Fiche d'exercices : fonctions de degré 3 (aspect algébrique)

Exercice 1 :
Vérifier dans chaque cas que la valeur α proposée est racine du polynôme de degré 3 :

1) $\alpha_1 = 2$ et $f_1(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

2) $\alpha_2 = -1$ et $f_2(x) = -2x^3 + 12x^2 - 10x - 24$

3) $\alpha_3 = 3$ et $f_3(x) = 3x^3 - 21x - 18$

4) $\alpha_4 = -4$ et $f_4(x) = -3x^3 - 9x^2 + 12x$

Exercice 2 :
Dans chacun des cas suivants, déterminer le signe de la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ proposée :

1) $f_1(x) = -2(x+3)(x-4)(x+1)$

2) $f_2(x) = 4(x-1)(x+2)(x-5)$

3) $f_3(x) = (x-6)(x+3)(x-2)$

4) $f_4(x) = -(x+1)(x-1)(x+3)$

5) $f_5(x) = -3(x-1)(x+2)^2$

6) $f_6(x) = 2(x+3)^2(x-2)$

7) $f_7(x) = 4(x-5)^3$

8) $f_8(x) = -3(x+2)^3$

Exercice 3 :
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression factorisée puis l'expression développée de la fonction à l'aide des informations fournies :

1) f_1 est une fonction de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ qui a pour racines 2, -1 et 4 et telle que $f_1(0) = 16$.

2) f_2 est une fonction de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ qui a pour racines -2, 3 et 1 et telle que $f_2(0) = -18$.

3) f_3 est une fonction de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ qui a pour racine double -2 et pour racine simple 3 et telle que $f_3(0) = 12$.

4) f_4 est une fonction de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ qui a pour racine double 4 et pour racine simple -1 et telle que $f_4(0) = 32$.

5) f_5 est une fonction de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ qui a pour racine triple 2 et telle que $f_5(0) = 4$.

6) f_6 est une fonction de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ qui a pour racine triple -1 et telle que $f_6(2) = 54$.

Solutions

Exercice 1 :

1) $f_1(\alpha_1) = f_1(2) = 2^3 - 4\times 2^2 - 11\times 2 + 30 = 8 - 16 - 22 + 30 = -8 - 22 + 30 = -30 + 30 = 0$

2) $f_2(\alpha_2) = f_2(-1) = -2\times(-1)^3 + 12\times(-1)^2 - 10\times(-1) - 24 = -2\times(-1) + 12\times 1 + 10 - 24 = 2 + 12 + 10 - 24$
$= 14 + 10 - 24 = 24 - 24 = 0$

3) $f_3(\alpha_3) = f_3(3) = 3\times 3^3 - 21\times 3 - 18 = 3\times 27 - 63 - 18 = 81 - 63 - 18 = 18 - 18 = 0$

4) $f_4(\alpha_4) = f_4(-4) = -3\times(-4)^3 - 9\times(-4)^2 + 12\times(-4) = -3\times(-64) - 9\times 16 - 48 = 192 - 144 - 48 = 48 - 48 = 0$

Exercice 2 :

1)

x	$-\infty$		-3		-1		4		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2)

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
4		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3)

x	$-\infty$		-3		2		6		$+\infty$
$x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_3(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4)

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f_4(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

5) $f_5(x) = -3(x-1)(x+2)^2 = -3(x-1)(x+2)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_5(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

6) $f_6(x) = -2(x+3)^2(x-2) = 2(x+3)(x+3)(x-2)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$+$	
$f_6(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

7) $f_7(x) = 4(x-5)^3 = 4(x-5)(x-5)(x-5)$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
4		$+$		$+$	
$x-5$		$-$	0	$+$	
$x-5$		$-$	0	$+$	
$x-5$		$-$	0	$+$	
$f_7(x)$		$-$	0	$+$	

8) $f_8(x) = -3(x+2)^3 = -3(x+2)(x+2)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
-3		$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	
$f_8(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 3 :

1)

- **Forme factorisée :**

  f_1 est de la forme $f_1(x) = a(x-2)(x+1)(x-4)$

  $f_1(0) = a \times (0-2) \times (0+1) \times (0-4) = a \times (-2) \times 1 \times (-4) = a \times 8 = 16$ donc $a = \dfrac{16}{8} = 2$

  La forme factorisée de f_1 est donc $\boxed{f_1(x) = 2(x-2)(x+1)(x-4)}$

- **Forme développée :**

  $f_1(x) = 2(x-2)(x+1)(x-4) = 2(x^2+x-2x-2)(x-4) = 2(x^2-x-2)(x-4) = 2(x^3-4x^2-x^2+4x-2x+8)$

  $= 2(x^3-5x^2+2x+8) = \boxed{2x^3-10x^2+4x+16 = f_1(x)}$.

