TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMP. / FÍSICA	FECHA	29/06/2023
CURSO	1º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 1

Determina el dominio y el rango/imagen de la función $f(x) = \sqrt{|x+5| - |x-7|}$. Por último, represéntala gráficamente de forma aproximada.

Solución:

$$|x+5| = \begin{cases} (x+5) & x+5 \geqslant 0 \equiv x \geqslant -5 \\ -(x+5) & x+5 < 0 \equiv x < -5 \end{cases}$$

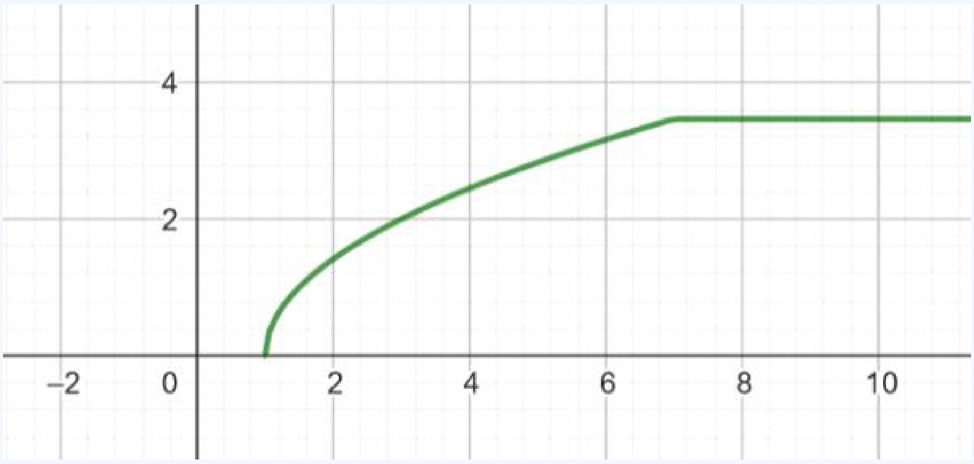
$$|x-7| = \begin{cases} (x-7) & x-7 \geqslant 0 \equiv x \geqslant 7 \\ -(x-7) & x-7 < 0 \equiv x < 7 \end{cases}$$

$$|x+5| - |x-7| = \begin{cases} -\cancel{x} - 5 + \cancel{x} - 7 = -12 & x < -5 \\ x + 5 + x - 7 = 2x - 2 & -5 \leqslant x < 7 \\ \cancel{x} + 5 - \cancel{x} + 7 = 12 & x \geqslant 7 \end{cases}$$

Puesto que $\sqrt{-12} \notin \mathbb{R}$, $f(x)$ no está definida en $(-\infty, -5)$. De forma similar, como $2x - 2 < 0$ en $[-5, 1)$, $f(x)$ no está definida en ese intervalo. Por ello, la expresión final de la función es la siguiente:

$$f(x) = \sqrt{|x+5| - |x-7|} = \begin{cases} \sqrt{2x-2} & 1 \leqslant x < 7 \\ \sqrt{12} & x \geqslant 7 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = [1, \infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = [0, \sqrt{12}]}$$



TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMP. / FÍSICA	FECHA	29/06/2023
CURSO	1º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 2

Calcula el límite $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\pi x+\sqrt{\pi x}}-\sqrt{\pi x}\right)$.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\pi x+\sqrt{\pi x}}-\sqrt{\pi x}\right)=\{\infty-\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\pi x+\sqrt{\pi x}}-\sqrt{\pi x}\right)\left(\sqrt{\pi x+\sqrt{\pi x}}+\sqrt{\pi x}\right)}{\left(\sqrt{\pi x+\sqrt{\pi x}}+\sqrt{\pi x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\pi x+\sqrt{\pi x}}\right)^2-\left(\sqrt{\pi x}\right)^2}{\left(\sqrt{\pi x+\sqrt{\pi x}}+\sqrt{\pi x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{\pi x}+\sqrt{\pi x}-\cancel{\pi x}}{\left(\sqrt{\pi x+\sqrt{\pi x}}+\sqrt{\pi x}\right)}=$$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{\pi x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{\pi x+\sqrt{\pi x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{\pi x}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{\pi\cancel{x}}{\cancel{x}}}}{\sqrt{\frac{\pi\cancel{x}}{\cancel{x}}+\sqrt{\frac{\pi\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}}+\sqrt{\frac{\pi\cancel{x}}{\cancel{x}}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi+0}+\sqrt{\pi}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMP. / FÍSICA	FECHA	29/06/2023
CURSO	1º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 3

Utilizando el polinomio de Taylor y el resto de Lagrange adecuados, calcula el valor aproximado de $\sqrt{10}$ con un error menor de 10^{-3} empleando para ello la función $f(x) = \sqrt{x+9}$.

