Радиоавтоматика

(ОА и САУ, САР, ТАУ, …)

Л + Пр + Лаб + СРС (72ч); Р/сэ; Э (БК, З)

АИС, каф.РС, 2335, aisusu@ya.ru, aisokolov@etu.ru

Пр + Лаб: 2427

Пр: DesignLab (OrCad)

СРС: Пр, Лаб, КР, ДЗ

Р/сэ: 3 КР -> «БиП» -> ДЗ (доп.ДЗ)

Пр + Лаб -> Э

«РАДИОАВТОМАТИКА»

для подготовки бакалавров по направлению
11.03.01 «Радиотехника»

для подготовки специалистов
по специальности
11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы»

Основная литература

1. Соколов А.И., Юрченко Ю.С. Радиоавтоматика: учеб.пособие.
 - М.: Академия, 2011. – 266 с.
2. Соколов А.И., Чистякова С.С. Радиоавтоматика: учеб.-метод. пособие / под общ. ред. А.И.Соколова. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016. 76 с. (Учебное пособие содержит методические указания к лабораторным работам и практическим занятиям по дисциплине «Радиоавтоматика»)
3. Дополненный вариант уч.пособия (п.2): сайт универа, эл.ресурс, с.34

Дополнительная литература

1. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика: учеб. для вузов- М.: Радиотехника, 2003. – 286 с.

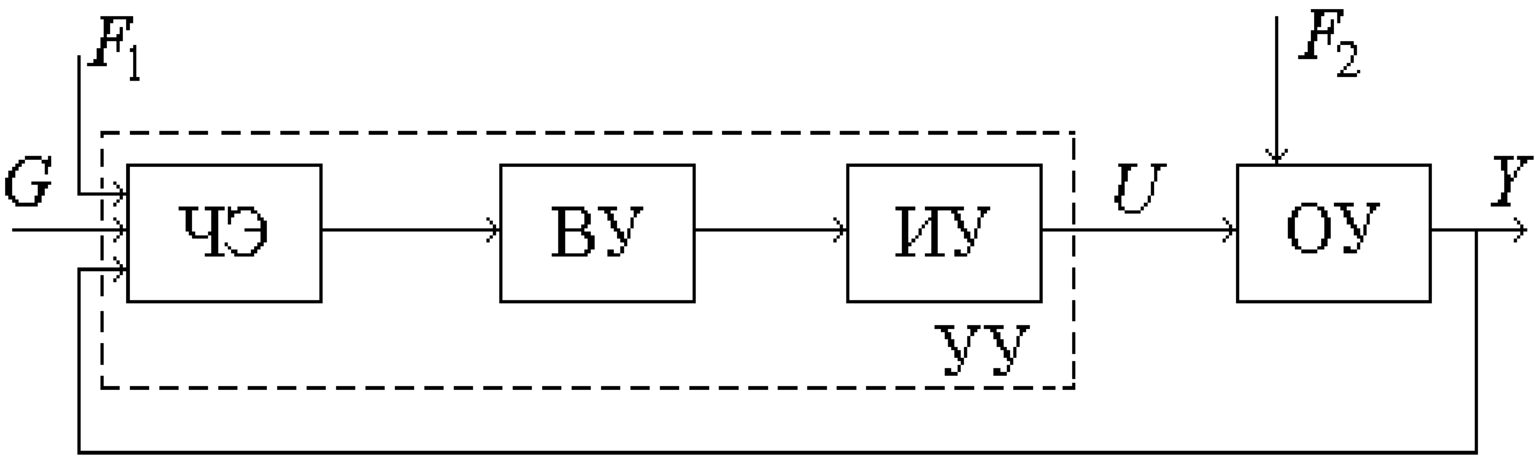
2. Теория систем автоматического управления /В. А. Бесекерский, Е. П. Попов; - 4-е изд., доп. и перераб. - СПб.: Профессия, 2003. – 749 с.

3. Первачев С.В. Радиоавтоматика. Учеб.для вузов, - М.: Радио и связь, 1982. – 295 с.

Системы управления и радиоавтоматики, их классификация

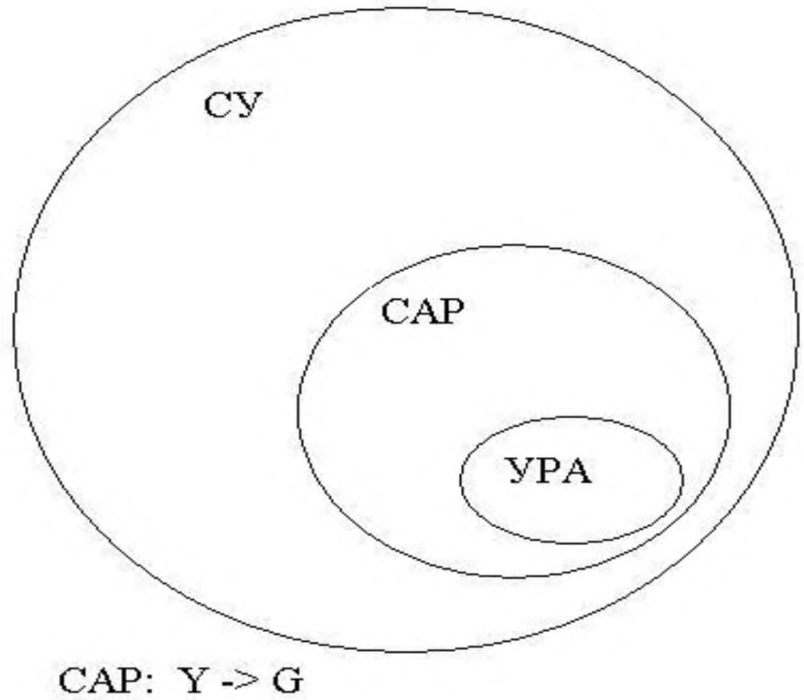
4 функции СУ:
- получение информации о задающем воздействии G;
- получение информации о состоянии объекта управления Y;
- анализ информации и выработка решения;
- исполнение решения.

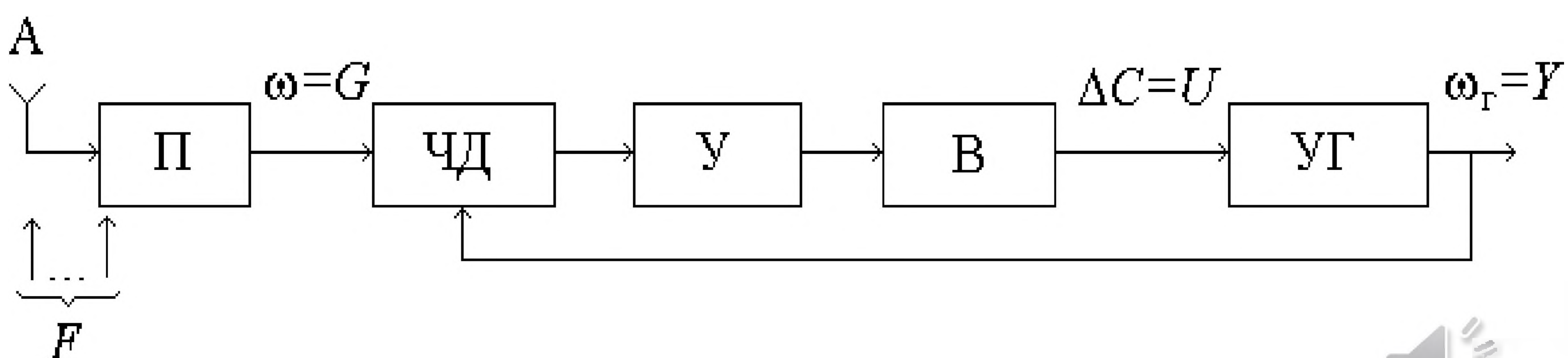
Обобщенная функциональная схема СУ:



УРА:

- системы синхронизации;
- следящие измерители параметров радиосигнала и координат объектов;
- системы управления подвижными объектами.



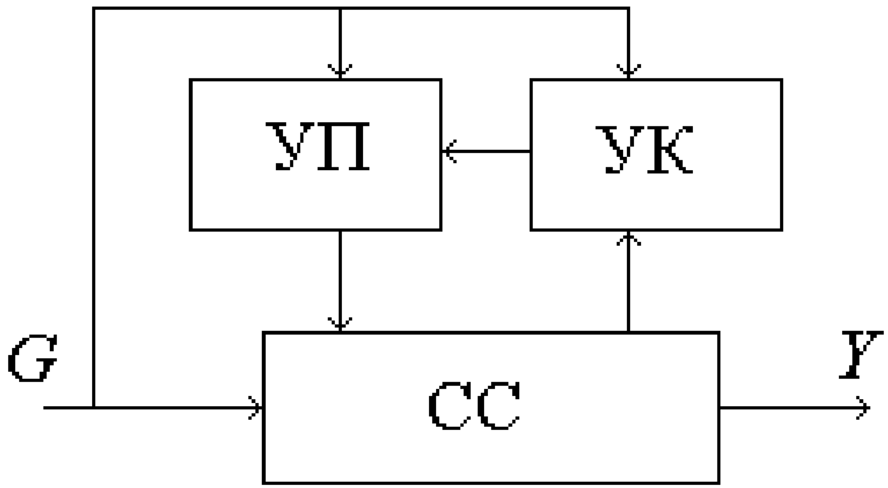


Классификация САР:

По характеру задающего воздействия различают:

- системы стабилизации (G=const),
- системы программного управления (G – известная функция времени),
- следящие системы (G – неизвестная функция времени).

Поисково-следящий измеритель:



По размерности Y

- одномерные (Y – скаляр)
- многомерные (Y – вектор) САР

Линейные и нелинейные САР

С постоянными и переменными параметрами

Непрерывные, импульсные и дискретные САР

Показатели качества САР:

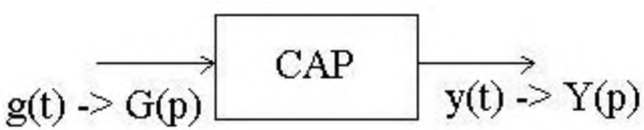
- ***устойчивость,***
- ***качество переходного процесса,***
- ***точность,***
- ***помехоустойчивость.***

Содержание дисциплины:

- Описание и анализ линейных систем в частотной и временной (методом пространства состояний) областях.
- Вопросы устойчивости и коррекции непрерывных и дискретных систем.
- Анализ точности и помехоустойчивости (динамические и случайные ошибки).
- Устройства радиоавтоматики.
- Оптимизация структуры и параметров устройств радиоавтоматики.
- Нелинейные системы радиоавтоматики.
- Дополнительные аспекты построения импульсных и дискретных систем.

Тема 1. Описание и анализ линейных непрерывных САР в частотной области

1.1. Функции передачи САР



$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dg(t)}{dt} + b_0 g(t),$$

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = L\{f(t)\},$$

1. Свойство линейности:

$$L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 L\{f_1(t)\} + a_2 L\{f_2(t)\} = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p),$$

2. Изображение производной от оригинала

$$L\{\frac{df(t)}{dt}\} = pF(p) - f(t_0),$$

3. Изображение интеграла от оригинала

$$L\{\int_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1\} = \frac{1}{p}F(p).$$

4. Смещение оригинала во времени

$$L\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}F(p).$$

5. Предельное значение оригинала

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

$$y(p)\cdot(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) =$$
$$= g(p)\cdot(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0),$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} = \frac{C(p)}{D(p)}.$$

Свойства ПФ:

1. $\boldsymbol{m \le n.}$

2. $W(p)\big|_{p=0} = \dfrac{b_0}{a_0} = K,$

3. $W(p) = \dfrac{b_m(p-q_1)\ldots(p-q_m)}{a_n(p-p_1)\ldots(p-p_n)},$

Обобщенная структурная схема:

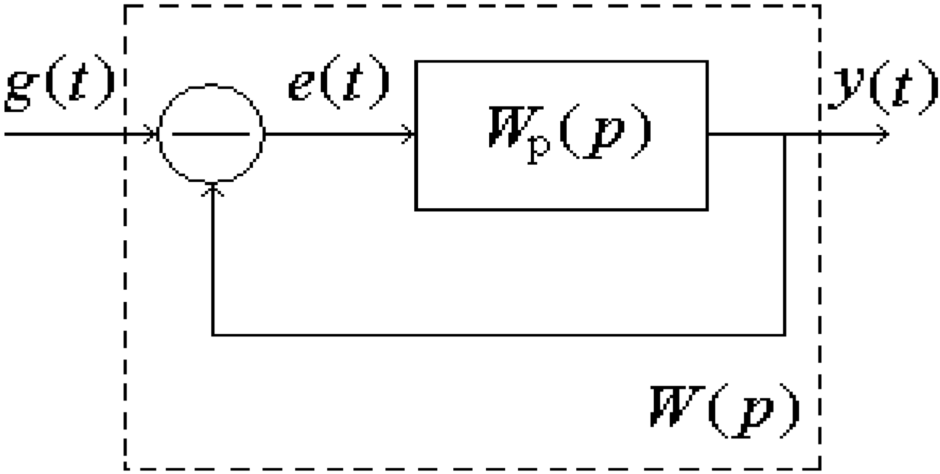
ПФ разомкнутой САР:

$$W_{\text{р}}(p)=\frac{y(p)}{e(p)};$$

ПФ по ошибке:

$$W_e(p)=\frac{e(p)}{g(p)},$$

$$W(p)=\frac{y(p)}{g(p)}=\frac{W_{\text{р}}(p)}{1+W_{\text{р}}(p)}. \quad W_e(p)=$$



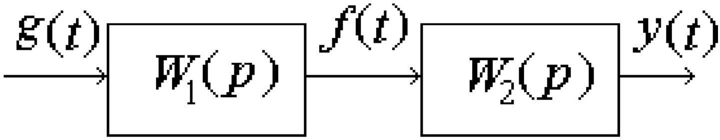
Уравнения САР:

$$\begin{cases} y(p) = e(p)W_{\text{р}}(p), \\ e(p) = g(p) - y(p). \end{cases}$$

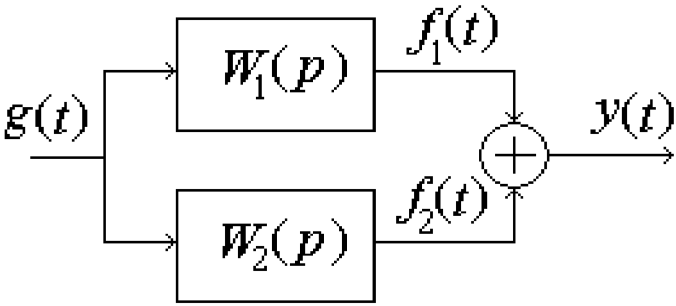
$$1 - W(p), \quad W_e(p) = \frac{1}{1 + W_{\text{р}}(p)}.$$

1.2. Соединение звеньев САР

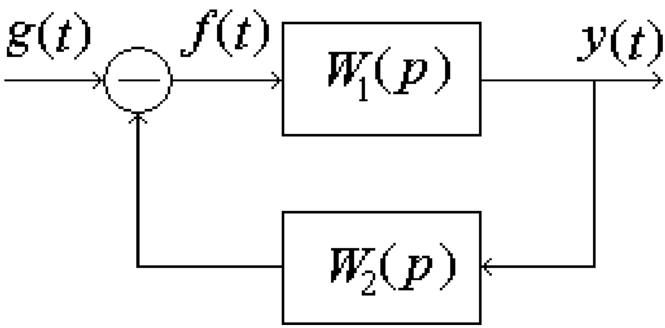
а



б



в



. Последовательное (а)

$$\begin{cases} f(p) = g(p)W_1(p), \\ y(p) = f(p)W_2(p). \end{cases}$$

$$y(p) = g(p)W_1(p)W_2(p).$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = W_1(p)W_2(p).$$

2. Параллельное (б)

$$\begin{cases} f_1(p) = g(p)W_1(p), \\ f_2(p) = g(p)W_2(p), \\ y(p) = f_1(p) + f_2(p). \end{cases}$$

$$y(p) = g(p)[W_1(p) + W_2(p)],$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = W_1(p) + W_2(p).$$

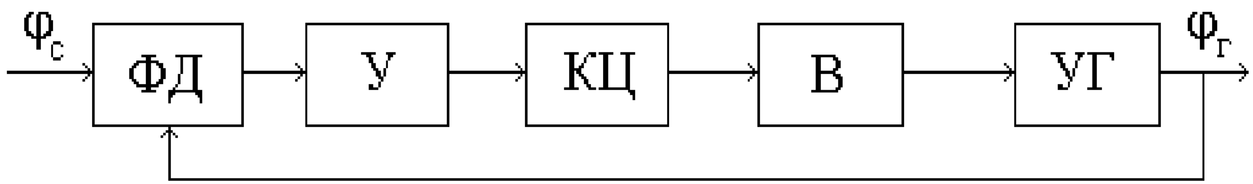
3. Включение звена в цепи отрицательной обратной связи (в)

$$\begin{cases} f(p) = g(p) - y(p)W_2(p), \\ y(p) = f(p)W_1(p). \end{cases}$$

$$y(p) = g(p)W_1(p) - y(p)W_1(p)W_2(p),$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

1.3. Определение (идентификация) ПФ звена САР



$$W_{\text{фд}}(p) = K_{\text{фд}}.$$

$$W_{\text{у}}(p) = K_{\text{у}},$$

$$W_{\text{в}}(p) = K_{\text{в}},$$

$$W_{\text{уг}}(p) = \frac{K_{\text{уг}}}{p},$$

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{K_v}{p} W_{\text{кц}}(p),$$

*K*v = *K*фд *K*у *K*в *K*уг (размерность с-1).

Практическое занятие

Основы автоматики и САУ
(Радиоавтоматика)

Логарифмические характеристики (ЛХ)

Частотная передаточная функция системы получается из передаточной функции *W(p)* заменой ***p=jω***:

$$W(j\omega) = W(p)\Big|_{p=j\omega}.$$

Являясь функцией комплексной переменной, *W(jω)* представима в алгебраической и показательной формах:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \left|W(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)}.$$

Связь между 2-мя формами представления *W(jω)* устанавливают следующие соотношения:

$$\left|W(j\omega)\right| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \qquad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$

$$P(\omega) = \left|W(j\omega)\right|\cos\varphi(\omega), \qquad Q(\omega) = \left|W(j\omega)\right|\sin\varphi(\omega).$$

Правила построения ЛАХ (логарифмической АЧХ):

1) по оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе; в качестве основания логарифма используют 2 (октавное разбиение оси частот) для узкополосных систем и 10 (декадное разбиение оси частот) – для широкополосных; поскольку большинство систем радиоавтоматики относится к узкополосным системам, рекомендуется **октавное**, а не декадное разбиение оси частот;
2) по оси ординат откладываются значения модуля ПФ разомкнутой системы в децибелах;
3) ось абсцисс (ось частот) обязательно пересекает ось ординат в точке 0 дБ; ось ординат может пересекать ось частот в любой точке, но, удобнее, выбирать точку $\omega=1$.

Правила построения ЛФХ (логарифмической ФЧХ):

1) масштаб оси частот тот же, что и при построении ЛАХ;
2) по оси ординат откладываются значения фазы $\varphi(\omega)$ ПФ разомкнутой системы в градусах или радианах;
3) ЛФХ желательно располагать строго под ЛАХ (для удобной совместной работы с 2-мя графиками).

Типовые элементарные звенья

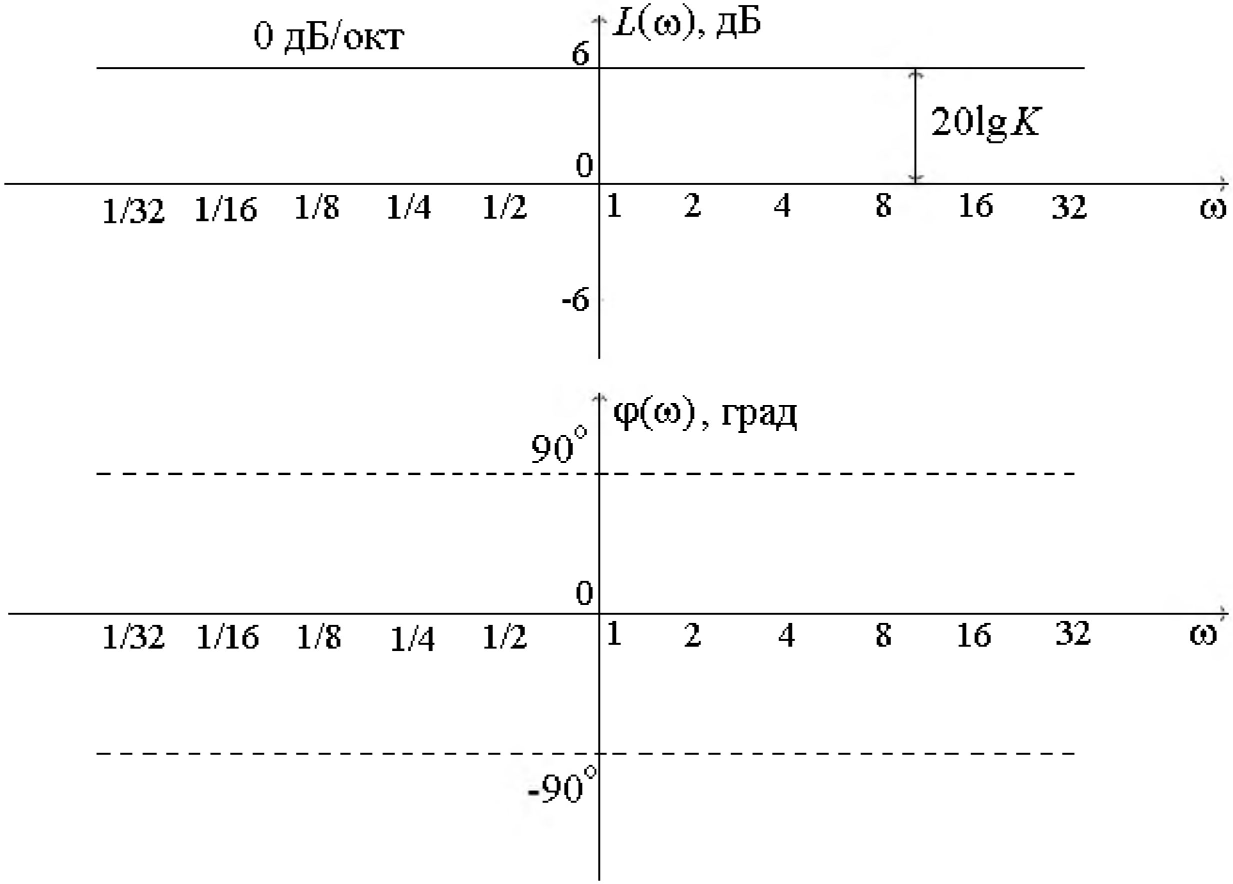
1. Усилительное звено

$$\longrightarrow \boxed{K} \longrightarrow$$

ПФ и частотные характеристики усилительного звена:

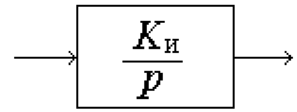
$$W_p(j\omega)=K;\quad P(\omega)=K;\ Q(\omega)=0;\quad \varphi(\omega)=0.$$

$$L(\omega)=20\lg K. \qquad K\approx\begin{cases} 2^x \to L=20\lg K\approx x*6\ \text{дБ}, \\ 10^y \to L\approx y*20\ \text{дБ}. \end{cases}$$



ЛХ усилительного звена

2. Интегрирующее звено

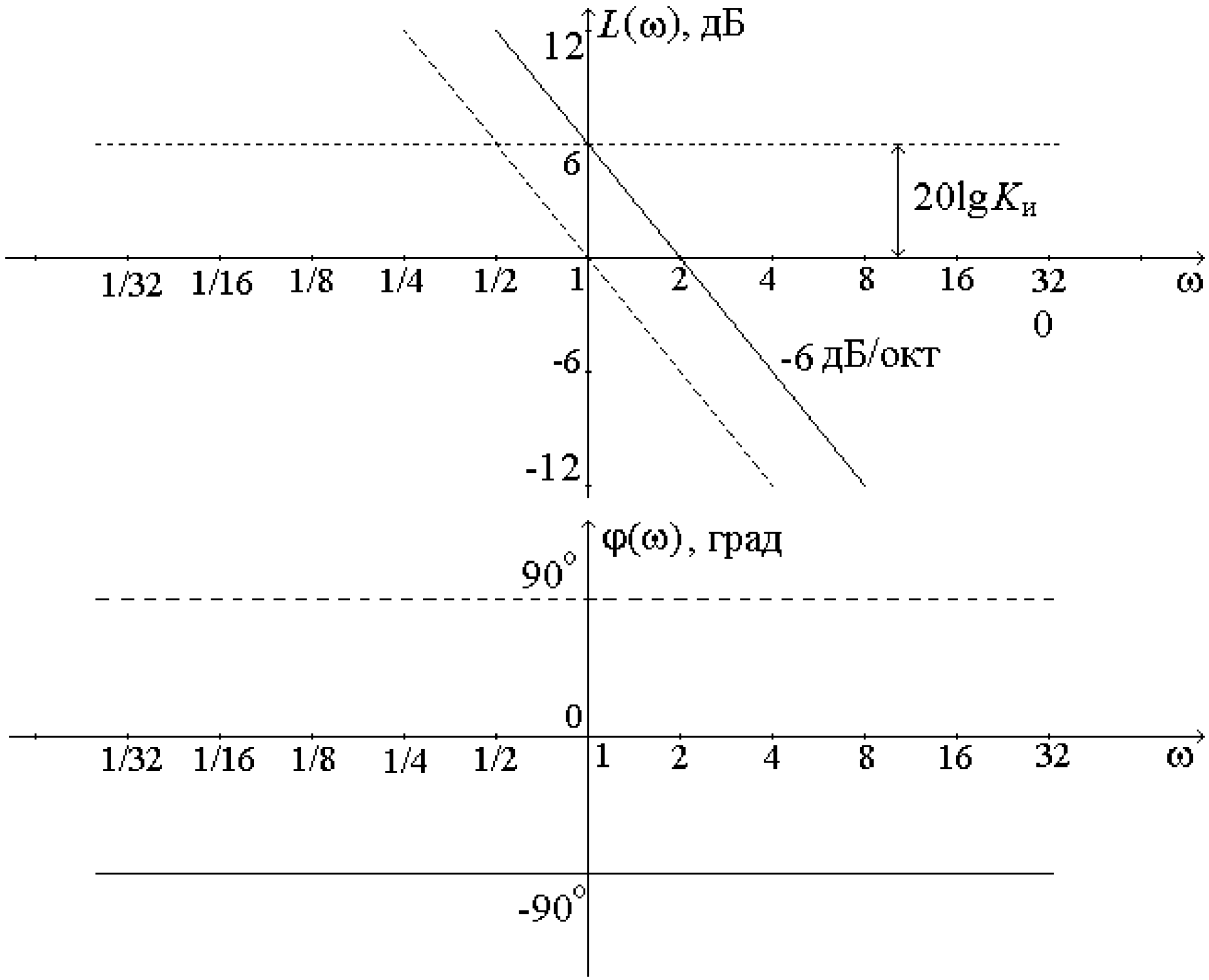


ПФ и частотные характеристики интегрирующего звена:

