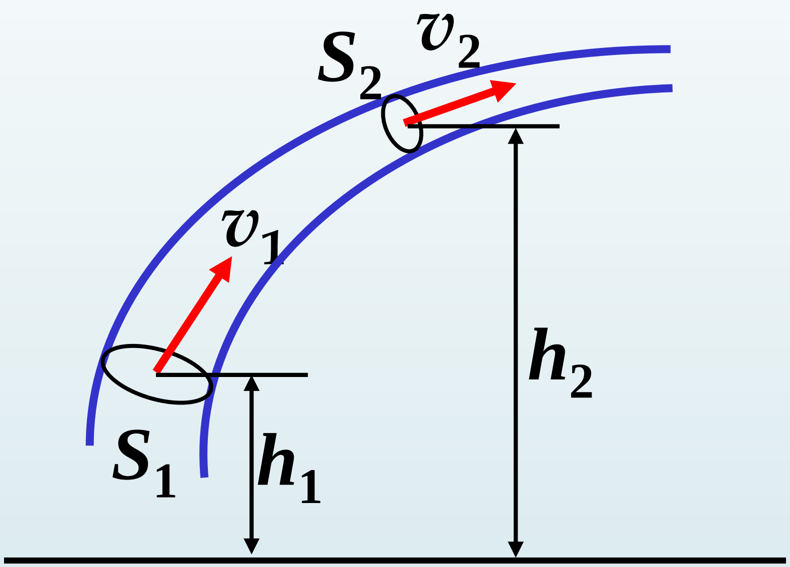
大学物理（一）

任课老师：蔡林
cailin@hust.edu.cn

第4章　　流体运动简介

●理想流体的稳定流动



➢ 连续性方程

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{常量}$$

➢ 伯努利方程

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{常量}}$$ ——伯努利方程

(对细流管、流线)

说明

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

1° 伯努利方程是理想流体稳定流动的动力学方程，实质上是牛顿力学中的功能原理的具体运用。

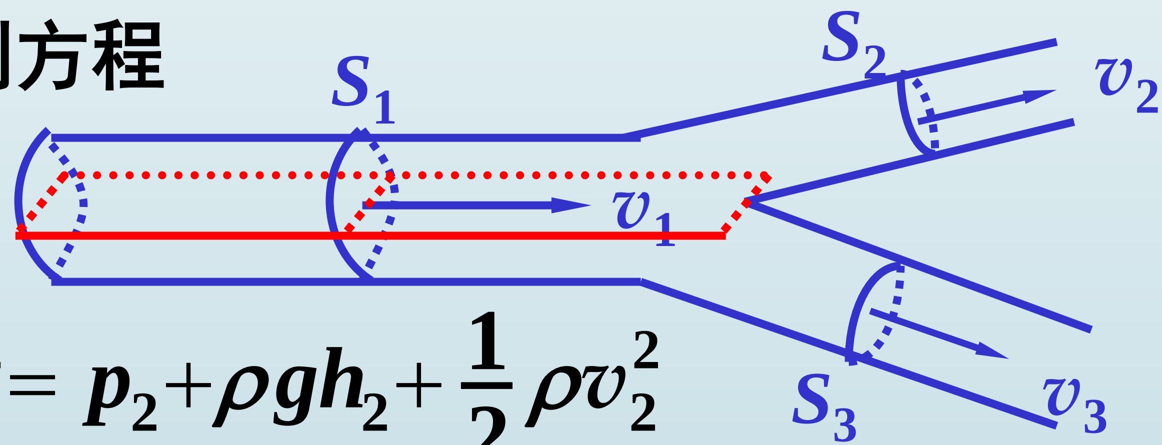
2° 适用条件

$$S_1v_1=S_2v_2+S_3v_3$$

① 理想流体做稳定流动

② 同一流管的不同截面积处或同一流线的不同点

3° 分支管道的伯努利方程



$$p_1+\rho gh_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho gh_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1=p_3+\frac{1}{2}\rho v_3^2+\rho gh_3$$

