Discrete Mathematics

Lecture 2. 논리와 명제 1

- Lecturer: Suhyung Park, PhD

- Office: 공과대학 7호관 431호
- Contact: 062-530-1797
- E-mail: suhyung@jnu.ac.kr

* 본 강의 자료는 생능출판사와 한빛아카데미 "PPT 강의자료"를 기반으로 제작되었습니다.

강의 내용

1) 논리와 명제
2) 논리 연산
3) 항진 명제와 모순 명제
4) 논리적 동치 관계
5) 추론
6) 술어 논리
7) 논리용 언어 – Prolog
8) 응용

논리와 명제

- **논리**

  주어진 문제를 객관적으로 명확한지의 여부와 사고의 법칙을 체계적으로 추구하여 분석

  컴퓨터 회로 설계, 컴퓨터 프로그램 작성, 프로그램의 정확성 검증 등의 많은 분야에서 사용

- **명제**

  참이나 거짓을 객관적이고 명확하게 구분할 수 있는 문장이나 수학적 식

  명제가 참 또는 거짓의 값을 가질 때 그 값을 명제의 진리값 (truth value)이라고 함

  명제의 진리 값은 참일 때는 T(true), 거짓일 때는 F(false)로 각각 표시함

논리와 명제

예제 ②-1 다음의 문장이나 식에서 명제를 찾아보고, 명제인 경우 그것의 진리값을 판별해보자.

(1) 바나나는 맛있다.

(2) $3x + 5y = 7$

(3) 28은 4의 배수이다.

(4) 지금 어디로 가는 중입니까?

풀이 (1), (2), (4)는 참이나 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 될 수 없다. (3)은 참이기 때문에 명제이고 진리값은 T이다.

예제 ②-2 다음의 문장들은 모두 명제이다. 이 명제들의 참, 거짓을 판별해보자.

(1) $6 < 4$

(2) 유채꽃은 노란색이다.

(3) 3×7의 값은 홀수이다.

(4) 공기는 H_2O로 표현된다.

풀이 (1)과 (4)는 거짓이고, (2)와 (3)은 참이다.

논리 연산

정의 ❷-2 하나의 문장이나 식으로 구성되어 있는 명제를 **단순 명제(simple proposition)**라 하고, 여러 개의 단순 명제들이 논리 연산자들로 연결되어 만들어진 명제를 **합성 명제(composition proposition)**라고 한다.

예를 들어, '장미꽃은 빨갛다'와 '유채꽃은 노랗다'는 각각 단순 명제이고, '장미꽃은 빨갛고 유채꽃은 노랗다'는 합성 명제이다.

