Cálculo

Tema 3

Continuidad de funciones

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2023-2024

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Concepto de continuidad

1.1 Definición de continuidad

Sea $f(x)$ una función real de variable real definida en un intervalo abierto que contiene a x_0.

> Se dice que la función $f(x)$ es continua en $x = x_0$ cuando para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

De manera informal, una función real de variable real $f(x)$ es continua cuando no hay interrupción de la gráfica de $f(x)$ en ningún punto. Es decir, cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, de manera que la gráfica de $f(x)$ no presente saltos o huecos.

1.2 Continuidad en un punto

Se considera que una función $f(x)$ real de variable real es **continua** en $x = x_0$ cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $f(x_0)$ está definida
2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

En cuanto una de las anteriores condiciones no se cumple, se puede afirmar que la función $f(x)$ es **discontinua** en $x = x_0$.

Los conceptos de continuidad por la derecha y por la izquierda se definen de manera análoga haciendo uso de los respectivos límites laterales. Es decir:

> Una función es **continua por la derecha** si existen tanto $f(x_0)$ como $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, y ambos valores coinciden.

> Una función es **continua por la izquierda** si existen tanto $f(x_0)$ como $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, y ambos valores coinciden.

1.3 Continuidad en un intervalo abierto

Puesto que un intervalo abierto de la recta real se compone de multitud de puntos, una función $f(x)$ real de variable real es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto del intervalo.

Dado que en dichos intervalos el número de puntos es infinito, la demostración de la continuidad de una función en dichos intervalos se realizará empleando propiedades generales de las funciones junto con comprobaciones de la continuidad en puntos específicos en caso de ser necesario (por ejemplo, en los puntos frontera y en los que se intuya que no se cumple alguna de las condiciones de continuidad puntual).

1.4 Continuidad en un intervalo cerrado

Una función real de variable real $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ cuando se verifican las siguientes condiciones:

1) $f(x)$ es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b)
2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (es decir, $f(x)$ es continua por la derecha en $x = a$)
3) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ (es decir, $f(x)$ es continua por la izquierda en $x = b$)

Ejercicio 1

Estudia la continuidad de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Ejercicio 2

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

1.5 Continuidad de una función definida por tramos

Los conceptos de continuidad aplican igualmente en el caso de funciones definidas por tramos, como por ejemplo en la función mostrada en la Figura 1.

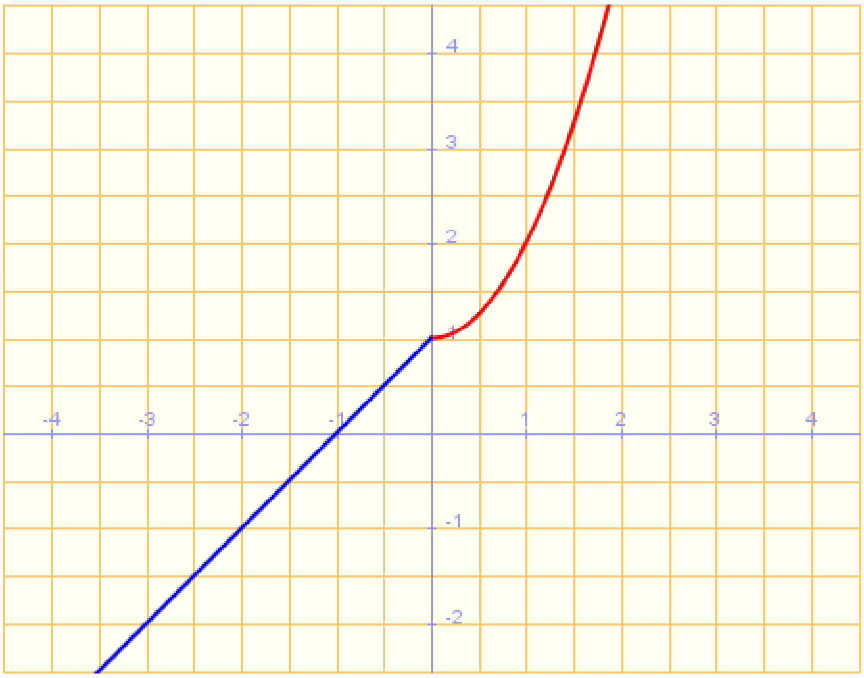

Figura 1: Ejemplo de función continua: $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$

2 Concepto de discontinuidad

2.1 Definición de discontinuidad

Dado un intervalo abierto (a, b) que contiene al punto x_0, si una función está definida en el intervalo (a, b) (excepto, quizás, en $x = x_0$) y no es continua en $x = x_0$, se dice que $f(x)$ presenta una **discontinuidad** en $x = x_0$.

