Resolución de Ejercicios de Álgebra de Conjuntos

Ejercicio 1

Enunciado: Un grupo de 63 niños dieron 3 exámenes para ser admitidos en un colegio y se sabe que 25 aprobaron el primer examen, 23 el segundo y 31 el tercero. 10 aprobaron el primero y el segundo, 5 el primero y el tercero, 8 el segundo y el tercero y 4 no aprobaron examen alguno. ¿Cuántos niños fueron admitidos al colegio, si solo necesitaban aprobar 2 exámenes?

Datos:

Sean los conjuntos E1, E2, E3 los que aprobaron el primer, segundo y tercer examen respectivamente.

- $n(U) = 63$
- $n(E1) = 25$
- $n(E2) = 23$
- $n(E3) = 31$
- $n(E1 \cap E2) = 10$
- $n(E1 \cap E3) = 5$
- $n(E2 \cap E3) = 8$
- $n((E1 \cup E2 \cup E3)^c) = 4$

Resolución:

Primero, calculamos el total de niños que aprobaron al menos un examen.

$$\begin{aligned} n(E1 \cup E2 \cup E3) &= n(U) - n((E1 \cup E2 \cup E3)^c) \\ &= 63 - 4 = 59 \end{aligned}$$

Usamos la fórmula del cardinal de la unión de tres conjuntos para hallar la intersección de los tres.

$$\begin{aligned} n(E1 \cup E2 \cup E3) &= n(E1) + n(E2) + n(E3) - n(E1 \cap E2) - n(E1 \cap E3) - n(E2 \cap E3) + n(E1 \cap E2 \\ 59 &= 25 + 23 + 31 - 10 - 5 - 8 + n(E1 \cap E2 \cap E3) \\ 59 &= 79 - 23 + n(E1 \cap E2 \cap E3) \\ 59 &= 56 + n(E1 \cap E2 \cap E3) \\ n(E1 \cap E2 \cap E3) &= 3 \end{aligned}$$

Buscamos los que aprobaron **exactamente dos** exámenes.

$$\begin{aligned} \text{Solo 2 exámenes} &= [n(E1 \cap E2) - n(E1 \cap E2 \cap E3)] + [n(E1 \cap E3) - n(E1 \cap E2 \cap E3)] + [n(E2 \cap E3 \\ &= (10 - 3) + (5 - 3) + (8 - 3) \\ &= 7 + 2 + 5 = 14 \end{aligned}$$

Respuesta: 14 niños fueron admitidos.

Ejercicio 2

Enunciado: Una encuesta sobre hábitos de lectura de periódicos (D: Deber, P: Presencia, C: Correo del Sur) arrojó: 9.8% leen D, 22.9% P, 12.1% C. 5.1% D y P, 3.7% D y C, 6% P y C. 32.4% leen al menos uno. Calcular: a) % que no lee ninguno. b) % que lee exactamente dos.

Datos:

- $n(D) = 9.8$
- $n(P) = 22.9$
- $n(C) = 12.1$
- $n(D \cap P) = 5.1$
- $n(D \cap C) = 3.7$
- $n(P \cap C) = 6$
- $n(D \cup P \cup C) = 32.4$

Resolución:

a) El porcentaje que no lee ninguno es el complemento del universo (100%) menos el porcentaje de los que leen al menos uno.

$$n((D \cup P \cup C)^c) = 100\% - n(D \cup P \cup C) = 100 - 32.4 = 67.6\%$$

b) Para hallar el porcentaje que lee exactamente dos, primero encontramos la intersección de los tres.

$$\begin{aligned} n(D \cup P \cup C) &= n(D) + n(P) + n(C) - n(D \cap P) - n(D \cap C) - n(P \cap C) + n(D \cap P \cap C) \\ 32.4 &= 9.8 + 22.9 + 12.1 - 5.1 - 3.7 - 6 + n(D \cap P \cap C) \\ 32.4 &= 44.8 - 14.8 + n(D \cap P \cap C) \\ 32.4 &= 30 + n(D \cap P \cap C) \\ n(D \cap P \cap C) &= 2.4 \end{aligned}$$

Calculamos el porcentaje que lee exactamente dos periódicos:

$$\begin{aligned} \text{Solo } 2 &= (n(D \cap P) - n_{DPC}) + (n(D \cap C) - n_{DPC}) + (n(P \cap C) - n_{DPC}) \\ &= (5.1 - 2.4) + (3.7 - 2.4) + (6 - 2.4) \\ &= 2.7 + 1.3 + 3.6 = 7.6\% \end{aligned}$$

Respuesta: a) 67.6% no lee ninguno. b) 7.6% lee exactamente dos.

