

Глава 2

Линейная алгебра

Средства MS Excel оказываются весьма полезны в линейной алгебре, прежде всего для операций с матрицами и решения систем линейных уравнений.

Матрицы

Значительная часть математических моделей различных объектов и процессов записывается в достаточно простой и компактной матричной форме. В частности, при решении линейных уравнений мы имеем дело с матрицами и арифметическими действиями с ними. Что же такое матрица? Как выполняются действия с матрицами?

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы и обозначаются строчными буквами с двойной индексацией: a_{ij} , где i — номер строки, j — номер столбца. Например, матрица A размера $m \times n$ может быть представлена в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

где $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

Две матрицы A и B одного размера называются равными, если они совпадают поэлементно, то есть $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей (вектором)-строкой:

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}),$$

а из одного столбца — матрицей (вектором)-столбцом:

Линейная алгебра

Если число строк матрицы равно числу столбцов и равно n , то такую матрицу называют квадратной n -го порядка. Например, квадратная матрица 2-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Если у элемента матрицы a_{ij} номер столбца равен номеру строки ($i=j$), то такой элемент называется диагональным. Диагональные элементы образуют главную диагональ матрицы.

Квадратная матрица с равными нулю всеми недиагональными элементами называется диагональной.

Квадратная матрица называется единичной, если она диагональная, и все диагональные элементы равны единице. Единичная матрица имеет следующий вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Различают единичные матрицы первого, второго, третьего и т. д. порядков:

$$E = 1;$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица любого размера называется нулевой или нуль-матрицей, если все ее элементы равны нулю:

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

Операции с матрицами

Как и над числами, над матрицами можно проводить ряд операций, причем в случае с матрицами некоторые из операций являются специфическими.

Транспонирование

Транспонированной называется матрица (A^T), в которой столбцы исходной матрицы (A) заменяются строками с соответствующими номерами.

В сокращенной записи, если $A = (a_{ij})$, то $A^T = (a_{ji})$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 11 \\ 18 & 19 & 39 \\ -5 & 91 & 87 \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -5 \\ -7 & 19 & 91 \\ 11 & 39 & 87 \end{pmatrix}.$$

Для обозначения транспонированной матрицы иногда используют символ «'» (A').

Транспонированием называется операция перехода от исходной матрицы (A) к транспонированной (A^T).

Из определения транспонированной матрицы следует, что если исходная матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A имеет размер $n \times m$.

Для осуществления транспонирования в Excel используется функция ТРАНСП, которая позволяет поменять ориентацию массива на рабочем листе с вертикальной на горизонтальную и наоборот.

Функция имеет вид ТРАНСП(массив). Здесь *массив* — это транспонируемый массив или диапазон ячеек на рабочем листе. Транспонирование массива заключается в том, что первая строка массива становится первым столбцом нового массива, вторая строка массива становится вторым столбцом нового массива и т. д. Рассмотрим это на примере.

Пример 2.1. Предположим, что в диапазон ячеек A1:E2 введена матрица размера 2x5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Необходимо получить транспонированную матрицу.

Решение

1. Выделите (указателем мыши при нажатой левой кнопке) блок ячеек под транспонированную матрицу (5 x 2). Например, A4:B8.
2. Нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции.
3. В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите Ссылки и массивы,

а в рабочем поле Функция — имя функции ТРАНСП (рис. 2.1). После этого щелкните на кнопке ОК.

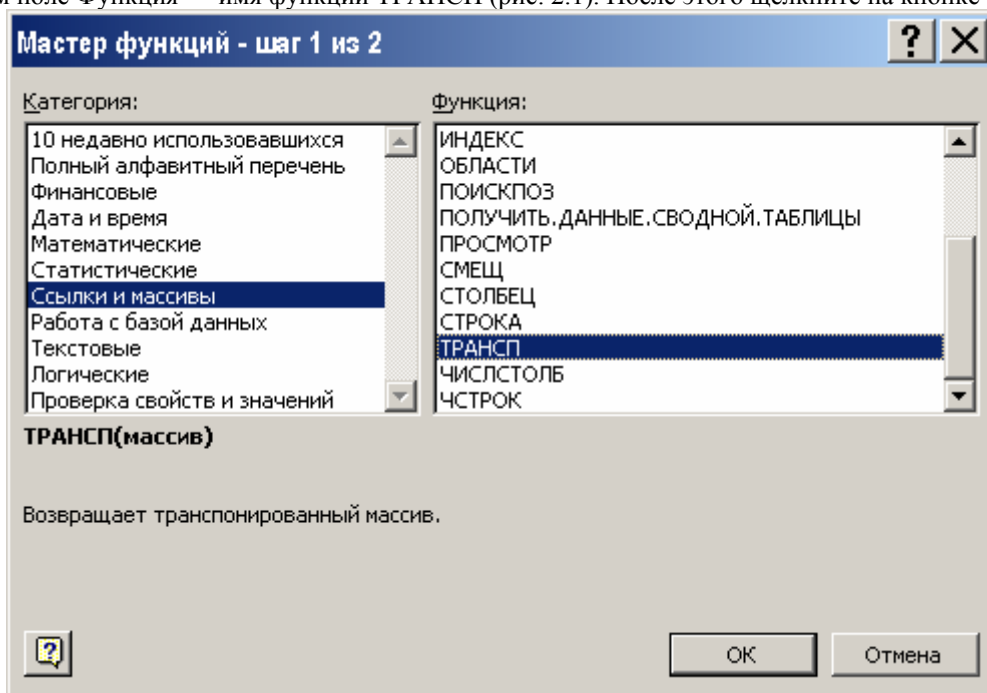


Рис. 2.1. Пример выбора вида функции в диалоговом окне Мастер функций

4. Появившееся диалоговое окно ТРАНСП мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы A1:E2 в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке). После чего нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER (рис. 2.2).

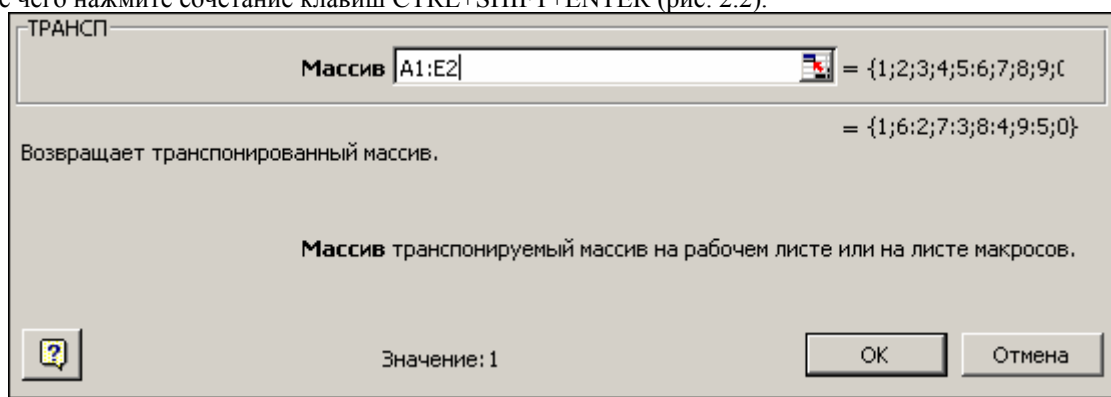


Рис. 2.2. Пример заполнения диалогового окна ТРАНСП

5. Если транспонированная матрица не появилась в диапазоне A4:B8, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER. В результате в диапазоне A4:B8 появится транспонированная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителя матрицы

Важной характеристикой квадратных матриц является их определитель. Определитель матрицы — это число, вычисляемое на основе значений элементов массива. Определитель матрицы A обозначается как $|A|$ или Δ

Определителем матрицы первого „порядка $A = (a_{11})$, или определителем первого порядка, называется элемент a_{11} .

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}.$$

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются членами определителя второго порядка. С ростом порядка матрицы n резко увеличивается число членов определителя ($n!$). Например, при $n = 4$ имеем 24 слагаемых. Существуют специальные правила, облегчающие вычисление определителей вручную, учитываются свойства определителей и т. п. При применении компьютера в использовании этих приемов нет необходимости.

В MS Excel для вычисления определителя квадратной матрицы используется функция МОПРЕД.

Функция имеет вид МОПРЕД(*массив*).

Здесь *массив* — это числовой массив, в котором хранится матрица с равным количеством строк и столбцов. При этом массив может быть задан как интервал ячеек, например, A1:C3; или как массив констант, например, {1;2;3;4;5;6;7;8;9}. Для массива A1:C3, состоящего из трех строк и трех столбцов (матрица размером 3 x 3), определитель вычисляется следующим образом:

$$\Delta(A1:C3) = A1 \times (B2 \times C3 - B3 \times C2) + A2 \times (B3 \times C1 - B1 \times C3) + A3 \times (B1 \times C2 - B2 \times C1).$$

Рассмотрим пример нахождения определителя матрицы.

Пример 2.2. Предположим, что в диапазон ячеек A1:C3 введена матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо вычислить определитель этой матрицы.

Решение

1. Табличный курсор поставьте в ячейку, в которой требуется получить значение определителя, например, в A4.
2. Нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции.
3. В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МОПРЕД. После этого щелкните на кнопке ОК.
4. Появившееся диалоговое окно МОПРЕД мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы A1:C3 в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке). Нажмите кнопку ОК (рис. 2.3).

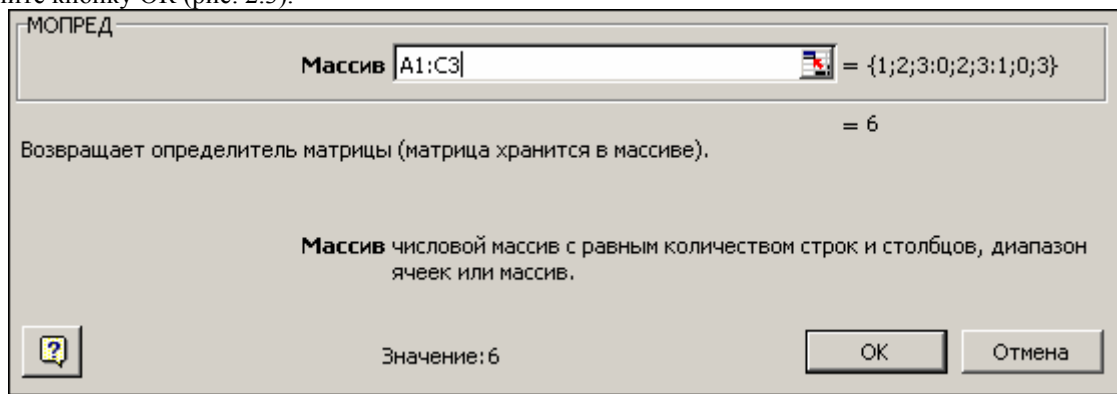


Рис. 2.3. Пример заполнения диалогового окна МОПРЕД

В ячейке A4 появится значение определителя матрицы — 6.

Нахождение обратной матрицы

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} , и для квадратных матриц вводится аналогичное понятие. Обратные матрицы обычно используются для решения систем уравнений с несколькими неизвестными.

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A , если при умножении этой матрицы на данную как слева, так и справа получается единичная матрица:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E.$$

Как следует из определения, обратная матрица является квадратной того же порядка, что и исходная матрица.

Необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы является невырожденность

исходной матрицы. Матрица называется невырожденной или неособенной, если ее определитель отличен от нуля ($|A| \neq 0$); в противном случае (при $|A| = 0$) матрица называется вырожденной или особенной.

Существуют специальные достаточно сложные алгоритмы для ручного вычисления обратных матриц. В качестве примера того, как вычисляется обратная матрица, рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица вычисляется следующим образом:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/(ad-bc) & b/(bc-ad) \\ c/(bc-ad) & a/(ad-bc) \end{pmatrix}.$$

В MS Excel для нахождения обратной матрицы используется функция МОБР, которая вычисляет обратную матрицу для матрицы, хранящейся в таблице в виде массива.

Функция имеет вид МОБР(*массив*)

Здесь *массив* — это числовой массив с равным количеством строк и столбцов. Массив может быть задан как диапазон ячеек, например A1:C3; как массив констант, например {1;2;3;4;5;6;7;8;9} или как имя диапазона или массива. Рассмотрим пример нахождения обратной матрицы.

Пример 2.3. Пусть в диапазон ячеек A1:C3 введена матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо получить обратную матрицу.

Решение

1. Выделите блок ячеек под обратную матрицу, например, блок ячеек A5:C7 (указателем мыши при нажатой левой кнопке).
2. Нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции. В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МОБР. Щелкните на кнопке ОК.
3. Появившееся диалоговое окно МОБР мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы A1:C3 в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке).
4. Нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER (рис. 2.4).

