Discrete Mathematics

Lecture 9. 순열, 이산적 확률, 재귀적 관계

- **Lecturer: Suhyung Park, PhD**

- **Office: 공과대학 7호관 431호**
- **Contact: 062-530-1797**
- **E-mail: suhyung@jnu.ac.kr**

*** 본 강의 자료는 생능출판사와 한빛아카데미 "PPT 강의자료"를 기반으로 제작되었습니다.**

강의 내용

1. 경우의 수
2. 순열
3. 조합
4. 이산적 확률과 통계
5. 비둘기 집 원리
6. 재귀적 정의

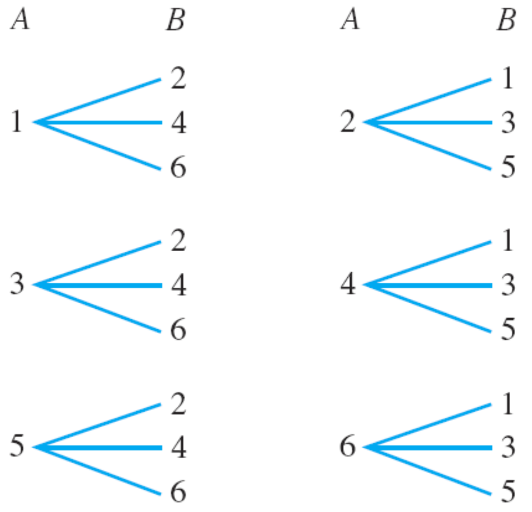
경우의 수

- 어떤 사건이 일어나는 경우의 수를 구할 때는 모든 경우를 일정한 기준에 따라 빠짐없이, 중복되지 않게 해야 함

- 경우의 수를 구하는 방법에는 트리를 이용하는 방법과 표를 이용하는 방법이 있음

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던졌을 때 두 수의 합이 홀수가 나오는 경우의 수를 구해보자.

풀이 주사위의 두 수의 합이 홀수가 되려면 주사위 A는 홀수, 주사위 B는 짝수이거나, 주사위 A는 짝수, 주사위 B는 홀수인 경우이다. 이것을 트리로 그리면 다음의 그림과 같이 나타낼 수 있으므로 주사위 A, B의 두 눈의 합이 홀수가 되는 모든 경우의 수는 $6 \times 3 = 18$가지이다.



경우의 수

정의 ⑨-1 사건이 일어나는 경우의 수에서의 법칙은 다음과 같다.

(1) 합의 법칙(rule of sum)은 두 사건 A, $B(A\cap B=\phi)$가 일어날 경우의 수를 $n(A)=m$, $n(B)=n$이라 하면, A 또는 B가 일어날 경우의 수는 $m+n$이다.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=m+n$$

(2) 곱의 법칙(rule of product)은 두 사건 A, B에서 $n(A)=m$, $n(B)=n$이라 하면, A, B가 동시에 일어날 경우의 수는 $m\cdot n$이다.

$$n(A\times B)=n(A)\times n(B)=m\cdot n$$

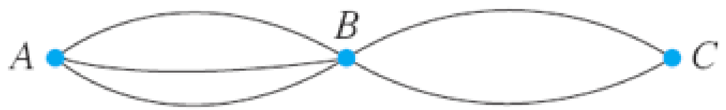
A와 B 사이에 3개의 길이 있고 B와 C 사이에 2개의 길이 있다고 하자. 어떤 사람이 다음과 같이 길을 갈 수 있는 방법의 경우의 수는 몇 가지인지 알아보자.

(1) A에서 B를 거쳐서 C로 가는 경우

(2) A에서 B를 거쳐서 C로 갔다가, 다시 B를 거쳐 A로 돌아오는 경우

풀이 (1) A에서 B로 가는 데 3가지, B에서 C로 가는 데 2가지 방법이 있으므로 경우의 수는 $3\times2=6$가지 방법이 있다.

(2) A에서 C로 갔다가 다시 C에서 A로 돌아오므로, 두 사건에는 곱의 법칙이 성립하여 $6\times6=36$가지 방법이 있다.