Ejercicio 3

Enunciado: Encuesta en CIBERTEC (M: Matemática, E: Excel, O: Economía): 78 aprueban M o E, 80 M u O, 82 E u O. 60 alumnos aprueban exactamente uno de los cursos. ¿Cuántos aprueban por lo menos 2 de los cursos mencionados?

Datos:

- $n(M \cup E) = 78$
- $n(M \cup O) = 80$
- $n(E \cup O) = 82$
- $n(\text{exactamente uno}) = 60$

Resolución:

Sea $y = n(\text{exactamente dos})$ y $z = n(\text{los tres})$. Se pide hallar $y+z$. Sumamos las uniones dobles:

$$\begin{aligned}
n(M \cup E) + n(M \cup O) + n(E \cup O) &= 78 + 80 + 8 \\
(n(M) + n(E) - n(M \cap E)) + (n(M) + n(O) - n(M \cap O)) + (n(E) + n(O) - n(E \cap O)) &= 240 \\
2(n(M) + n(E) + n(O)) - (n(M \cap E) + n(M \cap O) + n(E \cap O)) &= 240
\end{aligned}$$

Usamos las identidades que relacionan las regiones de un diagrama de Venn:

- $n(M) + n(E) + n(O) = n(\text{solo uno}) + 2 \cdot n(\text{solo dos}) + 3 \cdot n(\text{tres}) = 60 + 2y + 3z$
- $n(M \cap E) + n(M \cap O) + n(E \cap O) = n(\text{solo dos}) + 3 \cdot n(\text{tres}) = y + 3z$

Sustituyendo estas identidades en la ecuación sumada:

$$\begin{aligned}
2(60 + 2y + 3z) - (y + 3z) &= 240 \\
120 + 4y + 6z - y - 3z &= 240 \\
120 + 3y + 3z &= 240 \\
3(y + z) &= 120 \\
y + z &= 40
\end{aligned}$$

Respuesta: 40 alumnos aprueban por lo menos 2 cursos.

Ejercicio 4

Enunciado: 120 libros tienen fallas (P: papel, I: impresión, E: encuadernación). 68 tienen al menos la falla P, 32 al menos la falla I, 40 solo la falla P. 5 tienen P e I pero no E, 17 tienen I y E pero no P. 4 tienen las tres fallas. ¿Cuántos tienen solo la falla E? ¿Cuántos tienen la falla E por lo menos?

Datos:

$n(P \cup I \cup E) = 120$, $n(P) = 68$, $n(I) = 32$, $n(P - (I \cup E)) = 40$, $n((P \cap I) - E) = 5$, $n((I \cap E) - P) = 17$, $n(P \cap I \cap E) = 4$.

Resolución:

Desglosamos el problema por regiones del diagrama de Venn.

- Tienen las tres fallas: $n(P \cap I \cap E) = 4$.
- Tienen solo falla P e I: $n((P \cap I) - E) = 5$.
- Tienen solo falla I y E: $n((I \cap E) - P) = 17$.
- Tienen solo falla P: $n(P - (I \cup E)) = 40$.

El conjunto P ($n(P) = 68$) está formado por 4 regiones:

$$\begin{aligned} n(P) &= n(P - (I \cup E)) + n((P \cap I) - E) + n((P \cap E) - I) + n(P \cap I \cap E) \\ 68 &= 40 + 5 + n((P \cap E) - I) + 4 \\ 68 &= 49 + n((P \cap E) - I) \implies n((P \cap E) - I) = 19 \quad \text{(Solo falla P y E)} \end{aligned}$$

