

Proyecto Final: Incontinencia Urinaria

Meraz Galeana Mauricio Jesús (18210139) , PérezChavéz,Marco(19212423),
Meza Armenta Alejandra (19212415)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 16, 2024

Palabras clave: Sistema urinario; Incontinencia urinaria; Modelo matemático; Lazo cerrado ; MATLAB.

Correo: {L19212423, L19212415, mauricio.meraz18}@tectijuana.edu.mx

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Función de transferencia

1.1 Ecuaciones principales

La ecuación de la malla principal:

$$V_e(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + R_3 [i_1(t) - i_2(t)] dt + \frac{1}{C_1} \int i_1(t) - i_2(t) dt$$

Ecuación de la segunda malla:

$$R_3 [i_1(t) - i_2(t) dt] \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t) dt] = R_2 i_2(t) + \int \frac{1}{C_2} i_2(t) dt$$

Luego, como en el circuito la resistencia R_2 se encuentra en paralelo con el voltaje de salida $V_s(t)$, se tiene que éste será igual a la caída de voltaje de esta resistencia:

$$V_s(t) = \int \frac{1}{C_2} i_2(t) dt$$

1.2 Transformada de Laplace

Al aplicar la transformada de Laplace de la primera malla se tiene que:

$$V_e(s) = L_1 s I_1(s) + R_1 I_1(s) + \frac{I_1(s) - I_2(s)}{C_1 s} + R_2 (I_1(s) - I_2(s))$$

Mientras que, en la segunda ecuación se llega a lo que se muestra a continuación:

$$\frac{I_2(s) - I_1(s)}{C_1 s} + R_2 (I_2(s) - I_1(s)) + R_3 I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2 s}$$

Por lo tanto, el voltaje de salida en el dominio de la s se escribe de la siguiente forma:

$$V_s(s) = \frac{I_2(s)}{C_2 s}$$

1.3 Procedimiento algebraico

Ahora se despeja el flujo $I_1(s)$ de la ecuación de la segunda malla:

$$\begin{aligned} \frac{I_2(s)}{C_1 s} - \frac{I_1(s)}{C_1 s} + R_2 I_2(s) - R_2 I_1(s) + R_3 I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2 s} &= 0 \\ \frac{I_1(s)}{C_1 s} + R_2 I_1(s) &= \frac{I_2(s)}{C_1 s} + R_2 I_2(s) + R_3 I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2 s} \\ \left(\frac{1}{C_1 s} + R_2 \right) I_1(s) &= \left(\frac{1}{C_1 s} + R_2 + R_3 + \frac{1}{C_2 s} \right) I_2(s) \\ \left(\frac{C_1 R_2 s + 1}{C_1 s} \right) I_1(s) &= \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 s^2} \right) I_2(s) \\ I_1(s) &= \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s} \right) I_2(s) \end{aligned}$$

Sustituyendo $I_1(s)$ en la ecuación de la primera malla

$$\begin{aligned} V_e(s) &= L_1 s \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s} \right) I_2(s) \dots \\ &+ R_1 \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s} \right) I_2(s) \\ &+ \frac{\left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s} \right) I_2(s)}{C_1 s} - \frac{I_2(s)}{C_1 s} \dots \\ &+ R_2 \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s} \right) I_2(s) - R_2 I_2(s) \end{aligned}$$

factorizando terminos de $I_2(s)$

$$V_e(s) = \left(\begin{array}{c} L_1 s \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s} \right) \\ + R_1 \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s} \right) \\ + \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 s} \right) - \frac{1}{C_1 s} + R_2 \left(\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s} \right) - R_2 \end{array} \right) I_2(s)$$

