Tema 5

# Modelos Probabilísticos Discretos

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. Variables aleatorias (discretas).
2. Función de cuantía/masa y función de distribución.
3. Media y varianza poblacional.
4. Modelos unidimensionales discretos:
   - Distribución binomial
   - Distribución de Poisson
   - Distribución geométrica
   - Distribución binomial negativa
   - Distribución hipergeométrica
5. Variables aleatorias bidimensionales (discretas).
6. Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).
7. Covarianza poblacional y correlación (discretas).
8. Variables aleatorias marginales (discretas).
9. Variables aleatorias condicionadas (discretas).

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. **Variables aleatorias (discretas).**
2. Función de cuantía/masa y función de distribución.
3. Media y varianza poblacional.
4. Modelos unidimensionales discretos:
   - Distribución binomial
   - Distribución de Poisson
   - Distribución geométrica
   - Distribución binomial negativa
   - Distribución hipergeométrica
5. Variables aleatorias bidimensionales (discretas).
6. Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).
7. Covarianza poblacional y correlación (discretas).
8. Variables aleatorias marginales (discretas).
9. Variables aleatorias condicionadas (discretas).

# Variables aleatorias

**Variable aleatoria**: Es una función que asocia a cada suceso del espacio muestral un número real (una medición)

$$\begin{aligned} X:\ \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

$X$ = "distancia en km de casa al trabajo"
$Y$ = "número de personas que viajan en el mismo vehículo"
$Z$ = "número de personas que se quedan a comer en el trabajo"

- **Variable aleatoria Discreta:** variable aleatoria que toma un conjunto finito o infinito numerable de valores ("contablemente" infinito)

- **Variable aleatoria Continua:** puede tomar todos los valores de un intervalo, todos los valores de la recta real o todos los números de una unión disjunta de intervalos,

# Variables aleatorias

## ¿Cómo clasificarías…

- $X$ = “ nº total de cajeros atendidos en un supermercado “
- $Y$ = “ nº de baterías examinadas hasta que sale la primera defectuosa “
- $Z$ = “ altura sobre el nivel del mar de una serie de ciudades “
- $T$ = “ nivel de glucosa de un grupo de personas “
- $H$ = “ nº de personas que dan + en un test de hiperglucemia “
- $K$ = “ Variable que mide si a una persona que llama le atiende un operador o le dejan en espera “
- $M$ = “ demanda semanal de combustible sin plomo en una estación de servicio “
- $N$ = “ nº tazas de café servidas en un día en un bar “
- $C$ = “ cantidad (en kg) de café consumida en un día en un bar “

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. Variables aleatorias (discretas).
2. **Función de cuantía/masa y función de distribución.**
3. Media y varianza poblacional.
4. Modelos unidimensionales discretos:
   - Distribución binomial
   - Distribución de Poisson
   - Distribución geométrica
   - Distribución binomial negativa
   - Distribución hipergeométrica
5. Variables aleatorias bidimensionales (discretas).
6. Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).
7. Covarianza poblacional y correlación (discretas).
8. Variables aleatorias marginales (discretas).
9. Variables aleatorias condicionadas (discretas).

# Función de masa

**Función de masa o cuantía (probabilidad)**: Es la función que asigna a cada valor discreto de la variable su correspondiente probabilidad.

Se representa mediante la tabla:

| $X$ | $\mathrm{p}(X = x_i)$ |
|---|---|
| $x_1$ | $\mathrm{p}(X = x_1)$ |
| $x_2$ | $\mathrm{p}(X = x_2)$ |
| $\dots$ | $\dots$ |
| $x_n$ | $\mathrm{p}(X = x_n)$ |

donde $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ son todos los valores discretos que puede tomar la variable aleatoria $X$

