Redes de Bravais

Nicolas Ariza Tejedor - 2190732

Juan Diego Giraldo - 2181981

¿Qué son?

- En geometría y cristalografía las redes de Bravais son una disposición infinita de puntos discretos cuya estructura es invariante bajo cierto grupo de traslaciones.

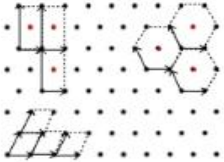
$$R = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i \vec{a}_i \mid \nu_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Redes bidimensionales

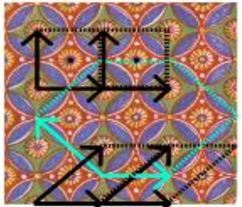
Se nos pidió reconocer
las 5 redes bidimensionales
en los siguientes patrones


(a) Red cristalina en 2D (b) Mural asirio (c) Mural egipcio (d) Tejido tahití (e) Ilustracion en pieza de porcelana (f) Teselado 1 de M.C. Escher (g) Teselado 2 de M.C. Escher (h) Teselado 3 de M.C. Escher (i) Teselado 4 de M.C. Escher

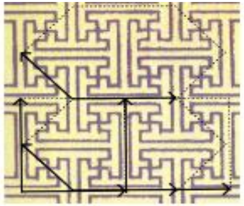
Redes bidimensionales



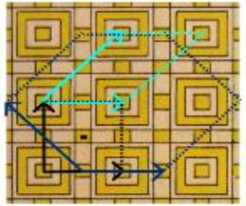
(a) Red cristalina en 2D



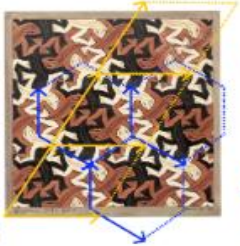
(b) Mural egipcio



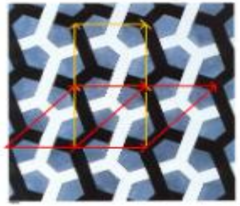
(c) Ilustracion en pieza de porcelana



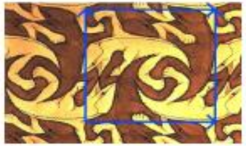
(d) Mural asirio



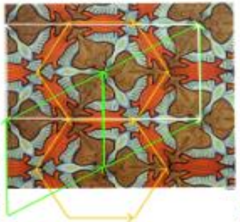
(e) Teselado 1 de M.C. Escher



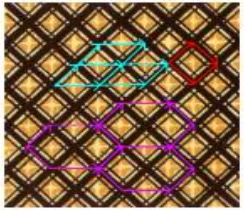
(f) Teselado 4 de M.C. Escher



(g) Teselado 3 de M.C. Escher



(h) Teselado 2 de M.C. Escher

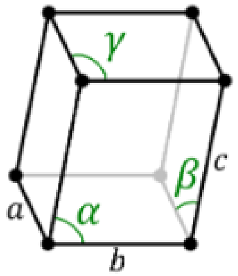


(i) Tejido tahití

Redes tridimensionales y sus volúmenes

$$V = |a||b||c|\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

Tricilincas



$$a = (a_1,\ a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3),\ c = (c_1, c_2, c_3)$$

$$V = a\cdot(b\times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = M$$

Usando la propiedad de los determinantes donde $\det(M) = \det(M)^T$, sabemos entonces que $\det(M)^2 = \det(M) * \det(M)^T$

$$\det(M)^2 = \begin{vmatrix} a\cdot a & b\cdot b & c\cdot c \\ a\cdot b & b\cdot b & c\cdot b \\ a\cdot c & b\cdot c & c\cdot c \end{vmatrix}$$

Al reinterpretar los productos punto entre los vectores sería de la siguiente manera

$$\det(M)^2 = \begin{vmatrix} a\cdot a & b\cdot b & c\cdot c \\ |a||b|\cos\gamma & b\cdot b & |c||b|\cos\alpha \\ |a||c|\cos\beta & |b||c|\cos\alpha & c\cdot c \end{vmatrix}$$

