Discrete Mathematics

Lecture 4. 증명법 2

- Lecturer: Suhyung Park, PhD

- Office: 공과대학 7호관 431호
- Contact: 062-530-1797
- E-mail: suhyung@jnu.ac.kr

* 본 강의 자료는 생능출판사와 한빛아카데미 “PPT 강의자료”를 기반으로 제작되었습니다.

강의 내용

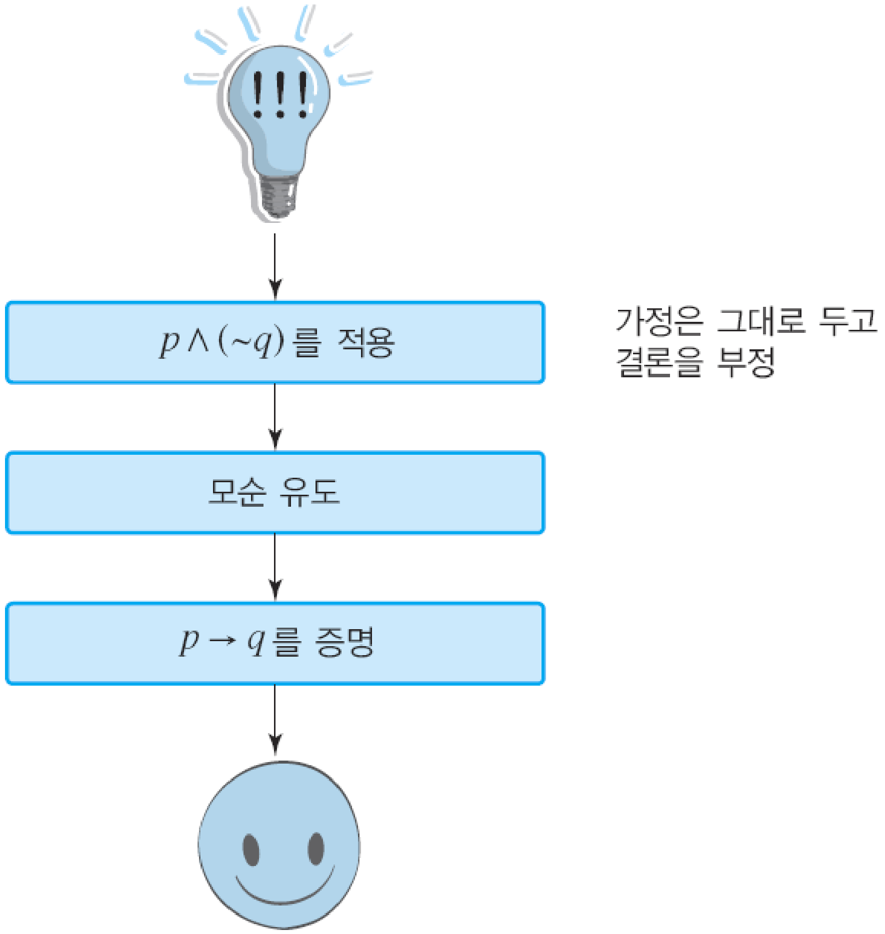
1) 증명의 방법론
2) 여러가지 증명 방법
3) 프로그램의 입증

여러가지 증명 방법: 모순 증명법

모순 증명법(Proof by Contradiction)

- 모순 증명법(또는 귀류법)은 기존의 전통적인 방법으로는 주어진 문제를 쉽게 증명할 수 없는 경우에 매우 유용함
- 일단 주어진 문제의 명제를 부정해 놓고 논리를 전개함
- 그 결과 모순됨을 보임으로써 본래의 명제가 사실임을 증명하는 방법임

- $P \rightarrow q$가 참인 것과 $p \wedge (\sim q)$가 거짓임은 동치이므로 $p \wedge (\sim q)$가 참이라고 가정하고, 그 결과 모순이 유도되면 원래의 명제가 참임을 증명한 셈임



〈그림 4.4〉 모순 증명법

여러가지 증명 방법: 모순 증명법

예제 4-6 $\sqrt{2}$는 유리수(rational number)가 아님을 증명해보자.

증명 $\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하자. 그러면 유리수의 정의에 따라

$\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ (n, m은 정수, $m \neq 0$, n, m은 서로소)으로 표현된다.

양변을 제곱해서 정리하면

$2m^2 = n^2$이 된다.