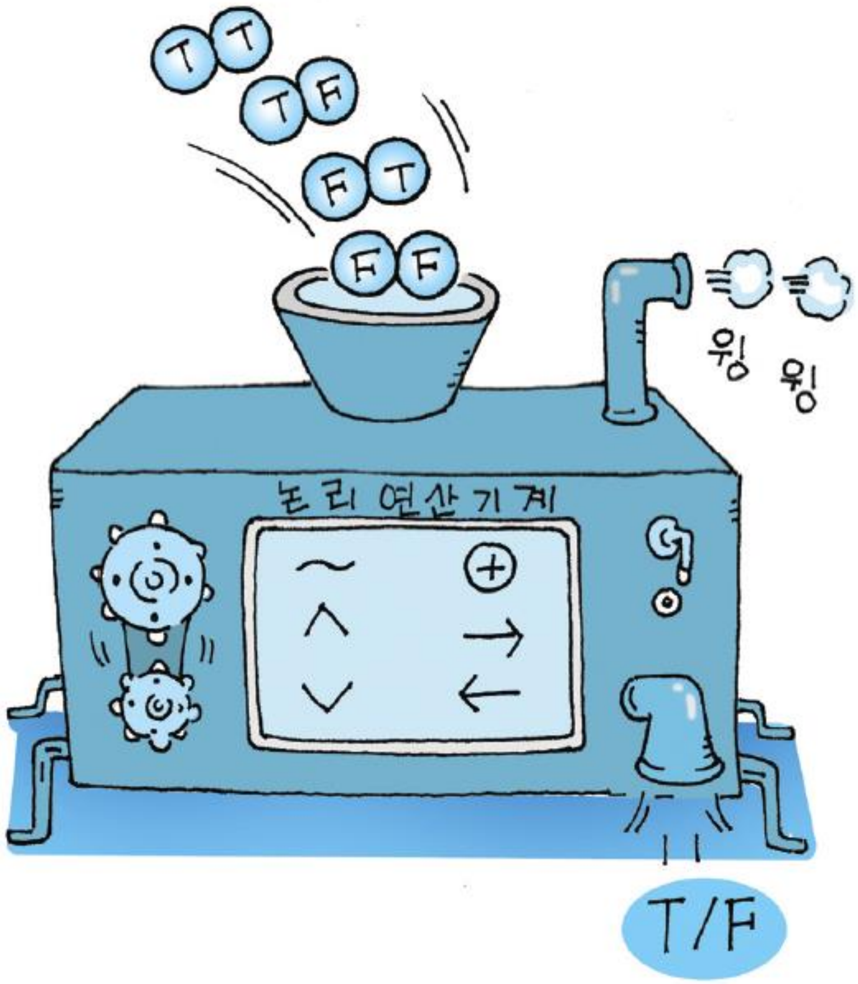
- **논리 연산자(Logical Operators)**

  단순명제들을 연결시켜 주는 역할: V, Λ, ~,…

- **합성 명제의 진리 값**

  - 그 명제를 구성하는 단순 명제의 진리 값과 논리 연산자의 특성에 따라 값이 정해짐
  - 단순 명제의 진리 값은 그 명제가 참이냐 거짓이냐에 따라 T 또는 F로 표시함
  - 합성 명제의 진리 값은 복잡한 경우가 많음
  - 진리 표(truth table)를 사용하여 단계적으로 연산

논리 연산



〈표 2.1〉 논리 연산자의 이름과 기호

연산자의 이름	기호	연산자의 의미
부정	~	NOT
논리곱	∧	AND
논리합	∨	OR
배타적 논리합	⊕	Exclusive OR
조건	→	if … then
쌍방 조건	↔	if and only if (iff)

논리 연산

부정(Negation)

- 임의의 명제 p가 주어졌을 때 그 명제에 대한 부정(negation)은 명제 p의 반대되는 진리값을 가짐
  - 기호로는 $\sim p$라 쓰고 ‘not p 또는 p가 아니다’라고 함
  - p의 진리값이 참이면 $\sim p$의 진리 값은 거짓임
  - p의 진리값이 거짓이면 $\sim p$의 진리 값은 참임

예제 2–4 p가 명제일 때 진리표를 이용하여 $\sim(\sim p)$의 진리값이 p의 진리값과 같음을 보이자.

풀이 p와 $\sim(\sim p)$에 대한 진리표는 다음과 같다.
따라서 p와 $\sim(\sim p)$의 진리값은 같다.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

같은 값

논리 연산

논리곱(Conjunction)

- 임의의 두 명제 p, q가 '그리고(AND)'로 연결되어 있을 때 명제 p, q의 논리곱은 $p \wedge q$로 표시함
- '*p and q* 또는 *p* 그리고 *q*'라고 함
- 두 명제의 논리곱 $p \wedge q$는 두 명제가 모두 참인 경우에만 참이라고 함
- 그렇지 않으면 거짓의 진리 값을 가짐

〈표 2.3〉 논리곱에 대한 진리표

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

논리 연산

논리합(Disjunction)

- 임의의 두 명제 *p*, *q*가 '또는(OR)'으로 연결되어 있을 때 명제 *p*, *q*의 은 $p \vee q$로 표시함
- '*p* or *q*'나 *p* 또는 *q*'라고 표현함
- 두 명제의 논리합 $p \vee q$는 두 명제가 모두 거짓인 경우에만 거짓의 진리값을 가짐

〈표 2.4〉 논리합에 대한 진리표

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

논리 연산

예제 2-5 다음의 합성 명제를 단순 명제들로 분리하여 단순 명제의 진리값을 구하고, 앞의 진리표를 이용하여 논리곱으로 이루어진 합성 명제의 진리값을 구해보자.