Solución:

Utilizaremos $f(x) = \sqrt{x+9}$ y $c = 0$ en el cálculo del polinomio de Taylor.

$$f(x) = \sqrt{x+9} = (x+9)^{1/2} \longrightarrow f(0) = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+9)^{-1/2} \longrightarrow f'(0) = \frac{1}{6}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+9)^{-3/2} \longrightarrow f''(0) = -\frac{1}{108}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(x+9)^{-5/2} \longrightarrow f'''(0) = \frac{1}{648}$$

Probamos con $P_1(x)$ y su resto de Lagrange, teniendo en cuenta que el punto donde calcularemos la aproximación es $x = 1$:

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 3 + \frac{1}{6}x$$

$$\text{Error } = |R(x)| = \left|\frac{f''(z)x^2}{2!}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{4}(z+9)^{-3/2}\ x^2}{2}\right| = \frac{x^2}{8\sqrt{(z+9)^3}} \overset{x=1}{=} \frac{1}{8\sqrt{(z+9)^3}} \overset{z\in(0,1)}{\leqslant} \frac{1}{216} \simeq$$

$$\simeq 4.62 \cdot 10^{-3} > 10^{-3} \implies \text{No nos sirve}$$

Probamos con $P_2(x)$ y su resto de Lagrange:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} = 3 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{216}x^2$$

$$\text{Error } = |R(x)| = \left|\frac{f'''(z)x^3}{3!}\right| = \left|\frac{\frac{3}{8}(z+9)^{-5/2}\ x^3}{6}\right| = \frac{x^3}{16\sqrt{(z+9)^5}} \overset{x=1}{=} \frac{1}{16\sqrt{(z+9)^5}} \overset{z\in(0,1)}{\leqslant} \frac{1}{3888} \simeq$$

$$\simeq 2.57 \cdot 10^{-4} < 10^{-3} \implies \text{Sí nos sirve}$$

Luego $\sqrt{10} = \sqrt{1+9} = f(1) \approx P_2(1) = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} \approx 3.162$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMP. / FÍSICA	FECHA	29/06/2023
CURSO	1º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 4

Calcula la integral indefinida $\int \frac{x^3-15x^2-21x-41}{x^4+x^3-x^2+5x-30}dx$.

Solución:

$$\int \frac{x^3-15x^2-21x-41}{x^4+x^3-x^2+5x-30}dx = \int \frac{x^3-15x^2-21x-41}{(x-2)(x+3)\left(x^2+5\right)}dx = \int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+5}\right)dx$$

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+5} = \frac{A(x+3)\left(x^2+5\right)+B(x-2)\left(x^2+5\right)+(Cx+D)(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)\left(x^2+5\right)} =$$

$$\frac{A\left(x^3+3x^2+5x+15\right)+B\left(x^3-2x^2+5x-10\right)+C\left(x^3+x^2-6x\right)+D\left(x^2+x-6\right)}{(x-2)(x+3)\left(x^2+5\right)} =$$

$$\frac{(A+B+C)x^3+(3A-2B+C+D)x^2+(5A+5B-6C+D)x+(15A-10B-6D)}{(x-2)(x+3)\left(x^2+5\right)}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} A & + & B & + & C & & & = & 1 \\ 3A & - & 2B & + & C & + & D & = & -15 \\ 5A & + & 5B & - & 6C & + & D & = & -21 \\ 15A & - & 10B & & & - & 6D & = & -41 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} A & = & -3 \\ B & = & 2 \\ C & = & 2 \\ D & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+5}\right)dx = \int\left(\frac{-3}{x-2}+\frac{2}{x+3}+\frac{2x-4}{x^2+5}\right)dx =$$

$$= -3\int\frac{1}{x-2}dx + 2\int\frac{1}{x+3}dx + \int\frac{2x}{x^2+5}dx - 4\int\frac{1}{x^2+5}dx =$$

$$= -3\mathrm{Ln}|x-2| + 2\mathrm{Ln}|x+3| + \mathrm{Ln}\left|x^2+5\right| - \frac{4\sqrt{5}}{5}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}dx =$$

$$= \mathrm{Ln}\left|\frac{\left(x^2+5\right)(x+3)^2}{(x-2)^3}\right| - \frac{4\sqrt{5}}{5}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMP. / FÍSICA	**FECHA**	29/06/2023
CURSO	1º	**HORA**	11:00
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 5

Halla el área del recinto limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y sus tangentes en los puntos de intersección de la parábola con el eje X.

