5. Solución con la Regla de Cramer

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales, se utiliza la **Regla de Cramer**, un método que emplea determinantes para encontrar la solución. Este método es aplicable si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes no es cero, garantizando así una solución única. El **Teorema de Cramer** establece que para un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cada variable x_i es igual al cociente entre el determinante de la matriz A_i (donde la i-ésima columna de A es reemplazada por el vector $\mathbf{b}$) y el determinante de A.

El sistema es:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y el vector de constantes es $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Paso 1: Calcular el determinante de la matriz de coeficientes, $\det(A)$**.**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 3(2 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 1(2 \cdot 3 - 2 \cdot 2)$$

$$\det(A) = 1(2-3) - 3(2-2) + 1(6-4) = 1(-1) - 3(0) + 1(2) = -1 + 2 = 1$$

Como $\det(A) = 1 \neq 0$, el sistema tiene una solución única.

Paso 2: Calcular el determinante de A_1 **y hallar** x_1**.** La matriz A_1 se forma al reemplazar la primera columna de A por $\mathbf{b}$.

$$A_1 = \left[\begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{matrix}\right|$$

$$\det(A_1) = 4(2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 3((-1) \cdot 1 - 1 \cdot 3) + 1((-1) \cdot 3 - 2 \cdot 3)$$

$$\det(A_1) = 4(-1) - 3(-4) + 1(-9) = -4 + 12 - 9 = -1$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-1}{1} = -1$$

Paso 3: Calcular el determinante de A_2 **y hallar** x_2**.** La matriz A_2 se forma al reemplazar la segunda columna de A por $\mathbf{b}$.

$$A_2 = \left[\begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}\right|$$

$$\det(A_2) = 1((-1) \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 4(2 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 1(2 \cdot 3 - (-1) \cdot 2)$$

$$\det(A_2) = 1(-4) - 4(0) + 1(8) = -4 + 8 = 4$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{4}{1} = 4$$

Paso 4: Calcular el determinante de A_3 **y hallar** x_3**.** La matriz A_3 se forma al reemplazar la tercera columna de A por $\mathbf{b}$.

$$A_3 = \left[\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{matrix}\right|$$

$$\det(A_3) = 1(2 \cdot 3 - (-1) \cdot 3) - 3(2 \cdot 3 - (-1) \cdot 2) + 4(2 \cdot 3 - 2 \cdot 2)$$

$$\det(A_3) = 1(9) - 3(8) + 4(2) = 9 - 24 + 8 = -7$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-7}{1} = -7$$

Solución Final: La solución única del sistema es $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ y $x_3 = -7$.