说明

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

4° 方程中各个物理量的意义

p 压强：单位 Pa $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{m}^3}$

p 对单位体积流体做功 $\Rightarrow$ $\mathrm{J/m^3}$

ρgh 单位体积流体的势能 $\mathrm{J/m^3} \Rightarrow \mathrm{Pa}$

静压强

$\frac{1}{2}\rho v^2$ 单位体积流体的动能 $\mathrm{J/m^3} \Rightarrow \mathrm{Pa}$ 动压强

5°与大气相通处的压强为大气压 p_0

（2）伯努利方程的应用

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

流体截面三参量：p、h、v

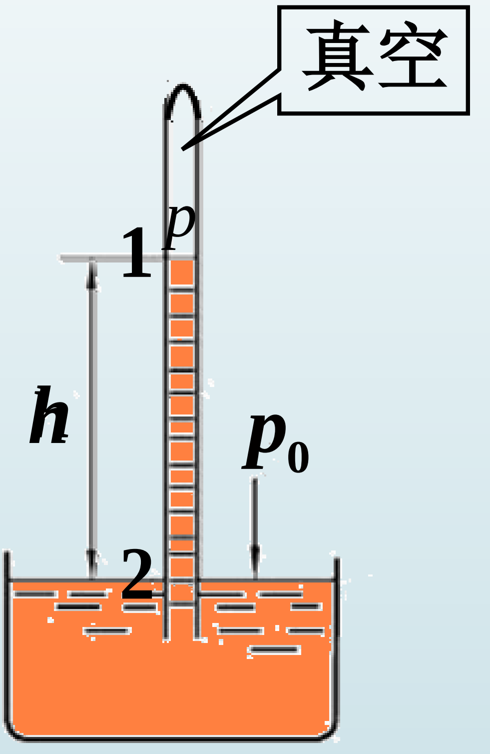
1° 不同流管中流速与压强的关系

① 均匀截面流管 S=常数

水平流管 $\begin{cases} p = constant \\ h = constant \\ v = constant \end{cases}$

竖直流管 $\begin{cases} v = constant \\ p+\rho gh = \text{常数} \end{cases}$

$$p_1+\rho gh = p_2$$



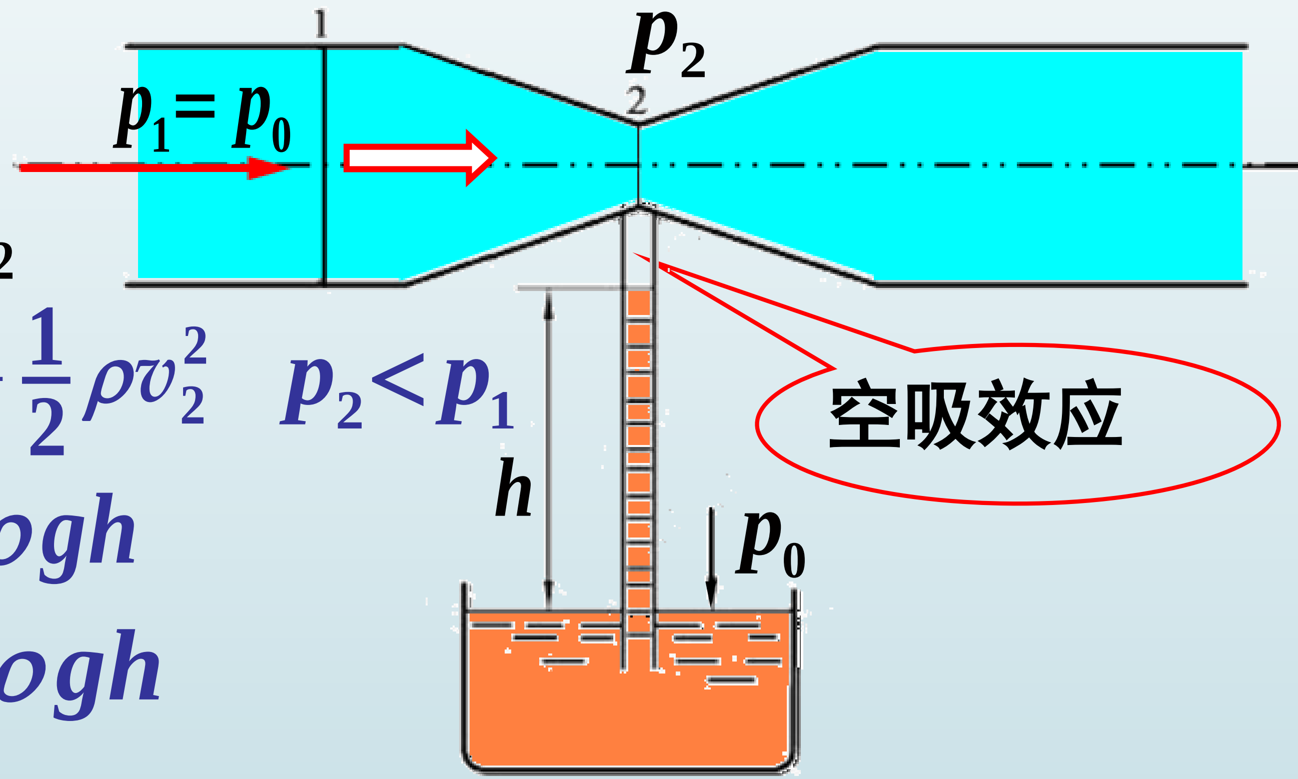
$$p+\rho gh = p_0 \Longrightarrow p=p_0-\rho gh$$ **抽真空？**

（2）伯努利方程的应用

$$\boxed{p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}}$$

1° 不同流管中流速与压强的关系

② 不均匀水平流管　　$h=$常数



$$S_1v_1=S_2v_2$$

$$S_1>S_2 \quad v_1<v_2$$

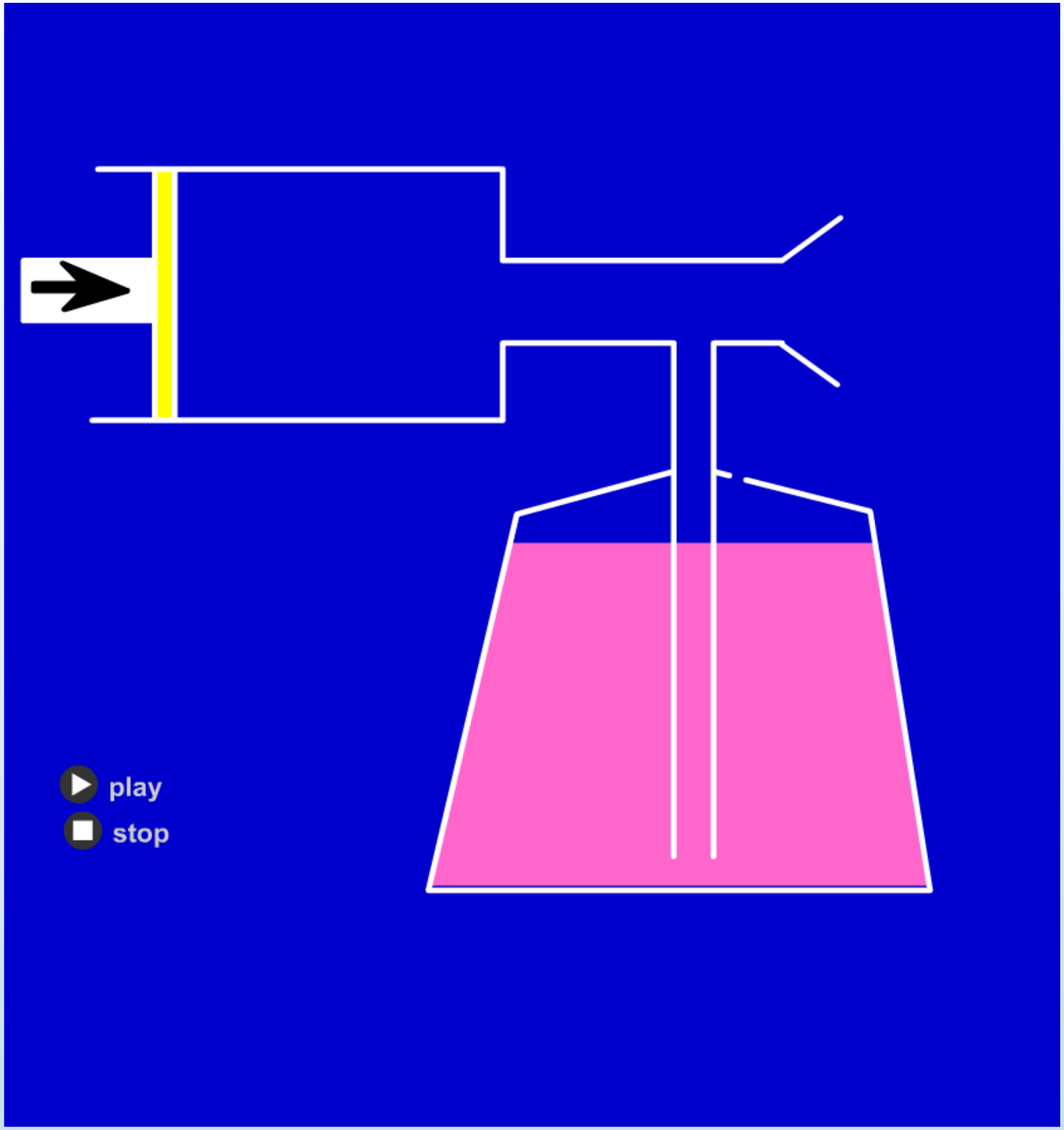
$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad p_2<p_1$$

