Proyecto Final: Incontinencia Urinaria

Meraz Galeana Mauricio Jesús (18210139) , PerézChavéz,Marco(19212423),
Meza Armenta Alejandra (19212415)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 16, 2024

Palabras clave: Sistema urinario; Incontinencia urinaria; Modelo matemático; Lazo cerrado ; MATLAB.

Correo: **{L19212423, L19212415**, **mauricio.meraz18}@tectijuana.edu.mx**

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Función de transferencia

1.1 Ecuaciones principales

La ecuación de la malla principal:

$$V_e\left(t\right) = L_1 \frac{di_1\left(t\right)}{dt} + R_1 i_1\left(t\right) + R_3[i_1\left(t\right) - i_2\left(t\right)]dt + \frac{1}{C_1}\int i_1\left(t\right) - i_2\left(t\right)dt$$

Ecuación de la segunda malla:

$$R_3[i_1\left(t\right) - i_2\left(t\right)dt]\frac{1}{C_1}\int[i_1\left(t\right) - i_2\left(t\right)dt] = R_2 i_2\left(t\right) + \int \frac{1}{C_2} i_2\left(t\right)dt$$

Luego, como en el circuito la resistencia R_2 se encuentra en paralelo con el voltaje de salida $V_s(t)$, se tiene que éste será igual a la caída de voltaje de esta resistencia:

$$V_s\left(t\right) = \int \frac{1}{C_2} i_2\left(t\right)dt$$

1.2 Transformada de Laplace

Al aplicar la transformada de Laplace de la primera malla se tiene que:

$$V_e(s) = L_1 s I_1(s) + R_1 I_1(s) + \frac{I_1(s) - I_2(s)}{C_1 s} + R_2 \left(I_1(s) - I_2(s)\right)$$

Mientras que, en la segunda ecuación se llega a lo que se muestra a continuación:

$$\frac{I_2(s) - I_1(s)}{C_1 s} + R_2 \left(I_2(s) - I_1(s)\right) + R_3 I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2 s}$$

Por lo tanto, el voltaje de salida en el dominio de la s se escribe de la siguiente forma:

$$V_s(s) = \frac{I_2(s)}{C_2 s}$$

1.3 Procedimiento algebraico

Ahora se despeja el flujo $I_1(s)$ de la ecuación de la segunda malla:

$$\begin{aligned}
\frac{I_2(s)}{C_1 s} - \frac{I_1(s)}{C_1 s} + R_2 I_2(s) - R_2 I_1(s) + R_3 I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2 s} &= 0 \\
\frac{I_1(s)}{C_1 s} + R_2 I_1(s) &= \frac{I_2(s)}{C_1 s} + R_2 I_2(s) + R_3 I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2 s} \\
\left(\frac{1}{C_1 s} + R_2\right) I_1(s) &= \left(\frac{1}{C_1 s} + R_2 + R_3 + \frac{1}{C_2 s}\right) I_2(s) \\
\left(\frac{C_1 R_2 s + 1}{C_1 s}\right) I_1(s) &= \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 s^2}\right) I_2(s) \\
I_1(s) &= \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s}\right) I_2(s)
\end{aligned}$$

Sustituyendo $I_1(s)$ en la ecuacion de la primera malla

$$\begin{aligned}
V_e(s) &= L_1 s \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s}\right) I_2(s) \ldots \\
&\quad + R_1 \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s}\right) I_2(s) \\
&\quad + \frac{\left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s}\right) I_2(s)}{C_1 s} - \frac{I_2(s)}{C_1 s} \ldots \\
&\quad + R_2 \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s}\right) I_2(s) - R_2 I_2(s)
\end{aligned}$$

factorizando terminos de $I_2\left(s\right)$

$$V_e\left(s\right)=\left(\begin{array}{c} L_1s\left(\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1C_2R_2s^2+C_2s}\right) \\ +R_1\left(\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1C_2R_2s^2+C_2s}\right) \\ +\frac{\left(\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1C_2R_2s^2+C_2s}\right)}{C_1s}-\frac{1}{C_1s}+R_2\left(\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1C_2R_2s^2+C_2s}\right)-R_2 \end{array}\right)I_2\left(s\right)$$

