Cálculo

Tema 8

Sucesiones de números reales

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2023-2024

Versión: 1.2

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

Índice

1 Definiciones

1.1 Conceptos básicos

Una **sucesión** de números reales es una lista infinita de números en un determinado orden, siendo la forma habitual de representar la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ o simplemente $\{a_n\}$, donde al elemento a_n se le denomina **término general** de la sucesión. Desde un punto de vista más formal, una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Se llama rango de la sucesión al conjunto con todos los valores de la sucesión, es decir, al conjunto $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo 1

La sucesión $\{a_n\}$ donde $a_n = \dfrac{1}{n}$ está formada por los números 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, etc.

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es **convergente** hacia el valor $L \in \mathbb{R}$ (o que $\{a_n\}$ converge al valor L) si para todo $\epsilon > 0$ existe un número $N_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ϵ) tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo $n > N_0$, por lo que fuera del intervalo $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ hay como mucho N_0 términos de la sucesión. El límite, en caso de existir, es único, y se representará indistintamente como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \longrightarrow L$$

Ejemplo 2

La sucesión constante $\{a_n\}$ donde $a_n = 5$ es convergente a 5, mientras que la sucesión $\{b_n\}$ tal que $b_n = \dfrac{1}{n}$ converge a 0.

Una sucesión $\{a_n\}$ es **divergente** si no converge a ningún límite finito. Las sucesiones divergentes pueden tener un límite infinito, como es el caso de la sucesión dada por $a_n = n$, o ser oscilantes, como ocurre con la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$.

En el caso de las sucesiones divergentes que tienden a infinito, se puede decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un número $N_0 \in \mathbb{N}$ (que depende del valor M) tal que $a_n > M$ para todo $n > N_0$. De forma similar, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un número $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < M$ para todo $n > N_0$.

Si existen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple lo siguiente:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
- $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ si $b \neq 0$.
- $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = a^b$ si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
- $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}(a_n) = \mathrm{Ln}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)$ si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Los límites de funciones y los límites de sucesiones están intimamente relacionados, por lo que para calcular algunos límites de sucesiones se pueden utilizar las técnicas que vimos en el Tema 2.

1.2 Subsucesiones

Denominaremos **subsucesión** a una lista infinita de números extraídos de otra sucesión, en el mismo orden en que estaban en la sucesión original (por ejemplo, tomando uno de cada dos valores, uno de cada tres valores, etc.). Si una sucesión está acotada, todas sus subsucesiones también están acotadas. Además, si una sucesión a_n tiene límite L, entonces todas sus subsucesiones convergen al mismo valor. Debido a ello, una forma práctica de determinar que una sucesión no es convergente consiste en identificar dos o más subsucesiones con distintos límites.

> **Ejemplo 3**
>
> La sucesión $\{a_n\} = \{1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots\}$ no es convergente, ya que tiene dos subsucesiones que tienden a los valores 1 y 2.

1.3 Progresiones aritméticas y geométricas

Algunas sucesiones especiales reciben el nombre de **progresiones**. Hay dos tipos de progresiones, las aritméticas y las geométricas. Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que el término general es de la forma $a_n = b + c \cdot n$, siendo b y c constantes, y denominándose al valor c *razón* o *diferencia* de la progresión. En cambio, una **progresión geométrica** es una sucesión en la que el término general tiene la forma $a_n = c \cdot r^n$ para ciertos valores c y r fijos, recibiendo r el nombre de **razón** de la progresión.

Las progresiones aritméticas tienen sus términos equidistantes, por lo que $a_n = a_{n-1} + c$. En cambio, en las progresiones geométricas pueden darse varios casos: si $|r| > 1$, los términos de la sucesión son cada vez más grandes en valor absoluto, por lo que la sucesión es divergente; por el contrario, si $|r| < 1$, los términos de la sucesión son cada vez más pequeños y la sucesión converge al valor 0). Si $|r| = 1$, puede ocurrir que $r = 1$, con lo que se trataría de una sucesión constante, o que $r = -1$, por lo que tendríamos una sucesión oscilante.

1.4 Sucesiones regulares o de Cauchy

Una sucesión a_n es **regular** o **de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe un número $N_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ϵ), tal que para todo par de números naturales $p, q > N_0$ se verifica que $|a_p - a_q| < \epsilon$.

Toda sucesión de números reales convergente es una sucesión regular o de Cauchy, y a su vez toda sucesión regular o de Cauchy de números reales es convergente. En la práctica, este teorema se utiliza para demostrar a su vez otros teoremas sobre series numéricas. La ventaja que tiene comprobar la condición de Cauchy sobre la definición de límite es que no es necesario conocer de antemano el valor del límite para demostrar que una sucesión es convergente.

1.5 Sucesiones acotadas

Una sucesión a_n está **acotada superiormente** si existe un valor $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De forma similar, una sucesión a_n está **acotada inferiormente** si existe un valor $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice que una sucesión está **acotada** si lo está tanto inferior como superiormente o, expresado de otra forma, si si existe un valor $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo número $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4

La sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_n = \dfrac{1}{n}$ está acotada inferiormente, puesto que cualquier valor menor o igual que 0 es una cota inferior.