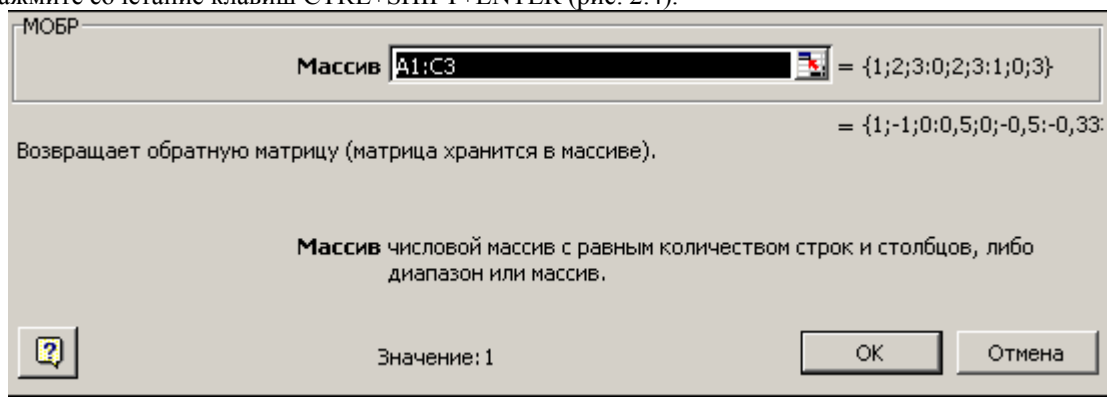


Рис. 2.4. Пример заполнения диалогового окна МОБР

5. Если обратная матрица не появилась в диапазоне A5:C7, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне A5:C7 появится обратная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \\ -0,33333 & 0,33333 & 0,33333 \end{pmatrix}.$$

Сложение и вычитание матриц

Складывать (вычитать) можно матрицы одного размера. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$

называется матрица $C = A+B$, элементы которой

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ (то есть матрицы складываются поэлементно). Например, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 5 & 19 & 31 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-4 & 7-3 \\ 9+5 & -1+19 & 13+31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 14 & 18 & 44 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

В частном случае $A + O = A$.

Аналогично определяется разность двух матриц $C = A - B$.

В MS Excel для выполнения операций суммирования и вычитания матриц могут быть использованы формулы, вводимые в соответствующие ячейки. Пример 2.4. Пусть матрица A из рассмотренного примера (2.1), введена в диапазон A1:C2, а матрица B - в диапазон A4:C5. Необходимо найти матрицу C, являющуюся их суммой.

Решение

1. Табличный курсор установите в левый верхний угол результирующей матрицы, например в A7.
2. Введите формулу для вычисления первого элемента результирующей матрицы $=A1 + A4$ (предварительно установив английскую раскладку клавиатуры).
3. Скопируйте введенную формулу в остальные ячейки результирующей матрицы: установите табличный курсор в ячейку A7; наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки, так чтобы указатель мыши принял вид тонкого крестика; при нажатой левой кнопке мыши протяните указатель до ячейки C7; затем так же протяните указатель мыши до ячейки C8.

В результате в ячейках A7:C8 появится матрица, равная сумме исходных матриц.

Подобным же образом вычисляется разность матриц (2.1), только в формуле для вычисления первого элемента вместо знака + ставится знак -.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 14 & 18 & 44 \end{pmatrix};$$

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 \\ 4 & -20 & -18 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число k называется матрица $B = kA$, элементы которой $b_{ij} = ka_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Иначе говоря, при умножении матрицы на постоянную каждый элемент этой матрицы умножается на эту постоянную: $k \cdot A_{ij} = (k \cdot a_{ij})$. Например, для матриц A и B из предыдущего параграфа (2.1):

$$\frac{1}{2} \cdot A = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 3,5 \\ 4,5 & -0,5 & 6,5 \end{pmatrix};$$

$$-2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ -10 & -38 & -62 \end{pmatrix}.$$

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, то есть $O \cdot A = 0$.

В MS Excel для выполнения операции умножения матрицы на число могут быть использованы формулы, вводимые в соответствующие ячейки.

Пример 2.5. Пусть, как и в предыдущем параграфе (пример 2.4) матрица A (2.1) введена в диапазоны A1:C2. Необходимо получить матрицу $C = 3 \cdot A$.

Решение

1. Табличный курсор поставьте в левый верхний угол результирующей матрицы, например в E1.
2. Введите формулу для вычисления первого элемента результирующей матрицы $=3 \cdot A1$ (предварительно установив английскую раскладку клавиатуры).
3. Скопируйте введенную формулу в остальные ячейки результирующей матрицы: поставьте табличный курсор в ячейку E1; наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки, так чтобы указатель мыши принял вид тонкого крестика; при нажатой левой кнопке мыши протяните указатель до ячейки G1;

таким же образом протяните указатель мыши до ячейки G2.

В результате в ячейках E1:G2 появится матрица, равная исходной матрице, умноженной на постоянную —3.

$$3 * A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 21 \\ 27 & -3 & 39 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Произведение матриц определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Пусть $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$, тогда размерность произведения $A \times B$ равна $m \times p$. При этом матрица C (размера $m \times p$) называется произведением матриц A и B , если каждый ее элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Таким образом, перемножение матриц осуществляется по следующему правилу:

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 1 \text{ стр} * 1 \text{ стб} & 1 \text{ стр} * 2 \text{ стб} & \dots & 1 \text{ стр} * p \text{ стб} \\ 2 \text{ стр} * 1 \text{ стб} & 2 \text{ стр} * 2 \text{ стб} & \dots & 2 \text{ стр} * p \text{ стб} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m \text{ стр} * 1 \text{ стб} & m \text{ стр} * 2 \text{ стб} & \dots & m \text{ стр} * p \text{ стб} \end{pmatrix}.$$

Пусть, например,

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 10 & 0 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1*1+3*2+4*10+2*12 & 1*3+3*2+4*0+2*(-1) \\ 3*1+2*2+0*10-1*12 & 3*3+2*2+0*0-1*(-1) \\ 0*1+1*2-1*10+2*12 & 0*3+1*2-1*0+2*(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 & 7 \\ -5 & 14 \\ 16 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций умножения матриц (что следует из определений этих операций). Для матриц верны общие свойства операции умножения.

1. $A(BC) = (AB)C$ — ассоциативность.
2. $A(B + C) = AB + AC$ — дистрибутивность.
3. $(A + B)C = AC + BC$.
4. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = (\alpha AB)$, α — константа.

Однако имеются и специфические свойства операций умножения матриц.

5. Умножение матриц некоммукативно — $AB \neq BA$.

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы A n -го порядка на единичную матрицу E того же порядка, причем это произведение равно A .

6. Если E — единичная матрица, то $EA = A$; $BE = B$.

Таким образом, единичная матрица играет при умножении ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

7. Из того, что $A \times B = O$, не следует, что $A = O$ или $B = O$.

В алгебре матриц нет действия деления. Выражение A/B не имеет смысла. Его заменяют два различных выражения $B^{-1} \times A$ и $A \times B^{-1}$, если существует B^{-1} . Для квадратных матриц возможна операция возведения в степень. По определению полагают, что $A^0 = E$ и $A^1 = A$. Целой положительной степенью

A^m ($m > 1$) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A , то есть:

$$A^m = \underbrace{A * A * \dots * A}_{m \text{ раз}}.$$

Для нахождения произведения двух матриц в Excel используется функция МУМНОЖ, которая вычисляет произведение матриц (матрицы хранятся в массивах). Функция имеет вид МУМНОЖ(массив1;массив2). Здесь массив1 и массив2 — это перемножаемые массивы. При этом количество столбцов аргумента массив1 должно быть таким же, как количество строк аргумента массив2, и оба массива должны содержать только числа. Результатом является массив с таким же числом строк, как массив1 и с таким же числом столбцов, как массив2.

Массив C , который является произведением двух массивов A и B , определяется следующим образом:

$$C = \sum a_{ij}b_{ij}, \text{ где } i \text{ — номер строки, } j \text{ — номер столбца.}$$

Рассмотрим примеры умножения матриц.

Пример 2.6. Пусть матрица A из рассмотренного примера (2.2) введена в диапазон A1:D3, а матрица B(2.2) — в диапазон A4:B7. Необходимо найти произведение этих матриц C.

Решение

1. Выделите блок ячеек под результирующую матрицу. Для этого требуется найти размер матрицы-произведения. Ее размерность будет $m \times n$, в данном примере 3×2 . Например, выделите блок ячеек F1:G3 (указателем мыши при нажатой левой кнопке).
2. Нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции.
3. В появившемся диалоговом окне Мастер функций в поле Категория выберите Математические, а в поле Функция — имя функции МУМНОЖ. После этого щелкните на кнопке ОК.
4. Появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц и введите диапазон исходной матрицы A — A1:D3 в рабочее поле Массив1 (указателем мыши при нажатой левой кнопке), а диапазон матрицы B — A4:B7 введите в рабочее поле Массив2 (рис. 2.5). После этого нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.

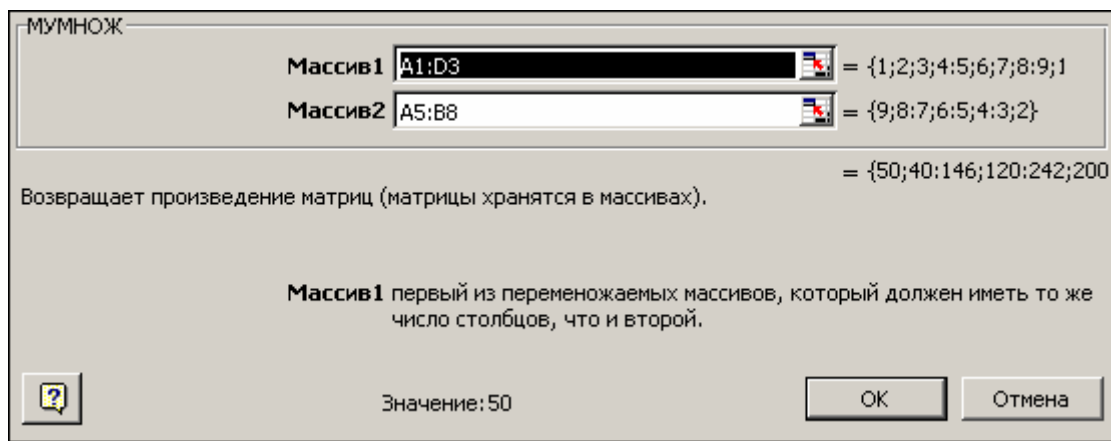


Рис. 2.5. Пример заполнения рабочих полей диалогового окна МУМНОЖ

5. Если произведение матриц $A \times B$ не появилось в диапазоне F1:G3, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и еще раз нажать комбинацию клавиш CTRL+SHIFT+ENTER. В результате в диапазоне F1:G3 появится произведение матриц:

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 71 & 7 \\ -5 & 14 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.7. Предприятие выпускает продукцию трех видов: P1, P2, P3 и использует сырье двух типов S1 и S2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

где каждый элемент показывает, сколько единиц сырья j -го типа расходуется на производство единицы продукции. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $B = (100, 130, 90)$. Необходимо определить затраты сырья для планового выпуска продукции.

Решение. Для нахождения затрат сырья необходимо вычислить произведение матриц $B \times A$.

1. Введите матрицу A в диапазон A1:B3, а матрицу B — в диапазон A4:C4.
2. Выделите блок ячеек под результирующую матрицу. Ее размерность будет $m \times n$, в данном примере 1×2 . Например, выделите блок ячеек F1:G1 (указателем мыши при нажатой левой кнопке).
3. Нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции.
4. В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МУМНОЖ. После этого щелкните на кнопке ОК.
5. Появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц и введите диапазон исходной матрицы A — A1:B3 в рабочее поле Массив1 (указателем мыши при нажатой левой кнопке), а диапазон матрицы B — A4:C4 введите в рабочее поле Массив2. После этого нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.
6. Если произведение матриц $B \times A$ не появилось в диапазоне F1:G1, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER. В результате в диапазоне F1:G1 появятся затраты сырья для планового выпуска продукции (то есть произведение матриц) $B \times A = (880, 900)$. Таким образом, для выполнения плана необходимо S1 = 880

Решение систем линейных уравнений

Система n линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]
$$A \times X = B. \quad (2.4)$$
[illegible]
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};$$
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
[illegible]

Существует ряд методов решения системы (2.3), ориентированных на вычисления вручную: методы Крамера, Гаусса и т. д. Предполагая использование компьютера для проведения вычислений, наиболее целесообразно рассмотреть решение системы (2.3) в общем виде (метод обратной матрицы). Будем считать, что квадратная матрица системы A_{nn} является невырожденной, то есть ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1} .

Умножая слева обе части матричного равенства (2.4) на обратную матрицу A^{-1} ,

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B, E \times X = A^{-1} \times B;$$
$$E \times X = X,$$

отсюда решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1} \times B. \quad (2.5)$$

Таким образом, для решения системы (2.4) (нахождения вектора X) необходимо найти обратную матрицу коэффициентов и умножить ее справа на вектор свободных членов. Выполнение этих операций в пакете Excel рассмотрено ранее (пример 2.2).