Nota,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}(X = x_i) = 1}$$

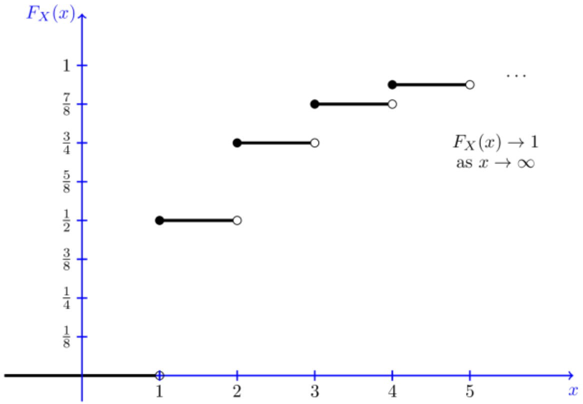
# Función de distribución

**Función de distribución (acumulativa)**: Es la función que mide la probabilidad acumulada en cada punto:

$$F(x) = \mathrm{p}(X \leq x) = \sum_{y \leq x} \mathrm{p}(y)$$

Propiedades:

1) $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$
2) $F$ es monótona no decreciente.
3) $F$ es continua por la derecha.



## Ejemplo 1

Una tienda vende unidades de memoria flash, con 1, 2,4, 8 ó 16 GB de memoria. La variable X mide la cantidad de memoria en un disco comprado

| x | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0,05 | 0,1 | 0,35 | 0,4 | 0,1 |

a) Obtener y representar la Función de distribución de X
b) Calcular la probabilidad de que un disco tenga menos de 4 GB
c) Probabilidad de que un disco tenga al menos 4 GB
d) Probabilidad de que tenga más de 4 GB
e) Porcentaje de discos que tienen entre 5 y 12 GB ¿y entre 5 y 7 GB?

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. Variables aleatorias (discretas).
2. Función de cuantía/masa y función de distribución.
3. **Media y varianza poblacional.**
4. Modelos unidimensionales discretos:
   - Distribución binomial
   - Distribución de Poisson
   - Distribución geométrica
   - Distribución binomial negativa
   - Distribución hipergeométrica
5. Variables aleatorias bidimensionales (discretas).
6. Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).
7. Covarianza poblacional y correlación (discretas).
8. Variables aleatorias marginales (discretas).
9. Variables aleatorias condicionadas (discretas).

U-tad
CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Esperanza matemática

**Esperanza matemática, Valor esperado o Media poblacional ($\boldsymbol{E[X] = \mu}$)**: Es el número que formaliza el valor medio de un fenómeno aleatorio:

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathrm{p}(x_i)$$

- El planteamiento es probabilístico, no estadístico. Sin embargo, el parecido con la fórmula de media muestral es muy evidente, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{n_i}{n}$

**Propiedades:**

- El valor esperado de una variable aleatoria $Y = aX + b$ es

$$E[Y] = E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$$

# Varianza poblacional

**Varianza poblacional ($\boldsymbol{Var[X]=\sigma^2}$):** Es el número que formaliza la variabilidad de un fenómeno aleatorio:

$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot \mathrm{p}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \cdot \mathrm{p}(x_i) - \mu^2$$

- La **desviación típica poblacional**, es la raíz cuadrada positiva de la varianza: $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$.

**Propiedades:**

- La varianza de una variable aleatoria $Y = aX + b$ es

$$Var[Y] = Var[aX+b] = a^2 \cdot Var[X] \Longrightarrow \sigma_y = |a| \cdot \sigma_x$$

## Ejemplo 2

En un taller de servicio especializado en afinaciones se sabe que el 45% de las afinaciones se realizan a vehículos de 4 cilindros, el 40% en vehículos de 6 cilindros y sólo un 15% en vehículos de 8 cilindros.

a) Obtener la función de cuantía y la función de distribución de la variable "número de cilindros de los vehículos que se afinan en el taller".
b) Calcular e interpretar la esperanza matemática y la varianza de dicha variable

Si tras la afinación se producen averías en un 7% de los vehículos de 4 cilindros, en un 4% de los de seis cilindros y en sólo un 2% de los de 8 cilindros, y un vehículo recién afinado tiene avería,

a) ¿cuál es la probabilidad de que dicho vehículo tenga 8 cilindros?