(1) 서울은 대한민국의 수도이고, 런던은 영국의 수도이다.

(2) $3 > 2$이고, $3 \times 2 = 5$이다.

(3) 사과는 과일이고, 시금치는 채소이다.

풀이 (1) '서울은 대한민국의 수도이다' 와 '런던은 영국의 수도이다' 가 된다. 두 단순 명제의 진리값이 모두 T이므로 주어진 합성 명제의 진리값도 T이다.

(2) '$3 > 2$' 와 '$3 \times 2 = 5$' 이다. 각 단순 명제의 진리값은 T와 F이므로 합성 명제의 진리값은 F이다.

(3) '사과는 과일이다' 와 '시금치는 채소이다' 이다. 이 명제들의 진리값은 모두 T이므로 합성 명제의 진리값 또한 T이다.

예제 2-6 다음의 합성 명제를 단순 명제로 구분하여 단순 명제의 진리값을 구하고, 앞의 진리표를 사용하여 논리합으로 이루어진 합성 명제의 진리값을 구해보자.

(1) 서울은 대한민국의 수도이거나, 런던은 영국의 수도이다.

(2) $3 > 2$ 또는 $3 \times 2 = 5$이다.

(3) 사과는 과일이거나, 시금치는 채소이다.

풀이 (1) 두 단순 명제의 진리값이 각각 T이므로 합성 명제의 진리값도 T이다.

(2) 한 단순 명제는 T이고 다른 단순 명제는 F이므로 합성 명제는 T이다.

(3) 두 단순 명제의 진리값은 T이므로 합성 명제의 진리값도 T이다.

논리 연산

배타적 논리합(Exclusive OR)

- 임의의 두 명제 p, q의 $p \oplus q$로 표시함
- '익스클루시브 OR(Exclusive OR) 또는 XOR'이라고 읽음
- 진리 값은 p와 q 두 명제 중에서 하나의 명제가 참이고 다른 하나의 명제가 거짓일 때 참의 진리 값을 가지고, 그렇지 않으면 거짓의 진리 값을 가짐

〈표 2.5〉 배타적 논리합에 대한 진리표

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

논리 연산

조건(Implication or conditional statement)

- 임의의 명제 p, q의 조건 연산자는 $p \rightarrow q$로 표시함
- 'p이면 q이다'라고 읽음
- P가 참이고 q가 거짓일 경우에 거짓이며, 그 외 다른 경우에는 모두 참

〈표 2.6〉 조건에 대한 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

"If I am elected, then I will lower taxes."

=> It is only when I am elected but does not lower taxes that voters can say that I have broken the campaign pledge

논리 연산

쌍방 조건 (bi-implications or bi-conditional statement)

- 임의의 명제 p, q의 쌍방 조건은 $p \leftrightarrow q$로 표시함
- 'p이면 q이고, q이면 p이다'라고 함
- 진리 값은 p, q가 모두 참이거나 거짓일 때 참의 값을 가지고, 그 외에는 거짓의 값을 가짐

〈표 2.6〉 조건에 대한 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

〈표 2.7〉 쌍방 조건에 대한 진리표

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p \rightarrow q$ and $q \rightarrow p$ 와 같은 의미

논리 연산

예제 2-7 다음의 명제에 대하여 함축의 진리값을 구해보자.

(1) 바다가 육지라면, 런던은 영국의 수도이다.
(2) $3+4>5$이면, $3>5$이다.
(3) 유채꽃이 빨갛다면, 바다가 육지이다.

풀이 (1) p : '바다가 육지이다' 는 F이고, q : '런던은 영국의 수도이다' 는 T이다. 그러므로 명제 $p \rightarrow q$의 진리값은 T이다.

(2) p : '$3+4>5$' 는 T이고, q : '$3>5$' 는 F이다. 그러므로 명제 $p \rightarrow q$의 진리값은 F이다.

(3) p : '유채꽃이 빨갛다' 는 F이고, q : '바다가 육지이다' 는 F이다. 그러므로 합성 명제 $p \rightarrow q$의 진리값은 T이다.