Пример 2.8. Пусть необходимо решить систему

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40. \end{cases}$$

Решение

1. Введите матрицу A (в данном случае размера 2×2) в диапазон $A1:B2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вектор $B = (7 \ 40)$ введите в диапазон $C1:C2$.

2. Найдите обратную матрицу A^{-1} . Для этого:

- выделите блок ячеек под обратную матрицу. Например, выделите блок $A3:B4$ (указателем мыши при нажатой левой кнопке);
- нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции;
- в появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МОБР. После этого щелкните на кнопке ОК;
- появившееся диалоговое окно МОБР мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы $A1:B2$ в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке). Нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER;
- если обратная матрица не появилась в диапазоне $A3:B4$, то следует щелкнуть указателем мыши в Строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне $A3:B4$ появится обратная матрица:

$$\begin{pmatrix} 0,217391 & 0,086957 \\ 0,173913 & -0,13043 \end{pmatrix}$$

3. Умножением обратной матрицы A^{-1} на вектор B найдите вектор X . Для этого:

- выделите блок ячеек под результирующую матрицу (под вектор X). Ее размерность будет $m \times p$, в данном примере 2×1 . Например, выделите блок ячеек $C3:C4$ (указателем мыши при нажатой левой кнопке);
- нажать на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции;
- в появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите Математические, а в рабочем поле Функция имя функции — МУМНОЖ. Щелкните на кнопке ОК;
- появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц и введите диапазон обратной матрицы A^{-1} — $A3:B4$ в рабочее поле Массив1 (указателем мыши при нажатой левой кнопке), а диапазон матрицы B — $C1:C2$ — в рабочее поле Массив2. После этого нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER;
- если вектор X не появился в диапазоне $C3:C4$, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне $C3:C4$ появится вектор X . Причем $x = 5$ будет находиться в ячейке $C3$, а $y = -4$ — в ячейке $C4$.

Можно осуществить проверку найденного решения. Для этого найденный вектор X необходимо подставить в исходное матричное уравнение $A \times X = B$.

Проверка производится следующим образом.

1. Выделите блок ячеек под результирующую матрицу (под вектор B). Ее размерность будет $m \times p$, в данном примере 2×1 . Например, выделите блок ячеек $D1:D2$ (указателем мыши при нажатой левой кнопке).
2. Нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции.
3. В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МУМНОЖ. Щелкните на кнопке ОК.
4. Появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц и введите диапазон исходной матрицы A — $A1:B2$ в рабочее поле Массив1 (указателем мыши при нажатой левой кнопке), а диапазон матрицы X — $C3:C4$ — в рабочее поле Массив2. После этого нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.

5. Если вектор В не появился в диапазоне D1:D2, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне D1:D2 появится вектор В, и, если система решена правильно, появившийся вектор будет равен исходному $B = (7 \ 40)$.

Пример 2.9. Ресторан специализируется на выпуске трех видов фирменных блюд: В1, В2, В3, при этом используются ингредиенты трех типов S1, S2, S3. Нормы расхода каждого из них на одно блюдо и объем расхода ингредиентов на 1 день заданы таблицей:

Нужно найти ежедневный объем выпуска фирменных блюд каждого вида.

Решение. Пусть ежедневно ресторан выпускает x_1 блюд вида В1, x_2 блюд вида В2 и x_3 — блюд вида В3.

Тогда в соответствии с расходом ингредиентов каждого типа имеем систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600. \end{cases}$$

Решаем систему аналогично решению примера 2.8.

1. Введите матрицу А (в данном случае размера 3 x 3) в диапазон A1:C3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вектор В = (2700 900 1600) введите в диапазон D1:D3.

2. Найдите обратную матрицу A^{-1} . Для этого:

- выделите блок ячеек под обратную матрицу, Например, выделите блок A4:C6 (указателем мыши при нажатой левой кнопке);
- нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции;
- " • в появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите пункт Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МОБР. Щелкните на кнопке ОК;
- появившееся диалоговое окно МОБР мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы A1:C3 в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке). Нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER;
- если обратная матрица не появилась в диапазоне A4:C6, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне A4:C6 появится обратная матрица.

3. Умножением обратной матрицы A^{-1} на вектор В найдите вектор X. Для этого:

- выделите блок ячеек под результирующую матрицу (под вектор X). Ее размерность будет $m \times n$, в данном примере 3×1 . Например, выделите блок ячеек D4:D6 (указателем мыши при нажатой левой кнопке);
- нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции;
- в появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите пункт Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МУМНОЖ. Щелкните на кнопке ОК;
- появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц и введите диапазон обратной матрицы A^{-1} — A4:C6 в рабочее поле Массив1 (указателем мыши при нажатой левой кнопке), а диапазон матрицы В — D1:D3 введите в рабочее поле Массив2. После этого нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER;
- если вектор X не появился в диапазоне D4:D6, следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне D4:D6 появится вектор X (рис. 2.6).

Пример 2.10. Пусть необходимо решить систему

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40, \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$$

Решение

1. Введите матрицу A (в данном случае размера 3 x 2) в диапазон A1:B3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

Вектор B = (7 40 3) введите в диапазон C1:C3.

2. Найдите транспонированную матрицу A^T . Для этого:

- выделите блок ячеек под транспонированную матрицу. Его размер в примере будет 2x3. Например, выделите блок A4:C5 (указателем мыши при нажатой левой кнопке);
- нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции;
- в появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите Ссылки и массивы, а в рабочем поле Функция — имя функции ТРАНСП. Щелкните на кнопке ОК;
- появившееся диалоговое окно ТРАНСП мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы A1:B3 в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке). После этого нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER;
- если обратная матрица не появилась в диапазоне A3:B4, то следует щелкнуть указателем мыши в Строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне A4:C5 появится транспонированная матрица A^T .

3. Найдите произведение $A^T \times B$. Для этого:

- выделите блок ячеек под результирующую матрицу (под вектор A^TB). Ее размерность будет nx1, в данном примере 2x1. Например, выделите блок ячеек E4:E5 (указателем мыши при нажатой левой кнопке);
- нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции;
- в появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МУМНОЖ. Щелкните на кнопке ОК;
- появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц и введите диапазон транспонированной матрицы A^T — A4:C5 в рабочее поле Массив! (указателем мыши при нажатой левой кнопке), а диапазон матрицы B — C1:C3 — в рабочее поле Массив2. После этого нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER;
- если вектор A^TB не появился в диапазоне E4:E5, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне E4:E5 появится вектор

$$A^TB = \begin{pmatrix} 190 \\ -177 \end{pmatrix}$$

Аналогично находим произведение $A^T \times A$:

- выделите блок ячеек под результирующую матрицу A^TA . Ее размерность будет mnxn, в данном примере 2x2. Например, выделите блок ячеек A7:B8 (указателем мыши при нажатой левой кнопке);
- далее действуйте так, как описано в пункте 3, указывая соответствующие диапазоны.

В результате в диапазоне A7:B8 появится матрица A^TA :

$$\begin{pmatrix} 34 & -5 \\ -5 & 38 \end{pmatrix}$$

4. Находим обратную матрицу $(A^TA)^{-1}$. Для этого необходимо:

- выделить блок ячеек под обратную матрицу. Например, блок A10:B11 (указателем мыши при нажатой левой кнопке);
- нажать на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции;
- в появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выбрать пункт Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МОБР. Затем щелкнуть на кнопке ОК;
- появившееся диалоговое окно МОБР мышью отодвинуть в сторону от исходной матрицы и ввести диапазон исходной матрицы A^TA — A7:B8 в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке). После этого нажать сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER;
- если обратная матрица не появилась в диапазоне A10:B11, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне A10:B11 появится обратная матрица $(A^TA)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 0,029992 & 0,003946 \\ 0,003946 & 0,026835 \end{pmatrix}.$$

5. Теперь умножением обратной матрицы $(A^T A)^{-1}$ на вектор $A^T B$ находим вектор X . Для этого:
- выделите блок ячеек под результирующую матрицу (под вектор X). Ее размерность будет $n \times 1$, в данном примере 2×1 . Например, выделите блок ячеек D1:D2 (указателем мыши при нажатой левой кнопке);
 - нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции;
- в появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выберите пункт Математические, а в рабочем поле Функция — имя функции МУМНОЖ. Щелкните на кнопке ОК;
- появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц и введите диапазон обратной матрицы $(A^T A)^{-1}$ — A10:B11 в рабочее поле Массив! (указателем мыши при нажатой левой кнопке), а диапазон матрицы $A^T B$ — E4:E5 — в рабочее поле Массив2. После этого нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER;
 - если вектор X не появился в диапазоне D1:D2, то следует щелкнуть указателем мыши в Строке формул и повторить нажатие CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне D1:D2 появится вектор X (рис. 2.7). Причем $x = 5$ будет находиться в ячейке D1, а $y = -4$ — в ячейке D2.

Обратите внимание, что решение примера 2.10 аналогично решению примера 2.8, но в последнем присутствует дополнительное уравнение.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	3	2	7	5											
2	4	-5	40	-4											
3	3	3	3												
4	3	4	3		190										
5	2	-5	3		-177										
6															
7	34	-5													
8	-5	38													
9															
10	0,029992	0,003946													
11	0,003946	0,026835													
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															
28															
29															
30															
31															
32															

Рис. 2.7. Результаты вычислений из примера 2.10

Можно осуществить проверку найденного решения. Для этого найденный вектор X необходимо подставить в исходное матричное уравнение

$$A \times X = B.$$

Причем достаточно подставить X в любые n уравнений.

Глава 3

Задачи оптимизации

Очень широкий класс задач составляют задачи оптимизации или, как их еще называют, экстремальные задачи. Обычно их решение сопряжено с большим количеством вычислений, что затрудняет их решение вручную. Ниже будут рассмотрены некоторые типы задач оптимизации: решение уравнений с одним неизвестным, задачи линейного программирования и аппроксимация функций.

Постановка задачи оптимизации

В задачах оптимизации требуется найти значения параметров или функций, реализующих максимум или минимум некоторой зависящей от них величины, например:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

часто при дополнительных условиях-неравенствах:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3.2)$$

Во многих инженерных и экономических задачах, например, желательно найти максимум меры выполнения или минимум стоимости.

Другим приложением задач оптимизации является получение приближенных решений выбором неизвестных значений параметров или функций так, чтобы они давали минимум ошибки.

В простейшем случае одной независимой переменной x локальные максимум и минимум функции определяются следующим образом. Действительная функция $f(x)$, определенная при $x = a$, имеет в точке a (локальный) минимум или (локальный) максимум $f(a)$, если существует такое положительное число δ , что при всех $\Delta x = x - a$, для которых выполняются неравенства $0 < |\Delta x| < \delta$ и существует значение

$f(a + |\Delta x|)$, соответственно

$$\Delta f \equiv f(a + \Delta x) - f(a) < 0$$

или

$$\Delta f \equiv f(a + \Delta x) - f(a) > 0.$$

Максимум и минимум функции объединяются общим названием экстремума функции. Определение локальный подчеркивает тот факт, что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки a . При решении оптимизационных задач важно нахождение не локальных экстремумов, а глобального максимума или глобального минимума (наибольшего или наименьшего значений) функции на промежутке X .

Для поиска экстремумов существуют различные методы. Часто случается, что при отыскании максимумов и минимумов функций многих переменных получают сложную систему уравнений, в этих случаях экстремумы находятся численными методами, то есть при помощи последовательного применения метода проб. При этом применение компьютера является практически единственным способом решения задачи.

Решение уравнений с одним неизвестным

Одним из приложений задач оптимизации является численное решение систем уравнений с одним или несколькими неизвестными вида:

$$f(x) = 0. \quad (3.3)$$

Нахождение корней уравнения вида (3.3) даже в случае алгебраических уравнений выше третьей степени представляет достаточно сложную задачу. Трансцендентные же уравнения чаще всего вообще не имеют аналитического решения. В этих случаях единственным путем является получение приближенных решений, выбором неизвестных значений параметров так, чтобы они давали минимум ошибки некоторой целевой функции (как правило, квадратичной). Обычно используются итерационные методы, когда вначале выбирают некоторое начальное приближение $x^{[0]}$ затем вычисляют последовательные приближения

$$x^{[j+1]} = \varphi(x^{[j]}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Итерационные методы обеспечивают сходимость таких приближений к искомому значению x .

В MS Excel для решения уравнений вида (3.3) используется удобный и простой для понимания инструмент Подбор параметра. Он реализует алгоритм численного решения уравнения, зависящего от одной переменной.

Процесс решения с помощью процедуры Подбор параметра распадается на два этапа:

1. Задание на рабочем листе ячейки, содержащей переменную решаемого уравнения (так называемой влияющей ячейки), и ячейки содержащей формулу уравнения (зависящей или целевой ячейки).
2. Ввод адресов влияющей и целевой ячеек в диалоговом окне Подбор параметра и получение ответа (или сообщения о его отсутствии или невозможности нахождения, поскольку уравнение может не иметь решений или алгоритм решения (оптимизации) может оказаться расходящимся в конкретных условиях).

