Discrete Mathematics

Lecture 3. 집합론과 디지털 수의 세계

- **Lecturer: Suhyung Park, PhD**

- **Office: 공과대학 7호관 431호**
- **Contact: 062-530-1797**
- **E-mail: suhyung@jnu.ac.kr**

강의 내용

1) 집합의 표현
2) 집합의 연산
3) 집합류와 멱집합
4) 집합의 분할
5) 수의 표현과 진법의 변환
6) 2진수의 덧셈과 뺄셈

집합류와 멱집합

▪ 집합류(Class)

- 집합의 집합임
- 집합 A에 대하여 A의 원소의 개수가 n개일 때 A의 부분 집합의 개수는 2^n개로 표현함
- 집합 A의 카디날리티로 표현하면 $2^{|A|}$개로 나타냄

정의 3−8 임의의 집합 S에 대하여, S의 모든 부분 집합을 원소로 가지는 집합을 집합 S의 멱집합(power set)이라 한다. 이것을 통상 $P(S)$로 표시하는데 2^S로 표기하기도 한다.

$$P(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

$$|P(S)| = 2^{|S|}$$

집합류와 멱집합

예제 3-24 $S=\{a, b, c\}$라고 할 때 S의 멱집합을 구해보자.

풀이 $2^S=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$이다.
여기서 집합 S의 원소의 개수인 $|S|=3$이고 $|2^S|=8$이 된다.

예제 3-25 집합 $A=\{a, b, \{a\}\}$라고 할 때 집합 A의 멱집합 $P(A)$를 구해보자.

풀이 집합 A의 원소는 a, b 그리고 $\{a\}$의 3개이다. 그러므로 $P(A)$의 개수는 $2^3=8$개가 되어야 한다. 먼저 ϕ은 모든 멱집합의 원소가 되고, 부분 집합들을 원소로 하는 집합을 구하면

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{b, \{a\}\}, \{a, b\}, \{a, b, \{a\}\}\}$$

가 된다.

집합류와 멱집합

- 집합 A에 대하여 $P(A)$의 원소들을 나타내기 위하여 흔히 A_1, A_2 , ⋯, A_n과 같이 A 밑에 첨자(index)를 붙여서 표기함
- 첨자가 붙은 집합류에서 그들의 합집합과 교집합의 연산은 다음과 같이 표기함

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

예제 ③–26 집합 $A_1=\{1, 2, 3\}$, $A_2=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_3=\{1, 2, 3, 5, 7\}$, $A_4=\{1, 2, 4, 6, 8\}$이라고 할 때 $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$와 $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$를 구해보자.

풀이

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

이고

$$\bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$
$$= \{1, 2\}$$

이다.

집합의 분할

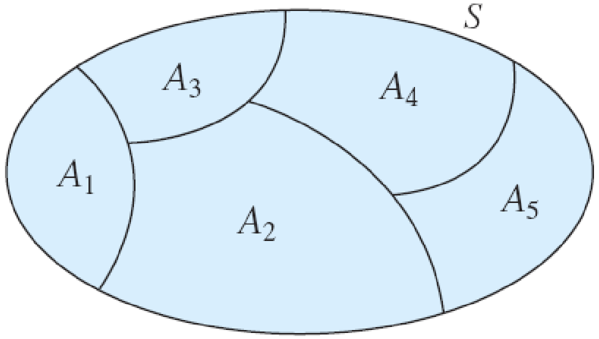
정의 3-9 S를 공집합이 아닌 임의의 집합이라고 할 때 집합 S의 분할(partition) π는 다음과 같은 3가지 조건을 만족시켜야 한다.

$$\pi = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_i, \cdots, A_k\}$$

(1) $i = 1, \cdots, k$에 대하여 A_i는 공집합이 아닌 집합 S의 부분 집합이다.

(2) $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$

(3) A_i들 사이에서는 서로소이다. 즉, $i \neq j$이면, $A_i \cap A_j = \phi$이다.



