Nombre: Nicolas Andres Ariza Tejedor
Código: 2190732

Índice

1. 2.1.6

1.1. Punto 3:

Considere un triángulo equilátero que se muestra en la figura 2.1. Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro? y, reflexiones respecto a planos, XA, XB y XC, que dejan invariante la figura del triángulo.

Ahora bien, se puede definir la operación concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triángulo, tal y como mostramos en la mencionada figura 2.1. Note que lo ilustrado en la figura, puede esquematizarse como:

$$(A\ \alpha, B\ \beta, C\ \gamma)\ \vec{\mathbf{R}}_{\frac{2\pi}{3}}\ (A\ \gamma, B\ \alpha, C\ \beta)\ \vec{\mathbf{X}}_A\ (A\ \gamma, B\ \beta, C\ \alpha).$$

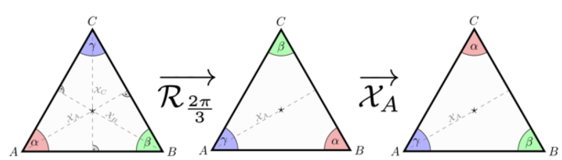


Figura 1: **Figura 2.1:** Transformaciones que dejan invariante un triángulo equilátero.

(a) Tabla de multiplicación para $G_\triangle$

concatenar	**I**	**Ri**	**Rj'**	**Xa**	**Xb**	**Xc**
I	I	Ri	Rj'	Xa	Xb	Xc
Ri	Ri	Rj'	I	Xc	Xa	Xb
Rj'	Rj'	I	Ri	Xb	Xc	Xa
Xa	Xa	Xb	Xc	I	Ri	Rj'
Xb	Xb	Xc	Xa	Ri'	I	Ri
Xc	Xc	Xa	Xb	Ri	Rj'	I

(b) Sea $G_\triangle = \{Ri, Rj', X_a, X_b, X_c\}$ el grupo con las operaciones de rotación horaria, antihoraria y las reflexiones respecto a los planos A, B y C respectivamente.Así se muestran las propiedades en que debe cumplir el grupo:

1. Cerradura respecto a "concatenar ©": Tal y como se representó en la tabla de multiplicación, concatenar dos operaciones del conjunto $G_\triangle$ es equivalente a realizar otra de las operaciones que también pertenecen al conjunto; por lo tanto, el grupo es cerrado sobre "concatenar ©".

2. Asociativa respecto a "concatenar": Sin alterar el orden de los elementos de $G_\triangle$ se puede concatenar en diferentes órdenes sin alterar el resultado. Por ejemplo:

Xa © (Xb © Ri) = (Xa © Xb) © Ri
Xa © Xc = Ri © Ri
Rj' = Rj'

Ri © (Xc © Rj') = (Ri © Xc) © Rj'
Ri © Xb = Xb © Rj'
Xa = Xa

3. Único elemento neutro: El elemento neutro para el cual operación se mantiene igual es la operación identidad (I), entiéndase esta operación como mantener el triángulo en el estado en que se encuentre.

4. Elemento inverso: Cada elemento tiene su respectivo inverso para el cual el triángulo retorna a su estado original luego de aplicar la concatenación. En el caso de las rotaciones, el inverso de las rotación horaria es la antihoraria y viceversa; mientras que el simétrico de las reflexiones es aplicar dos veces la misma operación, debido a que implica dos reflejos sobre el mismo eje que mantienen al triángulo en su estado original.

(c) Subgrupo cíclico de orden 3 formado por la operación Identidad, Ri (rotación horaria) y Rj' (rotación antihoraria)

concatenar	**I**	**Ri**	**Rj'**
I	I	Ri	Rj'
Ri	Ri	Rj'	I
Rj'	Rj'	I	Ri

Es un subgrupo porque incluye el elemento neutro del grupo $G_\triangle$ y los simétricos de Ri y Rj' tal y como se mencionó en el inciso 4 del punto b; donde Ri es inverso de Rj' (son rotaciones en igual ángulo pero sentido opuesto) y viceversa. Ahora bien, es un subgrupo de orden 3 porque es finito y su composición son tres elementos que corresponden a permutaciones en el triángulo equilátero bajo la operación de concatenación ©.