$$p_0=p_2+\rho gh$$

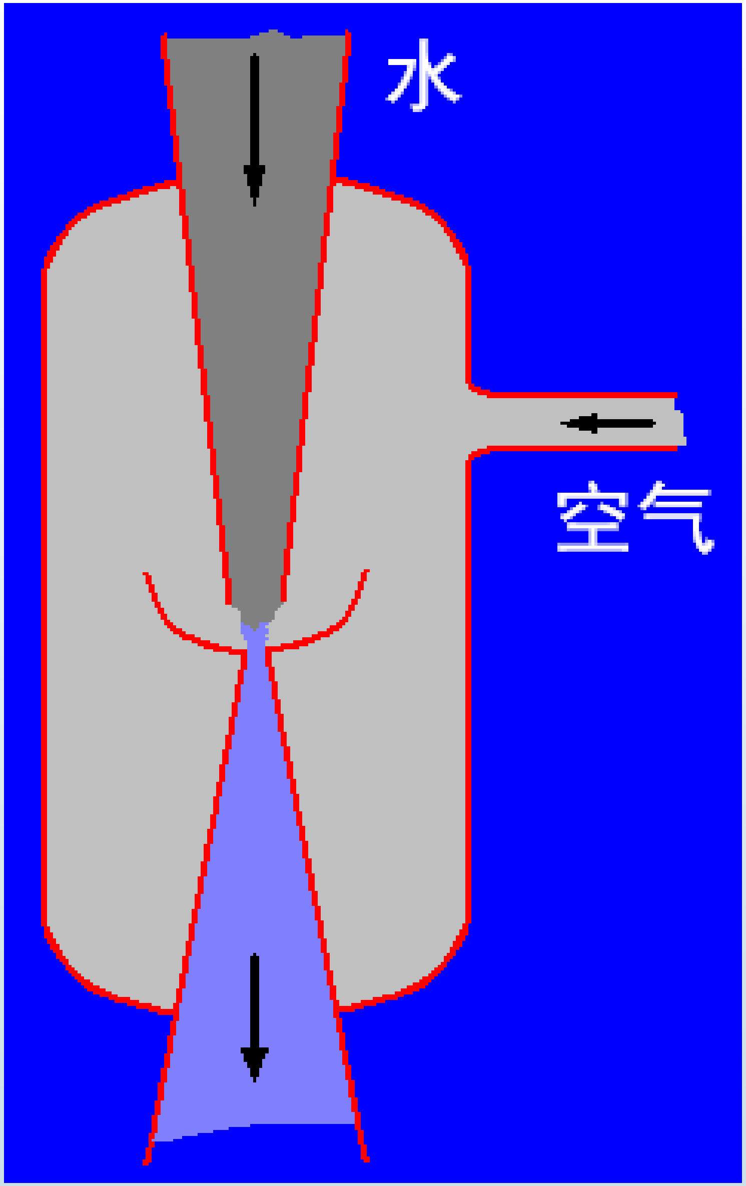
$$p_1=p_2+\rho gh$$

将流面提升高度h

例: 喷雾器



例: 水流抽气机



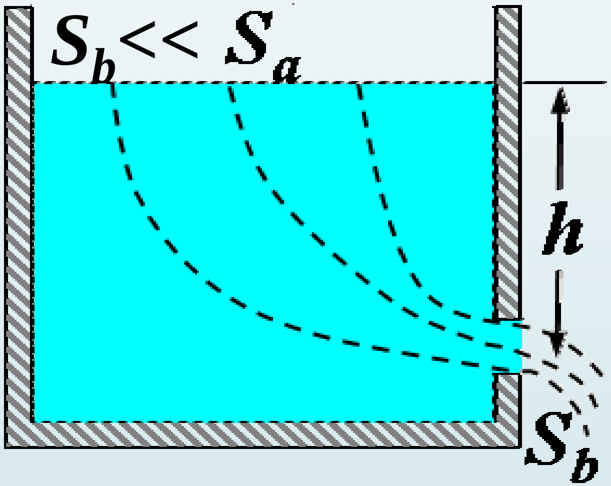
喷雾器和水流抽气机就是根据伯努利方程制成的。

2° 射流速率（即小孔流速）

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

例： 如图所示是底面积为S_a的柱形容器，液体从截面积为S_b的细管口流出，已知容器内的液面相对于细管的高度保持为h。

（1）估算细管出口处液体的流速。



解： 如图取一流管。

设上端面S_a的平均流速为v_a

下端面S_b的流速为v_b

根据伯努利方程

$$p_0+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v_a^2=p_0+0+\frac{1}{2}\rho v_b^2$$

$$v_b\approx\sqrt{2gh}$$

$$v_b^2-v_a^2=2gh$$

又连续性方程 $S_a v_a=S_b v_b$

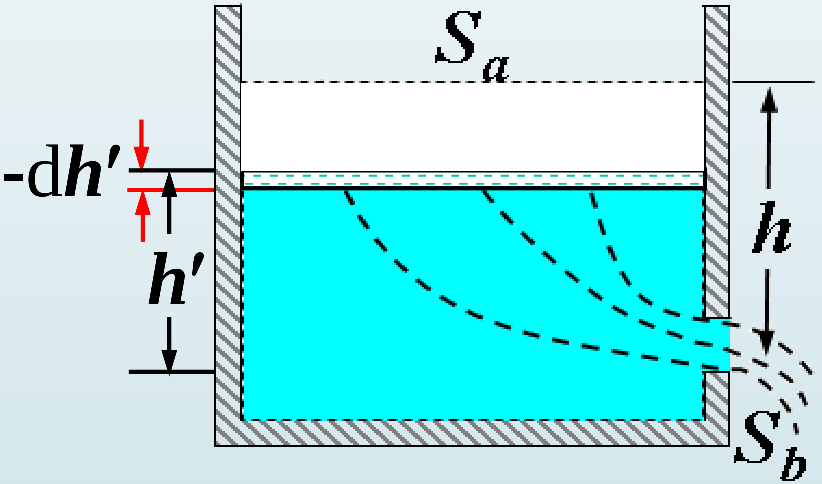
$$v_b=\sqrt{\frac{2gh}{1-(S_b/S_a)^2}}$$

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

2° 射流速率（即小孔流速）

例： 如图所示是底面积为S_a的柱形容器，液体从截面积为S_b的细管口流出，已知容器内的液面相对于细管的高度细管出口处保持为h。

（2）高为h的液体从S_b出口流完需要多少时间？



S_b处的流速 $v_b \approx \sqrt{2gh}$

应流出的总量 $Q = S_a h$

$$-S_a \mathrm{d}h' = S_b v_b' \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{S_a \mathrm{d}h'}{S_b\sqrt{2gh'}}$$