〈그림 3.14〉 집합 S의 분할

- **블록(Block)**
  - 분할의 원소인 A_i를 분할 함
    - ✓ 분할에 대한 예로 대한민국의 여러 개의 도를 들 수 있음
    - ✓ 각 도들은 공유하는 면적이 없고, 각 도를 합한 것은 대한민국 전체가 되므로 대한민국의 분할이라고 함
    - ✓ 분할은 집합을 구성하는 원소가 서로 소이고 각 원소들의 합집합이 원래의 전체 집합이 되어야 함

집합의 분할

정의 3-9 S를 공집합이 아닌 임의의 집합이라고 할 때 집합 S의 **분할(partition)** π는 다음과 같은 3가지 조건을 만족시켜야 한다.

$$\pi = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_i, \cdots, A_k\}$$

(1) $i = 1, \cdots, k$에 대하여 A_i는 공집합이 아닌 집합 S의 부분 집합이다.
(2) $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$
(3) A_i들 사이에서는 서로소이다. 즉, $i \neq j$이면, $A_i \cap A_j = \phi$이다.

예제 3-28 $A=\{1, 2, \cdots, 8\}$이고 $A_1=\{1, 3\}$, $A_2=\{2, 6, 7\}$, $A_3=\{4\}$, $A_4=\{5, 8\}$일 때, $\pi = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$가 A의 분할임을 보이자.

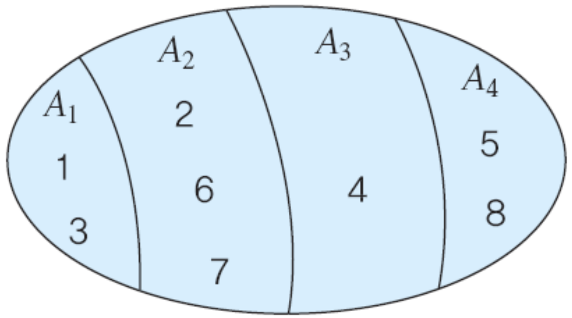
풀이 분할의 3가지 조건을 만족하는지를 점검한다.

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A$

(2) $A_i \cap A_j = \phi$, $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$

(3) $A_i \neq \phi$, $1 \leq i \leq 4$

그 결과 분할의 3가지 조건을 모두 만족함을 알 수 있으며 〈그림 3.15〉와 같이 나타낼 수 있다. 그러므로 π는 A의 분할이다.



〈그림 3.15〉 집합 A의 분할

수의 표현과 진법의 변환

▪ 수의 표현과 진법

- 우리는 전통적으로 10진수의 체계 안에서 살고 있다.

- 그러나 디지털 컴퓨터에는 2진수, 8진수, 16진수 등이 많이 사용되고 있다.

① 10진법: 0부터 9까지의 수를 사용하며, 10을 한 자리의 기본 단위로 하는 진법

② 2진법: 0과 1의 조합으로 숫자를 표시하는 진법

③ 8진법: 0에서 7까지의 수로 표시하는 진법

④ 16진법: 십진법에 쓰이는 10개의 숫자인 0부터 9, 그리고 A부터 F까지 6개의 영문자를 사용하여 수를 표시하는 진법

수의 표현과 진법의 변환

〈표 3.2〉 10진수, 2진수, 8진수, 16진수와의 관계

10진수	2진수	8진수	16진수
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

$1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

수의 표현과 진법의 변환

여기서 잠깐!!

다른 진수를 10진수로 변환하기

각 숫자에다 자리값의 가중치를 곱한 값을 모두 더하여 10진수로 변환한다.

예제 3-29 8진수 $(156)_8$을 10진수로 바꾸어보자.

풀이 다음과 같이 자릿값을 이용하여 10진수로 바꾸면 110이 된다. 진수에 자릿수에서 1을 뺀 숫자를 지수로 한 후 해당 숫자와 곱해 주는 방식으로 10진수로 변환한다.

$$1\times8^2+5\times8^1+6\times8^0 = 110$$

예제 3-30 2진수 $(11011)_2$과 16진수 $(3B)_{16}$을 각각 10진수로 바꾸어보자.

