Nicolas Andres Ariza Tejedor – 2190732

Taller #1

1. sección 1.5.7

1.1. Ejercicio 2

- $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x^i \hat{i}_i$
- $a = a(r) = a(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{i}_i$
- $b = b(r) = b(x,y,z) = b^i(x,y,z)\hat{i}_i$
- $\phi = \phi(r) = \phi(x,y,z)$
- $\psi = \psi(r) = \psi(x,y,z)$

Utilizando notación de índices, demuestre:

Identidad 1. $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

Demostración. Utilizando notación de índices reescribimos la expresión:

$$\nabla(\phi(r)\psi(r)) = \partial^i(\phi(x^j)\psi(x^j))\hat{i}_i$$

Ahora, usando la regla del producto, se escribe la expresión como:

$$\partial^i(\phi(x^j)\psi(x^j))\hat{i}_i = \phi(x^j)\underbrace{\boxed{\partial^i\psi(x^j)\hat{i}_i}}_{\nabla\psi} + \psi(x^j)\underbrace{\boxed{\partial^i\phi(x^j)\hat{i}_i}}_{\nabla\phi}$$

Donde las expresiones encerradas corresponden a $\nabla\psi$ y $\nabla\phi$ respectivamente, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}\nabla(\phi(r)\psi(r)) &= \partial^i(\phi(x^j)\psi(x^j))\hat{i}_i\\ &= \phi(x^j)\nabla\psi + \psi(x^j)\nabla\phi\\ &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \quad .\end{aligned}$$

Identidad 3. $\nabla\times(\nabla\times a) = \nabla\cdot(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a$

Demostración. Utilizando notación de índices reescribimos la expresión:

$$(\nabla\times(\nabla\times a))^i = \epsilon^{ijk}\partial_j(\nabla\times a)_k = \epsilon^{ijk}\partial_j(\epsilon_{kmn}\partial^m\partial^n)$$

Ahora se reordena la expresión y los subíndices kmn a mnk (es posible debido a las propiedades de permutación de Levi-civita y a la conmutatividad de la notación indicial) por conveniencia de la demostración:

$$(\nabla\times(\nabla\times a))^i = \epsilon^{ijk}\epsilon_{kmn}\partial_j\partial^m a^n = \epsilon^{ijk}\epsilon_{mnk}\partial_j\partial^m a^n$$

Ahora tenemos una propiedad que relaciona al símbolo Levi-civita con el delta de Kronecker que es $\epsilon^{ijk}\epsilon_{kmn} = (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n)$ y efectuamos el producto:

$$(\nabla\times(\nabla\times a))^i = (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n)\partial_j\partial^m a^n$$
$$= \delta^i_m\delta^j_n\partial_j\partial^m a^n - \delta^j_m\delta^i_n\partial_j\partial^m a^n$$

Ahora por índices mudos:

$$(\nabla\times(\nabla\times a))^i = \partial_n\partial^m a^n - \partial_m\partial^m a^n = \partial^m\boxed{\partial_n a^n} - \boxed{\partial_m\partial^m} a^n$$

Las expresiones encerradas corresponden a $\nabla\cdot a$ y $\nabla\cdot\nabla = \nabla^2$ respectivamente:

$$(\nabla\times(\nabla\times a))^i = \nabla\cdot(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a\,.$$

Identidad 2. $\nabla\cdot(\nabla\times a)$ ¿Qué puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot a)$?

Demostración. Utilizando notación de índices reescribimos la expresión:

$$\nabla\cdot(\nabla\times a)=\partial_i(\nabla\times a)^i=\partial_i(\epsilon^{ijk}\partial_j a_k)=\epsilon^{ijk}\partial_i\partial_j\partial_k=0$$

Esta sería la demostración correspondiente al teorema que plantea que la divergencia del rotacional de un campo vectorial es 0. $\nabla\cdot(\nabla\times F)=0$ para todo F. Se comprueba a través del determinante:

$$\begin{vmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=\partial_1(\partial_2 a_3-\partial_3 a_2)-\partial_2(\partial_1 a_3-\partial_3 a_1)+\partial_3(\partial_1 a_2-\partial_2 a_1)$$

$$=\partial_1\partial_2 a_3-\partial_1\partial_3 a_2-\partial_2\partial_1 a_3+\partial_2\partial_3 a_1+\partial_3\partial_1 a_2-\partial_3\partial_2 a_1=0$$

