Proyecto final: Sistema urinario

Meraz Galeana Jesús Mauricio - 18210139, Pérez Chávez Marco Antonio - 19212423, Meza Armenta Alejandra Lizette - 19212415

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 17,2024

Palabras clave: Función de transferencia; Transformada de Laplace; Estabilidad en lazo cerrado; Ecuaciones integro-diferenciales; Controlador PID; Sistema respiratorio.

Correos:

Mauricio.meraz18@tectijuana.edu.mx

Marco.perez193@tectijuana.edu.mx

Alejandra.meza193@tectijuana.edu.mx

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo**(paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1. Función de transferencia

El circuito cuenta con dos mallas, por lo que se analizó con la ley de voltaje de Kirchoff. La primer malla brinda la ecuación:

$$V_i\left(t\right) = L_1\frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1\left(t\right) + \frac{\int(i_1(t)-i_2(t))dt}{C_1} + R_2\left(i_1\left(t\right) - i_2\left(t\right)\right)$$

La segunda malla resultó:

$$0 = \frac{\int(i_2(t)-i_1(t))dt}{C_1} + R_2\left(i_2\left(t\right) - i_1\left(t\right)\right) + R_3 i_2\left(t\right) + \frac{\int i_2(t)dt}{C_2}$$

El voltaje de salida se define como:

$$V_o\left(t\right) = \frac{\int i_2(t)dt}{C_2}$$

1.1. Transformada de Laplace

Para construir la función de transferencia se analizaron las ecuaciones en el dominio de la frecuencia, razón por la que se usó la Transformada de Laplace. La primera ecuación resultó:

$$V_i\left(s\right) = L_1 s I_1\left(s\right) + R_1 I_1\left(s\right) + \frac{I_1(s)-I_2(s)}{C_1 s} + R_2\left(I_1\left(s\right) - I_2\left(s\right)\right)$$

La segunda ecuación es:

$$0 = \frac{I_2(s)-I_1(s)}{C_1 s} + R_2\left(I_2\left(s\right) - I_1\left(s\right)\right) + R_3 I_2\left(s\right) + \frac{I_2(s)}{C_2 s}$$

El voltaje de salida queda definido en el dominio de la frecuencia por:

$$V_o\left(s\right) = \frac{I_2(s)}{C_2 s}$$

1.2. Procedimiento algebraico

Se resolvió para $I_1(s)$ en la segunda malla

$$I_1(s) = \left(\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1C_2R_2s^2+C_2s}\right) I_2(s)$$

Posteriormente, se sustituyó el valor de $I_1(s)$ en la ecuación de la primera malla, lo que logró:

$$V_i(s) = a_0 + a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$$

Donde cada término de a_n es:

$$a_0 = L_1s\left(\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1C_2R_2s^2+C_2s}\right) I_2(s)$$

$$a_1 = R_1\left(\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1C_2R_2s^2+C_2s}\right) I_2(s)$$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1C_2R_2s^2+C_2s}\right) I_2(s)}{C_1s}$$

$$a_3 = \frac{I_2(s)}{C_1s}$$

$$a_4 = R_2\left(\frac{C_1C_2R_2s^2+C_1C_2R_3s^2+C_1s+C_2s}{C_1C_2R_2s^2+C_2s}\right) I_2(s)$$

$$a_5 = R_2I_2(s)$$

Se resolvió para $I_2(s)$ la ecuación del voltaje de salida:

$$I_2(s) = C_2sV_o(s)$$

1.3. Resultado

La función de transferencia resultó:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{b_0s+1}{a_0s^3+a_1s^2+a_2s+1}$$

Donde los coeficientes a_0, a_1, a_2 y b_0 son:

$$a_0 = C_1C_2L_1R_2 + C_1C_2L_1R_3$$

$$a_1 = C_1L_1 + C_2L_1 + C_1C_2R_1R_2 + C_1C_2R_1R_3 + C_1C_2R_2R_3$$

$$a_2 = C_1R_1 + C_2R_1 + C_2R_3 + C_1R_2$$

$$b_0 = C_1R_2$$

2. Estabilidad del sistema en lazo abierto

Al sustituir los valores en la función de transferencia según sea el caso, se consiguen los siguientes valores:

Sustituyendo valores para control

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{0{,}27s+1}{4{,}86\times10^{-7}s^3+0{,}2187018s^2+1{,}08s+1}$$

Dividiendo cada termino entre el coeficiente del termino s^3

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{555555{,}5556s+2057613{,}169}{s^3+450003{,}7037s^2+2222222{,}222s+2057613{,}169}$$

El polinomio característico resulta:

$$s^3 + 450003{,}7037s^2 + 2222222{,}222s + 2057613{,}169 = 0$$

Los polos resultaron:

$$\lambda_1 = -449998{,}7654$$
$$\lambda_2 = -1{,}234571291$$
$$\lambda_3 = -3{,}703703703$$

Dado a que todos los polos resultaron negativos, se ubican en el semiplano izquierdo, por lo cual existe estabilidad.