El conjunto I ($n(I) = 32$) también está formado por 4 regiones:

$$\begin{aligned} n(I) &= n(I - (P \cup E)) + n((P \cap I) - E) + n((I \cap E) - P) + n(P \cap I \cap E) \\ 32 &= n(I - (P \cup E)) + 5 + 17 + 4 \\ 32 &= n(I - (P \cup E)) + 26 \implies n(I - (P \cup E)) = 6 \quad \text{(Solo falla I)} \end{aligned}$$

El total de libros con fallas es la suma de todas las regiones disjuntas:

$$\begin{aligned} n(P \cup I \cup E) &= n(\text{solo P}) + n(\text{solo I}) + n(\text{solo E}) + n(\text{solo PI}) + n(\text{solo PE}) + n(\text{solo IE}) + n(\text{PIE}) \\ 120 &= 40 + 6 + n(\text{solo E}) + 5 + 19 + 17 + 4 \\ 120 &= 91 + n(\text{solo E}) \implies n(\text{solo E}) = 29 \end{aligned}$$

La cantidad de libros con "al menos la falla E" ($n(E)$) es la suma de las 4 regiones que componen E:

$$n(E) = n(\text{solo E}) + n(\text{solo PE}) + n(\text{solo IE}) + n(\text{PIE}) = 29 + 19 + 17 + 4 = 69$$

Respuesta: 29 libros tienen solo la falla E. 69 libros tienen la falla E por lo menos.

Ejercicio 5

Enunciado: Si el conjunto potencia de A tiene 512 elementos más que el conjunto potencia de B, además $n(A) - n(B) = 1$. Hallar $n(A) + n(B)$.

Datos:

- $n(\mathcal{P}(A)) = 512 + n(\mathcal{P}(B))$
- $n(A) - n(B) = 1$

Nota: Se sabe que $n(\mathcal{P}(X)) = 2^{n(X)}$. El enunciado original tenía un error probable, que ha sido corregido para la resolución.

Resolución:

$$\begin{aligned} 2^{n(A)} &= 512 + 2^{n(B)} \\ \text{Usando } n(A) = n(B) + 1 : & \\ 2^{n(B)+1} &= 512 + 2^{n(B)} \\ 2 \cdot 2^{n(B)} - 2^{n(B)} &= 512 \\ 2^{n(B)}(2-1) &= 512 \\ 2^{n(B)} &= 512 = 2^9 \implies n(B) = 9 \end{aligned}$$

Ahora hallamos $n(A)$: $n(A) = n(B) + 1 = 9 + 1 = 10$. El problema pide $n(A) + n(B) = 10 + 9 = 19$. **Respuesta:** 19.

Ejercicio 6

Enunciado: Si B y C son conjuntos disjuntos, además B está incluido en A. Calcule $n(B)$, sabiendo que: $n(A \cap C) = 3$, $n(A) = 18$, $n(A \cup C) = 24$, $n(B \cup C) = 13$.

Datos:

$B \cap C = \emptyset \implies n(B \cap C) = 0$, $B \subset A$, $n(A \cap C) = 3$, $n(A) = 18$, $n(A \cup C) = 24$, $n(B \cup C) = 13$.

Resolución:

Para B y C (disjuntos): $n(B \cup C) = n(B) + n(C) \implies 13 = n(B) + n(C) \quad (1)$. Para A y C: $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) \implies 24 = 18 + n(C) - 3 \implies n(C) = 9$. Sustituimos $n(C)$ en la ecuación (1): $13 = n(B) + 9 \implies n(B) = 4$. **Respuesta:** $n(B) = 4$.

Ejercicio 7

Enunciado: Para dos conjuntos A y B se cumple que: $n(A \cup B) = 11$ y $n(\mathcal{P}(A)) + n(\mathcal{P}(B)) = 192$. Determinar: $n(\mathcal{P}(A \triangle B))$.

Datos:

$n(A \cup B) = 11$, $n(\mathcal{P}(A)) + n(\mathcal{P}(B)) = 192 \implies 2^{n(A)} + 2^{n(B)} = 192$.