순열

정의 ⑨-2 서로 다른 원소들을 순서를 고려하여 일렬로 배열하는 것을 순열(permutation)이라고 한다.
이때, 서로 다른 n개의 원소를 한 줄로 배열하는 순열의 수는

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

이고, 간단히 $n!$로 나타낸다.

정의 ⑨-3 서로 다른 n개의 원소 중에서 r개를 택하는 순열의 수는

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \quad (\text{단, } 0 < r \le n)$$

이고, 이를 ${}_nP_r$로 나타낸다.

${}_nP_r$을 $n!$을 써서 나타내면

$${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \times \frac{(n-r) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$ 이 된다.

순열

- **같은 원소를 나열하는 순열**

정의 12-5 중복된 원소를 포함하는 집합에 대한 순열

n개의 원소 중에서 같은 원소들이 각각 p개, q개 r개, $\cdots$, s개가 있을 때, n개를 나열하는 경우의 수

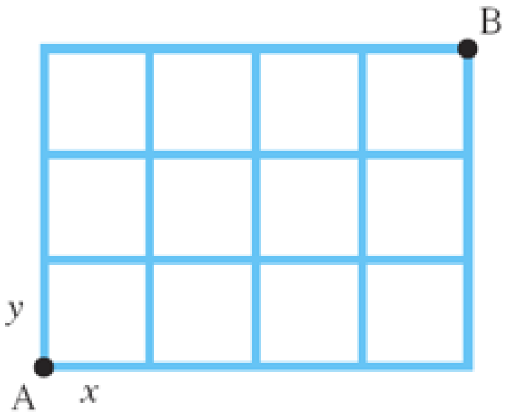
$$\frac{n!}{p!\times q!\times r!\times\cdots\times s!}, \qquad p+q+r+\cdots+s=n$$

- 문자 a, b, b, b, c가 주어졌을 때, 이 문자들을 나열하는 방법의 수
  (세 개의 b를 각기 다른 원소 b1, b2, b3으로 가정)

- 문자 5개를 나열하는 방법의 수는 $_5P_5=5!$ 이다
- 그러나 b1, b2, b3은 원래 같은 문자이므로 이 세 개의 b는 어떻게 나열해도 똑같은 형태가 됨
- 따라서 5!에서 b1, b2, b3을 나열했던 방법의 수($_3P_3=3!$)를 제외
- 그러므로 5개의 문자 a, b, b, b, c의 나열 방법 수는 $\frac{5!}{3!}$

순열

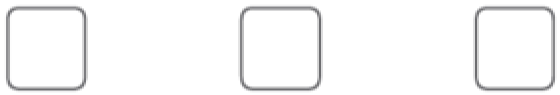
다음과 같은 도로망이 있을 때, A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 몇 가지인지를 살펴보자.



풀이 오른쪽으로 한 구간 이동하는 것을 x, 위로 한 구간 이동하는 것을 y라고 하면, A에서 B로의 최단 거리의 길은 4개의 x와 3개의 y를 사용하게 된다. 이 경우에 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 x가 4개, y가 3개이므로 $\frac{7!}{4!\times3!}=35$가지이다.

a, b, c, d, e라는 5개의 문자 중에서 서로 다른 3개의 문자를 나타낼 수 있는 경우의 수를 계산해보자.

풀이 3개의 문자를 다음과 같이 3개의 상자로 나타낸다고 하자.



첫 번째 문자는 5가지 방법으로 선택될 수 있고, 두 번째 문자는 4가지, 세 번째 문자는 3가지 방법으로 선택될 수 있다.

$\boxed{5}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$

따라서 서로 다른 3개의 문자를 나타낼 수 있는 경우의 수는 $5\times4\times3=60$가지가 된다. 이것은 ${}_5P_3=60$과 같다.

조합

정의 ⑨-5 서로 다른 n개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택할 때, 이것을 n개의 원소에서 r개를 택하는 조합(combination)이라 하고, 그 조합의 수를 ${}_nC_r$과 같이 나타낸다.