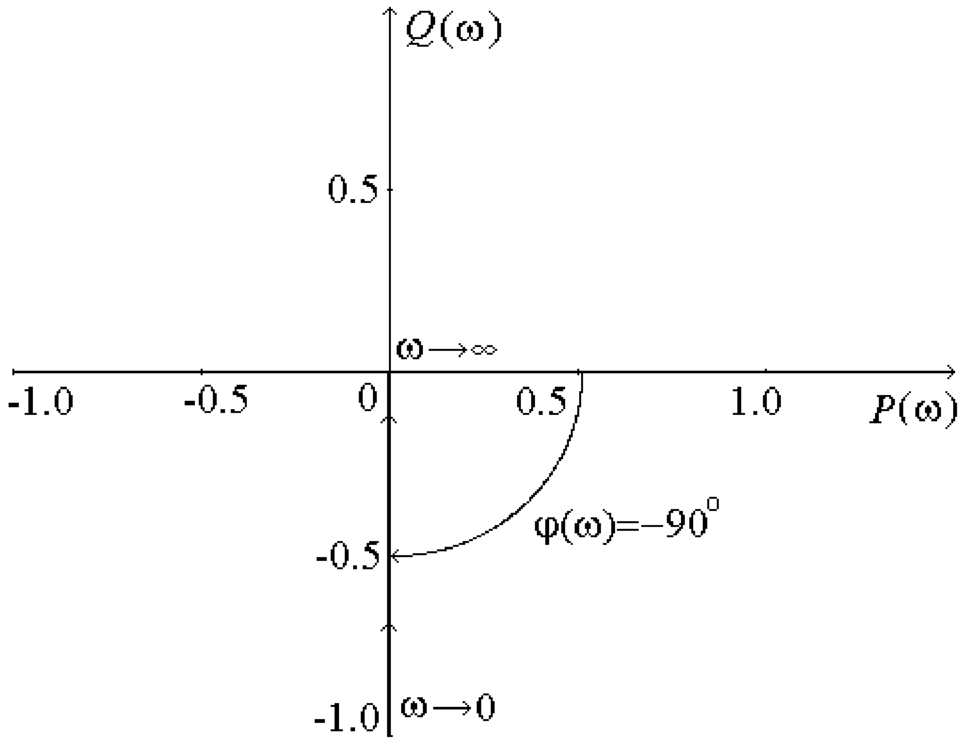
$$W_р(j\omega)=\frac{K_и}{p}; \qquad P(\omega)=0; \qquad Q(\omega)=-\frac{K_и}{\omega};$$

$$\varphi(\omega)=-90. \qquad \left|W_р(j\omega)\right|=\frac{K_и}{\omega};$$

$$L(\omega)=20\lg\frac{K_и}{\omega}=20\lg K_и-20\lg\omega.$$



ЛХ интегрирующего звена



АФХ интегрирующего звена

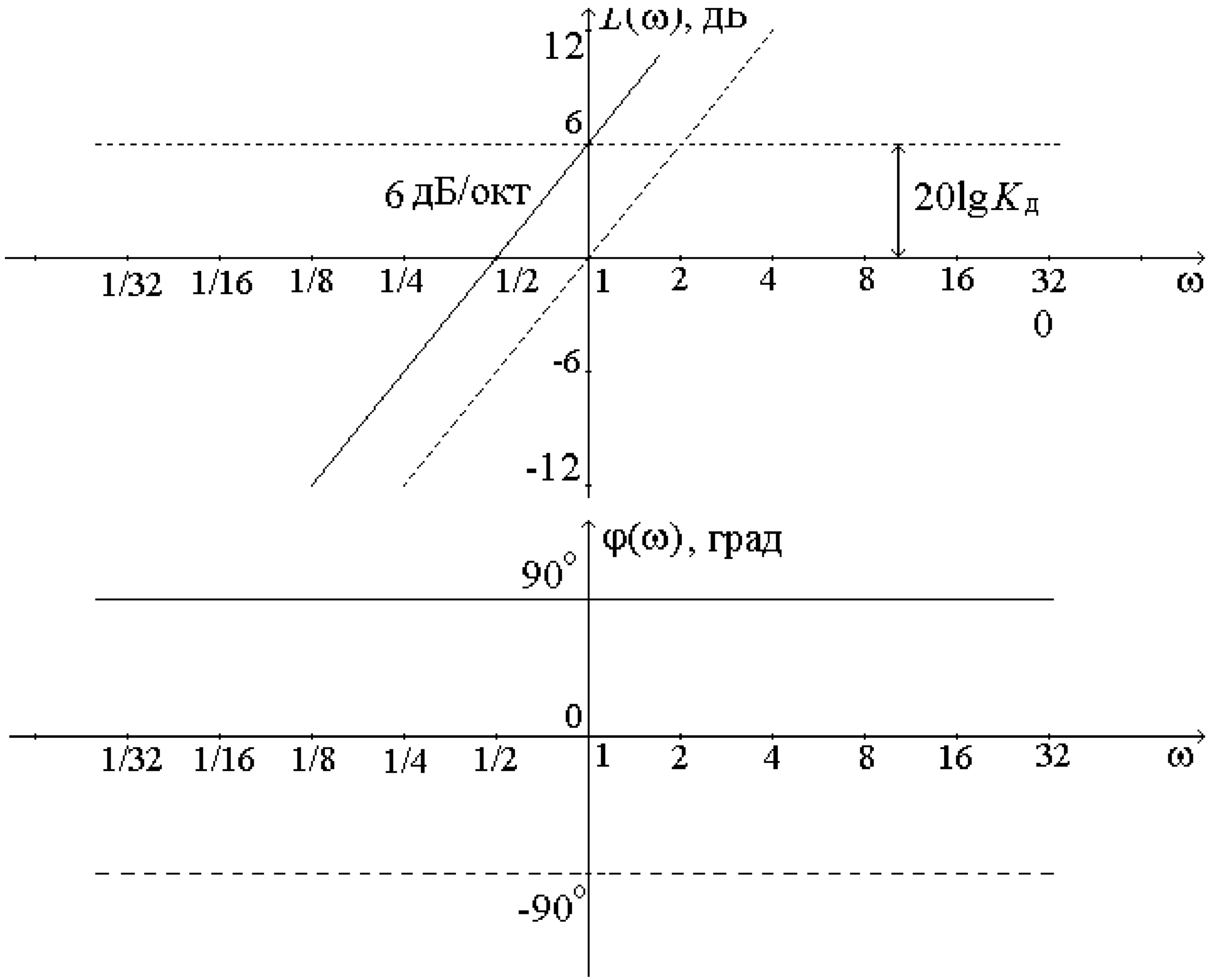
3. Дифференцирующее звено

$$\longrightarrow \boxed{K_{д}\, p} \longrightarrow$$

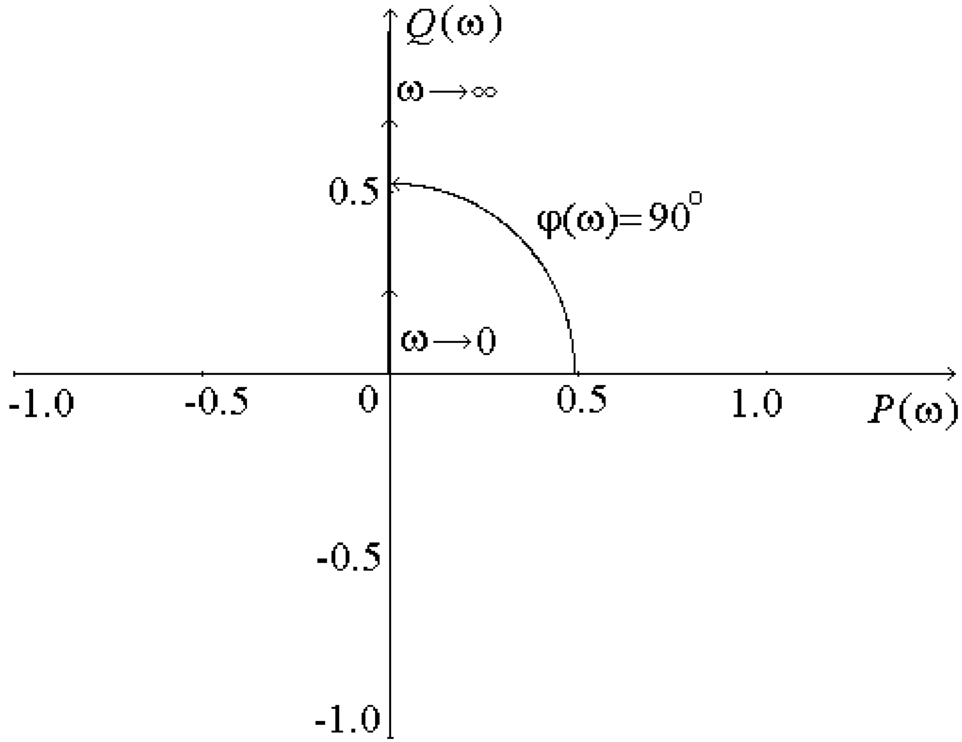
ПФ и частотные характеристики дифференцирующего звена:

$W_{р}(j\omega)=K_{д}j\omega;$ $P(\omega)=0;$ $Q(\omega)=K_{д}\omega;$ $\varphi(\omega)=90.$

$$L(\omega)=20\lg K_{Д}\omega=20\lg K_{Д}+20\lg\omega$$



ЛХ дифференцирующего звена



АФХ дифференцирующего звена

4. Апериодическое звено

$$\longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{1+pT}} \longrightarrow$$

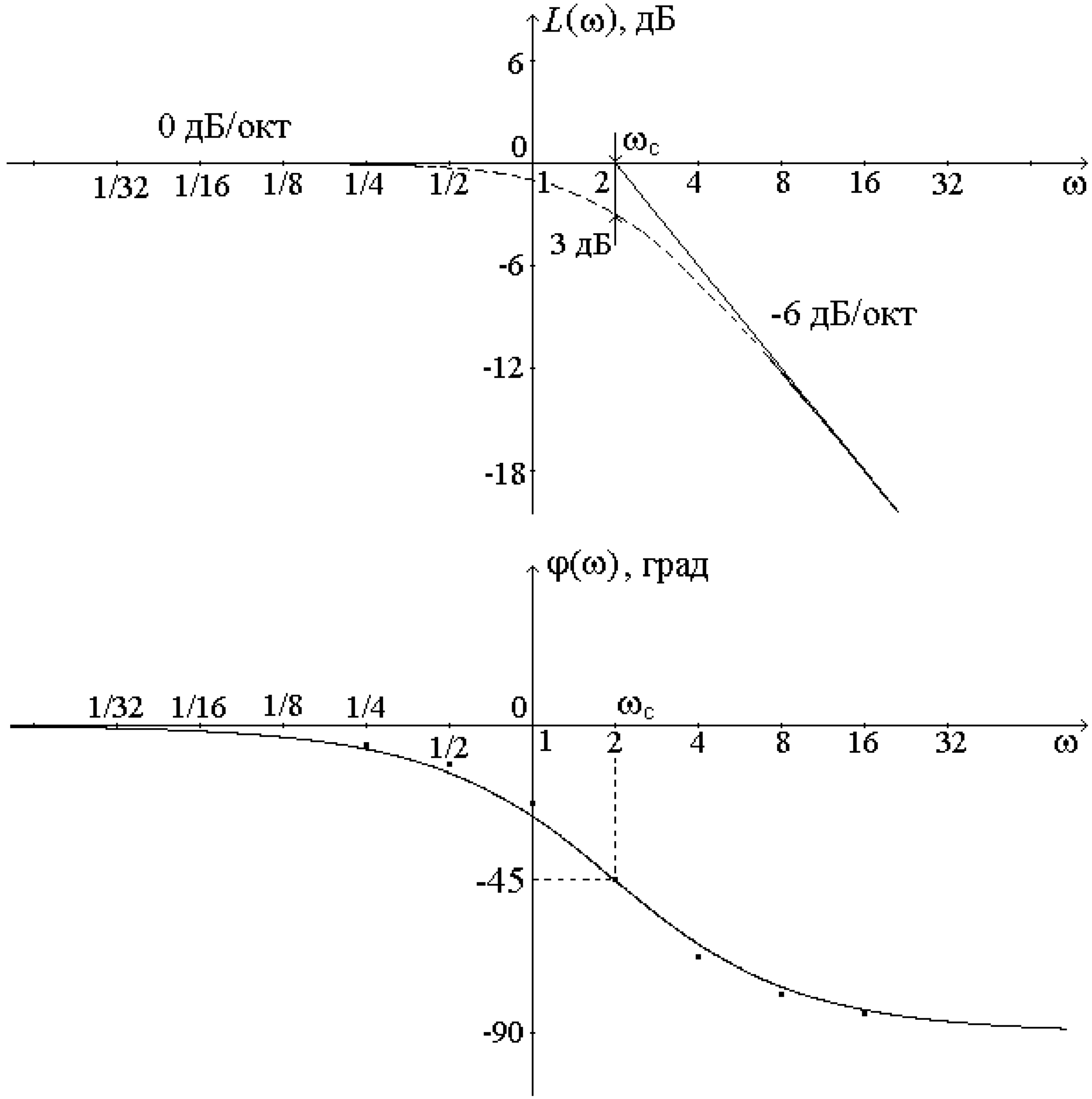
ПФ и частотные характеристики апериодического звена:

$$W_p(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T};\;\; P(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2T^2};\;\; Q(\omega)=\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2};$$

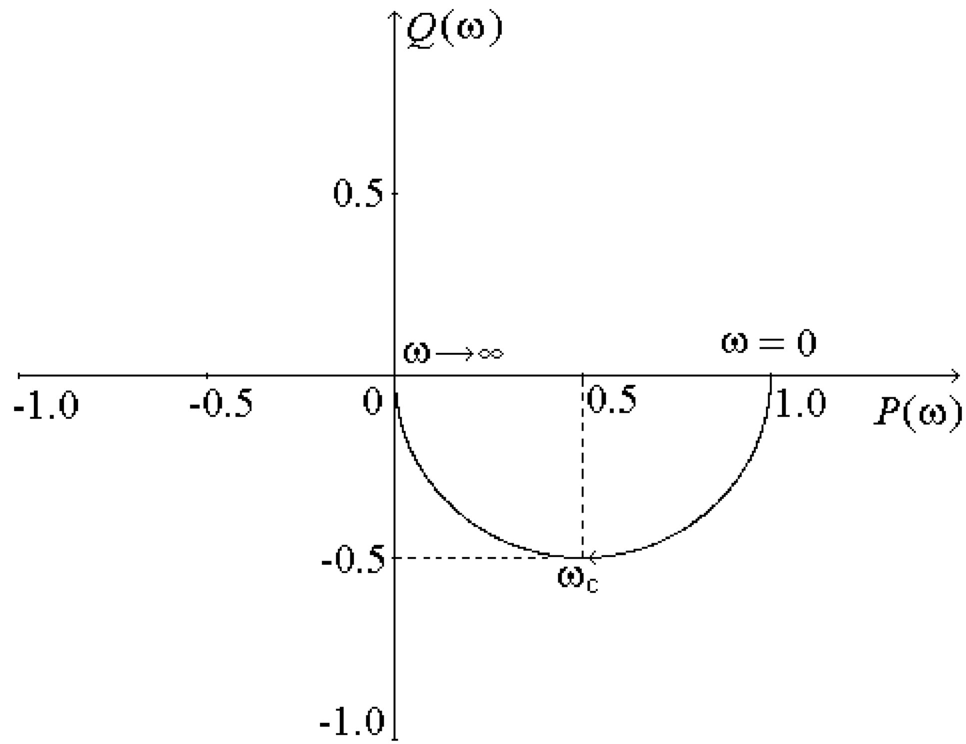
$$\left|W_p(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}};\qquad \varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}(\omega T).$$

$$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}.$$

$$L(\omega)\approx\begin{cases}0, & \omega\ll\omega_c,\\ -20\lg\omega-20\lg T, & \omega\gg\omega_c.\end{cases}$$



ЛХ апериодического звена



АФХ апериодического звена

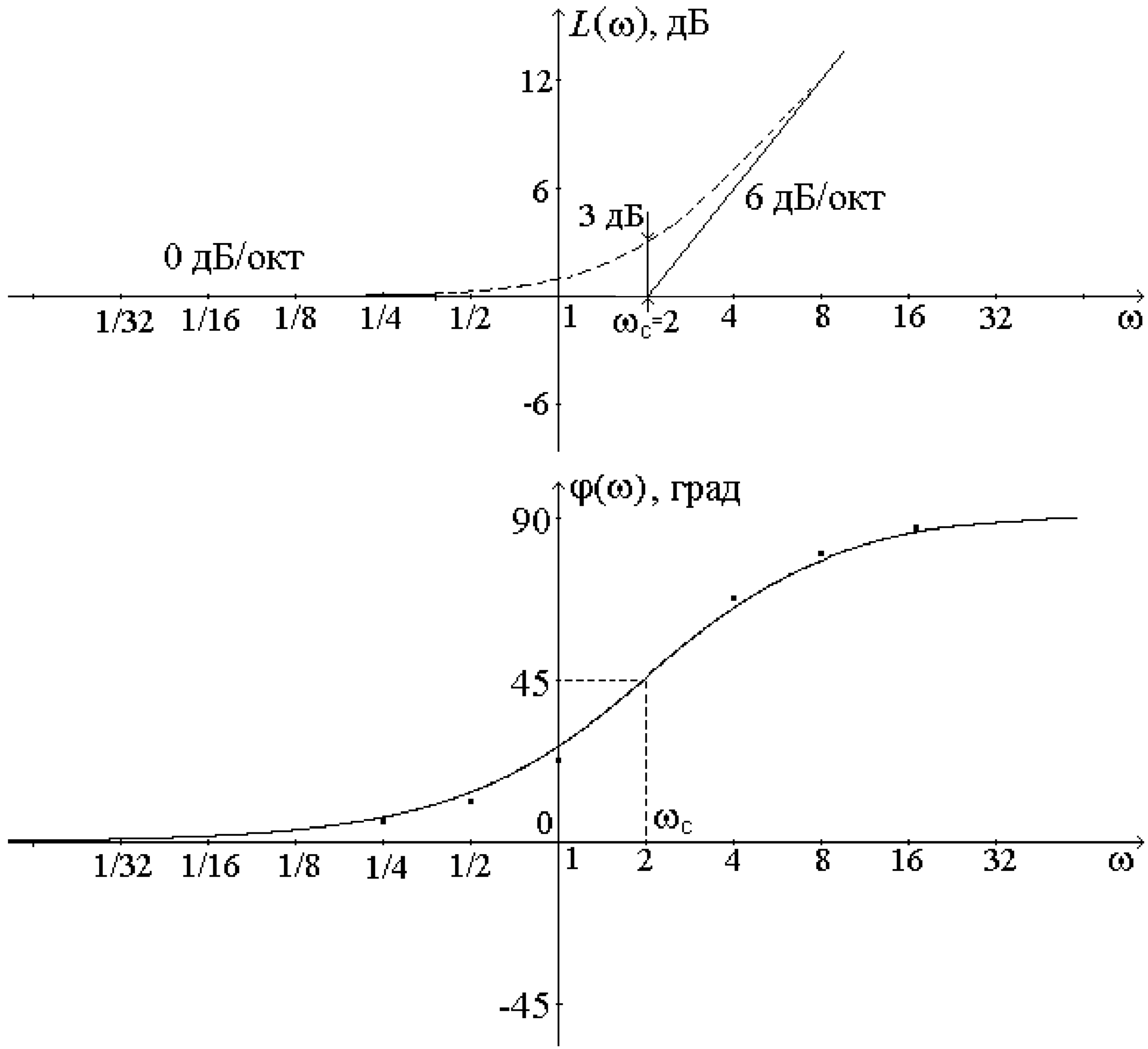
5. Форсирующее звено

$$\longrightarrow \boxed{1+pT} \longrightarrow$$

ПФ и частотные характеристики форсирующего звена:

$$W_{\mathrm{p}}(j\omega)=1+j\omega T;\;\; P(\omega)=1;\;\; Q(\omega)=\omega T;$$

$$\left|W_{\mathrm{p}}(j\omega)\right|=\sqrt{1+\omega^2 T^2};\;\; \varphi(\omega)=\mathrm{arctg}(\omega T).$$



ЛХ форсирующего звена

6. Колебательное звено

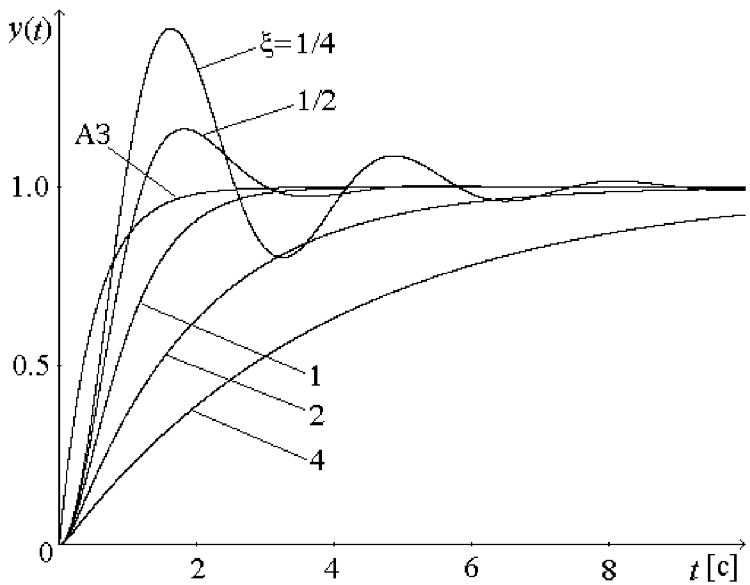
$$\longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{p^2T^2+2pT\xi+1}} \longrightarrow$$

$$W_{\text{p}}(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2T^2+2j\omega T\xi+1}.$$

T – постоянная времени,

$\omega o=1/T$ – частота собственных колебаний звена,

ξ – коэффициент затухания.



Переходные процессы в колебательном звене (T=0,5с)

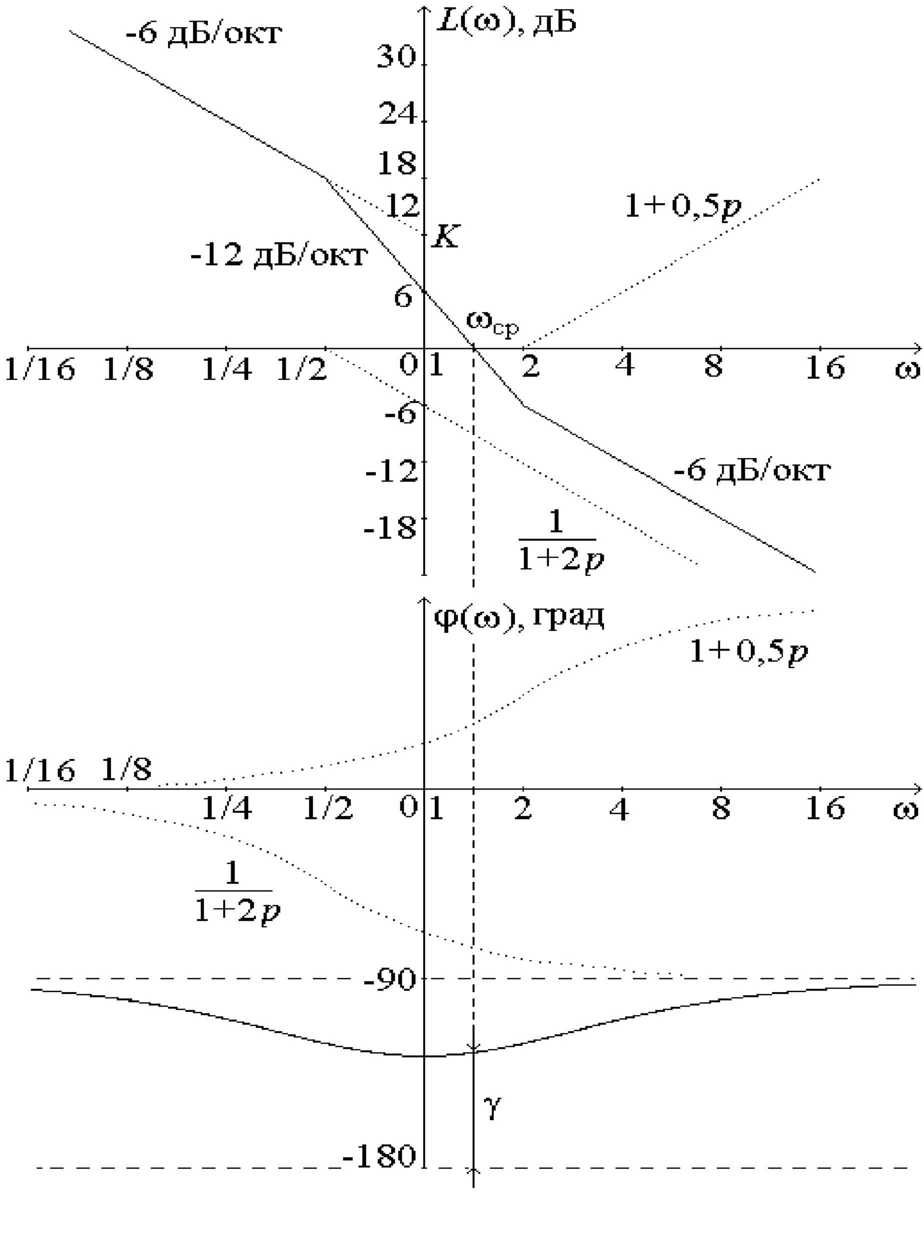
Пример построения ЛХ

$$W_{\mathrm{p}}(p)=\frac{4(1+0{,}5p)}{p(1+2p)}.$$

Коэффициент усиления переводим в дБ:

$4 \rightarrow 20\lg 4 = 20\lg 2^2 \approx 2 \cdot 6 = 12$ дБ

Определяем частоты сопряжения апериодического ($\omega_{c1}=0{,}5$) и форсирующего ($\omega_{c2}=2$) звеньев



L(ω), дБ
-6 дБ/окт
30
24
18
12
1+0,5p
K
-12 дБ/окт
6
ω_{ср}
1/16 1/8 1/4 1/2 0 1 2 4 8 16 ω
-6
-12
-6 дБ/окт
-18
1/(1+2p)
φ(ω), град
1+0,5p
1/16 1/8
1/4 1/2 0 1 2 4 8 16 ω
1/(1+2p)
-90
γ
-180

$$W_{\mathrm{p}}(p)=\frac{4(1+0{,}5p)}{p(1+2p)}.$$

Характерные точки ЛХ:

-коэффициент усиления K,
-частота среза $\omega_{\text{ср}}$,
-запас устойчивости по фазе γ.

Определение показателей качества по ЛХ

1. Устойчивость $$\gamma = 180 - \left|\varphi(\omega_{cp})\right| > 0.$$

2. Качество переходных процессов (степень колебательности, величина перерегулирования, время нарастания)

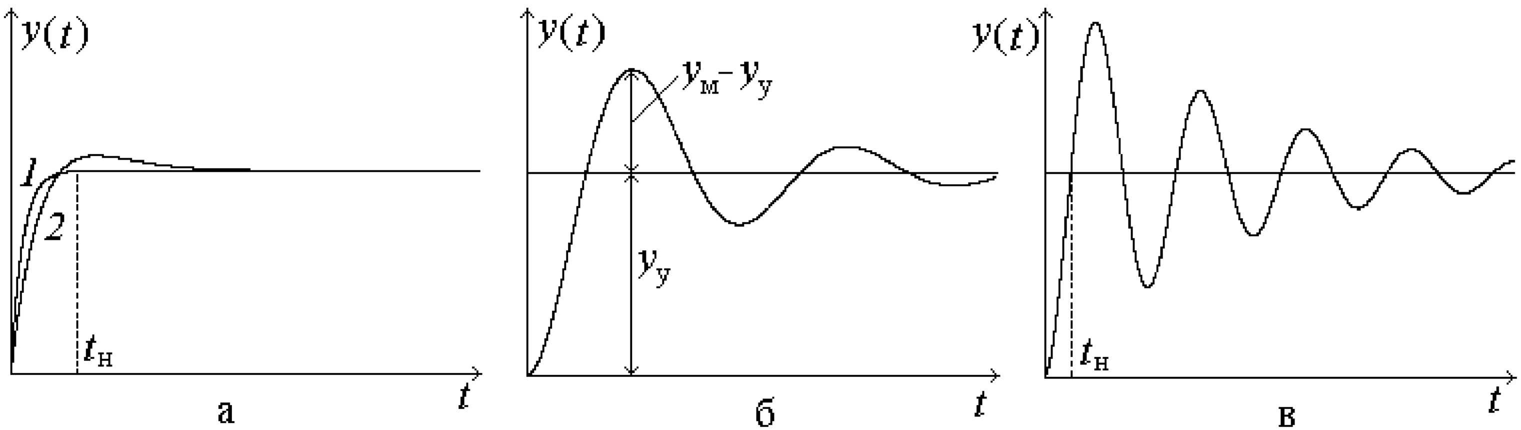
а) степень колебательности:

-*монотонные* (апериодические) или близкие к ним, $\gamma > 60^o$

-*слабоколебательные,* $30^o \le \gamma \le 60^o$

-*сильноколебательные* переходные процессы. $\gamma < 30^o$

Классификация переходных процессов:



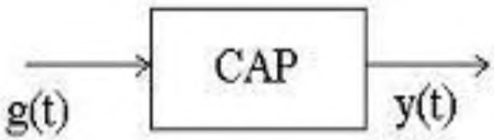
б) величина перерегулирования $$\sigma_П = \frac{y_М - y_У}{y_У} \cdot 100\%.$$

$$\hat{\sigma}_П = \begin{cases} 73-\gamma, & \gamma \le 73^o, \\ 0, & \gamma > 73^o. \end{cases}$$

в) время нарастания переходного процесса $$\hat{t}_Н \approx \frac{\pi}{\omega_{ср}}.$$

3. Описание и анализ САР во временной области

3.1. Метод пространства состояний



$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 g(t),$$

$$y(t_0), \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0}, \quad \ldots, \quad \left.\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0}$$

$$y_1(t) = y(t),$$

$$y_2(t) = \frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt},$$

$$y_3(t) = \frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_n(t) = \frac{dy_{n-1}(t)}{dt} = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}.$$

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = -a_0 y_1(t) - a_1 y_2(t) - a_2 y_3(t) - \ldots - a_{n-1} y_n(t) + b_0 g(t).$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = FY(t) + Kg(t), \qquad Y(t_0),$$

$$Y(t) = [y_1(t) \;\; y_2(t) \;\; \dots \;\; y_n(t)]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = HY(t). \qquad H =$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

$$= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

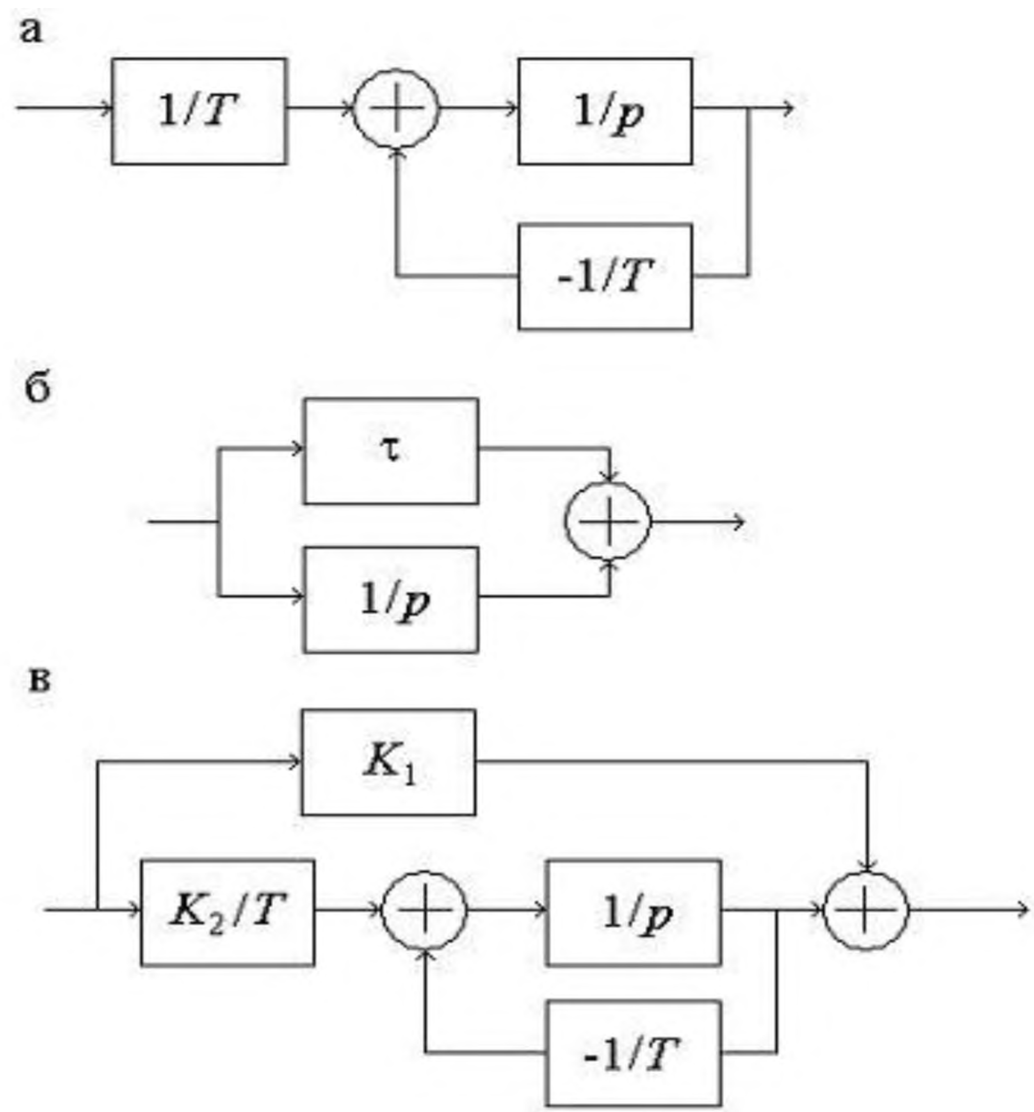
3.2. Описание САР в пространстве состояний по передаточной функции