Haciendo que cada termino tenga denominador comun

$$V_e(s) = \left(\begin{array}{c} L_1 s \left(\frac{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1^2 C_2 R_3 s^3 + C_1^2 s^2 + C_1 C_2 s^2}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \right) \\ + R_1 \left(\frac{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1^2 C_2 R_3 s^3 + C_1^2 s^2 + C_1 C_2 s^2}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \right) + \frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} - \frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \\ + R_2 \left(\frac{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1^2 C_2 R_3 s^3 + C_1^2 s^2 + C_1 C_2 s^2}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \right) - \frac{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 R_2 s^2}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \end{array} \right) I_2(s)$$

Expandiendo la ecuacion

$$V_e(s) = \left(\begin{array}{c} \frac{C_1^2 C_2 L_1 R_2 s^4 + C_1^2 C_2 L_1 R_3 s^4 + C_1^2 L_1 s^3 + C_1 C_2 L_1 s^3}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} + \frac{C_1^2 C_2 R_1 R_2 s^3 + C_1^2 C_2 R_1 R_3 s^3 + C_1^2 R_1 s^2 + C_1 C_2 R_1 s^2}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \dots \\ + \frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} - \frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \dots \\ + \frac{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1^2 C_2 R_2 R_3 s^3 + C_1^2 R_2 s^2 + C_1 C_2 R_2 s^2}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} - \frac{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 R_2 s^2}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \end{array} \right) I_2(s)$$

Sumando terminos semejantes

$$V_e(s) = \left(\begin{array}{c} \frac{C_1^2 C_2 L_1 R_2 s^4 + C_1^2 C_2 L_1 R_3 s^4 + C_1^2 L_1 s^3 + C_1 C_2 L_1 s^3}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \\ + \frac{C_1^2 C_2 R_1 R_2 s^3 + C_1^2 C_2 R_1 R_3 s^3 + C_1^2 R_1 s^2 + C_1 C_2 R_1 s^2}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} + \dots \\ \frac{C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} + \frac{C_1^2 C_2 R_2 R_3 s^3 + C_1^2 R_2 s^2}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \end{array} \right) I_2(s)$$

Agrupando los terminos en una sola fraccion

$$V_e(s) = \left(\frac{\begin{array}{c} C_1^2 C_2 L_1 R_2 s^4 + C_1^2 C_2 L_1 R_3 s^4 + C_1^2 L_1 s^3 \dots \\ + C_1 C_2 L_1 s^3 + C_1^2 C_2 R_1 R_2 s^3 \\ \dots + C_1^2 C_2 R_1 R_3 s^3 + C_1^2 R_1 s^2 + C_1 C_2 R_1 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 \dots \\ + C_1 s + C_1^2 C_2 R_2 R_3 s^3 + C_1^2 R_2 s^2 \end{array}}{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2} \right) I_2(s)$$

Construyendo la funcion de transferencia

$$\frac{I_2(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2}{C_1^2 C_2 L_1 R_2 s^4 + C_1^2 C_2 L_1 R_3 s^4 + C_1^2 L_1 s^3 + C_1 C_2 L_1 s^3 + C_1^2 C_2 R_1 R_2 s^3 + \dots \\ C_1^2 C_2 R_1 R_3 s^3 + C_1^2 R_1 s^2 + C_1 C_2 R_1 s^2 + C_1 C_2 R_3 s^2 + C_1 s + C_1^2 C_2 R_2 R_3 s^3 + C_1^2 R_2 s^2}$$

Agrupando terminos comunes de s

$$\frac{I_2(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1^2 C_2 R_2 s^3 + C_1 C_2 s^2}{\left(\begin{array}{c} C_1^2 C_2 L_1 R_2 + \dots \\ C_1^2 C_2 L_1 R_3 \end{array} \right) s^4 + \left(\begin{array}{c} C_1^2 L_1 + C_1 C_2 L_1 + C_1^2 C_2 R_1 R_2 \dots \\ + C_1^2 C_2 R_1 R_3 + C_1^2 C_2 R_2 R_3 \end{array} \right) s^3 \dots \\ + \left(\begin{array}{c} C_1^2 R_1 + C_1 C_2 R_1 \dots \\ + C_1 C_2 R_3 + C_1^2 R_2 \end{array} \right) s^2 + (C_1) s}$$