풀이 다음과 같이 자릿값을 이용하여 10진수로 변환할 수 있다.

$$1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0 = 27$$

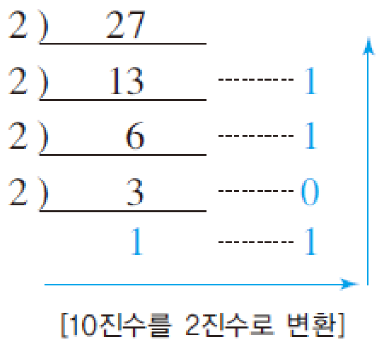
$$3\times16^1+11\times2^0 = 59$$

수의 표현과 진법의 변환

예제 ③-31 10진수 27을 이진수로 변환해보자.

풀이 10진수를 해당 진수로 바꾸는 방법은 〈그림 3.17〉과 같이 10진수의 숫자를 해당 진수로 계속 나누어 나머지들을 역순으로 읽으면 된다.

그 결과 $(11011)_2$로 변환되었다.



따라서 $(11011)_2$

〈그림 3.17〉 10진수를 2진수로 변환

수의 표현과 진법의 변환

예제 ③-32 10진수 1234를 8진수와 16진수로 각각 변환해보자.

풀이 10진수 1234를 〈그림 3.18〉과 같이 8과 16으로 각각 나누는 과정을 반복하여 나머지들을 역순으로 읽으면 그 결과를 얻을 수 있다.

8) 1234

8) 154 ---------- 2

8) 19 ---------- 2

2 ---------- 3

[10진수를 8진수로 변환]

16) 1234

16) 77 ---------- 2

4 ---------- D

[10진수를 16진수로 변환]

따라서 $(2322)_8$ 따라서 $(4D2)_{16}$

〈그림 3.18〉 10진수를 8진수와 16진수로 변환

수의 표현과 진법의 변환

예제 ③-33 십진수 0.3125와 0.6875를 각각 2진수로 변환해보자.

풀이 소수인 경우에는 〈그림 3.19〉와 같은 곱셈의 방법으로 구할 수 있다. 곱셈으로 소수점 이하가 0이 될 때까지 해당 진수로 계속 곱해 주는 과정을 반복한다. 이 경우 위의 숫자부터 차례로 적는다는 점에 유의한다.

그 결과 0.3125를 2진수로 변환하면 $(0.0101)_2$이 되고, 0.6875를 2진수로 변환하면 $(0.1011)_2$이 된다.

$$
\begin{array}{r}
0.3125 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
0.6250 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
1.2500 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
0.5000 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
1.0000
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
0.6875 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
1.3750 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
0.7500 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
1.5000 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
1.0000
\end{array}
$$

[소수를 2진수로 변환] [소수를 2진수로 변환]