Es importante tener en cuenta que, mientras que toda sucesión convergente está acotada, el recíproco no es cierto, como lo demuestra la sucesión $a_n = (-1)^n$.

El teorema Bolzano-Weierstrass indica que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente, mientras que toda sucesión no acotada tiene una subsucesión que tiende a ∞ o $-\infty$.

1.6 Sucesiones monótonas

Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona creciente** (lo que es equivalente a decir que la sucesión es no decreciente) si $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$, lo que generalmente se expresa como $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Si la secuencia es $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$, entonces se dice que la sucesión es **monótona estrictamente creciente**.

De manera equivalente, una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona decreciente** (es decir, la sucesión es no creciente) si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$, expresándose este hecho como $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si la secuencia es $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$, entonces se dice que la sucesión es **monótona estrictamente decreciente**.

Un importante resultado que se suele utilizar para demostrar si una sucesión es convergente o divergente es el siguiente: toda sucesión monótona (ya sea creciente o decreciente) y acotada es convergente, mientras que toda sucesión monótona y no acotada es divergente.

Ejemplo 5

La sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_n = \dfrac{1}{n}$ es monótona decreciente y está acotada inferiormente, por lo que es convergente.

1.7 Sucesiones equivalentes

Dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se dice que son equivalentes, lo que se denota como $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, si el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. En ese caso, para una sucesión $\{c_n\}$ cualquiera se obtienen los siguientes resultados si los límites mencionados existen:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = \lim_{n\to\infty} (b_n \cdot c_n) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n}$$

1.8 Sucesiones recurrentes

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está expresada de forma recurrente si en la expresión del término general a_n aparecen algunos de los términos anteriores a_{n-1}, a_{n-2}, etc. Para determinar que una sucesión definida de esa forma es convergente se puede probar que está acotada y es monótona.

Ejemplo 6

La relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + 3$ define una sucesión creciente.

2 Criterio de Stolz

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, supongamos que se cumple una de las dos condiciones siguientes:

- $\{b_n\}$ es monótona estrictamente creciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.
- $\{b_n\}$ es monótona con $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Entonces si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$, ocurre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$.

De este teorema se deducen los siguientes corolarios de utilidad práctica:

1) Si $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = L$.

2) Si $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

3 Otros criterios prácticos

La **regla del sandwich** indica que, si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ tienden al mismo valor L cuando $n \to \infty$ y $\{b_n\}$ es otra sucesión tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{b_n\}$ también converge a L.

Por otra parte, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Por último, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ y existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1)b_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1)b_n}$$

4 Problemas

1) Demuestra, aplicando la definición de límite de una sucesión, que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

2) Demuestra, aplicando la definición de límite de una sucesión, que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 4n + 2}{2n^2 - n + 1} = \dfrac{3}{2}$.

3) Demuestra, aplicando la definición de límite de una sucesión, que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 5}{n + 2} = \infty$.

4) Estudia la convergencia de la sucesión cuyo término general es $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}$.

5) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 7}{5^n - 4}$.

6) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

7) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1}\right)$.

8) De las sucesiones cuyos términos generales se incluyen a continuación, ¿cuáles son acotadas? ¿Cuáles son monótonas? ¿Cuáles son convergentes?

a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

b) $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

c) $c_n = \dfrac{n}{n+2}$.

d) $d_n = \dfrac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$.

9) Demuestra que la sucesión representada por la relación de recurrencia $a_n = \sqrt{3a_{n-1}}$ es convergente y calcula su límite.

10) Determina el carácter de la sucesión $\{a_n\}$ dada por

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)+(-1)^n\left(1-\frac{3}{n}\right).$$

11) Determina si la sucesión cuyo término general es $a_n = 1+\dfrac{1}{2}++\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ es de Cauchy. ¿Es convergente dicha sucesión?

12) Encuentra ejemplos donde la suma de dos sucesiones oscilantes sea convergente, divergente con límite infinito u oscilante.

13) Demuestra que las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

son convergentes y convergen al mismo límite.

14) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$.

15) Dada la sucesión de términal general a_n de la que se sabe que $a_n = 5a_{n-1}+3$ con $a_1 = 2$, calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{5^n}$.

16) Demuestra la divergencia de la sucesión cuyo término general se muestra a continuación calculando el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

$$a_n = \frac{\left(1+\sqrt{1}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\cdots\left(1+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n!}}$$

17) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

18) Calcula el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

19) Calcula el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 2^1+2^2 2^2+3^2 2^3+\cdots+n^2 2^n}{2^n n^2}$.

20) Calcula el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{7}+\cdots+\sqrt[3n]{5n-3}}{7n+2}$.

21) Calcula el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4}\left((1+2n)^3+(2+2n)^3+\cdots+(n+2n)^3\right)$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- *Problemas de Cálculo Infinitesimal*. E. Tébar Flores. Ed. Tébar.
- *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*. A. García et al. Ed. CLAGSA
- *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. D. Pestana et al. Ed. Ariel.