Las circunstancias por las que una función no es continua en $x = x_0$ son las siguientes:

1) La función no está definida en el punto $x = x_0$
2) No existe el límite de $f(x)$ en el punto $x = x_0$
3) El límite de $f(x)$ en el punto $x = x_0$ existe, pero no es igual a $f(x_0)$

Las discontinuidades pueden clasificarse de la siguiente manera:

$$\text{Tipos de discontinuidad} \begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{Inevitable (o esencial)} \begin{cases} \text{De primera especie} \\ \text{De segunda especie} \end{cases} \end{cases}$$

2.2 Discontinuidad evitable

Se dice que una función tiene una discontinuidad **evitable** en el punto $x = x_0$ cuando existe el límite en ese punto pero no coincide con el valor de la función en el punto, o bien cuando la función no esté definida en dicho punto. En este caso, se podría conseguir que $f(x)$ fuera continua (re)definiendo apropiadamente el valor $f(x_0)$. La Figura 2 muestra en la siguiente página un ejemplo de discontinuidad evitable.

2.3 Discontinuidad inevitable

Se dice que una función tiene una discontinuidad **inevitable** en el punto $x = x_0$ cuando no existe el límite de la función en $x = x_0$.

La discontinuidad inevitable es de **primera especie** (o de salto finito) cuando los límites laterales existen y son finitos, pero no coinciden, mientras que la discontinuidad inevitable es de **segunda especie** (o de salto infinito) cuando al menos uno de los límites laterales no existe (la función tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando x tiende a x_0 por la derecha y/o por la izquierda, o bien no se puede determinar al menos uno de los límites laterales). Las Figuras 3 y 4 muestran en las siguientes páginas dos ejemplos de discontinuidades inevitables.

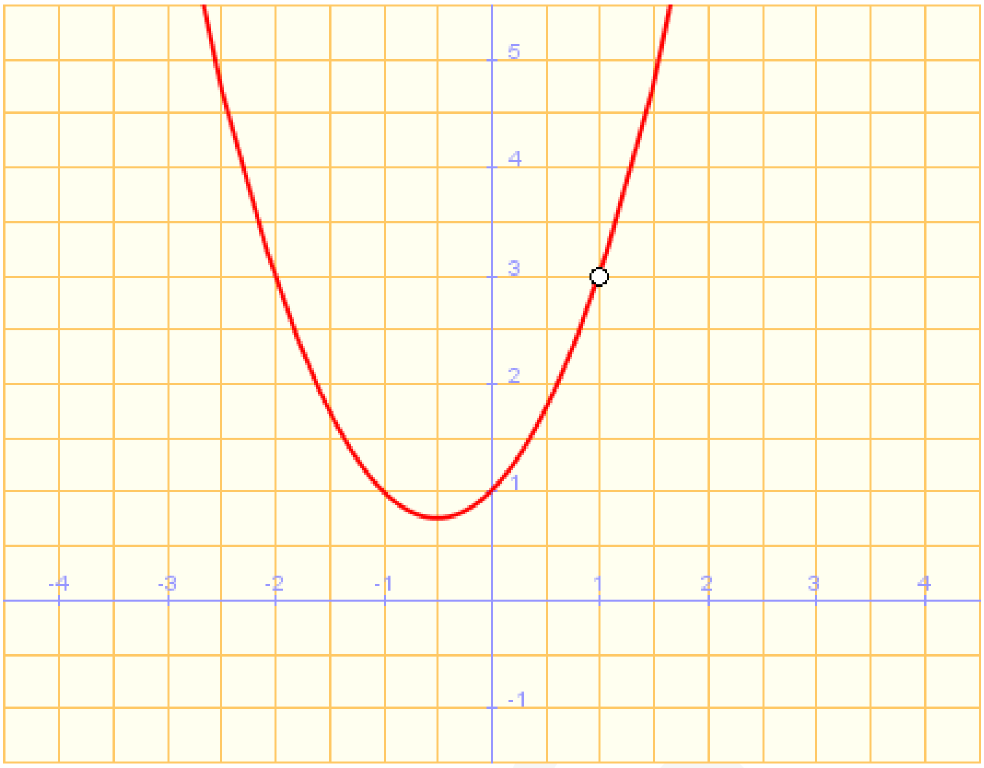

Figura 2: Ejemplo de discontinuidad evitable: $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