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. Variables aleatorias (discretas).
2. Función de cuantía/masa y función de distribución.
3. Media y varianza poblacional.
4. **Modelos unidimensionales discretos:**
   - Distribución binomial
   - Distribución de Poisson
   - Distribución geométrica
   - Distribución binomial negativa
   - Distribución hipergeométrica
5. Variables aleatorias bidimensionales (discretas).
6. Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).
7. Covarianza poblacional y correlación (discretas).
8. Variables aleatorias marginales (discretas).
9. Variables aleatorias condicionadas (discretas).

U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Distribución de Bernouilli

Se considera un experimento aleatorio que admite solo dos resultados excluyentes: éxito ($A$) o fracaso ($A^c$), con sus correspondientes probabilidades, $P(A) = p$, $P(A^c) = 1 - p = q$.

La siguiente variable aleatoria asociada recibe el nombre de **distribución de Bernouilli**:

| $X$ | $p(X = x_i)$ |
|---|---|
| $0$ | $q$ |
| $1$ | $p$ |

$$p + q = 1$$

donde $X = \begin{cases} 1 & \text{si éxito}, A \\ 0 & \text{si fracaso}, A^c \end{cases}$ → $X$ solo depende de un parámetro → $\boldsymbol{X \sim Be(p)}$

Su media, varianza y desviación típicas son:

$$\mu = p \quad | \quad \sigma^2 = p \cdot q \quad | \quad \sigma = +\sqrt{p \cdot q}$$

# Distribución Binomial

Supongamos que se hacen $n$ experimentos de Bernoulli *sucesivos* e *independientes*.

Decimos que la variable aleatoria discreta $X$ sigue una distribución binomial cuando está definida de la siguiente forma:

$$X = \text{“}Número\ de\ éxitos\ en\ las\ n\ pruebas\ de\ Bernoulli\text{”}$$

La función de probabilidad queda definida como:

$$\boxed{p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

con $k \in \{0,1,2, \dots, n\}$.

Como $X$ depende de los parámetros $p$ y $n$ → $\boldsymbol{X \sim B(n, p)}$

Su media, varianza y desviación típicas son:

$$\mu = n \cdot p \quad | \quad \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \quad | \quad \sigma = +\sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

## Ejemplo 3

Se utiliza un número de teléfono particular para recibir tanto llamadas como faxes. Un 25% de las llamadas entrantes corresponden al fax.

Considerar un total de 40 llamadas entrantes.

a) Calcular la probabilidad de que como mucho 11 sean un fax
b) Probabilidad de que por lo menos 11 sean un fax
c) Probabilidad de que exactamente 11 correspondan al fax
d) Probabilidad de que más de 11 sean de fax
e) Calcular el nº esperado de llamadas telefónicas ordinarias
f) Dar una medida de la dispersión de la variable “llamadas de fax”
g) Si el nº de llamadas entrantes se incrementa en un 15% ¿cómo se verían modificadas?

# Distribución de Poisson

Una variable aleatoria que sigue una **distribución de Poisson** generalmente está modelando la ocurrencia de un número de eventos en un intervalo de tiempo.

nº visitas a un sitio web en una hora
nº mensajes correo enviados en una cuenta cada día
la llegada de personas a una fila de espera en 5 minutos

La función de probabilidad queda definida como:

$$\boxed{p(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

con $k \in \{0,1,2, \dots, n\}$.

La variable aleatoria solo depende del parámetro $\lambda$, $\boldsymbol{X \sim P(\lambda)}$, que representa la rapidez (tasa) con la que ocurre un proceso. Nota: $\lambda > 0$.

Su media, varianza y desviación típicas son:

$$\mu = \lambda \quad | \quad \sigma^2 = \lambda \quad | \quad \sigma = +\sqrt{\lambda}$$

U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Distribución de Poisson

**Distribución de Poisson como límite de una binomial**:

Sea una distribución $X \sim B(n, p)$ tal que:

- $n \to +\infty$ ($n$ grande)
- $p \to 0$ ($p$ pequeña)

Entonces, $n \cdot p$ tiende a un valor finito que podemos llamar $\lambda$ y realizar la siguiente aproximación de $B(n, p) \to P(\lambda)$:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

En otras palabras, la distribución de Poisson es una buena aproximación de la distribución Binomial cuando el número de experimentos de Bernoulli es suficientemente grande y la probabilidad de éxito es suficientemente pequeña.