Составляем структурную схему, содержащую только интегрирующие и усилительные звенья.
Эквивалентные структурные преобразования:

а) $$\frac{1}{1+pT}$$

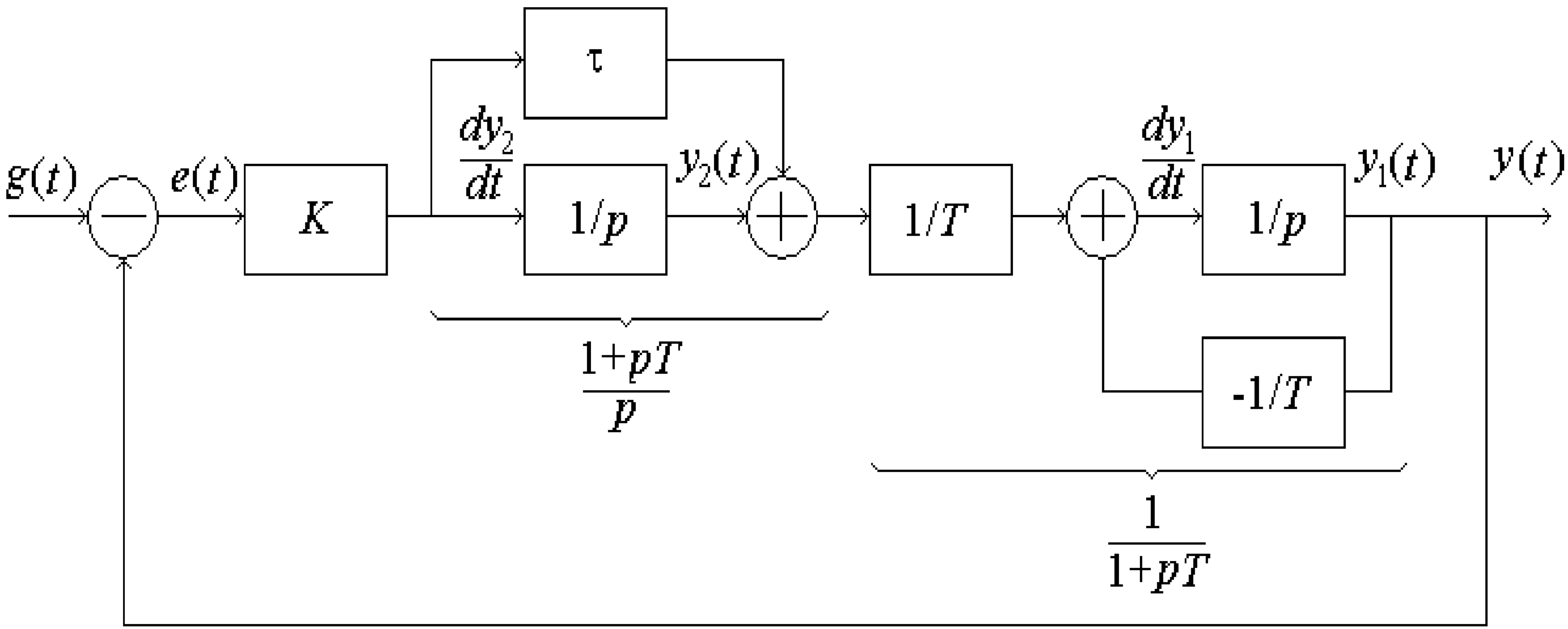
б) $$\frac{1+p\tau}{p}$$

в) $$\frac{1+p\tau}{1+pT}$$



Пример:

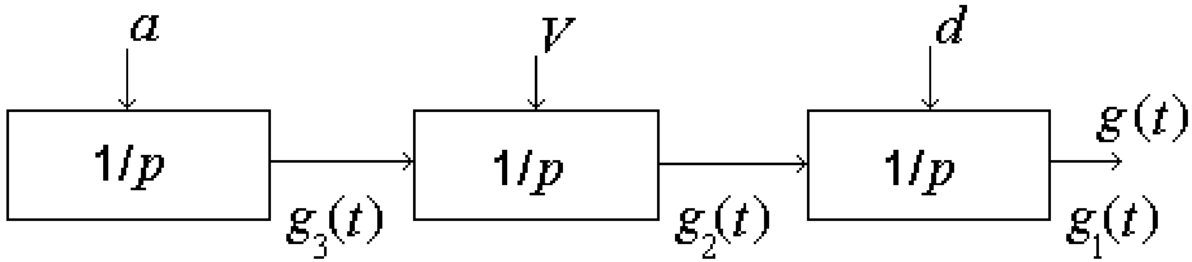
$$W_{\text{p}}(p) = \frac{K(1+p\tau)}{p(1+pT)}$$



$$\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T} - \dfrac{K\tau}{T} & \dfrac{1}{T} \\ -K & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{K\tau}{T} \\ K \end{bmatrix} g(t). \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

3.2. Формирующий фильтр

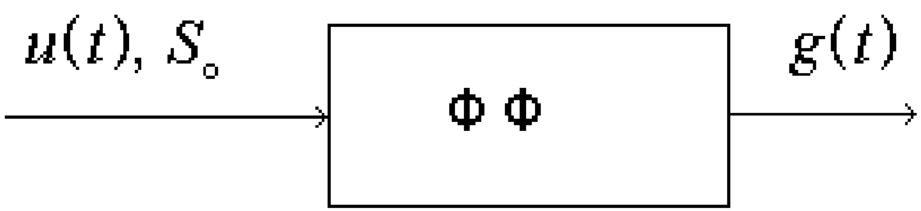
а) регулярные воздействия



$$\frac{dG(t)}{dt} = AG(t) \qquad G(t_0) \qquad g(t) = HG(t)$$

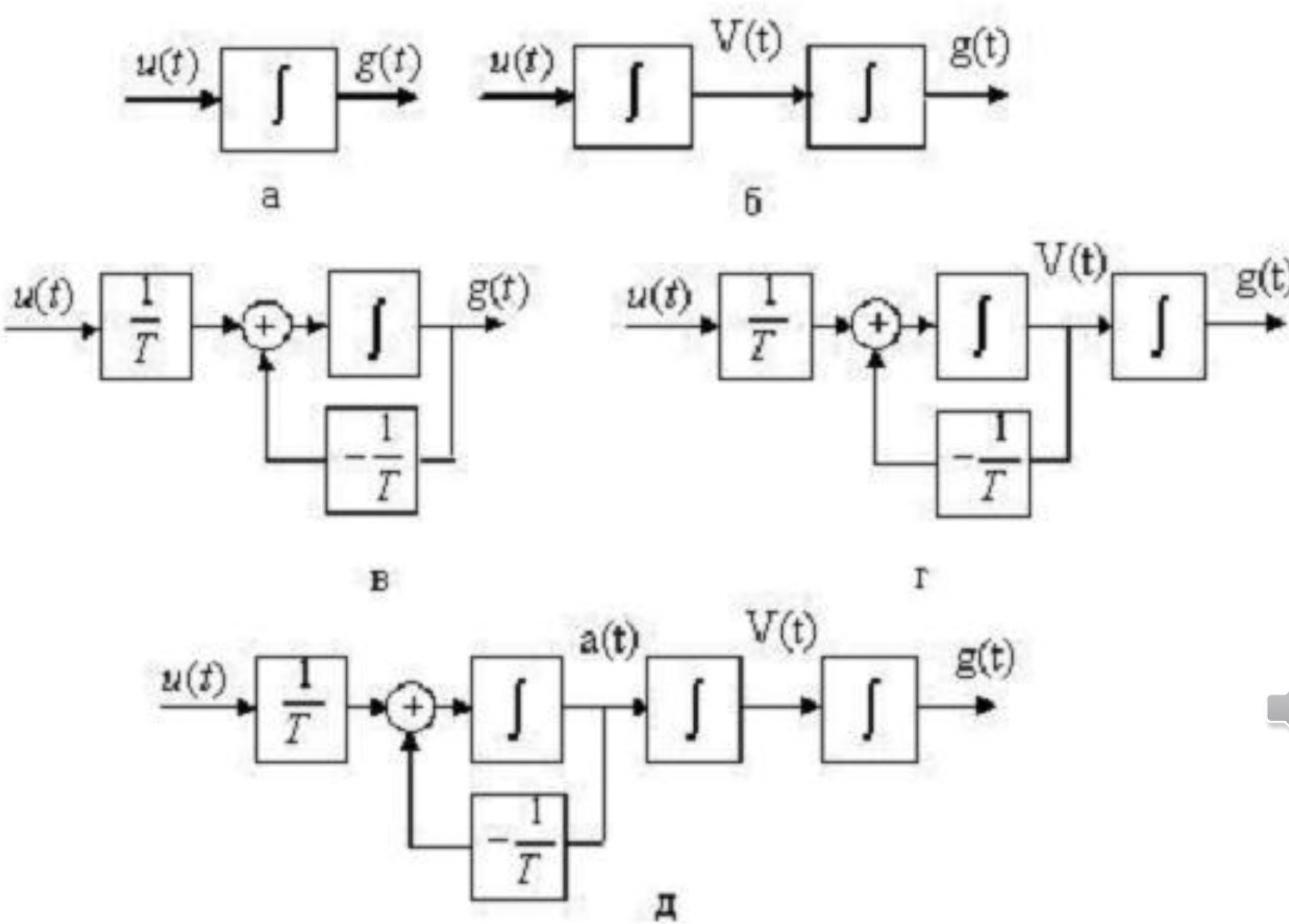
$$G(t) = \left[g_1(t)\; g_2(t)\; g_3(t)\right]^T \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

б) случайные воздействия



$$\frac{dG(t)}{dt} = AG(t) + Bu(t), \quad G(t_0),$$

Типовые случайные воздействия



3.3. Задача идеального наблюдателя

$$\frac{dG(t)}{dt} = AG(t), \quad G(t_0) \neq 0,$$
$$g(t) = HG(t),$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} g(t) & \dfrac{dg(t)}{dt} & \dots & \dfrac{d^{n-1}g(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T$$

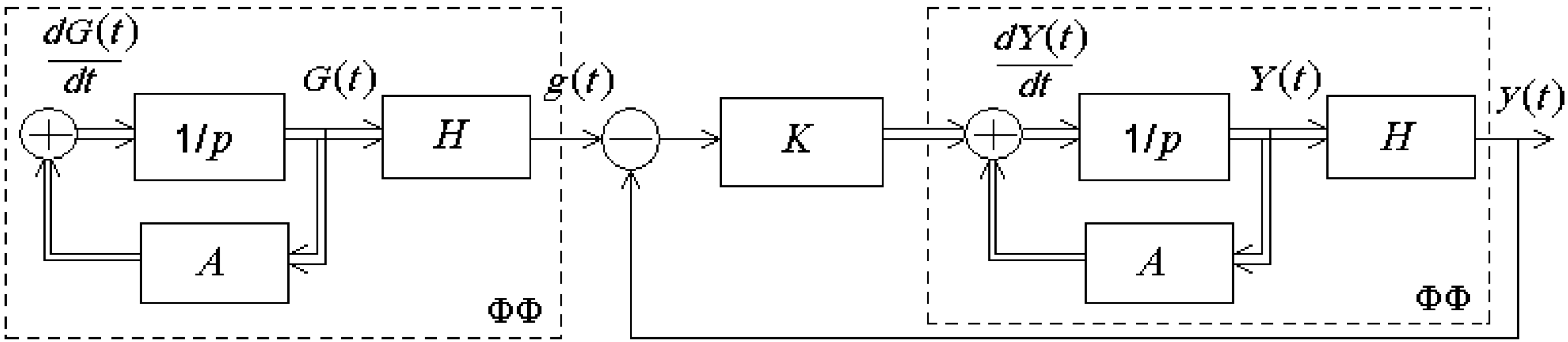
$$\frac{dY(t)}{dt} = FY(t) + Kg(t), \quad Y(t_0),$$
$$y(t) = HY(t),$$

$$\begin{cases} G(t) - Y(t) = 0, \\ \dfrac{dG(t)}{dt} - \dfrac{dY(t)}{dt} = 0, \end{cases}$$

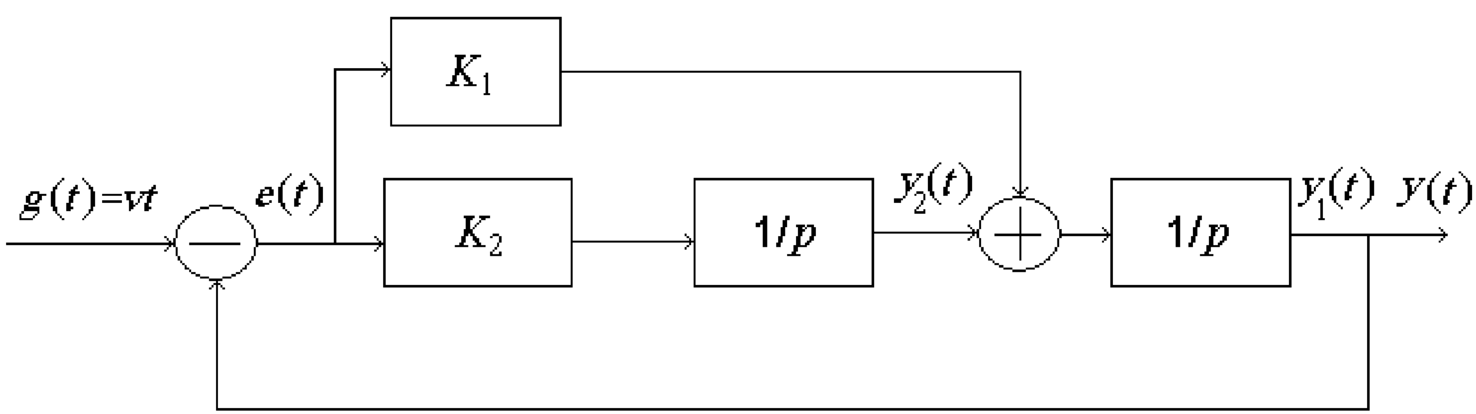
$$\frac{dG(t)}{dt} - \frac{dY(t)}{dt} = 0 = AG(t) - FY(t) - Kg(t) = AG(t) - FY(t) - KHG(t) =$$
$$= (A - KH)G(t) - FY(t).$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = (A - KH)Y(t) - Kg(t) = AY(t) + K\{g(t) - HY(t)\}.$$

Структурная схема формирующего фильтра и согласованной с ним САР:



Структура САР, безошибочно воспроизводящей линейное воздействие (в формирующем фильтре 2 интегратора):



3.4. Решение ВДУ путем перехода от непрерывного к дискретному времени

$$\frac{dY(t)}{dt} = FY(t) + Kg(t), \qquad Y(t_0),$$

$$y(t) = HY(t).$$

$$pY(p) - Y(t_0) = FY(p) + Kg(p),$$

$$Y(p) = (pI - F)^{-1} Y(t_0) + (pI - F)^{-1} Kg(p)$$

$$Y(t) = L^{-1}\{(pI - F)^{-1}\} Y(t_0) + L^{-1}\{(pI - F)^{-1} Kg(p)\}.$$

$$\Phi(t, t_0) = L^{-1}\{(pI - F)^{-1}\}$$

$$Y(t) = \Phi(t, t_0) Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \eta) Kg(\eta) d\eta.$$

1. Переходная матрица

$$\Phi(t,t_0) = \mathrm{e}^{F(t-t_0)} \approx I + F(t-t_0) + F^2 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \ldots + F^l \frac{(t-t_0)^l}{l!} + \ldots$$

$$\Phi(t,t_0)\Big|_{t=t_0} = \mathrm{e}^{F(t-t_0)}\Big|_{t=t_0} = I$$

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{F(t-t_0)} = F\mathrm{e}^{F(t-t_0)} = F\Phi(t,t_0).$$

2. Формальная связь ПФ и ПС (кроме структурной схемы)

$$y(p) = HY(p) = H(pI - F)^{-1}Kg(p).$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = H(pI - F)^{-1}K.$$

Задача: получить разностное уравнение в рекуррентной форме
для анализа и нахождения дискретного эквивалента (реализация)

$$g(\eta) \approx g(t_i), \quad t_i \le \eta < t_{i+1},$$

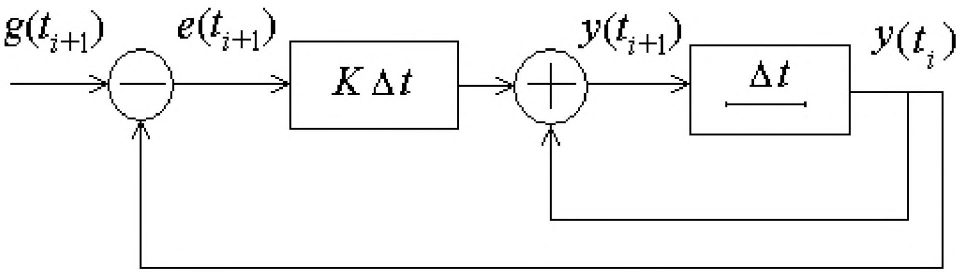
$$Y(t_{i+1}) = (I + F\Delta t)Y(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t_i+1} [I + F(t_{i+1} - \eta]Kg(\eta)d\eta =$$

$$= Y(t_i) + \Delta t[FY(t_i) + Kg(t_i)], \quad Y(t_0), \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

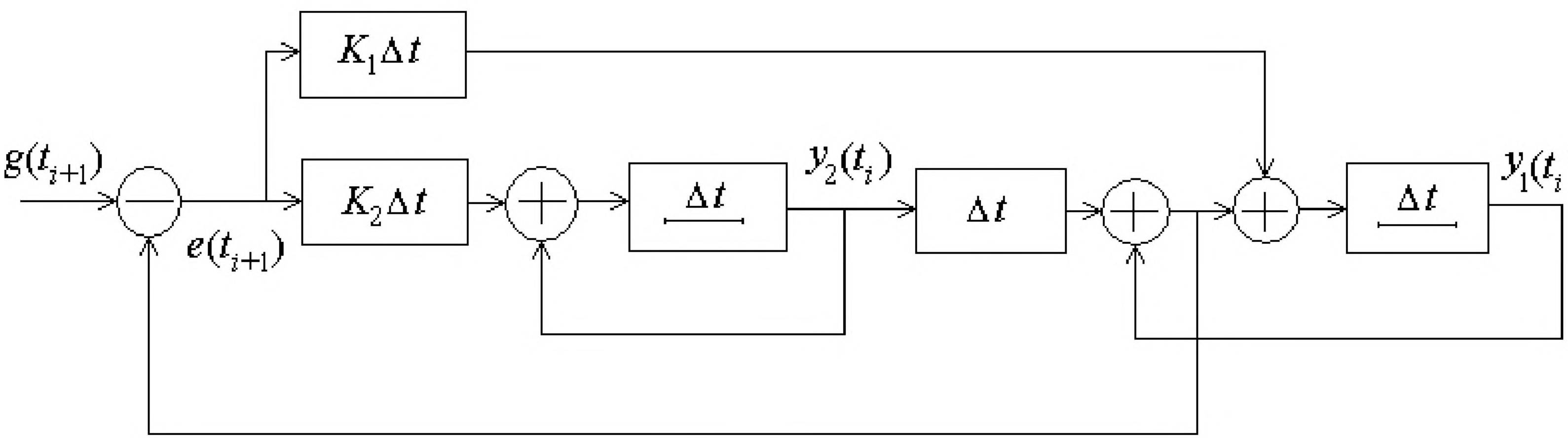
$$\Delta t << t_{\text{н}} \approx \frac{\pi}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{\pi}{2\pi f_{\text{ср}}} = \frac{1}{2f_{\text{ср}}} \approx \frac{1}{2f_{\text{в}}}$$

$$Y(t_{i+1}) = (I + A\Delta t)Y(t_i) + K\Delta t[g(t_{i+1}) - HY(t_i)], \quad Y(t_0), \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

Примеры дискретных САР с одним и двумя интеграторами



а



б

4. Устойчивость линейных систем
4.1. Определение и условия устойчивости линейных систем

Определение: линейная система называется *устойчивой*, если при отсутствии воздействия ($g(t)$=0) и любом начальном условии $Y(t0)$

состояние системы $Y(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0, \qquad y(t_0). \qquad\qquad y(t) = \mathrm{e}^{-a_0(t-t_0)} y(t_0).$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = FY(t), \qquad Y(t_0). \qquad\qquad F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\Lambda Y_0(t)}{dt} = F\Lambda Y_0(t), \qquad \frac{dY_0(t)}{dt} = (\Lambda^{-1}F\Lambda)Y_0(t), \qquad Y_0(t_0) = \Lambda^{-1}Y(t_0).$$

$$Y_0(t) = \mathrm{e}^{(\Lambda^{-1}F\Lambda)t}Y_0(0).$$

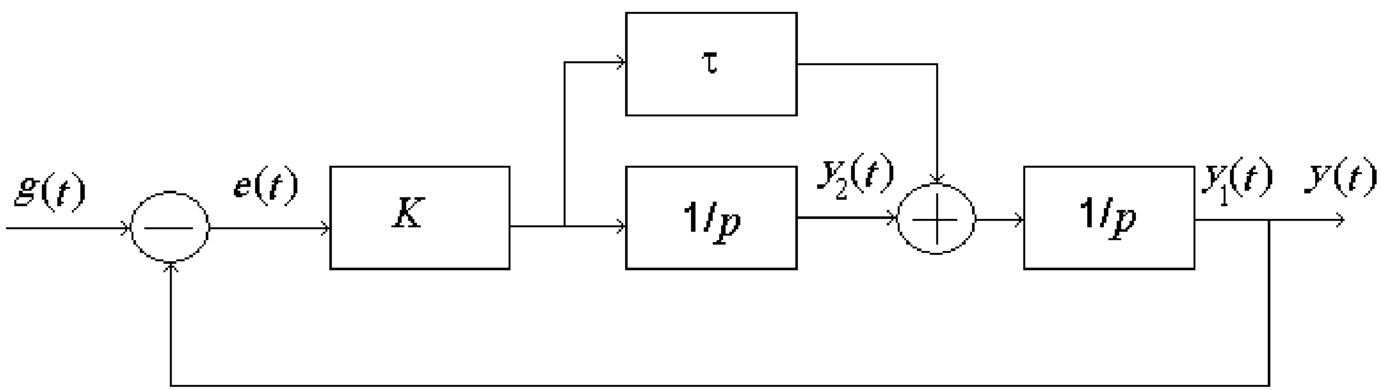
$$(\Lambda^{-1}F\Lambda)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0\\ . & . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

$$Y_0(t)=\Phi_0(t,0)Y_0(0)=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}y_{01}(0)\\ e^{\lambda_2 t}y_{02}(0)\\ \dots\\ e^{\lambda_n t}y_{0n}(0)\end{bmatrix},\qquad Y_0(0)=\begin{bmatrix}y_{01}(0)\\ y_{02}(0)\\ \dots\\ y_{0n}(0)\end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I-F)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0.$$

$$W(p)=\frac{y(p)}{g(p)}=\frac{b_m(p-q_1)\ldots(p-q_m)}{a_n(p-p_1)\ldots(p-p_n)}=H(pI-F)^{-1}K$$

$$(pI-F)^{-1}=\frac{1}{\det(pI-F)}(pI-F)^{*},$$



$$\lambda I-F=\begin{bmatrix}\lambda+K\tau & -1\\ K & \lambda\end{bmatrix}\qquad \det(\lambda I-F)=\lambda^2+K\tau\lambda+K=0.$$

$$\lambda_{1,2}=-\frac{K\tau}{2}\pm\sqrt{\frac{K^2\tau^2}{4}-K}.$$

4.2. Критерии устойчивости

1. Необходимое условие устойчивости

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0.$$

$$a_n (p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_n).$$

$$p^2 + K\tau p + K = 0$$

2. Критерий Рауса-Гурвица

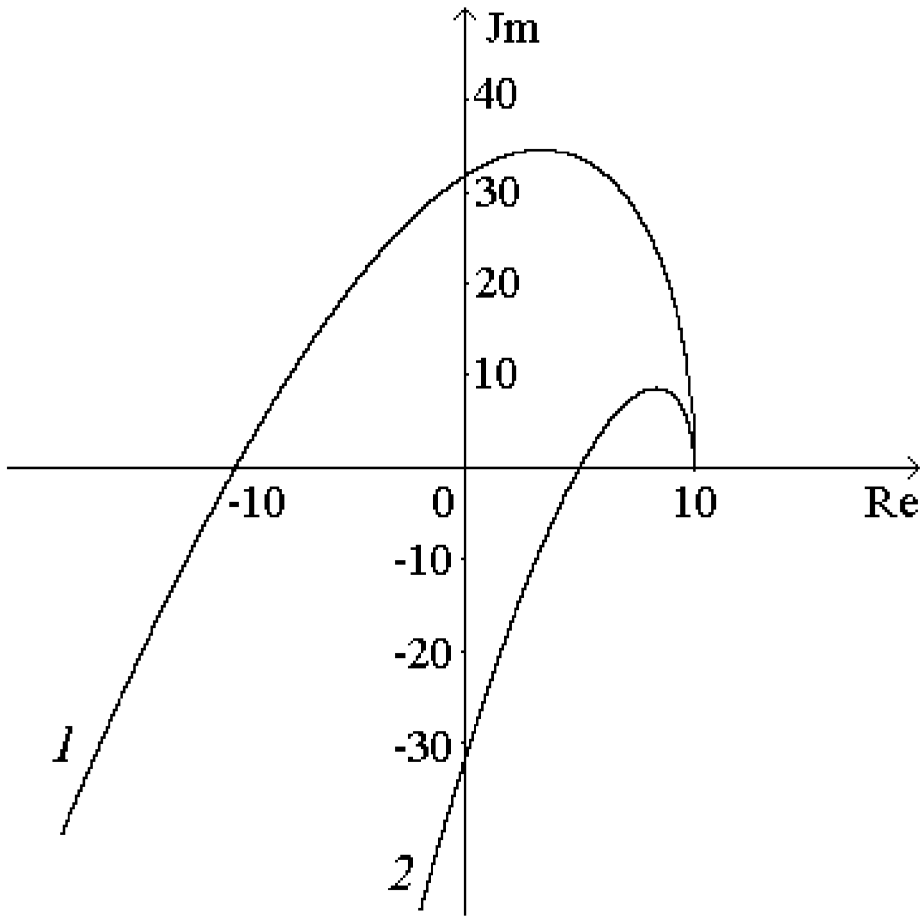
$$p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \alpha_2 p^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

Все *n* определителей Гурвица должны быть положительны.

3. Критерий Михайлова

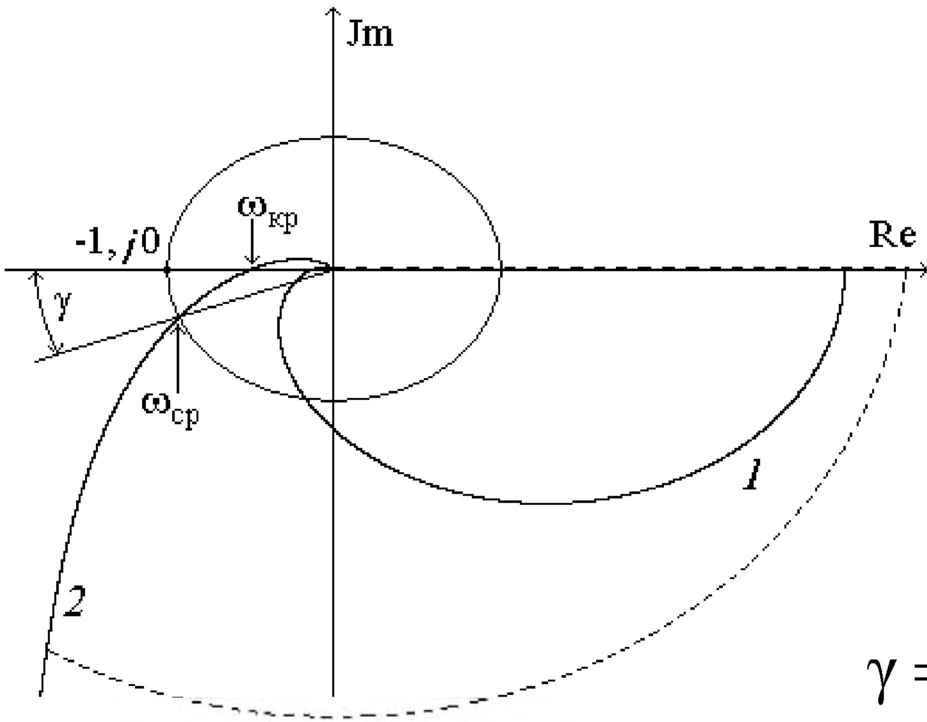
$$a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 j\omega + a_0$$



Формулировка критерия Михайлова: для обеспечения устойчивости системы *n*-го порядка необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова начиналась (при ω=0) на положительной части вещественной оси и, с увеличением частоты ω, огибала начало координат, проходя последовательно *n* квадрантов против часовой стрелки.

