Juan Felipe Rodríguez Córdoba

Actividad opcional II

1a) ¿Existen puntos de inflexión $x=c$ tales que $f'(c)=0$?

Sí, la función $f(x)=x^3$ es un ejemplo con punto de inflexión en $x=0$

$f'(x)=3x^2 \to f'(0)=0 \quad f''(x)=6x \to f''(0)=0 \quad f'''(x)=6 \to f'''(0)=6\neq 0$

1b) ¿Existen puntos de inflexión $x=c$ tales que $f'(c)=k$, donde $k\in\mathbb{R}-\{0\}$?

Sí, la función $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ es un ejemplo con punto de inflexión en $x=0$

$f'(x)=\cos(x) \to f'(0)=1 \to f'(0)=k \quad f''(x)=-\operatorname{sen}(x) \to f''(0)=0 \quad f'''(x)=-\cos(x) \to f'''(0)=-1\neq 0$

2a) $h(x)=f(x)+g(x) \to h'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Utilizando la fórmula del cociente incremental $h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h} \to$

$\to h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \to h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$\to \boxed{h'(x)=f'(x)+g'(x)}$

2b) $h(x)=f(x)\cdot g(x) \to h'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$

Utilizando la definición de logaritmo $\ln \cancel{h(x)}\ \ln[f(x)\cdot g(x)]=\ln(f(x))+\ln(g(x))$

$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)} \to h'(x)=h(x)\left[\frac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{f(x)\cdot g(x)}\right]=\boxed{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$

2c) $h(x)=\frac{1}{g(x)} \to h'(x)=-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$

Primero demostramos que $y=f(g(x)) \to y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Luego demostramos que $f(x)=\frac{1}{x} \to f'(x)=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-x-h}{x^2+hx}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x^2+hx)}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x^2+hx}=$

$=-\frac{1}{x^2}$

Uniendo ambas demostraciones tenemos que $h(x)=\frac{1}{g(x)} \to h'(x)=-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$

2d) $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Utilizando la definición de logaritmo $\ln h(x)=\ln\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\ln(f(x))-\ln(g(x))$

$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)} \rightarrow h'(x)=h(x)\left[\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{f(x)\cdot g(x)}\right] \rightarrow$

$\rightarrow h'(x)=\frac{\cancel{f(x)}}{g(x)}\left[\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\cancel{f(x)}\cdot g(x)}\right] \rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

3 ¿Existe alguna función que tenga una asíntota horizontal en un semiplano y una asíntota oblicua en el otro semiplano? (función con solo una expresión)

Sí, $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ es un ejemplo de ello

Asíntota horizontal:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x-1}=0$ Semiplano derecho $y=0$ $\left\{\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-1}=\infty\right.$ No hay en el semiplano izquierdo

Asíntota oblicua: No existe en el semiplano derecho ya que hay horizontal

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{e^x-1}}{x}=-1=m \qquad n=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-1}-(-x)=0$

Semiplano izquierdo $y=-x$