Discrete Mathematics

Lecture 5. 관계 1

- Lecturer: Suhyung Park, PhD

- Office: 공과대학 7호관 431호
- Contact: 062-530-1797
- E-mail: suhyung@jnu.ac.kr

* 본 강의 자료는 생능출판사와 한빛아카데미 “PPT 강의자료”를 기반으로 제작되었습니다.

강의 내용

1. 관계와 이항 관계
2. 관계의 표현
3. 합성 관계
4. 관계의 성질
5. 동치 관계와 분할
6. 부분 순서 관계

관계와 이항 관계

- **관계**(Relation)란 객체들 간의 연관성을 표현하는 구조로서, 수학이나 공학 분야뿐만 아니라 여러 다른 분야에서도 기본적이고 중요한 개념임
- 수학, 컴퓨터, 여러 가지 공학 분야에서의 객체들도 이와 같이 여러 가지 관계를 가짐

- 이항 관계

정의 5-1 두 집합 A, B에 대하여, A로부터 B로의 **이항 관계(binary relation)** R은 두 집합의 곱집합 $A \times B$의 부분 집합이다. $A \times B$의 원소인 순서쌍 (a, b)가 주어졌을 때 $(a, b) \in R$과 aRb는 동치이다.

관계와 이항 관계

- **관계에 대한 표기**를 기호로 나타내면

$$aRb \Leftrightarrow (a,\ b) \in R : a\text{와 } b\text{가 관계가 있는 경우}$$

$$a\not{R}b \Leftrightarrow (a,\ b) \notin R : a\text{와 } b\text{가 관계가 없는 경우}$$

- 정의에서 사용된 이항(binary)이라는 용어는 2개 집합 사이의 관계를 의미함
- 두 개 이상인 원소에 대한 관계는 n–ary 관계라고 함
- 세 원소 간의 관계는 3–ary 관계임

- **관계 R의 원소인 순서쌍**
  - 첫 번째 원소의 집합을 정의역(domain)이라 하고 Dom(R)로 표시함
  - 두 번째 원소의 집합을 치역(range)이라 하며 Ran(R)로 표시함
    - $Dom(R) = \{a \mid (a, b) \in R\} \subseteq A$
    - $Dom(R) = \{b \mid (a, b) \in R\} \subseteq B$

관계와 이항 관계

예제 ⑤-1 두 집합 A, B에서 $A=\{0,\ 1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$이라고 하자. 집합 A에 있는 원소 x와 집합 B에 있는 원소 y에 대하여, x가 y보다 작을 때 서로 관계가 있다고 가정하고 관계의 집합을 구해보자.

풀이 총 9가지 순서 집합에 대해 살펴본다.

$0<1$이므로 $0R1$,

$0<2$이므로 $0R2$,

$0<3$이므로 $0R3$,

$1<2$이므로 $1R2$,

$1<3$이므로 $1R3$,

$2<3$이므로 $2R3$

또한

$1 \not< 1$이므로 $1 \not R 1$,

$2 \not< 1$이므로 $2 \not R 1$,

$2 \not< 2$이므로 $2 \not R 2$

따라서 집합 A와 집합 B 사이의 곱집합의 집합

$A \times B=\{(0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)\}$

중에서 주어진 관계를 만족하는 집합은

$\{(0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)\}$

이 된다.

관계와 이항 관계

예제 ⑤-2

$A=\{1, 2, 3\}$이고, A에 대한 관계 $R=\{(1, 1), (1, 3), (3, 2)\}$일 때 R은 $A\times A$의 부분 집합이기 때문에 A에 관한 관계이다. 이때의 관계를 기호로 나타내고, 관계의 정의역과 치역을 구해보자.

풀이 관계 $R=\{(1, 1), (1, 3), (3, 2)\}$이므로

관계 표기는 $1R1$, $1R3$, $3R2$이고

R의 정의역은 $\{1, 3\}$이고, 치역은 $\{1, 2, 3\}$이다.

여기서 잠깐!!

관계에서는 특히 $xRy \neq yRx$임을 유의해야 한다.