Ahora bien, por teorema de Clairaut las segundas derivadas parciales de una función continua son iguales, así se tiene que:

$$\partial_1\partial_2 a_3-\partial_1\partial_3 a_2-\partial_2\partial_1 a_3+\partial_1\partial_2 a_3+\partial_1\partial_3 a_2+\partial_2\partial_1 a_3=0$$

Así, se cancelan los términos semejantes y se anula el determinante.

Por otro lado $\nabla\times(\nabla\cdot a)$ no va a ser posible dado que el producto vectorial entre un vector y el resultado del producto punto que es un escalar no está definido.

2. Sección 1.6.6.

2.1. Ejercicio 2

Demuestre.

(a.) $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}^2(\alpha)$

(b.) $\mathrm{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha) - \mathrm{sen}^3(\alpha)$

Solución:

Entonces, utilizando la fórmula De Moivre, recordando que esta es:

$$[\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta) \quad (1)$$

Podemos reescribir $\cos(3\alpha)$ y $\mathrm{sen}(3\alpha)$ como un binomio al cubo:

$$\cos(3\alpha) + i\,\mathrm{sen}(3\alpha) = [\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)]^3$$

y desarrollando el binomio por el método de Newton se tiene que:

$$\cos(3\alpha) + i\,\mathrm{sen}(3\alpha) = \cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha) + 3\cos(\alpha)(i\,\mathrm{sen}(\alpha))^2 + (i\,\mathrm{sen}(\alpha))^3$$

Ahora bien, recordando que $i^2 = -1$ se reescribe la expresión anterior como:

$$\cos(3\alpha) + i\,\mathrm{sen}(3\alpha) = \cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha)\,i - 3\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}^2(\alpha) - i\,\mathrm{sen}^3(\alpha) \quad (2)$$

Así, para concluir la demostración se iguala la parte real de (2) con $\cos(3\alpha)$:

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}^2(\alpha) \quad (3)$$

QED

y la parte imaginaria con $\operatorname{sen}(3\alpha)i$:

$$i\operatorname{sen}(3\alpha) = i(3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha))$$

Por lo que se obtiene:

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = (3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha)$$

QED.

De esta forma 3 y 4 demuestran a y b respectivamente.

2.2. Ejercicio 5

Encuentre las raices de:

a) $(2i)^{\frac{1}{2}}$ b) $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$ c) $(-1)^{\frac{1}{3}}$ d) $8^{\frac{1}{6}}$ e) $(-8-8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$

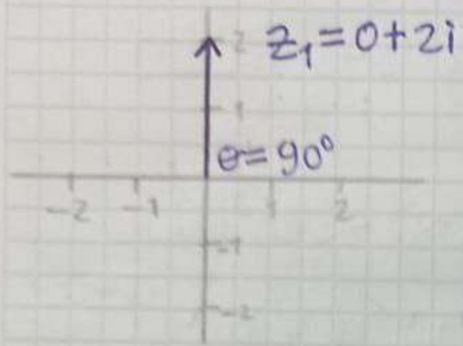
Para obtener las raices de los anteriores números, es necesario tener en cuenta la siguiente fórmula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{i(\theta + 2k\pi)}{n}}$$

Donde:

- n = Número de raíces que se debe calcular
- z = Número complejo en forma binómica
- $|z|$ = Módulo del número complejo
- θ = Argumento del número complejo
- $k = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

a) $(2i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2i}$



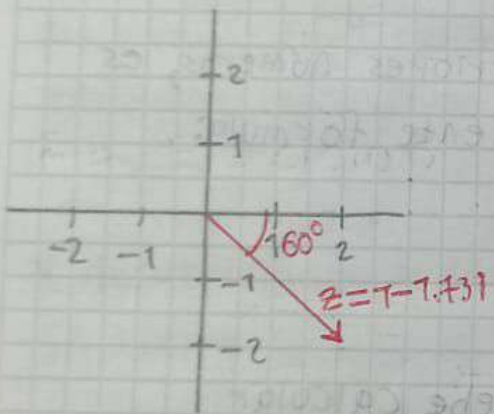
De la gráfica sabemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y haciendo el cálculo del módulo sabemos que es $|z| = \sqrt{2^2} = 2$, así:

$$\sqrt[2]{2i} = \sqrt{2}\, e^{\frac{i(\frac{\pi}{2}+2(k)\pi)}{2}}$$

En donde se efectúa las operaciones correspondientes y se transforma de polar a binómica:

- $k=0 \quad \sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{(1+i)}$
- $k=1 \quad \sqrt{2}\, e^{i(\frac{5\pi}{4})} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{(-1-i)}$

b) $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{1-\sqrt{3}i}$



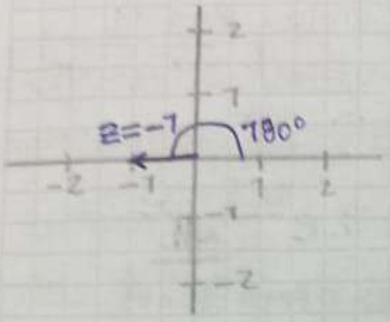
Podemos obtener el módulo y el argumento a partir de las siguientes fórmulas $|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$$\sqrt[2]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{2}\, e^{\frac{i(-\frac{\pi}{3}+2(k)\pi)}{2}}$$

En donde se efectúa las operaciones correspondientes y se transforma de polar a binomica:

- $k=0 \quad \sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{6})} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}i\right) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}$
- $k=1 \quad \sqrt{2}\, e^{i(\frac{5\pi}{6})} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}i\right) = \boxed{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}$

c) $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1}$



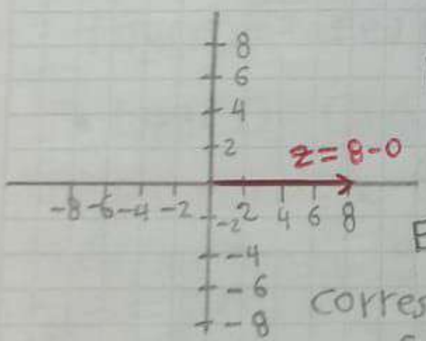
De la gráfica sabemos que $\theta = \pi$ y haciendo el cálculo del módulo sabemos que es $|z| = \sqrt{(-1)^2} = 1$, así:

$$\sqrt[3]{-1} = 1e^{\frac{i(\pi + 2(k)\pi)}{3}}$$

En donde se efectúa las operaciones correspondientes y se transforma de polar a binómica:

- $k=0 \quad 1e^{i(\frac{\pi}{3})} = 1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)}$
- $k=1 \quad 1e^{i(\pi)} = 1(-1, 0i) = \boxed{(-1+0i)}$
- $k=2 \quad 1e^{i(\frac{5\pi}{3})} = 1(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)}$

d) $(8)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{8}$



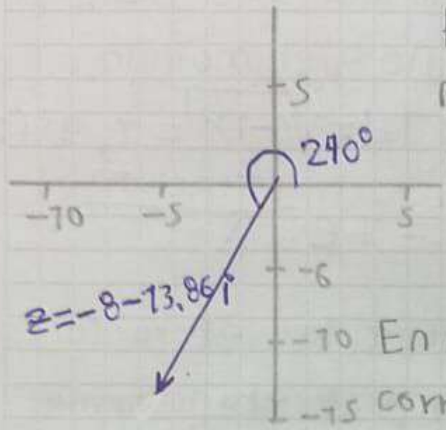
De la gráfica sabemos que $\theta = 0$ y haciendo el cálculo del módulo sabemos que es $|z| = \sqrt{8^2} = 8$, así:

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{8}\, e^{\frac{i(0+2(k)\pi)}{6}}$$

En donde se efectúa las operaciones correspondientes teniendo en cuenta que $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ y $\sqrt[6]{216} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt{6}$, luego se transforma de polar a binomica

- $k=0 \quad \sqrt[6]{8}e^{i0} = \sqrt{2}(1, 0i) = (\sqrt{2} + 0i)$
- $k=1 \quad \sqrt[6]{8}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i)$
- $k=2 \quad \sqrt[6]{8}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i)$
- $k=3 \quad \sqrt[6]{8}e^{i\pi} = \sqrt{2}(-1, 0i) = (-\sqrt{2} + 0i)$
- $k=4 \quad \sqrt[6]{8}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}i) = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i)$
- $k=5 \quad \sqrt[6]{8}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt{2}(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}i) = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i)$

e) $(-8-8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$



Partiendo de las fórmulas para el módulo y el argumento, $|z|=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16$ y $\theta=\pi+\tan^{-1}(\sqrt{3})=\frac{4\pi}{3}$, respectivamente:

$$\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i} = 2e^{\frac{i(\frac{4\pi}{3}+2(k)\pi)}{4}}$$

En donde se efectúa las operaciones correspondientes y se transforma de polar a binómica:

- $k=0$ $\quad 2e^{i(\frac{\pi}{3})} = 2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (1+\sqrt{3}i)$
- $k=1$ $\quad 2e^{i(\frac{5\pi}{6})} = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}i) = (-\sqrt{3}+i)$
- $k=2$ $\quad 2e^{i(\frac{4\pi}{3})} = 2(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}i) = (-1-\sqrt{3}i)$
- $k=3$ $\quad \boxed{2e^{i(\frac{11\pi}{6})} = 2}(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}i) = (\sqrt{3}-i)$

2.3. Ejercicio 6

Demuestre que:

- $\text{Log}(-ie) = 1-\frac{\pi}{2}i$
- $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2)-\frac{\pi}{4}i$
- $\text{Log}(e) = 1+2n\pi i$
- $\text{Log}(i) = (2n+\frac{1}{2})\pi i$

Para demostrar estas expresiones partimos de la definición:

$$\text{Log}(z) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi n) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

siendo el valor principal cuando $n=0$ Así:

- $\text{Log}(-ie) = 1-\frac{\pi}{2}i$

Demostración. Partiendo del valor principal $(n=0)$ y siendo $z=-ei$, su módulo será $|z|=\sqrt{(-e)^2}=e$ y su argumento $\theta=-\frac{\pi}{2}$ dado que solo presenta componente imaginaria negativa, tenemos que:

$$\text{Log}(-ie) = \ln(e) + i(-\frac{\pi}{2}) = 1-\frac{\pi}{2}i$$

• $\mathrm{Log}(1-i)=\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{\pi}{4}i$

Demostración. Partiendo del valor principal $(n=0)$ y siendo $z=1-i$, su módulo será $|z|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ y su argumento $\theta=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ dado que se encuentra en el cuarto cuadrante, de esta forma nos queda:

$$\mathrm{Log}(1-i)=\ln(\sqrt{2})+i(-\tfrac{\pi}{4})=\ln(2^{\frac{1}{2}})-i\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{1}{2}\ln(2)-\tfrac{\pi}{4}i$$

Por propiedad de los logaritmos $\mathrm{Log}_a(x^b)=b\cdot\mathrm{Log}_a(x)$

• $\mathrm{Log}(e)=1+2n\pi i$.

Demostración. Partiendo de la definición general brindada anteriormente y siendo $z=e$ junto con su módulo $|z|=\sqrt{(e)^2}=e$ y su argumento $\theta=\tan^{-1}(\frac{0}{e})=0$ tenemos que:

$$\mathrm{Log}(e)=\ln(e)+i(0+2\pi n)=1+2n\pi i \quad \text{para } n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

• $\mathrm{Log}(i)=(2n+\frac{1}{2})\pi i$

Demostración. Partiendo de la definición general brindada anteriormente y siendo $z=i$ junto con su módulo $|z|=\sqrt{(1)^2}=1$ y su argumento $\theta=\frac{\pi}{2}$ dado que solo posee la componente imaginaria positiva, tenemos que:

$$\mathrm{Log}(i)=\ln(1)+i(\tfrac{\pi}{2}+2n\pi)=0+\pi i(\tfrac{1}{2}+2n)=(2n+\tfrac{1}{2})\pi i$$