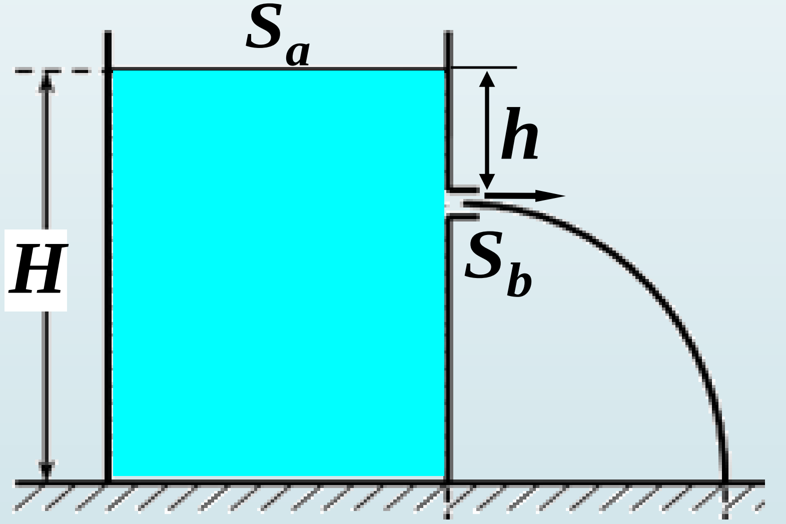
所需时间 $$t=\int \mathrm{d}t=\int_h^0 -\frac{S_a \mathrm{d}h'}{S_b\sqrt{2gh'}}=\frac{2S_a}{S_b}\sqrt{\frac{h}{2g}}$$

2° 射流速率（即小孔流速）

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=常量$$

例： 如图所示是底面积为S_a的柱形容器，液体从截面积为S_b的细管口流出，已知容器内的液面相对于细管的高度细管出口处保持为h。

（3）若液面S_a离地面的高度为H，从S_b射出的水在地面上的射程？



解： 液体做平抛运动

抛出的速度 $v=\sqrt{2gh}$

下落的距离 $H-h=\frac{1}{2}gt^2$

液体在地面上的射程为

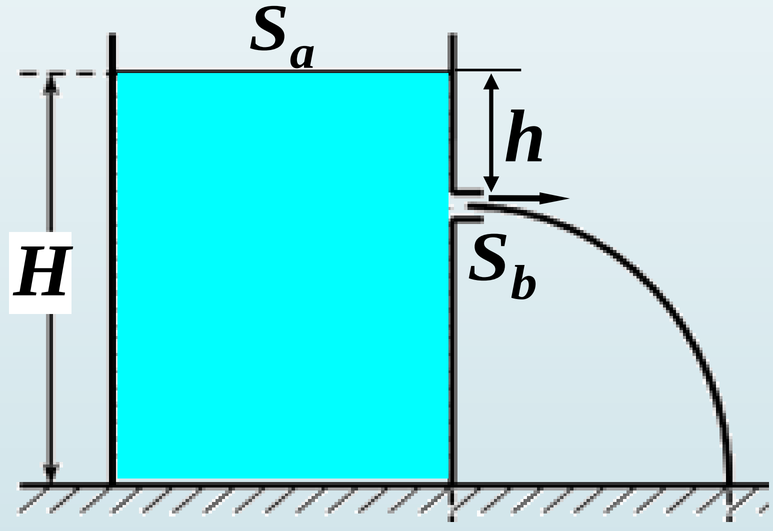
$$L=vt=\sqrt{2gh}\cdot\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}=2\sqrt{h(H-h)}$$

2° 射流速率（即小孔流速）

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=常量$$

例：如图所示是底面积为S_a的柱形容器，液体从截面积为S_b的细管口流出，已知容器内的液面相对于细管的高度细管出口处保持为h。

（3）S_a离地面的高度为H，S_b处在什么位置时，水流射程最远？



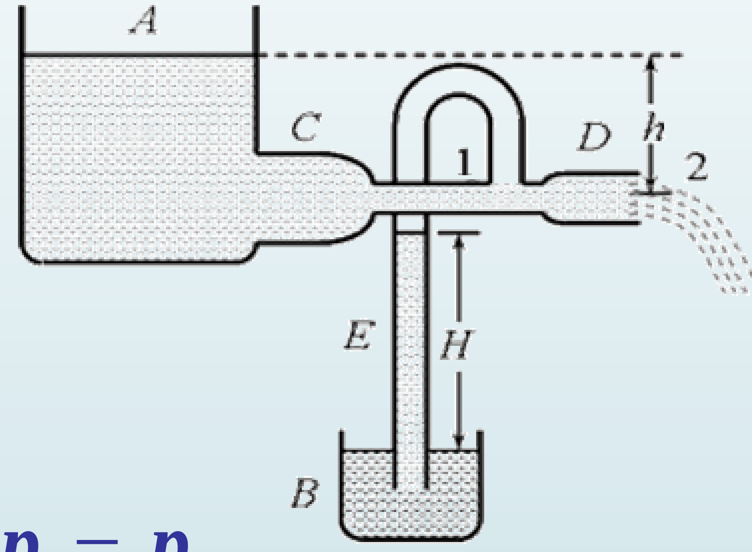
解：根据 $L=2\sqrt{h\left(H-h\right)}$

令 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}h}=0$

$$h=\frac{1}{2}H$$

得到 $L_{\max}=H$ 的水流射程最大值

例： 如图所示，两个很大的开口容器*A*和*B*，盛有相同的液体。由容器*A*底部接一水平非均匀管*CD*，水平管的较细部分1处连接到一U型管*E*，并使*E*管下端插入容器*B*的液体内。假设液流是理想流体作稳定流动，且1处的横截面积是2处的一半，水平管2处比容器*A*内的液面低*h*，问*E*管中液体上升的高度*H*是多少？



解： 已知 $S_1 = \frac{1}{2} S_2$ $\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}$