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}{r\times(r-1)\times(r-2)\times\cdots\times3\times2\times1} $$

$$ = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0<r\le n) $$

예를 들면, a, b, c, d로부터 3개의 문자를 순서에 관계없이 선택한다면 다음과 같은 4개의 경우가 있다. 이것을 순열 기호로 나타내면 ${}_4C_3 = 4$가 된다.

abc, abd, acd, bcd

남자 5명과 여자 4명이 있을 때, 이 중에서 남자 3명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수는 몇 가지가 있는지 살펴보자.

풀이 남자 5명 중 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3$가지이고, 여자 4명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2$이므로 ${}_5C_3\times{}_4C_2 = 10\times6 = 60$가지이다.

주머니에 크기가 서로 다른 3개의 빨간 공과 4개의 흰 공이 들어 있을 때, 다음을 구해보자.

(1) 이 주머니에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수

(2) 빨간 공 2개와 흰 공 3개를 뽑는 경우의 수

풀이 (1) 전체 7개의 공에서 3개의 공을 뽑는 경우이므로 ${}_7C_3 = 35$가지이다.

(2) 3개의 빨간 공 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$가지이고, 4개의 흰 공 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$가지이므로, 구하는 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_4C_3 = 3\times4 = 12$가지이다.

조합

예제 12-16

남성회원 13명, 여성회원 10명이 모인 동아리에서 대표자 그룹을 뽑으려고 한다.

(1) 남성 3명, 여성 3명이 뽑힐 경우는 몇 가지인가?

(2) 5명의 대표를 뽑았을 때, 남성회원 또는 여성회원이 적어도 1명이 포함되는 경우는 몇 가지인가?

(3) 6명을 뽑을 때, A 남성회원과 B 여성회원이 동시에 포함되는 경우는 몇 가지인가?

풀이

(1) 남성회원이 3명 뽑힐 경우와 여성회원이 3명 뽑힐 경우를 곱의 법칙으로 연산한다.

① 남성회원 13명 중 3명이 뽑힐 경우의 수는 ${}_{13}C_3$

② 여성회원 10명 중 3명이 뽑힐 경우의 수는 ${}_{10}C_3$

$$\therefore\ {}_{13}C_3 \times {}_{10}C_3 = \frac{{}_{13}P_3}{3!} \times \frac{{}_{10}P_3}{3!} = \frac{13!}{3!(13-3)!} \times \frac{10!}{3!(10-3)!} = 34320\text{가지}$$

(2) 모든 조합 중에서 대표자 그룹이 모두 여성이거나 모두 남성인 경우를 제외한다.

① 전체 23명으로 구성할 수 있는 대표자 그룹의 경우의 수는 ${}_{23}C_5$

② 남성회원 13명 중 대표자 그룹으로 5명이 뽑힐 경우의 수는 ${}_{13}C_5$

③ 여성회원 10명 중 대표자 그룹으로 5명이 뽑힐 경우의 수는 ${}_{10}C_5$

$$\therefore\ {}_{23}C_5 - ({}_{13}C_5 + {}_{10}C_5) = \frac{{}_{23}P_5}{5!} - \left(\frac{{}_{13}P_5}{5!} + \frac{{}_{10}P_5}{5!}\right)$$

$$= \frac{23!}{5!(23-5)!} - \left(\frac{13!}{5!(13-5)!} + \frac{10!}{5!(10-5)!}\right)$$

$$= 33649 - (1287 + 252) = 32110\text{가지}$$

(3) 6명 중 A남성 회원과 B여성 회원이 포함된 경우이므로 나머지 21명 중 4명을 뽑는 조합을 구한다.

$$\therefore\ {}_{21}C_4 = \frac{{}_{21}P_4}{4!} = \frac{21!}{4!(21-4)!} = 5985\text{가지}$$

조합

정의 ⑨-6

$(a+b)^n$을 전개하면 다음과 같은 식이 나오는데, 이것을 이항 정리(binomial theorem)라 하고, 이때 ${}_nC_r$을 이항 계수(binomial coefficient)라고 한다.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r} b^r$$

예제 12-22

다음 식을 이항정리를 이용해 전개하라.