예제 2-8 합성 명제 $\sim(p \wedge \sim q)$의 진리값을 구해보자.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

위의 표에서와 같이 변수가 2개일 경우에는 4개의 행이 필요함을 알 수 있다. 그리고 각 진리값들은 앞에서 정의한 $\wedge$, $\vee$, $\sim$ 등의 연산을 순서에 따라 적용하여 구할 수 있으며, 마지막 열에 있는 것이 구하고자 하는 합성 명제의 진리값이다.

논리 연산

예제 2-9 p, q, r이 명제일 때 다음의 합성 명제에 대한 진리표를 만들어보자.

$$p \vee (q \wedge r)$$

풀이 변수가 3개일 때는 2^3, 즉 8개의 행이 필요함을 알 수 있다. 이 경우에 T와 F의 조합을 다음의 표와 같은 순서로 나타내는 것이 효율적이다. 여기서는 $q \wedge r$ 을 먼저 연산하고, $p \vee (q \wedge r)$을 그 후에 연산한다.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

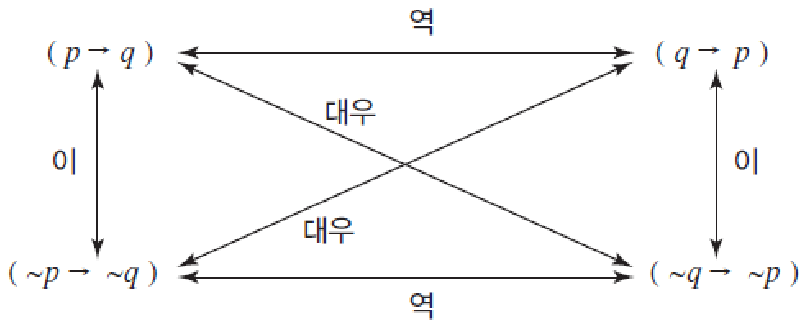
논리 연산

명제 $p \to q$에 대하여

$q \to p$를 역(converse)

$\sim p \to \sim q$를 이(inverse)

$\sim q \to \sim p$를 대우(contrapositive)



(명제의 역, 이, 대우의 상호 관계)

〈표 2.8〉 역, 이, 대우 간의 관계에 대한 진리표

				(명제)	(역)	(이)	(대 우)
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

같은 값

같은 값

논리 연산

- Construct a truth table for $p \vee q \rightarrow \neg r$

p	q	r	¬r	p ∨ q	p ∨ q → ¬r
T	T	T	F	T	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

논리 연산

- Construct a truth table for $(p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

p	q	~q	p ∨ ~q	p ∧ q	(p ∨ ~q) → (p ∧ q)
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

항진 명제와 모순 명제

정의 ②-3 합성 명제에서 그 명제를 구성하는 단순 명제들의 진리값에 관계없이 그 합성 명제의 진리값이 항상 참(T)의 값을 가질 때 그 명제를 **항진 명제(tautology)**라고 한다.

예제 ②-13 p가 단순 명제일 때 $p \vee (\sim p)$는 항진 명제이고, $p \wedge (\sim p)$는 모순 명제임을 보이자.

풀이 합성 명제 $p \vee (\sim p)$와 $p \wedge (\sim p)$에 대한 진리표를 나타내면 다음과 같다.

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$	$p \wedge (\sim p)$
T	F	T	F
F	T	T	F

$p \vee (\sim p)$의 진리값은 항상 참이므로 항진 명제이고, $p \wedge (\sim p)$의 진리값은 항상 거짓이므로 모순 명제이다.

여기서 항진 명제의 부정은 모순 명제임을 알 수 있고, 모순 명제의 부정은 항진 명제임을 알 수 있다.

항진 명제와 모순 명제

정의 2−4 합성 명제에서 그 명제를 구성하는 단순 명제들의 진리값에 관계없이 그 합성 명제의 진리값이 항상 거짓(F)의 값을 가질 때 그 명제를 **모순 명제(contradiction)**라고 한다.

예제 2−14 $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$가 모순 명제임을 보이자.

풀이 진리표를 만들었을 때 $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$의 진리표가 p와 q의 모든 값에 대해서 거짓이므로 모순 명제이다.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F