由连续性方程得 $v_1 = 2v_2$

由上题可知 $v_2 = \sqrt{2gh}$

对1、2两处列伯努利方程

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

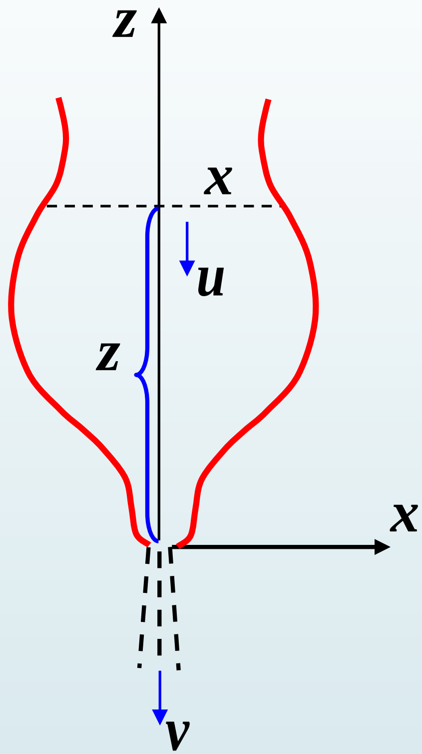
由于 $p_2 = p_0$

得 $p_1 = p_0 - 3\rho gh < p_0$

对*E*、*B*两处列伯努利方程：$p_1 + \rho g H = p_0$

可得：$H = 3h$

例： 一由旋转对称面组成的水壶，其对称轴沿竖直方向，壶底开有一半径为r的小孔。为使液体在从底部小孔流出的过程中壶中液面下降的速率保持不变，壶的形状应怎样？



解： 以小孔处为原点建立坐标系。壶的形状取决于其水平截面的半径x与对应的液面高度z的关系。

液面下降的恒定速率设为u，液体从小孔流出的速率设为v。

由伯努利方程得 $\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gz$

由连续性方程得 $u\pi x^2 = v\pi r^2$

联立求解得 $z = \frac{u^2(x^4 - r^4)}{2gr^4}$

注意到$r << x$，有

(稳定流动的条件) $z = \frac{u^2 x^4}{2gr^4}$

这正是古代某些依据液面下降的高度计时的漏壶的形状。

（2）伯努利方程的应用

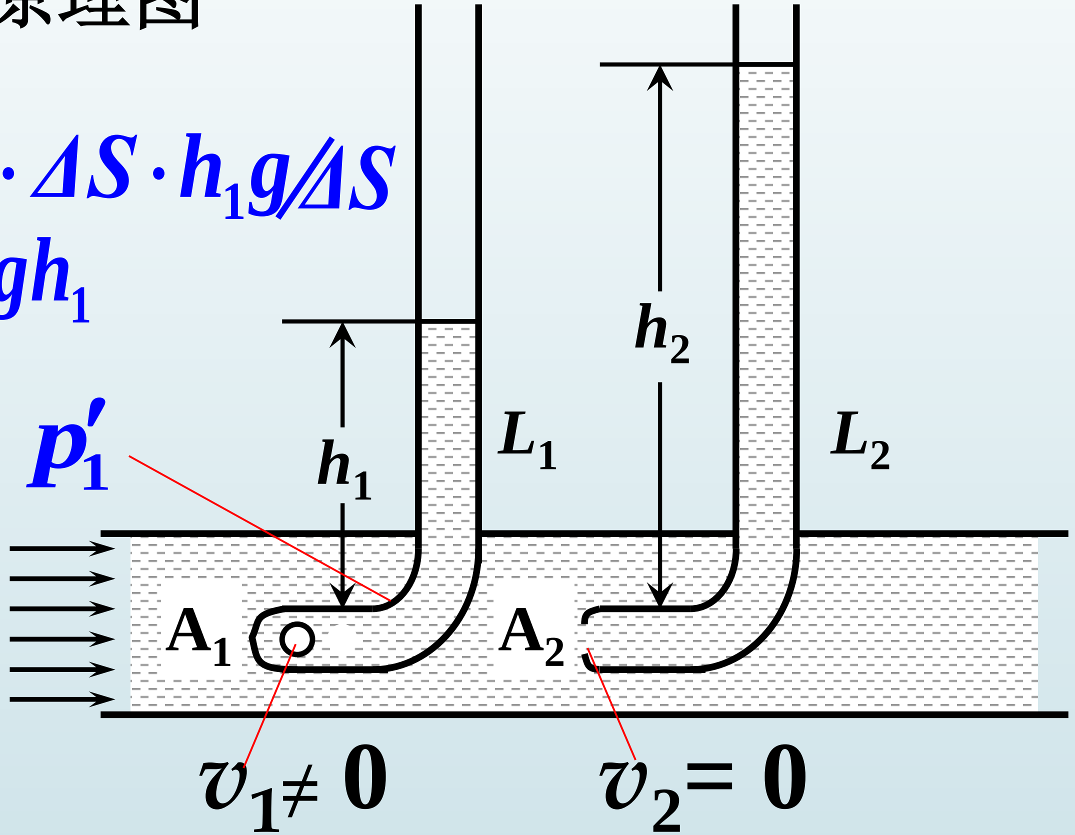
$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

3° 流速计(皮托管pitot tube)

流体面三参数：p、h、v

①原理图

$$p_1'=\rho\cdot\Delta S\cdot h_1 g/\Delta S$$
$$=\rho g h_1$$



$$p_1=p_0+\rho gh_1$$
$$p_2=p_0+\rho gh_2$$

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2 \qquad v_1=\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}}=\sqrt{2g(h_2-h_1)}$$

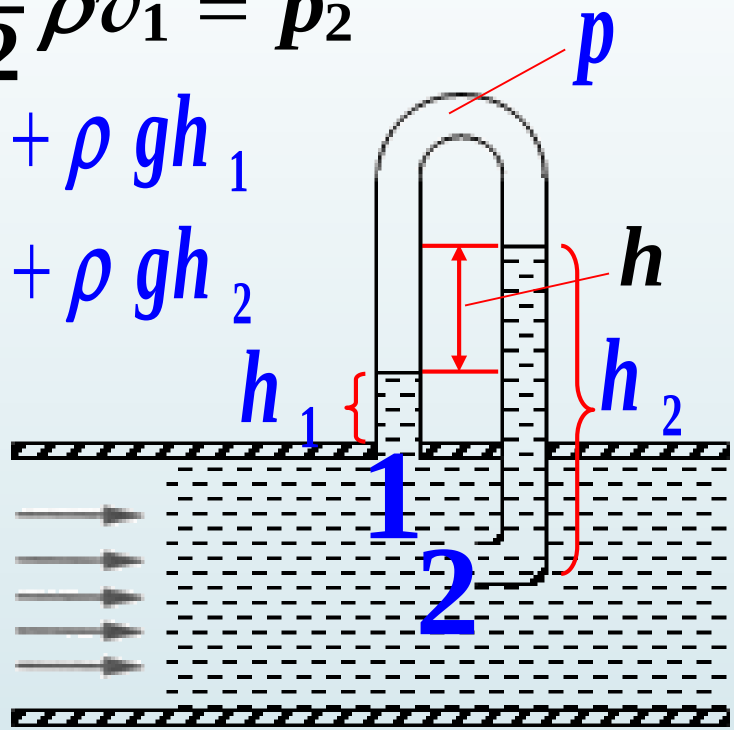
② 组合皮托管1

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = 常量$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2$$

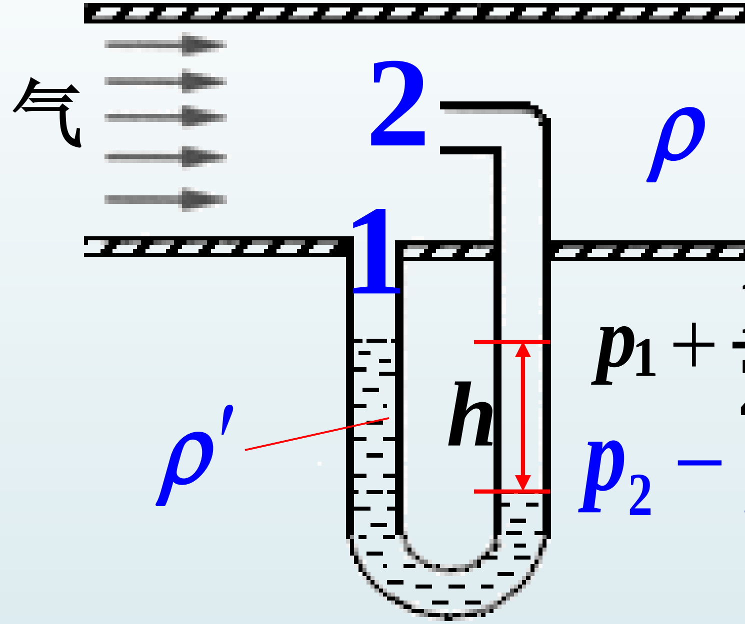
$$p_1 = p + \rho g h_1$$

$$p_2 = p + \rho g h_2$$



(测量液体的流速)