4. Критерий Найквиста

$W_{\text{р}}(j\omega)$



Для обеспечения устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста не охватывал точку на комплексной плоскости с координатами (-1, j0).

$$\gamma = 180 - \left|\varphi(\omega_{\text{ср}})\right| > 0$$

$$\alpha = \left|W_{\text{р}}(j\omega_{\text{кр}})\right|^{-1} > 1$$

4.3. Условие устойчивости дискретных систем

$$Y(t_{i+1}) = \Phi Y(t_i), \qquad Y(t_0),$$

$$Y_0(t_{i+1}) = \Phi_0 Y_0(t_i), \qquad Y_0(t_0),$$

$$\det(zI - \Phi) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0.$$

$$Y_0(t_m) = (\Phi_0)^m Y_0(t_0),$$

$$|z_i| < 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

4.4. Алгебраический критерий устойчивости дискретных систем

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad z = \frac{1+w}{1-w},$$

$$a_1 z + a_0 = 0. \qquad \begin{cases} a_1 - a_0 > 0, \\ a_1 + a_0 > 0. \end{cases}$$

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0. \qquad \begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 > 0, \\ a_2 - a_1 + a_0 > 0, \\ a_2 - a_0 > 0. \end{cases}$$

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \qquad \begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 > 0, \\ a_3 - a_2 + a_1 - a_0 > 0, \\ a_3^2 - a_0^2 + a_0 a_2 - a_1 a_3 > 0, \\ 3(a_3 + a_0) - a_2 - a_0 > 0. \end{cases}$$

5. Коррекция систем управления

Цель коррекции:

- обеспечение устойчивости,
-улучшение качества переходного процесса (снижение степени колебательности, величины перерегулирования и времени нарастания переходного процесса),
- достижение лучшей помехоустойчивости.

методы коррекции:

- *последовательный метод коррекции*,
- *параллельный метод коррекции*,
- *метод коррекции с включением звена в цепи обратной связи*.

1. Последовательный метод коррекции

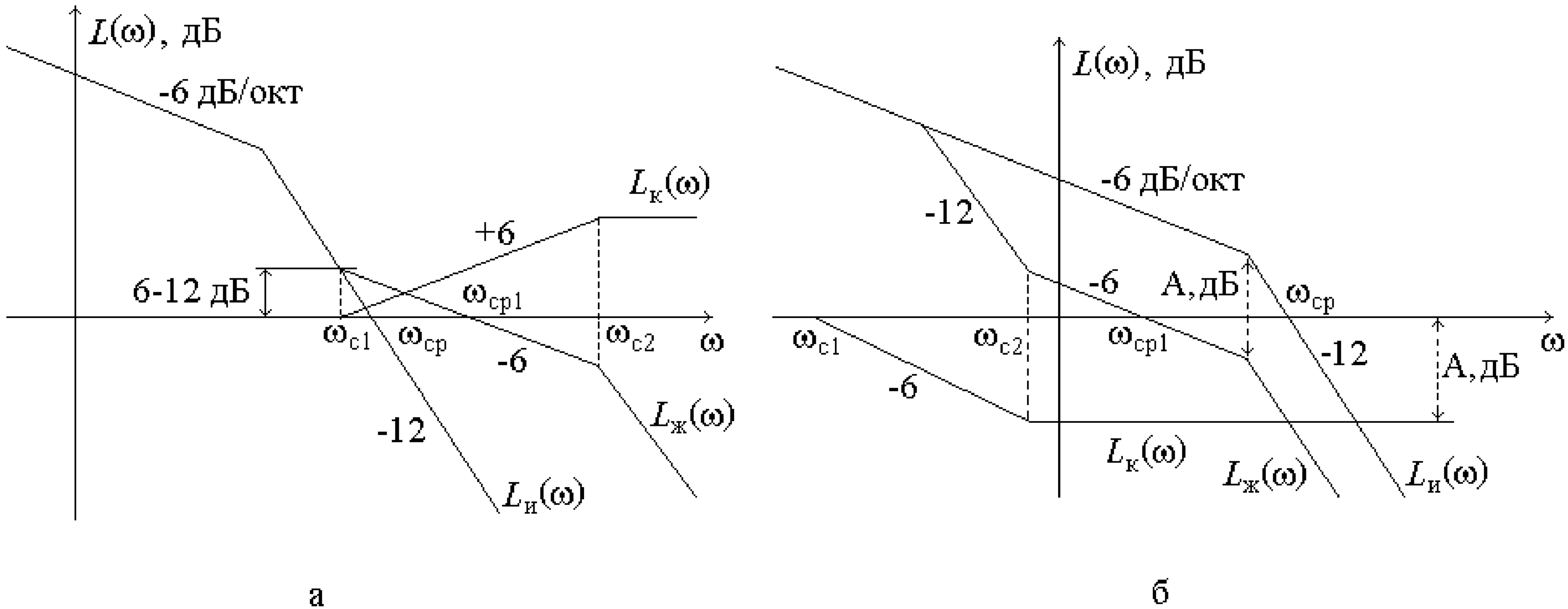
$$W_{\text{к}}(p) = \frac{W_{\text{ж}}(p)}{W_{\text{и}}(p)}. \qquad L_{\text{к}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{и}}(\omega).$$

Ограничения:

1) низкочастотные асимптоты Lи(ω) и Lж(ω) должны совпадать (коррекция не должна оказывать влияние на точностные характеристики СУ, поэтому коэффициент усиления системы и ее порядок астатизма при коррекции, как правило, не изменяют);

2) корректирующий элемент должен быть физически реализуем

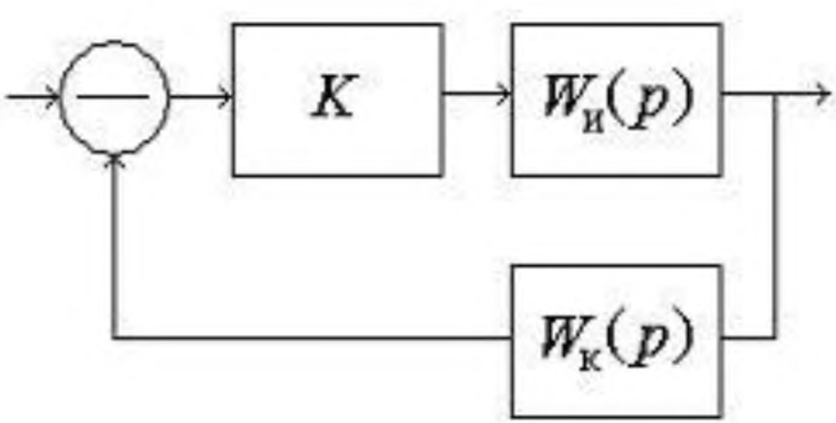
Приемы последовательной коррекции



2. Параллельный метод коррекции

$$W_{\text{к}2}(p) = W_{\text{и}}(p)[W_{\text{к}1}(p) - 1]$$

3. Коррекция с помощью местной обратной связи



$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{KW_{\text{и}}(p)}{1 + KW_{\text{и}}(p)W_{\text{к}}(p)}.$$

$$\left|KW_{\text{и}}(p)W_{\text{к}}(p)\right| >> 1.$$

$$W_{\text{ж}}(p) \approx \frac{1}{W_{\text{к}}(p)},$$

Дополнительные достоинства:
1) уменьшается инерционность элементов, входящих в состав исходной системы;
2) обеспечивается линеаризация нелинейных элементов, входящих в состав исходной системы;
3) выполняется стабилизация параметров ПФ Wж(p) в случае нестабильности параметров ПФ Wи(p).

6. Точность САР

6.1. Точность при типовых регулярных воздействиях

$$g(t) = d \qquad G(p) = \frac{d}{p}$$

$$g(t) = Vt \qquad G(p) = \frac{V}{p^2}$$

$$g(t) = \frac{at^2}{2} \qquad G(p) = \frac{a}{p^3}$$

$$g(t) = \frac{A_s t^s}{s!}, \quad s = 0,1,2,\ldots \qquad G(p) = \frac{A_s}{p^{s+1}}$$

$$W_{\text{р}}(p)=\frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0}{p^r\,(a_n p^{n-r}+a_{n-1}p^{n-r-1}+\ldots+a_r)}=$$

$$=\frac{K}{p^r}\,\frac{\beta_m p^m+\beta_{m-1}p^{m-1}+\ldots+1}{(\alpha_n p^{n-r}+\alpha_{n-1}p^{n-r-1}+\ldots+1)}=\frac{K}{p^r}\,\frac{B(p)}{A(p)}$$

$$E(p)=G(p)-Y(p)=G(p)\frac{1}{1+W_{\text{р}}(p)}$$

$$e_{\text{у}}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{p\to 0}pE(p)=\lim_{p\to 0}\frac{A_s}{p^s}\,\frac{1}{1+\dfrac{K}{p^r}\dfrac{B(p)}{A(p)}}$$

$$r > s \qquad e_{\text{y}} = 0$$

$$r < s \qquad e_{\text{y}} \to \infty$$

$$r = s \qquad e_{\text{y}} = \begin{cases} A_s / K, & r > 0, \\ A_s / (K+1), & r = 0. \end{cases}$$

		r=	r=	r=	Nифф
g(t)	s	0	1	2	
d	0	d/(K+1)	0	0	1
vt	1	oo	V/K	0	2
att/2	2	oo	oo	a/K	3

6.2.Коэффициентный метод определения ошибок

$$E(p) = G(p)W_e(p)$$

$$W_e(p) = W_e(p)\Big|_{p=0} + pW_e^{(1)}(p)\Big|_{p=0} + \ldots + \frac{p^r}{r!}W^{(r)}{}_e(p)\Big|_{p=0}$$

$$C_i = W_e^{(i)} = \left.\frac{d^i W_e(p)}{dp^i}\right|_{p=0}$$

$$E(p) = C_0 G(p) + C_1 pG(p) + \ldots + C_r \frac{p^r}{r!}G(p)$$

$$e_{\text{у}}(t) = C_0 g(t) + C_1 g^{(1)}(t) + \ldots + \frac{C_r}{r!}g^{(r)}(t) \qquad g^{(i)}(t) = \frac{d^i g(t)}{dt^i}$$

$$W_p(p) = K \qquad W_e(p) = \frac{1}{1+K} \qquad e_{\text{у}}(t) = \frac{1}{1+K} g(t)$$

Содержание домашнего задания: студенту выдается передаточная функция системы радиоавтоматики; требуется описать систему в пространстве состояний, построить логарифмические характеристики, оценить устойчивость и качество переходных процессов, а также точность системы, скорректировать систему, построить годограф (АФХ) передаточной функции исходной и скорректированной систем.

7. Анализ помехоустойчивости САР

7.1. Случайные процессы и их характеристики

Случайные ошибки систем радиоавтоматики являются случайными функциями времени, и характеризуются вероятностными и корреляционными характеристиками

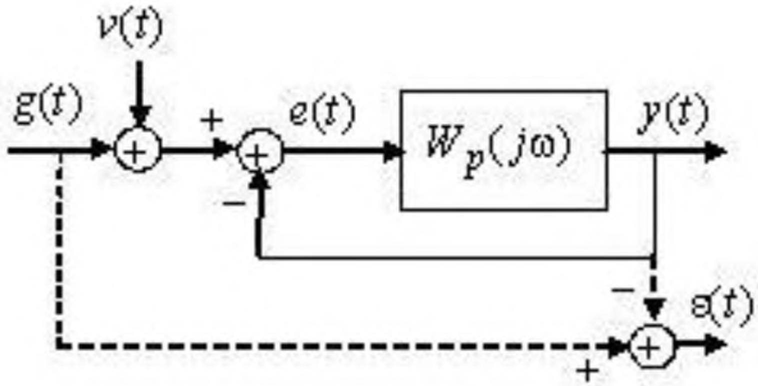
Вероятностная характеристика случайной величины определяется плотностью распределения вероятностей

В качестве корреляционной характеристики стационарного случайного процесса используются автокорреляционная функция (временная область) или спектральная плотность мощности (частотная область).

$$R_x(\tau)\Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega = \sigma_x^2$$

$$P(t) = E\left\{X(t)X^T(t)\right\} = \begin{bmatrix} \overline{x_1^2(t)} & \overline{x_1(t)\ \ x_2(t)} & \dots & \overline{x_1(t)\ \ x_n(t)} \\ \overline{x_1(t)x_2(t)} & \overline{x_2^2(t)} & \dots & \overline{x_2(t)\ \ x_n(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{x_n(t)x_1(t)} & \overline{x_n(t)\ \ x_2(t)} & \dots & \overline{x_n^2(t)} \end{bmatrix}$$

7.2. Анализ помехоустойчивости САР в частотной области



$$S_п(\omega) = S_п(0) = S_п$$

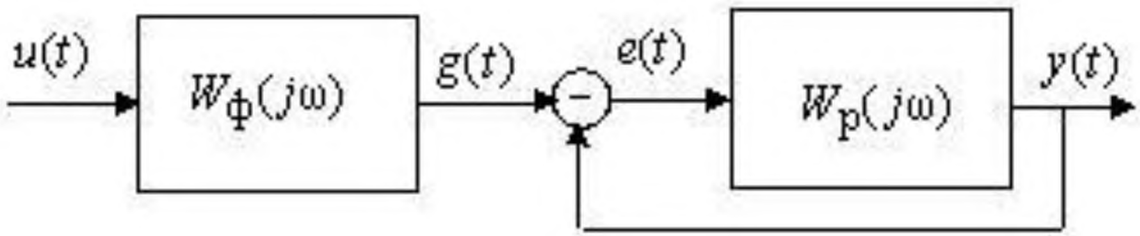
$$S_y(\omega) = S_п \left|W(j\omega)\right|^2$$

$$\sigma^2_{фл} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} S_п \int_{-\infty}^{\infty} \left|W(j\omega)\right|^2 d\omega = S_п f_{эф}$$

$$f_{эф} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|W(j\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{C(j\omega)}{D(j\omega)}\right|^2 d\omega$$

$$I_1 = \frac{c_0^2}{2d_0 d_1} \qquad I_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2}$$

7.3. Точность при случайном полезном воздействии



$$e(t) = g(t) - y(t)$$

$$S_g(\omega) = S_0 \left| W_ф(j\omega) \right|^2$$

$$S_e(\omega) = S_g(\omega) \left| W_e(j\omega) \right|^2 = S_g(\omega) \left| \frac{1}{1 + W_р(j\omega)} \right|^2$$

$$\sigma_д^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) \left| \frac{1}{1 + W_р(j\omega)} \right|^2 d\omega$$

$$\sigma_д^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0}{\omega^2} \left| 1 - \frac{K_v}{K_v + j\omega} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0}{K_v^2 + \omega^2} d\omega = \frac{S_0}{2K_v}$$

7.4. Анализ помехоустойчивости САР во временной области

$$\frac{d}{dt}Y(t) = FY(t) + K[g(t) + v(t)], \quad Y(0) = Y_0$$

$$\frac{d}{dt}X(t) = FX(t) + Kv(t), \quad X_0$$

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \eta)Kv(\eta)d\eta$$

$$P(t) = E\{X(t)X^T(t)\} =$$

$$= \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \eta)KS_n\delta(\eta - \lambda)K^T\Phi^T(t, \lambda)d\eta d\lambda$$

$$P(t) = \Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\eta)KS_nK^T\Phi^T(t,\eta)d\eta$$

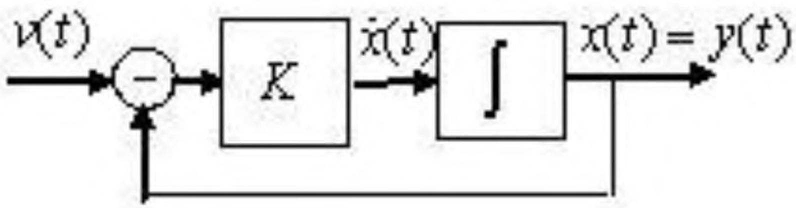
$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi^T(t,t_0) +$$

$$+\Phi(t,t_0)P(t_0)\frac{d}{dt}\Phi^T(t,t_0) + \Phi(t,t)KS_nK^T\Phi^T(t,t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\Phi(t,\eta)KS_nK^T\Phi^T(t,\eta)d\eta + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\eta)KS_nK^T\frac{d}{dt}\Phi^T(t,\eta)d\eta$$

$$\Phi(t,t) = I \qquad\qquad \frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = F\Phi(t,t_0)$$

$$\frac{d}{dt}P(t) = FP(t) + P(t)F^T + KS_n K^T, \quad P(0) = P_0$$



$$\frac{d}{dt}x(t) = -K_v x(t) + K_v v(t)$$

$$\dot{P}(t) = -2K_v P(t) + K_v^2 S_{\text{П}}, \quad P_0$$

$$\sigma_{\text{ф}}^2 = P(t) = e^{-2K_v t}P_0 + \int_0^t e^{-2K_v(t-\tau)}K_v^2 S_{\text{П}}\,d\tau =$$

$$= e^{-2K_v t}P_0 + K_v^2 S_{\text{П}}\left(\frac{1}{2K_v} - \frac{e^{-2K_v t}}{2K_v}\right)$$

$$\sigma_{\text{ф}}^2 = \frac{K_v S_{\text{П}}}{2}$$

7.5. Линейное дисперсионное уравнение при полезном воздействии

$$\frac{d}{dt}G(t) = AG(t) + Bu(t), G(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}Y(t) = FY(t) + K[g(t) + v(t)], \quad Y(0) = Y_0$$

$$E(t) = G(t) - Y(t) \qquad \dot{E}(t) = [A - KH]G(t) - FY(t) + Bu(t) - Kv(t)$$

$$\overline{E(t)} = 0 \qquad F = A - KH$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = (A - KH)E(t) + Bu(t) - Kv(t)$$

$$\frac{d}{dt}P(t) = (A - KH)P(t) + P(t)(A - KH)^T + BS_0B^T + KS_nK^T$$

7.6. Дисперсионные уравнения для дискретных САР

1. g(t) – регулярное воздействие

Разностное уравнение для центрированной случайной составляющей вектора состояния САР:

$$X(i+1) = \Phi X(i) + Kv(i+1), \quad X(0) = 0$$

$$P(i) = E\{X(i)X^T(i)\} \qquad P(i+1) = \Phi P(i-1)\Phi^T + KRK^T$$

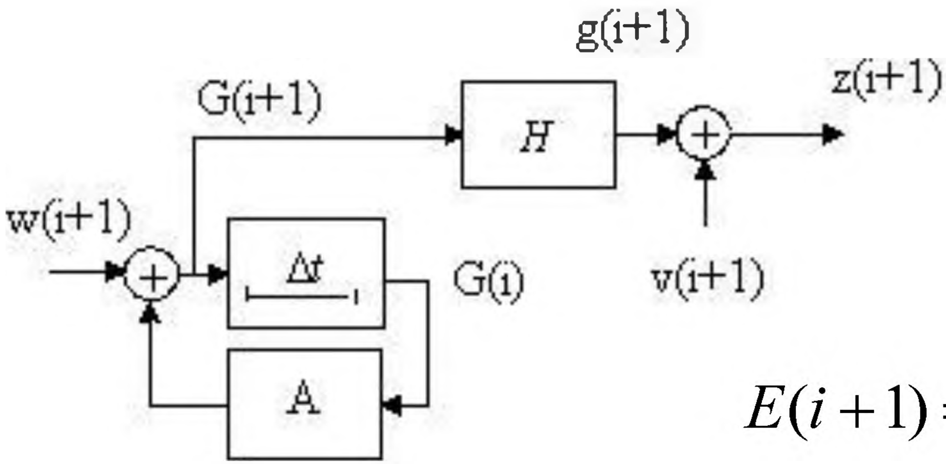
$$x(i+1) = x(i) + K\{v(i+1) - x(i-1)\} =$$

$$= (1-K)x(i) + K\{v(i+1)$$

$$p(i+1) = (1-K)^2 p(i) + K^2\sigma^2 \quad \sigma^2 = R$$

$$i \to \infty \qquad p = (1-K)^2 p + K^2\sigma^2 \qquad p = \frac{\sigma^2 K}{(2-K)}$$

2. g(t) – случайное воздействие



$$G(i+1) = AG(i) + w(i+1)$$

$$z(i+1) = HG(i+1) + v(i+1)$$

$$Y(i+1) = FY(i) + Kz(i+1)$$

$$E(i+1) = G(i+1) - Y(i+1) =$$

$$= (A - KHA)G(i) - FY(i) + (I - KH)w(i+1)) - Kv(i+1)$$

$$F = (I - KH)A$$

Уравнение согласованной дискретной САР:

$$Y(i+1) = \Phi Y(i) + K\{z(i+1) - HAY(i)\}, \;\; Y(0) = 0$$

$$E(i+1) = (I - KH)AE(i) + (I - KH)w(i+1) - Kv(i+1)$$

$$P(i+1) = \overline{E(i+1)E^T(i+1)} = (I - KH)(AP(i)A^T + Q_w)(I - KH)^T + KRK^T$$

$Y(i)$ - оценка фильтрации $\qquad Y^{-}(i) = AY(i-1) -$ оценка экстраполяции

$E(i)$ - ошибка фильтрации $\qquad E^{-}(i) = G(i) - Y^{-}(i) -$ ошибка экстраполяции

$P(i) = \overline{E(i)E^{T}(i)}$ - кор.м.ош.фильтрации

$P^{-}(i) = \overline{E^{-}(i)(E^{-})^{T}(i)}$ - кор.м.ош.экстраполяции

Дисперсионные уравнения согласованной дискретной САР:

$$P^{-}(i+1) = AP(i)A^{T} + Q_{w}$$

$$P(i+1) = (I - KH)P^{-}(i+1)(I - KH)^{T} + KRK^{T}, \quad P(0)$$

Пример. Фильтрация дискретного винеровского процеса с помощью дискретной САР 1-го порядка астатизма

Воздействие: $$g(i+1) = g(i) + w(i+1),\ g(0) = 0$$

$$z(i+1) = g(i+1) + v(i+1)$$

САР: $$y(i+1) = y(i) + k\{z(i+1) - y(i)\}$$

$$H = A = 1 \qquad Q_w = \sigma_q^2 \qquad R = \sigma_r^2 \qquad K = k$$

$$p^-(i+1) = p(i) + \sigma_q^2$$

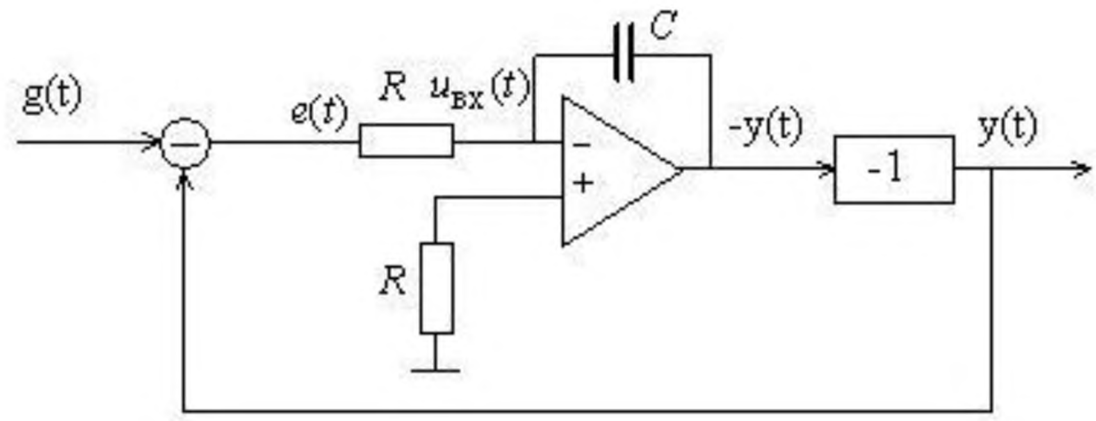
$$p(i+1) = (1-k)^2 p^-(i+1) + k^2\sigma_r^2$$

$$i \to \infty \qquad p = \frac{(1-k)^2\sigma_q^2 + k^2\sigma_r^2}{k(2-k)} \qquad p^- = \frac{\sigma_q^2 + k^2\sigma_r^2}{k(2-k)}$$

8. Устройства радиоавтоматики

8.1. Статические и астатические системы

1. САР с электронным интегратором



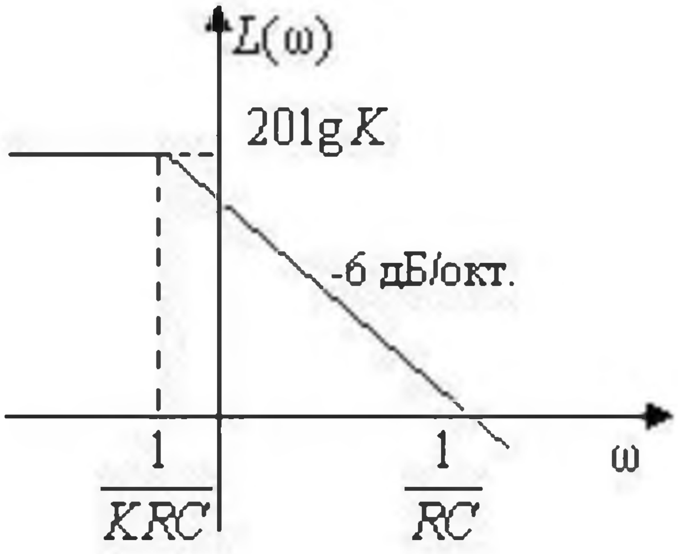
$$i_{вх} = 0$$

$$K \gg 1$$

$$\frac{-y(p) - u_{вх}(p)}{1/pC} = \frac{u_{вх}(p) - e(p)}{R}$$

$$-y(p) = -Ku_{вх}$$

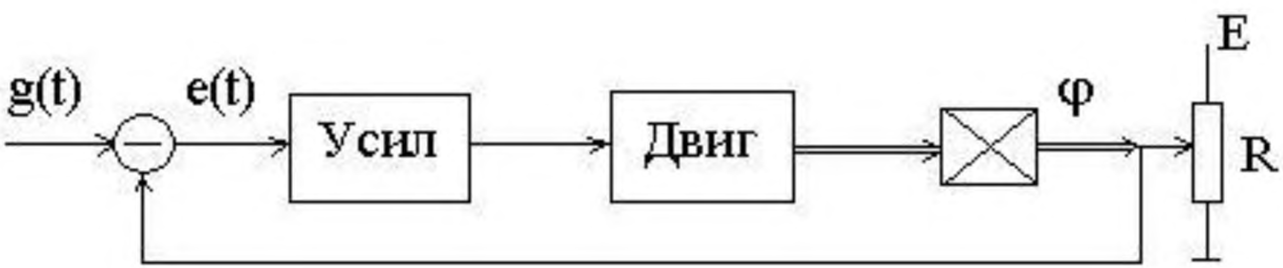
$$W_{р}(p) = \frac{y(p)}{e(p)} \approx \frac{K}{1 + pKRC}, \quad r = 0.$$



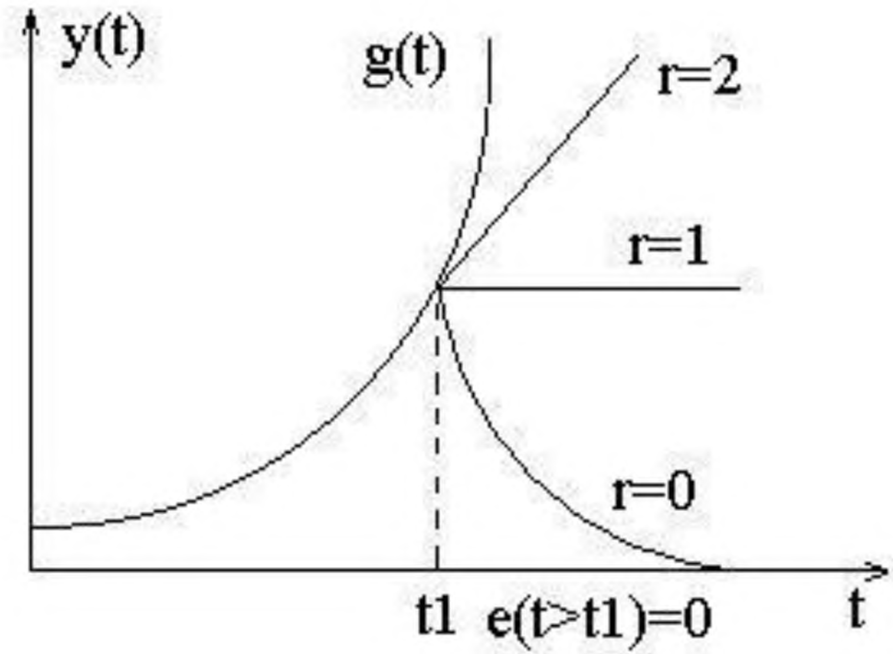
$$W_{\text{p}}(p) \approx \frac{1}{pRC}, \qquad \omega > 1/KRC.$$

$$e = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$$

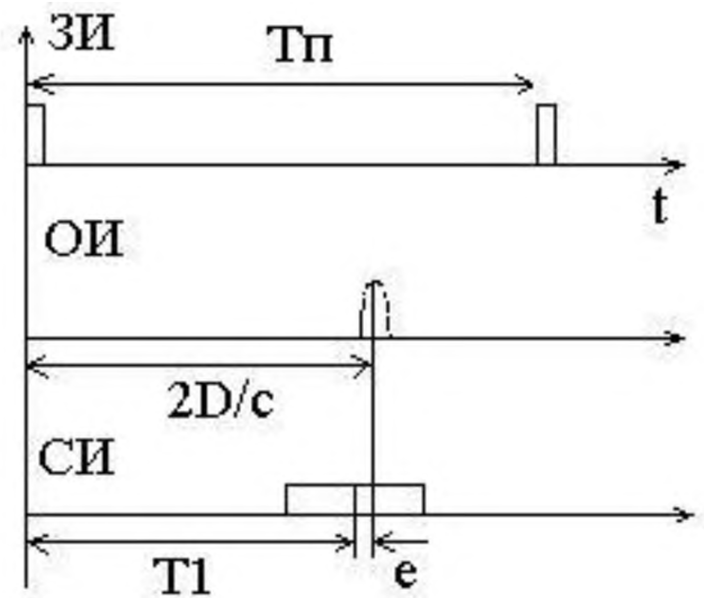
2. Автоматический потенциометр $\quad W_{\text{p}}(p) = \dfrac{K}{p}, \quad K = K_{ус} K_{дв} K_{ред} K_{п}$