(1) $(a+b)^6$　　(2) $(x+2)^4$　　(3) $(3a-2b)^7$

풀이

(1) $(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} {}_6C_k a^{6-k} b^k$

정리 ⑨-1

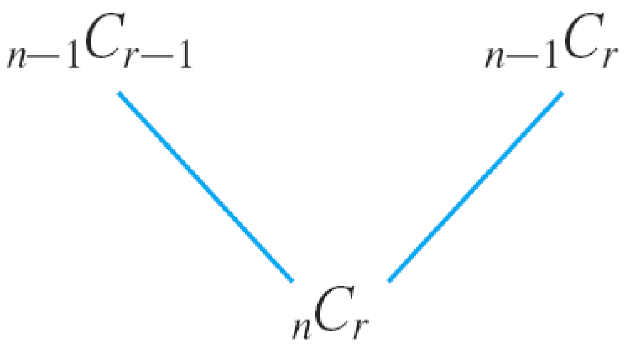
파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)에서는 이항 계수가 다음과 같이 만들어진다.

$${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$$

조합

파스칼의 삼각형은 다음과 같이 설명될 수 있는데, 이를 통하여 이항 계수를 쉽게 계산할 수 있음

1) 각 행에 있는 첫 번째 숫자와 마지막 숫자는 1임
2) 삼각형 안의 다른 숫자들은 파스칼의 삼각형과 같이 모두 그 숫자 위로부터 연결된 두 수들을 더함으로써 구해질 수 있음



〈그림 9.1〉 파스칼의 삼각형

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a + b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$	1 6 15 20 15 6 1

〈그림 9.2〉 파스칼의 삼각형 예

확률과 통계

- 확률이란 어떤 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것임
- 사건 A가 일어날 경우의 수를 전체의 경우의 수로 나눈 값임

정의 9−7

확률에 있어서 기본적인 법칙은 다음과 같다.

(1) 어떤 사건 A에 대하여 $0 \le P(A) \le 1$

(2) 전사건 S의 확률 $P(S) = 1$

(3) 공사건 ϕ의 확률 $P(\phi) = 0$

(4) 사건 A가 일어날 확률과 사건 A의 여사건 A^c가 일어날 확률 사이의 관계는 다음과 같다.

$$P(A) + P(A^c) = 1, \quad P(A^c) = 1 - P(A)$$

정의 9−8

변수 X가 취할 수 있는 모든 값이 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n$이고 X가 이들 값을 취할 확률 $p_1, p_2, p_3, p_4, \cdots, p_n$이 정해져 있을 때, 변수 X를 확률 변수라고 한다. 또한 확률 변수 X가 이산적인 값을 취할 때 이러한 확률을 이산적 확률(discrete probability)이라고 한다.

예를 들어, 한 개의 주사위를 던져서 나타나는 수를 X라 하면 X가 취할 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 $P(x \le 2)$는 X가 1 또는 2의 값을 취하는 확률을 뜻한다.

확률과 통계

정의 9-10

확률 변수 X의 확률 분포가 다음과 같을 때,

$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n$을 X의 기대값 또는 평균이라 하고,

$E(X)$ 또는 m으로 나타낸다.

정의 9-11

확률 변수 X의 평균이 m일 때 $E((X-m)^2)$을 X의 분산(variance)이라 하고, $V(X)$ 또는 $\sigma^2(X)$로 나타낸다. 또한 분산의 양의 제곱근을 표준 편차(standard deviation)라 하고, $\sigma(X)$로 나타낸다. 즉,

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$$

$$= (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + (x_3 - m)^2 p_3 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

확률과 통계

주사위를 하나 던질 때 나오는 숫자를 확률 변수 X라고 할 때 X의 평균, 분산, 표준 편차를 각각 구해보자.

