Discrete Mathematics

Lecture 5. 관계 2

- Lecturer: Suhyung Park, PhD

- Office: 공과대학 7호관 431호
- Contact: 062-530-1797
- E-mail: suhyung@jnu.ac.kr

* 본 강의 자료는 생능출판사와 한빛아카데미 "PPT 강의자료"를 기반으로 제작되었습니다.

강의 내용

1. 관계와 이항 관계
2. 관계의 표현
3. 합성 관계
4. 관계의 성질
5. 동치 관계와 분할
6. 부분 순서 관계

합성 관계

- **합성 관계의 거듭제곱**

  - 집합 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$에서 집합 $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$으로 가는 관계 R은 m×n 크기의 관계행렬 M_R로 작성

  - 집합 B에서 집합 $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_s\}$로 가는 관계 S는 n×s 크기의 관계행렬 M_S로 작성

  - 관계 S∘R은 이 두 관계행렬 M_R과 M_S의 부울곱으로 구함

$$S \circ R = M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

합성 관계

- 합성 관계의 거듭제곱

예제 7-16

[예제 7−14]에서 제시하였던 관계 R, S에 대해 관계행렬을 이용해 합성관계 $S \circ R$을 구하라.

$$R = \{(a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$$
$$S = \{(1, x), (1, z), (2, y), (2, z), (3, x), (3, y)\}$$

풀이

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S \circ R = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

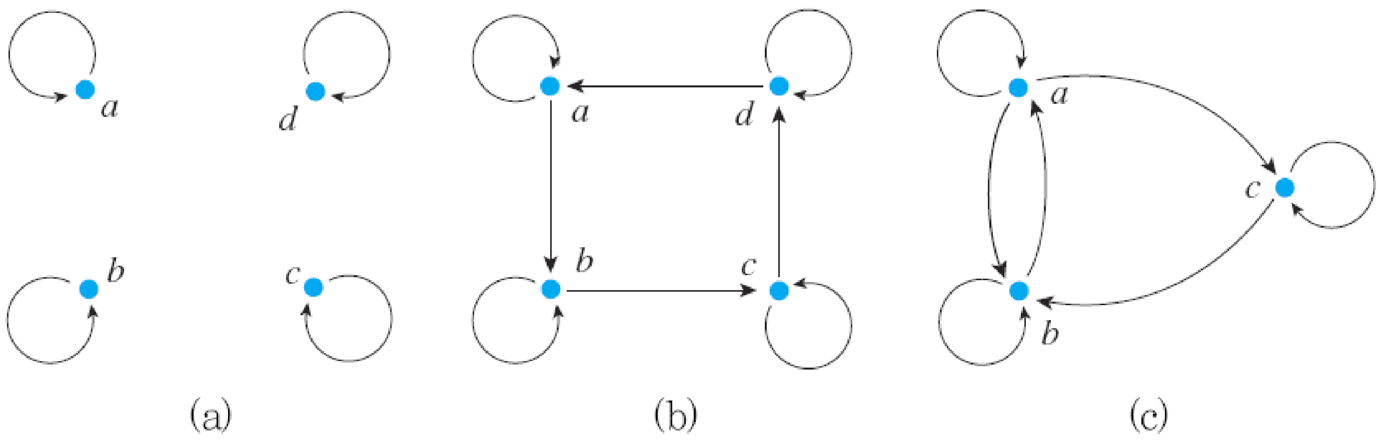
$$\therefore\ S \circ R = \{(a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z), (c, x), (c, z), (d, x), (d, y), (d, z)\}$$

관계의 성질

- 반사 관계(Reflexive Relation)

  - 관계 R에 대한 방향 그래프를 그렸을 때 그래프의 모든 정점에서 자기 자신을 가리키는 화살표가 있어야 반사 관계가 성립함

정의 5-6 집합 A에 있는 모든 원소 x에 대하여 xRx이면, 즉 $(x, x) \in R$이면 관계 R을 반사 관계(reflexive relation)라고 한다.