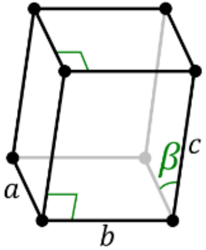
$$V^2 = |a|^2|b|^2|c|^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

$$V = |a||b||c|\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}$$

Redes tridimensionales y sus volúmenes

$$V = |a||b||c|\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

Monoclínicas



$$V = |a||b||c|\sin\beta$$

s

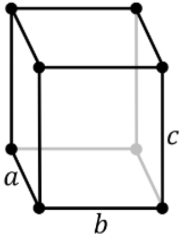
$$V = |a||b||c|\sqrt{(1 - \cos^2\beta)}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ tenemos que $1 - \cos^2\beta = \sin^2\beta$

$$V = |a||b||c|\sqrt{(\sin^2\beta)}$$

$$V = |a||b||c|\sin\beta$$

Ortorrómbicas

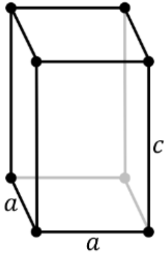


$$V = |a||b||c|$$

$$V = |a||b||c|\sqrt{(1 - 0)}$$

$$V = |a||b||c|$$

Tetragonal



$$V = |a|^2|c|$$

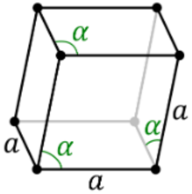
$$V = |a||b||c|$$

pero $|a| = |b|$ entonces

$$V = |a||a||c|$$

$$V = |a|^2|c|$$

Romboédricas



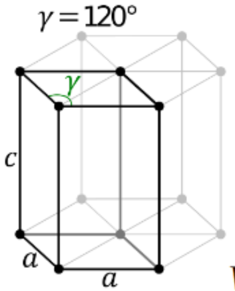
$$V = |a|^3\sqrt{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}$$

$$V = |a||a||a|\sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\alpha\cos\alpha)}$$

$$V = |a|^3\sqrt{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}$$

Redes tridimensionales y sus volúmenes

Hexagonales



$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}|a|^2|c|$$

El producto mixto de tres vectores esta definido como $c \cdot (a \times b) = |c||a \times b| \cos\theta_{(c,a\times b)}$ y el producto vectorial de dos vectores (a,b) esta definido también como $|a||b|\sin\theta$

Por ende tenemos que aplicando el producto vectorial de dos vectores y el producto mixto tendremos la siguiente expresión