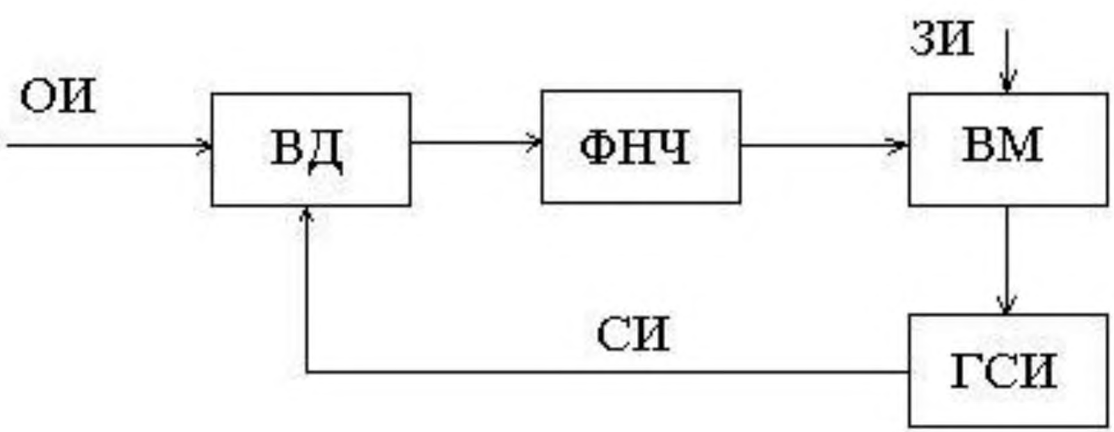
Память по положению, по скорости, по ускорению, …



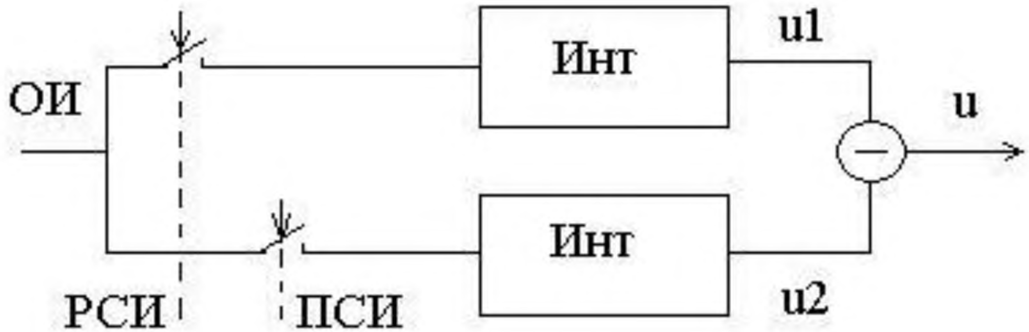
8.2. Следящий измеритель дальности (автодальномер)



- импульсные помехи
- пропадание сигнала
- фильтрация

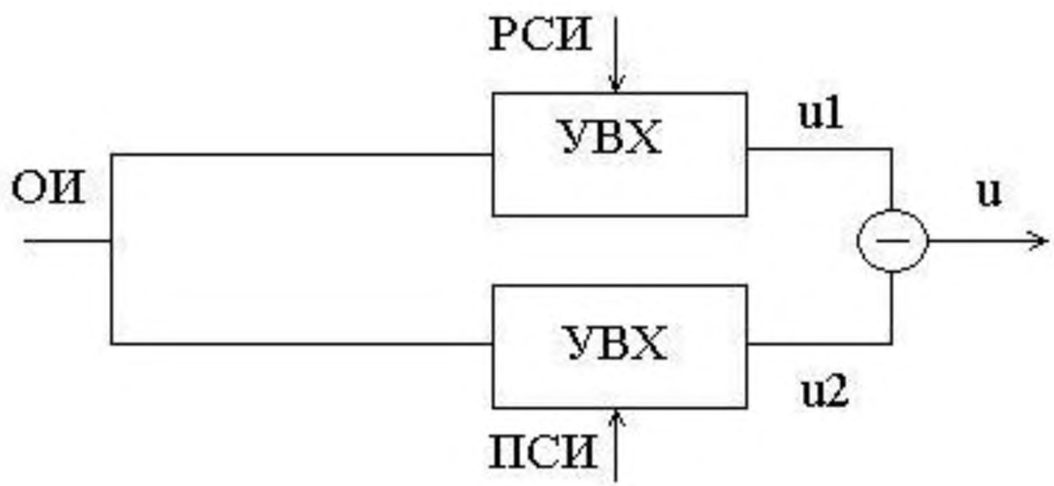


ВД с 2-мя широкими селекторными импульсами



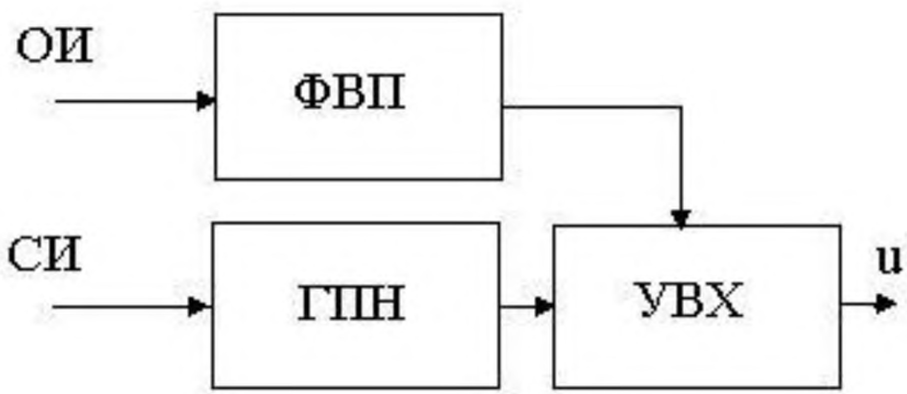
$$K_{\text{Д}}/(1+pT_{\text{Д}})$$

ВД с 2-мя узкими селекторными импульсами

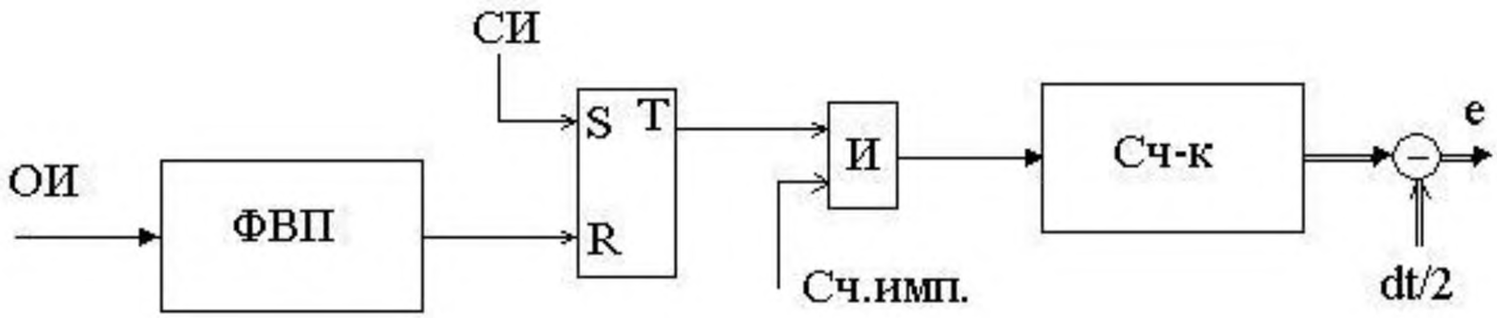


Фиксатор временного положения ответного импульса

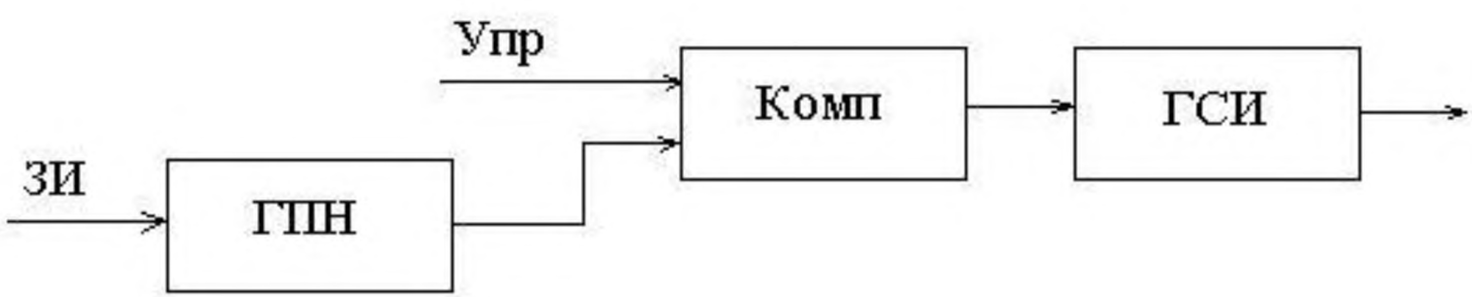
Аналоговый ВД с ФВП ОИ



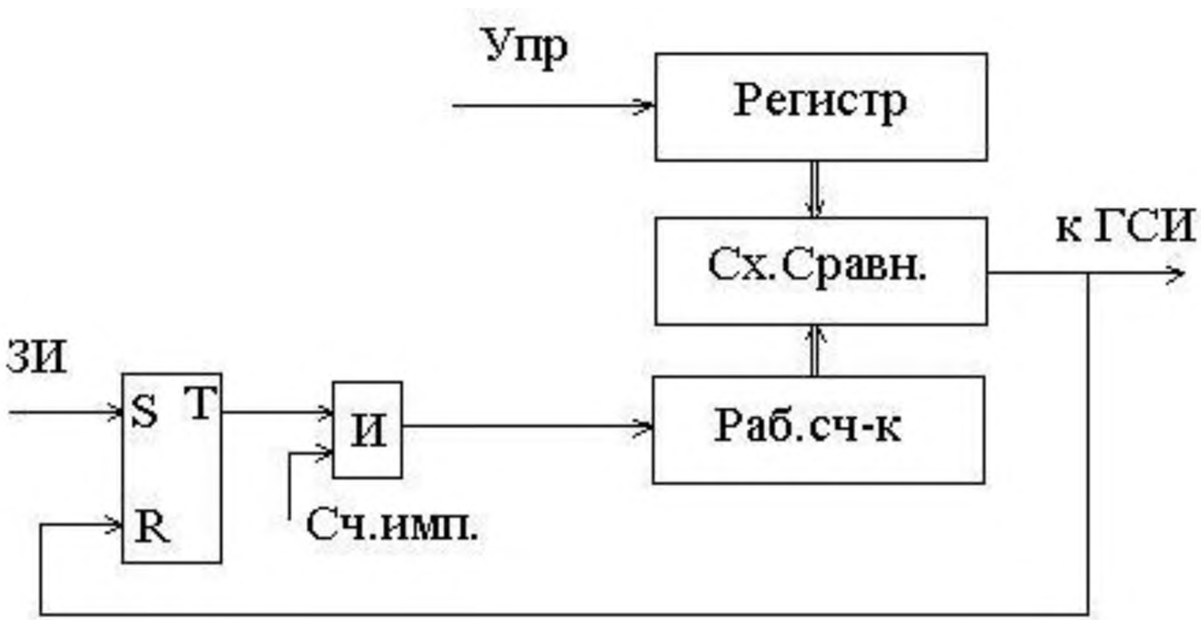
Цифровой ВД с ФВП



Аналоговый ВМ

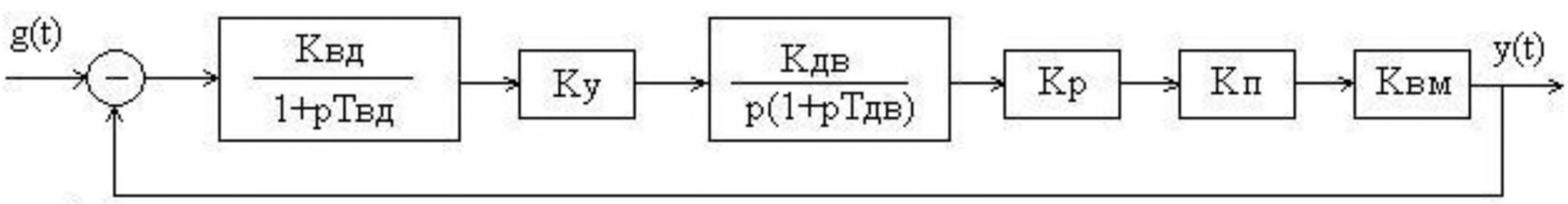


Цифровой ВМ

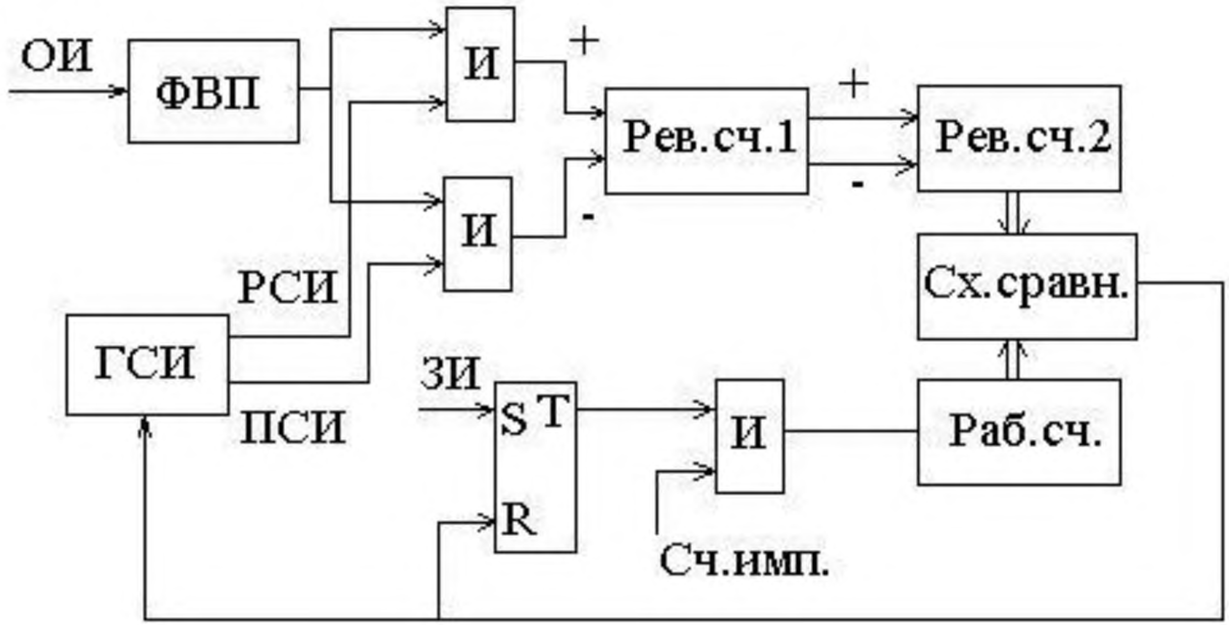


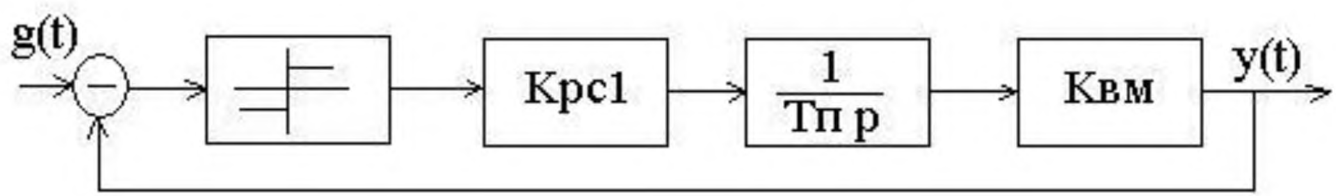
Автодальномер с двигателем

Структурная схема эквивалентной непрерывной системы



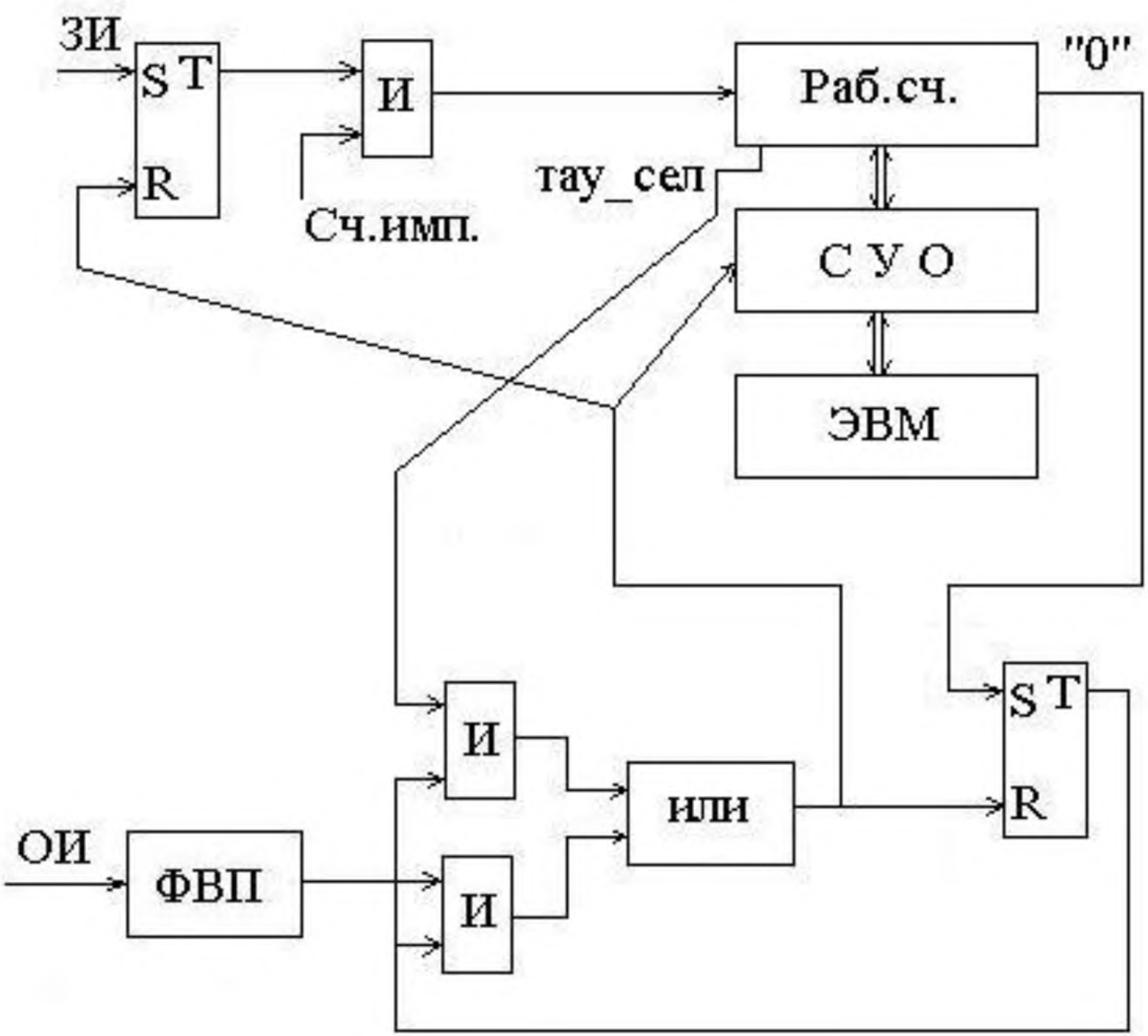
Цифровой автодальномер (аппаратная реализация)





$$W_p(p) \approx \frac{K_v}{p}, \quad K_v = K_{вд}(\rho) K_{pc1} \frac{1}{T_n} K_{вм}$$

Аппаратно-программная реализация автодальномера



ЭВМ -> Раб.сч. (ДК)

$$\hat{\tau}_з - \tau_c / 2$$

Раб.сч. -> ЭВМ

$$e + \tau_c / 2$$

Алгоритм, реализуемый в ЭВМ

$$\hat{\tau}_з(i+1) = \hat{\tau}_з(i) + T_n \hat{V}_\tau(i) + K_1 e(i+1)$$

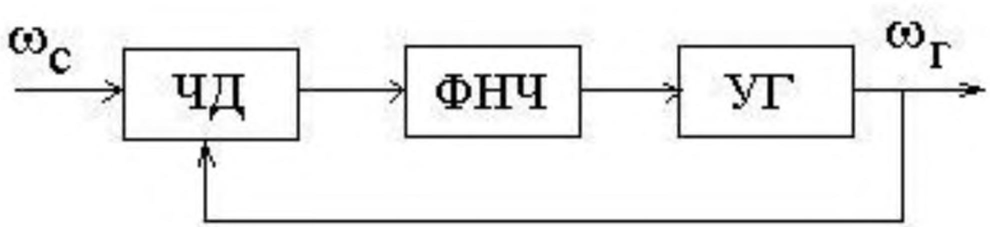
$$\hat{V}_\tau(i+1) = \hat{V}_\tau(i) + K_2 e(i+1)$$

$$K_1 = K_a \tau T_n, \quad K_2 = K_a \tau T_n. \qquad W_p(p) = \frac{K_a(1+p\tau)}{p^2}$$

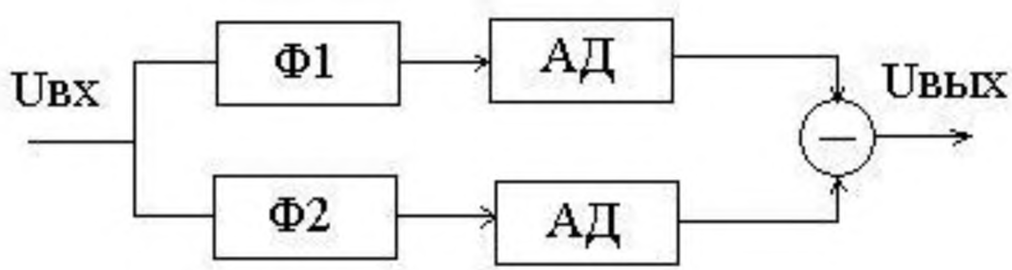
8.3. Системы синхронизации

1. Система АПЧ

$$\Delta\omega_н = \omega_с - \omega_г \neq 0 \quad -> \quad \Delta\omega_{уст} \neq 0$$



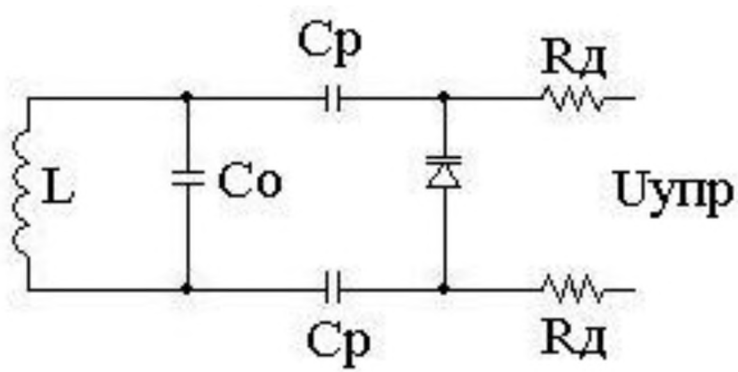
ЧД на расстроенных контурах

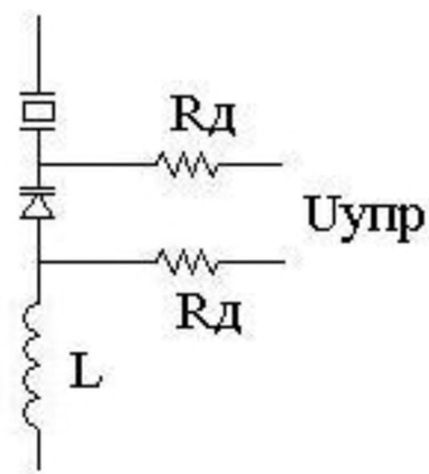


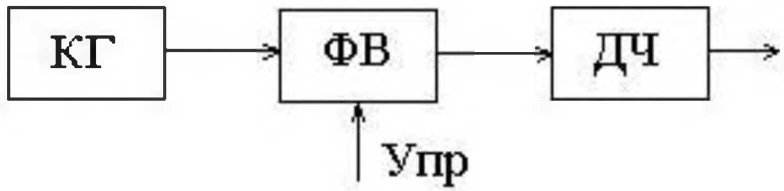
Цифровой ЧД с использованием квадратур

$$\Delta\omega = C(I(i-1)Q(i) - I(i)Q(i-1))$$

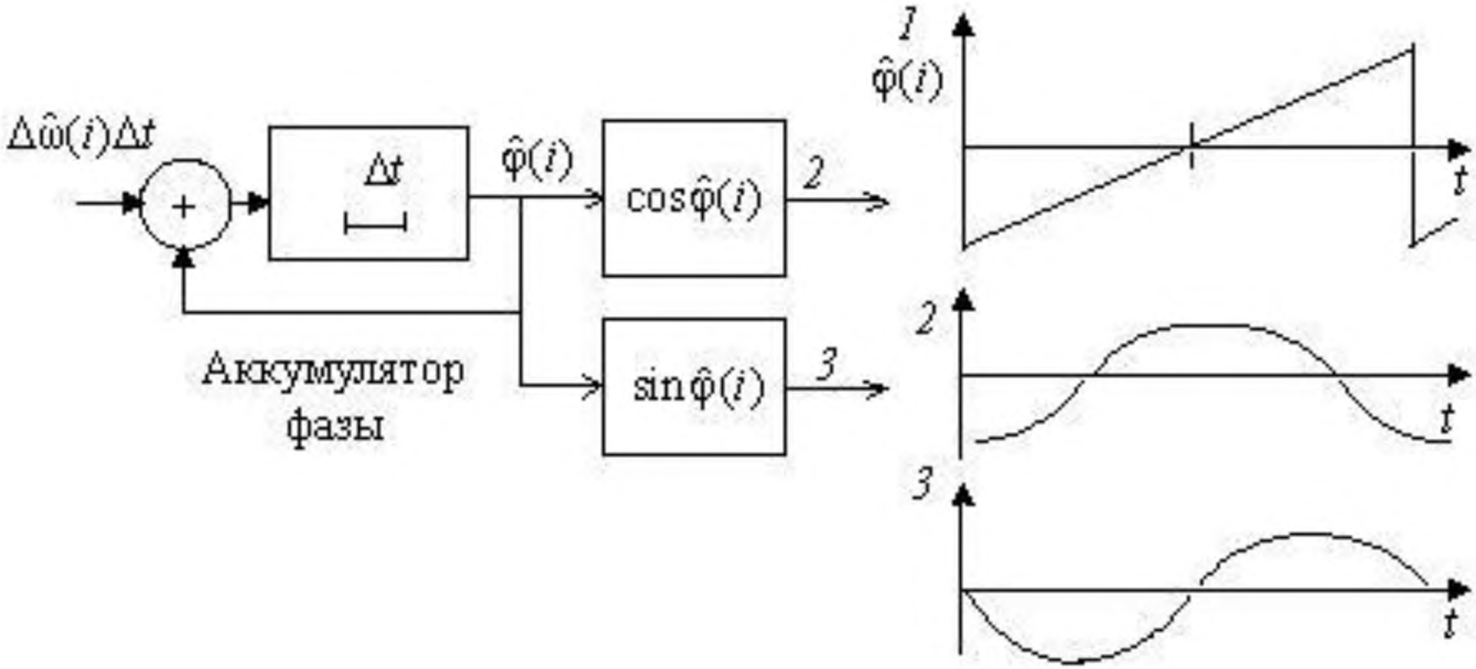
Элементы УГ





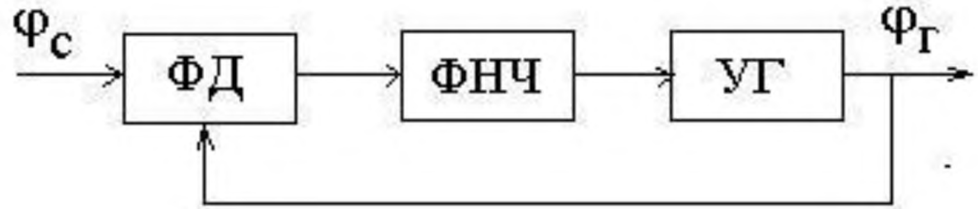


КГ
ФВ
ДЧ
Упр

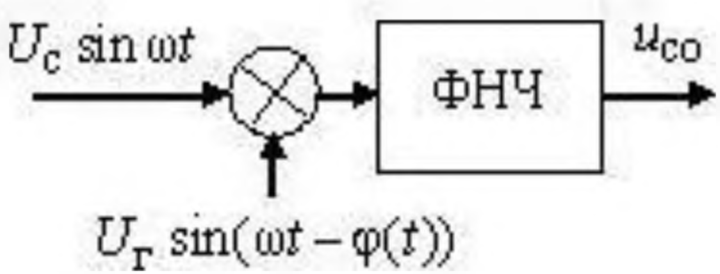


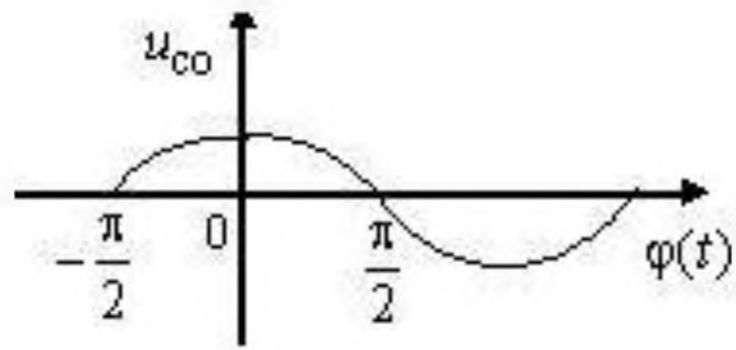
$\Delta\hat{\omega}(i)\Delta t$
+
Δt
$\hat{\varphi}(i)$
$\cos\hat{\varphi}(i)$
$\sin\hat{\varphi}(i)$
2
3
Аккумулятор фазы
1
$\hat{\varphi}(i)$
t
2
t
3
t