Sustituyendo valores para caso

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{0{,}3s+1}{2{,}28\times10^{-6}s^3+0{,}8550058s^2+2{,}61s+1}$$

Dividiendo cada termino entre el coeficiente del termino s^3

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{131578{,}9474s+438596{,}4912}{s^3+375002{,}5439s^2+1144736{,}842s+438596{,}4912}$$

El polinomio característico resulta:

$$s^3 + 375002{,}5439s^2 + 1144736{,}842s + 438596{,}4912 = 0$$

Los polos resultaron:

$$\lambda_1 = -374999{,}4913$$
$$\lambda_2 = -0{,}4492604903$$
$$\lambda_3 = -2{,}603372111$$

Dado a que todos los polos resultaron negativos, se ubican en el semiplano izquierdo, por lo cual existe estabilidad.

3. Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

Partiendo del siguiente modelo de ecuaciones:

$$V_i\left(t\right) = L_1\frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1\left(t\right) + \frac{\int(i_1(t)-i_2(t))dt}{C_1} + R_2\left(i_1\left(t\right) - i_2\left(t\right)\right)$$
$$0 = \frac{\int(i_2(t)-i_1(t))dt}{C_1} + R_2\left(i_2\left(t\right) - i_1\left(t\right)\right) + R_3 i_2\left(t\right) + \frac{\int i_2(t)dt}{C_2}$$
$$V_o\left(t\right) = \frac{\int i_2(t)dt}{C_2}$$

Para la primera ecuación se resolvió para la variable $i_1\left(t\right)$ multiplicada por R_1

$$V_i\left(t\right) = L_1\frac{di_1(t)}{dt} + \left(R_1 + R_2\right) i_1\left(t\right) + \frac{\int(i_1(t)-i_2(t))dt}{C_1} - R_2 i_2\left(t\right)$$
$$i_1\left(t\right) = \left(-V_i\left(t\right) - L_1\frac{di_1(t)}{dt} - \frac{\int(i_1(t)-i_2(t))dt}{C_1} + R_2 i_2\left(t\right)\right)\frac{1}{R_1+R_2}$$

Para la segunda ecuación se resolvió para la variable $i_2\left(t\right)$ multiplicada por R_3

$$0 = \frac{\int(i_2(t)-i_1(t))dt}{C_1} + \left(R_2 + R_3\right) i_2\left(t\right) - R_2 i_1\left(t\right) + \frac{\int i_2(t)dt}{C_2}$$
$$i_2\left(t\right) = \left(-\frac{\int(i_2(t)-i_1(t))dt}{C_1} + R_2 i_1\left(t\right) - \frac{\int i_2(t)dt}{C_2}\right)\frac{1}{R_2+R_3}$$

El modelo de ecuaciones integro-diferenciales resultó:

$$i_1\left(t\right)=\left(-V_i\left(t\right)-L_1\frac{di_1(t)}{dt}-\frac{\int(i_1(t)-i_2(t))dt}{C_1}+R_2i_2\left(t\right)\right)\frac{1}{R_1+R_2}$$
$$i_2\left(t\right)=\left(-\frac{\int(i_2(t)-i_1(t))dt}{C_1}+R_2i_1\left(t\right)-\frac{\int i_2(t)dt}{C_2}\right)\frac{1}{R_2+R_3}$$
$$V_o\left(t\right)=\frac{\int i_2(t)dt}{C_2}$$

4. Error en estado estacionario

$$e\left(t\right)=\lim_{s\to 0}sR\left(s\right)\left[1-\frac{V_o(s)}{V_i(s)}\right]$$
$$e\left(t\right)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\left[1-\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{b_0s+1}{a_0s^3+a_1s^2+a_2s+1}\right]$$
$$e\left(t\right)=1-\frac{1}{1}$$
$$e\left(t\right)=1-1$$
$$e\left(t\right)=0$$

5. Cálculo de componentes para el controlador PID

La sintonización del controlador PID se realizo utilizando simulink, y se obtuvieron las siguientes ganancias:

$$K_P=\frac{R_r}{R_e}=10000$$
$$K_I=\frac{1}{R_eC_r}=515463{,}9175$$
$$K_D=R_eC_e=1\times^{-4}$$

Se eligió el capacitor C_r con un valor de $10nf$, por lo que a partir de ese valor se calcularon los demás valores para los componentes del amplificador PID.

Para la resistencia R_e se obtuvo:

$$R_e=\frac{1}{K_IC_r}=\frac{1}{(515463{,}9175)(10nf)}=194\Omega$$

En la resistencia R_r se logró:

$$R_r=K_PR_e=\left(10000\right)\left(194\right)=1{,}94M\Omega$$

El capacitor C_e resultó:

$$C_e=\frac{K_D}{R_e}=\frac{1\times^{-4}}{194}=515{,}4639175nf$$