Haciendo que cada termino tenga denominador comun

$$V_e\left(s\right)=\left(\begin{array}{c} L_1s\left(\frac{C_1^2C_2R_2s^3+C_1^2C_2R_3s^3+C_1^2s^2+C_1C_2s^2}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}\right) \\ +R_1\left(\frac{C_1^2C_2R_2s^3+C_1^2C_2R_3s^3+C_1^2s^2+C_1C_2s^2}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}\right)+\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}-\frac{C_1C_2R_2s^2+C_2s}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2} \\ +R_2\left(\frac{C_1^2C_2R_2s^3+C_1^2C_2R_3s^3+C_1^2s^2+C_1C_2s^2}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}\right)-\frac{C_1^2C_2R_2^2s^3+C_1C_2R_2s^2}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2} \end{array}\right)I_2\left(s\right)$$

Expandiendo la ecuacion

$$V_e\left(s\right)=\left(\begin{array}{c} \frac{C_1^2C_2L_1R_2s^4+C_1^2C_2L_1R_3s^4+C_1^2L_1s^3+C_1C_2L_1s^3}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}+\frac{C_1^2C_2R_1R_2s^3+C_1^2C_2R_1R_3s^3+C_1^2R_1s^2+C_1C_2R_1s^2}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}... \\ +\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}-\frac{C_1C_2R_2s^2+C_2s}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}... \\ +\frac{C_1^2C_2R_2^2s^3+C_1^2C_2R_2R_3s^3+C_1^2R_2s^2+C_1C_2R_2s^2}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}-\frac{C_1^2C_2R_2^2s^3+C_1C_2R_2s^2}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2} \end{array}\right)I_2\left(s\right)$$

Sumando terminos semejantes

$$V_e\left(s\right)=\left(\begin{array}{c} \frac{C_1^2C_2L_1R_2s^4+C_1^2C_2L_1R_3s^4+C_1^2L_1s^3+C_1C_2L_1s^3}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2} \\ +\frac{C_1^2C_2R_1R_2s^3+C_1^2C_2R_1R_3s^3+C_1^2R_1s^2+C_1C_2R_1s^2}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}+... \\ \frac{C_1C_2R_3s^2+C_1s}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}+\frac{C_1^2C_2R_2R_3s^3+C_1^2R_2s^2}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2} \end{array}\right)I_2\left(s\right)$$

Agrupando los terminos en una sola fraccion

$$V_e\left(s\right)=\left(\frac{\begin{array}{c} C_1^2C_2L_1R_2s^4+C_1^2C_2L_1R_3s^4+C_1^2L_1s^3... \\ +C_1C_2L_1s^3+C_1^2C_2R_1R_2s^3 \\ ...+C_1^2C_2R_1R_3s^3+C_1^2R_1s^2+C_1C_2R_1s^2+C_1C_2R_3s^2... \\ +C_1s+C_1^2C_2R_2R_3s^3+C_1^2R_2s^2 \end{array}}{C_1^2C_2R_2s^3+C_1C_2s^2}\right)I_2\left(s\right)$$

Construyendo la funcion de transferencia

$$\frac{I_2(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1^2C_2R_2s^3 + C_1C_2s^2}{\begin{array}{c} C_1^2C_2L_1R_2s^4 + C_1^2C_2L_1R_3s^4 + C_1^2L_1s^3 + C_1C_2L_1s^3 + C_1^2C_2R_1R_2s^3 + ... \\ C_1^2C_2R_1R_3s^3 + C_1^2R_1s^2 + C_1C_2R_1s^2 + C_1C_2R_3s^2 + C_1s + C_1^2C_2R_2R_3s^3 + C_1^2R_2s^2 \end{array}}$$

Agrupando terminos comunes de s

$$\frac{I_2(s)}{Ve(s)} = \frac{C_1^2C_2R_2s^3 + C_1C_2s^2}{\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} C_1^2C_2L_1R_2 + ... \\ C_1^2C_2L_1R_3 \end{array}\right)s^4 + \left(\begin{array}{c} C_1^2L_1 + C_1C_2L_1 + C_1^2C_2R_1R_2... \\ +C_1^2C_2R_1R_3 + C_1^2C_2R_2R_3 \end{array}\right)s^3... \\ + \left(\begin{array}{c} C_1^2R_1 + C_1C_2R_1... \\ +C_1C_2R_3 + C_1^2R_2 \end{array}\right)s^2 + (C_1)s \end{array}}$$

