IMU?

Per misurare gli angoli di rollio e beccheggio di un sistema è necessario utilizzare un particolare sensore chiamato IMU (inertial measurement unit) a 6 assi, una composizione di due sensori quali giroscopio a 3 assi e accelerometro a 3 assi.
Il giroscopio misura la velocità angolare intorno ai tre assi principali mentre l'accelerometro (come si deduce dal nome) misura la risultante delle forze ad esso applicate (compresa quella di gravità).
Entrambi i sensori possono misurare indipendentemente gli angoli desiderati sfruttanto diverse metodologie, ognuna delle quali ha i suoi vantaggi e svantaggi. Per questo motivo è ncessario combinare le due misure per ottenere una stima il più preciso possibile delle grandezze alle quali siamo interessati.

Giroscopio

Come precedentemente accennato il giroscopio misura le velocità angolari proprie del sensore intorno ai 3 assi principali definiti come x, y e z, le cui direzioni sono solitamente segnate sul sensore stesso.
Bisogna innanzitutto chiarire che la velocità angolare su ogni asse NON è $\omega_i = d\theta_i/dt$ (con θ_i l'angolo compiuto durante la rotazione intorno all'i-esimo asse).

"Old method"

Poichè siamo interessati soltanto agli angoli di rollio e beccheggio (non all'imbardata), nonostante la pressa appena fatta, si può pensare che per piccole oscillazioni intorno all'orizzontale i due angoli possano essere determinati l'uno indipendentemente dall'altro integrando (in tempo discreto) le velocità angolari riferite ai relativi assi.

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \omega_x dt \tag{1}$$

$$\beta(t) = \beta(t-1) + \omega_y dt \tag{2}$$

Le veloctià angolari sono ottenute dalla lettura diretta del sensore.
I risultati ottenuti con tale metodo sono abbastanza accettabili per piccole rotazioni intorno all'equilibrio orizzontale, per movimenti intorno a un equilibrio non orizzontale si possono verificare grandi discrepanze tra la posizione reale e quella calcolata.

"New method"

Per poter discutere di calcoli sugli angoli di rollio e beccheggio è necessario determinare una convenzione comune: l'orientamento di un corpo è totalmente definito tramite la successione di tre rotazioni, tale stato si rappresenta tramite una matrice (di rotazione) 3x3.

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_x(\alpha) \tag{3}$$

dove α è l'angolo di rollio, β l'angolo di beccheggio e γ l'angolo d'imbardata.
Tale sequenza può essere letta principalmente in due modi differenti:

- da sx a dx: la rotazione i-esima è riferita agli assi nella posizione successiva alla rotazione *(i-1)*-esima
- da dx a sx: la rotazione i-esima è riferita agli assi nella posizione iniziale

Per la seguente trattazione è importante focalizzarsi sul primo modo di interpretazione, tale caratteristica è valida per qualsiasi moltiplicazione di matrici di rotazione.
Nota la matrice di orientamento di un certo istante (R_{t-1}) per ottenere la matrice relativa all'istante successivo è necessario post-moltiplicare R_{t-1} per la matrice di variazione di rotazione tra l'istante *t-1* e t, ovvero per dR_t.
Considerando brevi variazioni di tempo alla volta e velocità angolari non elevate possiamo approssimare la matrice dR_t come la composizione delle rotazioni lungo i 3 assi nell'intervallo tra *t-1* e t:

$$dR_t = R_z(d\gamma)R_y(d\beta)R_x(d\alpha) \tag{4}$$

Grazie all'accelerometro possiamo facilmente ottenere: $d\gamma = \omega_z dt$, $d\beta = \omega_y dt$ e $d\alpha = \omega_x dt$.
Quindi una volta calcolata la matrice di orientamento $R_t = R_{t-1}dR$ è possibile ricavare gli angli di rollio beccheggio (e imbardata) tramite semplici funzioni trigonometriche:

$$\alpha = \arctan(r_{32}/r_{33}) \tag{5}$$

$$\beta = \arctan\left(-r_{31}/\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \tag{6}$$

$$\gamma = \arctan(r_{21}/r_{11}) \tag{7}$$

Consideranto come r_{ij} l'elemento della i-esima riga e della j-esima colonna della matrice R_t.

