Determinantes

Tema 3

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Tema 3. Determinantes

Determinantes. Propiedades

❑Permutación

Una permutación σ de un conjunto S={1,2,....n} es una aplicación biyectiva de S en S tal que la imagen de cada elemento i es σ(i)

$$\sigma \text{ (S)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

El número de permutaciones que se pueden hacer con n elementos es n!

❑Determinante de una matriz

Es una aplicación $\det(\mathrm{A}) = |\mathrm{A}|$: $M_{nxn} \longrightarrow \mathrm{R}$

$$\mathrm{A} \longrightarrow \det(\mathrm{A}) = |\mathrm{A}| = \sum signo\ \sigma.\ a_{1\sigma(1)}.\ a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

que asigna a la matriz un escalar que se obtiene al sumar n! sumandos de la forma siguiente:

1) Cada sumando es el producto de n factores
2) Cada factor es un elemento perteneciente a una fila i y a la columna $\sigma(i)$
3) *Cada sumando tiene signo + 0 – según que la permutación sea par o impar*

Determinantes. Propiedades

Determinantes de orden 2

Si A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $|A|= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}a_{12}$

Determinantes de orden 3 (Regla de Sarrus)

Si A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $|A|= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}a_{32}\, a_{13} + a_{12}a_{23}\, a_{31}$

$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}a_{21}\, a_{33} - a_{32}a_{23}\, a_{11}$

Determinantes. Propiedades

❑Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz triangular *es el producto de los elementos de la* diagonal principal

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 \ \vdots & \ddots & a_{2n} \ \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = a_{11}.\, a_{22}.\, a_{33} \ldots\, a_{nn}$$

- El determinante de una matriz *diagonal es el producto de los elementos de la* diagonal principal

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ 0 \ \vdots & \ddots & 0 \ \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = a_{11}.\, a_{22}.\, a_{33} \ldots\, a_{nn}$$

- El determinante de la matriz unidad I_n vale 1

Determinantes. Propiedades

- El determinante de una matriz siempre coincide con el determinante de la matriz traspuesta $|\boldsymbol{A}^{t}| = |\boldsymbol{A}|$
- El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes $|\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
- Si en un determinante se intercambian dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo
- Si un determinante tiene una fila (o columna) completa de "0" entonces $|A|=0$
- Si en un determinante una fila (o columna) es combinación lineal de las filas (columnas) restantes, entonces $|A|=0$
- Si en un determinante multiplicamos todos los elementos de una fila (o columna) por un número k, el determinante queda multiplicado por k $|kA| = k|A|$
- Si a una fila (o columna) de una matriz A se suma una combinación lineal de filas de A, el determinante de A no varía
- Si una matriz cuadrada es regular (admite inversa), entonces $|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{A}|}$

Menor complementario. Adjunto de un elemento. Matriz inversa

Dado el determinante |A| asociado a la matriz A=(a_{ij}) *cuadrada nxn*

- **Menor complementario del elemento a_{ij}: Δ_{ij}**

es el determinante de orden n-1 que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j del determinante |A|

- **Adjunto del elemento a_{ij}: A_{ij}**

es el menor complementario con signo $A_{ij} = (-1)^{i+j} . \Delta_{ij}$

❖ **Ejemplo 1**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Menor complementario. Adjunto de un elemento. Matriz inversa

Cálculo de determinantes (de orden mayor que 3)

Desarrollo de un determinante por una fila (o una columna)

- El determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por sus correspondientes adjuntos
- $|A| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} \vdots & \ddots & a_{2n} \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = a_{i1} . A_{i1} + a_{i2} . A_{i2} + \cdots . a_{in} . A_{in}$

✓ Idea: Elegir una fila o columna que tenga el mayor número posible de "ceros".

Ejemplo 5

- $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$ ***Resolver desarrollando una fila o columna***

Menor complementario. Adjunto de un elemento. Matriz inversa

❑ Método de Chio (Elemento pivote)

- Se elige un elemento en una fila o columna (elemento pivote) y se hacen ceros (a través de operaciones elementales) en el resto de los elementos de dicha fila (o columna)
- A continuación, se desarrolla el determinante a través de los elementos de esa fila o columna

✓ **Si se consigue una matriz triangular, el determinante es simplemente el producto de los elementos diagonales**

❑ Teorema

- El rango de una matriz es el orden del mayor determinante no nulo que se puede formar a partir de las filas y columnas de dicha matriz
- Por tanto, rang A completo $\longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Menor complementario. Adjunto de un elemento. Matriz inversa

❑ Cálculo de la matriz inversa (a partir de determinantes)

- Dada una matriz A cuadrada de orden n con $|\mathrm{A}| \neq 0,$ *podemos calcular la matriz* inversa como $$A^{-1} = \frac{(AdjA)^t}{|A|}$$ donde

AdjA es la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento de la matriz inicial por su adjunto

❖ **Ejemplo 7**

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ Calcular la matriz inversa utilizando determinantes