Simplificando la funcion de transferencia al eliminar un grado de s

$$\frac{I_2(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1^2C_2R_2s^2 + C_1C_2s}{\begin{array}{c} \left(C_1^2C_2L_1R_2 + C_1^2C_2L_1R_3\right)s^3 + ... \\ \left(\begin{array}{c} C_1^2L_1 + C_1C_2L_1 + C_1^2C_2R_1R_2... \\ +C_1^2C_2R_1R_3 + C_1^2C_2R_2R_3 \end{array}\right)s^2 + \left(C_1^2R_1 + C_1C_2R_1 + C_1C_2R_3 + C_1^2R_2\right)s + C_1 \end{array}}$$

Simplificando la funcion de transferencia al eliminar el termino comun C_1

$$\frac{I_2(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1C_2R_2s^2 + C_2s}{\begin{array}{c} (C_1C_2L_1R_2 + C_1C_2L_1R_3)s^3... \\ + \left(\begin{array}{c} C_1L_1 + C_2L_1 + C_1C_2R_1R_2 + ... \\ C_1C_2R_1R_3 + C_1C_2R_2R_3 \end{array}\right)s^2... \\ + (C_1R_1 + C_2R_1 + C_2R_3 + C_1R_2)s + 1 \end{array}}$$

Resolviendo para $I_2(s)$ en la ecuacion del voltaje de salida

$$V_s(s) = \frac{I_2(s)}{C_2s}$$

$$I_2(s) = C_2sV_s(s)$$

Sustituyendo $I_2(s)$ en la funcion de transferencia

$$\frac{C_2sV_s(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1C_2R_2s^2 + C_2s}{\begin{array}{c} (C_1C_2L_1R_2 + C_1C_2L_1R_3)s^3 + (C_1L_1 + C_2L_1 + C_1C_2R_1R_2 + C_1C_2R_1R_3 + C_1C_2R_2R_3)s^2... \\ + (C_1R_1 + C_2R_1 + C_2R_3 + C_1R_2)s + 1 \end{array}}$$

Dividiendo ambos lados de la ecuacion entre C_2s

$$\frac{V_s\left(s\right)}{V_e\left(s\right)} = \frac{C_1 R_2 s+1}{\begin{array}{c}\left(C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_2 L_1 R_3\right) s^3 + \left(C_1 L_1 + C_2 L_1 + C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 C_2 R_1 R_3 + C_1 C_2 R_2 R_3\right) s^2 ... \\ + \left(C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_3 + C_1 R_2\right) s + 1\end{array}}$$

1.4 Resultado

Por lo tanto, se tiene que la función de transferencia es igual a:

$$\frac{V_s\left(s\right)}{V_e\left(s\right)} = \frac{C_1 R_2 s+1}{\begin{array}{c}\left(C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_2 L_1 R_3\right) s^3 + \left(C_1 L_1 + C_2 L_1 + C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 C_2 R_1 R_3 + C_1 C_2 R_2 R_3\right) s^2 ... \\ + \left(C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_3 + C_1 R_2\right) s + 1\end{array}}$$

$$\frac{V_s\left(s\right)}{V_e\left(s\right)} = \frac{R_2}{\left(L s^2 C R_2 + L s + C s R_1 R_2 + R_1 + R_2\right)}$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto

$$(C_1 L_1 + C_2 L_1 + C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 + C_1 C_2 R_1 R_2 R_3) s^2 + (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_1 C_2 R_3) s + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{1}{2C_1 L_1 + 2C_2 L_1 + 2C_1 C_2 R_1 R_2 + 4C_1 C_2 R_1 R_2 R_3} ... \\
&\quad \left(C_1 R_1 + C_1 R_2 - \sqrt{\begin{array}{c} C_1^2 R_1^2 + C_1^2 R_2^2 - 4C_1 L_1 - 4C_2 L_1 + C_2^4 R_1^2 R_3^2 + 2C_1^2 R_1 R_2 + 2C_1 C_2^2 R_1^2 R_3 ... \\ -4C_1 C_2 R_1 R_2 - 8C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 + 2C_1 C_2^2 R_1 R_2 R_3 \\ +C_2^2 R_1 R_3 \end{array}} ... \right) \\
\lambda_2 &= -\frac{C_1 R_1 + C_1 R_2 + \sqrt{\begin{array}{c} C_1^2 R_1^2 + C_1^2 R_2^2 - 4C_1 L_1 - 4C_2 L_1 + C_2^4 R_1^2 R_3^2 + 2C_1^2 R_1 R_2 + 2C_1 C_2^2 R_1^2 R_3 ... \\ -4C_1 C_2 R_1 R_2 - 8C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 + 2C_1 C_2^2 R_1 R_2 R_3 \\ +C_2^2 R_1 R_3 \end{array}} ...}{2C_1 L_1 + 2C_2 L_1 + 2C_1 C_2 R_1 R_2 + 4C_1 C_2 R_1 R_2 R_3}
\end{aligned}$$