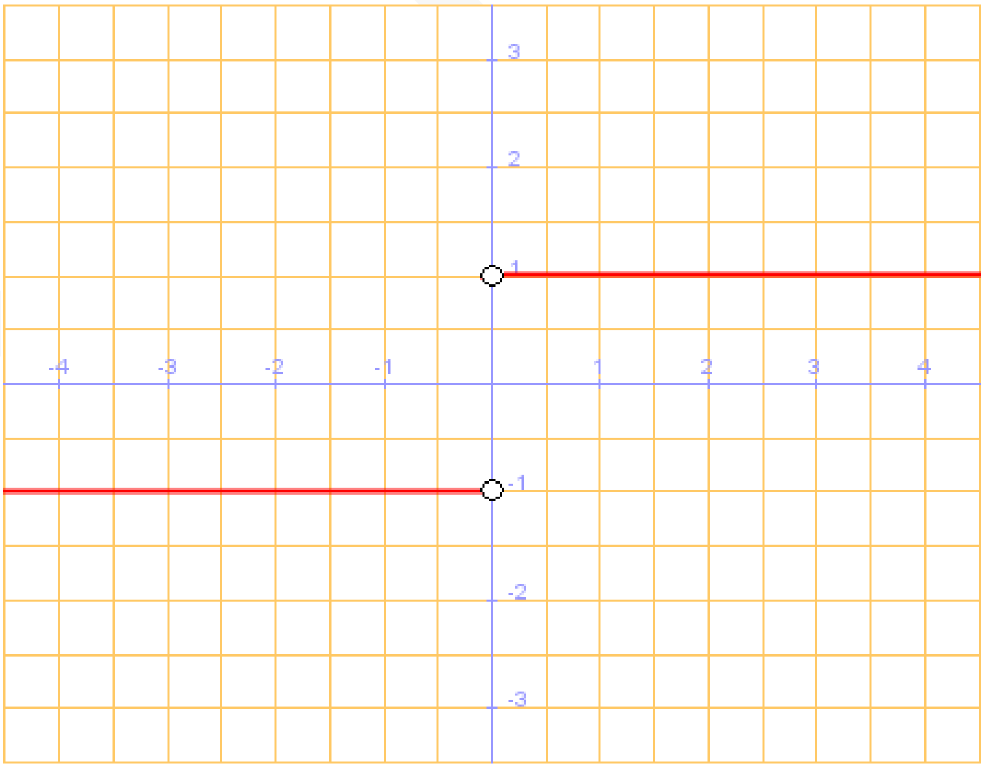

Figura 3: Ejemplo de discontinuidad inevitable de primera especie: $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