풀이 주사위 하나를 던질 때 나오는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 인데, 확률 변수를 X라 하면 X는 1부터 6 사이의 값을 가지게 된다. 이에 대응하는 확률 분포는 모든 경우에 $\frac{1}{6}$이 된다. 따라서 평균 m은

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6}$$

$$= \frac{7}{2}$$

그리고 분산은

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i = \left\{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{7}{2}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(4-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(5-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(6-\frac{7}{2}\right)^2\right\} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{35}{12}$$

표준 편차는

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6}$$

이 된다.

확률과 통계

정리 9-2

베이즈의 정리(Bayesian theorem)는 다음과 같다. 표본 공간이 n에서 서로 다른 배반적인 사건 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 중 하나는 반드시 일어난다고 할 때, 임의의 사건 A에 대해,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\cdot P(A|B_j)} \quad (\text{단, } 1 \le i \le n)$$

가 성립한다. 이때, $P(B_i)$를 사상 B_i의 사전 확률(prior probability), $P(B_i|A)$를 사후 확률(posterior probability)이라고 한다.

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B_i) = P(A)P(B_i|A)$$

$$P(A|B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B_i) = P(B_i)P(A|B_i)$$

확률과 통계

- **Example**: Suppose that one person in 100,000 has a particular disease. There is a test for the disease that gives a positive result 99% when given to someone with the disease. When given to someone without the disease, 99.5% of the time it gives a negative result. Find

  a) the probability that a person who test positive has the disease.
  b) the probability that a person who test negative does not have the disease.

$$p(D) = 1/100,000 = 0.00001 \quad p\left(\overline{D}\right) = 1 - 0.00001 = 0.99999$$

$$p\left(E \mid D\right) = .99 \quad p\left(\overline{E} \mid D\right) = .01 \quad p\left(E \mid \overline{D}\right) = .005 \quad p\left(\overline{E} \mid \overline{D}\right) = .995$$

$$\begin{aligned} p\left(D \mid E\right) &= \frac{p\left(E \mid D\right) p\left(D\right)}{p\left(E \mid D\right) p\left(D\right) + p\left(E \mid \overline{D}\right) p\left(\overline{D}\right)} \\ &= \frac{\left(0.99\right)\left(0.00001\right)}{\left(0.99\right)\left(0.00001\right) + \left(0.005\right)\left(0.99999\right)} \\ &\approx 0.002 \end{aligned}$$

재귀적 정의

정의 ⑨-13 재귀적 정의(recursive definition)란 수학적 귀납법에서와 같이 첫 번째 요소가 정의되고, $n+1$번째의 요소는 바로 앞의 n번째와 그 이하의 요소와의 관계로서 정의될 경우를 말하며, 재귀적 관계(recurrence relation)로 표현된다.

재귀적 정의의 가장 간단한 예로는 정수의 계승(factorial)을 들 수 있음

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, 1 \\ n * (n-1)! & \text{otherwise} \end{cases}$$

재귀적 정의를 적용하면

$$\begin{aligned} 3! &= 3 * 2! \\ &= 3 * 2 * 1! \\ &= 3 * 2 * 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

여기서 잠깐!! 재귀(recursion)는 순환 또는 되부름이라고도 불리는데, 재귀적 관계는 이산수학과 컴퓨터 프로그램의 응용에 많이 쓰인다.

재귀적 정의

(1) 피보나치 수(Fibonacci numbers)

정의 9−14 피보나치 수(Fibonacci numbers)는 다음과 같이 재귀적 관계식으로 정의된다.

(1) $Fib(0) = 0,\ Fib(1) = 1$

(2) $Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2),\ n = 2, 3, 4, \cdots$