Ahora, que el subgrupo sea cíclico parte de lo siguiente:

- El primer elemento es la identidad.
- Ri © Ri = Rj' → Generamos el tercer elemento a partir de la concatenación del segundo.
- Rj' © Rj' = Ri → La concatenación del tercer elemento (último) genera el segundo.
- Ri © Rj' = I → El último elemento con el primero que empezó a concatenarse genera la identidad.

Cabe resaltar también que el subgrupo es además de cíclico y de orden 3, un grupo abeliano pues es conmutativo bajo la operación ©.

Subgrupo cíclico de orden 2 entre la operación identidad y las reflexiones Xi

concatenar	**I**	**Xi**
I	I	Xi
Xi	Xi	I

El conjunto de operaciones es un subgrupo pues contiene el elemento neutro del grupo $G_\triangle$ y contiene a su vez el simétrico que es la concatenación entre dos reflexiones sobre el mismo plano. Ahora para revisar que el subgrupo sea cíclico se tiene que:

- El primer elemento es la identidad
- Xi © Xi = I → El segundo elemento y último se concatena consigo mismo y genera el primer elemento.

Al igual que el caso anterior, este es un subgrupo cíclio, de orden 2 y abeliano bajo la operación de ©.

(d) Considerando las siguientes matrices y la operación matricial usual se tiene que:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se puede establecer la tabla de multiplicación correspondiente:

X	**I**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

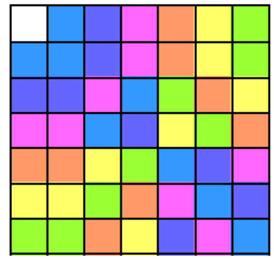
Se observa que el conjunto de matrices $M = \{I, A, B, C, D, E\}$ forman un grupo pues cumplen que:

1. Cerradura respecto a la multiplicación: Tal y como se representó en la tabla de multiplicación, realizar el producto matricial entre dos elementos del conjunto da como resultado otro elemento de M, por lo que se cumple la propiedad clausurativa.
2. Asociativa respecto a la multiplicación: Sin alterar el orden en que se operen los elementos de M se puede realizar la propiedad asociativa pues, como todas las matrices son de igual dimensión (2 x 2), no se altera el resultado de su multiplicación además que sus entradas son números reales y estos también cumplen la propiedad asociativa.
3. Único elemento neutro: El elemento neutro para el cual operación se mantiene igual es la matriz identidad (I), pues el producto de cualquier matriz por la identidad es esa misma.
4. Elemento inverso: Cada elemento tiene su respectivo inverso como lo es: $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$ y las matrices C, D y E son involutivas; es decir, ellas son sus propias inversas y por ende al multiplicarse por sí mismas da la identidad.

Ahora bien, se puede revisar el isomorfismo entre $G_\triangle$ y M a partir de la comparación entre sus tablas de multiplicar y usando colores, como se ve a continuación:

X	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

©	I	Ri	Rj'	Xa	Xb	Xc
I	I	Ri	Rj'	Xa	Xb	Xc
Ri	Ri	Rj'	I	Xc	Xa	Xb
Rj'	Rj'	I	Ri	Xb	Xc	Xa
Xa	Xa	Xb	Xc	I	Ri	Rj'
Xb	Xb	Xc	Xa	Rj'	I	Ri
Xc	Xc	Xa	Xb	Ri	Rj'	I



Por lo tanto, como siguen las mismas propiedades bajo sus respectivas operaciones, se puede decir que son grupo isomorfos y presentan relaciones equivalentes entre sí.