정의역은 순서쌍의 첫 번째 원소들로 이루어진 집합이고, 치역은 두 번째 원소들로 이루어진 집합이다.

관계와 이항 관계

예제 ⑤-3 집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대한 이항 관계 R을 다음과 같이 정의해보자.

$(a, b) \in A \times B$, $(a, b) \in R \Leftrightarrow a-b$는 짝수

(1) $A \times B$의 순서쌍들과 R의 순서쌍들을 모두 구해보자.

(2) $1R3$, $2R3$, $2R2$들이 성립하는가?

(3) $\mathrm{Dom}(R)$과 $\mathrm{Ran}(R)$을 구해보자.

풀이 (1) $A \times B=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

R의 순서쌍을 구하기 위해서는 $A \times B$ 원소들인 6개의 순서쌍을 R에서 정의된 조건에 적합한지를 살펴보아야 한다.

$1-1=0$은 짝수이므로 $(1, 1) \in R$

$1-2=-1$은 짝수가 아니므로 $(1, 2) \notin R$

$1-3=-2$는 짝수이므로 $(1, 3) \in R$

$2-1=1$은 짝수가 아니므로 $(2, 1) \notin R$

$2-2=0$은 짝수이므로 $(2, 2) \in R$

$2-3=-1$은 짝수가 아니므로 $(2, 3) \notin R$

그러므로 $R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$이다.

(2) $(1, 3) \in R$이므로 $1R3$은 성립한다.

$(2, 3) \notin R$이므로 $2R3$은 성립하지 않는다.

$(2, 2) \in R$이므로 $2R2$는 성립한다.

(3) $\mathrm{Dom}(R) = \{1, 2\}$

$\mathrm{Ran}(R) = \{1, 2, 3\}$

관계와 이항 관계

정의 5-2 A와 B가 집합일 때, 순서쌍(ordered pair)의 첫 번째 요소는 집합 A의 원소이고 두 번째 요소는 B의 원소로 구성된 모든 순서쌍의 집합을 A와 B의 **카티시안 곱(cartesian product)** 또는 **곱집합**이라고 하며 $A \times B$로 나타낸다.

$$A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

카티시안 곱은 두 개 이상의 집합에 대해서도 확장할 수 있다. 즉,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \mid \text{모든 } i,\ 1 \le i \le n \text{에 대해 } x_i \in A_i\}$$

이다.

예제 5-4 $A = \{a,\ b\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$인 경우 $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$를 각각 구해 보자.

풀이

$A \times A = \{(a, a),\ (a, b),\ (b, a),\ (b, b)\}$

$A \times B = \{(a, 1),\ (a, 2),\ (a, 3),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (b, 3)\}$

$B \times A = \{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b)\}$

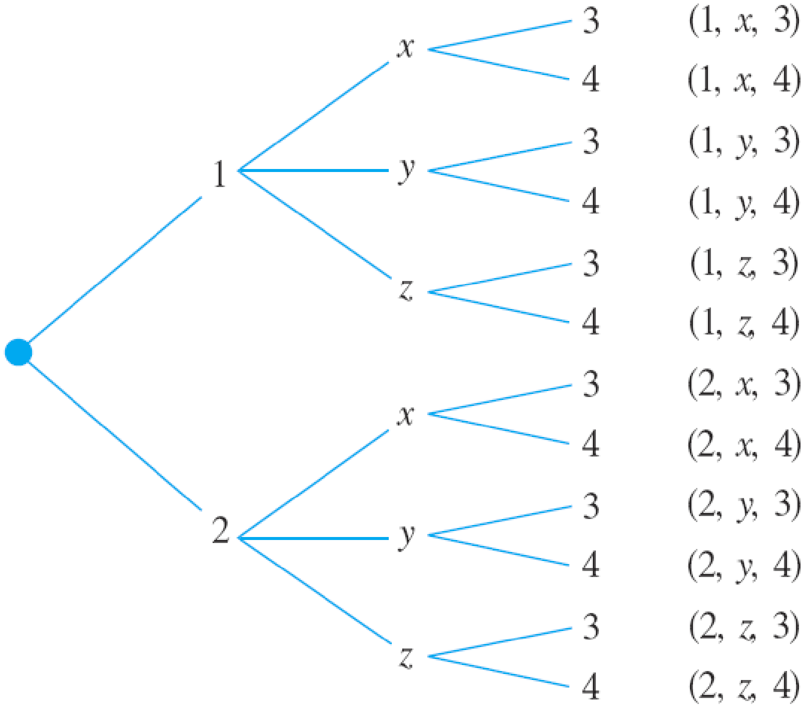
$B \times B = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (3, 1),\ (3, 2),\ (3, 3)\}$

이 된다.