여기서 $2m^2$이 짝수가 되므로 n^2도 반드시 짝수여야 한다.

즉, n도 짝수이다.

따라서 $n = 2k$(k는 정수)로 표현될 수 있다. 이것을 위의 식에 대입하면

$2m^2 = 4k^2$

이므로

$m^2 = 2k^2$

그러므로 m^2이 짝수이고, 따라서 m도 짝수가 된다.

여기서 m과 n이 동시에 짝수가 되므로 n과 m이 서로소라는 가정에 모순된다.

따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다. ■

여러가지 증명 방법: 모순 증명법

예제 4-7 $1+3\sqrt{2}$가 무리수임을 증명해보자.

증명 (모순 증명법에 의한 증명)

$1+3\sqrt{2}$가 무리수가 아닌 유리수라고 가정하자.

그러면 유리수의 정의에 따라

어떤 정수 m과 n에 대해($m \neq 0$), $1+3\sqrt{2}=\frac{n}{m}$으로 표현된다.

따라서

$$3\sqrt{2}=\frac{n}{m}-1$$
$$=\frac{n-m}{m}$$

그러므로

$\sqrt{2}=\frac{n-m}{3m}$이 된다.

그러나 $n-m$과 $3m$은 정수이고, $m \neq 0$이므로

$\sqrt{2}$는 두 정수 $n-m$과 $3m$으로 표현되는 분수, 즉 유리수가 된다.

그러나 $\sqrt{2}$는 실제로 무리수이므로 모순이다.

그러므로 $1+3\sqrt{2}$는 무리수이다. ■

여러가지 증명 방법: 모순 증명법

예제 ④-8

n이 자연수이고 n이 2가 아닌 소수(prime number)일 경우, n은 반드시 홀수가 됨을 증명해보자.

증명 (모순 증명법에 의한 증명)

'n이 2가 아닌 소수일 경우 $q(n)$은 n이 홀수이다' 라는 명제를 부정하여 'n이 2가 아닌 소수이고 또한 n은 짝수이다' 라고 가정한다.

n이 짝수이므로 $n = 2m$으로 표현될 수 있다. (m은 임의의 자연수)

자연수 m이 1인 경우에는 $n=2$이며,

$m > 1$이면 n은 m으로 나누어지므로 소수가 될 수 없다.

따라서 모순이다.

그러므로 n은 반드시 홀수가 된다. ■

여러가지 증명 방법: 직접 증명법

직접 증명법(Direct Proof)

- 통상 주어진 유용한 정보로부터 추론을 통하여 목적하는 결론에 도달할 수 있도록 유도하는 증명법
- 명제 $p \rightarrow q$의 직접 증명은 논리적으로 p의 진리 값이 참일 때 q도 참임을 보이는 증명 방법임

예제 4-9 만약 $6x + 9y = 7$이라면 x 또는 y가 정수가 아님을 증명해보자.

증명 먼저 $6x + 9y = 7$이라고 가정하자.

이것은 $3(2x + 3y) = 7$로 바꿀 수 있다.

즉, $2x + 3y = \frac{7}{3}$이 된다.

그러나 $\frac{7}{3}$은 정수가 아니므로 $2x + 3y$도 정수가 될 수 없다.

따라서 x 또는 y는 정수가 아니다. ■

여러가지 증명 방법: 직접 증명법

예제 4–10 $|a|>|b|$일 때 $a^2>b^2$임을 증명해보자.

증명 $a, b>0$이고 $a>b$일 경우 우리는 $a^2>b^2$임을 알고 있다.

그런데 어떤 a, b에 대해서도 $|a|, |b|>0$이므로

$|a|>|b|$일 때 $|a^2|>|b^2|$이 된다.

이 경우 $|a^2|=a^2$이고 $|b^2|=b^2$이므로

$|a|>|b|$일 때 $a^2>b^2$이 된다. ■

예제 4–11 두 짝수의 합은 항상 짝수가 됨을 증명해보자.

증명 a와 b를 모두 임의의 짝수라고 하자.

짝수의 정의에 따라 임의의 정수 m과 n에 대해,

$a=2m$

$b=2n$

으로 나타낼 수 있다. a와 b를 합하면

$$\begin{aligned} a+b &= 2m+2n \\ &= 2(m+n) \end{aligned}$$

$m+n$은 정수이기 때문에

$a+b=2(m+n)$은 항상 어떤 정수값의 2의 배수이므로 짝수가 된다. ■

여러가지 증명 방법: 직접 증명법

예제 4-4

정수 a가 4로 나누어떨어지면, $5a+4$도 4로 나누어떨어짐을 증명하라.