〈그림 5.1〉 반사 관계를 가진 방향 그래프

관계의 성질

- 비반사 관계(irreflexive relation)
  - 반사 관계와는 반대로 집합 A의 모든 원소에 대하여 a ∈ A, (a, a) ∉ R
  - R이 비반사 관계이면 R의 원소 중에는(a, a), a ∈ A인 원소가 하나도 존재하지 않음

예제 5-18

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대한 관계들이 다음과 같을 때 반사 관계인 것을 찾아보자.

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$
$$R_2 = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$
$$R_3 = \{(3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 1), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$$
$$R_4 = \phi$$

예제 5-19

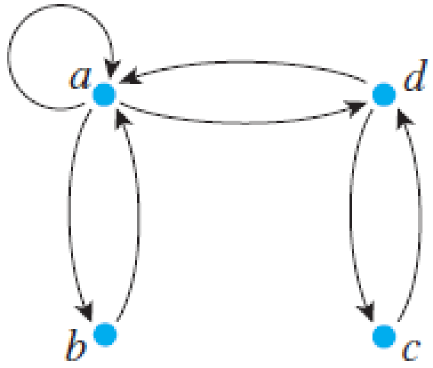
$R=\{(a,b) \mid a \in N,\ b \in N,\ a \leq b\}$일 때 R이 반사 관계인지를 판단해보자.

풀이 a, b가 자연수 집합의 원소이고 $a \leq b$이므로, $(1, 1) \in R$이고 $(2, 2) \in R$이다. 임의의 자연수 n에 대해서도 $n \leq n$이므로, $(n, n) \in R$이다. 따라서 모든 자연수에 대해 관계 R은 반사 관계이다.

관계의 성질

- **대칭 관계(Symmetric Relation)**
  - R이 대칭 관계일 때 R의 원소 중 (a, b)가 존재하면 (b, a) 또한 반드시 존재함
  - 대칭 관계인 R을 방향 그래프로 나타내면, 하나의 정점에서 다른 정점으로 화살표가 나가면 반대로 다른 정점에서 그 정점으로의 화살표도 반드시 있어야 함

정의 5-7 집합 A에 있는 원소 x, y에 대해 $(x, y) \in R$일 때 $(y, x) \in R$이면 관계 R을 **대칭 관계(symmetric relations)**라고 한다.



(a)

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(b)

〈그림 5.2〉 대칭 관계의 두 가지 예

관계의 성질

예제 5-20 x, y가 자연수의 집합 N의 원소일 때 다음의 관계들이 대칭 관계인지 아닌지를 구별해보자.

(1) $R_1 = \{(x,\ y) \mid x \in N,\ y \in N,\ x + y = 20\}$

(2) $R_2 = \{(x,\ y) \mid x \in N,\ y \in N,\ x \leq y\}$

풀이 (1) $x+y=20$일 때 $(x,\ y) \in R_1$이면 $(y,\ x) \in R_1$이므로, R_1은 대칭 관계이다. 예를 들어, $(1,\ 19) \in R_1$일 때 $(19,\ 1) \in R_1$과 같은 경우이다.

(2) $x=1$이고 $y=2$이면 $1 \leq 2$이므로 $(1,\ 2) \in R_2$이지만, $(2,\ 1) \notin R_2$이므로 R_2는 대칭 관계가 아니다.

관계의 성질

- 반대칭 관계(Anti-symmetric Relations)

  - R이 반대칭 관계일 때, $x \neq y$이고 $(x, y) \in R$이면 $(y, x) \notin R$
  - 대칭 관계와 반대칭 관계는 서로 반대의 개념을 가짐

예제 5-21 다음의 관계들이 반대칭 관계인지 아닌지를 구별해보자.

