, con lo que

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \operatorname{sen}(f(x)) = \operatorname{sen}\left(x^4\right)$$

La derivada se calcula de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = \operatorname{sen}(x) \Longrightarrow g'(x) = \cos(x) \Longrightarrow g'(f(x)) = \cos(f(x)) = \cos\left(x^4\right) \\ f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = 4x^3 \cos\left(x^4\right)$$

Si en lugar de la anterior fórmula utilizamos la regla de la cadena, obtenemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{sen}(z) \\ z = x^4 \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \cos(z) \cdot 4x^3 = 4x^3 \cos(z) = 4x^3 \cos\left(x^4\right)$$

b) Si utilizamos la fórmula de la derivada de la función compuesta, obtenemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^4 \Longrightarrow g'(x) = 4x^3 \Longrightarrow g'(f(x)) = 4(f(x))^3 = 4(\operatorname{sen}(x))^3 \\ f(x) = \operatorname{sen}(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = 4\cos(x)(\operatorname{sen}(x))^3$$

Si en lugar de la anterior fórmula utilizamos la regla de la cadena, obtenemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = z^4 \\ z = \operatorname{sen}(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 4z^3 \cos(x) = 4(\operatorname{sen}(x))^3 \cos(x)$$

c) En este caso, al utilizar la fórmula de la derivada de la composición de funciones, debemos emplear tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ de la siguiente manera:

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$h(x) = \operatorname{sen}(x) \Longrightarrow h'(x) = \cos(x) \Longrightarrow h'(g(f(x))) = \cos(g(f(x))) = \cos\left(\cos\left(x^3 e^{x^2+x}\right)\right)$$

$$g(x) = \cos(x) \Longrightarrow g'(x) = -\operatorname{sen}(x) \Longrightarrow g'(f(x)) = -\operatorname{sen}\left(x^3 e^{x^2+x}\right)$$

$$f(x) = x^3 e^{x^2+x} \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 e^{x^2+x} + x^3(2x+1)e^{x^2+x}$$

Aplicando ahora la fórmula, obtenemos como expresión de la derivada lo siguiente:

$$y' = (h \circ g \circ f)'(x) = -\cos\left(\cos\left(x^3 e^{x^2+x}\right)\right) \cdot \operatorname{sen}\left(x^3 e^{x^2+x}\right) \cdot \left(3x^2 \cdot e^{x^2+x} + x^3 \cdot (2x+1)e^{x^2+x}\right)$$

Si en cambio aplicamos la regla de la cadena con $y = \operatorname{sen}(u), u = \cos(v)$ y $v = x^3 e^{x^2+x}$, obtenemos lo siguiente:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \cos(u) \cdot (-\operatorname{sen}(v)) \cdot 3x^2 \cdot \left(e^{x^2+x} + x^3 \cdot (2x+1)e^{x^2+x}\right) \Longrightarrow$$

$$y' = -\cos\left(\cos\left(x^3 e^{x^2+x}\right)\right) \cdot \operatorname{sen}\left(x^3 e^{x^2+x}\right) \cdot \left(3x^2 \cdot e^{x^2+x} + x^3 \cdot (2x+1)e^{x^2+x}\right)$$

PROBLEMA 12

Obtén la derivada de la función $f(x) = \cos\left(\operatorname{Ln}(\sqrt[3]{x})\right)$.

Solución:

Para aplicar la regla de la cadena identificamos las siguientes funciones:

$$y = \cos(u) \qquad u = \operatorname{Ln}(v) \qquad v = x^{1/3}$$

Procedemos ahora a utilizar la fórmula de la regla de la cadena con esas funciones:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = -\operatorname{sen}(u) \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{-\operatorname{sen}(u) x^{-2/3}}{3v} = \frac{-\operatorname{sen}(u)}{3v x^{2/3}} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(\operatorname{Ln}(v))}{3v x^{2/3}} = \frac{-\operatorname{sen}\left(\operatorname{Ln}\left(x^{1/3}\right)\right)}{3x^{1/3} x^{2/3}} = \frac{-\operatorname{sen}\left(\operatorname{Ln}\left(x^{1/3}\right)\right)}{3x^{3/3}} = \frac{-\operatorname{sen}\left(\operatorname{Ln}\left(x^{1/3}\right)\right)}{3x}$$

En resumen, la derivada solicitada es $f'(x) = -\dfrac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{Ln}\left(x^{1/3}\right)\right)}{3x}$.

PROBLEMA 13

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = x^x$

c) $h(x) = (x^2+1)^{\text{sen}(x)}$

Solución:

a) Vamos a aprovechar la siguiente relación:

$$y = f(x) = 3^x = e^{\text{Ln}\left(3^x\right)} = e^{x\text{Ln}(3)}$$

Aplicamos ahora la regla de la cadena:

$$\left.\begin{array}{l} y = e^z \\ z = x\text{Ln}(3) \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot \text{Ln}(3) = \text{Ln}(3)e^{x\text{Ln}(3)} = \text{Ln}(3)e^{\text{Ln}\left(3^x\right)} = \text{Ln}(3)3^x$$

b) Procedemos de manera similar aprovechando la siguiente relación:

$$y = g(x) = x^x = e^{\text{Ln}\left(x^x\right)} = e^{x\text{Ln}(x)}$$

Aplicamos ahora la regla de la cadena:

$$\left.\begin{array}{l} y = e^z \\ z = x\text{Ln}(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot \big(\text{Ln}(x)+1\big) = e^{\text{Ln}\left(x^x\right)} \cdot \big(\text{Ln}(x)+1\big) = \big(\text{Ln}(x)+1\big)x^x$$

c) Utilizaremos una vez más el mismo procedimiento:

$$y = h(x) = (x^2+1)^{\text{sen}(x)} = e^{\text{Ln}(x^2+1)^{\text{sen}(x)}} = e^{\text{sen}(x)\text{Ln}(x^2+1)}$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\left.\begin{array}{l} y = e^z \\ z = \text{sen}(x)\text{Ln}(x^2+1) \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot \left(\cos(x)\text{Ln}(x^2+1) + \text{sen}(x)\frac{2x}{x^2+1}\right) =$$

$$= \left(\cos(x)\text{Ln}(x^2+1) + \frac{2x\,\text{sen}(x)}{x^2+1}\right) e^{\text{sen}(x)\text{Ln}(x^2+1)} =$$

$$= \left(\cos(x)\text{Ln}(x^2+1) + \frac{2x\,\text{sen}(x)}{x^2+1}\right) e^{\text{Ln}(x^2+1)^{\text{sen}(x)}} =$$

$$= \left(\cos(x)\text{Ln}(x^2+1) + \frac{2x\,\text{sen}(x)}{x^2+1}\right) (x^2+1)^{\text{sen}(x)}$$