$$V = |c||a||b|\sin\gamma$$

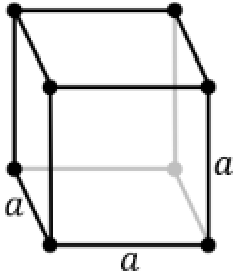
con

$$\gamma = 120$$

$$V = |c||a||a|\sin(\frac{2\pi}{3})$$

$$V = |c||a|^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Cúbicas



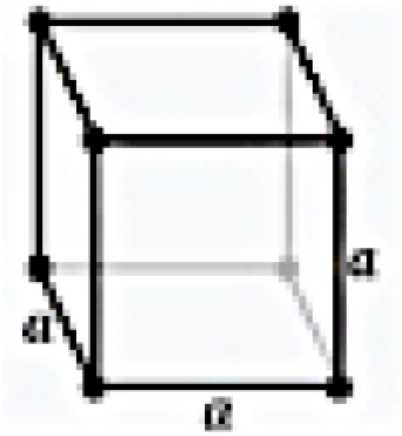
$$V = |a|^3$$

$$V = |a||b||c|$$

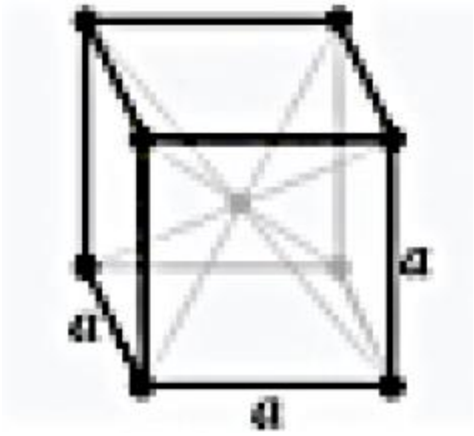
pero $|b| = |a| = |c|$ Entonces

$$V = |a|^3$$

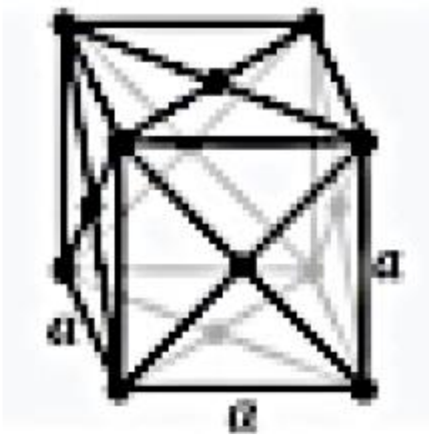
Sistemas Cúbicos



Primitiva



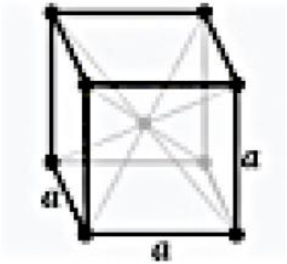
BCC



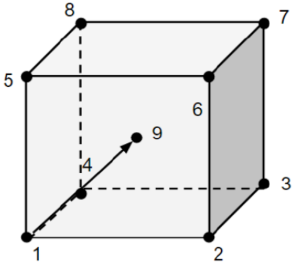
FCC

Para un sistema bcc descrito por los vectores primitivos:

$$\mathrm{a} = ai \qquad \mathrm{b} = aj \qquad \mathrm{c} = \frac{a}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

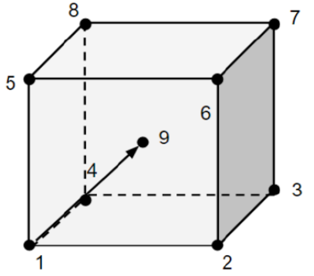


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 0,\ \beta = -1\ \gamma = 2 \qquad \mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 2c - b.$$

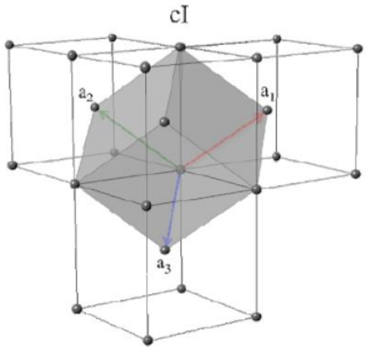
Para un sistema bcc descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a(\mathbf{j}+\mathbf{k}-\mathbf{i})/2 \qquad \mathbf{b} = a(\mathbf{i}+\mathbf{k}-\mathbf{j})/2 \qquad \mathbf{c} = a(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})/2$$



$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

Celda primitiva sistema bcc



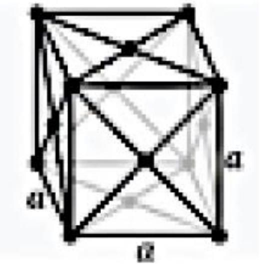
Volumen

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$(a,0,0)\cdot[(0,a,0)\times(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})] = (a,0,0)\cdot[(\frac{a^2}{2},0,-\frac{a^2}{2})] = \frac{a^3}{2}$$

Para un sistema bcc descrito por los vectores primitivos:

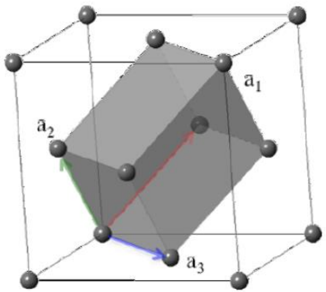
$$\mathbf{a} = a(\mathbf{j}+\mathbf{k})/2 \qquad \mathbf{b} = a(\mathbf{i}+\mathbf{k})/2 \qquad \mathbf{c} = a(\mathbf{i}+\mathbf{j})/2$$



