Nicolas Andres Ariza Tejedor — 2190732

Taller # 4

1. Sección 3.3.5

1.1. Ejercicio 2:

Dados los tensores:

$$R^i_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{7}{2} & 4 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}, \quad T^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre:

(a) La parte simétrica S^i_j y antisimétrica A^i_j de R^i_j.

(b) $R_{kj} = g_{ik} R^i_j$, $R^{ki} = g^{jk} R^i_j$, $T_j = g_{ij} T^i$ ¿Qué se concluye?.

(c) $R^i_j T_i$, $R^i_j T^j$, $R^i_j T_i T^j$.

(d) $R^i_j S^j_i$, $R^i_j A^j_i$, $A^j_i T^i$, $A^j_i T^i T_j$.

(e) $R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l$, $(R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l) T_i$, $(R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l) T_i T^j$.

Solución:

a) $$S^i_j = \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{7}{2} & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{6}{2} & 4 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \text{simétrica } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ 3/2 & 5/2 & 7/2 \\ 5/2 & 7/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

$$A^i_j = \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Antisimétrica

b) $R_{kj} = g_{ik} R^i_j = g_{ki} R^i_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ -2 & -5/2 & -3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}$$

• $R^{ki} = g^{jk} R^i_j = g^{kj} R^i_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ -2 & -5/2 & -3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}$$

se concluye que la métrica funciona para subir o bajar índices sin repercutir en el valor del tensor en cuestión, mostrándolo como covariante o contravariante

$T_j = g_{ij} T^i = g_{ji} T^i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Mediante índices vemos que se comporta como norma, por lo tanto es adecuado trasponerlo

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $R^{i}_{j} T_{i} = T_{i} R^{i}_{j}$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 & 8/3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ R^{i}_{j} T^{j} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 1 & 9/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 16/3 \\ 25/3 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ \boxed{R^{i}_{j} T^{i}}{}_{j} T^{j} = \begin{pmatrix} 7/3 & 8/3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 7/9 + 16/9 + 3$$

$$= \boxed{\frac{50}{9}}$$

d) $R^{i}_{j} S^{j}_{i} = R^{1}_{j} S^{j}_{1} + R^{2}_{j} S^{j}_{2} + R^{3}_{j} S^{j}_{3}$

$$R^{i}_{j} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ 3/2 & 5/2 & 7/2 \\ 5/2 & 7/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

$$= 1/4 + 3/2 + 15/4 + 3 + 25/4 + 21/2 + 35/4 + 14 + 81/4$$

$$= \frac{273}{4}$$

$\cdot\ R^{i}_{j} A^{j}_{i}$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1/2 + 3/2 - 1 + 3/2 - 7/2 - 2 = -3$$

• $A^j_i T^i$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

• $A^j_i T^i T_j$

$$\begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} = -4/9 + 2/9 + 2/3 = \boxed{4/9}$$

e) • $R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & -25/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & -21/2 \end{pmatrix}$$

• $(R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l) T_i = T_i (R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -29/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & -25/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & -21/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8/3 & 30/3 & -12 \end{pmatrix}$$

• $\underbrace{(R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l) T_i}\, T^j$

$$\begin{pmatrix} -8/3 & 30/3 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-40}{9} \end{pmatrix}$$

8) Suponga un sistema de coordenadas ortogonales generalizadas (q^1, q^2, q^3)

$$q^1 = x+y \; ; \; q^2 = x-y \; ; \; q^3 = 2z$$

a) Compruebe que el sistema es ortogonal

$$q^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$q^1 \cdot q^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + (-1) + 0 = 0$$ ortogonales

$$q^1 \cdot q^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$ ortogonales

$$q^2 \cdot q^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$ ortogonales

Bajo el producto punto, los vectores q^1, q^2, q^3 son ortogonales.

b) Encuentre los vectores base para este sistema de coordenadas.

$$x^{1'} = \frac{\partial \tilde{x}^{1'}}{\partial x^j} x^j$$

es el resultado de derivar parcialmente las coordenadas q_1, q_2, q_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Nueva base

Vecto canónico

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

c) Encuentre el tensor métrico y el elemento de volumen en estas coordenadas.