(e) ¿Hay isomorfismo con la conjunto de permutaciones de tres objetos y su operación de composición?

De acuerdo con el conjunto presentado en el ejemplo y su respectiva tabla de multiplicar:

$\odot$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_2$
$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3$
$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_1$
$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_0$
$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_4$

Es posible establecer un isomorfismo con el grupo G_Δ debido a que, al reorganizar los elementos de su tabla puede evidenciarse que estos presentan las mismas propiedades y subgrupos, por lo que simplemente hay un cambio de notación de uno a otro.

	P0	P4	P5	P1	P3	P2
P0	P0	P4	P5	P1	P3	P2
P4	P4	P5	P0	P2	P1	P3
P5	P5	P0	P4	P3	P2	P1
P1	P1	P3	P2	P0	P4	P5
P3	P3	P2	P1	P5	P0	P4
P2	P2	P1	P3	P4	P5	P0

©	I	Ri	Rj'	Xa	Xb	Xc
I	I	Ri	Rj'	Xa	Xb	Xc
Ri	Ri	Rj'	I	Xc	Xa	Xb
Rj'	Rj'	I	Ri	Xb	Xc	Xa
Xa	Xa	Xb	Xc	I	Ri	Rj'
Xb	Xb	Xc	Xa	Rj'	I	Ri
Xc	Xc	Xa	Xb	Ri	Rj'	I

(f) Triángulo isósceles: Para el triángulo isósceles la única operación de simetría es la reflexión sobre un plano que pasa por A, siendo A el vértice donde se encuentra el ángulo diferente a los demás. Así, tendríamos un conjunto conformado por $T_i = \{I, X_A\}$, donde esa reflexión equivale a la identidad y es su propio inverso. Así, si este conjunto bajo la operación de concatenación funcionaría como un grupo cíclico abeliano de orden 2.

Triángulo escaleno: El triángulo escaleno no tiene operaciones de simetría, por lo tanto, ni bajo reflexiones ni rotaciones, la figura se mantiene invariante y no sería posible establecer un grupo con estas operaciones pues son inexistentes, además de la identidad.

1.2. Punto 10:

Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n en, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

(a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real):

a) supongamos a $p(x) \wedge g(x) \wedge h(x) \in P_n$ y $\alpha \wedge \beta \in K$ con K que son los números reales:

1) $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

$$\Rightarrow p(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$$p(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i x^i + b_i x^i) = \sum_{i=0}^{n-1} (\underbrace{a_i + b_i}_{\substack{\text{número} \\ \text{real} \\ c_i}}) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in P_n$$

2) conmutatividad bajo la suma:

$$p(x) + g(x) = g(x) + p(x)$$

$$p(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i x^i + a_i x^i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\underbrace{b_i + a_i}_{\substack{\text{número reales} \\ \text{conmutan bajo} \\ \text{la suma}}}) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i = p(x) + g(x)$$

3) Asociativa bajo la suma:

$$(p(x) + g(x)) + h(x) = p(x) + (g(x) + h(x))$$

$$(p(x) + g(x)) + h(x) = p(x) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} d_i x^i\right)$$

$$= p(x) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (b_i x^i + d_i x^i)\right)$$

$$= p(x) + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + d_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + d_i) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + (b_i + d_i) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} [a_i + (b_i + d_i)] x^i = \sum_{i=0}^{n-1} [(a_i + b_i) + d_i] x^i + d_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=0}^{n-1} d_i x^i = \left(p(x) + g(x)\right) + h(x)$$

4) Único elemento neutro: El polinomio 0 de coeficientes 0:

$$P_0 = \sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i \Rightarrow p(x) = p(x) + P_0$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(a_i + 0)}_{\text{el cero Real es neutro}} x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = p(x)$$

5) Elemento simétrico:

Supóngase un vector $|-P_n\rangle \rightleftarrows -p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i x^i = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