(1) $R_1 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$

(2) $R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$

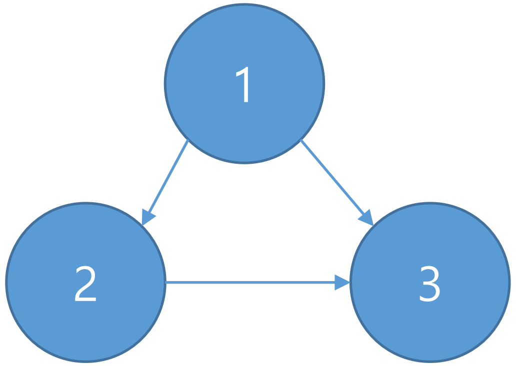
풀이 (1) R_1의 경우는 $a \neq b$일 때 $(a, b) \in R_1$이면 $(b, a) \notin R_1$이므로 반대칭 관계이다.

(2) R_2의 경우는 $(1, 3) \in R_2$이고 $(3, 1) \in R_2$이나 $1 \neq 3$이므로 반대칭 관계가 아니다.

관계의 성질

- 추이 관계 (Transitive Relation)
  - 집합 A = {1, 2, 3}이고 R = {(1, 2)}일 경우 관계 R의 순서쌍은 (1, 2)뿐이고 2로 시작하는 순서쌍이 존재하지 않음
  - S = {(1, 3), (2, 2), (3, 2)}일 경우 관계 S의 순서쌍에 (1, 3)과 (3, 2)가 존재하나 (1, 2)가 존재하지 않으므로 관계 S는 추이 관계가 아님

정의 5-9 집합 A에 있는 원소 x, y, z에 대하여 관계 R이 $(x, y) \in R$이고 $(y, z) \in R$이면 $(x, z) \in R$인 관계를 만족할 때 관계 R을 **추이 관계(transitive relation)**라고 한다.



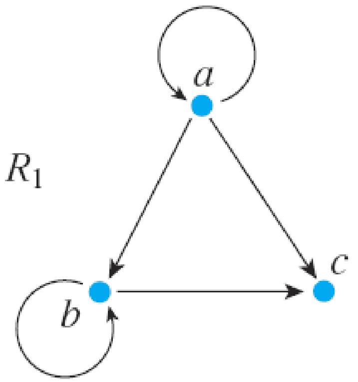
관계의 성질

예제 ⑤-22 정수들의 집합에서 크기를 나타내는 관계 <에서 추이 관계가 성립함을 보이자.

풀이 정수들의 관계에서 $a<b$이고 $b<c$이면 반드시 $a<c$이기 때문에 추이 관계가 성립한다. 참고로 이 관계는 $a<b$일 때 $b<a$가 성립하지 않기 때문에 비대칭적이고 또한 $a<a$가 성립하지 않으므로 비반사적임을 알 수 있다.

예제 ⑤-23 다음의 방향 그래프로 표현된 관계들이 추이 관계인지를 판별해보자.

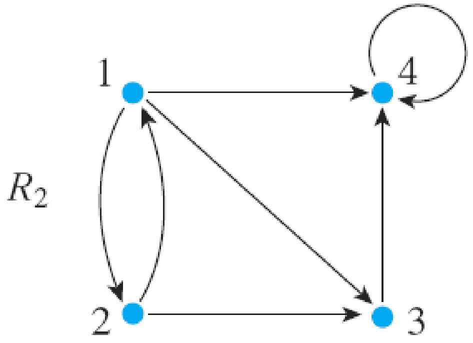
(1)



(a, b), (b, b) => (a, b)

(a, b), (b, c) => (a, c)

(2)



(1, 2), (2, 1) => (1, 1)

(1, 2), (2, 3) => (1, 3)

풀이 (1) $(a, b) \in R_1$이고 $(b, c) \in R_1$일 때 $(a, c) \in R_1$이므로 추이 관계이다.

(2) $(1, 2) \in R_2$이고 $(2, 3) \in R_2$일 때 $(1, 3) \in R_2$이나, $(2, 1) \in R_2$이고 $(1, 4) \in R_2$일 때 $(2, 4) \notin R_2$이므로 R_2는 추이 관계가 아니다.