Tensor métrico

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Producto Punto de los vectores

$$U_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

Elemento de volumen

$$dV = dx\,dy\,dz \qquad dx^i = (dx, dy, dz)$$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j \qquad d\tilde{x}^j = (dq_1, dq_2, dq_3)$$

$$dx^i = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dq^1\\dq^2\\dq^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}dq^1 + dq^2\\dq^1 - dq^2\\2dq^3\end{pmatrix}$$

$$dx = dq^1 + dq^2$$
$$dy = dq^1 - dq^2$$
$$dz = 2dq^3$$

$$dv = (dq^1 + dq^2)(dq^1 - dq^2)(2dq^3)$$

$$dv = ((dq^1)^2 - (dq^2)^2 \, 2dq^3$$

d) Encuentre las expresiones en el sistema (q^1, q^2, q^3) para los vectores:

$$A = 2\hat{j}, \quad B = \hat{i} + 2\hat{j}, \quad C = \hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$A = 2\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \hat{i} + 2\hat{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A|q^1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$B|q^1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$C|q^1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} \checkmark$$

e) Encuentre en el sistema (q^1, q^2, q^3) las expresiones para las siguientes relaciones vectoriales

$$A \times B, \quad A \cdot C, \quad (A \times B) \cdot C$$

¿Qué puede decir si compara esas expresiones en ambos sistemas de coordenadas?

$$A \times B = (2,-2,0) \times (3,-1,0)$$
$$= (0-0,\ 0+0,\ -2-(-6))$$
$$= (0,0,4)$$

$$A \cdot C = (2,-2,0) \cdot (8,-6,0)$$
$$= 16 + 12 + 0 = 28$$

$$(A \times B) \cdot C = (0,0,4) \cdot (8,-6,6)$$
$$= 0 + 0 + 24 = 24$$

F) Considere los siguientes tensores y vectores en coordenadas cartesianas:

$$R^i_j = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix},\quad T^i = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y encuentre sus expresiones para el nuevo sistema de coordenadas (q^1, q^2, q^3).

- $$R^i_j = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{bmatrix}$$

$$R^{i'}_{j'} = \frac{d\tilde{x}^{i'}}{dx^k} \frac{\partial x^L}{\partial x^{j'}} R^k_L$$

$$R^{i'}_{j'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{bmatrix}$$

$$i' \times K \qquad L \times j' \curvearrowright K \times L$$

Por orden Indicial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$R^{i'}_{j'} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 12 & -2 & 9 \\ -6 & 0 & -3 \\ 30 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\, T^{j} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow T^{i'} = \frac{\partial \tilde{x}^{i'}}{\partial x_j} T^{j}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\cdot\, g^{i'j'} = \frac{\partial \tilde{x}^{i'}}{\partial x^{K}} \frac{\partial \tilde{x}^{j'}}{\partial x^{L}} g^{KL} \qquad g_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i' \times K \qquad j' \times L \qquad K \times L$$

$$= L \times j' \curvearrowright$$

Por efectos de Notación

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$g^{i'j'} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

//

6) Considere el tensor de Maxwell definido como:

$$F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix},$$

otra vez con: $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donde $E = (E^x, E^y, E^z)$ y $B = (B^x, B^y, B^z)$ son los campos eléctricos y magnéticos (respectivamente), medidos por un observador O en coordenadas cartesianas.

a) Si un observador mide un campo eléctrico $E = E^x \uparrow$ y ningún campo magnético ¿cuáles campos, $F_{\mu\alpha}$, medirá otro observador que viaja con una velocidad respecto al primero de $\beta = v \uparrow$?