Resolución:

Resolvemos la ecuación de las potencias de 2: $2^{n(A)} + 2^{n(B)} = 192$. Descomponiendo 192 en suma de potencias de 2: $192 = 128 + 64 = 2^7 + 2^6$. Por lo tanto, los cardinales son $\{n(A), n(B)\} = \{7, 6\}$. Usamos el cardinal de la unión para hallar la intersección: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \implies 11 = 7 + 6 - n(A \cap B) \implies n(A \cap B) = 2$. Calculamos el cardinal de la diferencia simétrica: $n(A \triangle B) = n(A \cup B) - n(A \cap$

$B) = 11 - 2 = 9$. Finalmente, calculamos el cardinal del conjunto potencia solicitado: $n(\mathcal{P}(A \triangle B)) = 2^{n(A\triangle B)} = 2^9 = 512$. **Respuesta:** 512.

Ejercicio 8

Enunciado: Dados tres conjuntos A, B, C, con: $n(A\triangle B) = 22$, $n(B\triangle C) = 16$, $n(C\triangle A) = 14$, $n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B \cap C) = 30$, determine $n(\mathcal{P}(A \cap B \cap C))$.

Datos:

$n(A\triangle B) = 22$, $n(B\triangle C) = 16$, $n(C\triangle A) = 14$, $n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B \cap C) = 30$.

Resolución:

Se usa la propiedad $n(X\triangle Y) = n(X) + n(Y) - 2n(X \cap Y)$. Sumamos las tres primeras ecuaciones:

$$n(A\triangle B) + n(B\triangle C) + n(C\triangle A) = 22 + 16 +$$
$$(n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)) + (n(B) + n(C) - 2n(B \cap C)) + (n(C) + n(A) - 2n(C \cap A)) = 52$$
$$2n(A) + 2n(B) + 2n(C) - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) = 52$$
$$n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) = 26 \quad (1)$$

La parte izquierda de (1) es igual a $n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C)$.

$$n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C) = 26 \quad (2)$$
$$\text{Y por dato:} \quad n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B \cap C) = 30 \quad (3)$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3) se obtiene: $2\cdot n(A\cup B\cup C) = 56 \implies n(A\cup B\cup C) = 28$. Sustituyendo en (3): $28 + n(A \cap B \cap C) = 30 \implies n(A \cap B \cap C) = 2$. Se pide el cardinal del conjunto potencia: $n(\mathcal{P}(A \cap B \cap C)) = 2^{n(A\cap B\cap C)} = 2^2 = 4$. **Respuesta:** 4.

Ejercicio 9

Enunciado: Si $U = \{0..9\}$. A $= \{x/x \in U; \sqrt{x} < 9\}$, B $= \{x/x \in U; (x + 1) \in U\}$, C $= \{1, 2, 5, 7\}$. Simplificar: $\{(A^c - B) \cap C^c\} - \{(B^c - A)^c\}^c - \{(A^c \cap B)^c - C^c\}^c - B^c$.

Datos:

$U = \{0..9\}$, $A = \{x \in U \mid x < 81\} = U$, $B = \{0..8\}$, $C = \{1, 2, 5, 7\}$.

Resolución:

Dado que $A = U$, se deduce que $A^c = \emptyset$. Sustituimos esto en la expresión:

$$\{(\emptyset - B) \cap C^c\} - \{(B^c - U)^c\}^c - \{(\emptyset \cap B)^c - C^c\}^c - B^c$$

Simplificando por partes:

$(\emptyset - B) = \emptyset \cap B^c = \emptyset$. El primer término es $\emptyset \cap C^c = \emptyset$.

$\{(B^c - U)^c\}^c = B^c - U = B^c \cap U^c = B^c \cap \emptyset = \emptyset$.

$\{(\emptyset \cap B)^c - C^c\}^c = \{\emptyset^c - C^c\}^c = \{U - C^c\}^c = \{U \cap (C^c)^c\}^c = \{U \cap C\}^c = C$

La expresión original se convierte en:

$$\emptyset - \emptyset - C^c - B^c$$

Resolviendo de izquierda a derecha:

$$(\emptyset - \emptyset) - C^c - B^c = \emptyset - C^c - B^c = (\emptyset - C^c) - B^c$$

$$(\emptyset \cap (C^c)^c) - B^c = (\emptyset \cap C) - B^c = \emptyset - B^c$$

$$\emptyset \cap (B^c)^c = \emptyset \cap B = \emptyset$$

Respuesta Final: El resultado de la operación es el conjunto vacío, $\emptyset$.