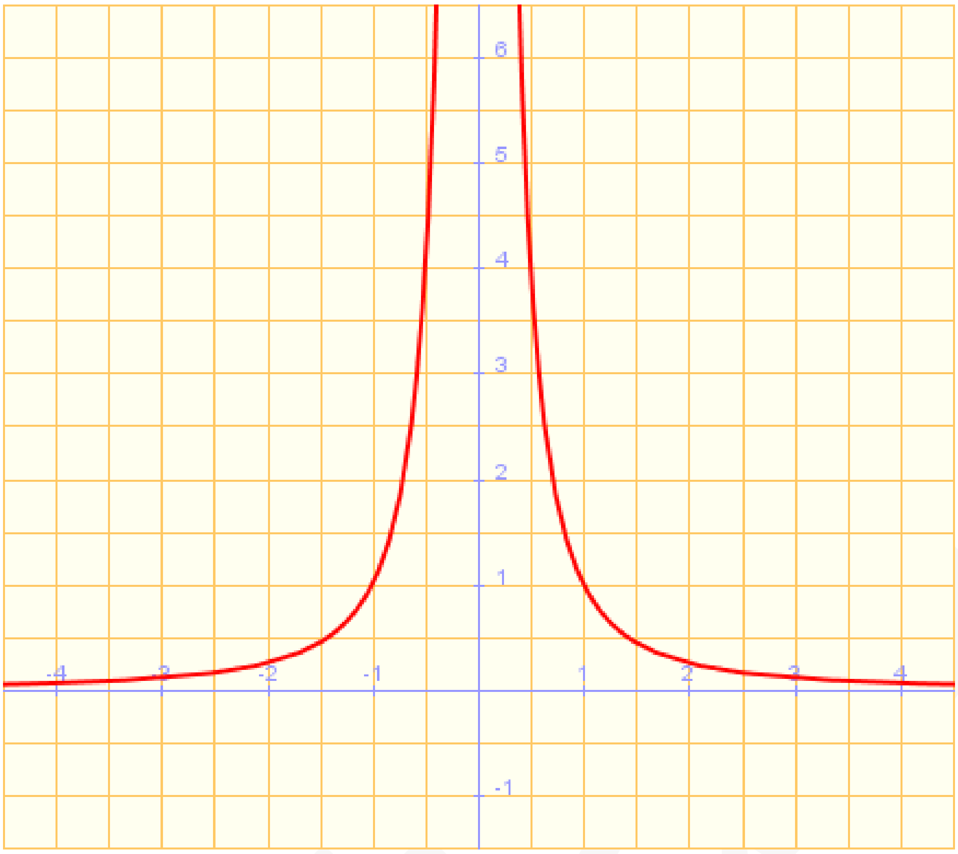

Figura 4: Ejemplo de discontinuidad inevitable de segunda especie: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

3 Propiedades de las funciones continuas

Las funciones continuas tienen las siguientes propiedades:

- La suma, diferencia y producto de funciones continuas producen funciones continuas.
- El producto de un número real por una función continua genera otra función continua.
- El cociente de dos funciones continuas es a su vez una función continua en los puntos donde el denominador no se anule.
- Si $f(x)$ es continua en x_0 y $g(x)$ es continua en $f(x_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ f)(x)$ es continua en x_0.

Las funciones de los siguientes tipos son continuas en sus respectivos dominios:

1) Funciones polinómicas: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

2) Funciones racionales: $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ tal que $q(x) \neq 0$.

3) Funciones radicales: $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

4) Funciones trigonométricas: $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$, $\sec(x)$, $\operatorname{cotan}(x)$.

Ejercicio 3

Estudia la continuidad de las funciones $f(x) = x + \text{sen}(x)$, $g(x) = 3\tan(x)$ y $h(x) = \dfrac{x^2+1}{\cos(x)}$.

Ejercicio 4

Estudia la continuidad de la función $y = \begin{cases} \text{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ utilizando las propiedades de continuidad de las funciones compuestas.

4 Teorema del valor intermedio (o de Darboux)

Teorema del valor intermedio

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y además $f(a) < k < f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = k$. Es decir:

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ \\ f(a) < k < f(b) \end{array}\right\} \implies \exists\, c \in (a,b) \text{ tal que } f(c) = k$$

El teorema del valor intermedio afirma que si una función es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces $f(x)$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ conforme x toma todos los posibles valores que existen entre a y b.

El teorema del valor intermedio es un teorema de existencia, ya que asegura que existe al menos un valor $x = c$ que cumple la condición referida, pero no proporciona un método para encontrar dicho valor, ni indica cuántos valores x cumplen el teorema.

5 Teorema del cero intermedio (o de Bolzano)

Teorema del cero intermedio

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y además los valores $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo (es decir, $f(a)\cdot f(b) < 0$), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$. Es decir:

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \implies \exists\, c \in (a,b) \text{ tal que } f(c) = 0$$

El teorema de Bolzano es otro teorema de existencia, por lo que no proporciona información sobre el número de raíces que existen en el intervalo, ni tampoco identifica su valor.

Ejercicio 5

Aplica el teorema al estudio de la función $f(x) = x^5 - 5x^3 + 3$ en el intervalo $(0,1)$.