К сожалению, с помощью процедуры Подбор параметра могут быть решены только некоторые типы уравнений.

Пример 3.1. Найти решение уравнения $\ln x = 0$.

Решение

Первый этап

1. Открываем новый рабочий лист (команда Вставка > Лист).
2. Заносим в ячейку A1 ориентировочное значение корня, например, 3.
3. Заносим в ячейку B1 левую часть уравнения, используя в качестве независимой переменной ссылку на ячейку A1. Для этого нажимаем на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции; в появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выбираем Математические, а в рабочем поле Функция имя функции LN. После чего щелкаем на кнопке ОК; появившееся диалоговое окно LN мышью отодвигаем в сторону от ячейки A1 и в рабочее поле Число щелкаем мышью на ячейке A1 вводим ее адрес. После чего нажимаем на кнопку ОК.

В ячейке B1 появляется число 1,098612.

Второй этап

1. Вызываем процедуру Подбор параметра (команда Сервис > Подбор параметра).
2. В поле Установить в ячейке мышью указываем B1, в поле Значение с клавиатуры задаем 0 (правая часть уравнения), в поле Изменяя значение ячейки мышью указываем A1 (рис. 3.1).

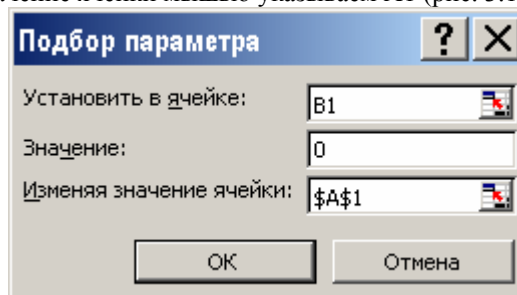


Рис. 3.1. Пример заполнения диалогового окна Подбор параметра

3. Щелкаем на кнопке ОК и получаем результат подбора, отображаемый в диалоговом окне Результат подбора параметра. Щелкаем на кнопке ОК, чтобы сохранить полученные значения ячеек, участвовавших в операции. В ячейке A1 получаем приближенное значение $x = 0,999872$ (рис. 3.2). При этом погрешность решения (значение правой части уравнения) — вместо 0 в ячейке B1 получаем -0,00013.

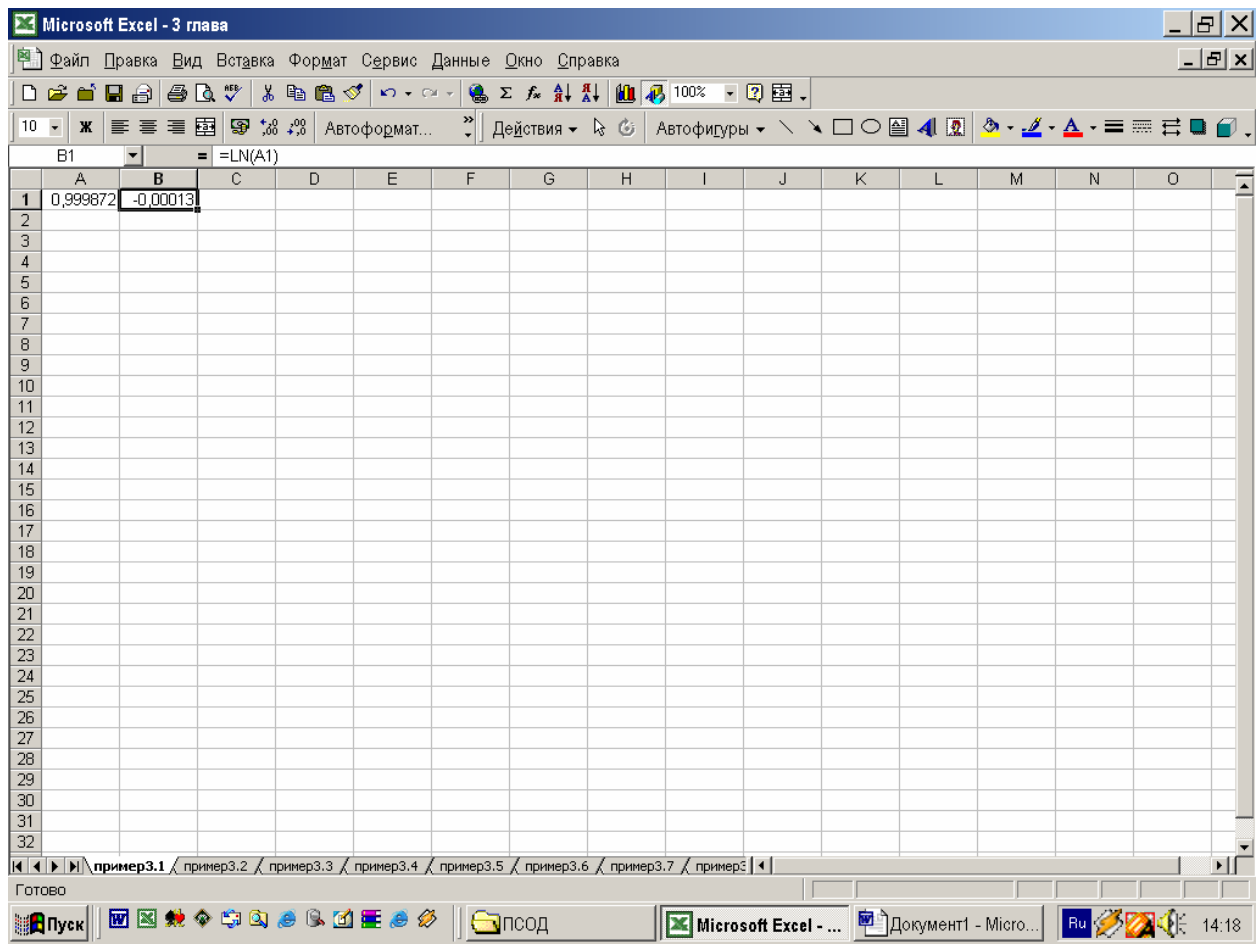


Рис. 3.2. Результаты вычислений из примера 3.1

Таким образом, при значении $x = 0,999872$ правая часть уравнения $\ln x = 0$ приближается к нулю ($-0,00013$). Принимая во внимание, что полученный корень это приближенное решение, его можно округлить до 1, то есть $x = 1$, что и является известным аналитическим решением этого уравнения.

Пример 3.2. Найти решение уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Решение. Уравнение имеет 2 корня. Решение начинаем с нахождения первого корня.

1. Открыть новый рабочий лист (команда Вставка > Лист).

Заносим в ячейку A1 ориентировочное значение первого корня, например, 3.

2. Заносим в ячейку B1 левую часть уравнения, используя в качестве независимой переменной ссылку на ячейку A1. Соответствующая формула будет иметь ша=A1^2-3*A1 +2.

3. Вызываем процедуру Подбор параметра (команда Сервис > Подбор параметра).

4. В поле Установить в ячейке указываем B7, в поле Значение задаем 0 (правая часть уравнения), в поле Изменяя значение ячейки указываем A1.

5. Щелкаем на кнопке ОК и получаем результат подбора, отображаемый в диалоговом окне Результат подбора параметра. Щелкаем на кнопке ОК, чтобы сохранить полученные значения ячеек, участвовавших в операции. Таким образом, в ячейке A1 получаем приближенное значение $x_1 = 2,000048$. При этом точность решения (значение правой части уравнения) — вместо 0 в ячейке B1 получаем $4,85E-05$ ($0,0000485$).

6. Повторяем расчет для второго корня x_2 , задавая в ячейке A1 другое начальное значение, например -3. Получаем значение второго корня уравнения $x_2 = 0,9996$.

Линейное программирование

В случае, когда оптимизируемая целевая функция (3.1) и ограничения (3.2) линейны, задача оптимизации решается методами линейного программирования и обычно называется задачей линейного программирования. Задача линейного программирования заключается в нахождении n переменных x_1, x_2, \dots, x_n минимизирующих данную линейную функцию (целевую функцию):

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.4)$$

(или максимизирующую — Z) при линейных ограничениях-равенствах:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = A_i, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

и линейных ограничениях-неравенствах:

$$A_{j1}x_1 + A_{j2}x_2 + \dots + A_{jn}x_n \geq B_j, \text{ где } j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.6)$$

Часто задачу линейного программирования (3.4-3.6) сводят путем введения в случае необходимости вспомогательных переменных к стандартной форме (основной задаче линейного программирования). При этом требуется минимизировать целевую функцию:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.7)$$

при $m < n$ линейных ограничениях-равенствах

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m \quad (3.8)$$

и n линейных ограничениях-неравенствах

$$x_k \geq 0, \text{ где } k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования является упорядоченное множество чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) , удовлетворяющих ограничениям (3.8) и (3.9). Это точка в n -мерном пространстве. Допустимое решение, минимизирующее целевую функцию (3.7), называется оптимальным решением (оптимальным планом).

Чаше всего оптимальное решение, если оно существует, является и единственным. Однако возможны случаи, когда оптимальных решений бесчисленное множество.

Процесс решения задачи линейного программирования обычно состоит из ряда этапов:

о 1-й этап: осмысление задачи, выделение наиболее важных качеств, свойств, величин, параметров. Это можно делать, составляя схемы, таблицы, графики и т. п.;

О 2-й этап: введение обозначений (неизвестных). Желательно ограничиваться как можно меньшим количеством неизвестных, выражая по возможности одни величины через другие;

О 3-й этап: создание целевой функции. Обычно в качестве цели могут выступать максимальная стоимость всего объема продукции, максимальная прибыль, минимальные затраты и т. п. Целевая функция записывается в виде (3.4) или (3.7). •

О 4-й этап: составление системы ограничений, которым должны удовлетворять введенные величины (3.5), (3.6) или (3.8), (3.9).

О 5-й этап: решение задачи на компьютере.

Инструментом для поиска решений задач оптимизации в Excel служит процедура Поиск решения (Сервис > Поиск решения). При этом открывается диалоговое окно Поиск решения. Оно содержит следующие рабочие поля:

О Установить целевую ячейку — служит для указания целевой ячейки, значение которой необходимо максимизировать, минимизировать или установить равным заданному числу. Эта ячейка должна содержать формулу;

О Равной — служит для выбора варианта оптимизации значения целевой ячейки (максимизация, минимизация или подбор заданного числа). Чтобы установить число, необходимо ввести его в поле;

О Изменяя ячейки — служит для указания ячеек, значения которых изменяются в процессе поиска решения до тех пор, пока не будут выполнены наложенные ограничения и условие оптимизации значения ячейки, указанной в поле Установить целевую ячейку;

О Предположить — используется для автоматического поиска ячеек, влияющих на формулу, ссылка на которую дана в поле Установить целевую ячейку. Результат поиска отображается в поле Изменяя ячейки;

О Ограничения — служит для отображения списка граничных условий поставленной задачи;

О Добавить — используется для отображения диалогового окна Добавить ограничение;

о Изменить — применяется для отображения диалогового окна Изменить ограничение;

О Удалить — служит для снятия указанного ограничения;

О Выполнить — используется для запуска поиска решения поставленной задачи;

О Закрыть — служит для выхода из окна диалога без запуска поиска решения поставленной задачи. При этом сохраняются установки, сделанные в окнах диалога, появившихся после нажатий на кнопки Параметры, Добавить, Изменить или Удалить;

О Параметры — применяется для отображения диалогового окна Параметры поиска решения, в котором можно загрузить или сохранить оптимизируемую модель и указать предусмотренные варианты поиска решения;

О Восстановить — служит для очистки полей окна диалога и восстановления значений параметров поиска решения, используемых по умолчанию.

Рассмотрим примеры решения задач оптимизации,

Пример 3.3. В ресторане готовятся фирменные блюда трех видов (блюдо А, блюдо В и блюдо С) с использованием при приготовлении ингредиентов трех видов (ингредиент 1, ингредиент 2 и ингредиент 3).

Расход ингредиентов в граммах на блюдо задается следующей таблицей:

Вид ингредиента	Блюдо А	Блюдо В	Блюдо С
Ингредиент 1	20	50	10
Ингредиент 2	20	0	40
Ингредиент 3	20	10	10

Стоимость приготовления блюд одинакова (100 руб).

Ежедневно в ресторан поступает 5 кг ингредиента 1 и по 4 кг ингредиентов видов 2 и 3. Каково оптимальное соотношение дневного производства блюд различного вида, если производственные мощности ресторана позволяют использовать весь запас поступивших продуктов?

Решение. Для решения задачи введем обозначения: пусть x_1 , — дневной выпуск блюда А; x_2 — дневной выпуск блюда В; x_3 — дневной выпуск блюда С.

Составим целевую функцию — она заключается в стоимости выпущенных рестораном блюд:

$$Z = 100 \times x_1 + 100 \times x_2 + 100 \times x_3.$$

Определим имеющиеся ограничения (руководствуясь таблицей):

1. $20 \times x_1 + 50 \times x_2 + 10 \times x_3 \leq 5000$;
2. $20 \times x_1 + 0 \times x_2 + 40 \times x_3 \leq 4000$;
3. $20 \times x_1 + 10 \times x_2 + 10 \times x_3 \leq 4000$.