관계의 성질

예제 7-12

집합 $A = \{a, b, c, d\}$에 대해 추이관계인지 아닌지 구분하라.

(1) $R_1 = \{(a, a), (a, d), (b, c), (c, a), (c, c), (d, b), (d, d)\}$

(2) $R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, b), (d, d)\}$

(3) $R_3 = \{(a, a), (d, d)\}$

(4) $R_4 = \{(a, d), (b, c), (d, a), (d, b)\}$

풀이

(1) $(a, a) \in R_1$이고 $(a, d) \in R_1$이므로 $(a, d) \in R_1$

$(a, d) \in R_1$이고 $(d, b) \in R_1$이지만 $(a, b) \notin R_1$ ∴ 추이관계가 아니다.

(2) $(d, b) \in R_2$이고 $(b, b) \in R_2$이므로 $(d, b) \in R_2$

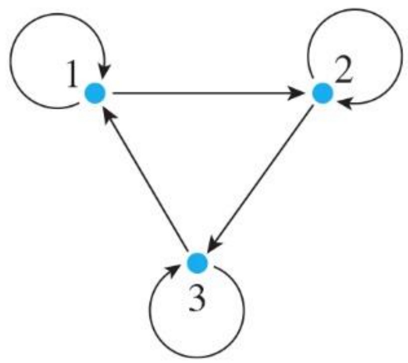
$(d, d) \in R_2$이고 $(d, b) \in R_2$이므로 $(d, b) \in R_2$ ∴ 추이관계이다.

(3) $(a, a) \in R_3$과 $(d, d) \in R_3$의 경우 치역에 해당되는 원소 a와 d에 연결되는 순서쌍 원소가 없으므로 추이관계를 고려할 필요가 없다. ∴ 추이관계이다.

(4) $(a, d) \in R_4$이고 $(d, a) \in R_4$이나 $(a, a) \notin R_4$ ∴ 추이관계가 아니다.

관계의 성질

예제 5-25 어떤 집합상에 관계가 주어졌을 때, 그 관계에 따른 방향 그래프가 다음과 같다. 이때 반사 관계, 대칭 관계, 반대칭 관계 및 추이 관계가 성립하는지를 판별해보자.



풀이 자기 자신에게로의 화살표가 모두 있으므로 반사 관계가 성립하고, 정의에 따라 반대칭 관계가 성립한다. 그러나 대칭, 추이 관계는 성립하지 않는다.

관계의 성질

정의 5-10

R의 추이 클로우저 $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cdots$는 다음과 같이 정의된다.

(1) 만약 $(a,\ b) \in R$이면 $(a,\ b) \in R^+$이다.

(2) 만약 $(a,\ b) \in R^+$이고 $(b,\ c) \in R$이면 $(a,\ c) \in R^+$이다.

(3) 앞의 (1), (2)의 경우를 제외하고는 어떤 것도 R^+에 속하지 않는다.

R^+에서는 추이 관계가 성립한다. R^*로 표현되는 R의 반사 및 추이 클로우저 (reflexive and transitive closure)는 $R^+ \cup \{(a,\ a) | a \in S\}$가 된다.

정리 5-1

집합 A에서의 관계 $R \subseteq A \times A$는 다음과 같은 성질을 가질 수 있다.

(1) 반사 관계 : 모든 $x \in A$에 대해 xRx이다.

(2) 대칭 관계 : 모든 $x,\ y \in A$에 대해 xRy이면 yRx이다.

(3) 추이 관계 : 모든 $x,\ y,\ z \in A$에 대해 xRy이고 yRz이면 xRz이다.

관계의 성질

예제 ⑤-26 $R=\{(1, 2), (2, 2), (2,3)\}$을 집합 $\{1, 2, 3\}$상에서의 관계라고 할 때 R^+와 R^*를 구해보자.

풀이 위의 정의에 따라 구해보자.

(1) 만약 $(a, b) \in \mathrm{R}$이면 $(a, b) \in \mathrm{R}^+$이란 조건으로부터

$R^+=\{(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$이 된다.