관계와 이항 관계

예제 ⑤-6 $A=\{1, 2\}$, $B=\{x, y, z\}$, $C=\{3, 4\}$에 대하여 $A\times B\times C$를 구해보자.

풀이 $A\times B\times C$는 $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$인 모든 순서쌍 (a, b, c)로 구성되어 있고 $A\times B\times C$의 순서쌍들은 다음과 같은 트리(tree) 도표를 활용하면 보다 체계적으로 구할 수 있다.



$A\times B\times C$의 순서쌍들은 앞의 트리 도표에 나타난 바와 같이 모두 12개이다.

즉, A, B, C 각 원소의 개수를 모두 곱한 것이 된다.

관계와 이항 관계

정의 5-3 집합 A에서 집합 B로의 관계 R에 대한 역관계(inverse relations) R^{-1}는 집합 B에서 집합 A로의 관계를 나타내며, 순서쌍 내의 순서를 다시 바꾸면 그 순서쌍은 관계 R에 속하게 된다.

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

다시 말하면, aRb의 관계가 있어야만 $bR^{-1}a$가 존재하게 된다.

예제 5-7 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$일 때 관계 R이 다음과 같다고 하자.

$$R = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

이때 관계 R의 역관계 R^{-1}을 구해보자.

풀이 역관계는 관계에서 순서쌍의 순서를 모두 바꾸면 되므로
$R^{-1} = \{(3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$이다.

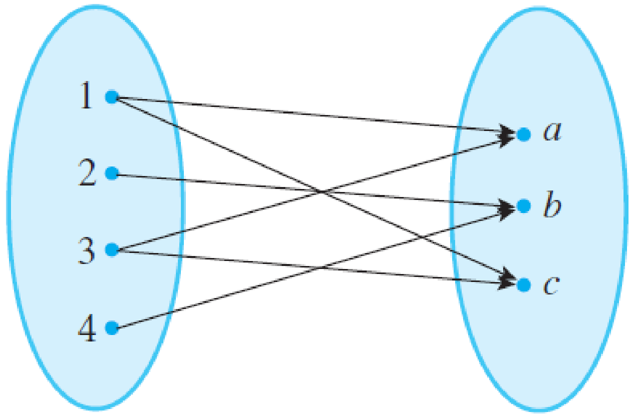
관계의 표현

- 화살표 도표(Arrow Diagram)

  - 화살표 도표를 이용한 관계의 표현은 a가 집합 A의 원소이고, b가 집합 B의 원소라 가정할 때
  - (a, b) ∈ R일 경우 집합 A에있는 원소 a에서 집합 B에 있는 원소 b로 화살표를 그려서 관계를 표현함

예제 5-8 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 집합 $B=\{a, b, c\}$라 하고 그들 사이의 관계 $R=\{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a), (3, c), (4, b)\}$일 경우, 관계 R을 화살표 도표를 이용하여 나타내어보자.

풀이 순서쌍의 값에 따라 집합 A에서 집합 B의 방향으로 화살표를 연결한다.



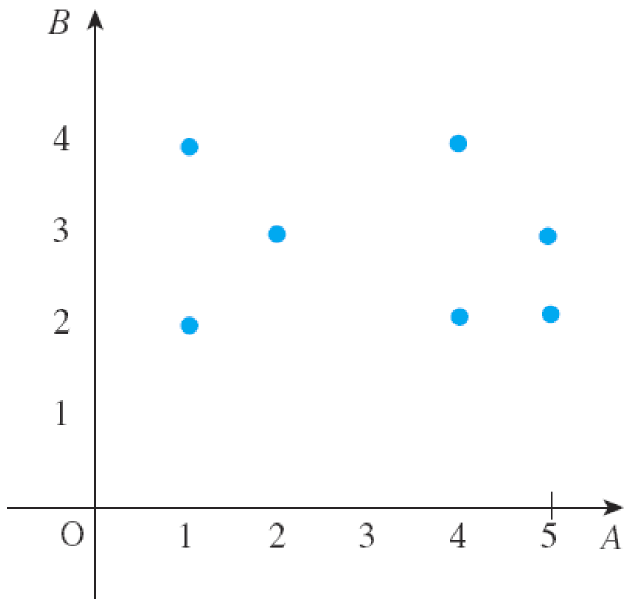
관계의 표현

- **좌표 도표(Coordinate Diagram)**

  - 관계를 표현하는 방법은 집합 A의 원소를 x축 위의 점으로 표시함
  - 집합 B의 원소를 y축 위의 점으로 생각함
  - a ∈ A와 b ∈ B가 관계가 있으면 a를 가리키는 x 좌표축과 b를 가리키는 y 좌표축이 만나는 곳에 점으로 표시함

예제 5-9 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 3, 4\}$이고 집합 A에서 집합 B로의 관계 $R=\{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 2), (5, 3)\}$일 때 관계 R을 좌표 도표를 이용하여 표시해보자.

풀이 관계 R에 해당하는 좌표에 점으로 표시한다.



관계의 표현

- 방향 그래프(Directed Graph)

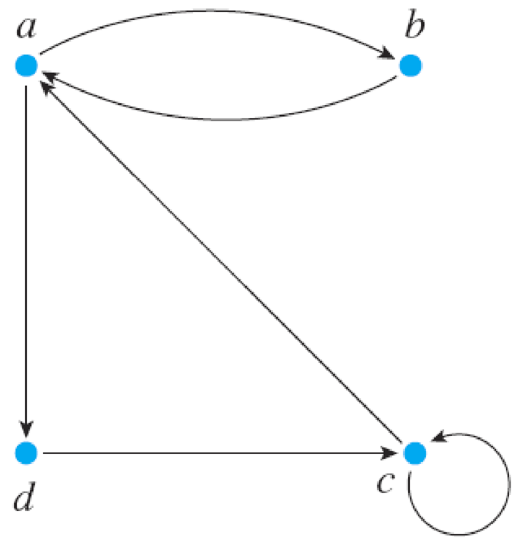
  - 관계 R이 두 집합 A와 B 사이의 관계가 아니고 하나의 집합 A에 대한 관계라고 할 때

    1. 집합 A의 각 원소를 그래프의 정점(vertex)으로 표시함
    2. (a, b) ∈ R일 경우 a에서 b로의 화살표가 있는 연결선(edge)인 방향 그래프로 표현함

예제 5-10 다음과 같은 관계 R이 주어졌을 때, 관계를 방향 그래프로 그려보자.

$R=\{(a, b), (b, a), (a, d), (d, c), (c, c), (c, a)\}$

풀이 관계의 첫 번째 원소로부터 두 번째 원소로 방향 그래프를 그리면 된다.



관계의 표현

- 관계 행렬(Relation Matrix)

  - 관계를 표현하는 또 다른 방법으로서 부울 행렬(Boolean Matrix)을 이용하는 관계 행렬(Relation Matrix) 방법이 있음
  - 부울 행렬은 행렬 안에 있는 모든 원소들이 0 또는 1로 표시되는 행렬을 의미함
  - 관계 행렬의 행에는 집합 A의 원소, 열에는 집합 B의 원소를 표시함
  - 행렬의 각 요소의 값은 $a \in A$와 $b \in B$의 관계가 있으면 1, 관계가 없으면 0으로 표현하는 방법임

예를 들어, $R=\{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$일 때 행렬에 의한 관계 표현

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

관계의 표현

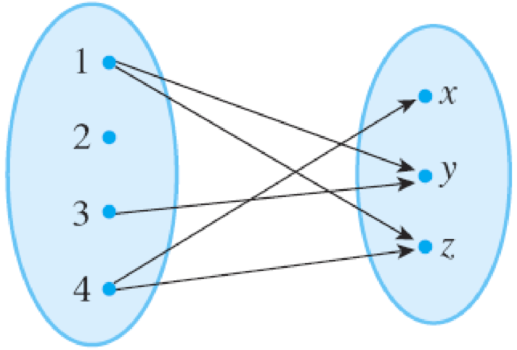
예제 5-13 $A = \{1, 2, 3, 4\}$이고 $B = \{x, y, z\}$일 때, 다음과 같이 A에서 B로 가는 관계가 있다.

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$$

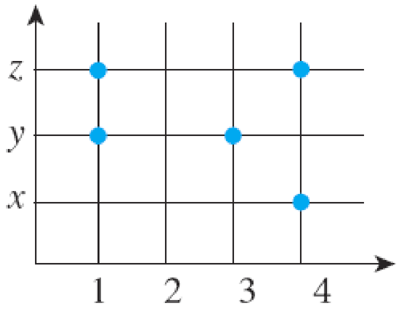
(1) 관계 R을 화살표 도표, 좌표 도표, 관계 행렬로 각각 표현해보자.

(2) R의 정의역과 치역을 구해보자.

풀이 (1) 주어진 관계를 화살표 도표, 좌표 도표, 관계 행렬로 표현하면 다음과 같다.



① 화살표 도표



② 좌표 도표

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

③ 관계 행렬

(2) 정의역 $= \{1, 3, 4\}$이고, 치역 $= \{x, y, z\}$이다.

합성 관계

- 합성 관계는 주어진 두 관계로부터 새로운 관계를 이끌어내는 것임
- 이미 존재하고 있는 관계 R_1과 R_2로부터 새로운 관계 $R_1 \cdot R_2$를 만들어냄
- 합성 관계에서 관계 R_1과 R_2는 연관성이 있어야 하는데, R_1의 치역이 R_2의 정의역이 될 경우에만 합성 명제 $R_1 \cdot R_2$를 만들 수 있음

정의 5-4 세 집합 A, B, C에서 R_1을 집합 A에서 집합 B로의 관계라 하고, R_2를 집합 B에서 집합 C로의 관계라 하면, 집합 A에서 집합 C로의 합성 관계(composite relation) $R_1 \cdot R_2$ 또는 R_1R_2는 다음과 같이 정의된다.

$$R_1 \cdot R_2 = \{(a,\ c) \mid a \in A,\ c \in C,\ (a,\ b) \in R_1 \text{이고 } (b,\ c) \in R_2\}$$

합성 관계

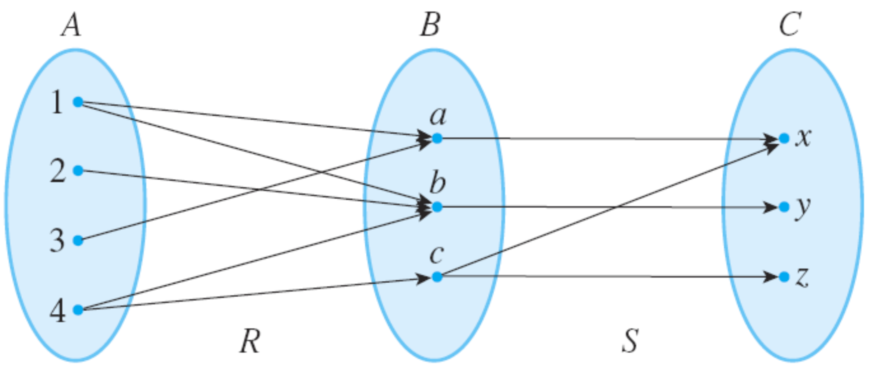
예제 5-14

집합 A, B, C가 각각 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{a, b, c\}$, $C=\{x, y, z\}$이고, 집합 A에서 집합 B로의 관계를 R, 집합 B에서 집합 C로의 관계를 S라 한다. R과 S가 다음과 같을 때 합성 관계 $R \cdot S$를 화살표 도표를 사용하여 나타내어보자.