피보나치 수를 트리를 이용하여 구하면 보다 명확하게 이해됨

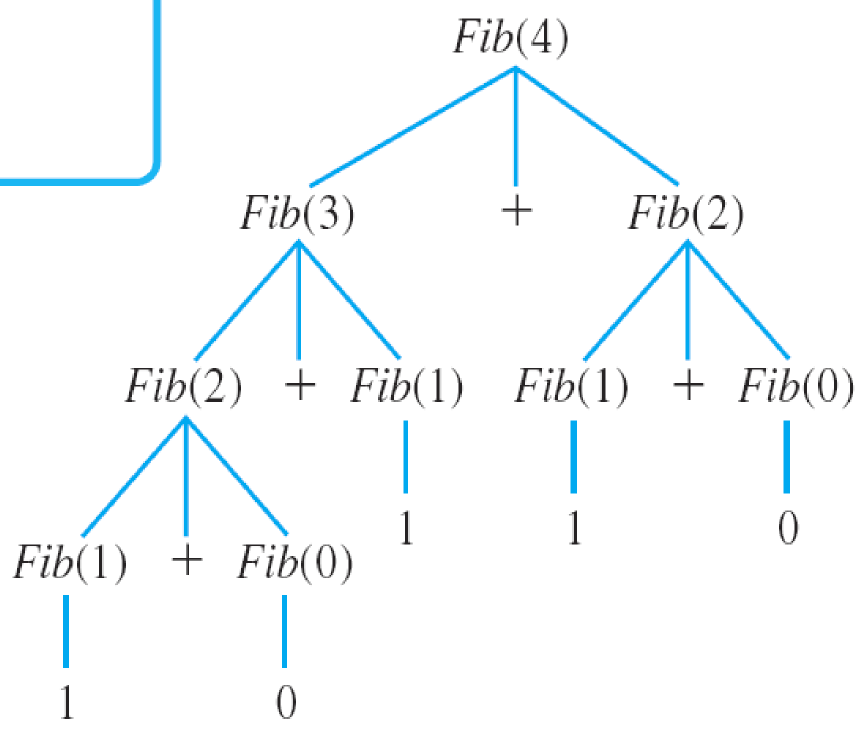
$$Fib(2) = Fib(1) + Fib(0) = 1 + 0 = 1$$

$$Fib(3) = Fib(2) + Fib(1) = 1 + 1 = 2$$

$$Fib(4) = Fib(3) + Fib(2) = 2 + 1 = 3$$

$$Fib(5) = Fib(4) + Fib(3) = 3 + 2 = 5$$

$$Fib(6) = Fib(5) + Fib(4) = 5 + 3 = 8$$

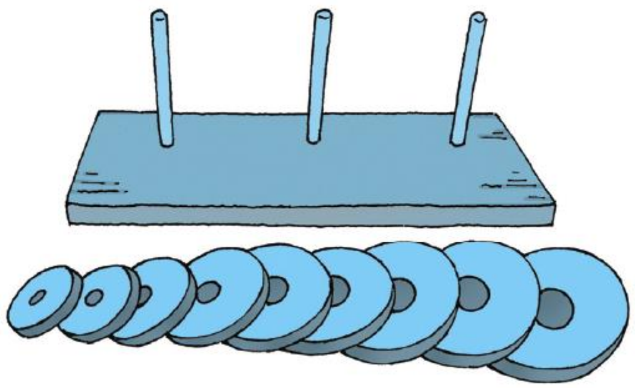


〈그림 9.7〉 $Fib(4)$의 재귀적 계산

재귀적 정의

(2) 하노이 탑(Tower of Hanoi)

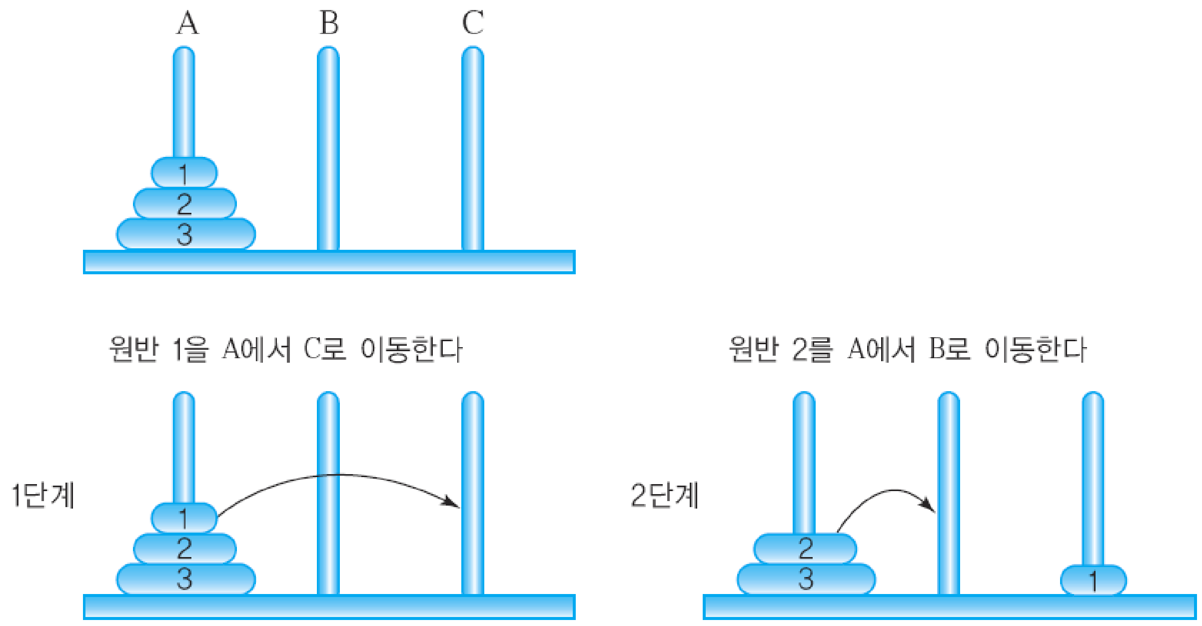
- 하노이 탑 문제는 각기 다른 크기의 원반들과 판 위에 세워진 세 개의 막대로 구성됨
- 이 원반들은 처음에 바닥에 가장 큰 원반이 있는 크기 순으로 놓임
- 하노이 탑 문제의 규칙은 원반들이 한 막대에서 다른 막대로 한 번에 하나씩 이동할 수 있으며 작은 원반 위에 큰 것이 놓일 수 없도록 하는 것임
- 중간의 막대를 임시적으로 이용할 수 있으나 위의 규칙들을 지켜야 함