6 Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass

Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, existen dos puntos t_1 y t_2 pertenecientes al intervalo $[a, b]$ de forma que

$$\forall t \in [a, b] \quad f(t_1) \leq f(t) \leq f(t_2)$$

Es decir, este teorema afirma que en el intervalo $[a, b]$ existen un mínimo y máximo para la función $f(x)$. Otra forma de expresarlo consiste en indicar que si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces $f(x)$ está acotada en $[a, b]$.

Es importante resaltar que este resultado solo es cierto en general si el intervalo es cerrado y acotado.

7 Continuidad uniforme

7.1 Definición

Se dice que la función $f(x)$ es uniformemente continua en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si se verifica que para todo $\epsilon > 0$ existe un valor $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos $x_1, x_2 \in A$, si $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces se verifica que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

La continuidad uniforme es una propiedad global y relativa a todo el conjunto A. El valor δ depende solo del valor ϵ prefijado, y no de ningún punto particular del dominio de la función.

Una forma de entender la continuidad uniforme consiste en afirmar que $f(x)$ es uniformemente continua si pequeños cambios en el valor de x producen pequeños cambios en el valor de la imagen de la función, donde el tamaño de los cambios en $f(x)$ depende solo del tamaño de los cambios en x pero no del valor exacto de x.

Ejercicio 6

Demuestra que la función $f(x) = 2x + 5$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7

Demuestra que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

7.2 Teorema de Heine (o de Cantor-Heine)

Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces $f(x)$ es uniformemente continua en ese intervalo $[a, b]$. Es decir:

$$f(x) \text{ es continua en } [a, b] \implies f(x) \text{ es uniformemente continua en } [a, b]$$

8 Problemas

1) Estudia la continuidad de la siguiente función en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 1/x & x \geq 1 \end{cases}$$

2) Estudia la continuidad de la siguiente función en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3) Estudia la continuidad de la siguiente función, indicando claramente los puntos y/o tramos de la recta real donde la función es continua:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4) Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$. ¿Se puede ampliar el dominio de $f(x)$ al punto $x = 0$ definiendo $f(0)$ de manera que la función sea continua en $\mathbb{R}$?

5) Indica la relación que debe existir entre los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & x < 2 \\ bx^2 - a & x \geq 2 \end{cases}$$

6) Dada la siguiente función $f(x)$, elige a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los puntos de la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} -3 \operatorname{sen}(x) & x \leq -\pi/2 \\ a \operatorname{sen}(x) + b & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos(x) & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

7) Estudia la continuidad de la siguiente función en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (-\infty, 0] \\ x^6 + x^3 & x \in (0, 1) \\ (x^2 - 1)^2 + 2 & x \in [1, 2) \\ \dfrac{x^3}{2x + 4} + x^2 & x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

8) Estudia la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 2$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\mathrm{Ln}(x)}{x^2-1} & x \neq 1 \\ 1/2 & x = 1 \end{cases}$$

9) Estudia la continuidad de la función $f(x)$ en toda la recta real, indicando los intervalos en los que la función es continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

10) Estudia la continuidad de la función $f(x) = x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$ en toda la recta real, indicando los intervalos en los que la función es continua.

11) Estudia la continuidad de $f(x)$ en toda la recta real, indicando claramente para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la función es continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

12) Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-\cos(5x)}}$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ en un entorno de $x = 0$, ¿qué valor habría que asignar a $f(0)$ para que la función fuese continua en $x = 0$?

13) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que la siguiente función $f(x)$ sea continua en $x = 0$? Justifica la respuesta.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+2x}{e^{1/x}+3} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- *Cálculo*. R. E. Larson, R. P. Hostetler y B. H. Edwards. Ed. McGraw-Hill.
- *Problemas de cálculo*. M. Bilbao, F. Castañeda y J. C. Peral. Ed. Pirámide.
- *Problemas de análisis. Tomo I*. M. Anzola, J. Caruncho y G. Pérez-Canales. Ed. Primer Ciclo.
- *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. D. Pestana Galván et al. Ed. Ariel.
- *Curso básico de matemáticas para estudiantes de Económicas y Empresariales*. G. Jarne, E. Minguillón y T. Zabal. Universidad de Zaragoza.
- *Continuidad uniforme*. F. Revilla. https://fernandorevilla.es