Кроме того, поскольку нельзя реализовать часть блюда и количество блюд не может быть отрицательным, добавим еще ряд ограничений:

1. $x_1 \geq 0$
2. $x_2 \geq 0$
3. $x_3 \geq 0$
4. x_1 - целое
5. x_2 - целое
6. x_3 - целое

Теперь можно приступить к решению задачи на компьютере.

1. Откроем новый рабочий лист (Вставка > Лист).
2. В ячейки А2, А3 и А4 занесем дневной запас продуктов — числа 5000, 4000 и 4000 соответственно.
3. В ячейки С1, D1 и E1 занесем начальные значения неизвестных x_1 , x_2 и x_3 (нули) — в дальнейшем значения этих ячеек будут подобраны автоматически.
4. В ячейках диапазона С2:Е4 разместим таблицу расхода ингредиентов.
5. В ячейках В2:В4 укажем формулы для расчета расхода ингредиентов по видам. В ячейке В2 формула будет иметь вид $=\$C\$1*C2 + \$D\$1*D2 + \$E\$1E2$, а остальные формулы можно получить методом автозаполнения (копирования).
6. В ячейку F1 занесем формулу целевой функции $=100*(C1 + D1 + E1)$. Результат ввода данных в рабочую таблицу представлен на рис. 3.3.

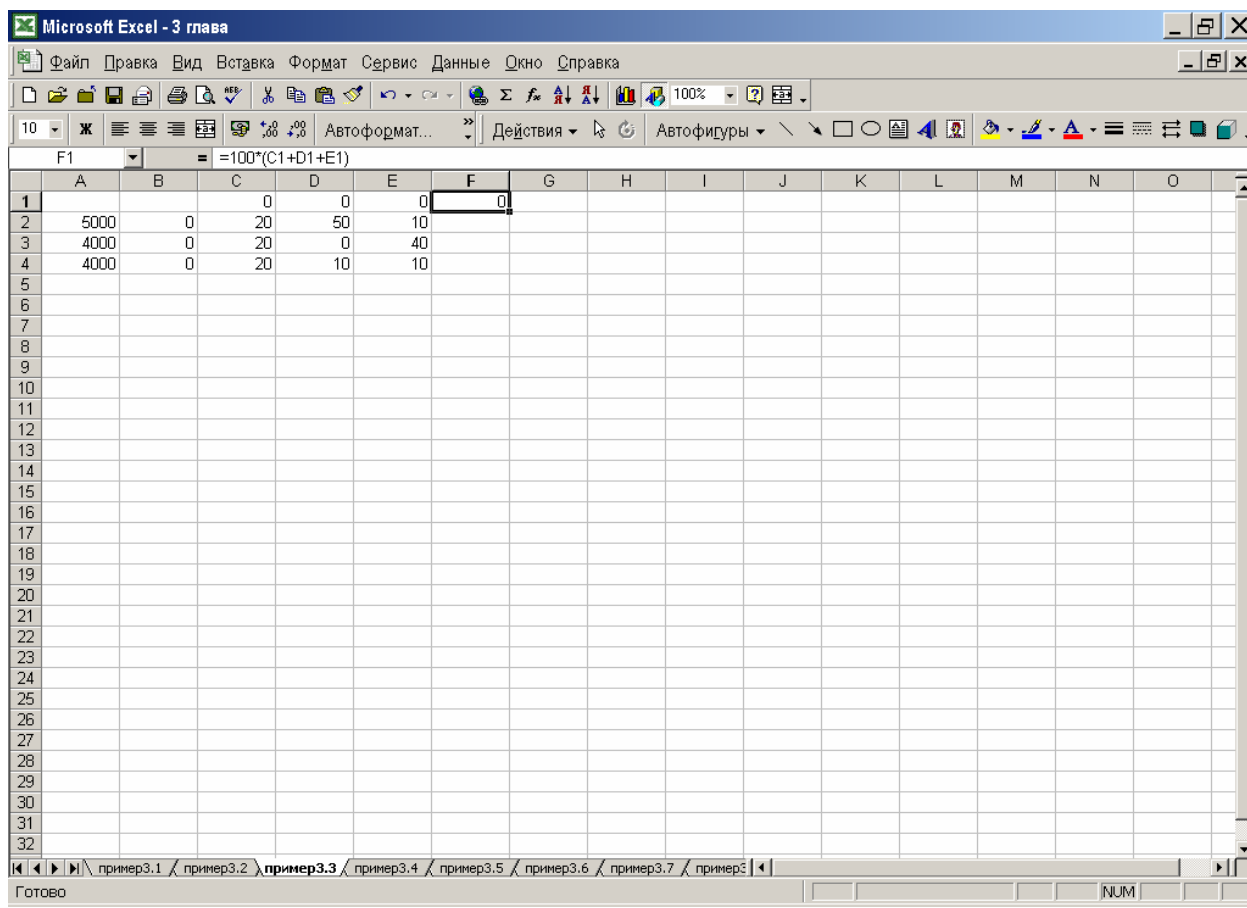


Рис. 3.3. Результат ввода данных из примера 3.3

7. Дадим команду Сервис > Поиск решения—откроется диалоговое окно Поиск решения.
8. В поле Установить целевую ячейку мышью укажем ячейку, содержащую оптимизируемое значение (F1) (рис. 3.4). Установим переключатель Равной в положение максимальному значению (требуется максимальный объем производства).

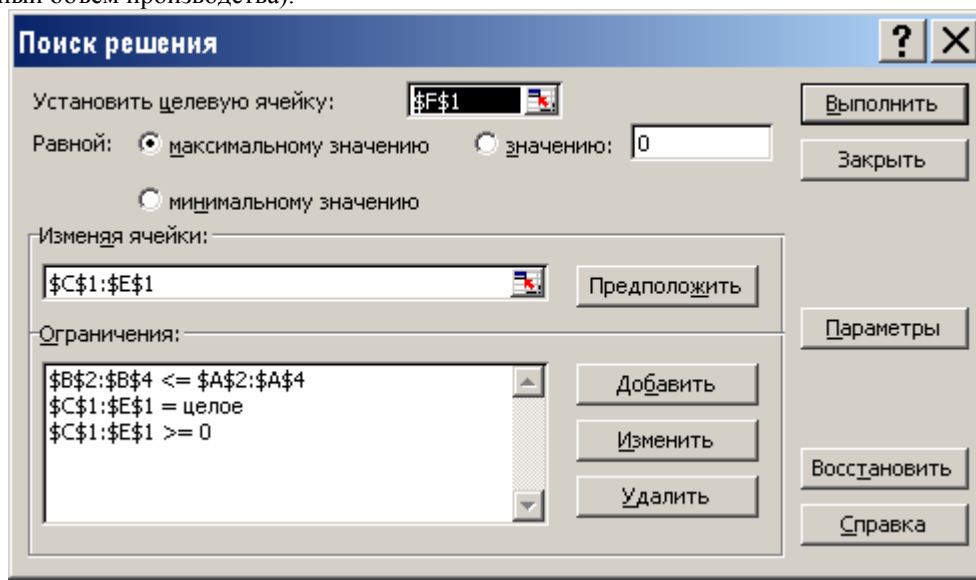


Рис. 3.4. Пример заполнения диалогового окна Поиск решения

9. В поле Изменяя ячейки мышью зададим диапазон подбираемых параметров (неизвестных x_i) — C1:E1.
10. Чтобы определить набор ограничений, щелкнем на кнопке Добавить. В диалоговом окне Добавление ограничения в поле Ссылка на ячейку мышью укажем диапазон B2:B4. В качестве условия зададим \leq . В поле Ограничение мышью зададим диапазон A2:A4 (рис. 3.5). Это условие указывает, что дневной расход ингредиентов не должен превосходить запасов. Щелкнем на кнопке ОК.

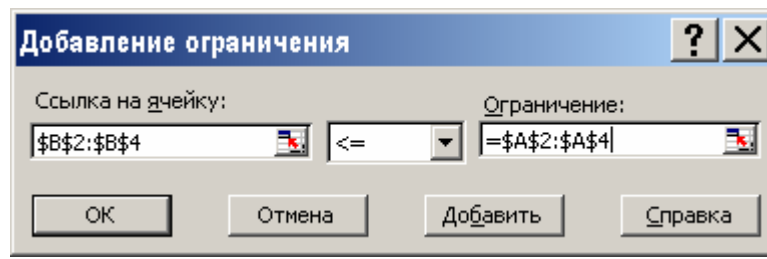


Рис. 3.5. Пример заполнения диалогового окна Добавление ограничения

11. Снова щелкнем на кнопке Добавить. В поле Ссылка на ячейку укажем диапазон C1:E1. В качестве условия зададим \geq . В поле Ограничение зададим число 0. Это условие указывает, что число приготавливаемых блюд неотрицательно. Щелкнем на кнопке ОК.
12. Снова щелкнем на кнопке Добавить. В поле Ссылка на ячейку укажем диапазон C1:E1. В качестве условия выберем пункт цел. Это условие не позволяет производить доли блюд. Щелкнем на кнопке ОК.
13. Щелкнем на кнопке Выполнить. По завершении оптимизации откроется диалоговое окно Результаты поиска решения.
14. Установим переключатель Значения параметров в положение Сохранить найденное решение, после чего щелкнем на кнопке ОК.

В результате получится оптимальный набор переменных (оптимальное количество приготавливаемых фирменных блюд) при данных ограничениях (при данном количестве ингредиентов): блюда А — 184 порции (x_1), блюда В — 24 порции (x_2) и блюда С — 8 порций (x_3). При этом общая стоимость блюд (Z) будет максимальной и равной 21 600 руб. При этом останутся неизрасходованными 40 г первого ингредиента (рис. 3.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1			184	24	8	21600									
2	5000	4960	20	50	10										
3	4000	4000	20	0	40										
4	4000	4000	20	10	10										
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															
28															
29															
30															
31															
32															

Рис. 3.6. Результат вычислений из примера 3.3

Проанализируем полученное решение. Проверить его оптимальность можно, экспериментируя со значениями ячеек C1:E1. Например, допустим, что решили приготовить количества блюд, соответственно 184, 23, 9. Тогда при той же общей стоимости блюд будет перерасход второго ингредиента на 40 г, что, естественно, недопустимо. Можно рассмотреть и другие варианты. Чтобы восстановить оптимальные значения, можно в любой момент повторить операцию поиска решения.

Пример 3.4. Туристская фирма заключила контракт с двумя турбазами: в г. Сухуми и в окрестных городах, рассчитанных, соответственно, на 200 и 150 человек.

Туристам для осмотра предлагается обезьяний питомник в городе, ботанический сад и поход в горы. Составьте маршрут движения туристов так, чтобы это обошлось возможно дешевле, если:

1. обезьяний питомник принимает в день 70 человек, ботанический сад — 180 человек, а в горы в один день могут пойти 110 человек;

2. стоимость одного посещения выражается таблицей:

Турбаза	ОП	БС	Поход
1	5	6	20
2	10	12	5

Решение. Для решения задачи введем обозначения: пусть x_1 — число туристов из турбазы в Сухуми, посещающих обезьяний питомник; x_2 — число туристов из турбазы в Сухуми, посещающих ботанический сад; x_3 — число туристов из турбазы в Сухуми, отправляющихся в поход; x_4 — число туристов из окрестной турбазы, посещающих обезьяний питомник; x_5 — число туристов из окрестной турбазы, посещающих ботанический сад; x_6 — число туристов из окрестной турбазы, отправляющихся в поход. Составим целевую функцию — она заключается в минимизации стоимости дневных мероприятий турфирмы:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 12x_5 + 5x_6.$$

Определим имеющиеся ограничения (руководствуясь условиями задачи):

1. $x_1 + x_4 \leq 70$;
2. $x_2 + x_5 \leq 180$;
3. $x_3 + x_6 \leq 110$;
4. $x_1 + x_2 + x_3 = 200$;
5. $x_4 + x_5 + x_6 = 150$.

Турбаза	ОП	БС	Поход
1	5	6	20
2	10	12	5

Кроме того, поскольку турист неделим и количество туристов, участвующих в каждом мероприятии, не может быть отрицательным, добавим еще ряд ограничений:

- 1) $x_1 \geq 0$;
- 2) $x_2 \geq 0$;
- 3) $x_3 \geq 0$;
- 4) $x_4 \geq 0$;
- 5) $x_5 \geq 0$;
- 6) $x_6 \geq 0$;
- 7) x_1 — целое;
- 8) x_2 — целое;
- 9) x_3 — целое;
- 10) x_4 — целое;
- 11) x_5 — целое;
- 12) x_6 — целое.

Теперь можно приступить к решению задачи на компьютере.

1. Откройте новый рабочий лист (Вставка > Лист).
2. В ячейки A2, A3 и A4 занесите дневное количество посетителей различных мероприятий — числа 70, 180 и 110, соответственно.
3. В ячейки A5 и A6 занесите количество туристов в обеих гостиницах — числа 200, и 150, соответственно.
4. В ячейки C1:H1 занесите начальные значения неизвестных x_1, x_2, \dots, x_6 (нули) — в дальнейшем значения этих ячеек будут подобраны автоматически.
5. В ячейках диапазона C2:H6 разместите таблицу коэффициентов основных ограничений:
 - 1,0,0,1,0,0;
 - 0,1,0,0,1,0;
 - 0,0,1,0,0,1;
 - 1,1,1,0,0,0;
 - 0,0,0,1,1,1.
6. В ячейках B2:B6 укажите формулы для расчета ограничений. В ячейке B2 формула будем иметь вид $=\$C\$1*C2 + \$D\$1*D2 + \$E\$1E2 + \$F\$1*F2 + \$G\$1*G2 + + \$H\$1*H2$, а остальные формулы можно получить методом автозаполнения (копирования).
7. В ячейку I1 занесите формулу целевой функции $=5*C1 + 6*D1 + 20*E1 + + 10*F1 + 12*G1 + 5*H1$.
8. Дайте команду Сервис > Поиск решения — откроется диалоговое окно Поиск решения.
9. В поле Установить целевую ячейку укажите ячейку, содержащую оптимизируемое значение (I1). Установите переключатель Равной в положение минимальному значению (требуется минимальный объем затрат).
10. В поле Изменяя ячейки задайте диапазон подбираемых параметров (неизвестных x_i) — C1:H1.

11. Чтобы начать определять набор ограничений, щелкните на кнопке Добавить. В диалоговом окне Добавление ограничения в поле Ссылка на ячейку укажите диапазон B2:B4. В качестве условия задайте \leq . В поле Ограничение задайте диапазон A2:A4. Это условие указывает, что дневное количество посетителей мероприятий не должно превосходить их возможностей. Щелкните на кнопке ОК.

12. Для продолжения определения набора ограничений щелкните на кнопке Добавить. В диалоговом окне Добавление ограничения в поле Ссылка на ячейку укажите диапазон B5:B6. В качестве условия задайте $=$. В поле Ограничение задайте диапазон A5:A6. Это условие указывает, что дневное количество посетителей мероприятий должно быть равно количеству туристов. Щелкните на кнопке ОК.

13. Снова щелкните на кнопке Добавить. В поле Ссылка на ячейку укажите диапазон C1:H1. В качестве условия задайте \geq . В поле Ограничение задайте число 0. Это условие указывает, что число участников мероприятий неотрицательно. Щелкните на кнопке ОК.

14. Снова щелкните на кнопке Добавить. В поле Ссылка на ячейку укажите диапазон C1:H1. В качестве условия выберите пункт цел. Это условие указывает, что турист неделим. Щелкните на кнопке ОК.

15. Щелкните на кнопке Выполнить. По завершении оптимизации откроется диалоговое окно Результаты поиска решения.

16. Установите переключатель Сохранить найденное решение, после чего щелкните на кнопке ОК.

В результате получится оптимальный набор переменных (оптимальное количество туристов для участия в каждом мероприятии из каждой гостиницы) при данных ограничениях (при заданных возможностях мероприятий): число туристов из турбазы в Сухуми, посещающих обезьяний питомник ($x_1 = 30$), ботанический сад ($x_2 = 170$) и отправляющихся в поход ($x_3 = 0$); число туристов из окрестной турбазы, посещающих обезьяний питомник ($x_4 = 40$), посещающих ботанический сад ($x_5 = 0$) и отправляющихся в поход ($x_6 = 110$). При этом суммарные расходы турфирмы (Z) составят 2120 руб. и будут минимальными.

Можно проанализировать полученное решение. Его оптимальность проверяется путем эксперимента со значениями ячеек C1:H1. Чтобы восстановить оптимальные значения, можно в любой момент повторить операцию поиска решения.

Другими типовыми примерами задач линейного программирования являются задачи:

1. О рационе питания.
2. Об оптимальных перевозках.
3. Об оптимальном плане пошивочной мастерской.
4. О рациональном использовании сырья. Рассмотрим эти задачи в качестве упражнений.

Аппроксимация экспериментальных данных

На практике часто приходится сталкиваться с задачей о сглаживании экспериментальных зависимостей или задачей аппроксимации. Аппроксимацией называется процесс подбора эмпирической формулы $y=f(x)$ для установленной из опыта функциональной зависимости $y=f(x)$. Эмпирические формулы служат для аналитического представления опытных данных.

Одна независимая переменная

Обычно задача аппроксимации распадается на две части. Сначала устанавливают вид зависимости $y=f(x)$ и, соответственно, вид эмпирической формулы, то есть решают, является ли она линейной, квадратичной, логарифмической или какой-либо другой. После этого определяются численные значения неизвестных параметров выбранной эмпирической формулы, для которых приближение к заданной функции оказывается наилучшим. Если нет каких-либо теоретических соображений для подбора вида формулы, обычно выбирают функциональную зависимость из числа наиболее простых, сравнивая их графики с графиком заданной функции.

После выбора вида формулы определяют ее параметры. Для наилучшего выбора параметров задают меру близости аппроксимации экспериментальных данных. Во многих случаях, в особенности если функция $f(x)$ задана графиком или таблицей (на дискретном множестве точек), для оценки степени приближения рассматривают разности $f(x_i) - \varphi(x_i)$ для точек x_0, x_1, \dots, x_n . Существуют различные меры близости и, соответственно, способы решения этой задачи. Некоторые из них очень просты, быстро приводят к результату, но результат этот является сильно приближенным. Другие более точные, но и более сложные. Обычно определение параметров при известном виде зависимости осуществляют по методу наименьших квадратов. При этом функция $\varphi(x)$ считается наилучшим приближением к $f(x)$, если для нее сумма квадратов невязок δ ; или отклонений «теоретических» значений $\varphi(x_i)$, найденных по эмпирической формуле, от соответствующих опытных значений y_i ,

$$Z = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \rightarrow \min \quad (3.10)$$

имеет наименьшее значение по сравнению с другими функциями, из числа которых выбирается искомое приближение.

Используя методы дифференциального исчисления, метод наименьших квадратов формулирует аналитические условия достижения суммой квадратов отклонений (3.10) своего наименьшего значения. Так,

если функция $\varphi(x)$ вполне определяется своими параметрами k, l, m, \dots , то наилучшие (в указанном смысле (3.10)) значения этих параметров находятся из решения системы уравнений. Например, в простейшем случае, когда функция $\varphi(x)$ представлена линейным уравнением $y = ax + b$, система имеет вид:

$$\begin{cases} a * \sum_{i=1}^n x_i^2 + b * \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i * y_i, \\ a * \sum_{i=1}^n x_i + b * n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (3.11)$$

В простейшем случае задача аппроксимации экспериментальных данных выглядит следующим образом. Пусть есть какие-то данные, полученные практическим путем (в ходе эксперимента или наблюдения), которые можно представить парами чисел $(x; y)$.

На основе этих данных требуется подобрать функцию $y = \varphi(x)$ которая наилучшим образом сглаживала бы экспериментальную зависимость между переменными и по возможности точно отражала общую тенденцию зависимости между x и y , исключая погрешности измерений и случайные отклонения. Это значит, что отклонения $y_i - y_i(x_i)$ в каком-то смысле были бы наименьшими. Например, в смысле (3.10).

Выяснить вид функции можно либо из теоретических соображений, либо анализируя расположение точек (x_i, y_i) на координатной плоскости.

Например, пусть точки расположены так, как показано на рис. 3.7.

Учитывая то, что практические данные получены с некоторой погрешностью, обусловленной неточностью измерений, необходимостью округления результатов и т. п., естественно предположить, что здесь имеет место линейная зависимость $y = ax + b$.

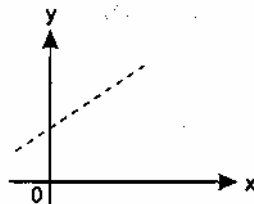


Рис. 3.7. Возможный вариант расположения экспериментальных точек

Чтобы функция приняла конкретный вид, необходимо каким-то образом вычислить a и b . Для этого можно решить систему (3.11).

Расположение экспериментальных точек в виде кривой на рис. 3.8 наводит на мысль, что зависимость обратно пропорциональна и функцию $\varphi(x)$ нужно подбирать в виде $y = a + b/x$. Здесь также необходимо вычислить параметры a и b .

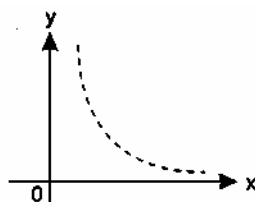


Рис. 3.8. Другой вариант расположения экспериментальных точек

Таким образом, расположение экспериментальных точек может иметь самый различный вид, и каждому соответствует конкретный тип функции.

Построение эмпирической функции сводится к вычислению входящих в нее параметров, так чтобы из всех функций такого вида выбрать ту, которая лучше других описывает зависимость между изучаемыми величинами. То есть сумма квадратов разности между табличными значениями функции в некоторых точках и значениями, вычисленными по полученной формуле, должна быть минимальна.

В MS Excel аппроксимация экспериментальных данных осуществляется путем построения их графика (x — отвлеченные величины) или точечного графика (x — имеет конкретные значения) с последующим подбором подходящей аппроксимирующей функции (линии тренда). Возможны следующие варианты функций:

1. Линейная — $y = ax + b$. Обычно применяется в простейших случаях, когда экспериментальные данные возрастают или убывают с постоянной скоростью.
2. Полиномиальная — $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, где до шестого порядка включительно ($n \leq 6$), a_i — константы. Используется для описания экспериментальных данных, попеременно возрастающих и убывающих. Степень полинома определяется количеством экстремумов (максимумов или минимумов) кривой. Полином второй степени может описать только один максимум или минимум, полином третьей степени может иметь один или два экстремума, четвертой степени — не более трех экстремумов и т. д.
3. Логарифмическая — $y = a \ln x + b$, где a и b — константы, \ln — функция натурального логарифма. Функция применяется для описания экспериментальных данных, которые вначале быстро растут или

убывают, а затем постепенно стабилизируются.

4. Степенная — $y = bx^a$, где a и b — константы. Аппроксимация степенной функцией используется для экспериментальных данных с постоянно увеличивающейся (или убывающей) скоростью роста. Данные не должны иметь нулевых или отрицательных значений.

5. Экспоненциальная — $y = be^{ax}$, где a и b — константы, e — основание натурального логарифма. Применяется для описания экспериментальных данных, которые быстро растут или убывают, а затем постепенно стабилизируются. Часто ее использование вытекает из теоретических соображений.

Степень близости аппроксимации экспериментальных данных выбранной функцией оценивается коэффициентом детерминации (R^2). Таким образом, если есть несколько подходящих вариантов типов аппроксимирующих функций, можно выбрать функцию с большим коэффициентом детерминации (стремящимся к 1).

Для осуществления аппроксимации на диаграмме экспериментальных данных необходимо щелчком правой кнопки мыши вызвать всплывающее контекстное меню и выбрать пункт Добавить линию тренда. В появившемся диалоговом окне Линия тренда на вкладке Тип выбирается вид аппроксимирующей функции, а на вкладке Параметры задаются дополнительные параметры, влияющие на отображение аппроксимирующей кривой.

Пример 3.5. Исследовать характер изменения с течением времени уровня производства некоторой продукции и подобрать аппроксимирующую функцию, располагая следующими данными:

Год	Производство продукции
1997	17,1
1998	18,0
1999	18,9
2000	19,7
2001	19,7

Решение

1. Для построения диаграммы, прежде всего, необходимо ввести данные в рабочую таблицу. Вводим в ячейку A1 слово Год. Затем в ячейки A2:A6 последовательно вводим годы, начиная с 1997. Далее в ячейку B1 заносим слово Продукция и устанавливаем табличный курсор в ячейку B2. Здесь должно оказаться значение 17,1 соответствующее значению года в ячейке A2. Аналогично заполняем ячейки B3:B6.

2. Далее по введенным в рабочую таблицу данным необходимо построить диаграмму. Поскольку здесь необходимо строить динамику изменений производства продукции, не привязываясь к конкретному году, а от отвлеченных переменных — выберем диаграмму График.

Щелчком указателя мыши на кнопке на панели инструментов вызываем Мастер диаграмм. В появившемся диалоговом окне выбираем тип диаграммы График, вид — левый средний. После нажатия кнопки Далее указываем диапазон данных — B1:B6 (с помощью мыши). Проверяем положение переключателя Ряды в: столбцах. Выбираем вкладку Ряд и с помощью мыши вводим диапазон подписей оси X: A2:A6. Нажав кнопку Далее, вводим название диаграммы — Производство продукции, название осей X и Y: Годы и Условные единицы, соответственно. Нажимаем кнопку Готово.

Получен график экспериментальных данных.

3. Осуществим аппроксимацию полученной кривой полиномиальной функцией второго порядка, поскольку кривая довольно гладкая и не сильно отличается от прямой линии. Для этого указатель мыши устанавливаем на одну из точек графика и щелкаем правой кнопкой. В появившемся контекстном меню выбираем пункт Добавить линию тренда. Появляется диалоговое окно Линия тренда (рис. 3.9).

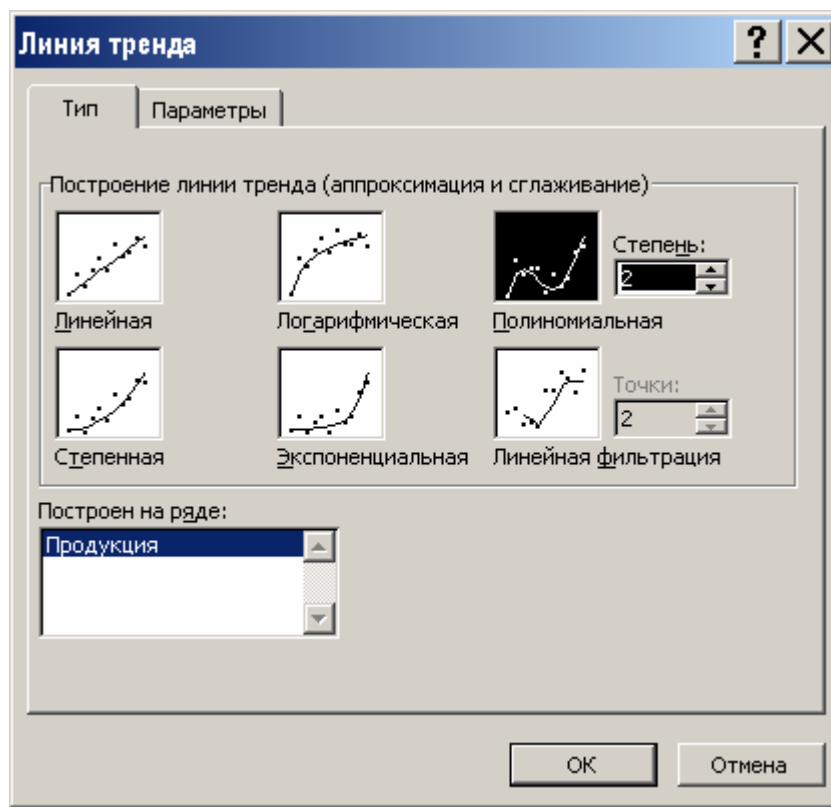


Рис. 3.9. Вкладка Тип диалогового окна Линия тренда

В этом окне на вкладке Тип выбираем тип линии тренда— Полиномиальная и устанавливаем степень — 2. Затем открываем вкладку Параметры (рис. 3.10) и устанавливаем флажки в поля показывать уравнение на диаграмме и поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2). После чего нужно щелкнуть на кнопке ОК.

В результате получим на диаграмме аппроксимирующую кривую (рис. 3.11). Как видно из рис. 3.11, уравнение наилучшей полиномиальной аппроксимирующей функции для некоторых отвлеченных значений x (1, 2, 3,...) выглядит как

$$y = -0,14x^2 + 1,5x + 15,66.$$

При этом точность аппроксимации достаточно высока — $R^2 = 0,986$.

Линия тренда [?] [X]

Тип | **Параметры**

Название аппроксимирующей (сглаженной) кривой

☒ автоматическое: Полиномиальный (Продукция)

☐ другое:

Прогноз

вперед на: периодов

назад на: периодов

☐ пересечение кривой с осью Y в точке:

☒ показывать уравнение на диаграмме

☒ поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)

OK Отмена

Рис. 3.10. Вкладка Параметры диалогового окна Линия тренда

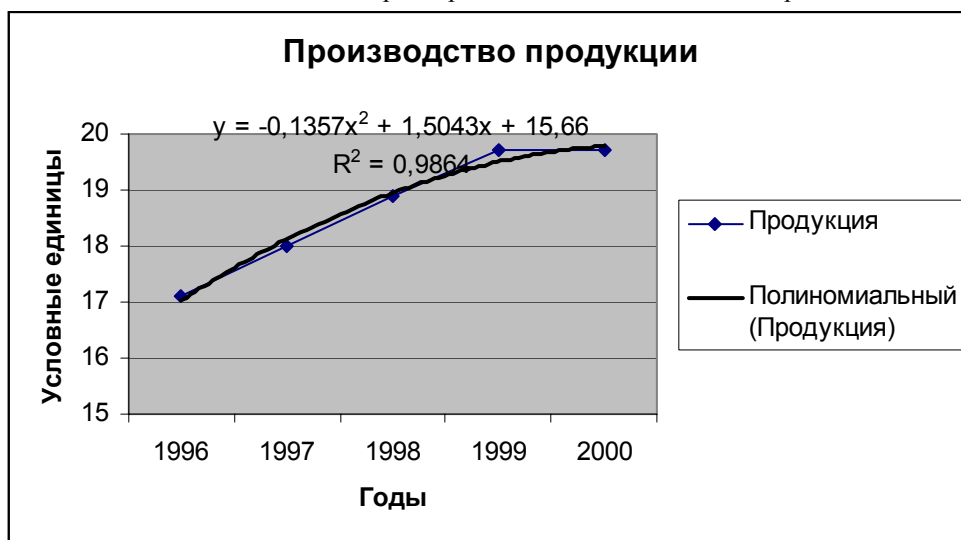


Рис. 3.11. Экспериментальные данные, аппроксимированные полиномиальной кривой, из примера 3.5

4. Попробуем улучшить качество аппроксимации выбором другого типа функции (возможно более адекватного). Здесь возможным вариантом представляется логарифмическая функция. Для этого повторяем операции п. 3. за исключением того, что в окне Линия тренда на вкладке Тип выбираем тип линии тренда — Логарифмическая.

В результате получим другой вариант аппроксимации — логарифмической кривой (рис. 3.12).

Как можно видеть из рис. 3.12, уравнение наилучшей логарифмической аппроксимирующей функции несколько уступает по точности аппроксимации полиномиальной кривой — $R^2 = 0,9716 < 0,986$. Поэтому если нет каких-либо теоретических соображений, то можно считать, что наилучшей аппроксимацией является аппроксимация полиномиальной функцией второй степени (из двух рассмотренных вариантов).

Пример 3.6. После выброса ядовитого вещества его концентрация (мг/л) в водоеме изменялась в соответствии со следующей таблицей:

Время после выброса (час)	Концентрация вещества (мг/л)
1	8,0
3	2,8
5	1,0
8	0,3

Определить вид функциональной зависимости изменения концентрации вещества от времени и оценить его концентрацию в водоеме в момент выброса.

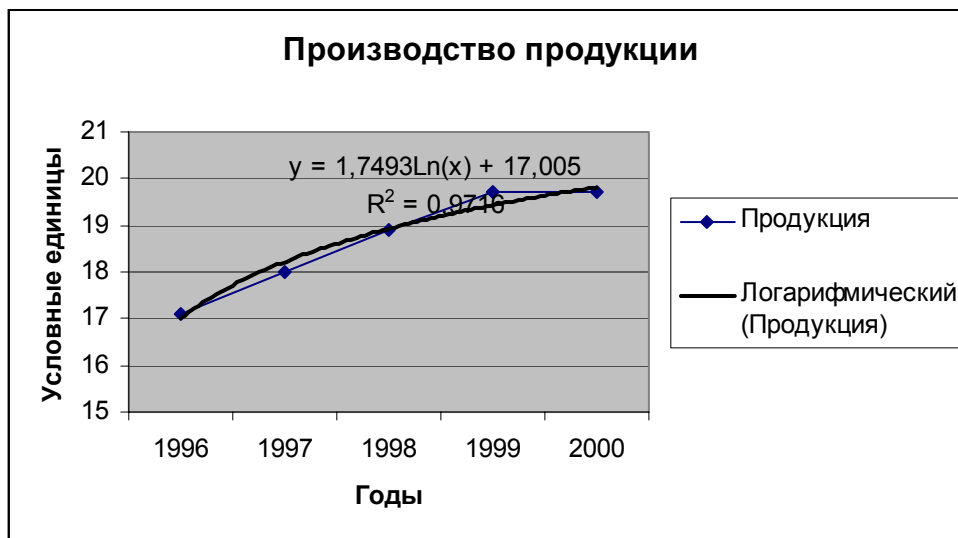


Рис. 3.12. Экспериментальные данные, аппроксимированные логарифмической кривой, из примера 3.5

Решение

1. Для построения диаграммы, прежде всего, необходимо ввести данные в рабочую таблицу. Вводим в ячейку A1 слово *Время*. Затем в ячейки A2:A5 последовательно вводим время: 1,3,5,8. Далее в ячейку B1 заносим слово *Концентрация* и в диапазон B2:B5 вводим соответствующие концентрации вещества.

2. Далее по введенным в рабочую таблицу данным необходимо построить диаграмму. Поскольку здесь необходимо строить динамику изменений концентрации вещества в соответствии с изменениями времени — будем строить диаграмму Точечная.

Щелчком указателя мыши на кнопке на панели инструментов вызываем Мастер диаграмм. В появившемся диалоговом окне выбираем тип диаграммы Точечная, вид — левый верхний. После нажатия кнопки Далее указываем диапазон данных — B1:B5 (с помощью мыши). Проверяем положение переключателя Ряды в: столбцах. Выбираем вкладку Ряд и с помощью мыши вводим диапазон подписей оси X: A2:A5. Нажав кнопку Далее, вводим название диаграммы — *Концентрация вещества*, название осей X и Y: *Время* и *Концентрация*, соответственно. Нажимаем кнопку Готово.

Получен график экспериментальных данных.

3. Осуществим аппроксимацию полученной кривой. Поскольку кривая напоминает экспоненту и из теоретических соображений наиболее вероятный закон

изменения — экспоненциальный, целесообразно аппроксимировать кривую изменения концентрации экспоненциальной функцией. Для этого указатель мыши устанавливаем на одну из точек графика и щелкаем правой кнопкой. В появившемся контекстном меню выбираем пункт Добавить линию тренда. Появляется диалоговое окно Линия тренда.

В этом окне на вкладке Тип выбираем тип линии тренда — Экспоненциальная. Затем открываем вкладку Параметры и устанавливаем флажки в поля показывать уравнение на диаграмме и поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2). Кроме этого, для того, чтобы оценить концентрацию вещества в водоеме в момент выброса в поле Прогноз назад на устанавливаем 1 периодов. После чего щелкаем на кнопке ОК. В результате получим на диаграмме аппроксимирующую кривую (рис. 3.13).

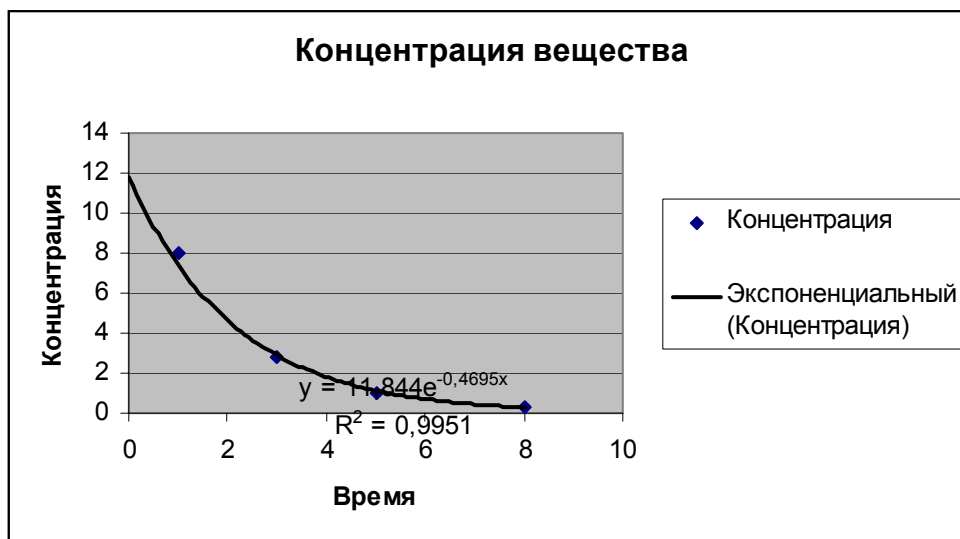


Рис. 3.13. Экспериментальные данные, аппроксимированные экспоненциальной функцией из примера 3.6

Как видно из рис. 8.13, уравнение наилучшей экспоненциальной аппроксимирующей функции для зависимости концентрации от времени выглядит как

$$y = 11,844e^{-0,4695x}. \quad (3.12)$$

При этом точность аппроксимации очень высокая — $R^2 = 0,9951$, что позволяет считать описание процесса изменения концентрации вещества в водоеме экспоненциальной функцией адекватным. Расчетная оценка концентрации вещества в момент выброса, как видно из графика, составляет около 12 мг/л. Более точные цифры могут быть получены из уравнения (3.12) при $x = 0$ ($y_0 = 11,84$ мг/л).

Несколько независимых переменных

В тех случаях, когда аппроксимируемая переменная y зависит от нескольких независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

подход с построением линии тренда не дает решения. Здесь могут быть использованы следующие специальные функции MS Excel:

ЛИНЕЙН и ТЕНДЕНЦИЯ для аппроксимации линейных функций вида:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \quad (3.13)$$

ЛГРФПРИБЛ и РОСТ для аппроксимации показательных функций вида:

$$y = a_0a_1^{x_1}a_2^{x_2}\dots a_n^{x_n}. \quad (3.14)$$

Функции ЛИНЕЙН и ЛГРФПРИБЛ служат для вычисления неизвестных коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n , в выражениях (3.13) и (3.14) соответственно, а также коэффициентов детерминации (R^2), значений критерия Фишера, стандартных ошибок коэффициентов a_i и ряда других показателей.

Обе функции имеют одинаковые параметры:

ЛИНЕЙН(известные_значения_y; известные_значения_x; конст; статистика)

ЛГРФПРИБЛ(известные_значения_y; известные_значения_x; конст; статистика)

Здесь:

известные_значения_y — множество наблюдаемых значений y из выражений (3.13), (3.14);

известные_значения_x — множество наблюдаемых значений x_1, x_2, \dots, x_n . Причем, если массив известные_значения_y имеет один столбец, то каждый столбец массива известные_значения_x интерпретируется как отдельная переменная, а если массив известные_значения_y имеет одну строку, то тогда каждая строка массива известные_значения_x интерпретируется как отдельная переменная;

конст — логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа a_0 была равна 0 (для функции ЛИНЕЙН) или 1 (для функции ЛГРФПРИБЛ).

При этом, если конст имеет значение ИСТИНА или опущено, то a_0 вычисляется обычным образом, а если конст имеет значение ЛОЖЬ, то a_0 полагается равным 0 или 1;

статистика — логическое значение, которое указывает, требуется ли вычислять дополнительную статистику по регрессии, если введено значение ИСТИНА, то дополнительные параметры вычисляются,

если ЛОЖЬ, то — нет (рис. 3.14),

ЛГРФПРИБЛ

Изв_знач_y C2:C10 = {61,2;33,6;12,3;43,
 Изв_знач_x A2:B10 = {20;1;50;1;100;1;20;
 Константа = логическое
 Стат 1 = ИСТИНА

Возвращает параметры экспоненциального приближения по методу наименьших квадратов.

Стат логическое значение, которое указывает, требуется ли вернуть дополнительную статистику по регрессии (ИСТИНА) или нет (ЛОЖЬ).

Значение: 0,918043057 OK Отмена

Рис. 3.14. Пример заполнения диалогового окна функции ЛГРФПРИБЛ

Функции ТЕНДЕНЦИЯ и РОСТ позволяют находить точки, лежащие на аппроксимирующих кривых (3.13) и (3.14), соответственно, для значений коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n , найденных функциями ЛИНЕЙН и ЛГРФПРИБЛ.

Пример 3.7. Источник радиоактивного излучения помещен в жидкость. Датчики расположены на расстоянии (x_1) 20, 50 и 100 см от источника. Измерения интенсивности излучения (y , мРн) проводились через 1,5 и 10 суток (x_2) после установки источника. Результаты измерений (y) приведены в таблице: Необходимо аппроксимировать данные уравнением вида (3.14) и найти неизвестные параметры.

ТЕНДЕНЦИЯ

Изв_знач_y C2:C8 = {3,2;2,8;3,3;3,3;3,3;
 Изв_знач_x A2:B8 = {120;20;100;25;130
 Нов_знач_x A10:B30 = {100;15;105;15;110
 Константа = логическое

Возвращает значения в соответствии с линейной аппроксимацией по методу наименьших квадратов.

Нов_знач_x новые значения x, для которых ТРЕНД возвращает соответствующие значения y.

Значение: 3,279046077 OK Отмена

Рис. 3.15. Пример заполнения диалогового окна функции ТЕНДЕНЦИЯ

Решение

1. Введем данные в рабочую таблицу: в ячейку A1 — символ x_1 , в ячейку B1 — x_2 , в ячейку C1 — y . В диапазон ячеек A2:A10 внесем значения x_1 , в диапазон B2:B10 — значения x_2 и в диапазон C2:C10 — значения y (рис. 3.16).

	A	B	C
1	x1	x2	y
2	20	1	61,2
3	50	1	33,6
4	100	1	12,3
5	20	5	43,6
6	50	5	24
7	100	5	8,8
8	20	10	28,3
9	50	10	15,6
10	100	10	5,7

Рис. 3.16. Исходные данные из примера 3.7

2. Выделяем блок ячеек D1:F5 под массив результатов.
3. Поскольку уравнение для вычисления интенсивности излучения имеет степенной характер (3.14), вызываем функцию ЛГРФПРИБЛ (панель инструментов Стандартная, кнопка Вставка функции, рабочее поле Категория тип Статистические, рабочее поле Функция вид ЛГРФПРИБЛ).
4. Заполняем рабочие поля: Изв_знач_y — C2:C10, Изв_знач_x — A2:B10, Стат — 1 (рис. 3.14). Нажимаем сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.
5. В результате в диапазоне D1:F5 получим следующие данные:

Здесь первая строка — значения коэффициентов a_2 , a_1 , a_0 , соответственно, вторая строка — стандартные ошибки этих коэффициентов, третья строка — коэффициент детерминации R^2 и стандартная ошибка $\#$, четвертая строка — значение критерия Фишера и число степеней свободы и нижняя строка — сумма квадратов регрессии и остаточная сумма квадратов.

Таким образом, искомое аппроксимирующее уравнение имеет вид:

$$y = 99,7 * 0,98^{x_1} * 0,92^{x_2}.$$

Причем точность аппроксимации очень высокая — $R^2 = 0,99998$.

Пример 3.8. В бассейне проводится ежедневная частичная смена воды. Имеются данные семидневных наблюдений изменения уровня воды в бассейне (y) от продолжительности заполнения водой (и времени выпуска воды (x_2)).

X1	X2	Y
120	20	3,2
100	25	2,8
130	20	3,3
100	15	3,3
110	23	3,0
105	26	2,8
112	16	3,3

Необходимо найти значения уровня воды в бассейне в зависимости от длительностей заполнения $x \in [100; 130]$ и выпуска воды $x_2 \in [15; 25]$ с шагом $\Delta = 5$ минут. Построить поверхность.

Решение

1. Введем данные в рабочую таблицу: в ячейку A1 — символ x_1 , в ячейку B1 — x_2 в ячейку C1 — y . В

- диапазон ячеек A2:A8 внесем значения x_1 , в диапазон B2:B8 — значения x_2 и в диапазон C2:C8 — значения y .
- Введем значения x_1 и x_2 для получения расчетных значений y в соответствии с заданием: $x_1 \in [100; 130]$ в диапазон A10:A30, а $x_2 \in [15; 25]$ в диапазон B10:B30 (рис. 3.17).
 - Выделим блок ячеек C10:C30 под массив расчетных (предсказанных) значений y .
 - Поскольку уравнение для вычисления уровня воды линейное (3.13), вызываем функцию ТЕНДЕНЦИЯ (панель инструментов Стандартная, кнопка Вставка функции, рабочее поле Категория тип Статистические, рабочее поле Функция вид ТЕНДЕНЦИЯ).
 - Заполняем рабочие поля: Изв_знач_y — C2:C8, Изв_знач_x — A2:B8, Нов_знач_x — A10:B30 (рис. 3.15). Нажимаем сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter.
 - В результате в диапазоне C10:C30 получим предсказанные значения y (рис. 3.17).
 - Формируем блок данных для построения диаграммы. Для этого введем значения переменной x_1 в столбец E. Для этого в ячейку E1 вводим символ x . В диапазон ячеек E2:E8 — значения $x_1 \in [100; 130]$ с шагом $\Delta = 5$ минут. В диапазон F1:H1 вводятся значения x_2 15,20,30. Затем диапазон F2:H8 заполняется соответствующими расчетными значениями y .

В результате должна быть получена следующая таблица (рис. 3.18).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	x_1	x_2	y				15	20	25						
2	120	20	3,2		100	3,3	3	2,7							
3	100	25	2,8		105	3,3	3	2,8							
4	130	20	3,3		110	3,4	3,1	2,8							
5	100	15	3,3		115	3,4	3,1	2,9							
6	110	23	3		120	3,5	3,2	2,9							
7	105	26	2,8		125	3,5	3,2	3							
8	112	16	3,3		130	3,6	3,3	3							
9															
10	100	15	3,3												
11	105	15	3,3												
12	110	15	3,4												
13	115	15	3,4												
14	120	15	3,5												
15	125	15	3,5												
16	130	15	3,6												
17	100	20	3												
18	105	20	3,1												
19	110	20	3,1												
20	115	20	3,2												
21	120	20	3,2												
22	125	20	3,3												
23	130	20	3,3												
24	100	25	2,8												
25	105	25	2,8												
26	110	25	2,9												
27	115	25	2,9												
28	120	25	3												
29	125	25	3												
30	130	25	3,1												
31															
32															

Рис. 3.18. Данные из примера 3.8, подготовленные для построения плоскости

- Для построения диаграммы на панели инструментов Стандартная необходимо нажать кнопку Мастер диаграмм. В появившемся диалоговом окне Мастер диаграмм (шаг 1 из 4): тип диаграммы указываем тип диаграммы — Поверхность, и вид — Проволочная (прозрачная) поверхность (правую верхнюю диаграмму в правом окне). После чего нажимаем кнопку Далее в диалоговом окне.
- В появившемся диалоговом окне Мастер диаграмм (шаг 2 из 4): источник данных диаграммы необходимо выбрать вкладку Диапазон данных и в поле Диапазон мышью указать интервал данных F2:H8. Далее необходимо указать в строках или столбцах расположены ряды данных. Это определит ориентацию осей X и Y. В примере переключатель Ряды в с помощью указателя мыши установим в положение столбцах.
- Выбираем вкладку Ряд и в поле Подписи оси X указываем диапазон подписей. Для этого следует активизировать поле Подписи оси X, щелкнув в нем указателем мыши, и ввести диапазон подписей оси X — E2:E8.
- Вводим значения подписей оси Y. Для этого в рабочем поле Ряд указываем первую запись Ряд 1 и в рабочее поле Имя, активизировав его указателем мыши, вводим первое значение переменной $Y(x_2)$ — 15. Затем в поле Ряд указываем вторую запись Ряд 2 и в рабочее поле Имя вводим второе значение переменной x_2 — 20. Аналогично указываем $x_2 = 25$ вместо записи Ряд 3. После появления требуемых записей

необходимо нажать кнопку Далее.

12. В третьем окне требуется ввести заголовок диаграммы и названия осей. Для этого необходимо выбрать вкладку Заголовки, щелкнув на ней указателем мыши. Щелкнув в рабочем поле указателем мыши, ввести с клавиатуры в поля Ось X (категорий), Ось Y (рядов данных) и Ось Z (значений) соответствующие названия: x_1, x_2, y .

13. Нажимаем кнопку Готово, и после небольшого редактирования будет получена диаграмма изменения уровня воды в бассейне (рис. 3.19).

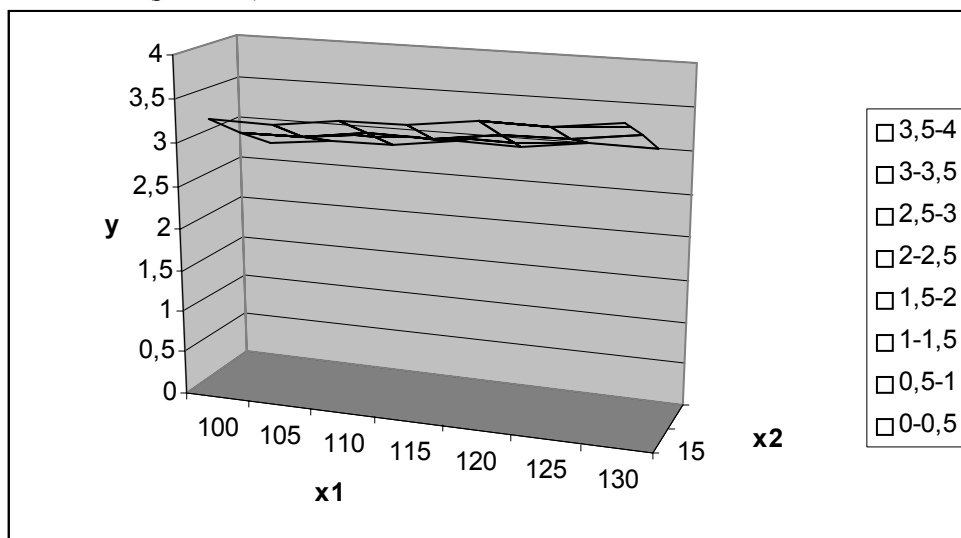


Рис. 3.19. Диаграмма изменения уровня воды в бассейне в зависимости от соотношения времени заполнения и выпуска воды (пример 3.8)