Simplificando la funcion de transferencia al eliminar un grado de s

$$\frac{I_2(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1^2 C_2 R_2 s^2 + C_1 C_2 s}{(C_1^2 C_2 L_1 R_2 + C_1^2 C_2 L_1 R_3) s^3 + \dots \\ \left(\begin{array}{c} C_1^2 L_1 + C_1 C_2 L_1 + C_1^2 C_2 R_1 R_2 \dots \\ + C_1^2 C_2 R_1 R_3 + C_1^2 C_2 R_2 R_3 \end{array} \right) s^2 + (C_1^2 R_1 + C_1 C_2 R_1 + C_1 C_2 R_3 + C_1^2 R_2) s + C_1}$$

Simplificando la funcion de transferencia al eliminar el termino comun C_1

$$\frac{I_2(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s}{(C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_2 L_1 R_3) s^3 \dots \\ + \left(\begin{array}{c} C_1 L_1 + C_2 L_1 + C_1 C_2 R_1 R_2 + \dots \\ C_1 C_2 R_1 R_3 + C_1 C_2 R_2 R_3 \end{array} \right) s^2 \dots \\ + (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_3 + C_1 R_2) s + 1}$$

Resolviendo para $I_2(s)$ en la ecuacion del voltaje de salida

$$V_s(s) = \frac{I_2(s)}{C_2 s}$$

$$I_2(s) = C_2 s V_s(s)$$

Sustituyendo $I_2(s)$ en la funcion de transferencia

$$\frac{C_2 s V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s}{(C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_2 L_1 R_3) s^3 + (C_1 L_1 + C_2 L_1 + C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 C_2 R_1 R_3 + C_1 C_2 R_2 R_3) s^2 \dots \\ + (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_3 + C_1 R_2) s + 1}$$

Dividiendo ambos lados de la ecuacion entre $C_2 s$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1 R_2 s + 1}{(C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_2 L_1 R_3) s^3 + (C_1 L_1 + C_2 L_1 + C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 C_2 R_1 R_3 + C_1 C_2 R_2 R_3) s^2 \dots + (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_3 + C_1 R_2) s + 1}$$

1.4 Resultado

Por lo tanto, se tiene que la función de transferencia es igual a:

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{C_1 R_2 s + 1}{(C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_2 L_1 R_3) s^3 + (C_1 L_1 + C_2 L_1 + C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 C_2 R_1 R_3 + C_1 C_2 R_2 R_3) s^2 \dots + (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_3 + C_1 R_2) s + 1}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{R_2}{(L s^2 C R_2 + L s + C s R_1 R_2 + R_1 + R_2)}$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto

$$(C_1 L_1 + C_2 L_1 + C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 + C_1 C_2 R_1 R_2 R_3) s^2 + (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_1 C_2 R_3) s + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2C_1 L_1 + 2C_2 L_1 + 2C_1 C_2 R_1 R_2 + 4C_1 C_2 R_1 R_2 R_3} \dots \left(C_1 R_1 + C_1 R_2 - \sqrt{\frac{C_1^2 R_1^2 + C_1^2 R_2^2 - 4C_1 L_1 - 4C_2 L_1 + C_2^4 R_1^2 R_3^2 + 2C_1^2 R_1 R_2 + 2C_1 C_2^2 R_1^2 R_3 \dots}{-4C_1 C_2 R_1 R_2 - 8C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 + 2C_1 C_2^2 R_1 R_2 R_3} \dots} + C_2^2 R_1 R_3 \right)$$

$$\lambda_2 = -\frac{C_1 R_1 + C_1 R_2 + \sqrt{\frac{C_1^2 R_1^2 + C_1^2 R_2^2 - 4C_1 L_1 - 4C_2 L_1 + C_2^4 R_1^2 R_3^2 + 2C_1^2 R_1 R_2 + 2C_1 C_2^2 R_1^2 R_3 \dots}{-4C_1 C_2 R_1 R_2 - 8C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 + 2C_1 C_2^2 R_1 R_2 R_3} \dots}}{2C_1 L_1 + 2C_2 L_1 + 2C_1 C_2 R_1 R_2 + 4C_1 C_2 R_1 R_2 R_3} + C_2^2 R_1 R_3$$

