Soluciones a los Ejercicios

1. Resolución por el método de Gauss-Jordan

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales, utilizamos el método de Gauss-Jordan para transformar la matriz aumentada en su forma escalonada reducida. Este método se basa en el **Teorema de las Operaciones Elementales de Fila**, que afirma que dichas operaciones (intercambio de filas, multiplicación de una fila por un escalar no nulo y suma de un múltiplo de una fila a otra) no cambian el conjunto de soluciones del sistema.

El sistema es:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

Paso 1: Construir la matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & | & 12 \\ 1 & 1 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Aplicar operaciones de fila.

- Intercambiar $F_1 \leftrightarrow F_2$ para obtener un 1 en la posición $(1, 1)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 6 \\ 5 & -4 & | & 12 \end{bmatrix}$$

- $F_2 \to F_2 - 5F_1$ para hacer cero el elemento bajo el pivote.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -9 & | & -18 \end{bmatrix}$$

- $F_2 \to -\frac{1}{9}F_2$ para que el pivote de la segunda fila sea 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

- $F_1 \to F_1 - F_2$ para hacer cero el elemento sobre el pivote.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Escribir la solución. De la matriz en forma escalonada reducida, obtenemos la solución única:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2$$

—

2. Solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo

Un sistema homogéneo tiene la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. El **Teorema del Sistema Homogéneo** nos dice que siempre tiene al menos la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Si el número de variables es mayor que el número de ecuaciones, el sistema tiene infinitas soluciones.

El sistema es:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Paso 1: Construir la matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -6 & -3 & | & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Aplicar operaciones de fila.

- Intercambiar $F_1 \leftrightarrow F_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 & | & 0 \\ 2 & -5 & -6 & -3 & | & 0 \end{bmatrix}$$

- $F_2 \to F_2 - 2F_1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 & | & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -11 & | & 0 \end{bmatrix}$$

- $F_2 \to -\frac{1}{11}F_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

- $F_1 \to F_1 - 3F_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{43}{11} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Encontrar la solución general. Las variables x_3 y x_4 son libres, ya que no corresponden a pivotes. Las soluciones se expresan en términos de estas variables. Sea $x_3 = s$ y $x_4 = t$.

$$x_1 - \frac{43}{11}s + t = 0 \implies x_1 = \frac{43}{11}s - t$$

$$x_2 - \frac{4}{11}s + t = 0 \implies x_2 = \frac{4}{11}s - t$$

El sistema tiene **infinitas soluciones** dadas por el vector de solución:

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 43/11 \\ 4/11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

—

3. Cálculo de los valores de x, y, z y su suma

El producto de matrices $A \times B$ es una nueva matriz donde cada elemento $(AB)_{ij}$ es la suma de los productos de los elementos de la fila i de A y la columna j de B.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 2 & x & -4 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} z & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & y \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 96 & 41 & 16 \\ -9 & -23 & -2 \\ 98 & 35 & 16 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Encontrar los valores de x, y, z.

- Para hallar x, usamos el elemento $(AB)_{22}$: $(2)(0) + (x)(-1) + (-4)(5) = -23 \implies -x - 20 = -23 \implies x = 3$
- Para hallar z, usamos el elemento $(AB)_{11}$: $(5)(z) + (-1)(3) + (8)(8) = 96 \implies 5z - 3 + 64 = 96 \implies 5z = 35 \implies z = 7$
- Para hallar y, usamos el elemento $(AB)_{33}$: $(6)(-2) + (0)(6) + (7)(y) = 16 \implies -12 + 7y = 16 \implies 7y = 28 \implies y = 4$

Paso 2: Calcular la suma.

$$x + y + z = 3 + 4 + 7 = \mathbf{14}$$

—

4. Solución con matriz inversa por Gauss-Jordan

Para un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, la solución es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. En este método, el **Teorema de la Matriz Inversa** establece que A^{-1} puede ser encontrada al reducir la matriz aumentada $[A|I]$ a $[I|A^{-1}]$.

El sistema es:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 10 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Paso 1: Construir la matriz aumentada $[A|I]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Encontrar A^{-1} con operaciones de fila.

- $F_2 \to F_2 - F_1$, $F_3 \to F_3 + 4F_1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & | & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $F_2 \leftrightarrow F_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & | & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & | & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $F_2 \to \frac{1}{5}F_2$, $F_3 \to -\frac{1}{5}F_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

- $F_1 \to F_1 - F_3$, $F_2 \to F_2 - F_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

- $F_1 \to F_1 - F_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/5 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calcular la solución $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

$$\mathbf{x} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 25 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La solución es $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -1$.

—

5. Solución con la matriz adjunta

Este método se basa en la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A)$, donde $\text{adj}(A)$ es la transpuesta de la matriz de cofactores.

El sistema es:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Paso 1: Calcular el determinante de A.

$$|A| = 1(2-3) - 3(2-2) + 1(6-4) = 1(-1) - 3(0) + 1(2) = 1$$

Paso 2: Calcular la matriz de cofactores C.

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calcular la matriz adjunta.

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Calcular la solución $\mathbf{x} = \frac{1}{|A|}\textbf{adj}(A)\mathbf{b}$.

$$\mathbf{x} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(4) + (0)(-1) + (1)(3) \\ (0)(4) + (-1)(-1) + (1)(3) \\ (2)(4) + (3)(-1) + (-4)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

La solución es $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -7$.

—

Problema adicional de determinantes

Este problema se resuelve usando la **propiedad de la linealidad de los determinantes**. Si se multiplica una fila de una matriz por un escalar, el determinante se multiplica por ese mismo escalar.

Dado el determinante original:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

El nuevo determinante tiene las siguientes transformaciones de fila:

- La primera fila se multiplicó por 3.
- La segunda fila se multiplicó por -1.
- La tercera fila se multiplicó por 4.

El valor del nuevo determinante es el producto de los escalares por el determinante original.

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} = (3) \times (-1) \times (4) \times D = -12 \times (-6) = \mathbf{72}$$