PROBLEMA 14

Calcula y simplifica al máximo la expresión de la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{\frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1}}\right) \qquad g(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan(x)$$

Solución:

a) Vamos a utilizar la siguiente relación:

$$f(x) = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{\frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1}}\right) = \mathrm{Ln}\left(\frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Ln}\big(\tan(x)+1\big) - \mathrm{Ln}\big(\tan(x)-1\big)\Big)$$

Además, sabemos que si $g(x) = \tan(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$, entonces $g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Con estos elementos, ya podemos calcular la derivada de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\tan(x)+1} - \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\tan(x)-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\cancel{\tan(x)}-1}{\cos^2(x)} - \frac{\cancel{\tan(x)}+1}{\cos^2(x)}}{\big(\tan(x)+1\big)\big(\tan(x)-1\big)}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{-\frac{\cancel{2}}{\cos^2(x)}}{\tan^2(x)-1} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)\,(1-\tan^2(x))} = \frac{1}{\cos^2(x)\left(1-\frac{\mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}\right)} = \frac{1}{\cos^2(x)-\mathrm{sen}^2(x)} = \frac{1}{\cos(2x)}$$

b) Sabemos que si $g(x) = \arctan(h(x))$, entonces $g'(x) = \dfrac{h'(x)}{1+(h(x))^2}$.

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{(1-\cancel{x})+(1+\cancel{x})}{\cancel{(1-x)^2}}}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{\cancel{(1-x)^2}}} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{1-\cancel{2x}+x^2+1+\cancel{2x}+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

PROBLEMA 15

Halla a, b y c de forma que la función $y = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $(1,3)$ y sea tangente a la recta $x - y + 1 = 0$ en el punto $(2,3)$.

Solución:

Necesitaremos tanto la función $f(x)$ como su derivada:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \implies f'(x) = 2ax + b$$

Repasamos los datos que conocemos:

$$f(1) = a + b + c = 3$$
$$f(2) = 4a + 2b + c = 3$$
$$f'(2) = 4a + b = 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftarrow f_2 - f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \leftarrow f_3 + 3f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \leftarrow f_2 + f_3]{f_1 \leftarrow f_1 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftarrow f_1 - f_2]{f_3 \leftarrow (-1)f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Por lo tanto, la función que cumple las condiciones del enunciado es $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

PROBLEMA 16

Estudia la presencia de asíntotas y de extremos locales, así como las características de crecimiento y concavidad, de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.

Solución:

Puesto que luego va a ser necesario utilizar las derivadas de la función $f(x)$, las calcularemos en este momento:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x - 7 \Longrightarrow f''(x) = 6x + 4 \Longrightarrow f'''(x) = 6$$

Crecimiento y decrecimiento

Igualamos la primera derivada a cero para obtener los candidatos a máximos y mínimos y para determinar los extremos de los intervalos en los que vamos a estudiar el crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 + 4x - 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-4 \pm 10}{6} \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{7}{3} \quad y \quad x = 1$$

Estos dos puntos ($x = -7/3$ y $x = 1$), sirven para construir los intervalos con los que estudiar si la función es creciente o decreciente en función de que la primera derivada sea positiva o negativa en dichos intervalos.

	$(-\infty, -7/3)$	$(-7/3, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+

Luego la función es estrictamente creciente en $(-\infty, -7/3) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-7/3, 1)$.

Máximos y mínimos

Al realizar el estudio de crecimiento y decrecimiento e igualar la primera derivada a cero, llegamos a la conclusión de que los únicos candidatos a máximos y mínimos son $x = -7/3$ y $x = 1$. Calculando el valor de la segunda derivada y particularizando para estos valores podremos obtener más información respecto a si se trata de máximos, mínimos o puntos de inflexión:

- $f''(x = -7/3) = 6(-7/3) + 4 = -10 < 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -7/3$ es un máximo local.
- $f''(x = +1) = 6(1) + 4 = 10 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$ es un mínimo local.

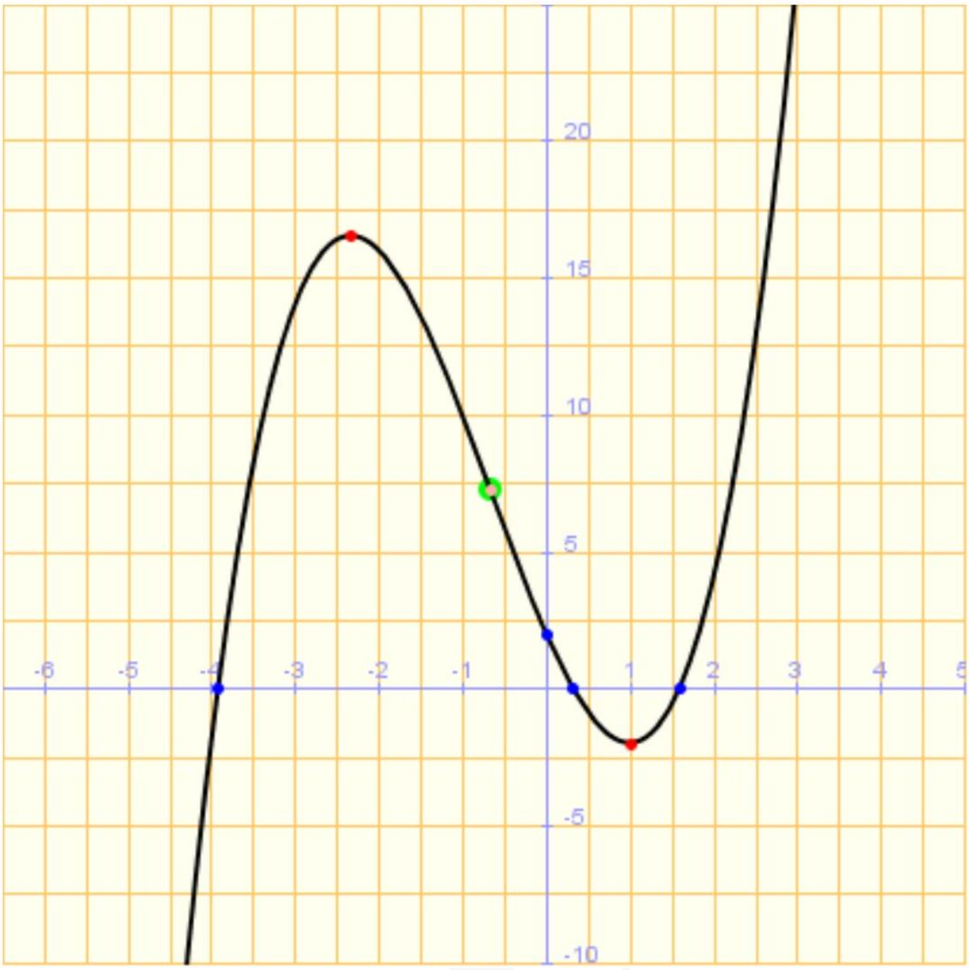
Concavidad y convexidad

Igualamos la segunda derivada a cero para determinar los extremos de los intervalos en los que vamos a estudiar la concavidad y convexidad. En este caso, comprobamos que el único valor que anula $f''(x)$ es $x = -2/3$, por lo que construimos los intervalos apropiados a partir de este valor.