assume $(C_1, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(C_2, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(C_3, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(C_4, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(L_1, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(L_2, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(R_1, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(R_2, \text{positive}) = (0, \infty)$

assume $(R_3, \text{positive}) = (0, \infty)$

Valores de los parametros para el control y el caso

$$R_1 = .3\Omega$$

$$R_2 = .3\Omega$$

$$R_3 = .3\Omega$$

$$L_1 = 1 \times 10^{-6}H$$

$$L_2 = 2 \times 10^{-6}H$$

$$C_1 = 0.9 \times 10^{-6}F$$

$$C_2 = 0.9 \times 10^{-6}F$$

$$C_3 = 1F$$

$$C_4 = 1.9F$$

$$\lambda_1 = -140871.54$$

$$\lambda_2 = -140871.54$$

Valores para el control (individuo sano):

$$R_1 = 200$$

$$\lambda_1 = -5560.88$$

$$\lambda_2 = -2260276.83$$

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

El modelo de ecuaciones integro-diferenciales se formula al despejar las variables dependientes y la salida del sistema, por lo tanto, se obtiene el siguiente resultado de $V_s(s)$:

$$i_1(t) = \frac{V_e s(t) - L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - \int \frac{(i_1(t) - i_2(t))dt}{C_1} - R_2(i_1(t) - i_2(t))}{R_1}$$

$$i_1(t) = \left[V_e(t) - L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)]dt - [R_2 i_1(t) - i_2(t)] \right] \frac{1}{R_1}$$

$$i_2(t) = \frac{-\int \frac{(i_2(t)-i_1(t))dt}{C_1} - R_2(i_2(t) - i_1(t)) - \int \frac{i_2(t)dt}{C_2}}{R_3}$$

$$i_2(t) = \left[\frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] - [R_2 i_2(t) - i_1(t)] dt - \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt \right] \frac{1}{R_3}$$

$$V_s(t) = \int \frac{i_2(t) dt}{C_2}$$

$$V_s(t) = \int \frac{1}{C_2} i_2(t) dt$$

4 Error en estado estacionario

El error en estado estacionario, se calcula mediante el siguiente límite, donde $R(s)$ representa un escalón (1/s):

$$\begin{aligned} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s R(s) \left[1 - \frac{V_e(s)}{V_s(s)} \right] \\ e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \left[1 - \frac{C_1 R_2 s + 1}{(C_1 C_2 L_1 R_2 + C_1 C_2 L_1 R_3) s^3 \dots \right. \\ &\quad \left. + (C_1 L_1 + C_2 L_1 + C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 C_2 R_1 R_3 + C_1 C_2 R_2 R_3) s^2 \dots \right. \\ &\quad \left. + (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_3 + C_1 R_2) s + 1 \right] \\ e(t) &= 1 - \frac{1}{1} \\ e(t) &= 0V. \end{aligned}$$

5 Cálculo de componentes para el controlador PID

$$\begin{aligned} k_I &= \frac{1}{R_e C_r} = 825152.9719 \\ k_P &= \frac{R_r}{R_e} = 140.043 \\ k_D &= R_r C_e = 0.00076675 \end{aligned}$$

$$C_r = 1 \times 10^{-6}$$

$$\begin{aligned}
R_e &= \frac{1}{k_I C_r} = \frac{1}{(825152.9719)(1 \times 10^{-6})} = 1.211\,9 \\
R_r &= k_P R_e = (140.043)(1.211\,9) = 169.72 \\
C_e &= \frac{k_D}{R_r} = \frac{0.00076675}{169.72} = 4.517\,7 \times 10^{-6}
\end{aligned}$$