풀이

p: 정수 a가 4로 나누어떨어진다.

q: $5a+4$도 4로 나누어떨어진다.

$p \rightarrow q$: 정수 a가 4로 나누어떨어지면, $5a+4$도 4로 나누어떨어진다.

정수 a가 4로 나누어떨어지므로, $a=4k(k \in$ 정수)로 표현되고 $5a+4$에 대입하면,

$$5a+4=5(4k)+4=20k+4=4(5k+1)$$

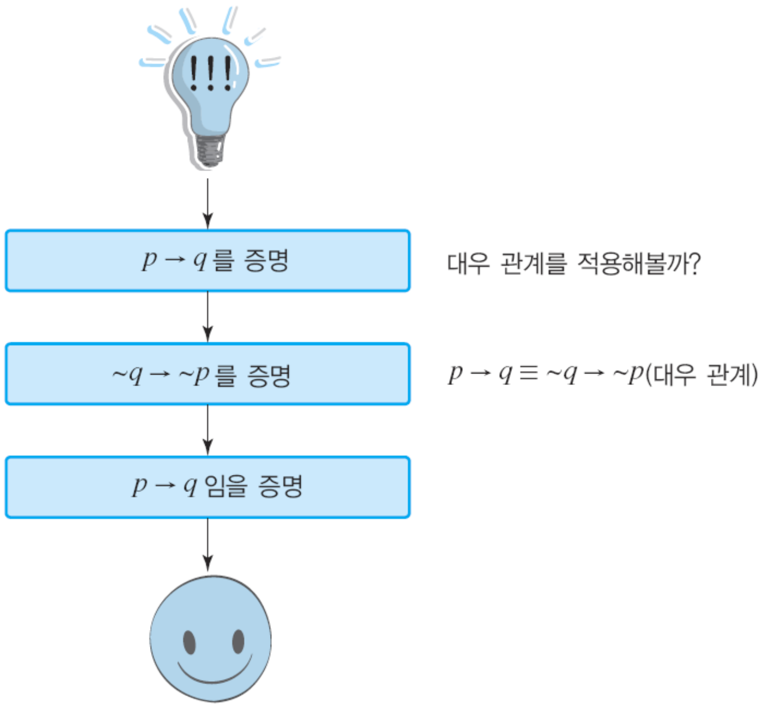
이므로 $5a+4$는 4로 나누어떨어진다.

$\therefore$ 명제 $p \rightarrow q$ "정수 a가 4로 나누어떨어지면, $5a+4$도 4로 나누어떨어진다"는 참(T)이다.

여러가지 증명 방법: 대우 증명법

대우 증명법(Contrapositive Proof)

- $p \rightarrow q$와 $\sim q \rightarrow \sim p$가 대우 관계로서 논리적 동치가 됨을 이용하여, $\sim q \rightarrow \sim p$가 참인 것을 증명임
- $p \rightarrow q$가 참이 되는 것을 논리적 동치 관계를 이용하여 간접적으로 보여주는 증명 방법임



〈그림 4.5〉 대우 증명법

예제 4–12 x가 짝수이면 x는 2이거나 소수가 아님을 증명해보자.

증명 대우 증명법에 따라 $\sim q \rightarrow \sim p$를 적용하면

'x가 2가 아니고 소수이면 x는 홀수이다' 를 증명하면 된다.

그런데 x가 2가 아닌 소수는 모두 홀수이므로

원래의 명제가 성립한다. ■

여러가지 증명 방법: 대우 증명법

n이 자연수이고 n이 2가 아닌 소수라면 n이 홀수임을 증명해보자.

증명 $p \to q$의 증명을 대우인 $\sim q \to \sim p$로 증명해보자.

주어진 명제의 대우는 'n이 짝수이면 n=2이거나 n은 소수가 아니다'이다.

n이 짝수라고 가정하면 $p < n$인 어떤 자연수 p에 대하여 $n = 2 \cdot p$가 된다.

이때 $p = 1$이거나 $p > 1$이다.

(1) $p = 1$이면 $n = 2$이다.

(2) $p > 1$이면 n은 p로 나누어지므로 n은 소수가 아니다.

그러므로 주어진 명제는 참이 된다. ■

모든 정수 n에 대해 n^2이 짝수라고 가정하면 n도 짝수임을 증명해보자.