Accelerometro

"Old method"

Secondo la setessa approssimazione presa in considerazione per la gestione del giroscopio è possibile ricavare indipendentemente i due angoli desiderati direttamente dalle misure ricavate dal sensore.

$$\alpha = \arctan(a_y/a_z) \tag{8}$$

$$\beta = \arctan(a_x/a_z) \tag{9}$$

Poichè tale metodo non tiene in considerazione la relazione tra le rotazioni (le rotazioni successive sono riferite ai "nuovi" assi) i due angoli non sono completamente coerenti con la definizione di rollio e beccheggio definita all'inizio della trattazione.

"New method"

Per quanto riguarda l'accelerometro bisogna ricordare che (considerando i moduli dei vettori in g: vettore gravità $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, positivo perchè viene misurata la risultante delle forze applicate, da fermo o in moto rettilineo uniforme uguale e opposta alla gravità):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (R_z R_y R_x) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = (R_z R_y R_x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Dalle precedenti uguaglianze, ricordando che per le matrici di rotazione vale la proprietà $R^{-1} = R^T$, si può ricavare la relazione tra le letture dell'accelerometro (a_x, a_y e a_z) e gli angoli desiderati:

$$\alpha = \arctan(a_y/a_z) \tag{11}$$

$$\beta = \arcsin(-a_x) \tag{12}$$

Filtro

Come è stato accennato nella prima sezione entrambi i metodi hanno dei pro e dei contro.

Giroscopio

Per calcolare gli angoli desiderati è stato necessario integrare (in tempo discreto) i valori letti dal giroscopio.
Tale calcolo è molto preciso a breve termine ma poichè abbiamo a che fare con un sensore reale è difficile (se non impossibile) ottenere misure esatte.
Per quanto riguarda l'integrazione il problema maggiore è rappresentato dall'offset dei dati ricevuti, tale errore non è del tutto eliminabile in quanto varia in relazione a fattori difficilmente prevedibili (temperatura, tempo di esercizio, ecc...).Anche un lieve offset a lungo termine porta il risultato a divergere.

Accelerometro

L'accelerometro non è soggetto ad integrazione quindi i valori da esso ottenuti non accumulano errore col tempo.
Questo sensore comunque porta principalmente due svantaggi.
La misura degli angoli desiderati si basa sulla lettura della direzione dell'accelerazione di gravità, cosa possibile con buona precisione solo se si è fermi o in moto rettilineo uniforme, in caso di accelerazioni le misure saranno affette da errori indesiderati (gran parte del tempo di lavoro).
Un altro problema è che tale sensore restituisce valori abbastanza affetti da rumore, quindi i dati sono difficilmente utilizzabili per ottenere misure a breve termine anche attraverso buoni filtri.

Filtro

Ill modo più semplice ma comunque efficace per unire i due risultati per ottenere una buona stima delle misure desiderate è applicare un *filtro complementare*.
Tale filtro verifica che l'ampiezza della risultante della lettura dell'accelerometro sia pressochè unitaria (sensore fermo o in moto rettilineo uniforme) e media i due risultati.

$$\theta_i = 0.95\theta_{i,gyro} + 0.05\theta_{i,acc} \tag{13}$$

Nel caso venga verificato che il sensore sia affetto da non-trascurabili accelerazioni i dati dell'accelerometro non sono per nulla attendibili quindi ci si fida soltanto del giroscopio.
Risulta difficile trascorrere molto tempo senza mai poter contare sulle letture dell'accelerometro, comunque poichè sia la banda accettata di errore che i pesi per la correzione dei dati sono costanti tale metodo non è il migliore utilizzabile.

Stiamo lavorando a un filtro più efficiente, stay tuned!

Per ora (da Matlab) si può notare il miglioramento dell'interpretazione dei dati dei sensori, è stato eseguito un movimento noto per non venire rilevato con il primo metodo mentre con il secondo è evidente tale movimento: