Discrete Mathematics

Lecture 3. 집합론과 디지털 수의 세계

- Lecturer: Suhyung Park, PhD

- Office: 공과대학 7호관 431호
- Contact: 062-530-1797
- E-mail: suhyung@jnu.ac.kr

* 본 강의 자료는 생능출판사와 한빛아카데미 “PPT 강의자료”를 기반으로 제작되었습니다.

강의 내용

1) 집합의 표현
2) 집합의 연산
3) 집합류와 멱집합
4) 집합의 분할
5) 수의 표현과 진법의 변환
6) 2진수의 덧셈과 뺄셈

집합의 표현

정의 ③-1 집합(Set)이란 수학적 성질을 가지는 객체들(objects)의 모임이다. 집합은 정확하게 정의되어야 하며, 어떤 객체가 그 집합에 속하는지 아닌지를 분명히 구분할 수 있어야 한다.

- 집합을 표시할 때는 알파벳 대문자 A, B, C, $\cdots$, Z 등으로 표시함
- 집합을 구성하는 원소(element 또는 member)는 소문자 a, b, c, $\cdots$, z 등으로 표시함
- 집합에 속한 원소들로 구성되어 있는데, 집합을 S라하고 하나의 원소를 a라 하면, $a \in S$는 a가 집합 S의 원소임을 나타냄
- $a \notin S$는 a가 집합 S의 원소가 아님을 나타냄

집합의 표현

- **집합을 표현하는 방법**

1) 원소 나열법

- 집합의 원소들을 { } 사이에 하나씩 나열하는 방법
  - **예를 들어, 1부터 5까지의 자연수의 집합을 원소 나열법으로 나타내면 다음과 같다.**
  - **S = {1, 2, 3, 4, 5}**
  - **여기서 의미가 명확한 경우 모든 원소를 나열하는 대신에 …을 이용**

- {a, b, …, z}는 소문자 알파벳의 집합을 의미함

집합의 표현

2) 조건 제시법

- 집합의 원소들이 가지고 있는 특정한 성질을 기술하여 나타내는 방법임
- 조건 제시법의 표현은 S ={x | p(x)}임
- x는 원소를 대표하는 변수이고, p(x)는 원소들이 가지고 있는 성질임
  - **예를 들어, 1부터 5까지의 자연수의 집합을 조건 제시법으로 나타내면**
  - **다음과 같다.**
  - **S = {x | x는 자연수이고1≤x≤5}**

집합의 표현

예제 ③-1

다음과 같이 조건 제시법으로 나타내어진 집합을 원소 나열법으로 표현해보자. 공집합일 경우에는 ϕ로 나타내어보자.

(1) $\{x \mid x \in N,\ x^2 = 9\}$

(2) $\{y \mid y \in Z,\ 3 < y < 7\}$

(3) $\{n \mid n \in Z,\ 3 < |n| < 7\}$

풀이 (1) $\{3\}$　　(2) $\{4,\ 5,\ 6\}$　　(3) $\{-4,\ -5,\ -6,\ 4,\ 5,\ 6\}$

예제 ③-2

다음 집합을 조건 제시법으로 표현해보자.

(1) 0에서 1 사이에 있는 실수의 집합

(2) 20보다 작은 홀수의 집합

(3) $x^2 = x$를 만족시키는 정수의 집합

풀이 (1) $S = \{x \mid x$는 실수이고, $0 \le x \le 1\}$

(2) $A = \{x \mid n$은 정수이고, $x = 2n + 1$이고 $n < 10\}$

(3) $B = \{x \mid x$는 정수이고, $x^2 = x\}$

집합의 표현

▪ 카디날리티 (Cardinality)

- 집합 S 내에 있는 서로 다른 원소들의 개수임
- 집합의 원소 수라 하고 |S| 로 표기함

- **예를 들어, 집합 A={1, 3, 5, 7, 9}의 원소의 개수는 5개, 집합 B={1}의 원소의 개수는 1개, 집합 N={1, 2, 3, ...}의 원소의 개수는 무한이므로 |A| = 5, |B| = 1, |C| = ∞**

정의 3-2 집합 S의 원소의 개수가 유한인 경우, 집합 S를 유한 집합(finite set)이라 하며, 집합 S가 유한 집합이 아니면, 집합 S를 무한 집합(infinite set)이라고 한다.

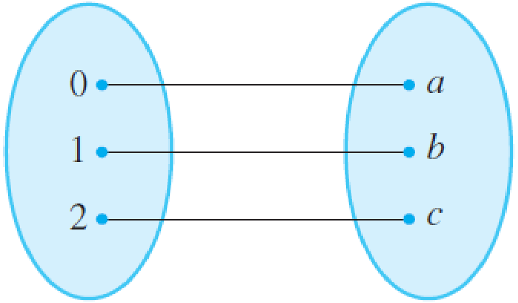
집합의 표현

- 집합 $S1$에서 집합 $S2$로의 일대일 대응인 함수가 존재할 때 $S1$과 $S2$가 같은 카디날리티를 가짐

- 유한 집합인 경우 만약 $S1$이 $S2$의 진부분 집합일 때에는 $S1$과 $S2$는 서로 다른 카디날리티를 가짐

예제 ③-5 집합 $\{0, 1, 2\}$와 $\{a, b, c\}$는 같은 카디날리티를 가지고 있는지를 살펴보자.

풀이 다음 〈그림 3.2〉에서 일대일 대응인 함수가 존재하므로 같은 카디날리티를 가진다.



〈그림 3.2〉 일대일 대응 함수

집합의 표현

'가산적 집합(countable set)' 또는 '가산적으로 무한한 집합(countably infinite set)'

- 정수의 집합과 일대일의 대응 관계에 있는 집합들임

- 유리수들과 알파벳 Σ로부터 만들어지는 유한한 길이의 스트링들의 집합 Σ^* 로 표현함

여기서 잠깐!!

무한 집합들이라고 해서 모두 같은 카디날리티를 가지는 것은 아니다. 모든 정수들의 집합과 모든 실수들의 집합은 일대일로 대응될 수 없다. 이와 같은 구성을 '대각선화'(diagonali-zation)라고 하며, 수학뿐만 아니라 컴퓨터 관련 이론에서도 상당히 중요한 역할을 담당한다. 특히 튜링머신에서 주어진 입력을 인식하는가의 여부를 판단하는 데 있어서 매우 중요하다.

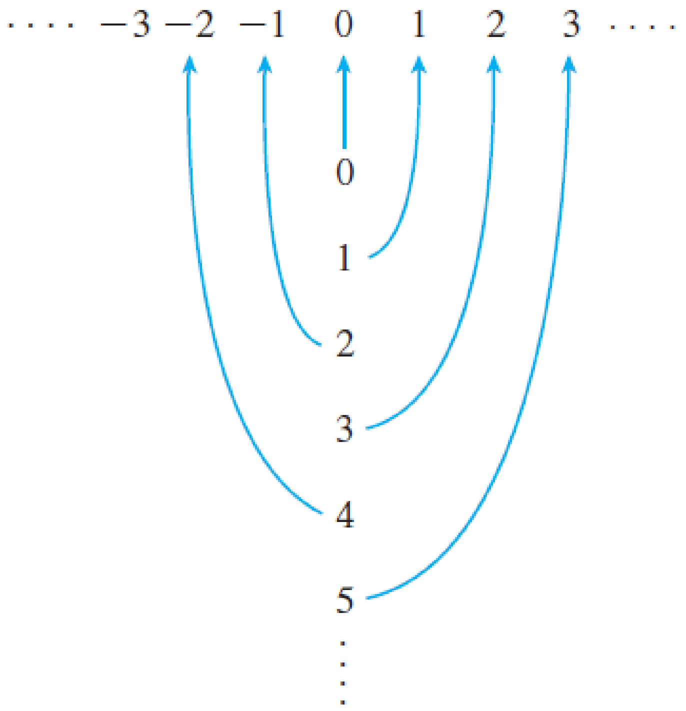
집합의 표현

예제 3-6 자연수의 집합이 가산적으로 무한함을 보이자.

풀이 자연수의 집합과 정수의 집합 사이에는 일대일 대응인 함수 f가 존재한다. 만약 n이 홀수인 경우에는 $f(n) = \mathrm{div}(n, 2) + 1$인 함수가 적용되고 n이 짝수인 경우에는 $f(n) = -\mathrm{div}(n, 2)$의 식이 적용된다. 따라서 정수와 자연수는 〈그림 3.3〉과 같이 일대일의 대응 관계에 있으므로 자연수의 집합은 가산적이다.

여기서 잠깐!! $\mathrm{div}(n, 2)$는 n을 2로 나누어서 정수 부분만을 취하는 값이다. 예를 들어, $\mathrm{div}(1, 2) = 0$이고, $\mathrm{div}(2, 2) = 1$이며, $\mathrm{div}(3, 2) = 1$이 된다.

정의 3-3 집합론에서 관심을 두는 모든 원소의 집합을 전체 집합(universal set)이라 하고 U로 표기한다. 한편 어떠한 원소도 가지지 않는 집합을 공집합(empty set)이라 하며, ϕ 또는 { }로 표시한다.



〈그림 3.3〉 자연수와 정수의 일대일 대응 관계

집합의 표현

정의 ③-4 두 집합 A, B에서 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소에 속하면 '집합 A는 집합 B에 포함된다' 라고 하고 $A \subseteq B$로 표기한다. 이때 집합 A는 집합 B의 **부분 집합(subset)**이라고 한다. 한편, 집합 A가 집합 B의 부분 집합이 아니면 $A \not\subseteq B$로 표기한다. 특히 $A \subseteq B$이고, $A \neq B$인 경우에는 A를 B의 **진부분 집합(proper subset)**이라 하고 $A \subset B$로 표시한다. 만약 A가 B의 진부분 집합이 아닐 경우에는 $A \not\subset B$로 표기한다.

예제 ③-10 집합 $S=\{1, 2, 3\}$의 부분 집합과 진부분 집합을 구해보자.

풀이 집합 S의 부분 집합은 ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$이고, 진부분 집합은 집합 S 자기 자신인 $\{1, 2, 3\}$을 제외한 집합들이다.

집합 S의 원소의 개수가 n개라면 그 집합 S의 부분 집합의 개수는 2^n개이며, 진부분 집합의 개수는 (2^n-1)개이다. 위의 예제에서 집합 S의 부분 집합의 개수는 S의 원소의 개수가 3개이므로 $2^3=8$개이고, 진부분 집합의 개수는 $2^3-1=7$개이다.

집합의 표현

정의 ③-5 전체 집합 U와 그것의 부분 집합 A에서 집합 U에 속하나 A에 속하지 않는 원소들의 집합을 A의 **여집합(complement)**이라고 하며 $\overline{A}$ 또는 A^c로 표시한다.

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U,\ x \notin A\}$$

예제 ③-12 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$가 전체 집합으로 주어지고 그의 부분 집합 A, B, C가 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 5\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로 주어졌을 때 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$를 구해 보자.

풀이 $\overline{A}=\{4, 5\}$,　$\overline{B}=\{1, 2, 4\}$,　$\overline{C}=\phi$

집합의 표현

예제 5-6

집합 $A=\{\{a, b\}, c, \{d\}\}$일 때, 다음 괄호를 채워라.

(1) $\{a, b\}(\quad)A$

(2) $c(\quad)A$

(3) $\{\{d\}\}(\quad)A$

(4) $\{\{a, b\}, c, \{d\}\}(\quad)A$

풀이

(1) $\{a, b\}$는 집합 A의 원소이다. $\therefore \{a, b\} \in A$

(2) c는 집합 A의 원소이다. $\therefore c \in A$

(3) $\{\{d\}\}$는 원소 $\{d\}$를 원소로 갖는 집합으로 집합 A의 진부분집합이다. $\therefore \{\{d\}\} \subset A$

(4) $\{\{a, b\}, c, \{d\}\}$는 집합 A와 상등이다. $\therefore \{\{a, b\}, c, \{d\}\}=A$

집합의 연산

- 벤 다이어그램(Venn Diagram)

  - 주어진 집합들 사이의 관계와 집합의 연산에 대하여 이해하기 쉽도록 이용함
  - 전체 집합 U는 사각형으로 표현함
  - 주어진 집합들은 U의 부분 집합들이므로 사각형 안에 원으로 표현함

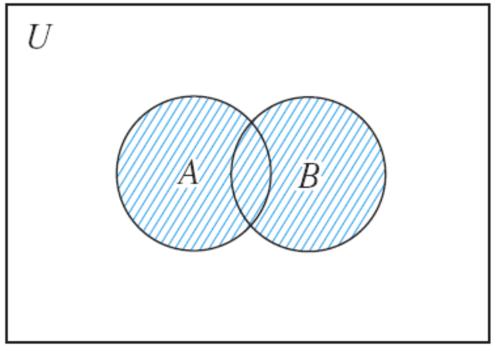
◆ 기본적인 집합의 관계

- (a) $A \subseteq B$
- (b) 집합 A와 집합 B에 공통된 원소가 있을 때
- (c) 집합 A와 집합 B에 공통된 원소가 없을 때

집합의 연산

▪ 합집합(Union) : $A \cup B$

- 집합 A 또는 집합 B에 속하는 모든 원소의 집합, $A \cup B$로 표기함
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



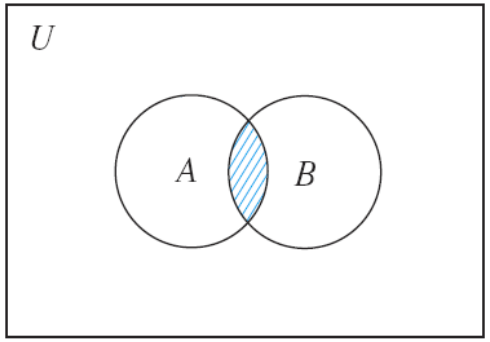
〈그림 3.5〉 합집합 $A \cup B$

예제 3-13 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이고 $B=\{1, 3, 5, 7\}$일 때 합집합 $A \cup B$를 구해보자.

풀이 $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$이다.

집합의 연산

- **교집합(Intersection) : $A \cap B$**
  - 두 집합 A, B에 대하여 이들의 교집합은 집합 A에도 속하고 집합 B에도 속하는 모든 원소의 집합을 말하며, $A \cap B$로 표기함
  - $A \cap B = \{\mathcal{X} | \mathcal{X} \in A \lor \mathcal{X} \in B\}$



〈그림 3.6〉 교집합 A∩B

- **서로 소(Disjoint)**
  - 집합 A와 집합 B가 공통된 원소를 하나도 가지지 않은 경우를 말함

예제 ③-14 $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$, $C=\{3, 4, 5, 6\}$일 때 $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$를 구해보자.

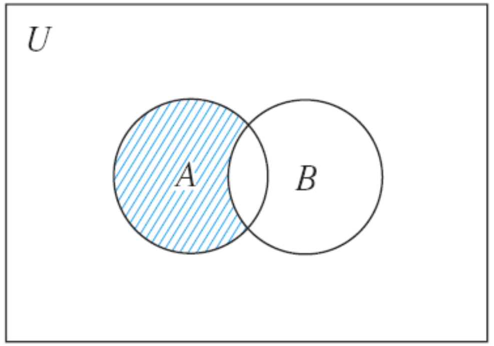
풀이 $A \cap B=\{1, 2\}$, $B \cap C=\{3, 4\}$, $A \cap C=\phi$

집합의 연산

▪ **차집합(Difference) : *A*-*B***

- 두 집합 *A*, *B*에 대하여 이들의 차집합은 집합 *A*에 속하고 집합 *B*에는 속하지 않는 모든 원소들의 집합임

- $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$



〈그림 3.7〉 차집합 $A-B$

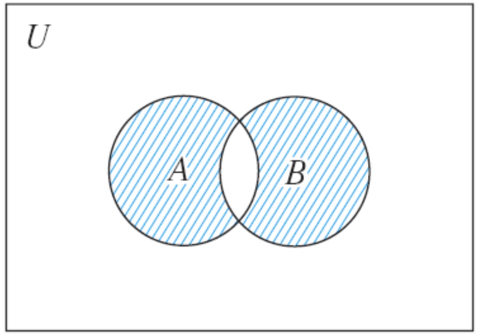
예제 ③-15 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 $B=\{1, 3, 5\}$라고 하면 $A-B$와 $B-A$를 각각 구해 보자.

풀이 $A-B=\{2, 4\}$이고, $B-A=\phi$이다.

집합의 연산

- **대칭 차집합(Symmetric Difference) : *A* ⊕*B***
  - 집합 *A*, *B*에 대하여 이들의 대칭 차집합은 *A* ∪ *B*의 원소 중에서 *A* ∩ *B*에 속하지 않는 모든 원소들의 집합임

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\} \\ &= \{x \mid x \in A - B \vee x \in B - A\} \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} \\ &= \{x \mid x \in ((A \cup B) - (A \cap B))\} \end{aligned}$$



〈그림 3.8〉 대칭 차집합 $A \oplus B$

예제 ❸-16 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$일 때 $A \oplus B$를 구해보자.

풀이 $A-B=\{2, 4\}$이고 $B-A=\{7, 9\}$이므로
$A \oplus B=\{2, 4, 7, 9\}$가 된다.

집합의 연산

▪ 곱집합(Cartesian Product) : $A \times B$

- 순서쌍은 순서로 구분되는 원소들의 쌍으로서 (a, b)와 같이 나타냄
- 순서쌍 (a, b)는 쌍의 원소들 간의 순서에 의해 구분이 되므로 $a \neq b$이면 $(a, b) \neq (b, a)$표현함
- 두 순서쌍이 $(a, b) = (c, d)$이면, $a = c$이고 $b = d$임

정의 3-6

임의의 두 집합 A, B의 곱집합 또는 카티시안 곱(Cartesian product)은 $x \in A$이고 $y \in B$인 모든 순서쌍 (x, y)의 집합을 말하며 $A \times B$로 표기한다.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

이것을 일반적으로 확장하면 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in S_i\}$가 된다.

집합의 연산

예제 ③-17 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$이고 $B=\{a,\ b,\ c\}$라 할 때 $A\times B$를 구해보자.

풀이 $A\times B=\{(1,\ a),\ (1,\ b),\ (1,\ c),\ (2,\ a),\ (2,\ b),\ (2,\ c),\ (3,\ a),\ (3,\ b),$
$(3,\ c)\}$이다.

예제 ③-18 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고, $T=\{2,\ 4\}$일 때 다음의 물음에 답해보자.

(1) $S\times T$에서 순서쌍의 개수는 몇 개인가?

(2) $\{(x,\ y)\mid(x,\ y)\in S\times T,\ x<y\}$의 원소를 나열하여라.

풀이 (1) $4\times 2=8$개

(2) $\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4)\}$

집합의 연산

▪ 집합 연산의 카디날리티

- 집합 S의 카디날리티(cardinality)란 그 집합의 원소의 개수를 나타내며 $|S|$ 로 표기함

예제 3−19

어느 공대에서 이산수학과 C언어 프로그래밍 중 적어도 한 과목을 수강하는 학생이 80명이다. 만약 이산수학을 수강하는 학생이 55명이고, C언어 프로그래밍을 수강하는 학생이 48명이라면, 이 경우 이산수학만 수강하는 학생 수는 몇 명인지를 알아보자.

풀이 이산수학을 수강하는 학생의 집합을 A, C언어 프로그래밍을 수강한 학생의 집합을 B라고 하면

$|A \cup B| = 80$, $|A| = 55$, $|B| = 48$이다.

따라서

$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 55 + 48 - 80 = 23$이다. 그런데

우리가 구하려는 것은 $|A - B|$이므로

$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 55 - 23 = 32$가 된다.

그러므로 이산수학만 수강한 학생 수는 32명이다.

집합의 연산

- 집합 연산의 카디날리티

예제 5-11

컴퓨터과학과에서 졸업 프로젝트 수행을 위해 학생 150명을 대상으로 관심 분야 설문조사를 하였다. 설문조사 결과 네트워크 56명, 보안 30명, 게임 63명, 네트워크와 보안 22명, 네트워크와 게임 17명, 보안과 게임 9명, 어느 분야도 선택하지 않은 사람은 45명이었다. 세 분야를 모두 선택한 학생은 몇 명인가?

풀이

$|\text{네트워크}| = 56,\ |\text{보안}| = 30,\ |\text{게임}| = 63$

$|\text{네트워크} \cap \text{보안}| = 22,\ |\text{네트워크} \cap \text{게임}| = 17,\ |\text{보안} \cap \text{게임}| = 9$

- $|\text{어느 분야도 선택하지 않은 학생}| = |\text{전체 컴퓨터과학과 학생}| - |\text{관심 분야를 선택한 학생}|$
  $= 150 - |\text{네트워크} \cup \text{보안} \cup \text{게임}| = 45$
  $\therefore\ |\text{네트워크} \cup \text{보안} \cup \text{게임}| = 150 - 45 = 105$
- $|\text{네트워크} \cup \text{보안} \cup \text{게임}| = |\text{네트워크}| + |\text{보안}| + |\text{게임}| - |\text{네트워크} \cap \text{보안}|$
  $|\text{네트워크} \cap \text{게임}| - |\text{보안} \cap \text{게임}| + |\text{네트워크} \cap \text{보안} \cap \text{게임}|$
  $105 = 56 + 30 + 63 - 22 - 17 - 9 + |\text{네트워크} \cap \text{보안} \cap \text{게임}|$
  $\therefore\ |\text{네트워크} \cap \text{보안} \cap \text{게임}| = 4$
  ∴ 세 분야를 모두 관심 분야로 선택한 학생 수: 4명

집합의 항등

- Identity laws $$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap U = A$$
- Domination laws $$A \cup U = U \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$
- Idempotent laws $$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$
- Complementation law $$\left(\overline{\overline{A}}\right) = A$$
- Commutative laws $$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
- Associative laws $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$ $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
- Distributive laws $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$ $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

집합의 항등

- De Morgan's laws $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- Absorption laws $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

- Complement laws $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$

집합의 항등

- 다음의 집합 관계를 증명 (드모르간의 법칙): $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

증명:

$$\overline{A \cap B} = x \in \overline{A \cap B}$$

$$= \left\{ x \mid \neg \left(x \in \left(A \cap B \right) \right) \right\}$$

$$= \left\{ x \mid \neg \left(x \in A \wedge x \in B \right\}$$

$$= \left\{ x \mid \neg \left(x \in A \right) \vee \neg \left(x \in B \right) \right\}$$

$$= \left\{ x \mid x \notin A \vee x \notin B \right\}$$

$$= \left\{ x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \right\}$$

$$= \left\{ x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B} \right\}$$

$$= \overline{A} \cup \overline{B}$$

집합의 항등

예제 5-21

두 집합 A, B에 대해 $A - B = A \cap \overline{B}$임을 증명하라.

풀이

$A - B = A \cap \overline{B}$를 증명하기 위해 $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$임을 증명한다.

$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ $\quad\because$ 차집합의 정의

1 괄호 안과 밖의 논리연산자가 같으나 집합에 포함되는 원소가 x, y로 다르기 때문에 분배법칙으로 연산한다.

$\Leftrightarrow (x \in A \cap U) \wedge x \notin B$ $\quad\because$ 항등법칙

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in U) \wedge x \notin B$ $\quad\because$ 교집합의 정의

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in U \wedge x \notin B)$ $\quad\because$ 결합법칙

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B}$ $\quad\because$ 여집합의 정의

$\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$ $\quad\because$ 교집합의 정의

$\therefore$ $A - B = A \cap \overline{B}$가 성립한다.

집합의 항등

예제 5-19

흡수법칙 $A \cap (A \cup B) = A$임을 증명하라.

풀이

$$
\begin{aligned}
A \cap (A \cup B) &= (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) && \because \text{ 항등법칙} \\
&= A \cup (\varnothing \cap B) && \because \text{ 분배법칙} \\
&= A \cup \varnothing && \because \text{ 지배법칙} \\
&= A && \because \text{ 항등법칙}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $A \cap (A \cup B) = A$이 성립한다.

예제 5-20

분배법칙 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$를 증명하라.

풀이

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$임을 보이기 위해,

$(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$를 증명한다.

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C) && \because \text{ 곱집합의 정의} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) && \because \text{ 교집합의 정의} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) && \because \text{ 논리연산의 분배법칙}^{1} \\
&\Leftrightarrow [(x, y) \in A \times B] \wedge [(x, y) \in A \times C] && \because \text{ 곱집합의 정의} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C) && \because \text{ 교집합의 정의}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$이 성립한다.

집합의 항등

예제 5-22

집합 A, B에 대하여 다음 식을 간략화하라.

(1) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

(2) $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} - (\overline{A} \cap B)$

풀이

(1) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

$= (A \cap \overline{B}) \cup [(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})]$ ∵ 결합법칙

$= (A \cap \overline{B}) \cup [\overline{A} \cap (B \cup \overline{B})]$ ∵ 분배법칙

$= (A \cap \overline{B}) \cup [\overline{A} \cap U]$ ∵ 보법칙

$= (A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}$ ∵ 항등법칙

$= (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$ ∵ 분배법칙

$= U \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$ ∵ 보법칙

$= \overline{B} \cup \overline{A}$ ∵ 항등법칙

$= \overline{A} \cup \overline{B}$ ∵ 교환법칙

(2) $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} - (\overline{A} \cap B)$

$= (\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}) - (\overline{A} \cap B)$ ∵ 드모르간의 법칙

$= (A \cap B) - (\overline{A} \cap B)$ ∵ 이중 보법칙

$= (A \cap B) \cap \overline{(\overline{A} \cap B)}$ ∵ $A - B = A \cap \overline{B}$

$= (A \cap B) \cap (\overline{\overline{A}} \cup \overline{B})$ ∵ 드모르간의 법칙

$= (A \cap B) \cap (A \cup \overline{B})$ ∵ 이중 보법칙

$= (B \cap A) \cap (A \cup \overline{B})$ ∵ 교환법칙

$= B \cap [A \cap (A \cup \overline{B})]$ ∵ 결합법칙

$= B \cap A$ ∵ 흡수법칙