증명 주어진 명제의 대우인 '만약 n이 홀수이면 n^2은 홀수이다'를 증명한다.

n이 임의의 홀수라고 가정하면 홀수의 정의에 따라 어떤 정수 k에 대해 $n = 2k + 1$로 표현될 수 있다.

양변을 제곱해서 계산하면

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2k+1)^2 \\
&= 4k^2 + 4k + 1 \\
&= 2(2k^2 + 2k) + 1
\end{aligned}
$$

이다.

정수의 곱과 합은 정수이므로 괄호 안에 있는 $2k^2 + 2k$도 당연히 정수가 된다.

그러므로 $n^2 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$이므로 n^2은 홀수이다. ■

여러가지 증명 방법: 대우 증명법

예제 4-9

$m+n$이 무리수이면, 적어도 m과 n 둘 중 하나는 무리수임을 증명하라([예제 4-2] 참고).

풀이

p: $m+n$이 무리수이다.

q: 적어도 m과 n 둘 중 하나는 무리수이다. $\equiv$ (m은 무리수이다) $\vee$ (n은 무리수이다)

$\neg p$: $m+n$이 유리수이다.

$\neg q$: m과 n 모두 유리수이다.

$\because$ $\neg$[(m은 무리수이다) $\vee$ (n은 무리수이다)]

$\equiv \neg$(m은 무리수이다) $\wedge$ $\neg$(n은 무리수이다)

$\equiv$ (m은 유리수이다) $\wedge$ (n은 유리수이다)

$\neg q \to \neg p$: m, n이 모두 유리수이면, $m+n$은 유리수이다.

두 유리수 m, n은 각각 유리수의 정의에 의해 $m=\dfrac{a}{c}$(a, $c\in$ 정수, $c\neq 0$)와 $n=\dfrac{b}{d}$(b, $d\in$ 정수, $d\neq 0$)일 때, m과 n의 합은 $m+n=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}=\dfrac{ad}{cd}+\dfrac{bc}{cd}=\dfrac{ad+bc}{cd}$가 된다. 정수는 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀 있으므로 $ad+bc$와 cd는 모두 정수이고, $c\neq 0$, $d\neq 0$이므로 $cd\neq 0$이다. 그리고 유리수는 사칙연산에 대해 닫혀 있으므로 $\dfrac{ad+bc}{cd}$는 유리수이다. 그러므로 대우명제 $\neg q \to \neg p$ "두 유리수의 합은 유리수이다"는 참(T)이다.

$\therefore$ 명제 $p\to q$ "$m+n$이 무리수이면, 적어도 m과 n 둘 중 하나는 무리수이다"는 참(T)이다.

여러가지 증명 방법: 존재 증명법

존재 증명법(Existence Proof)

- $p(x)$를 x라는 변수를 가지는 명제라고 한다면
- $p(x)$가 참인 x가 적어도 하나가 존재한다는 것을 보이는 증명 방법임
- ‘$\exists x$ such that $p(x)$’를 보이는 것임

예제 4–16

$p(x)$가 술어 ‘x는 정수이고 $x^2=289$’ 일 때 이 식을 만족하는 x가 존재함을 증명해보자.

증명 제곱근을 구하는 방법을 사용하여 $p(x)$를 만족하는 x의 존재 여부를 결정할 수 있다. 이 경우 $x = 17$일 때 이 식이 만족함을 보인다. ■

예제 4–17

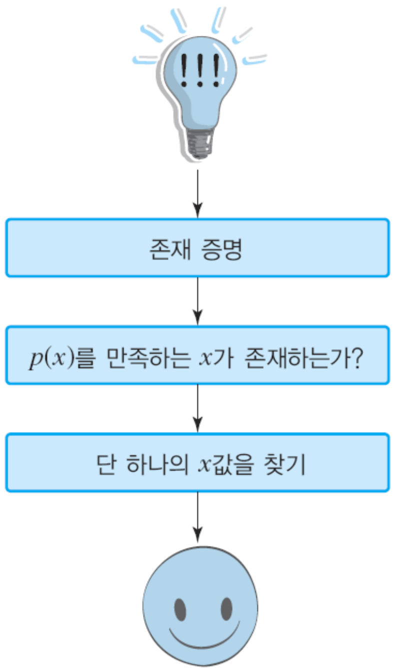
a가 0이 아닌 실수이고 b가 실수일 때, 방정식 $ax + b = 0$을 만족시키는 실수 x가 존재함을 증명해보자.