	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, +\infty)$
$f''(x)$	-	+

Luego la función es convexa en $(-\infty, -2/3)$ y cóncava en $(-2/3, +\infty)$. Puesto que $f'''(x = -2/3) \neq 0$, dicho punto se trata de un punto de inflexión.

A continuación se muestra una gráfica de la función con los principales puntos de interés obtenidos.



PROBLEMA 17

Analiza las características de crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, máximos/mínimos y asíntotas de la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para todo x de $\mathbb{R}$.

Solución:

En el estudio de las características de la función será necesario tener en cuenta que el dominio de $f(x)$ es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

La función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ya que es la suma de funciones continuas en esos tramos (podemos expresar la función como $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, con $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = \frac{1}{x}$, donde $f_1(x)$ es continua en toda la recta real y $f_2(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que $f_2(x)$ es un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula para ningún punto del conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

Crecimiento y decrecimiento

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Igualamos la primera derivada a cero para obtener los candidatos a máximos y mínimos, y para determinar los extremos de los intervalos en los que vamos a estudiar el crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 = \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1$$

Estos dos puntos ($x = -1$ y $x = 1$), junto con el punto donde la función no está definida ($x = 0$) sirven para construir los intervalos con los que estudiar si la función es creciente o decreciente en función de que la primera derivada sea positiva o negativa en dichos intervalos.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x^2 - 1$	+	-	-	+
x^2	+	+	+	+
$\frac{x^2 - 1}{x^2}$	+	-	-	+

Luego la función es estrictamente creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Concavidad y convexidad

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Igualamos la segunda derivada a cero para determinar los extremos de los intervalos en los que vamos a estudiar la concavidad y convexidad. En este caso, comprobamos que no existe ningún valor $x \in \mathbb{R}$ que anule $f''(x)$, por lo que el único punto que podemos utilizar para construir los intervalos con los que estudiar si la función es cóncava o convexa es el punto en el que la función no está definida ($x = 0$).

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
x^3	-	+
$\frac{2}{x^3}$	-	+

Luego la función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

Máximos y mínimos

Al realizar el estudio de crecimiento y decrecimiento e igualar la primera derivada a cero, llegamos a la conclusión de que los únicos candidatos a máximos y mínimos son $x = -1$ y $x = 1$. Calculando el valor de la segunda derivada y particularizando para estos valores podremos obtener más información respecto a si se trata de máximos, mínimos o puntos de inflexión:

- $f''(x=-1) = \dfrac{2}{(-1)^3} = \dfrac{2}{-1} = -2 < 0 \implies x = -1$ es un máximo.
- $f''(x=1) = \dfrac{2}{(1)^3} = \dfrac{2}{1} = +2 > 0 \implies x = 1$ es un mínimo.

Asíntotas

1) Estudiamos primero la posible existencia de asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right) = +\infty + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right) = -\infty + \frac{1}{-\infty} = -\infty + 0 = -\infty$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

2) Estudiamos a continuación la posible existencia de asíntotas verticales, y de la inspección de la expresión de la función queda claro que presenta una asíntota vertical en $x = 0$, puesto que cuando nos acercamos a ese punto la función tiende a infinito.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0^- + \frac{1}{0^-} = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0^+ + \frac{1}{0^+} = 0 + \infty = +\infty$$

Nota: En cuanto uno de los anteriores límites hubiera producido como resultado $+\infty$ o $-\infty$, ya podríamos afirmar que existe una asíntota vertical en el punto de cálculo del límite.

3) Estudiamos por último la posible existencia de asíntotas oblicuas empleando las fórmulas siguientes:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(x+\frac{1}{x}\right) - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0 = b$$

Luego en el semiplano derecho (cuando $x \to +\infty$) la función $f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = mx + b$, es decir, $y = x$.

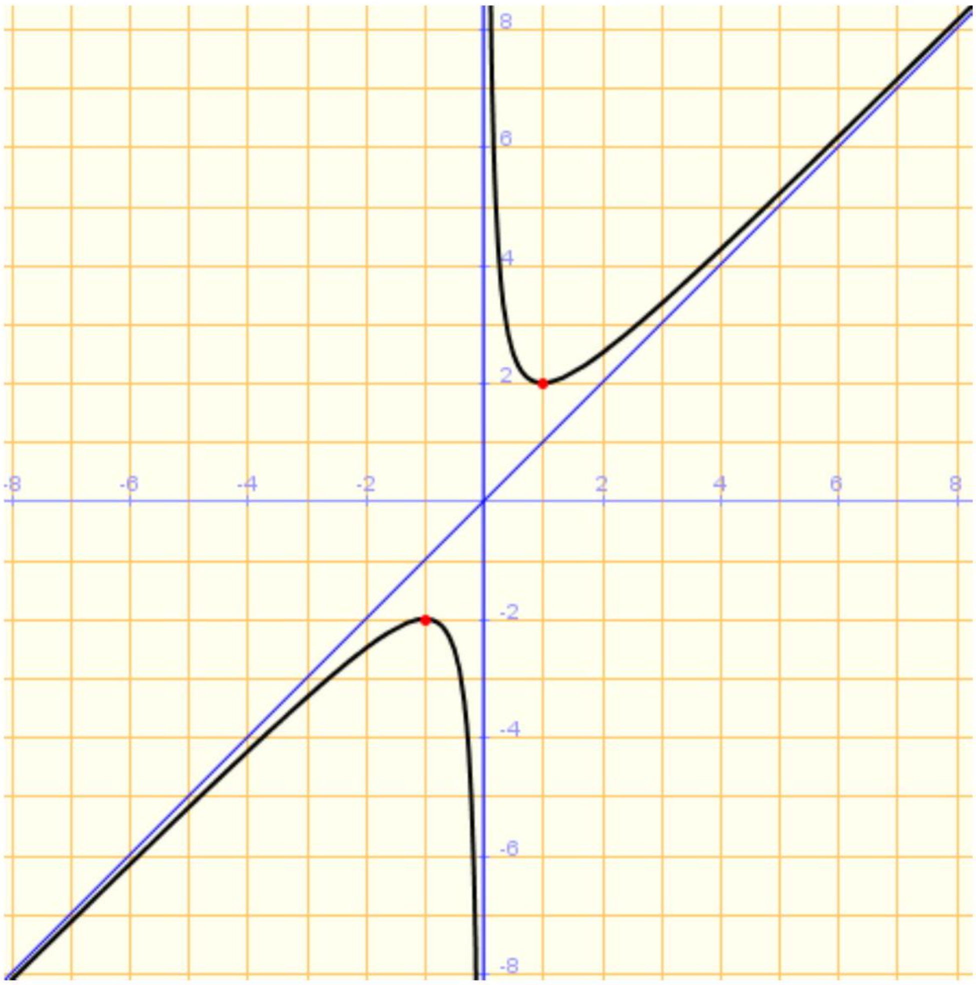
Comprobamos a continuación si la función tiene asíntota oblicua en el semiplano izquierdo (cuando $x \to -\infty$) utilizando las fórmulas equivalentes para este semiplano:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{(-\infty)^2+1}{(-\infty)^2} = \frac{+\infty^2}{+\infty^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\left(x+\frac{1}{x}\right) - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0 = b$$

Luego en el semiplano izquierdo (cuando $x \to -\infty$) la función $f(x)$ tiene como asíntota oblicua $y = mx + b$, es decir, $y = x$.