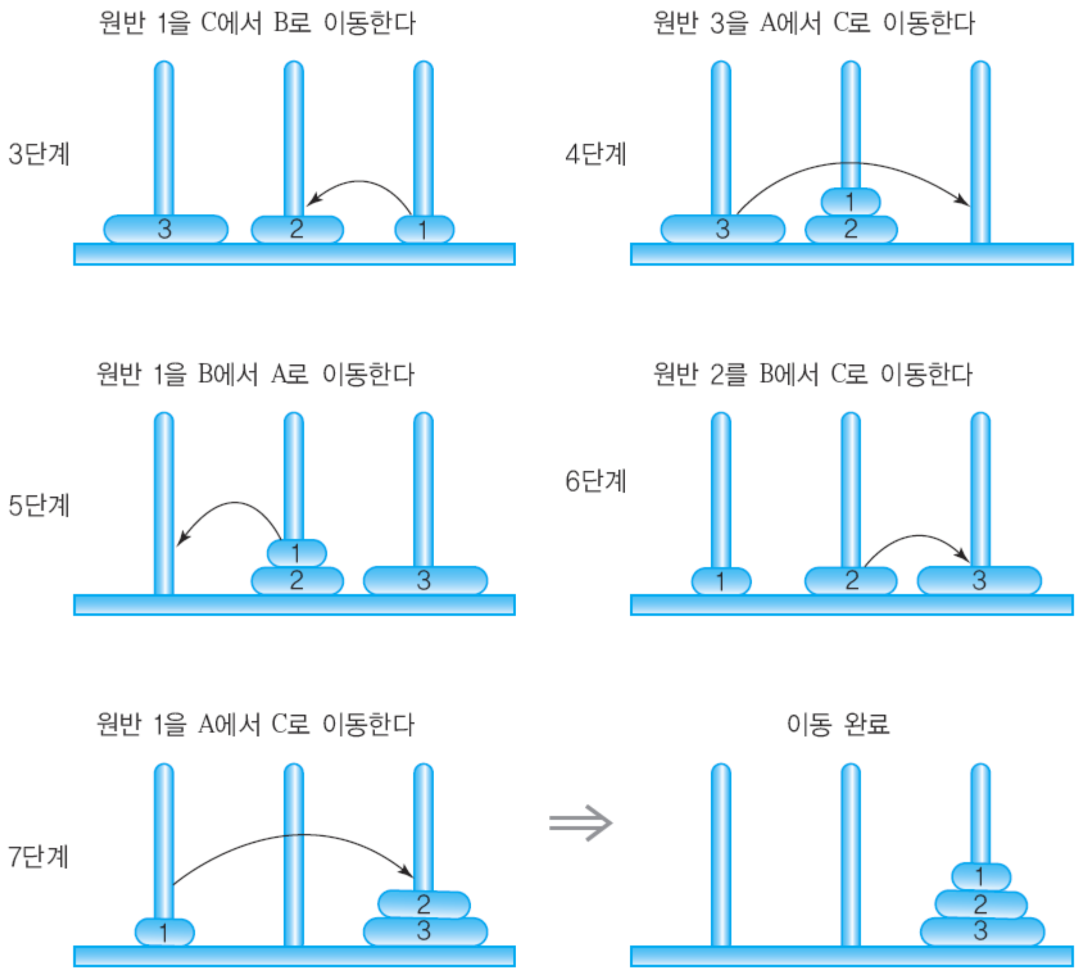


재귀적 정의

(2) 하노이 탑(Tower of Hanoi)

하노이 탑의 문제 해결은 가장 큰 원반이 바닥에 있는 순서로 첫 번째 막대 A에 쌓여 있는 세 개의 원반을 세 번째 막대 C로 옮기는 것과 같은 과정을 거침





〈그림 9.9〉 3개의 원반을 가진 하노이 탑의 이동

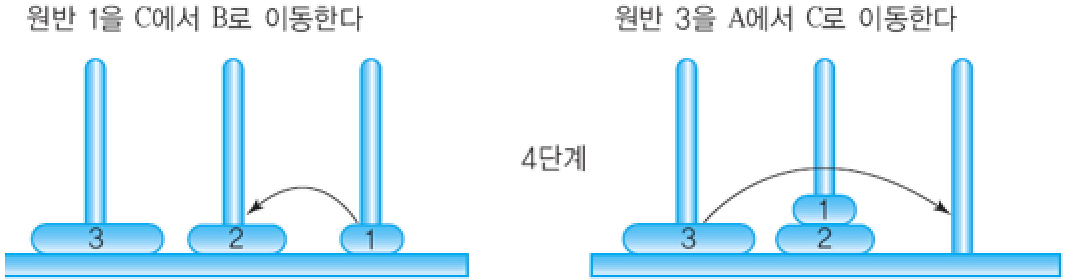
재귀적 정의

(2) 하노이 탑(Tower of Hanoi)

```
#include<stdio.h>

void hanoi_tower(int n, char from, char tmp, char to)
{
   if( n == 1)
      printf("원반 1을 %c에서 %c로 옮긴다. \n", from, to);
   else
   {
      hanoi_tower(n-1, from, to, tmp);
      printf("원반 %d을 %c에서 %c으로 옮긴다. \n", n, from, to);
      hanoi_tower(n-1, tmp, from, to);
   }
}

int main(void)
{
   int n;

   printf("구하려는 원반의 개수를 입력하세요 : ");
   scanf("%d", &n);

   printf("원반이 %d개 있을 때 하노이 탑의 결과\n\n", n);
   hanoi_tower(n, 'A', 'B', 'C');
}
```

[프로그램 9.3] 하노이 탑 문제 해결을 위한 재귀 프로그램

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$



$$H_n = 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2H_{n-2} + 2 + 1$$

$$H_n = 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

$$\vdots$$

$$H_n = 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1$$

$$H_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1$$

$$H_n = 2^n - 1$$