Observador 1 -> solo detecta campo en x
(O)

$$F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & 0 & 0 \\ E^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$ se anulan las demás componentes

Observador 2 -> velocidad respecto al $\vec{\beta} = v\hat{\imath}$
(O')

$F'_{\mu\alpha} = ¿?$ -> Transformación de Lorentz

$F'_{\mu\alpha} = \Delta^{\mu}_{\mu'} \Delta^{\nu}_{\nu'} F_{\mu\nu}$ -> solo tengo componentes F_{01} y F_{10}

$F'_{\mu\alpha} = \Delta^{0}_{\mu'} \Delta^{1}_{\nu'} F_{01} + \Delta^{1}_{\mu'} \Delta^{0}_{\nu'} F_{10}$ $\quad F_{01} = E_x \quad F_{01} = -F_{10}$

$F_{10} = -E_y$

$F'_{\mu\alpha} = \Delta^{0}_{\mu'} \Delta^{1}_{\nu'} F_{01} - \Delta^{1}_{\mu'} \Delta^{0}_{\nu'} F_{01}$

$F'_{\mu\alpha} = (\Delta^{0}_{\mu'} \Delta^{1}_{\nu'} - \Delta^{1}_{\mu'} \Delta^{0}_{\mu'}) F_{01}$

Tomando en cuenta que: $\Delta^{0}_{0'} = \gamma$, $\Delta^{i}_{0'} = \gamma v^i$, $\Delta^{i}_{j'} = \delta^{i}_{j'} + v^i v_{j'} \frac{\gamma - 1}{\underbrace{v^k v_k}_{|v|^2}}$

como $v^i = (v, 0, 0)$ -> sola esta en $\hat{\imath}$

$$\Delta^{\mu}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta^{1}_{1'} = \cancel{\delta^{1}_{1'}} + v^1 \cancel{v_{1'}} \frac{\gamma - 1}{|v|^2} = \gamma$$

Entonces:

$F_{0'0'} = (\Delta^{0}_{0'} \Delta^{1}_{0'} - \Delta^{1}_{0'} \Delta^{0}_{0'}) F_{01} = (-\gamma^2 v + \gamma^2 v) F_{01} = 0$

$F_{1'1'} = (\Delta^{0}_{1'} \Delta^{1}_{0'} - \Delta^{1}_{0'} \Delta^{0}_{1'}) F_{01} = (-\gamma^2 v^2 + \gamma^2 v^2) F_{01} = 0$

$F_{1'0'} = (\Delta^{0}_{1'} \Delta^{1}_{0'} - \Delta^{1}_{1'} \Delta^{0}_{0'})(-E^x) = (\gamma^2 v^2 - \gamma^2)(E^x)$

-> Análogamente $F_{0'1'} = (\gamma^2 v^2 - \gamma^2)(-E^x)$

Las demás componentes son 0 y se harán necesariamente 0

$$F_{\mu'\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^2(v^2-1)E^x & 0 & 0 \\ \gamma^2(v^2-1)E^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera $\vec{E}' = (E^{x'}, E^{y'}, E^{z'}) = ((v^2-1)\gamma^2 E^x, 0, 0)$
$\vec{B}' = (B^{x'}, B^{y'}, B^{z'}) = (0, 0, 0)$

Por ende el observador 2 (O') solo detectará campo magnético en dirección $\hat{i}$ incrementado en un factor $(v^2-1)\gamma^2$ //

b) Muestre que las ecuaciones de Maxwell:
$\nabla \times B - \frac{\partial}{\partial t}E = 4\pi J$, y $\nabla \cdot E = 4\pi\rho$ se pueden expresar como:

$\frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} \equiv F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu$, donde $J^\mu = (c\rho, J^1, J^2, J^3)$ y
$J = (J^1, J^2, J^3)$.

Tomando en cuenta las ecuaciones de Maxwell para la Ley de Gauss y la Ley de Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Demostrar $\rightarrow \frac{\partial F^{\mu_1}}{\partial x^\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = c\mu_0 J^\mu J^\mu = (c\rho \vec{J})$, $\vec{J} = (J^1, J^2, J^3)$

$\vec{E} = (E^x, E^y, E^z)$
$\vec{B} = (B^x, B^y, B^z)$

Necesitamos subir índices (versión contravariante)

$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\,\eta^{\beta\nu} \longrightarrow$ Para que se cumpla producto matricial

Partiendo de:

operamos con el tensor métrico

$$F_{\alpha\beta_0} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & cB^z & -cB^y \\ E^y & -cB^z & 0 & cB^x \\ E^z & cB^y & -cB^x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & cB^z & -cB^y \\ -E^y & -cB^z & 0 & cB^x \\ -E^z & cB^y & -cB^x & 0 \end{pmatrix}$$