Con todos estos datos se puede realizar una representación aproximada de la función, que tiene el siguiente aspecto:



PROBLEMA 18

Dada la función $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$, calcula sus extremos absolutos en el intervalo $[-1, 2]$ y sus puntos de inflexión.

Solución:

Comenzaremos calculando las dos primeras derivadas de la función:

$$f(x) = 2x - 3x^{2/3} \implies f'(x) = 2 - 2x^{-1/3} = \frac{2x^{1/3} - 2}{x^{1/3}} \implies f''(x) = \frac{2}{3x^{4/3}}$$

$$\text{Puntos críticos} \begin{cases} x = 0, & \text{ya que } \nexists f'(x) \text{ en } x = 0 \\ x = 1, & \text{ya que } f'(x) = 0 \text{ en } x = 1 \end{cases}$$

$\boxed{x = 0}$

En este punto, que sí pertenece al dominio, la función no tiene derivada, por lo que vamos a analizar el comportamiento de la función a ambos lados del punto. Se puede comprobar que $f(x) < 0$ inmediatamente a la izquierda y a la derecha de $x = 0$. Como $f(x)$ es una función continua en $x = 0$, ello implica que $x = 0$ es un máximo local.

$\boxed{x = 1}$

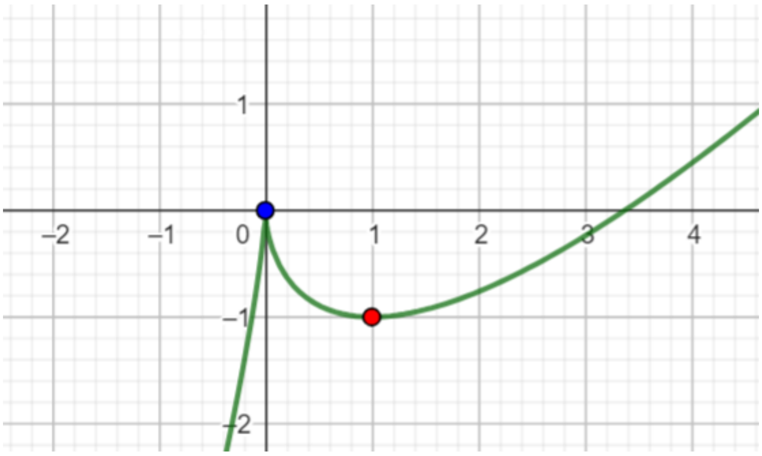
Como $f'(1) = 0$ y $f''(1) = \dfrac{2}{3} > 0$, el punto $x = 1$ es un mínimo local de la función.

Además de los puntos críticos, para determinar los extremos absolutos en $[-1, 2]$ hay que valorar los extremos del intervalo.

$$f(-1) = -5 \qquad f(0) = 0 \qquad f(1) = -1 \qquad f(2) \approx -0.72$$

Por lo tanto, $x = -1$ es el mínimo absoluto y $x = 0$ el máximo absoluto en el intervalo $[-1, 2]$.

En cuanto a los puntos de inflexión, puesto que $f''(x) = \dfrac{2}{3x^{4/3}}$, es evidente que la segunda derivada no se anula en ningún punto, por lo que no tenemos candidatos para puntos de inflexión. Si estudiáramos la concavidad/convexidad comprobaríamos que la función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, y como no hay ningún punto en el que la función pase de cóncava a convexa o al contrario, es natural que no tenga puntos de inflexión.



PROBLEMA 19

Dada la función $f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$, determina sus extremos absolutos y sus puntos de inflexión en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución:

Estudio de la continuidad:

La función $f(x)$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}$, puesto que se trata del producto y composición de funciones continuas en toda la recta real.

Por otra parte, la función $f(x)$ es claramente derivable en todo punto de $\mathbb{R}$, puesto que se trata del producto y composición de funciones derivables en toda la recta real. Eso significa que todos los puntos críticos serán puntos en los que se anule la primera derivada.

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} \implies f'(x) = (2x+2)e^{-x} - e^{-x}\left(x^2 + 2x + 1\right) = e^{-x}\left(-x^2 + 1\right) \implies$$
$$\implies f''(x) = -e^{-x}\left(-x^2 + 1\right) + e^{-x}(-2x) = e^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)$$

$$f'(x) = 0 \implies e^{-x}\left(-x^2 + 1\right) = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$\boxed{x = 1}$

Como $f'(1) = 0$ y $f''(1) = -\dfrac{2}{e} < 0$, el punto $x = 1$ es un máximo local de la función.

$\boxed{x = -1}$

Como $f'(-1) = 0$ y $f''(1) = 2e > 0$, el punto $x = 1$ es un mínimo local de la función.

Comprobamos a continuación el valor de las imágenes en los extremos del intervalo:

$$f(-2) = e^2 \qquad f(-1) = 0$$

Comparando los cuatro candidatos, podemos determinar que el mínimo absoluto en $[-2, 2]$ es $x = -1$, mientras que el máximo absoluto en $[-2, 2]$ es $x = -2$.

En cuanto a los puntos de inflexión, vamos a comprobar que efectivamente tiene uno en el intervalo $[-2, 2]$.

$$f''(x) = 0 \implies e^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right) = 0 \implies \left(x^2 - 2x - 1\right) = 0 \implies \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \notin [-2, 2] \\ x = 1 - \sqrt{2} \in [-2, 2] \end{cases}$$

Se puede comprobar que $f'''(1 - \sqrt{2}) = -2\sqrt{(2)}e^{\sqrt{2}-1} \neq 0$, luego $x = 1 - \sqrt{2}$ es un punto de inflexión perteneciente al intervalo $[-2, 2]$.