$$v_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2$$

$$p_2 - p_1 = \rho' g h$$

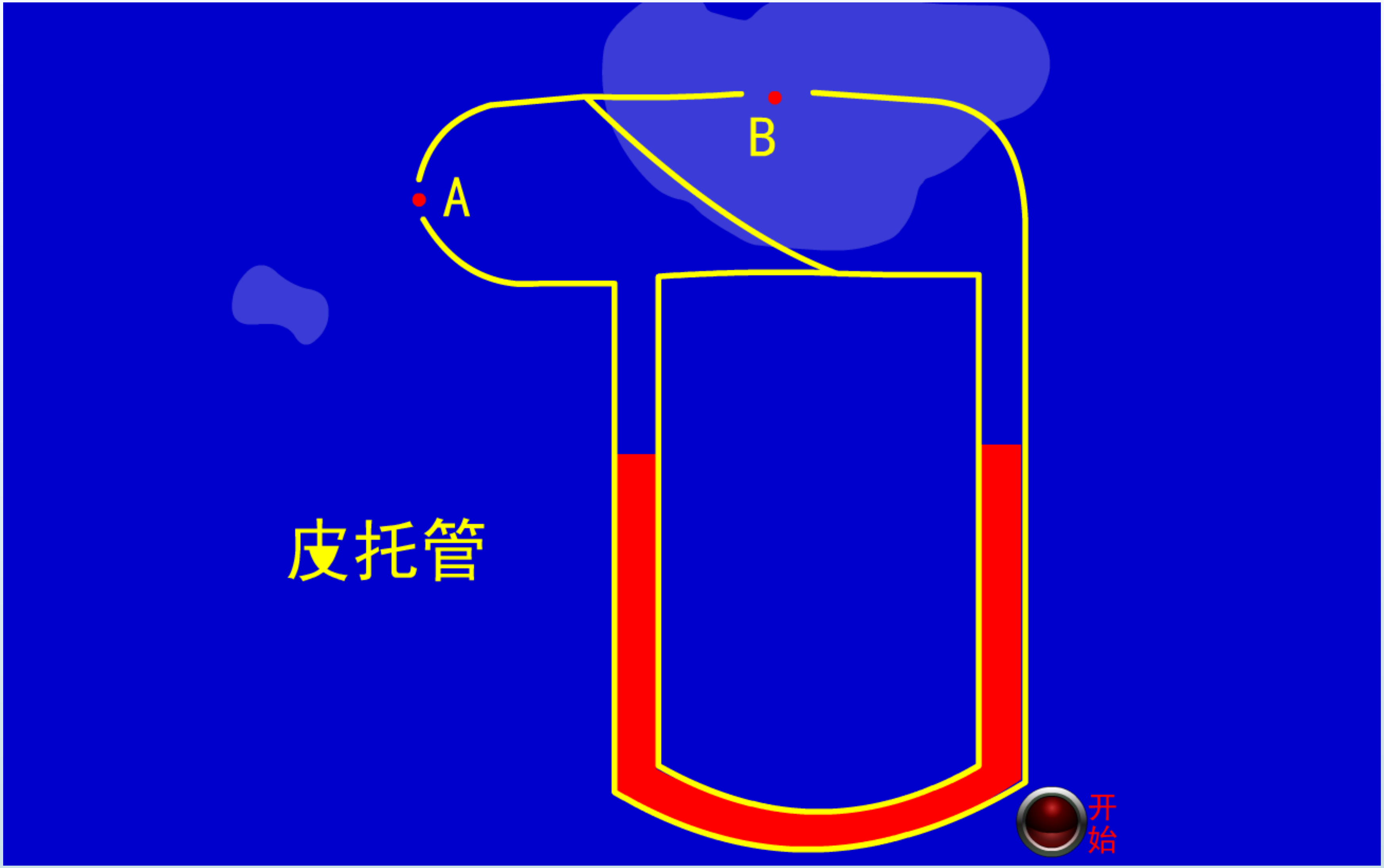
(测量气体的流速)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\rho' g h}{\rho}}$$

液体密度

气体密度

③ 组合比托管2



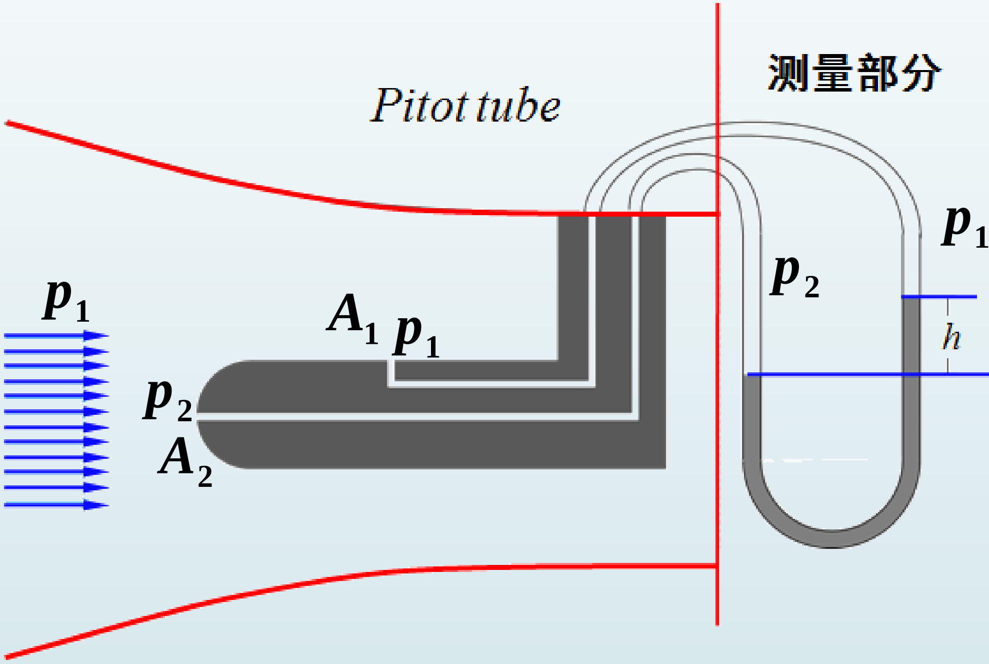
流体的流速测量：

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=常量$$

A_1小孔处三参数 p_1 h_1 v_1

A_2小孔处三参数 p_2 $h_2=h_1$ v_2

流体面三参数：p、h、v



$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2$$

$$\rightarrow\quad v_1^2=\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}$$