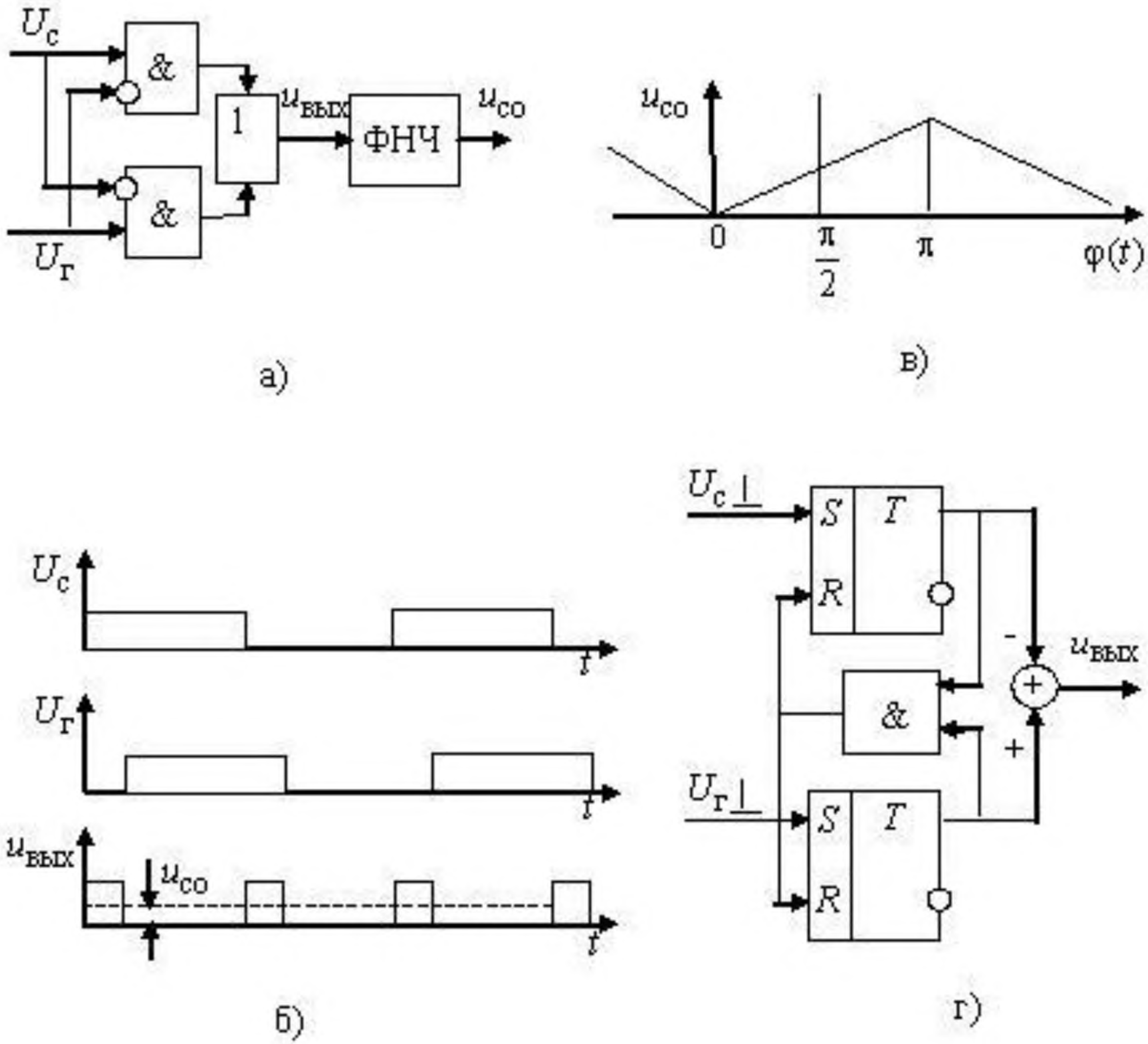
2. Система ФАПЧ



$$W_p(p)=\frac{K_{фд}K_{уг}}{p}W_{фнч}(p) \qquad \Delta\omega_н \neq 0 \quad -> \quad \Delta\omega_у = 0$$

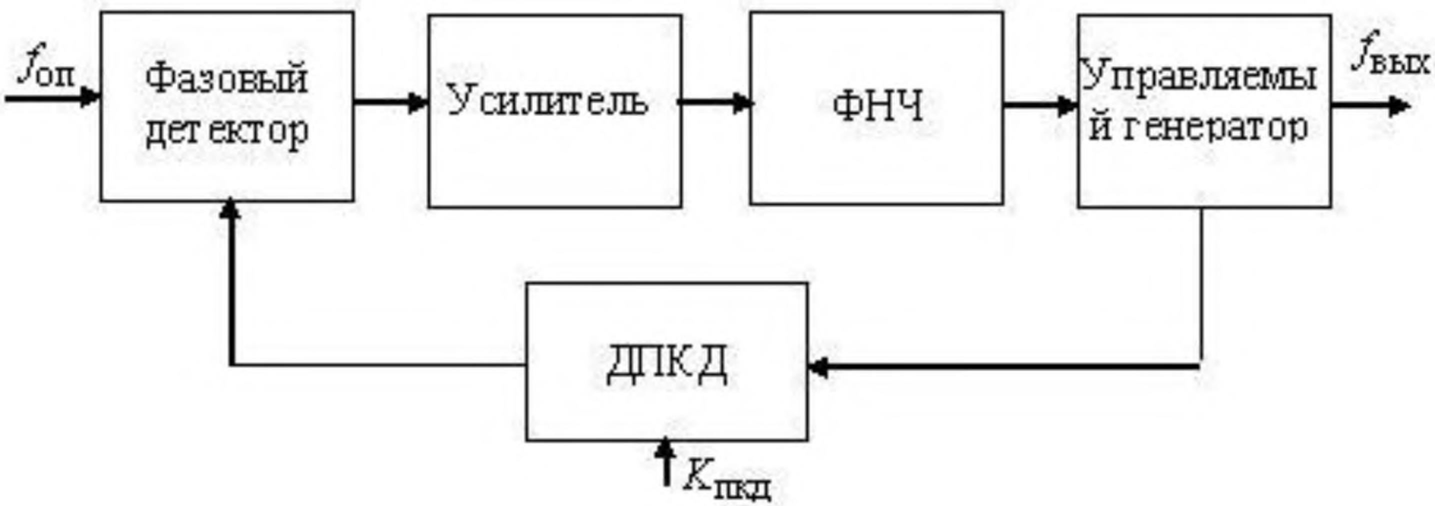




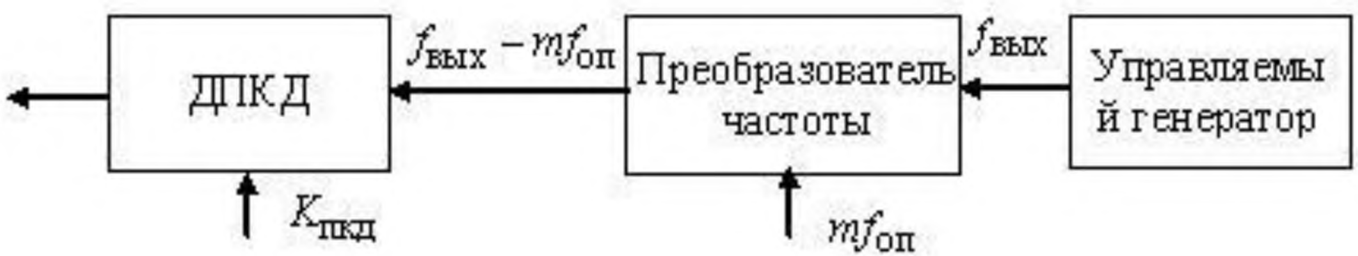


U_c
$U_г$
&
&
1
$u_{вых}$
ФНЧ
u_{co}
а)
u_{co}
0
$\frac{\pi}{2}$
π
φ(t)
в)
U_c
t
$U_г$
t
$u_{вых}$
u_{co}
t
б)
U_c
S
T
R
-
$u_{вых}$
&
+
$U_г$
S
T
R
г)

Синтезатор частот с системой ФАПЧ



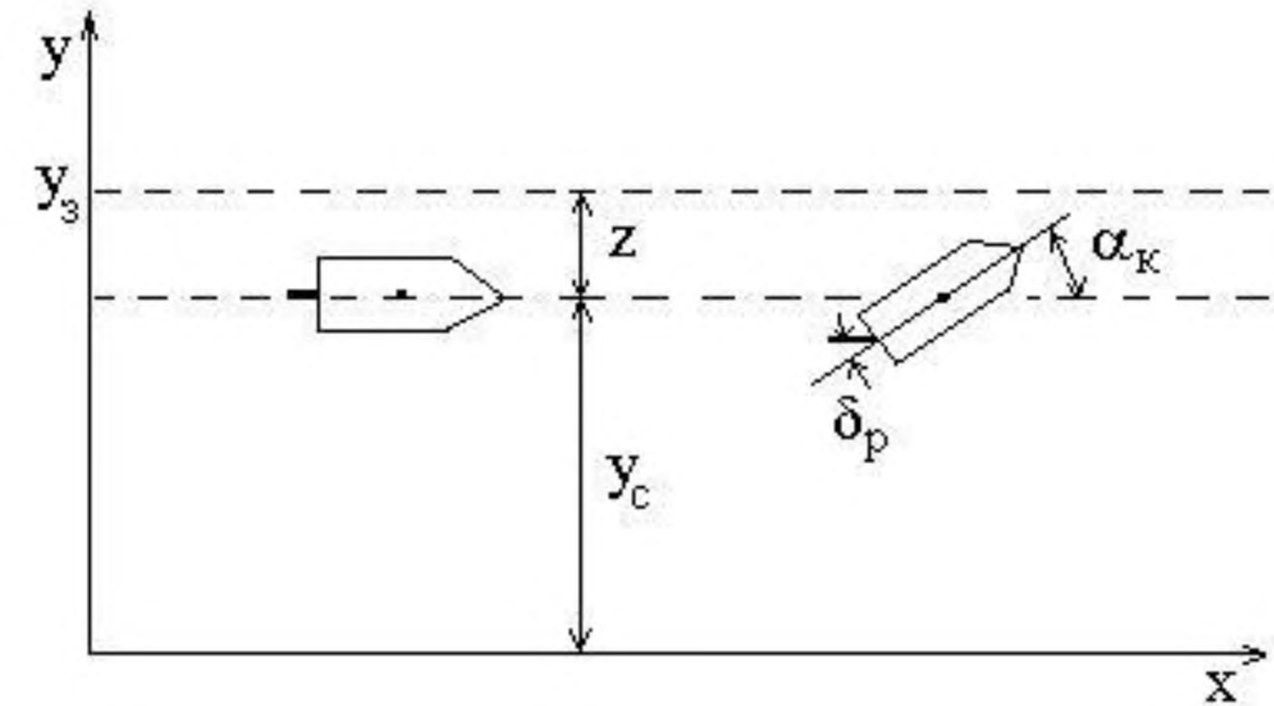
а)



б)

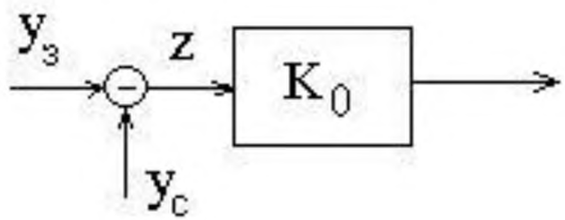
8.4. Системы управления подвижными объектами

1. Задача управления судном

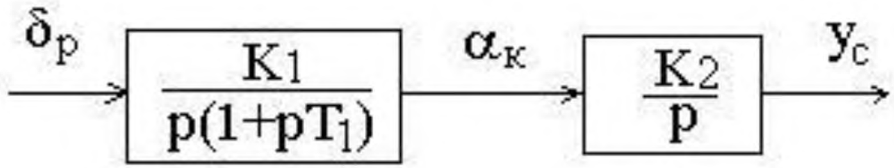


$$z = y_з - y_c \rightarrow 0$$

РНС

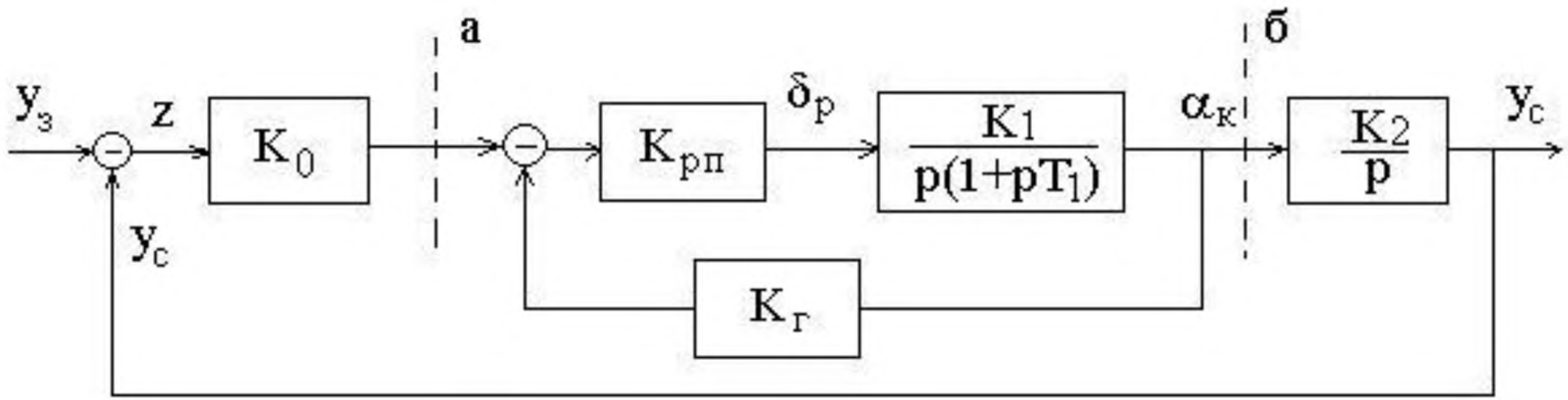


Кинематическое звено



$$\delta_p[\textit{град}],\quad \alpha_\kappa[\textit{град}] \quad\Rightarrow\quad \mathrm{K}_1[1/c]$$

$$y_c[\textit{м}] \quad\Rightarrow\quad \mathrm{K}_2[\frac{\textit{м}}{c\ \textit{град}}]$$



$$W_p(p) = \frac{K_a}{p^2(1+pT_1)},$$

$$K_a = K_0[в / м]K_{рп}[град / в]K_1[1 / с]K_2[м / с / град]$$

$$K_a[1 / c^2]$$

$$K_г[в / град]$$

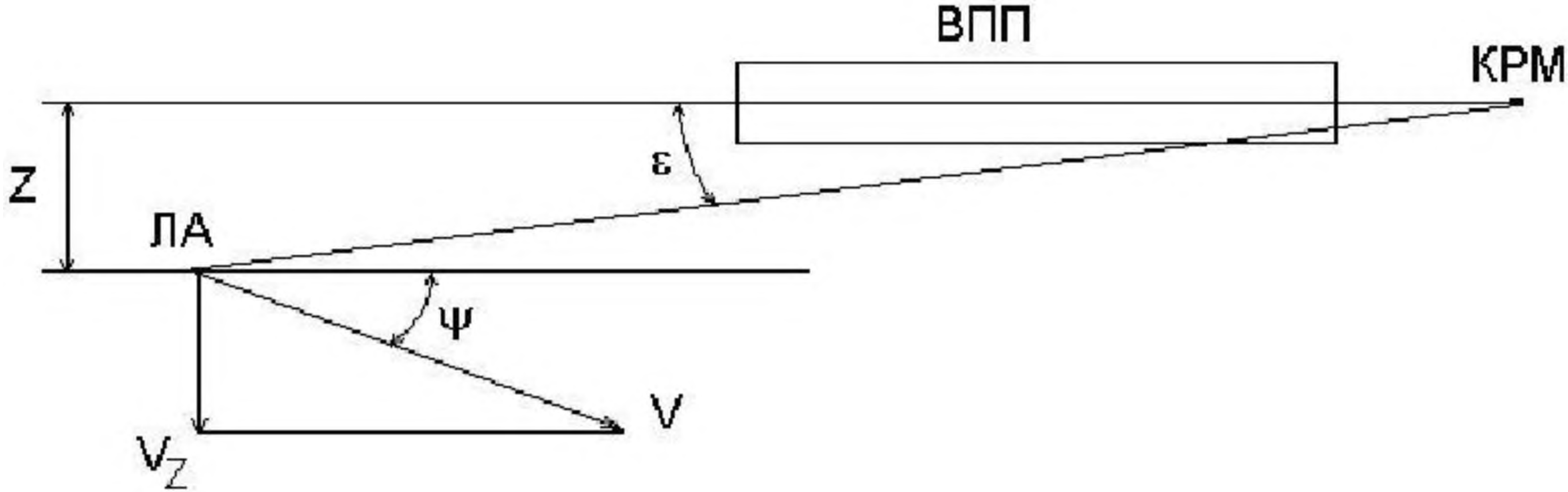
$$W_{\text{аб}}(p) = \frac{1/K_{\text{г}}}{p^2 \dfrac{T_1}{K_1 K_{\text{рп}} K_{\text{г}}} + p \dfrac{1}{K_1 K_{\text{рп}} K_{\text{г}}} + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p^2 \tau^2 + 2 p \tau \xi + 1}$$

$$\tau^2 = \frac{T_1}{K_1 K_{\text{рп}} K_{\text{г}}}[c^2], \qquad 2\tau\xi = \frac{1}{K_1 K_{\text{рп}} K_{\text{г}}} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{K_1 K_{\text{рп}} K_{\text{г}} T_1}}$$

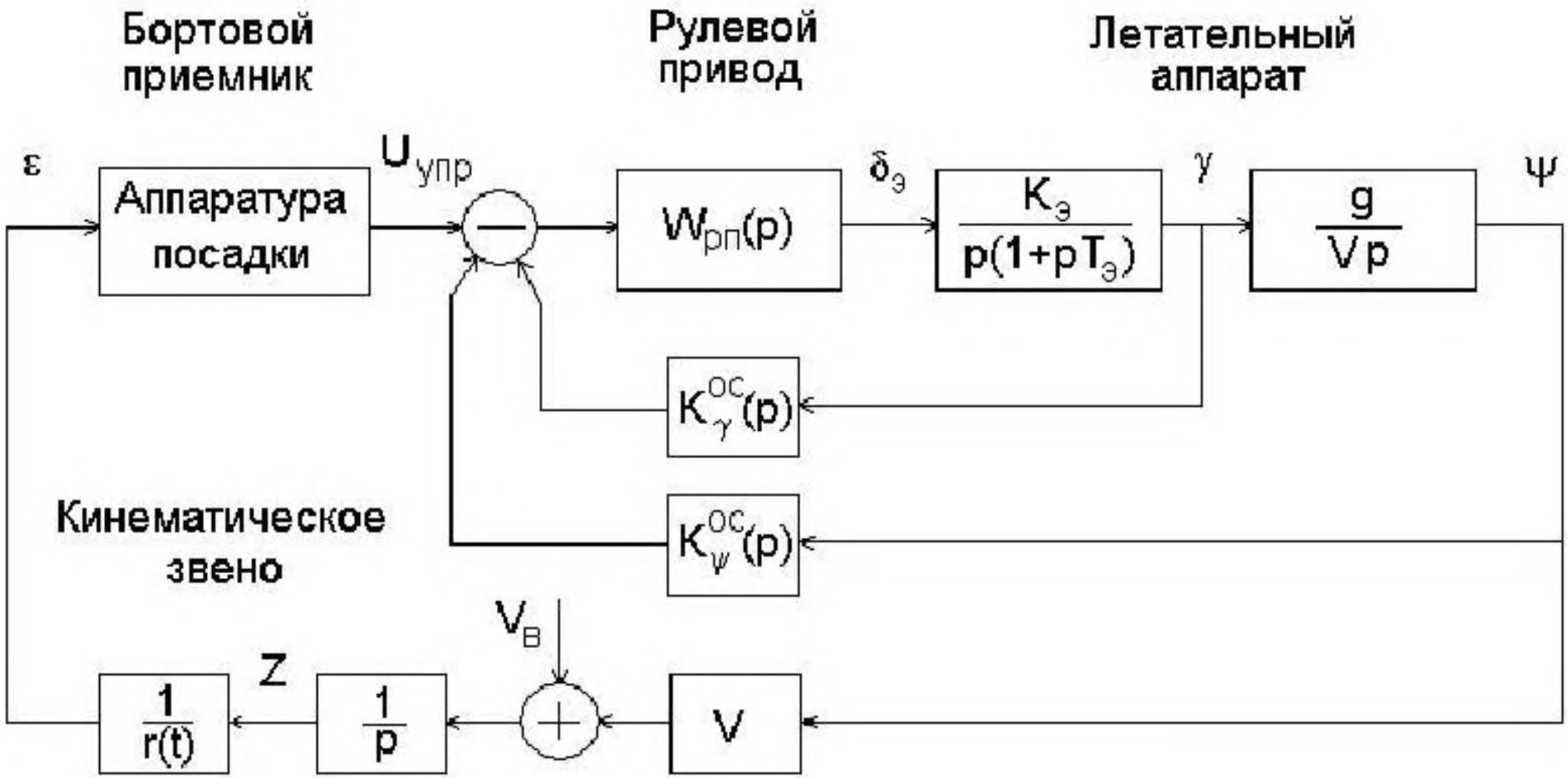
r=1, ξ=1, $W_{\text{аб}}(p) \approx \dfrac{1/K_{\text{г}}}{(1+p\tau)^2}$, $K_v = K_0 \dfrac{1}{K_{\text{г}}} K_2 [1/c] \uparrow$, $\dfrac{1}{\tau} > \omega_{\text{ср}} = K_v$

$$W_p(p) \approx \frac{K_v}{p(1+p\tau)^2}$$

2. Система управления посадкой самолет (канал курса)



ε – [illegible]
[illegible]
Ψ – [illegible]
z – боковое отклонение
V – вектор скорости
Задача: z -> 0 (ε -> 0)



$$V\sin\Psi \approx V\Psi = V_z$$

$$r\sin\varepsilon \approx r\varepsilon = z \quad \rightarrow \quad \varepsilon = z / r$$

Варианты коррекции

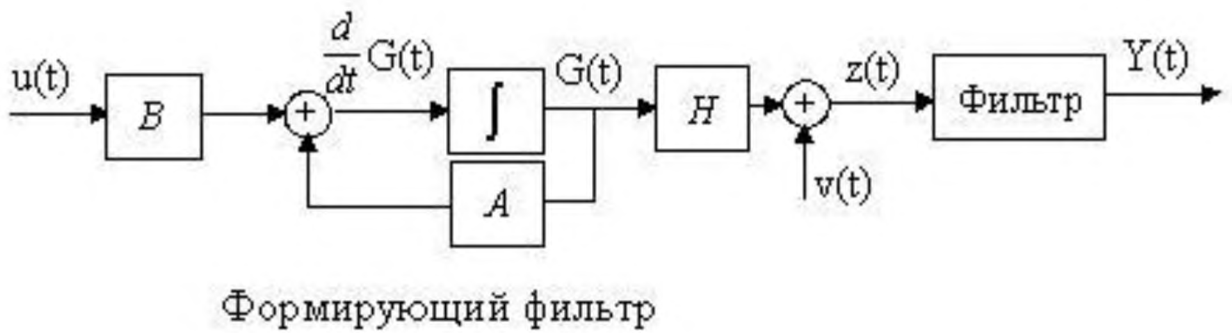
$$W_{k1} = K_\gamma, \quad W_{k2} = K_\Psi \quad \rightarrow \quad 1 -$$

$$W_{k1} = K_\gamma, \quad W_{k2} = \frac{pT_{oc}}{1 + pT_{oc}} \rightarrow$$

$-й$ порядок астатизма, $\mathrm{V}_{в}$!

$2-й$ порядок астатизма

9. Оптимизация структуры и параметров САР
9.1. Оптимизация САР во временной области, фильтр Калмана



$$\frac{d}{dt}G(t) = AG(t) + Bu(t), \qquad G(0) = G_0, \qquad S_0 = Q$$

$$z(t) = HG(t) + v(t), \qquad S_n = R$$

$$\frac{d}{dt}Y(t) = FY(t) + Kz(t) \qquad\qquad e(t) = G(t) - Y(t)$$

$$\frac{d}{dt}P(t) = (A - K(t)H)P(t) + P(t)(A - K(t)H)^T + BQB^T +$$

$$+K(t)RK(t)^T, P(0) = P_0, \quad F = A - K(t)H$$

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t) + K(t)(z(t) - HY(t)), \quad Y(0) = Y_0 \qquad (1)$$

$$SpP(t) = \sum_{j=1}^{n} p_{jj}(t) \to \min$$

$$\frac{d}{dA}Sp(AD) = D^T \qquad \frac{d}{dA}Sp(DA^T) = D \qquad \frac{d}{dA}Sp(ADA^T) = 2AD$$

$$-2P(t)H^T + 2K(t)R = 0 \qquad K(t) = P(t)H^T R^{-1} \qquad (2)$$

Матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$\frac{d}{dt}P(t) = AP(t) + P(t)A^T + GQG^T - P(t)H^T R^{-1} HP(t), P(0) = P_0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}P(t) \to 0, \;\; t \to \infty : \; AP + PA^T + GQG^T - PH^T R^{-1} HP = 0$$

Пример

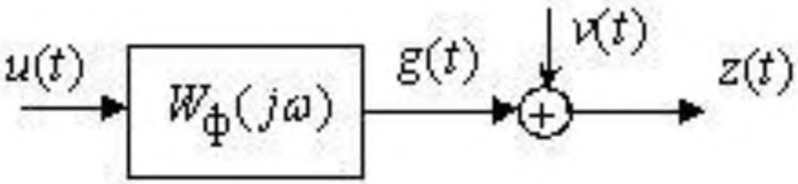
$$-p^2 R^{-1} + Q = 0 \;\; \to \;\; p = \sqrt{QR} \;\; \to \;\; K_{опт} = \sqrt{Q / R} = \sqrt{S_0 / S_n}$$

Замечание

$$W_p(p) = \frac{K}{p}, \quad \sigma^2_{фл} + \sigma^2_{д} = S_n \frac{K}{2} + S_0 \frac{1}{2K} \to \min$$

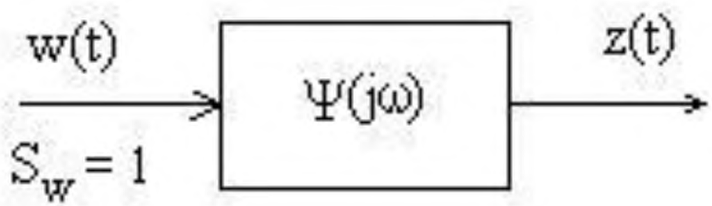
$$\frac{S_n}{2} - \frac{S_0}{2K^2} = 0 \;\; \to \;\; K_{опт} = \sqrt{S_0 / S_n}$$

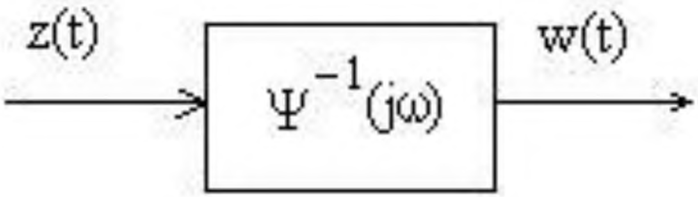
9.2. Оптимизация САР в частотной области, фильтр Винера