(2) 만약 $(a, b) \in R^+$이고 $(b, c) \in R$이면 $(a, c) \in R^+$이다. 그러나 이 경우에는 다른 새로운 추이 관계가 만들어지지 않는다.

따라서 $R^+=\{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3)\}$이 된다.

한편 $R^*=R^+ \cup \{(a, a) | a \in S\}$이므로

$R^*=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$이 된다.

관계의 성질

- 합성 관계의 거듭제곱

정의 7-17 합성관계의 거듭제곱: R^n

집합 A에 대한 관계 R에 대하여 $n=1,2,3,\cdots$일 때 거듭제곱

$$R^n = \begin{cases} R & n=1\text{일 때} \\ R^{n-1} \circ R & n>1\text{일 때} \end{cases}$$

예제 7-17

집합 $A=\{1,2,3\}$에 대한 관계 R이 다음과 같을 때, R^2, R^3, R^4를 구하라.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

풀이

- $R^2 = M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

관계의 성질

- 합성 관계의 거듭제곱

예제 7-18

집합 $A=\{1,2,3\}$에 대한 관계 $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\}$이 추이관계임을 밝혀라.

풀이

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$R^2=M_{R^2}=M_R\odot M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge0) & (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge0) & (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge1)\\(0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge1)\\(0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=R \qquad \therefore\ R^2\subseteq R$$

$$R^3=M_{R^3}=M_{R^2}\odot M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge0) & (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge0) & (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge1)\\(0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(0\wedge1)\\(0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=R \qquad \therefore\ R^3\subseteq R$$

$\therefore$ 관계 R은 추이관계이다.

관계의 성질

- 합성 관계의 거듭제곱

정리 7-1 추이관계와 거듭제곱의 관계

기수Cardinality가 n인 집합 A에 대한 관계 R이 추이관계인 필요충분조건은 모든 양의 정수 n에 대하여 $R^n \subseteq R$이다.

증명

기본가정) $n = 1$일 때, $R^1 \subseteq R$로 성립한다.

귀납가정) $n = k$일 때, $R^k \subseteq R$로 가정한다.

귀납증명) $n = k+1$일 때, $R^{k+1} \subseteq R$임을 증명한다.

$(x, y) \in R^{k+1}$이면, $R^{k+1} = R^k \circ R$이기 때문에 $(x, y) \in R^k \circ R$이 된다. 그러므로 $(x, z) \in R$이고 $(z, y) \in R^k$인 z가 존재한다. 귀납가정에서 $R^k \subseteq R$이므로 $(z, y) \in R$이다. 결국 $(z, y) \in R$이고, $(x, z) \in R$이므로 $(x, y) \in R$이다. 따라서 $R^{k+1} \subseteq R$이 성립한다.

$\therefore$ 모든 양의 정수 n에 대하여 $R^n \subseteq R$이다.

관계의 성질

- 합성 관계의 거듭제곱

예제 7-21

집합 $A=\{a, b, c, d\}$에 대한 관계 $R=\{(a, b), (b, b), (b, c), (c, a)\}$에 대한 추이폐포인 관계 S를 구하라.

풀이

① $(a, b) \in R$이고 $(b, c) \in R$이지만 $(a, c) \notin R$

$(b, c) \in R$이고 $(c, a) \in R$이지만 $(b, a) \notin R$

$\therefore$ 관계 R은 추이관계가 아니다.

$\therefore\ S_1 = R \cup \{(a, c), (b, a)\} = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a)\}$

② 새로운 관계 S_1은 추이관계인지 판별해야 한다. 이번에는 앞장에서 정리했던 추이관계와 거듭제곱의 관계를 이용해 판별해본다.

$$M_{S_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

관계의 성질

- 합성 관계의 거듭제곱

$$M_{S_1^2} = M_{S_1} \odot M_{S_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{S_1^3} = M_{S_1^2} \odot M_{S_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{S_1^4} = M_{S_1^3} \odot M_{S_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

위의 거듭제곱으로 보아 $S_1^4 \subseteq S_1$이 성립하지 않으므로, 관계 S_1은 추이관계가 아니다. 따라서 S_1을 추이관계가 되도록 만들어야 한다.