$$p_2-p_1=\rho gh$$

$$\rightarrow\quad v_1=\sqrt{2gh}$$

将皮托管用在飞机上可测空气相对于飞机的速度。但飞机上不宜用U型管，而采用金属盒，其内外分别与A_1和A_2相通，通过金属盒因内外压强差发生的形变来测航速。

流体的流速测量

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=常量$$

流体面三参数：p、h、v

A_1小孔处三参数 p_1 h_1 v_1

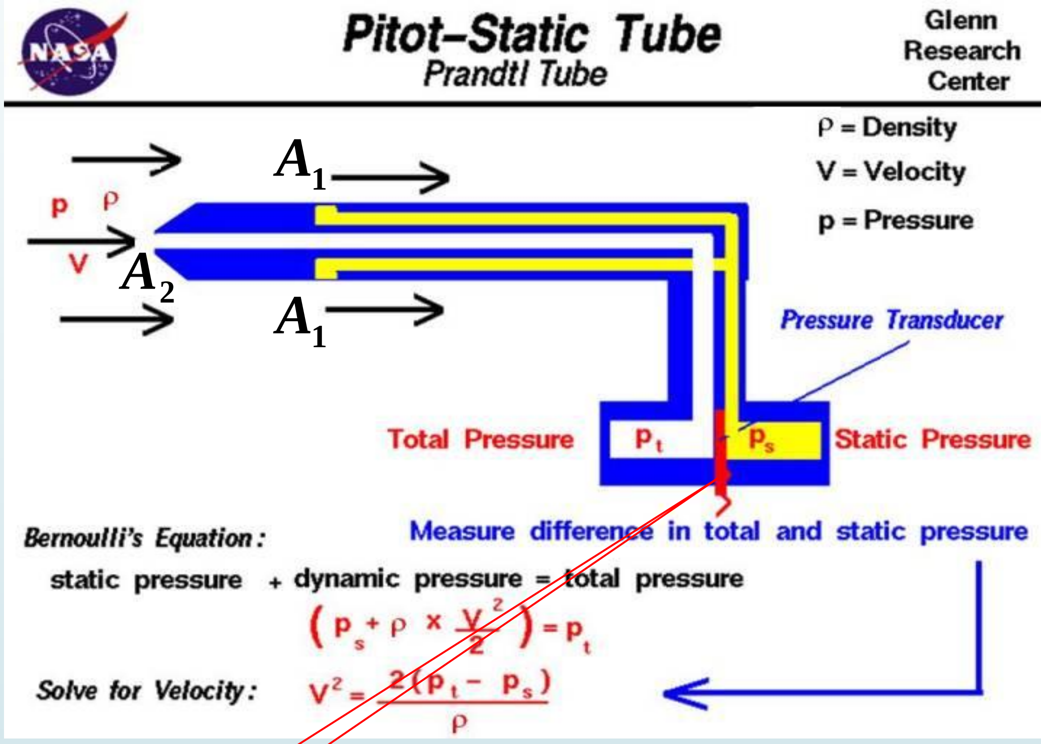
A_2小孔处三参数 p_2 $h_2=h_1$ v_2

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2$$

$$\rightarrow\ v_1^2=\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}$$

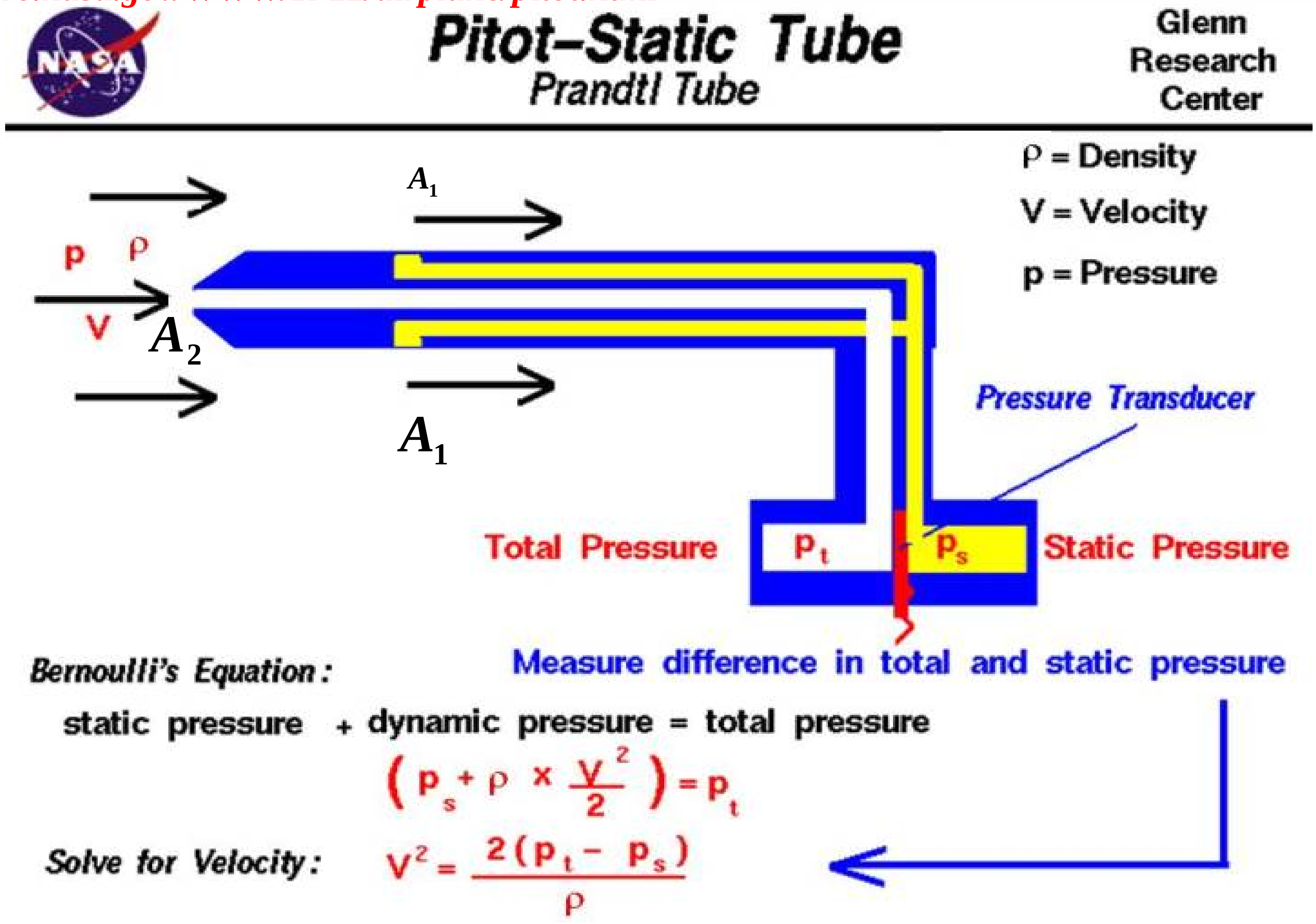
$$p_2-p_1=\rho gh$$

$$\rightarrow\ v_1=\sqrt{2gh}$$



将皮托管用在飞机上可测空气相对于飞机的速度。但飞机上不宜用U型管，而采用金属盒，其内外分别与A_1和A_2相通，通过金属盒因内外压强差发生的形变来测航速。

http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/pitot.html



This page shows a schematic drawing of a pitot-static tube. **Pitot-Static tubes**, which are also called Prandtl tubes, are used on aircraft as speedometers. The actual tube on the aircraft is around 10 inches (25 centimeters) long with a 1/2 inch (1 centimeter) diameter. Several small holes are drilled around the outside of the tube and a center hole is drilled down the axis of the tube. The outside holes are connected to one side of a device called a **pressure transducer**. The center hole in the tube is kept separate from the outside holes and is connected to the other side of the transducer. The transducer measures the difference in pressure in the two groups of tubes by measuring the strain in a thin element using an electronic strain gauge. The pitot-static