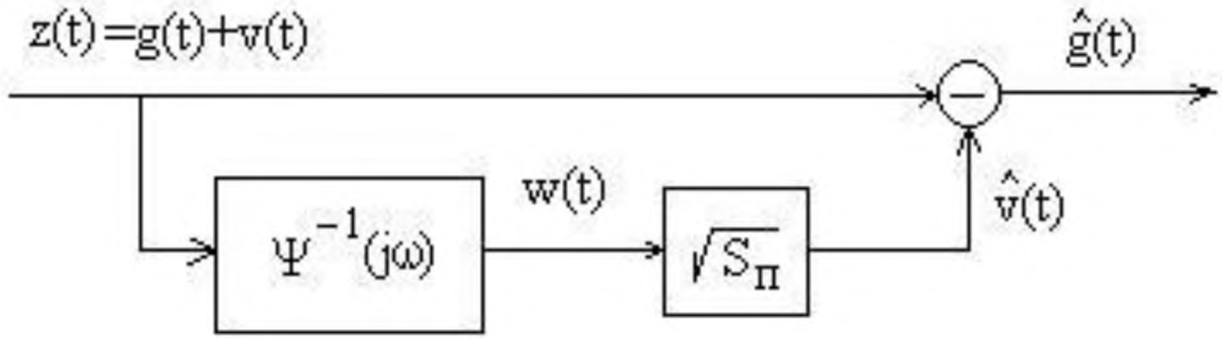


$$S_g(\omega) = S_0 \left| W_\phi(j\omega) \right|^2 = \frac{C(\omega^2)}{D(\omega^2)}$$

$$S_g(\omega) + S_n = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega) = \left| \Psi(j\omega) \right|^2$$







$$W(j\omega) = 1 - \frac{\sqrt{S_n}}{\Psi(j\omega)} \quad \Rightarrow \quad W_p(j\omega) = \frac{\Psi(j\omega)}{\sqrt{S_n}} - 1$$

Пример

$$S_g(\omega) + S_n = \frac{S_0}{\omega^2} + S_n = \frac{(\sqrt{S_0} + j\omega\sqrt{S_n})(\sqrt{S_0} - j\omega\sqrt{S_n})}{j\omega(-j\omega)}$$

$$W_p(j\omega) = \frac{(\sqrt{S_0} + j\omega\sqrt{S_n})}{j\omega\sqrt{S_n}} - 1 = \frac{K}{j\omega}, \quad K = \sqrt{S_0 / S_n}$$

9.3. Оптимизация САР при регулярном полезном воздействии

$$\varepsilon_{\partial} \neq 0, \quad \varepsilon_{\partial}^2 + \sigma_{\text{фл}}^2 \to \min$$

Пример 1

$$g(t) = Vt, \quad W_p(p) = \frac{K_v}{j\omega}, \quad \left(\frac{V}{K_v}\right)^2 + S_n \frac{K_v}{2} \to \min$$

$$-\frac{2V^2}{K_v^3} + \frac{S_n}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{v\ \text{опт}} = \left(\frac{4V^2}{S_n}\right)^{1/3}$$

Замечание 1. Проблема априорной неопределенности:
Адаптация или минимаксный подход

Замечание 2. Как найти Sп

$$б)\quad R_{чэ}(\tau) = \sigma_{чэ}^2(1 - \frac{|\tau|}{\Delta t})$$

$$S_{чэ}(\omega) = \Big(\textit{формула Винера}$$

$$S_{чэ}(\omega) \approx S_{чэ}(0) = \sigma_{чэ}^2 \Delta t$$

$$S_n = \sigma^2 \Delta t$$

$$a) \quad S_n = \sigma^2 / f_{эф\ \text{упч}}$$

$$- \textit{Хинчина}) = \sigma_{чэ}^2 \Delta t \left(\frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} \right)^2$$

Задача оценивания времени прихода импульсного сигнала

$$\Delta\tau = \frac{\Delta u}{du\,/\,dt} \approx \frac{\Delta u}{A\,/\,\tau} \qquad \sigma_\tau = \frac{\sigma_u}{A\,/\,\tau} = \frac{1}{\dfrac{A}{\sigma_u}\dfrac{1}{\tau}} = \frac{1}{\rho\;\Delta f_{\text{эф}}}$$

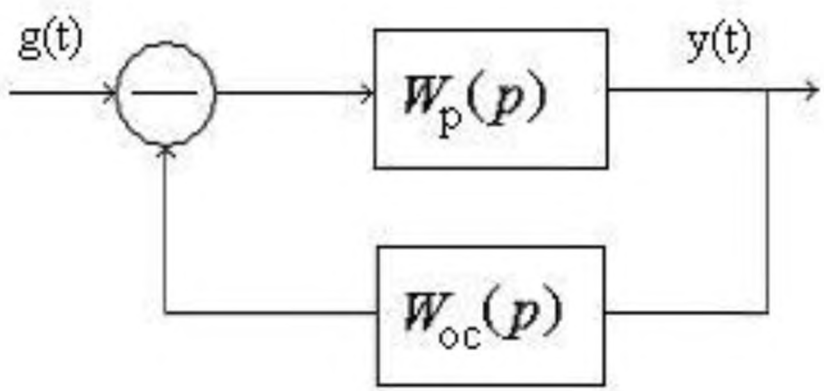
Пример 2

$$g(t) = at^2\,/\,2, \quad W_p(j\omega) = \frac{K_a(1 + j\omega\tau)}{(j\omega)^2},$$

$$\frac{a^2}{K_a^2} + S_{\text{п}}\frac{K_a\tau^2 + 1}{2\tau} \to \min(K_a, \tau)$$

$$K_{a\,\text{опт}} = \left(\frac{4a^2}{S_{\text{п}}}\right)^{2/5}, \quad \tau_{\text{опт}} = (K_{a\,\text{опт}})^{-1/2}$$

9.4. Способы повышения точности САР
1. Согласование структур САР и ФФ
2. Оптимизация параметров
3. Использование нееденичной ОС



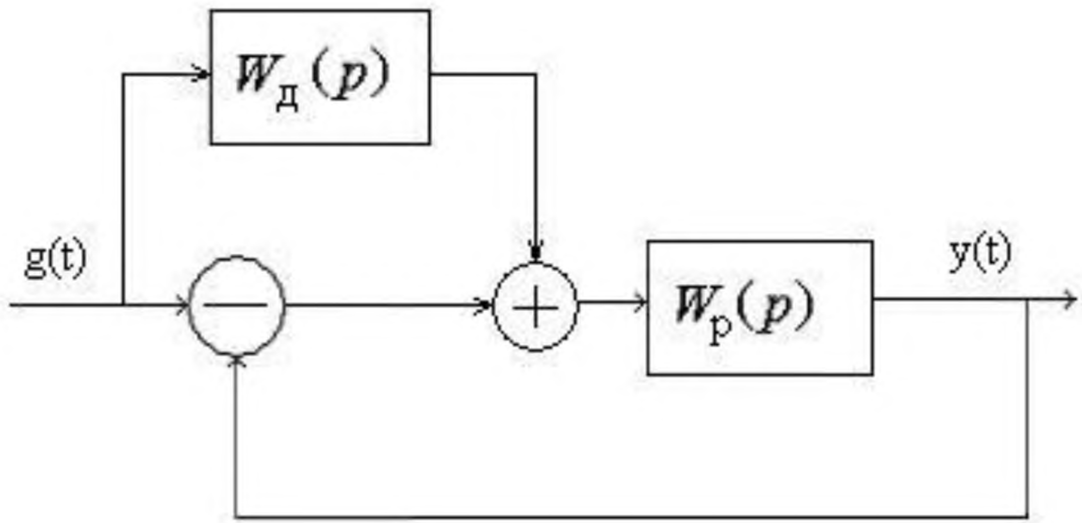
$$E(p) = G(p) - Y(p)$$

$$= G(p) - G(p)\frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)W_{oc}(p)}$$

$$\frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)W_{oc}(p)} = 1$$

$$W_{oc}(p) = \frac{W_p(p) - 1}{W_p(p)}$$

4. Управление по замкнутому и разомкнутому контуру

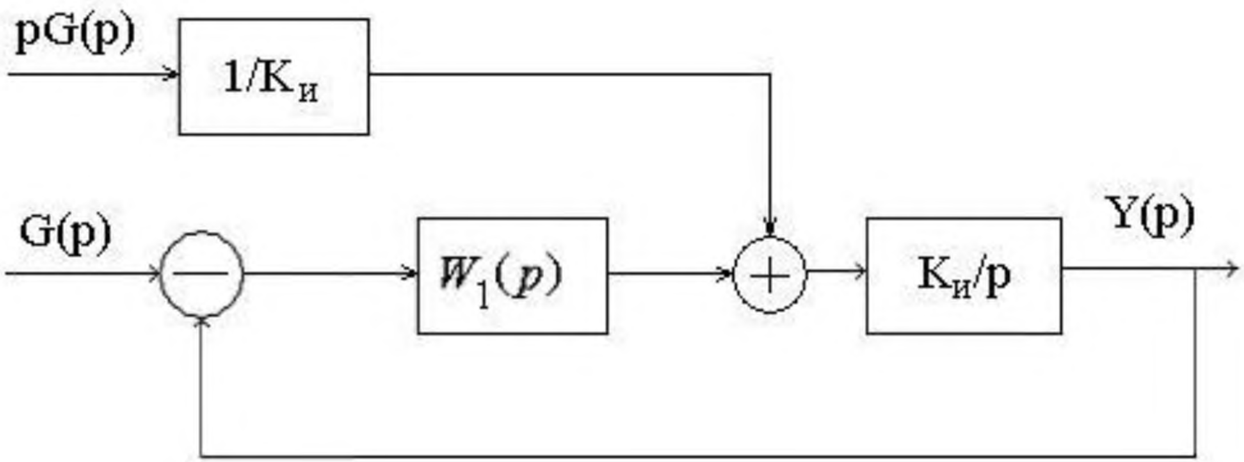


$$W(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{[1 + W_\partial(p)]W_p(p)}{1 + W_p(p)} = 1$$

$$W_\partial(p) = \frac{1}{W_p(p)}$$

2 датчика

а) Проблема реализации

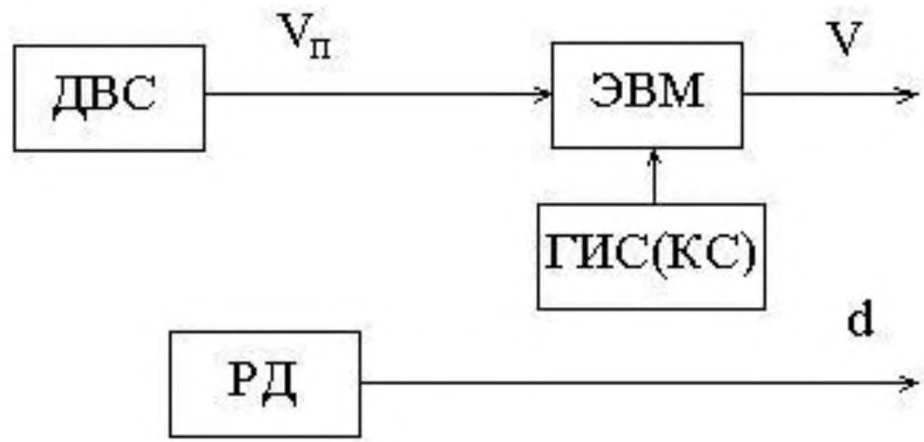


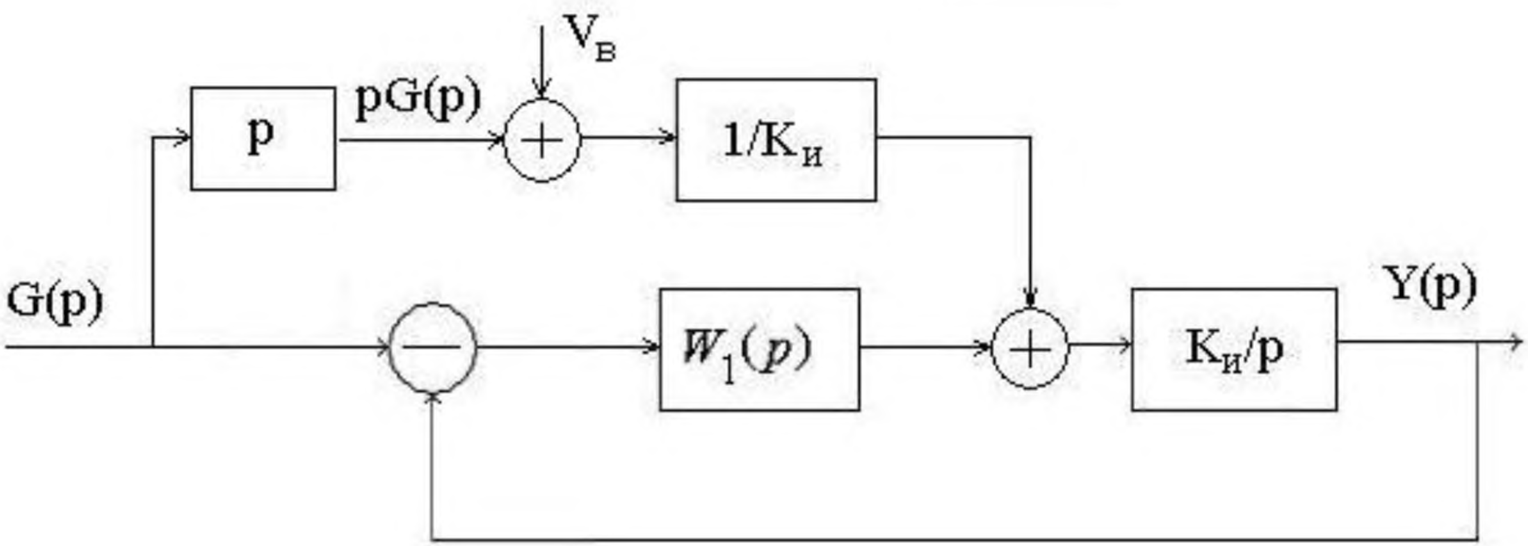
Уравнение системы

$$[(G-Y)W_1 + pG\frac{1}{K_u}]\frac{K_u}{p} = Y \quad \Rightarrow \quad G(W_1\frac{K_u}{p}+1) = Y(W_1\frac{K_u}{p}+1)$$

$$W(p) = 1$$

б) проблема помехоустойчивости





Уравнение системы

$$[(G-Y)W_1(p)+(pG+V_в)\frac{1}{K_и}]\frac{K_и}{p}=Y$$

Уравнение для ошибки G-Y

$$W_1(p) = \frac{K_1(1+p\tau)}{p}$$

$$E(p)W_1(p)\frac{K_u}{p} + E(p) = -\frac{V_в(p)}{p} \quad \rightarrow \quad E(p) = \frac{-V_в(p)p}{p^2 + K_a(1+p\tau)}$$

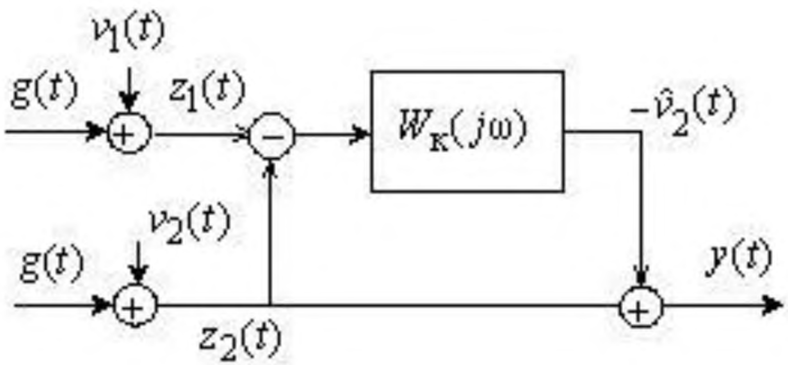
$$1.\ V_в(t) = V_в = const,\ V_в(p) = V_в / p$$

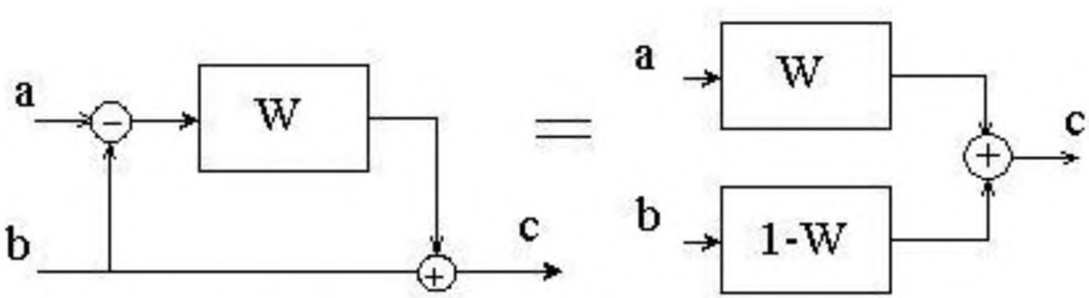
$$e_{уст} = \lim_{p\to 0} pE(p) = 0$$

$$2.\ V_в(t) = a_в t,\ V_в(p) = a_в / p^2$$

$$e_{уст} = \lim_{p\to 0} pE(p) = \frac{a_в}{K_a},\ \ a_в < a_c \ \rightarrow K_a \downarrow \ \rightarrow f_{эф} \downarrow$$

Схема компенсации





c=aW+b(1-W)=(a-b)W+b

9.5. Дискретный фильтр Калмана

$$Y(i+1) = AY(i) + K(i+1)[z(i+1) - HAY(i)] \quad (1)$$

$$P^{-}(i+1) = AP(i)A^{T} + Q_{w} \quad (2)$$

$$P(i+1) = (I - K(i+1)H)P^{-}(i+1)(I - K(i+1)H)^{T} + K(i+1)RK^{T}(i+1) \quad (3)$$

$$SpP(i+1) \to \min$$

$$K(i+1) = P^{-}(i+1)H^{T}(HP^{-}(i+1)H^{T} + R)^{-1} \quad (4)$$

Модификации уравнений ДФК

$$P(i+1) = (I - K(i+1)H)P^{-}(i+1) \quad (3a)$$

$$P^{-1}(i+1) = (P^{-}(i+1))^{-1} + H^{T}R^{-1}H \quad (3б)$$

$$K(i+1) = P(i+1)H^{T}R^{-1} \quad (4a)$$

Тема 10. Анализ нелинейных САР

Особенности: 1. Не выполняется принцип суперпозиции

2. Изменяются условия и понятие устойчивости

а) поведение системы зависит от воздействия

б) в системе возможно существование устойчивого колебательного режима

По Ляпунову: система устойчива «в малом», если при малом отклонении δ ⌊∫ (.) ∈ ⌊⟨◊ ⌊⟩∫◊∑∫⟩□ ® ⌊⟨⌊◊⟩∫⟨ и $\mathcal{E}$ система устойчива «в большом», если она остается в области $\mathcal{E}$ при любом начальном отклонении.

3. Качественно меняются переходные процессы

4. Возможен срыв слежения, необходим поиск сигнала и ввод САР в режим слежения

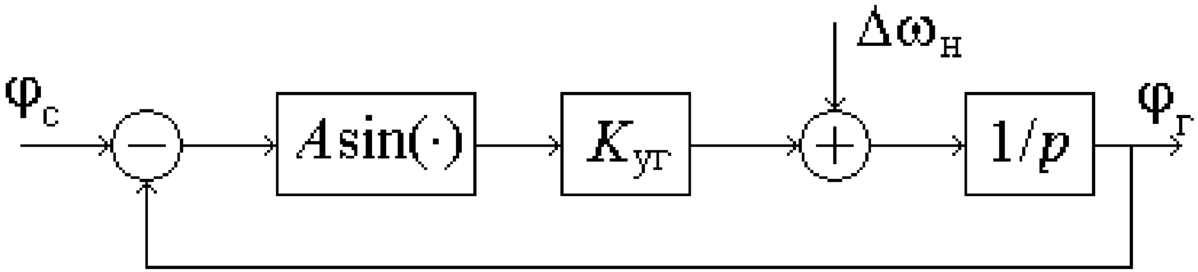
Методы анализа: 1. Решение (численное) диф.уравнений

2. Решение уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова и Кушнера-Стратоновича (теория марковских процессов)

3. Методы гармонической и статистической линеаризации

4. Метод моделирования

10.1 Анализ нелинейной системы ФАПЧ

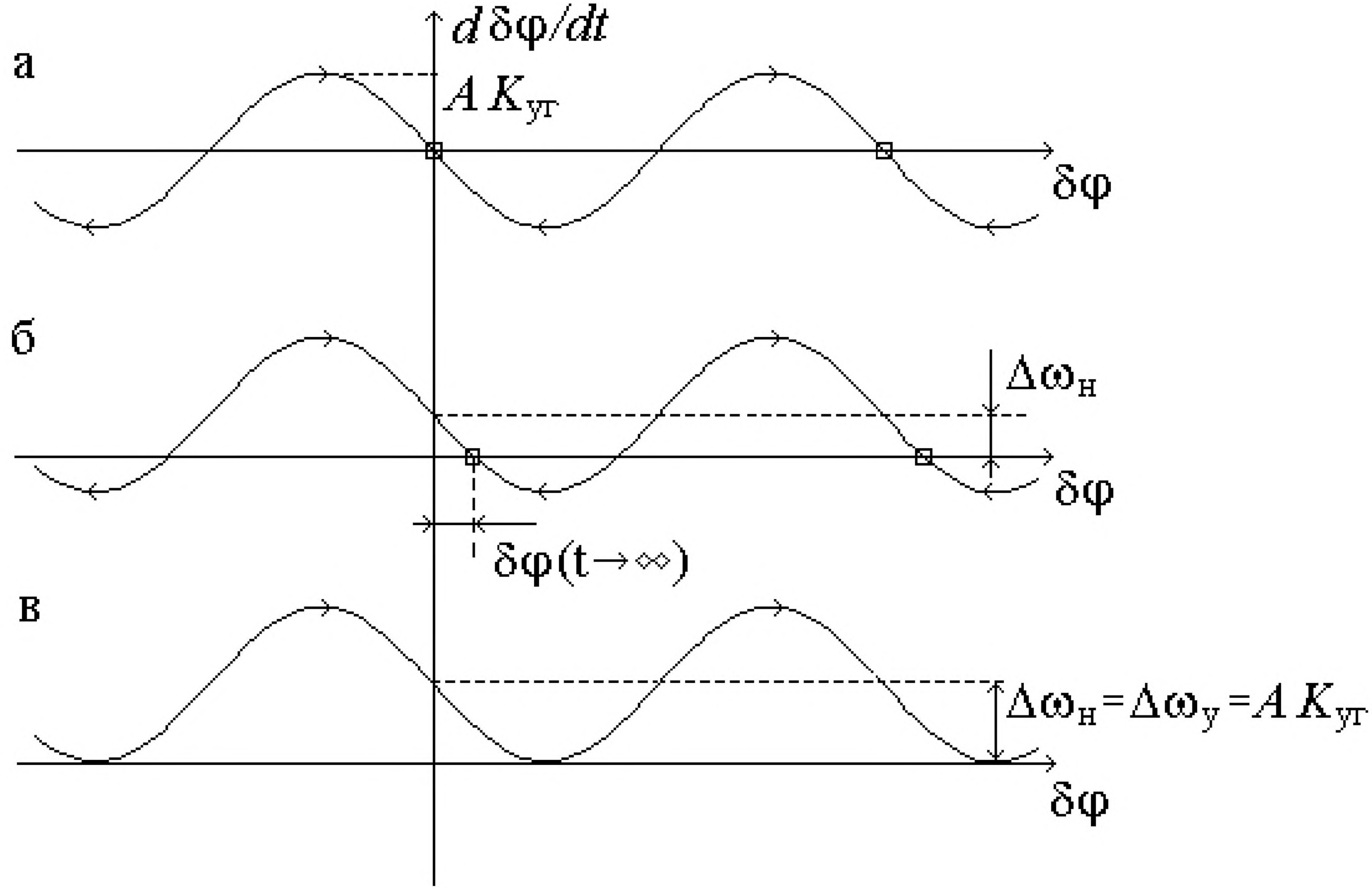


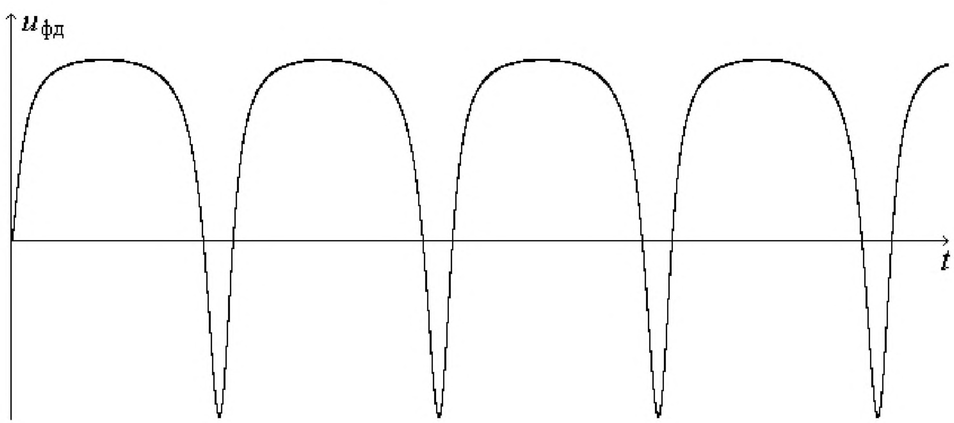
$$\frac{d\varphi_г(t)}{dt} = \Delta\omega_н + AK_{уг}\sin[\varphi_c - \varphi_г(t)], \qquad \varphi_г(t_0).$$

Нас интересует ошибка в установившемся режиме

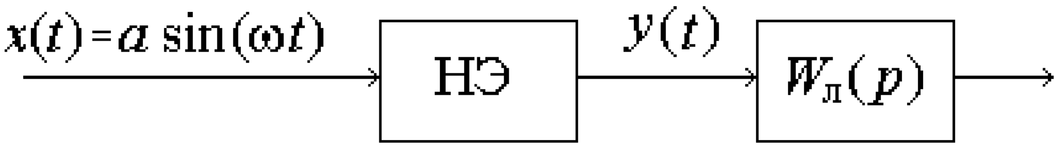
$$\delta\varphi(t) = \varphi_г(t) - \varphi_c \qquad\qquad \varphi_c = \mathrm{const},$$

$$\frac{d\delta\varphi(t)}{dt} = \Delta\omega_н - AK_{уг}\sin(\delta\varphi(t)), \qquad \delta\varphi(t_0).$$


а
$d\,\delta\varphi/dt$
$A\,K_{уг}$
$\delta\varphi$
б
$\Delta\omega_н$
$\delta\varphi$
$\delta\varphi(t\to\infty)$
в
$\Delta\omega_н = \Delta\omega_у = A\,K_{уг}$
$\delta\varphi$


$u_{фд}$
t

10.2. Метод гармонической линеаризации



$$|W_л(j\omega k)| << |W_л(j\omega)|, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

$y(t)=f(a \sin\omega t)=c0+s1 \sin\omega t+c1 \cos\omega t+ s2 \sin2\omega t+c2 \cos2\omega t+\ldots,$

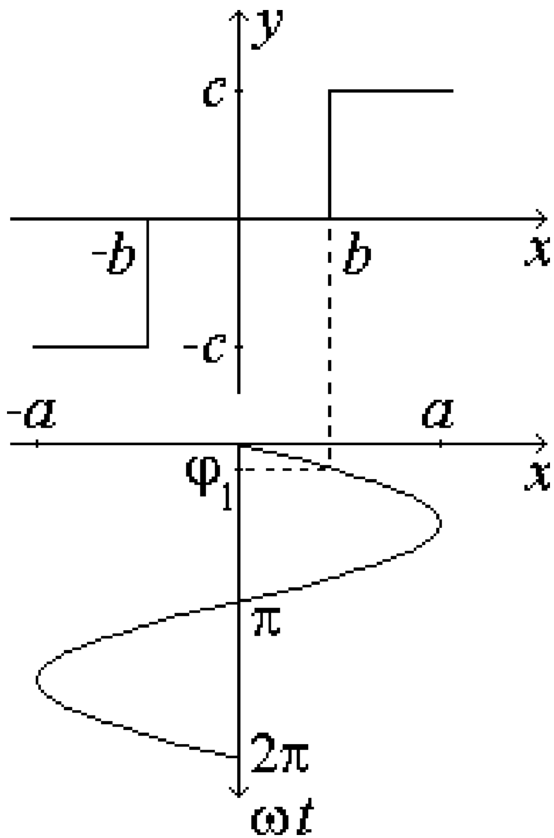
$$y(t) \approx s_1 \sin\omega t + c_1 \cos\omega t,$$

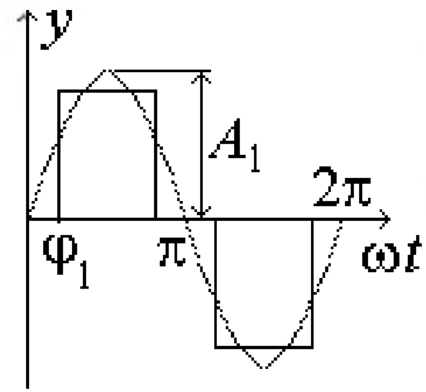
$$s_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\sin\omega t)\sin\omega t d\omega t, \quad c_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\sin\omega t)\cos\omega t d\omega t.$$

$$y(t) \approx \frac{s_1}{a}x(t) + \frac{c_1}{a\omega}\frac{dx(t)}{dt} = q(a)x(t) + q'(a)\frac{1}{\omega}\frac{dx(t)}{dt},$$

$$y(p) = [q(a) + q'(a)\frac{p}{\omega}]x(p). \qquad W_н(p,a) = \frac{y(p)}{x(p)} = q(a) + q'(a)\frac{p}{\omega}.$$

$$W_{\text{н}}(a) = q(a) + jq'(a), \qquad |W_{\text{н}}(a)| = \sqrt{[q(a)]^2 + [q'(a)]^2} = \frac{\sqrt{s_1^2 + c_1^2}}{a}$$





$$W_{\text{н}}(a) = q(a) = \frac{4c}{\pi a}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \qquad a \geq b.$$