En la práctica, aplicaremos este criterio cuando se cumple alguna de estas reglas empíricas:

- $n > 50$ y $np < 5$
- $n > 30$ y $p \leq 0,1$

## Ejemplo 4

En una editorial, sólo 5 de cada 1000 páginas de los libros editados contienen errores tipográficos y los errores son independientes de una página a otra.

a) Cuál es la probabilidad de que una novela de 400 páginas contenga una página con errores?
b) ¿y de que contenga alguna página con errores?
c) Y de que contenga como mucho 3?
d) ¿Cuántas páginas con errores cabe esperar en la novela?

# Distribución Geométrica

Una variable aleatoria $X$ se dice que se distribuye bajo una geométrica cuando se repite un experimento de Bernoulli hasta que se consigue un éxito. Por tanto,

$$X = \text{“}Número\ de\ fracasos\ hasta\ que\ se\ consigue\ un\ éxito\text{”}$$

La función de probabilidad queda definida como:

$$\boxed{p(X = k) = q^k\, p}$$

con $k \in \{0,1,2, \ldots\}$.

Como $X$ depende del parámetro $p$ → $\boldsymbol{X \sim G(p)}$

Su media, varianza y desviación típicas son:

$$\mu = q/p \quad | \quad \sigma^2 = q/p^2 \quad | \quad \sigma = +\sqrt{q}/p$$

# Distribución Binomial Negativa

Una variable aleatoria $X$ se dice que se distribuye bajo una binomial negativa cuando se realiza un experimento de Bernoulli repetidas veces hasta que se consiguen $n$ éxitos. Por tanto,

$$X = \text{“}\textit{Número de fracasos hasta que se consiguen } n \textit{ éxitos}\text{”}$$

La función de probabilidad queda definida como:

$$\boxed{p(X = k) = \binom{n + k - 1}{k} p^n q^k}$$

con $k \in \{0,1,2,\dots\}$ y $n = \{1,2,\dots\}$.

Como $X$ depende de los parámetro $p$ y $n$ → $\boldsymbol{X \sim BN(n, p)}$

Su media, varianza y desviación típicas son:

$$\mu = nq/p \quad | \quad \sigma^2 = nq/p^2 \quad | \quad \sigma = +\sqrt{nq}/p$$

## Ejemplo 5

Una máquina dedicada a la fabricación de piezas de alta precisión, produce piezas de una en una de forma independiente. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es 0,15.

a) Calcular la probabilidad de que la primera pieza defectuosa en un día sea la número 40
b) Sabiendo que en la fabricación de cada pieza se tardan 20 segundos ¿cuál será el tiempo medio que hay que esperar hasta que se produzca la 1ª pieza defectuosa?

## Ejemplo 6

Un examen de estadística consta de 20 preguntas tipo test y se sabe de experiencias anteriores que la probabilidad que tiene un alumno de contestar bien cada pregunta es 0,7. Calcular:

a) La probabilidad de que la primera pregunta que responda bien sea la cuarta
b) Para aprobar el examen, es necesario responder bien a 10 preguntas. ¿cuál es la probabilidad de que apruebe al contestar la pregunta 12ª?

U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Distribución Hipergeométrica

Dado un experimento en el que tomamos una muestra sin reemplazamiento, de tamaño $n$, de una población de tamaño $N$, donde la población está dividida en dos subpoblaciones, de tamaños $N_1$ y $N_2$ ($N = N_1 + N_2$). Una variable aleatoria $X$ se dice que se distribuye bajo una hipergeométrica cuando,

$$X = \text{“}Número\ de\ elementos\ extraídos\ en\ la\ muestra\ de\ la\ primera\ población\text{”}$$

La función de probabilidad queda definida como:

$$\boxed{p(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

con $k \in \{0,1,2, \dots, N_1\}$ y $n = \{1,2, \dots, N\}$.