PROBLEMA 20

Calcula las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de la función $f(x) = x^{|x|/x} + \dfrac{1}{x}$. Representa gráficamente la función, estudiando para ello las características de crecimiento/decrecimiento y concavidad/convexidad de la función, así como sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Solución:

Antes de analizar la función, es necesario conocer su expresión tras eliminar el valor absoluto. Para ello utilizaremos la siguiente relación:

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Al sustituir el valor absoluto en la función original, se obtiene la expresión equivalente sin el valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x} & \text{si } x < 0 \\[2ex] x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función $f(x)$ no está definida en $x = 0$, por lo que en ese punto no tiene sentido preguntarse si es continua o derivable.

La función es claramente derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, puesto que se trata de la suma, diferencia, cociente y potencia de funciones derivables en los intervalos de trabajo, donde los denominadores no se anulan en ningún punto de dichos intervalos.

Calculamos las dos primeras derivadas de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2} = -2x^{-2} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - x^{-2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^3} = 4x^{-3} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{2}{x^3} = 2x^{-3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Máximos y mínimos

Calculamos los puntos que anulan la primera derivada:

$\boxed{(-\infty, 0)}$

$$f'(x) = 0 \implies -\frac{2}{x^2} = 0 \implies \nexists x \in (-\infty, 0) \ \text{ tal que } \ f'(x) = 0$$

$\boxed{(0, \infty)}$

$$f'(x) = 0 \implies \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies \begin{cases} x = -1 \notin (0, \infty) \\ x = 1 \in (0, \infty) \end{cases}$$

Como $f'(1) = 0$ y $f''(1) = 2 > 0$, el punto $x = 1$ es un mínimo local de la función.

Crecimiento/decrecimiento

Vamos a estudiar el crecimiento/decrecimiento de la función utilizando como puntos frontera $x = 0$ (donde no está definida la función) y $x = 1$ (donde se anula la primera derivada).

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$-2x^{-2}$	-	$\times$	$\times$
$1 - x^{-2}$	$\times$	-	+

A la vista de la tabla podemos afirmar que la función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$, mientras que es creciente en $(1, +\infty)$.

Concavidad/convexidad

En cuanto a la segunda derivada, podemos comprobar que no hay ningún punto que anule dicha derivada, por lo que en el estudio de la concavidad/convexidad el único punto frontera es $x = 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$4x^{-3}$	-	$\times$
$2x^{-3}$	$\times$	+

Con los resultados de la tabla podemos afirmar que la función $f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

Puntos de inflexión

Como la función no tiene valores que anulen la segunda derivada, podemos concluir que no tiene puntos de inflexión.

Asíntotas

1) Estudiamos primero la posible existencia de asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en el semiplano izquierdo, $y = 0$.

2) Estudiamos a continuación la posible existencia de asíntotas verticales, y de la inspección de la expresión de la función queda claro que la única opción es $x = 0$. Aunque ese punto no pertenece al dominio de la función, podría representar una recta vertical a la que tendiera la gráfica de la función por la izquierda o la derecha de dicho punto.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Luego claramente $x = 0$ es una asíntota vertical de la función.

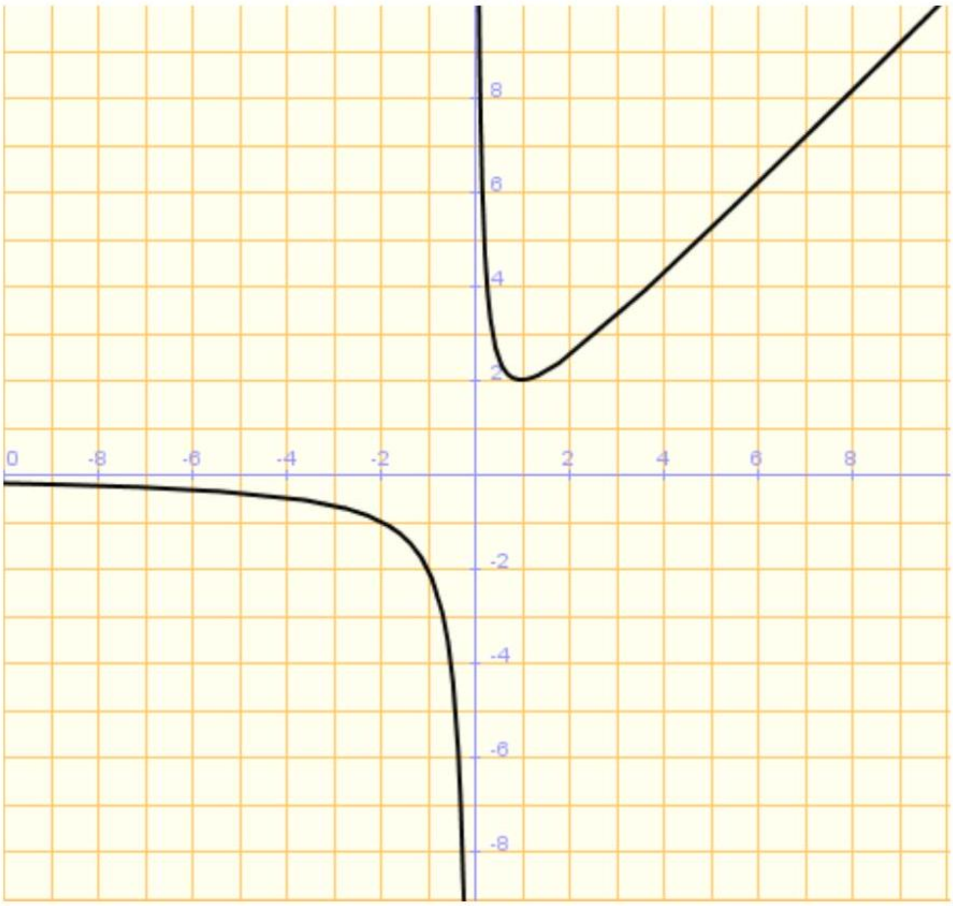
Nota: En cuanto uno de los anteriores límites hubiera producido como resultado $+\infty$ o $-\infty$, ya podríamos afirmar que existe una asíntota vertical en el punto de cálculo del límite.

3) Estudiamos por último la posible existencia de asíntotas oblicuas. Como en el semiplano izquierdo tenemos una asíntota horizontal, solo tiene sentido estudiar la presencia de asíntotas oblicuas en el semiplano derecho.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1=m$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0=b$$

Luego en el semiplano derecho (cuando $x\to+\infty$) la función $f(x)$ tiene como asíntota oblicua la recta $y=x$.



PROBLEMA 21

Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right|$ en toda la recta real y dibuja su gráfica.