10.3. Частотный метод определения автоколебаний в н/лин.САР

$$W_{\text{р}}(p,a) = W_{\text{н}}(a)W_{\text{л}}(p).$$

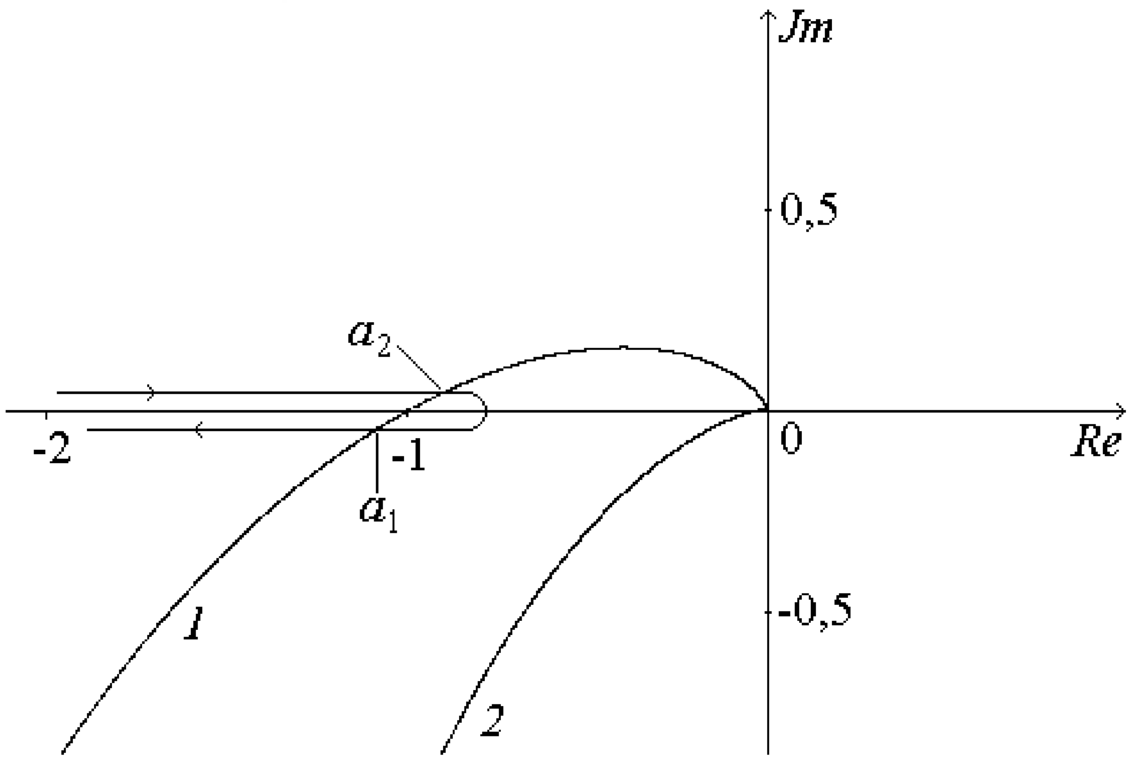
Задачи: 1. ∃ А/к

2. Уст. А/к

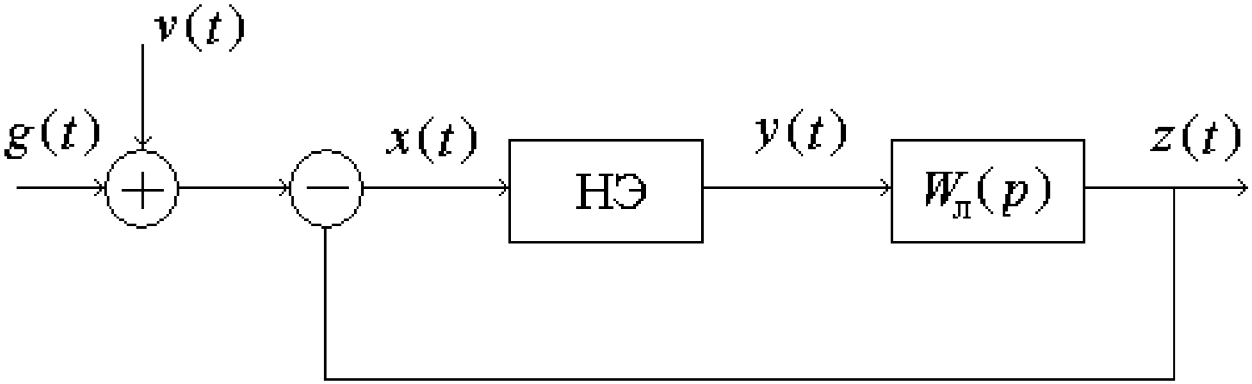
3. а, ω

$$W_{\text{р}}(j\omega, a) = -1$$

$$W_{\text{л}}(j\omega) = -W_{\text{н}}^{-1}(a)$$



10.4. Метод статистической линеаризации



$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad \sigma_x^2 = D_x$$

Статистический эквивалент НЭ

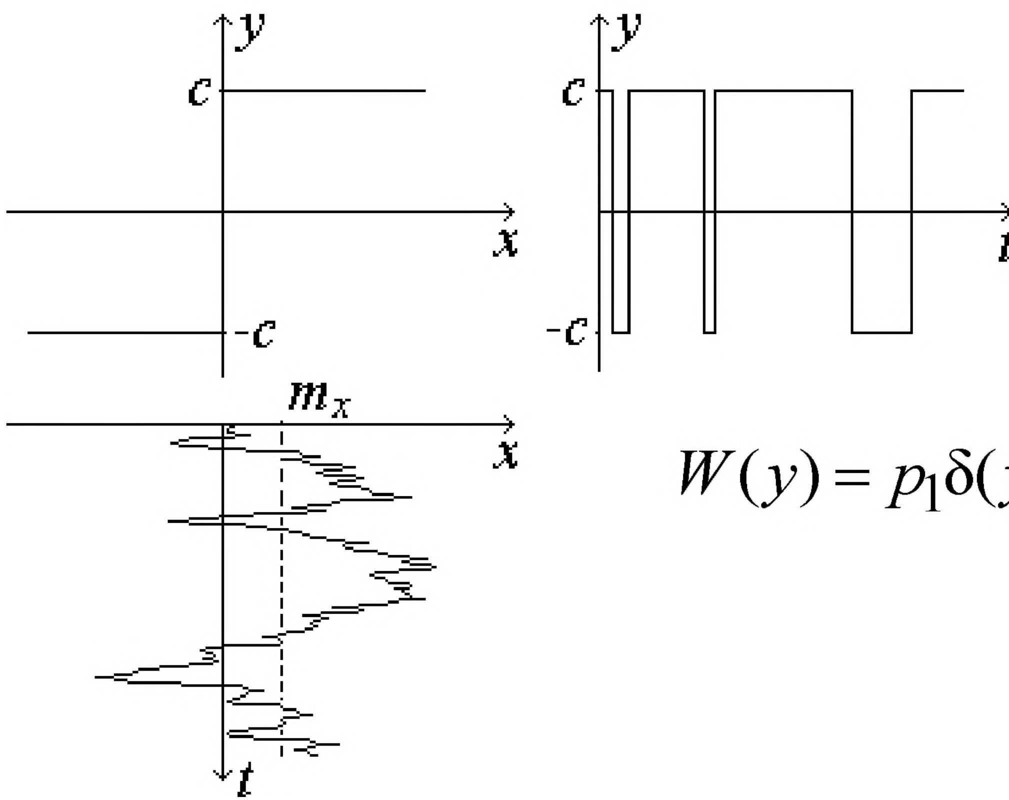
$$y_1(t) = K_0 m_x + K_1 x^{\mathrm{o}}(t),$$

$$m_y = m_{y1},$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y1}^2.$$

$$K_0 = \frac{m_y}{m_x} = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) W(x) dx.$$

$$K_1 = \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sigma_x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [y(x) - m_y]^2 W(x) dx \right]^{1/2}.$$



$$W(y) = p_1 \delta(y - c) + p_2 \delta(y + c).$$

Вычислительные аспекты

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)W(x)dx = -c\int_{-\infty}^{0} y(x)W(x)dx + c\int_{0}^{\infty} y(x)W(x)dx =$$

$$u = \frac{x - m_x}{\sigma_x},$$

$$= c\left\{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-m_x/\sigma_x} \mathrm{e}^{-u^2/2}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-m_x/\sigma_x}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}du\right\} =$$

$$= 2c\Phi(m_x / \sigma_x),$$

$$\Phi(m_x / \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{m_x/\sigma_x} \mathrm{e}^{-u^2/2}du$$

$$\sigma_y^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [y(x) - m_y]^2 W(x) dx = c^2$$

Замечание. Критерий эквивалентности

$$E\left\{[y(t) - y_1(t)]^2\right\} \to \min.$$

$$K_0 = \frac{m_y}{m_x} = \frac{1}{m_x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x) W(x) dx,$$

$$K_1 = \frac{1}{\sigma_x^2} E\{x^{\mathrm{o}}(t) y(t)\} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x -$$

$$- 4c^2\Phi^2(m_x / \sigma_x).$$

$$m_y = m_{y1},$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y1}^2.$$

$$- m_x) y(x) W(x) dx.$$

10.5. Анализ н/лин САР с помощью метода статистической линеаризации

m_x – *динамическая ошибка,* σ_z^2 – *дисперсия фл.ошибки*

1. Общий метод анализа

$$K_0(m_x, \sigma_x^2) = f_1(g, m_z, \sigma_v^2, \sigma_z^2)$$

$$K_1(m_x, \sigma_x^2) = f_2(g, m_z, \sigma_v^2, \sigma_z^2)$$

$$m_z = f_3(K_0, K_1)$$

$$\sigma_z^2 = f_4(K_0, K_1)$$

2. Упрощенный метод анализа

1) $\sigma_z \; \square \; \sigma_v$

2) $m_x \approx 0$

3) $K_0(m_x, \sigma_x^2) = K_0(0, \sigma_v^2) = const, \quad \sigma_v^2 = const$

$$W_p(j\omega) = K_0(0, \sigma_v^2) W_л(j\omega)$$

$ЛХ \;\Rightarrow\; \omega_{ср} \ll 2\pi\Delta f_{упч} \;\Rightarrow$ переходные процессы, точность

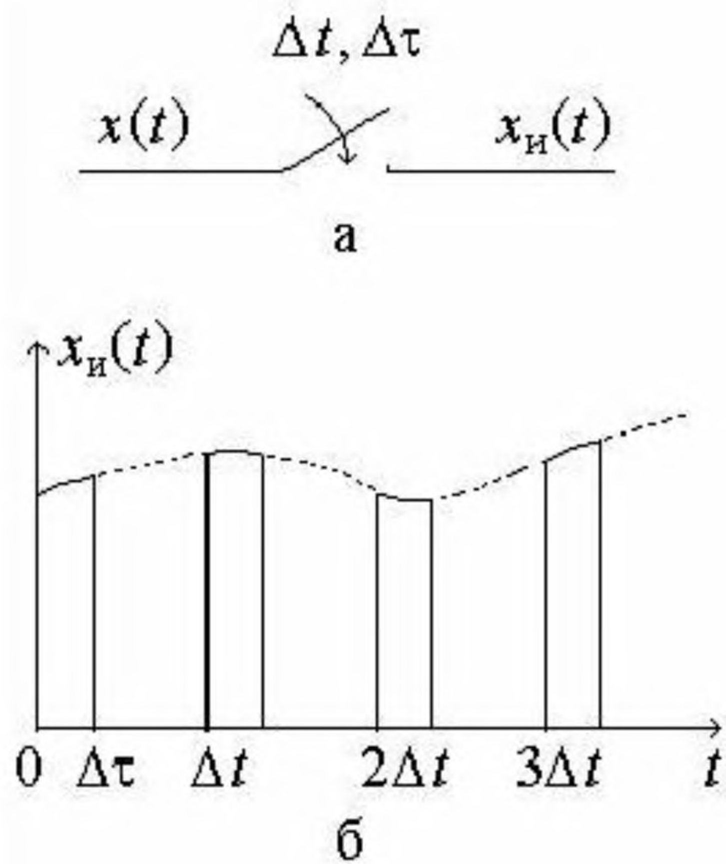
$Помехоустойчивость:$

$$\sigma_{экв}^2 = \frac{D_y\big|_{mx=0}}{K_0^2(0, \sigma_v^2)},$$

$$S_n = \sigma_{экв}^2 \Delta t,$$

$$\sigma_z^2 = S_n f_{эф} \qquad (\sigma_z^2 \ll \sigma_v^2).$$

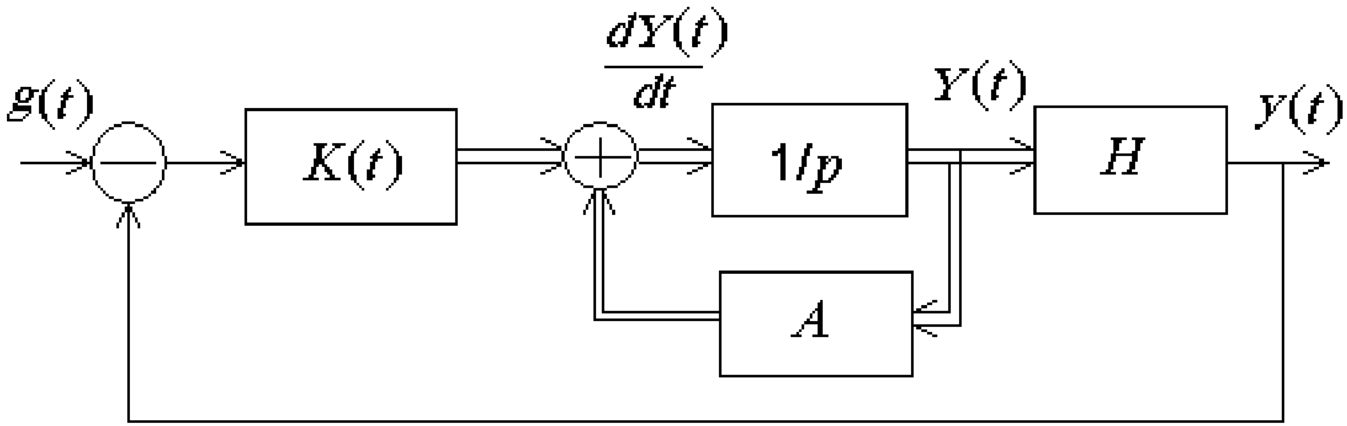
11. Импульсные и дискретные САР



$\Delta\tau$ □ Δt $\rightarrow$ САР с конечным временем съема данных

$\Delta\tau$ □ Δt $\rightarrow$ дискретная САР

11.1. САР с конечным временем съема данных



$$K(t)=\begin{cases} K, & t_i \le t < t_i+\Delta\tau \quad \text{(ключ замкнут)},\\ 0, & t_i+\Delta\tau \le t < t_{i+1} \quad \text{(ключ разомкнут)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt}=(A-KH)Y(t)+Kg(t), \quad Y(t_i), \quad t_i \le t < t_i+\Delta\tau,\\ \dfrac{dY(t)}{dt}=AY(t), \quad Y(t_i+\Delta\tau), \quad t_i+\Delta\tau \le t < t_{i+1}. \end{cases}$$

$$Y(t_i + \Delta\tau) = \mathrm{e}^{(A-KH)\Delta\tau} Y(t_i).$$

$$Y(t_{i+1}) = \mathrm{e}^{A(\Delta t - \Delta\tau)} Y(t_i + \Delta\tau).$$

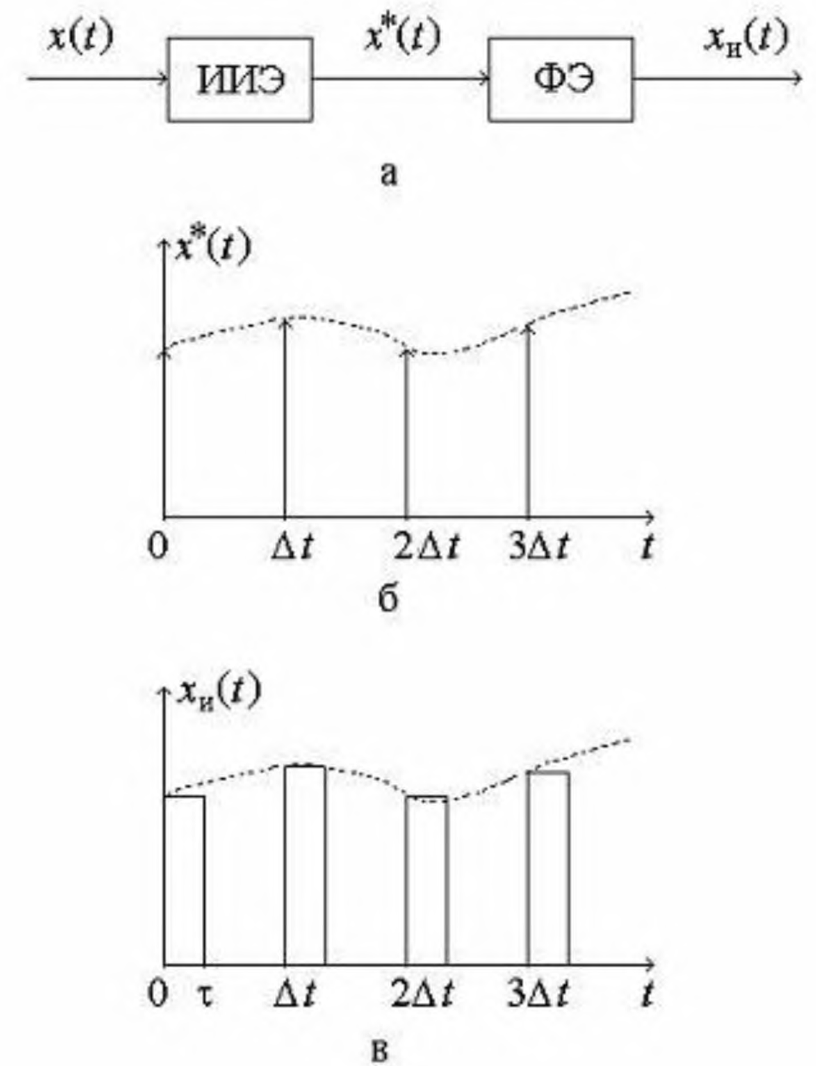
$$Y(t_{i+1}) = \mathrm{e}^{A(\Delta t - \Delta\tau)} \mathrm{e}^{(A-KH)\Delta\tau} Y(t_i)$$

$$\Phi_э = \mathrm{e}^{A(\Delta t - \Delta\tau)} \mathrm{e}^{(A-KH)\Delta\tau}$$

$$\det(zI - \Phi_э) = 0.$$

11.2. Дискретные системы: решетчатые функции, разностные уравнения, z-преобразование

$$\Delta\tau \ll \Delta t \Rightarrow \Delta\tau \to 0$$



$$x^{*}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i)\delta(t - t_i),$$

$$x_{\text{Н}}^{*}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)\delta(t/\Delta t - i).$$

$$L\{x^*(t)\} = \int_0^\infty x^*(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = \int_0^\infty \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i)\delta(t-t_i)\mathrm{e}^{-pt}dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i)\mathrm{e}^{-pt_i} = F_{\text{Д}}(p).$$

-Дискретное преобразование Лапласа

$$z=\mathrm{e}^{p\Delta t}$$

$$F_{\text{Д}}(z) = Z\{x(t_i)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i)z^{-i}.$$

- z-преобразование

$$Z\{x(t_i,\varepsilon)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i,\varepsilon)z^{-i}.$$

-модифицированное z-преобразование (ε=δτ/Δt)

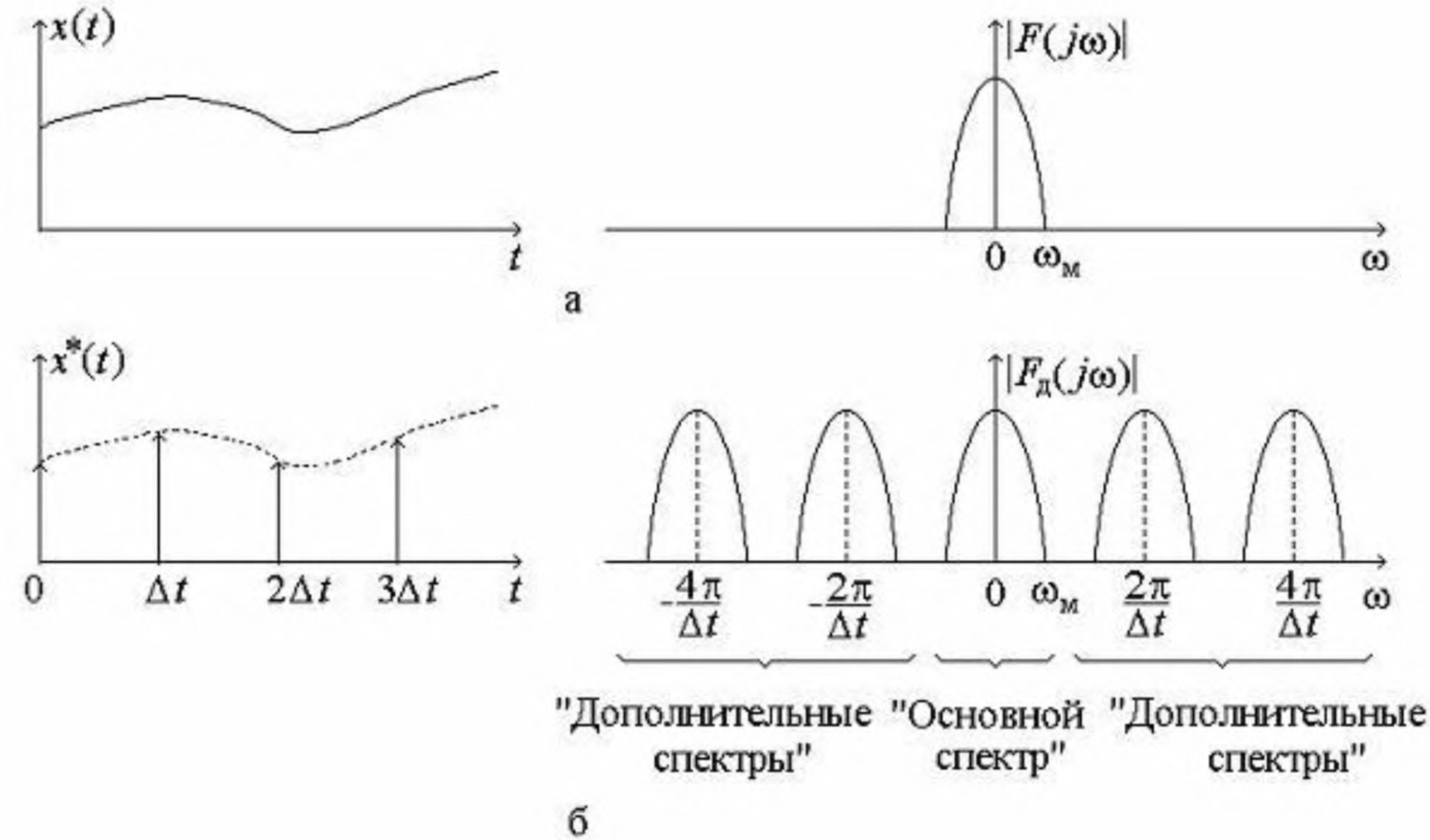
Примеры

$x(t)$	$L\{x(t)\}$	$Z\{x^*(t,\varepsilon)\}$
$1(t)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{z}{z-1}$
t	$\dfrac{1}{p^2}$	$\dfrac{\Delta t z}{z-1}\left(\dfrac{1}{z-1}+\varepsilon\right)$

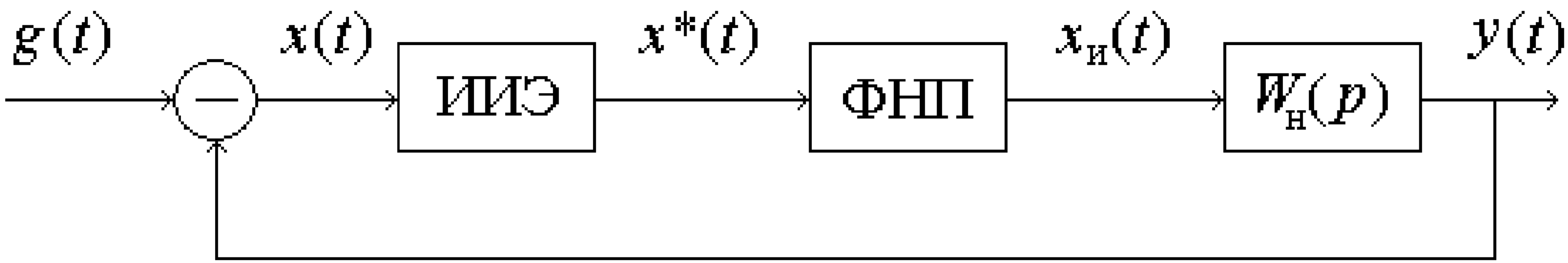
11.3. Спектр решетчатой (дискретной) функции. Фиксатор нулевого порядка

$$x(t) \Rightarrow F(p) = L\{x(t)\} \xRightarrow{p=j\omega} F(j\omega)$$

$$x(t_i) = x^*(\mathrm{t}) \Rightarrow F(z) = z\{x(t_i)\} \xRightarrow{z=e^{j\omega\Delta t}} F_\partial(j\omega)$$



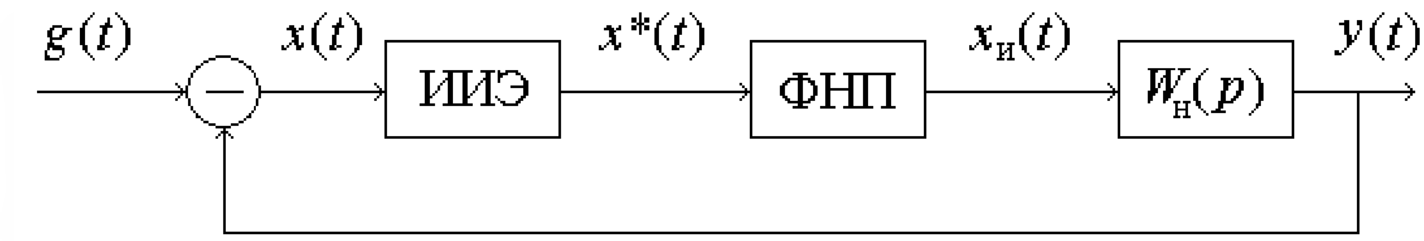
$$\frac{2\pi}{\Delta t} > 2\omega_м \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\Delta t} > 2f_м$$



ФНП – фиксатор нулевого порядка

$$W_{ФНП}(p) = \frac{1 - e^{-p\Delta t}}{p}$$

11.4. Передаточная функция дискретной САР



$$W(z)=\frac{y(z,\varepsilon)}{g(z)} \quad (1)$$

$$W_p(p)=W_{фнп}(p)W_н(p)=(1-e^{-p\Delta t})\frac{W_н(p)}{p} \quad (2)$$

$$W_p(z,\varepsilon)=(1-z^{-1})W_н^*(z,\varepsilon) \quad (3)$$

$$x(t_i)=g(t_i)-y(t_{i-1},\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=1} \quad (4)$$

$$x(z)=g(z)-z^{-1}y(z,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=1} \quad (5)$$

$$y(z,\varepsilon)=x(z)W_p(z,\varepsilon) \quad (6)$$

$$W(z,\varepsilon)=\frac{W_p(z,\varepsilon)}{1+z^{-1}W_p(z,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=1}} \quad (7)$$

$$y(t_{i-1},\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=1}=y(t_i,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$W(z,\varepsilon)=\frac{W_p(z,\varepsilon)}{1+W_p(z,\varepsilon)} \quad (8)$$

Пример
$$W_{н}(p)=\frac{K}{p},\quad W_{фнп}(p)W_{н}(p)=(1-\mathrm{e}^{-p\Delta t})\frac{K}{p^{2}}.$$

$$W_{p}(z,\varepsilon)=(1-z^{-1})\frac{K\Delta tz}{z-1}(\frac{1}{z-1}+\varepsilon).$$

$$W_{p}(z,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{K\Delta t}{z-1}\qquad W_{p}(z,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=1}=\frac{K\Delta tz}{z-1}$$

$$W(z)=\frac{W_{p}(z,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}}{1+z^{-1}W_{p}(z,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=1}}=\frac{K\Delta t}{z+(K\Delta t-1)}$$

Характеристическое уравнение

$$z+(K\Delta t-1)=0$$

Разностное уравнение

$$\frac{y(z)}{g(z)} = \frac{K\Delta t z^{-1}}{1+(K\Delta t - 1)z^{-1}}$$

$$y(z) + z^{-1}y(z)(K\Delta t - 1) = z^{-1}g(z)K\Delta t$$

$$y(t_i) + y(t_{i-1})(K\Delta t - 1) = g(t_{i-1})K\Delta t$$

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + K\Delta t[g(t_{i-1}) - y(t_{i-1})]$$

$$\Delta t \to 0: \quad y(t_i) = y(t_{i-1}) + K\Delta t[g(t_i) - y(t_{i-1})]$$

Частотные характеристики

$$z = e^{j\omega\Delta t} = \cos\omega\Delta t + j\sin\omega\Delta t \approx 1 + j\omega\Delta t, \quad \omega \ll \frac{2\pi}{\Delta t}$$

$$W(j\omega) = \frac{K\Delta t}{1 + j\omega\Delta t + K\Delta t - 1} = \frac{K}{K + j\omega}$$

Связь описаний дискретных САР во временной и частотной областях

$$Y(t_i) = \Phi Y(t_{i-1}) + Kg(t_i),$$

$$y(t_i) = HY(t_i),$$

$$Y(z) = \Phi z^{-1} Y(z) + Kg(z),$$

$$y(z) = HY(z).$$

$$y(z) = H(zI - \Phi)^{-1} zKg(z).$$

$$z^{-1} y(z) = H(zI - \Phi)^{-1} Kg(z)$$

$$W(z) = \frac{y(z)}{g(z)} = H(zI - \Phi)^{-1} zK.$$

$$W(z) = H(zI - \Phi)^{-1} K.$$

Заключение

$$z(t) = HG(t) + v(t) \quad (1)$$

$$z(t) = au(t-\tau)\cos[\omega(t-\tau)+\varphi] + v(t) \quad (2)$$

$$z(t) = h[G(t)] + v(t) \quad (3)$$

end