# Distribución Hipergeométrica

Como $X$ depende de los parámetro $N, n$, y $N_1 \rightarrow$ $\boldsymbol{X \sim H(N, N_1, n)}$

- Como observación, $N_2 = N - N_1$

Su media, varianza y desviación típicas son:

$$\mu = \frac{n \cdot N_1}{N} \quad | \quad \sigma^2 = \frac{n \cdot (N-n) \cdot N_1 \cdot N_2}{N^2 \cdot (N-1)} \quad | \quad \sigma = +\sqrt{\frac{n \cdot (N-n) \cdot N_1 \cdot N_2}{N^2 \cdot (N-1)}}$$

## Ejemplo 7

Entre los 60 aspirantes a unas plazas de técnicos superiores en la Administración del Estado, 40 son mujeres. Si seleccionamos una muestra aleatoria, sin reemplazamiento de 20 aspirantes, obtener la probabilidad de que la mitad sean mujeres.

U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. Variables aleatorias (discretas).
2. Función de cuantía/masa y función de distribución.
3. Media y varianza poblacional.
4. Modelos unidimensionales discretos:
   - Distribución binomial
   - Distribución de Poisson
   - Distribución geométrica
   - Distribución binomial negativa
   - Distribución hipergeométrica
5. **Variables aleatorias bidimensionales (discretas).**
6. Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).
7. Covarianza poblacional y correlación (discretas).
8. Variables aleatorias marginales (discretas).
9. Variables aleatorias condicionadas (discretas).

# Variables aleatorias bidimensionales

**Variable aleatoria bidimensional (*X, Y*)**: Se define como una función que asocia cada suceso a un valor real:

$$
\begin{aligned}
X, Y \colon \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 &\rightarrow \qquad\qquad \mathbb{R}^2 \\
\omega = (\omega_1, \omega_2) &\rightarrow (X(\omega_1), Y(\omega_2))
\end{aligned}
$$

- Una variable aleatoria bidimensional puede ser discreta, continua o ambas. Según sean las variables $X$ e $Y$.

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. Variables aleatorias (discretas).
2. Función de cuantía/masa y función de distribución.
3. Media y varianza poblacional.
4. Modelos unidimensionales discretos:
   - Distribución binomial
   - Distribución de Poisson
   - Distribución geométrica
   - Distribución binomial negativa
   - Distribución hipergeométrica
5. Variables aleatorias bidimensionales (discretas).
6. **Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).**
7. Covarianza poblacional y correlación (discretas).
8. Variables aleatorias marginales (discretas).
9. Variables aleatorias condicionadas (discretas).

# Variables aleatorias bidimensionales

**Función de distribución de una variable bidimensional:**

$$F(x,y) = p(X \leq x, Y \leq y)$$

Caso $X$ e $Y$ discretas,

$$F(x,y) = p(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p(X \leq x_i, Y \leq y_j)$$

**Propiedades:**

*1)* $F(+\infty, +\infty) = 1$

*2)* $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$

*3)* $F(x,y)$ es monótona no decreciente con respecto a cada variable.

*4)* $F(x,y)$ es continua por la derecha.

# Variables aleatorias bidimensionales

**Función de masa de una variable bidimensional (discreta):**

$$p(X = x, Y = y)$$

$$\sum_{x_i} \sum_{y_j} p(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. Variables aleatorias (discretas).
2. Función de cuantía/masa y función de distribución.
3. Media y varianza poblacional.
4. Modelos unidimensionales discretos:
   - Distribución binomial
   - Distribución de Poisson
   - Distribución geométrica
   - Distribución binomial negativa
   - Distribución hipergeométrica
5. Variables aleatorias bidimensionales (discretas).
6. Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).
7. **Covarianza poblacional y correlación (discretas).**
8. Variables aleatorias marginales (discretas).
9. Variables aleatorias condicionadas (discretas).

# Covarianza y correlación

**Covarianza poblacional:**

$$\sigma_{X,Y} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y) \cdot p(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot p(X = x_i, Y = y_j) - \mu_X \mu_Y$$

**Correlación:**

$$r = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. Variables aleatorias (discretas).
2. Función de cuantía/masa y función de distribución.
3. Media y varianza poblacional.
4. Modelos unidimensionales discretos:
   - Distribución binomial
   - Distribución de Poisson
   - Distribución geométrica
   - Distribución binomial negativa
   - Distribución hipergeométrica
5. Variables aleatorias bidimensionales (discretas).
6. Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).
7. Covarianza poblacional y correlación (discretas).
8. **Variables aleatorias marginales (discretas).**
9. Variables aleatorias condicionadas (discretas).