Solución:

Antes de analizar la función, es necesario conocer su expresión tras eliminar el valor absoluto. Para ello utilizaremos la siguiente relación:

$$|g(x)| = \begin{cases} +g(x) & \text{si } g(x) \geqslant 0 \\ -g(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$

La función $f(x)$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$f(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right| = x\left|\frac{x+1}{x}\right|$$

Por lo tanto, para eliminar el valor absoluto hay que evaluar la expresión $\left|\frac{x+1}{x}\right|$ y determinar cuándo el cociente $\frac{x+1}{x}$ es positivo y cuándo es negativo. Para ello utilizamos la siguiente tabla, en la que los intervalos se han construido a partir de las raíces de los polinomios del numerador y denominador:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
$x+1$	-	+	+
x	-	-	+
$\frac{x+1}{x}$	+	-	+

En función de los resultados de la tabla se obtiene la siguiente expresión:

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty) \\ -\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & \text{si } x \in (-1,0) \end{cases}$$

Al sustituir el valor absoluto en la función original, se obtiene la expresión equivalente sin el valor absoluto:

$$f(x) = x\left|\frac{x+1}{x}\right| = \begin{cases} x\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = (x+1) & \text{si } x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty) \\ -x\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = -(x+1) & \text{si } x \in (-1,0) \end{cases}$$

En $x=-1$, la función $f(x)$ en su expresión original claramente se anula, por lo que a las condiciones anteriores se puede añadir que $f(-1)=0$. Respecto de $f(0)$ no podemos afirmar nada, ya que en ese punto tenemos un cociente $0/0$.

Estudio de la continuidad:

Procedemos a estudiar la continuidad:

- Para todo $x \in (-\infty, -1)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica.
- Para todo $x \in (-1, 0)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica.
- Para todo $x \in (0, \infty)$, la función $f(x)$ es continua por tratarse de una función polinómica.
- Estudiamos la continuidad en $x = -1$:
  1) $f(-1) = 0$
  2) Calculamos los límites laterales:

     $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = 0$

     $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} -(x+1) = 0$

     Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$
  3) $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$

     En conclusión, $f(x)$ es continua en $x = -1$.
- Estudiamos la continuidad en $x = 0$:
  1) La función no está definida en $x = 0$. Solo por este motivo ya podríamos afirmar que $f(x)$ es discontinua en este punto. En cualquier caso, vamos a continuar el estudio por si pudiéramos definir $f(0)$ de forma que la función fuera continua en $x = 0$.
  2) Calculamos los límites laterales:

     $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -(x+1) = -1$

     $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1$

     Como los límites laterales no coinciden, aunque fijáramos un valor para $f(0)$ la función $f(x)$ no sería continua en $x = 0$.

El resultado del estudio de continuidad indica que la función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, mientras que es discontinua en $x = 0$.

Estudio de la derivabilidad:

- Para todo $x \in (-\infty, -1)$, la función $f(x)$ es derivable por tratarse de una función polinómica, y su derivada es $f'(x) = 1$.
- Para todo $x \in (-1, 0)$, la función $f(x)$ es derivable por tratarse de una función polinómica, y su derivada es $f'(x) = -1$.
- Para todo $x \in (0, +\infty)$, la función $f(x)$ es derivable por tratarse de una función polinómica, y su derivada es $f'(x) = 1$.
- En $x = 0$ la función no puede ser derivable ya que no es continua.

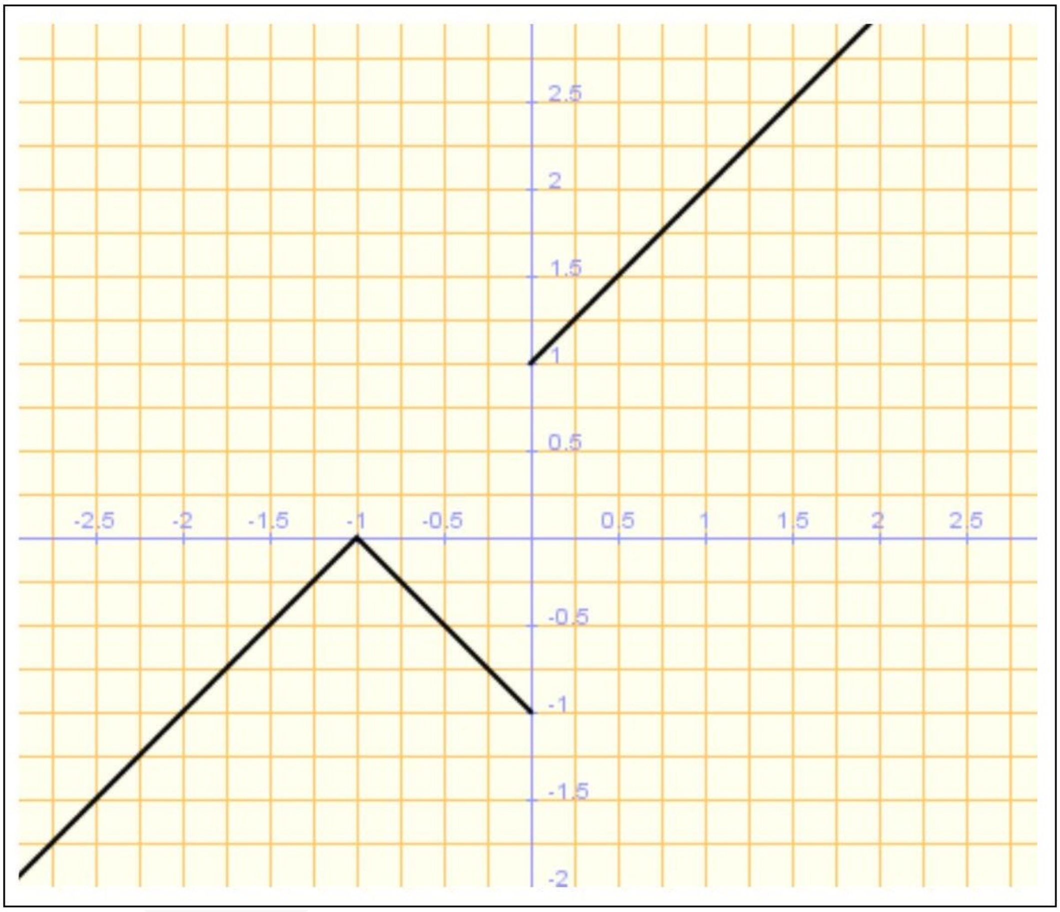
- Estudiamos la derivabilidad de la función en $x = -1$ mediante su definición:

$$f'_{+}(-1) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{-((-1+h)+1) - (0)}{h} = -1$$
$$f'_{-}(-1) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{((-1+h)+1) - (0)}{h} = 1$$

  Como los límites laterales no coinciden, se puede afirmar que la función $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

El resultado del estudio de derivabilidad indica que la función $f(x)$ es derivable en el conjunto de puntos $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, y no es derivable en $x = 0$ ni en $x = -1$.