Ley de Gauss

Derivadas parciales

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \equiv F^{\mu\nu}_{,} = F^{\mu 0}_{,0} + F^{\mu 1}_{,1} + F^{\mu 2}_{,2} + F^{\mu 3}_{,3}$$

$x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$(0, x, y, z)$

$$= \cancel{F^{00}_{,0}} + F^{01}_{,1} + F^{02}_{,2} + F^{03}_{,3} = 0 + \underbrace{\frac{\partial E^x}{\partial x} + \frac{\partial E^y}{\partial y} + \frac{\partial E^z}{\partial z}}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \to \text{Divergencia}}$$

$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{c\rho}{c\varepsilon_0} = \frac{J^0}{\frac{c1}{\mu_0 c^x}} = \boxed{\mu_0 c J^0}$$

Ley de Ampere-Maxwell

$$F^{1\nu}_{,\nu} = F^{10}_{,0} + F^{11}_{,1} + F^{12}_{,2} + F^{13}_{,3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E^x}{\partial t} + 0 + c\frac{\partial B^z}{\partial y} - c\frac{\partial B^y}{\partial z}$$

$$= c\left(\frac{-1}{c^2}\frac{\partial E^x}{\partial t} + \left(\frac{\partial B^z}{\partial y} - \frac{\partial B^y}{\partial z}\right)\right) = c\left(\frac{-1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla\times\vec{B}\right)_x$$

Factorizando

$\vec{\nabla}\times\vec{B}$ Rotacional $\quad = c\mu_0 J^{1\nu}$

De manera análoga para $F^{2\nu}_{,\nu}$ y $F^{3\nu}_{,\nu}$ se obtienen las componentes y y z respectivamente.

Así se concluye que $F^{\mu\nu}_{,\nu} = c\mu_0 J^\mu$ contiene la ley de Gauss y la Ley de Ampere-Maxwell.

c) Considere la identidad de Bianchi de la forma:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial F_{\nu\gamma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial F_{\gamma\mu}}{\partial x^{\nu}} \equiv \partial_\gamma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\gamma} + \partial_\nu F_{\gamma\mu}$$

$$\equiv F_{\mu\nu,\gamma} + F_{\nu\gamma,\mu} + F_{\gamma\mu,\nu} = 0$$

y demuestre que las otras dos ecuaciones $\nabla \cdot B = 0$ y $\nabla \times E - \frac{\partial}{\partial t} B = 0$, también están contenidas en las expresiones $F^{\mu\nu} = 4\pi J^{\mu}$

$$F_{13,2} + F_{32,1} + F_{21,3} = 0 \rightarrow -c\frac{\partial B^y}{\partial y} - c\frac{\partial B^x}{\partial x} - c\frac{\partial B^z}{\partial z} = 0$$

$$-c\underbrace{\left(\frac{\partial B^x}{\partial x} + \frac{\partial B^y}{\partial y} + \frac{\partial B^z}{\partial z}\right)}_{0} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Ahora bien, haciendo: $F_{\mu\nu,0} + F_{\nu0,\mu} + F_{0\mu,\nu} = 0$ se trabaja con rotacional

$$\mu = 2,\ \nu = 3 \rightarrow F_{23,0} + F_{30,2} + F_{02,3} = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{c\,\partial B^x}{c\,\partial t} + \frac{\partial E^z}{\partial y} - \frac{\partial E^y}{\partial z} = 0 \rightarrow (\vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E})_x = 0$$

$$\mu = 1,\ \nu = 3 \rightarrow F_{13,0} + F_{30,1} + F_{01,3} = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{-\cancel{c}\,B^y}{\cancel{c}\,\partial t} + \frac{\partial E^z}{\partial x} - \frac{\partial E^x}{\partial z} = 0 \rightarrow (-\vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$$

$$\mu = 2,\ \nu = 1 \rightarrow F_{21,0} + F_{10,2} + F_{02,1} = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{-c\,B^z}{c\,\partial t} + \frac{\partial E^x}{\partial y} - \frac{\partial E^y}{\partial x} = 0 \rightarrow (-\vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$$

De acuerdo a lo anterior queda demostrado