증명 가정에서 $a \neq 0$이므로

방정식의 해를 구하는 방법에 따라

x는 $-\frac{b}{a}$이며 이는 실수이다.

따라서 주어진 명제가 참이다. ■



〈그림 4.6〉 존재 증명법

여러가지 증명 방법: 반례 증명법

- 반례 증명법(Proof by Counter−example)

  - 어떤 명제가 참 또는 거짓임을 입증하기 어려운 경우에 효과적인 증명 방법임
  - 주어진 명제에서 모순이 되는 간단한 하나의 예를 보임으로써 비교적 쉽게 증명할 수 있는 방법임

    ✓ $\forall x\ p(x)$이 거짓임을 보이기 위해 ~[$\forall x\ p(x)$]와 동치인 $\exists x$ ~$p(x)$에서 $p(x)$를 만족하지 않는 x가 적어도 하나 존재함을 보임

    ✓ 이 경우 x를 반례(counter−example)라고 함

여러가지 증명 방법: 반례 증명법

예제 4-18

'p가 양의 정수이고 $x = p^2 + 1$이면 x는 소수이다' 란 명제가 거짓임을 증명해보자.

증명 위의 명제가 거짓임을 입증하기 위해서는 어떤 양의 정수 p에 대해 x가 소수가 아닌 예를 하나만 보이면 된다.

가령 $p = 3$일 경우 $x = 10$이므로 x는 소수가 아니다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다. ■

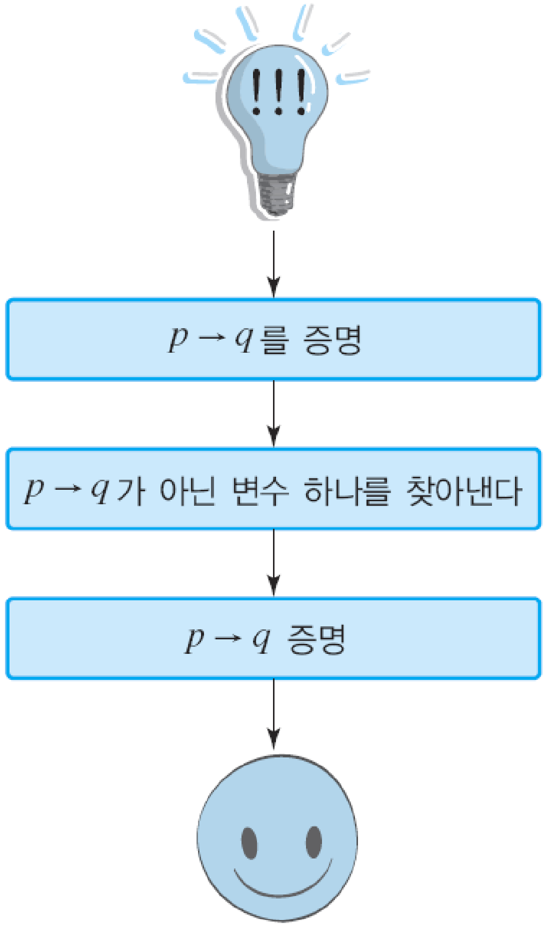
예제 4-19

모든 실수 x에 대해 $(x+1)^2 \geq x^2$이 성립하지 않음을 증명해보자.

증명 반례를 들어서 위의 명제가 거짓임을 증명한다.

가령 $x = -1$일 때 $(-1+1)^2 = 0 < 1 = (-1)^2$이다.

따라서 위의 명제가 성립하지 않는다. ■



〈그림 4.7〉 반례 증명법

여러가지 증명 방법: 반례 증명법

예제 4-20 '모든 실수 a와 b에 대하여 $a^2=b^2$이면 $a=b$이다' 가 거짓임을 증명해보자.

증명 이 문제의 경우에는 2가지 방법으로 증명할 수 있다.

(1) 직접 증명법으로 하면

$a^2=b^2$이면 $a^2-b^2=0$

$(a-b)(a+b)=0$

따라서 $a=b$ 또는 $a=-b$

그러므로 $a=b$인 결론은 거짓이라는 것을 증명할 수 있다.

(2) 그러나 이런 경우에는 반례의 예를 들어 증명하는 것이 매우 편리하다.