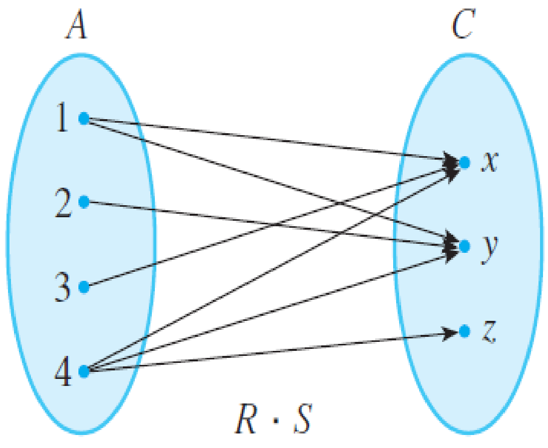
$R=\{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a), (4, b), (4, c)\}$

$S=\{(a, x), (b, y), (c, x), (c, z)\}$

풀이 관계 R과 S를 화살표 도표로 나타내면 다음과 같다.



- 1에서 a, b로 가고, a와 b는 다시 x와 y감
- 결과적으로 1에서 x와 y로 가는 셈임
- 따라서 1에서 x와 y로의 화살표를 직접 만들어줌



합성 관계

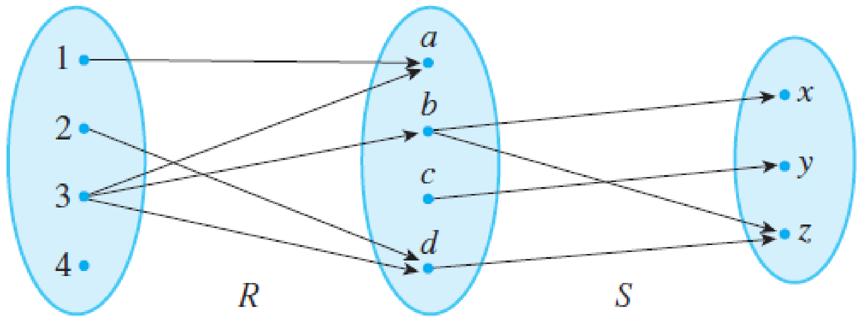
예제 ⑤-16 다음과 같이 3개의 집합과 두 개의 관계가 주어졌을 경우, 합성 관계를 화살표 도표를 통해 나타내어보자.

$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{x,y,z\}$

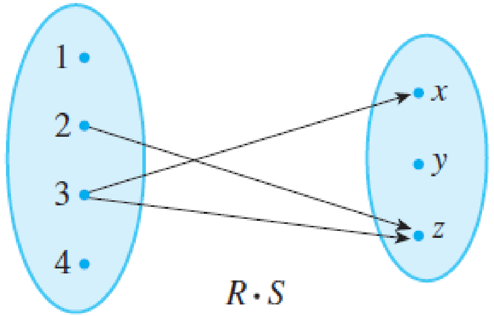
$R=\{(1,a),\ (2,d),\ (3,a),\ (3,b),\ (3,d)\}$

$S=\{(b,x),\ (b,z),\ (c,y),\ (d,z)\}$

풀이 먼저 R과 S의 관계를 화살표 도표로 나타내면 다음과 같다.



따라서 합성 관계 $R \cdot S$는 다음과 같은 화살표 도표로 나타낼 수 있다.



합성 관계

정의 5−5 집합 A에 대한 **항등 관계(Identity relation)** I_A는 다음과 같이 정의된다.

$$I_A = \{(a,\ a) \mid a \in A\}$$

항등 관계를 이용한 합성 관계는 원래의 관계와 같음

$$I_A R = R I_B = R$$

예제 5−17 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$이고, 집합 A에서 집합 B로의 관계가 다음과 같이 R로 나타내어질 경우 다음 관계를 각각 구해보자.

$$R = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (4,\ 2)\}$$

(1) $I_A R$ (2) I_B

풀이 (1) $I_A R = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (4,\ 2)\}$

(2) $I_B = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3)\}$