U-tad
CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Variables aleatorias marginales

Dada la distribución de probabilidad bidimensional

| $P(X, Y)$ | $y_1$ | $y_2$ | $\ldots$ | $y_l$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\ldots$ | $p_{1l}$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\ldots$ | $p_{2l}$ |
| ... | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $x_k$ | $p_{k,1}$ | $p_{k,2}$ | $\ldots$ | $p_{k,l}$ |

# Variables aleatorias marginales

Proyectamos sobre una variable la suma de las probabilidades de cada dimensión

| $x_i$ | $p_{x_i}$ |
|---|---|
| $x_1$ | $p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1l}$ |
| $x_2$ | $p_{21} + p_{22} + \cdots + p_{2l}$ |
| … | … |
| $x_k$ | $p_{k1} + p_{k2} + \cdots + p_{kl}$ |

$$p_1(X = x_i) = \sum_{y_j} p(X = x_i, Y = y_j)$$

$$p_2\left(Y = y_j\right) = \sum_{x_i} p(X = x_i, Y = y_j)$$

U-TAD CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Variables aleatorias marginales

Dada la función de distribución bidimensional

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p(X \leq x_i, Y \leq y_j)$$

Proyectamos sobre una variable

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = P(X \leq x, Y \leq +\infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j} p(X \leq x_i, Y \leq y_j)$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = P(X \leq +\infty, Y \leq y) = \sum_{x_i} \sum_{y_j \leq y} p(X \leq x_i, Y \leq y_j)$$

# Variables aleatorias marginales

**Se dice que dos variables aleatorias son independientes si:**

$$p(X = x, Y = y) = p_1(X = x) \cdot p_2(Y = y)$$

U-tad
CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Temario

**TEMA 5: Modelos probabilísticos discretos.**

1. Variables aleatorias (discretas).
2. Función de cuantía/masa y función de distribución.
3. Media y varianza poblacional.
4. Modelos unidimensionales discretos:
    - Distribución binomial
    - Distribución de Poisson
    - Distribución geométrica
    - Distribución binomial negativa
    - Distribución hipergeométrica
5. Variables aleatorias bidimensionales (discretas).
6. Función de cuantía/masa y función de distribución (v.a. bidimensionales).
7. Covarianza poblacional y correlación (discretas).
8. Variables aleatorias marginales (discretas).
9. **Variables aleatorias condicionadas (discretas).**

U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Variables aleatorias condicionadas

Dada la distribución de probabilidad:

| $P(X, Y)$ | $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_l$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\dots$ | $p_{1l}$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\dots$ | $p_{2l}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $x_k$ | $p_{k,1}$ | $p_{k,2}$ | $\dots$ | $p_{k,l}$ |

$(Y|X = x_2)$

$(X|Y = y_2)$

# Variables aleatorias condicionadas

**Distribuciones condicionadas:**

$$p(x_i|y_j) = p(X = x_i|Y = y_j) = \frac{p(X = x_i,\ Y = y_j)}{p_2(Y = y_j)}$$

$$p(y_j|x_i) = p(Y = y_j|X = x_i) = \frac{p(X = x_i,\ Y = y_j)}{p_1(X = x_i)}$$

Regla: “bidimensional / marginal”.

U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

## Ejemplo 8

Sea el experimento consistente en tomar dos bolas con reemplazamiento de una urna que contiene tres bolas blancas y dos rojas. Y en él, las siguientes variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 0 \; si \; la \; primera \; bola \; es \; blanca \\ 1 \; si \; la \; primera \; bola \; es \; roja \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0 \; si \; la \; segunda \; bola \; es \; blanca \\ 1 \; si \; la \; segunda \; bola \; es \; roja \end{cases}$$

Se pide:

a) Distribución de probabilidad de la variable $(X, Y)$.
b) Distribuciones marginales.
c) Función de distribución.
d) $P(-1 < X \leq 1, -0.5 < Y < 0.5)$.