$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

Celda primitiva sistema fcc

cF



Volumen

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \cdot [(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}) \times (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)] = (0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \cdot [(-\frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{4})] = \frac{a^3}{4}$$

Red recíproca

Dada una red recíproca descrita como:

$$a' = \frac{b \times c}{a \cdot (b \times c)}; \; b' = \frac{c \times a}{a \cdot (b \times c)}; \; c' = \frac{a \times b}{a \cdot (b \times c)}$$

Cúbico simple reciproco

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{(a\hat{\mathbf{j}} \times a\hat{\mathbf{k}})}{a^3} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}})}{a^3} = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}})}{a^3} = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}})}{a^3} = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{k}}$$

$$V = \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}') = \frac{1}{a^3}(\hat{\mathbf{i}} \cdot (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}})) = \frac{1}{a^3}(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) = \frac{1}{a^3}$$

$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}})}{a^3} = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}})}{a^3} = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{k}}$$

$$V = \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}') = \frac{1}{a^3}(\hat{\mathbf{i}} \cdot (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}})) = \frac{1}{a^3}(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) = \frac{1}{a^3}$$

Sistema *bcc*

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{b} = a\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2$$

$$\mathbf{a}' = \frac{a^2/2(\hat{\mathbf{j}} \times (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}))}{a^3/2} = \frac{1}{a}(-\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}})$$

$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{a^2/2((\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \times \hat{\mathbf{i}})}{a^3/2} = \frac{1}{a}(-\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{j}})$$

$$\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}})}{a^3/2} = \frac{2}{a}\hat{\mathbf{k}}$$

$$V = \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}') = \frac{2}{a^3}[(-\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}}) \cdot ((-\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{j}}) \times \hat{\mathbf{k}})] = \frac{2}{a^3}[(-\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}}) \cdot \hat{\mathbf{i}}] = \frac{2}{a^3}(1)^2 = \frac{2}{a^3}$$

Sistema fcc

$$\mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{b} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})/2$$

$$\mathbf{a}' = \frac{a^2/4((\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) \times (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}))}{a^3/4} = \frac{1}{a}(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}})$$

$$\mathbf{b}' = \frac{a^2/4((\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \times (\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}))}{a^3/4} = \frac{1}{a}(\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{i}})$$

$$\mathbf{c}' = \frac{a^2/4((\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \times (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}))}{a^3/4} = \frac{1}{a}(-\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$$

$$V = \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}') = \frac{1}{a^3}[(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}}) \cdot ((\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{i}}) \times (-\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}))] = \frac{1}{a^3}[(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}}) \cdot (\hat{\mathbf{j}} - \cancel{\hat{\mathbf{i}}} + \cancel{\hat{\mathbf{i}}} + \hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})]$$

$$V = \frac{1}{a^3}[(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}}) \cdot (2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})] = \frac{2}{a^3}[(1)^2 + (1)^2] = \frac{4}{a^3}$$

¿Por qué las estamos estudiando?

El enfoque visto en este ejercicio de redes de bravais es desde el álgebra lineal y buscamos desarrollar unas habilidades donde

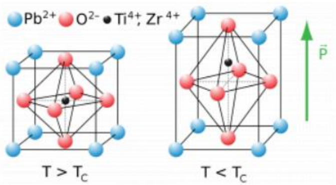
* Las podamos reconocer las 5 en el caso de las bidimensionales

* Podamos demostrar sus volúmenes en el caso de las tridimensionales

* Podamos expresar sistemas cúbicos en términos de varias celdas primitivas

además se generaron conceptos clave para el futuro desarrollo de nuestra carrera como físicos al tener una base en asignaturas como el estado solido

Conclusiones



1. Las estructuras atómicas de los cristales pueden ser vistas de manera vectorial representando una red de Bravais tanto tridimensional como bidimensionalmente.

1. Se pudo ver que las mismas redes se pueden formar bajo la traslación pero se deben acomodar a ciertas condiciones extras.

1. Se pudieron expresar de forma vectorial las celdas primitivas representadas por una sección de imagen (según la figura a estudiar) que al ser trasladadas, tal como indican las redes de Bravais, permiten observar la totalidad de la imagen inicial.