$(a, b) \in S_1$이고 $(b, a) \in S_1$이지만, $(a, a) \notin S_1$

$(c, a) \in S_1$이고$(a, b) \in S_1$이지만, $(c, b) \notin S_1$

$(c, a) \in S_1$이고 $(a, c) \in S_1$이지만, $(c, c) \notin S_1$이다.

$$\therefore S_2 = S_1 \cup \{(a, a), (c, b), (c, c)\}$$
$$= \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

③ 새로운 S_2는 추이관계인지 판별해야 한다.

관계의 성질

- 합성 관계의 거듭제곱

$$M_{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{S_2^2} = M_{S_2} \odot M_{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{S_2^3} = M_{S_2^2} \odot M_{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{S_2^4} = M_{S_2^3} \odot M_{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S_2^3 \sqsubseteq S_2$이므로 관계 S_2는 추이관계이다. $\therefore$ S_2는 추이폐포 S이다.

$\therefore\ S = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

동치 관계

정의 5−11 관계 R에서 반사 관계, 대칭 관계, 추이 관계가 모두 성립할 때 이를 **동치 관계(equivalence relation)**라고 한다. 동치 관계 R의 중요한 성질로는 R이 서로 공통 부분이 없으면서 공집합이 아닌 클래스들로 S를 분할한다는 점이다.

예제 5−27 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이고 A에 대한 관계가 다음과 같을 때, R이 동치 관계임을 보이자.

$$R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$$

풀이 (1) 집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $(x, x) \in R$이므로 반사 관계이다.
(2) $(1, 3)$과 $(3, 1)$이 R에 속하고 $(2, 4)$와 $(4, 2)$가 R에 속하므로 대칭 관계이다.
(3) 집합 A의 모든 원소 x, y, z에 대하여 $(x, y) \in R$이고, $(y, z) \in R$일 때 $(x, z) \in R$이므로 추이 관계이다.

그러므로 관계 R은 동치 관계이다.

동치 관계

예제 5-30 정수 i와 j에 대한 mod 합동(congruence)이 동치 관계임을 보이자.

풀이 어떤 수 i와 j가 합동인 것은 $i \equiv j$로 나타내는데 이들의 관계를 점검해 보자.

(1) 모든 x에 대해 $x \equiv x$이므로 반사 관계가 성립한다.

(2) 만약 $x \equiv y$이면 $y \equiv x$이므로 대칭 관계가 성립한다.

(3) 만약 $x \equiv y$이고 $y \equiv z$이면 $x \equiv z$이기 때문에 추이 관계가 성립한다.

따라서 이 관계는 반사 관계, 대칭 관계, 추이 관계가 모두 성립하므로 동치 관계이다.

여기서 잠깐!!

$x \equiv y \ (\mathrm{mod} \ \ m)$와 같은 mod 합동이란 x와 y를 m으로 각각 나누었을 때 나머지가 같은 경우를 말한다. 예를 들어, 우리가 달력에서 요일별로 본 날짜는 m mod 7에 관해 합동이다. 가령 달력을 볼 경우 3일, 10일, 17일, 24일, 31일은 모두 7로 나누었을 때 나머지가 3인 경우들이다. 이때 이 날짜들은 같은 요일이 되므로, 요일적인 면에서 동치 관계이다.