Por último, la gráfica de la función es:



PROBLEMA 22

Halla las constantes a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifique las siguientes condiciones:

a) La función tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 3$.

b) $f(0) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}\right)$

Solución:

Calculamos las primeras derivadas de la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Longrightarrow f''(x) = 6x + 2a \Longrightarrow f'''(x) = 6$$

Si la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$ entonces, por las derivadas obtenidas, debe cumplirse que $f'(x = 1) = 0$ y $f''(x = 1) < 0$.

Si la función $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 3$ entonces, por las derivadas obtenidas, debe cumplirse que $f'(x = 3) = 0$ y $f''(x = 3) > 0$.

Buscamos ahora determinar $c = f(0)$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}) = \{\infty(\infty-\infty)\} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\left((\cancel{x}+3) - (\cancel{x}-3)\right)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3})} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3})} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}}} = 3
\end{aligned}$$

Desarrollamos las distintas ecuaciones:

$$\begin{aligned}
f'(1) &= 3 + 2a + b = 0 \implies 2a + b = -3 \\
f''(1) &= 6 + 2a < 0 \implies a < -3 \\
f'(3) &= 27 + 6a + b = 0 \implies 6a + b = -27 \\
f''(3) &= 18 + 2a > 0 \implies a > -9
\end{aligned}$$

De la primera y tercera ecuación obtenemos que $a = -6$ y $b = 9$, lo que concuerda con los otros datos obtenidos. Así pues, la función resultante es:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

PROBLEMA 23

Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie posible. ¿Qué longitud deben tener los postes y el largero?

Solución:

Supongamos que la portería tiene forma de un rectángulo con dos postes verticales en los extremos y un larguero horizontal en la parte superior, siendo la longitud de cada poste x y la del larguero y. Puesto que la longitud de la barra de hierro debe es 10 metros, tenemos una primera ecuación.

$$2x + y = 10$$

Dado lo que queremos es maximizar el área de la portería, necesitamos expresar dicho área en función de las variables que hemos definido.

$$\text{Área} = x\,y$$

Como en esta asignatura solo trabajamos con funciones de una variable, vamos a utilizar los datos que hemos obtenido hasta ahora para generar una versión de la función del área que solo contenga una variable, en este caso x:

$$\text{Área} = x\,y = x(10 - 2x)$$

Calculamos la derivada de esta función:

$$A(x) = 10x - 2x^2 \implies A'(x) = 10 - 4x$$

Vamos a analizar ahora cuándo esta variable alcanza su máximo.

$$A'(x) = 0 \implies 10 - 4x = 0 \implies x = \frac{5}{2} \implies y = 10 - 2\frac{5}{2} = 5$$

Como $A''(x) = -4 < 0$ para todo valor $x \in \mathbb{R}$, claramente $x = \dfrac{5}{2}$ es un máximo.

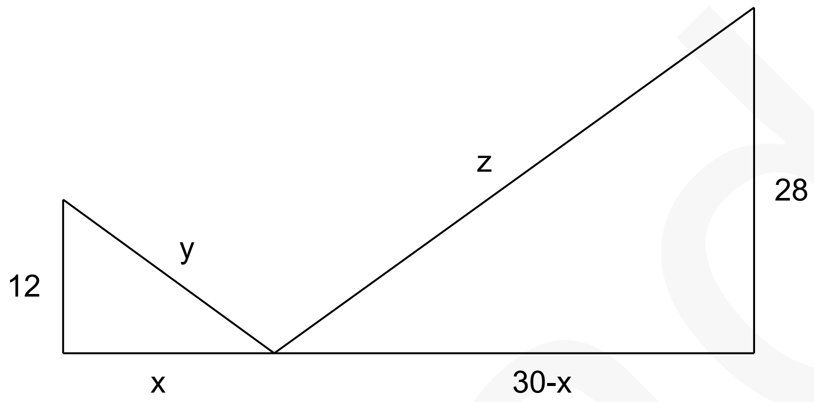
Por lo tanto, con los datos del problema el área máxima, que será 12.5 m^2, se conseguirá con postes de 2.5 metros y un larguero de 5 metros.

PROBLEMA 24

Dos postes, uno de 12 metros de altura y el otro de 28 metros están situados a 30 metros de distancia. Si de la parte más alta de cada poste parte un cable y ambos se unen en el mismo punto del suelo entre los postes, ¿dónde deben unirse los cables para que se use la menor longitud de cable?

Solución:

Consideremos el siguiente esquema:



La longitud que queremos minimizar es $L = y + z$, por lo que vamos a expresar esos valores como las hipotenusas de los dos triángulos.

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{(12)^2 + x^2} = \sqrt{144 + x^2} \\ z = \sqrt{(28)^2 + (30-x)^2} = \sqrt{1684 - 60x + x^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow L(x) = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$$

Calculamos la derivada de la función $L(x)$:

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{144 + x^2}} + \frac{-30 + x}{\sqrt{1684 - 60x + x^2}} = \frac{x\sqrt{1684 - 60x + x^2} + (x-30)\sqrt{144 + x^2}}{\sqrt{144 + x^2}\sqrt{1684 - 60x + x^2}}$$

Vamos a buscar los puntos que anulan dicha derivada:

$$L'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x\sqrt{1684 - 60x + x^2} + (x-30)\sqrt{144 + x^2}}{\sqrt{144 + x^2}\sqrt{1684 - 60x + x^2}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x\sqrt{1684 - 60x + x^2} + (x-30)\sqrt{144 + x^2} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x\sqrt{1684 - 60x + x^2} = (30 - x)\sqrt{144 + x^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2(1684 - 60x + x^2) = (900 - 60x + x^2)(144 + x^2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 640x^2 + 8640x - 129600 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -45/2 \end{cases}$$

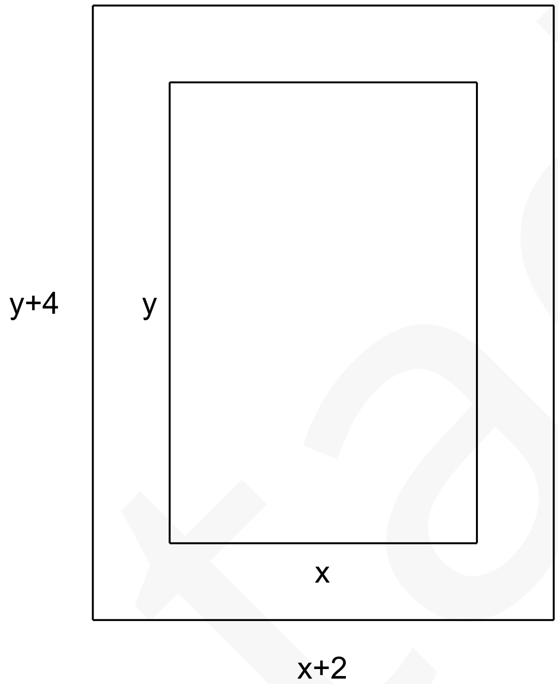
La única solución válida por ser positiva es $x = 9$, con lo que la longitud del cable es $L(9) = \sqrt{225} + \sqrt{1225} = 15 + 35 = 50$ metros.