$\text{assume}\left(C_1, \text{positive}\right) = \left(0, \infty\right)$

$\text{assume}\left(C_2, \text{positive}\right) = \left(0, \infty\right)$

$\text{assume}\left(C_3, \text{positive}\right) = \left(0, \infty\right)$

$\text{assume}\left(C_4, \text{positive}\right) = \left(0, \infty\right)$

$\text{assume}\left(L_1, \text{positive}\right) = \left(0, \infty\right)$

assume $(L_2, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(R_1, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(R_2, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(R_3, \text{positive}) = (0, \infty)$

Valores de los parametros para el control y el caso

$$\begin{aligned}
R_1 &= .3\Omega \\
R_2 &= .3\Omega \\
R_3 &= .3\Omega \\
L_1 &= 1 \times 10^{-6} H \\
L_2 &= 2 \times 10^{-6} H \\
C_1 &= 0.9 \times 10^{-6} F \\
C_2 &= 0.9 \times 10^{-6} F \\
C_3 &= 1F \\
C_4 &= 1.9F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -140871.54 \\
\lambda_2 &= -140871.54
\end{aligned}$$

Valores para el control (individuo sano):

$$R_1 = 200$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -5560.88 \\
\lambda_2 &= -2260276.83
\end{aligned}$$

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

El modelo de ecuaciones integro-diferenciales se formula al despejar las variables dependientes y la salida del sistema, por lo tanto, se obtiene el siguiente resultado de $V_s(s)$:

$$i_1(t) = \frac{V_e s(t) - L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - \int \frac{(i_1(t) - i_2(t))dt}{C_1} - R_2 (i_1(t) - i_2(t))}{R_1}$$

$$i_1(t) = \left[V_e(t) - L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt - [R_2 i_1(t) - i_2(t)] \right] \frac{1}{R_1}$$

$$i_2\left(t\right)=\frac{-\int\frac{\left(i_2(t)-i_1(t)\right)dt}{C_1}-R_2\left(i_2\left(t\right)-i_1\left(t\right)\right)-\int\frac{i_2(t)dt}{C_2}}{R_3}$$

$$i_2\left(t\right)=\left[\frac{1}{C_1}\int[i_1\left(t\right)-i_2\left(t\right)]-[R_2i_2\left(t\right)-i_1\left(t\right)]dt-\frac{1}{c_2}\int i_2\left(t\right)dt\right]\frac{1}{R_3}$$

$$V_s\left(t\right)=\int\frac{i_2\left(t\right)dt}{C_2}$$

$$V_s\left(t\right)=\int\frac{1}{C_2}i_2\left(t\right)dt$$

4 Error en estado estacionario

El error en estado estacionario, se calcula mediante el siguiente límite, donde $R(s)$ representa un escalón (1/s):

$$\begin{aligned}
e\left(t\right) &= \lim_{s\to 0} sR\left(s\right)\left[1-\frac{V_e\left(s\right)}{V_s\left(s\right)}\right]\\
e\left(t\right) &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left[1-\frac{C_1R_2s+1}{\begin{array}{c}\left(C_1C_2L_1R_2+C_1C_2L_1R_3\right)s^3...\\+\left(C_1L_1+C_2L_1+C_1C_2R_1R_2+C_1C_2R_1R_3+C_1C_2R_2R_3\right)s^2...\\+\left(C_1R_1+C_2R_1+C_2R_3+C_1R_2\right)s+1\end{array}}\right]\\
e\left(t\right) &= 1-\frac{1}{1}\\
e\left(t\right) &= 0V.
\end{aligned}$$

5 Cálculo de componentes para el controlador PID

$$\begin{aligned}
k_I &= \frac{1}{R_eC_r}=825152.9719\\
k_P &= \frac{R_r}{R_e}=140.043\\
k_D &= R_rC_e=0.00076675
\end{aligned}$$

$$C_r=1\times 10^{-6}$$

$$
\begin{aligned}
R_e &= \frac{1}{k_I C_r} = \frac{1}{(825152.9719)(1 \times 10^{-6})} = 1.2119 \\
R_r &= k_P R_e = (140.043)(1.2119) = 169.72 \\
C_e &= \frac{k_D}{R_r} = \frac{0.00076675}{169.72} = 4.5177 \times 10^{-6}
\end{aligned}
$$