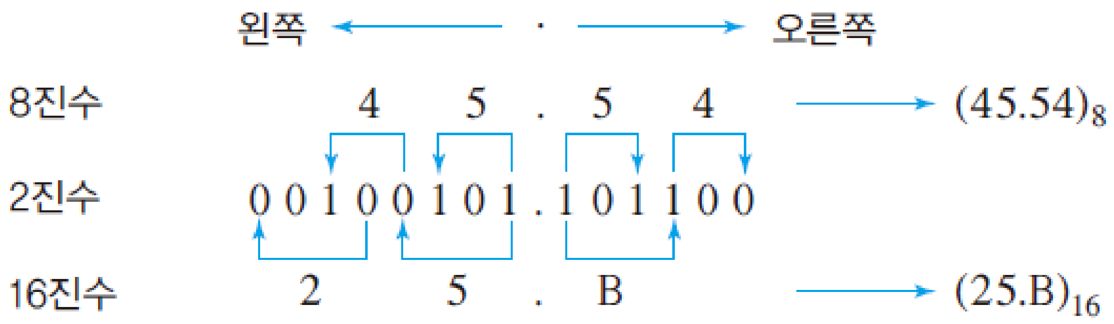
$(0.0101)_2$ $(0.1011)_2$

〈그림 3.19〉 소수를 2진수로 변환하는 방법

수의 표현과 진법의 변환

예제 3-34 컴퓨터에서 많이 사용하는 수는 2진수, 8진수, 16진수이다. 이진수 $(00100101.101100)_2$을 10진수를 거치지 않고 직접 8진수, 16진수로 각각 변환해 보시오.

풀이 8진수는 2진수 3자리씩 잡아 각 자리마다 오른쪽부터 1, 2, 4 자리 값으로 계산해서 더해 주고, 16진수는 2진수 4자리씩 각 자리마다 오른쪽부터 1, 2, 4, 8 자리 값을 사용하여 계산한다. 그러므로 〈그림 3.20〉과 같이 상호 변환할 수 있다. 이때 자릿수를 맞추기 위해 필요할 경우 앞에 0들을 붙일 수 있다.



〈그림 3.20〉 2진수, 8진수, 16진수의 상호 변환 관계

수의 표현과 진법의 변환

예제 ③-35 2진수 $(101101)_2$을 16진수로 변환하고, $(FB2)_{16}$를 2진수로 변환해보자.

(풀이) 뒤에서 4자리씩 분리하면 10 1101이 된다. 10 앞에 자릿수 00을 붙이면 전체가 0010 1101이므로 16진수 $(2D)_{16}$로 변환된다. 한편 16진수 $(FB2)_{16}$에서 각 숫자는 1111 1011 0010으로 표현될 수 있으므로 그 결과를 연결하면 $(111110110010)_2$으로 변환된다. 그 결과는 〈그림 3.21〉과 같다.

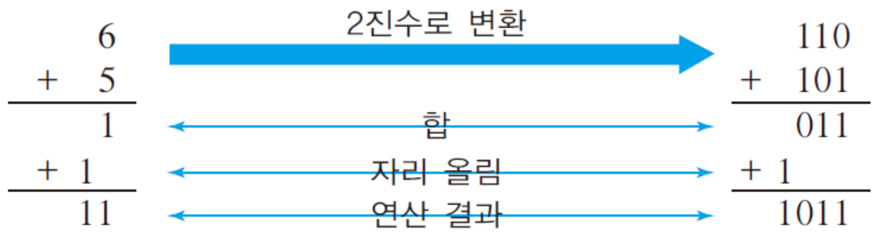
1 0	1 1 0 1	
0 0 1 0	1 1 0 1	
2	D	
F	B	2
1 1 1 1	1 0 1 1	0 0 1 0

〈그림 3.21〉 2진수와 16진수의 상호 변환 결과

수의 표현과 진법의 변환

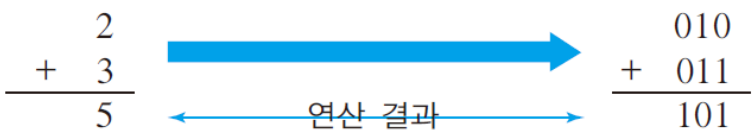
예제 3-36 10진수 6 + 5와 2 + 3을 이진법을 통해 덧셈을 해보자

풀이 일반적인 10진수의 덧셈 원리와 같다. 6 + 5의 경우 〈그림 3.22〉에서와 같이 단지 자리 올림을 하는 숫자의 단위가 10진수에서는 두 수를 더해서 10이 되면 한 자리가 올라가지만, 2진수에서는 두 수의 합이 2가 되면 한 자리가 올라간다는 점이다.



〈그림 3.22〉 덧셈에서의 올림수

한편 2 + 3의 경우에는 〈그림 3.23〉과 같이 자리 올림수가 없는 경우이다.



〈그림 3.23〉 올림수가 없는 덧셈