PROBLEMA 25

Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno, y los laterales 1 cm cada uno. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Solución:

Consideremos el siguiente esquema:



Sabemos que $xy = 18$, y que el área de la hoja completa es Área $= (y+4)(x+2)$. Vamos a utilizar la relación $xy = 18$ para obtener una función con una sola variable sobre la que poder derivar.

$$A(x) = \left(\frac{18}{x} + 4\right)(x+2) = \frac{4x^2 + 26x + 36}{x} \implies A'(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2}$$

Comprobamos qué valores anulan la derivada:

$$A'(x) = 0 \implies \frac{4x^2 - 36}{x^2} = 0 \implies 4x^2 - 36 \implies \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

La única opción válida (por ser positiva) es $x = 3$, con lo que $y = 6$. Como $f''(x) = \dfrac{72}{x^3}$, es evidente que $f''(3) > 0$, con lo que $x = 3$ es un mínimo de la función.

En resumen, la hoja debe tener 10 cm de alto y 5 de ancho, con lo que el área total de la hoja completa es 50 cm^2.

PROBLEMA 26

Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Calcula las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

Solución:

Si x es el radio de la circunferencia que sirve de base e y es la altura del barril, podemos expresar el volumen como $V = \pi x^2 y$, por lo que con el dato del enunciado podemos establecer la relación $\pi x^2 y = 160$.

En cuanto al área de la chapa, que es la función a minimizar, sabemos que será $A = 2\pi x^2 + 2\pi x y$. Vamos a expresar el área como una función de una sola variable.

$$A = 2\pi x^2 + 2\pi x y \implies A(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{160}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{320}{x} \implies A'(x) = 4\pi x - \frac{320}{x^2}$$

Vamos a obtener los candidatos a mínimos:

$$A'(x) = 0 \implies 4\pi x - \frac{320}{x^2} = 0 \implies \pi x = \frac{80}{x^2} \implies x^3 = \frac{80}{\pi} \implies x = \sqrt[3]{\frac{80}{\pi}} \approx 2.94$$

Puesto que $A''(x) = \dfrac{4\pi x^3 + 640}{x^3}$, es evidente que $A''\left(\sqrt[3]{\dfrac{80}{\pi}}\right) > 0$, por lo que el candidato es un mínimo relativo.

A partir del valor de x podemos obtener $y = \dfrac{160}{\pi(80/\pi)^{2/3}} = 4\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}} \approx 5.88$.

En resumen, el bidón tendrá una altura de aproximadamente 5.88 dm y una base circular de radio aproximadamente 2.94 dm.

PROBLEMA 27

Utiliza el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $2x^5 + x + 5 = 0$ no puede tener más de una solución real.

Solución:

Al ser $f(x)$ una función polinómica de grado impar con coeficientes reales, sabemos que el número de soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$ solo puede ser 1, 3 o 5.

Supongamos ahora que la ecuación dada tuviera dos soluciones $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que $a < b$. Consideremos ahora la función $f(x) = 2x^5 + x + 5$ definida en el intervalo $[a, b]$. Por ser $x = a$ y $x = b$ dos soluciones tendría que ocurrir que $f(a) = f(b) = 0$ y como $f(x)$ es una función polinómica que claramente cumple las otras condiciones del teorema de Rolle, entonces debe existir al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Es decir, debe existir al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $10c^4 + 1 = 0$.

Sin embargo, es evidente que dicho valor no puede existir, dado que $10c^4 + 1 > 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Por ello, es imposible que la función tenga dos valores $a, b \in \mathbb{R}$ que sean solución de la ecuación, y la única opción válida es que la ecuación solo tenga una solución real.

PROBLEMA 28

Demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + \alpha = 0$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo $(0, 1)$.

Solución:

Al ser $f(x)$ una función polinómica de grado impar con coeficientes reales, sabemos que el número de soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$ solo puede ser 1 o 3.

Supongamos ahora que la ecuación dada tuviera dos soluciones distintas en el intervalo $(0, 1)$, $x = a$ y $x = b$, de forma que $0 < a < b < 1$ y $f(a) = f(b) = 0$. Como $f(x)$ es una función polinómica que claramente cumple las otras condiciones del teorema de Rolle, entonces debe existir al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Es decir, debe existir al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $3c^2 - 3 = 0$.

Sin embargo, las soluciones de la ecuación $3c^2 - 3 = 0$ son $c = -1$ y $c = 1$, lo que contradice el dato de partida $0 < a < c < b < 1$. Por ello, podemos concluir que es imposible que la función tenga dos valores $a, b \in \mathbb{R}$ que sean solución de la ecuación en el intervalo $(0, 1)$.

PROBLEMA 29

Sin calcular la derivada de la función $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, determina cuántas raíces tiene $f'(x)$ e indica en qué intervalos están.

Solución:

El teorema de Rolle afirma que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b) donde además se cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Por otra parte, podemos observar que $f(x)$ es una función polinómica, y por ello es continua y derivable en toda la recta real. Dado que la función $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, su derivada será un polinomio de tercer grado.

Dada la expresión de la función $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, es inmediato comprobar que $f(1) = f(2) = f(4) = f(4) = 0$. Puesto que se verifican las condiciones del teorema de Rolle para $f(x)$ en los intervalos $[1,2]$, $[2,3]$ y $[3,4]$, como consecuencia existen tres valores $c_1 \in (1,2)$, $c_2 \in (2,3)$ y $c_3 \in (3,4)$ tales que $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Es decir, $f'(x)$ tiene al menos tres raíces reales y dado que es polinomio de tercer grado, entonces tiene exactamente tres raíces y están localizadas en los intervalos mencionados.

PROBLEMA 30

Utiliza el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad $|\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x)| \leqslant |y-x|$.

Solución:

El teorema del valor medio afirma que, si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Vamos a aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo cerrado $[x,y]$, dado que dicha función es claramente continua y derivable en toda la recta real.

$$f'(c) = \frac{\operatorname{sen}(y)-\operatorname{sen}(x)}{y-x} \implies \cos(c) = \frac{\operatorname{sen}(y)-\operatorname{sen}(x)}{y-x}$$

Puesto que $|\cos(c)| \leqslant 1$ para cualquier valor $c \in \mathbb{R}$, podemos escribir lo siguiente:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(y)-\operatorname{sen}(x)}{y-x}\right| = |\cos(c)| \leqslant 1 \implies \left|\frac{\operatorname{sen}(y)-\operatorname{sen}(x)}{y-x}\right| \leqslant 1 \implies$$

$$\implies |\operatorname{sen}(y)-\operatorname{sen}(x)| \leqslant |y-x|$$