Entonces:

$$p(x) + (-p(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(a_i - a_i)}_{\text{inverso de los números Reales}} x^i = \sum_{i=0}^{n-1} 0 x^i = P_0 \rightarrow$$ Polinomio cero, elemento neutro

6) P_n es cerrado bajo producto por un número

$$\alpha p(x) \in P_n$$

$$\alpha p(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\alpha a_i}_{\text{Real por real da un número real}} x^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in P_n$$

$c_i \to \alpha a_i$

7) $\alpha(\beta p(x)) = (\alpha\beta) p(x)$

$$\alpha(\beta p(x)) = \alpha\beta \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\beta a_i}_{\text{número real}} x^i = \alpha(\beta p(x))$$

8) $(\alpha+\beta)p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x)$

$$(\alpha+\beta)p(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \beta \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{números reales}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = (\alpha+\beta)p(x)$$

9) $\alpha(p(x)+g(x)) = \alpha p(x) + \alpha g(x)$

$$\alpha(p(x)+g(x)) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$$= \alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right) = \alpha(p(x)+g(x))$$

10) Elemento neutro 1:

$$p(x) = 1p(x)$$

$$p(x) = 1\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{1 a_i}_{} x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = p(x)$$

El 1 es el neutro de la multiplicación de reales

(b) Si los coeficientes del polinomio son enteros, ¿P_n será espacio vectorial?

sea $\alpha \in K$ y su inverso $\frac{1}{\alpha} \in K$

si: $\frac{1}{\alpha}p(x) \in P_n$ (con $a_i \in \mathbb{Z}$) entonces se cumple la cerradura bajo la multiplicación:

$$\frac{1}{\alpha}p(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{\alpha} x^i$$

el coeficiente $\frac{a_i}{\alpha}$ no garantiza la cerradura bajo la multiplicación

Por lo tanto, bajo esa condición, P_n no es espacio vectorial a menos que el cuerpo K sea el de los números enteros

(c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de Pn son subespacio vectorial?

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$ (S):

1) El vector neutro P_n está en el subconjunto S, en este caso es el vector polinomio 0

2) sea $g(x)$ y $h(x) \in S$: ¿$g(x) + h(x) \in S$?

$$g(x) + h(x) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-2} d_i x^i = \sum_{i=0}^{n-2} (b_i x^i) + (d_i x^i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} (b_i + d_i) x^i$$

$\Rightarrow$ Da otro polinomio de grado $n-1$ pues los coeficientes se sumaron y cumplen la cerradura bajo la suma de los reales

3) Si $g(x) \in S \wedge \alpha \in K \rightarrow ¿\alpha g(x) \in S?$

$$\alpha g(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-2} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-2} \underbrace{\alpha b_i}\, x^i = \sum_{i=0}^{n-2} c_i x^i \in S$$

$c_i \rightarrow \alpha b_i$

Real por real cumple cerradura bajo la multiplicación

R/ si es subespacio vectorial.

II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par:

1) El vector neutro de P_n está en el subconjunto S, en este caso es el vector polinomio 0.

2) Sea $g(x) \wedge h(x) \in S$: $¿g(x) + h(x) \in S?$

con n par $g(x) + h(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + d_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i + d_i) x^i$$

$\Rightarrow$ Dará otro polinomio de grado par siempre y cuando $b_i \neq -d_i$; de lo contrario no se garantiza esta cerradura

3) Si $g(x) \in S \wedge \alpha \in K \rightarrow ¿\alpha g(x) \in S?$ con n par

$$\alpha g(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\alpha b_i}\, x^i \longrightarrow \text{otro polinomio de grado } n$$

Cerradura de los reales bajo la multiplicación

R/ NO es subespacio vectorial.

III) Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n>1$)

1) En el subconjunto S no está el vector neutro (polinomio 0) pues es de grado 0

R/ No es subespacio vectorial

IV) Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor (S)

1) El vector neutro de P_n, en este caso el polinomio cero, pertenece a S

2) Sea $g(x) \wedge h(x) \in S$, ¿$g(x)+h(x) \in S$?

$$g(x)+h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i (x-1)^i + \sum_{i=0}^{n-1} d_i (x-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_i (x-1)^i + d_i (x-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(b_i+d_i)}_{\text{cerradora bajo la suma en } \mathbb{R}} (x-1)^i \in S$$

3) Si $g(x) \in S$ y $\alpha \in K$, ¿$\alpha g(x) \in S$?

$$\alpha g(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} b_i (x-1)^i = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\alpha b_i}_{\text{cerradura bajo la multiplicación en } \mathbb{R}} (x-1)^i \text{ es}$$

2. Sección 2.3.6

2.1. Punto 5:

Considere el espacio de las matrices complejas 2x2 hermíticas (una matriz hermítica es igual a su transpuesta conjugada).

(a) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forman una base para este espacio vectorial.

Tomando en cuenta que las matrices hermíticas 2x2 cumplen que:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^{\dagger} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real} \\ z_4^* = z_4 & \text{real} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos} \end{cases}$$

Podemos reescribir estas matrices como:

$$\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix} con\ a, b, c, d \in R\ e\ i = \sqrt{(-1)}$$

Entonces buscamos los números $\alpha, \beta, \gamma\ y\ \delta$ que garantizan que las matrices de Pauli son un conjunto generador del espacio de matrices herméticas 2x2. Tomando en cuenta que estos son números complejos también:

$$\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se puede establecer el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$a = (\alpha_1 + \alpha_2 i) + (\delta_1 + \delta_2 i)$$

$$b + ci = \beta_1 + \beta_2 i - i(\gamma_1 + \gamma_2 i)$$

$$b - ci = \beta_1 + \beta_2 i + i(\gamma_1 + \gamma_2 i)$$

$$d = \alpha_1 + \alpha_{2i} - (\delta_1 + \delta_2)$$

E igualando la parte real con la imaginaria se obtiene las siguientes ecuaciones que pueden ser ingresadas a una matriz para reducirlas:

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha_1 + \delta_1 \\
0 &= \alpha_2 i + \delta_2 i \\
c &= \beta_1 + \gamma_2 \\
bi &= \beta_2 i - \gamma_1 i \\
c &= \beta_1 - \gamma_2 \\
-bi &= \beta_2 i + \gamma_1 i \\
d &= \alpha_1 - \delta_1 \\
0 &= \alpha_2 i - \delta_2 i
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & b \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & c \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -b \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & d \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a+d}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a-d}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

De esta manera se encuentra que las matrices son un conjunto generador de las matrices herméticas 2x2 y los valores de α, β, γ y δ son:

$$\alpha = \frac{a+d}{2}, \beta = c, \gamma = -b, \delta = \frac{a-d}{2}$$

Y operando, usando Maxima, se verifican los valores dados.

Por otra parte, se puede revisar la independencia lineal entre los vectores observando que la solución al sistema de ecuaciones homogéneo es trivial ($\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ y $\delta = 0$):

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

(b) Desarrollado en MAXIMA.

(c) Subespacios de las matrices hermíticas:

- Matrices simétricas reales puras: Diagonal invariante bajo trasposición y componentes invariantes al ser conjugadas pues son reales puras, así mismo las matrices simétricas reales puras cumplen que: Sea A una matriz simétrica de componentes a_{ij}:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Para todo i diferente de j, entonces, como A es igual a A^T, se considera una matriz hermítica.

- Matrices antisimétricas imaginarias puras: Para este caso, se hace $\alpha = \beta = \delta = 0$ y las matrices antisimétricas puras serían todas las combinaciones lineales de la matriz σ_2

$$\begin{pmatrix} 0 & b+ci \\ b-ci & 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Donde se cumple que, siendo A la matriz antisimétrica imaginaria pura:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$