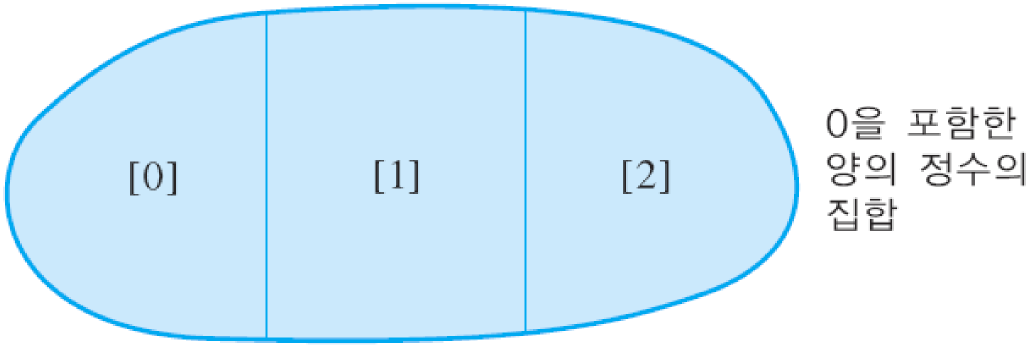
동치 관계

예제 ⑤-31 양의 정수 m에 대해 mod 합동인 관계, 즉 $a \equiv b \pmod{m}$인 경우를 살펴보자. 만약 n이 3일 경우에 동치 관계가 되는지를 밝히고, 동치류를 만들어보자.

풀이 mod 합동인 경우에 위의 예제에서 동치 관계가 되는 것을 확인하였다. 이들은 나머지의 값에 따라 다음과 같은 3개의 동치류로 나눌 수 있다.

$$[0] = \{0, 3, 6, \cdots, 3n, \cdots\}$$
$$[1] = \{1, 4, 7, \cdots, 3n+1, \cdots\}$$
$$[2] = \{2, 5, 8, \cdots, 3n+2, \cdots\}$$

이들 3개의 집합은 서로소이고, 또한 이들을 모두 합집합하면 음수가 아닌 정수의 집합이 되므로, 다음과 같이 서로 겹치지 않는 동치류들로 분할하게 된다.



부분 순서 관계

정의 5-14 집합 A에 대한 관계 R이 반사 관계, 반대칭 관계, 추이 관계이면 관계 R을 **부분 순서 관계(partially ordered relation)**라고 한다. 또한 R이 A에 대한 부분 순서 관계이면 순서쌍 (A, R)을 **부분 순서 집합(partially order set, Poset)**이라고 한다.

정리 5-2

집합 A에서의 관계 $R \subseteq A \times A$는 다음과 같은 성질을 가질 수 있다.

(1) 반사 관계 : 모든 $x \in A$에 대해 xRx이다.

(2) 반대칭 관계 : 모든 $x, y \in A$에 대해 xRy이고 yRx이면 $x=y$이다.

(3) 추이 관계 : 모든 $x, y, z \in A$에 대해 xRy이고 yRz이면 xRz이다.

위의 세 가지 관계를 모두 만족시키는 관계를 부분 순서 관계라고 한다.

부분 순서 관계

예제 5-32 자연수의 집합(N)에 대한 관계 $\le$이 부분 순서 관계임을 보이자.

풀이 임의의 자연수 x에 대하여 $x \le x$이므로 반사 관계이다.

$x,\ y \in N$일 때 $x \le y$이고 $y \le x$이면 $x = y$이므로 반대칭 관계이다.

$x,\ y,\ z \in N$일 때 $x \le y$이고 $y \le z$이면 $x \le z$이므로 추이 관계이다.

따라서 관계 $\le$은 부분 순서 관계이다.

예제 5-33 집합 S의 부분 집합 간의 포함 관계 $\subseteq$이 부분 순서 관계임을 보이자.

풀이 임의의 부분 집합 A에 대하여 $A \subseteq A$이므로 반사 관계이다.

부분 집합 $A,\ B$에 대하여 $A \subseteq B$이고 $B \subseteq A$이면 $A = B$이므로 반대칭 관계이다.

부분 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 $A \subseteq B$이고 $B \subseteq C$이면 $A \subseteq C$이므로 추이 관계이다.

따라서 포함 관계 $\subseteq$은 부분 순서 관계이다.