2)

- **Forme factorisée :**

  f_2 est de la forme $f_2(x) = a(x+2)(x-3)(x-1)$

  $f_2(0) = a \times (0+2) \times (0-3) \times (0-1) = a \times 2 \times (-3) \times (-1) = a \times 6 = -18$ donc $a = \dfrac{-18}{6} = -3$

  La forme factorisée de f_2 est donc $\boxed{f_2(x) = -3(x+2)(x-3)(x-1)}$

- **Forme développée :**

  $f_2(x) = -3(x+2)(x-3)(x-1) = -3(x^2-3x+2x-6)(x-1) = -3(x^2-x-6)(x-1) = -3(x^3-x^2-x^2+x-6x+6)$

  $= -3(x^3-2x^2-5x+6) = \boxed{-3x^3+6x^2+15x-18 = f_2(x)}$.

3)

- **Forme factorisée :**

  f_3 est de la forme $f_3(x) = a(x+2)(x+2)(x-3) = a(x+2)^2(x-3)$

  $f_3(0) = a \times (0+2)^2 \times (0-3) = a \times 4 \times (-3) = a \times (-12) = 12$ donc $a = \dfrac{12}{-12} = -1$

  La forme factorisée de f_3 est donc $\boxed{f_3(x) = -1(x+2)^2(x-3)}$

- **Forme développée :**

  $f_3(x) = -1(x+2)^2(x-3) = -1(x^2+4x+4)(x-3) = -1(x^3-3x^2+4x^2-12x+4x-12)$

  $= -1(x^3+x^2-8x-12) = \boxed{-x^3-x^2+8x+12 = f_3(x)}$.

4)

- **Forme factorisée :**

  f_4 est de la forme $f_3(x) = a(x-4)(x-4)(x+1) = a(x-4)^2(x+1)$

  $f_4(0) = a \times (0-4)^2 \times (0+1) = a \times 16 \times 1 = a \times 16 = 32$ donc $a = \dfrac{32}{16} = 2$

  La forme factorisée de f_4 est donc $\boxed{f_4(x) = 2(x-4)^2(x+1)}$

- **Forme développée :**

  $f_4(x) = 2(x-4)^2(x+1) = 2(x^2-8x+16)(x+1) = 2(x^3+x^2-8x^2-8x+16x+16)$

  $= 2(x^3-7x^2+8x+16) = \boxed{2x^3-14x^2+16x+32 = f_4(x)}$.

5)

- **Forme factorisée :**

  f_5 est de la forme $f_5(x) = a(x-2)(x-2)(x-2) = a(x-2)^3$

  $f_5(0) = a \times (0-2)^3 = a \times (-8) = 4$ donc $a = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2} = -0,5$

  La forme factorisée de f_5 est donc $\boxed{f_5(x) = -\dfrac{1}{2}(x-2)^3}$

- **Forme développée :**

  $f_5(x) = -\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x-2) = -\dfrac{1}{2}(x^2-4x+4)(x-2) = -\dfrac{1}{2}(x^3-2x^2-4x^2+8x+4x-8)$

  $= -\dfrac{1}{2}(x^3-6x^2+12x-8) = \boxed{-\dfrac{1}{2}x^3+3x^2-6x+4 = f_5(x)}$.

6)

- **Forme factorisée :**

  f_6 est de la forme $f_6(x) = a(x+1)(x+1)(x+1) = a(x+1)^3$

  $f_6(2) = a \times (2+1)^3 = a \times 27 = 54$ donc $a = \dfrac{54}{27} = 2$

  La forme factorisée de f_6 est donc $\boxed{f_6(x) = 2(x+1)^3}$

- **Forme développée :**

  $f_6(x) = 2(x+1)^2(x+1) = 2(x^2+2x+1)(x+1) = 2(x^3+x^2+2x^2+2x+x+1)$

  $= 2(x^3+3x^2+3x+1) = \boxed{2x^3+6x^2+6x+2 = f_6(x)}$.