가령 $a=1$, $b=-1$이라고 가정한다면

$a^2=1^2=1$이고 $b^2=(-1)^2=1$이다.

따라서 $a^2=b^2$을 만족하지만

$1\neq-1$이므로 $a\neq b$이다.

그러므로 주어진 명제는 거짓이다. ■

여러가지 증명 방법

- 필요충분조건 증명법(if and only if proof)

  - 주어진 명제의 동치를 통하여 증명함
  - 'p if and only if q' 를 증명하기 위해 '만약 p이면 q이다' 와 '만약 q이면 p이다' 의 두 가지를 증명함

    - P의 필요충분조건 ($p \leftrightarrow q$)를 보이기 위해
    - $p \leftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \land (q \longrightarrow p)$ 이므로
    - $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$를 통해 증명

여러가지 증명 방법

예제 4-21 모든 정수 n에 대해, $n-1$이 짝수임과 n이 홀수임이 동치라는 것을 증명해 보자.

증명 이 증명에서는 모든 정수 n에 대해 'n이 홀수이면 $n-1$은 짝수이다'와 '$n-1$이 짝수이면 n은 홀수이다'와 같이 두 가지 경우로 나누어서 증명한다.

(1) n이 홀수이면 $n-1$은 짝수이다.

만약 n이 홀수이면 어떤 정수 k에 대해 $n=2k+1$로 나타낼 수 있다.

$$n-1=(2k+1)-1=2k$$

가 된다. 그러므로 $n-1$은 짝수이다.

(2) $n-1$이 짝수이면 n은 홀수이다.

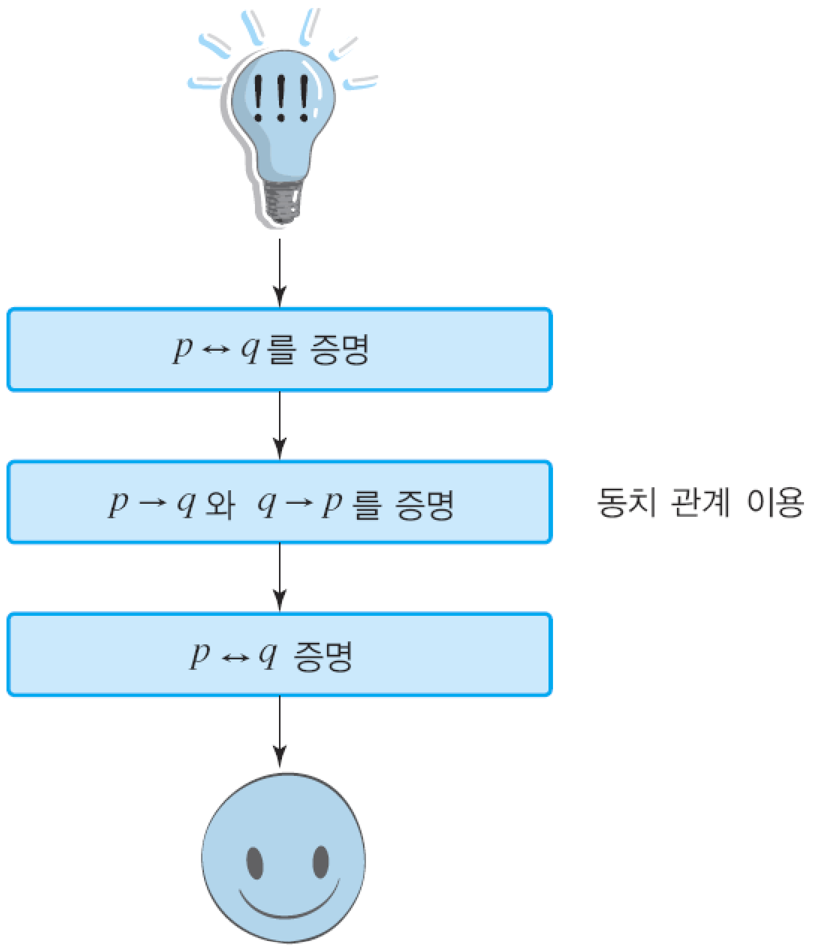
만약 $n-1$이 짝수이면 어떤 정수 k에 대하여 $n-1=2k$로 나타낼 수 있다.

이 경우에

$$n=2k+1$$

이 된다. 따라서 n은 홀수이다.

위의 2가지 경우가 모두 성립하므로 동치이다. ■



〈그림 4.8〉 필요충분조건 증명법