Solución:

Calculamos primero los puntos de intersección de la parábola con el eje X:

$$y = 0 \implies 4x - x^2 = 0 \implies x(4-x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

A continuación determinamos las tangentes en esos puntos:

$$f(x) = 4x - x^2 \longrightarrow f'(x) = 4 - 2x$$

$\boxed{x = 0}$ $\quad f'(0) = 4$

Tangente: $y - f(0) = f'(0)(x-0) \implies y = 4x$

$\boxed{x = 4}$ $\quad f'(4) = -4$

Tangente: $y - f(4) = f'(4)(x-4) \implies y = -4x + 16$

$$\text{Área} = \int_0^2 \big(\cancel{4x} - (\cancel{4x} - x^2)\big)\,dx + \int_2^4 \big(-4x + 16 - (4x - x^2)\big)\,dx =$$

$$= \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 \big(x^2 - 8x + 16\big)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right]_2^4 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\ u^2$$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMP. / FÍSICA	FECHA	29/06/2023
CURSO	1º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 6

Estudia la convergencia (en el caso de series de términos positivos) y la convergencia absoluta y condicional (en el caso de series alternadas) de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2}{5^n-2^n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$.

Solución:

a) $a_n = \dfrac{3^n+2}{5^n-2^n} \implies a_1 = \dfrac{5}{3}, a_2 = \dfrac{11}{21}, a_3 = \dfrac{29}{117} \cdots$

Claramente es una serie de términos positivos. Utilizaremos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1}+2}{5^{n+1}-2^{n+1}}}{\dfrac{3^n+2}{5^n-2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3^n 3+2)(5^n-2^n)}{(5^n 5-2^n 2)(3^n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n 3+2}{3^n+2}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5^n-2^n}{5^n 5-2^n 2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{3^n}{3^n}3+\dfrac{2}{3^n}}{\dfrac{3^n}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{5^n}{5^n}-\dfrac{2^n}{5^n}}{\dfrac{5^n}{5^n}5-\dfrac{2^n}{5^n}\cdot 2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+\dfrac{2}{3^n}}{1+\dfrac{2}{3^n}}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{5-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \cdot 2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} < 1 \implies \text{La serie es convergente.}$$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n^3+1} \implies a_1 = -\dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{4}{9}, a_3 = -\dfrac{9}{28} \cdots$

Se trata de una serie alternada, por lo que utilizaremos el criteno de Leibniz:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(-1)^n n^2}{n^3}}{\dfrac{n^3}{n^3}+\dfrac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)} = 0$

2) $\displaystyle |a_n| - |a_{n-1}| = \left|\frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}\right| - \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2}{(n+1)^3+1}\right| = \frac{n^2}{n^3+1} - \frac{n^2+2n+1}{n^3+3n^2+3n+2} =$

$$= \frac{\cancel{n^5} + 3n^4 + 3n^3 + 2n^2 - \cancel{n^5} - 2n^4 - n^3 - n^2 - 2n - 1}{(n^3+1)(n^3+3n^2+3n+2)} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 - 2n - 1}{(n^3+1)(n^3+3n^2+3n+2)} > 0$$

puesto que $n^4 + 2n^2 + n^2 - 2n - 1 > 0 \quad \forall n \geqslant 1$ y el denominador es positivo.

Como $|a_n| - |a_{n+1}| > 0 \quad \forall n \geqslant 1$, los términos son decrecientes en valor absoluto.

Dado que se cumplen las dos condiciones del teorema de Leibniz, podemos afirmar que esta serie alternada es convergente.

En cuanto a la convergencia absoluta/condicional, vamos a estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$. Esta serie es divergente, se puede comprobar utilizando el criterio de comparación con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ o, de forma equivalente, el criterio del producto con $\alpha = 1$.

Puesto que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente pero $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente, podemos afirmar que la serie es **condicionalmente convergente**.