tube is mounted on the aircraft, or in a wind tunnel , so that the center tube is always pointed in the direction of the flow and the outside holes are perpendicular to the center tube. On some airplanes the pitot-static tube is put on a longer boom sticking out of the nose of the plane or the wing.

空速管是飞机上极为重要的测量工具，通常安装在机头正前方，垂尾或者翼尖前方。

空速管是飞机上极为重要的测量工具，通常安装在机头正前方，垂尾或者翼尖前方。

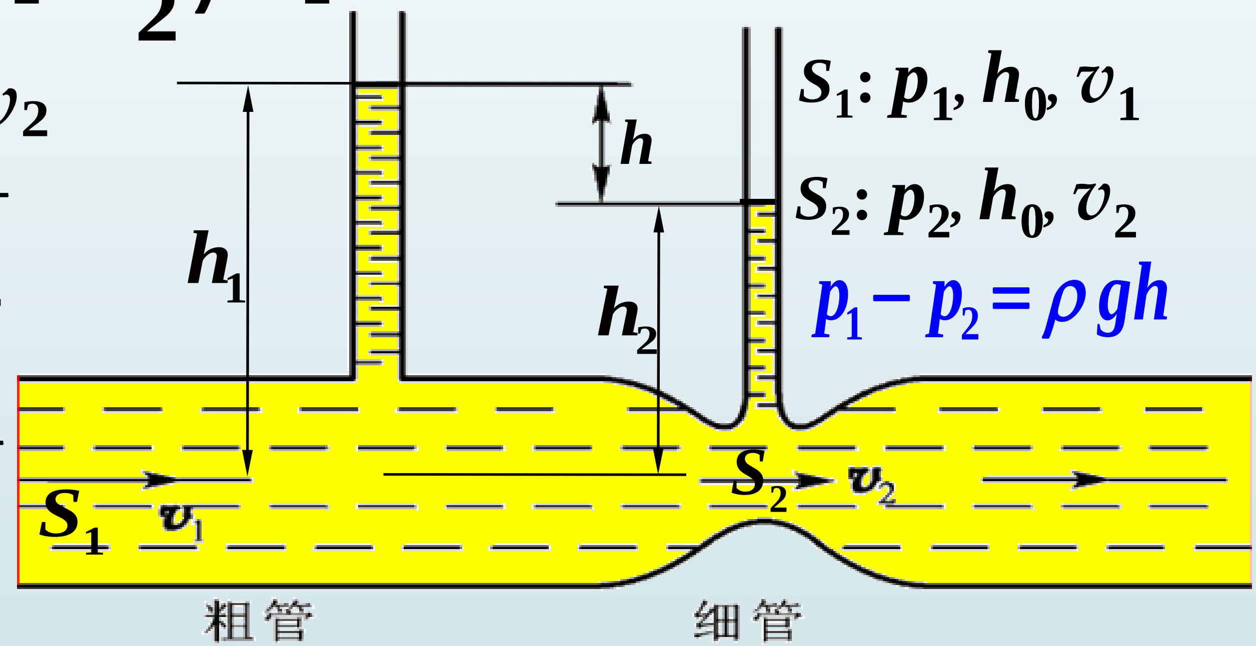
4° 流量计

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

① 汾丘里流量计

流体面三参数：p、h、v

$$\begin{cases} p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ Q=S_1v_1=S_2v_2 \end{cases}$$



S_1: p_1, h_0, v_1

S_2: p_2, h_0, v_2

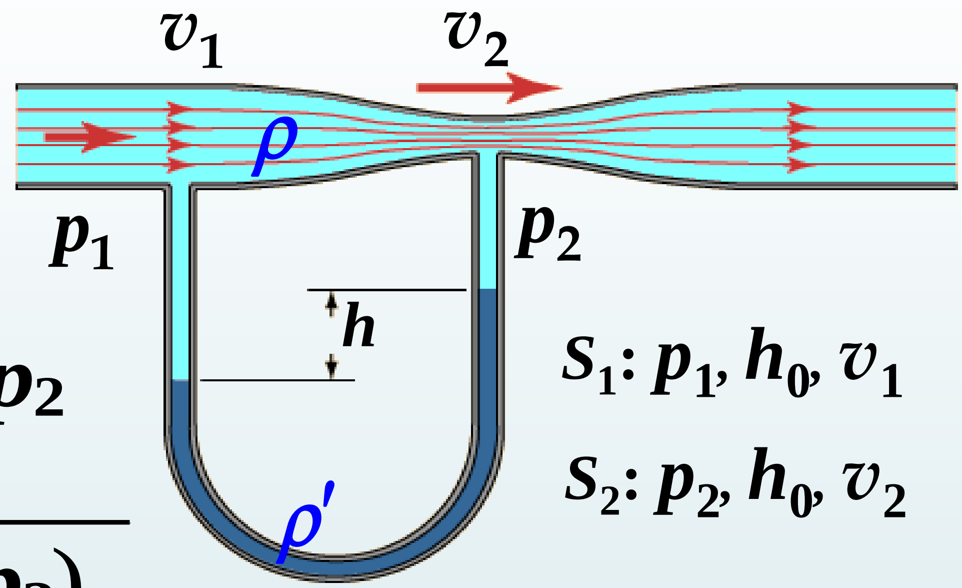
$$p_1-p_2=\rho gh$$

$$v_1=S_2\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}$$

$$v_2=S_1\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}$$

$$Q=S_1S_2\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}=S_1S_2\sqrt{\frac{2gh}{S_1^2-S_2^2}}$$

② 测量气体流量



$S_1: p_1, h_0, v_1$

$S_2: p_2, h_0, v_2$

$$Q = S_1v_1 = S_2v_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$v_1 = S_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

$$p_1 = p_2 + \rho' g h$$

$$Q = S_1S_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} = \cancel{S_1S_2\sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}}$$

$$Q = S_1S_2\sqrt{\frac{2\rho' g h}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

液体密度

二、黏性流体的运动

the motion of viscous fluid

1.牛顿黏滞定律

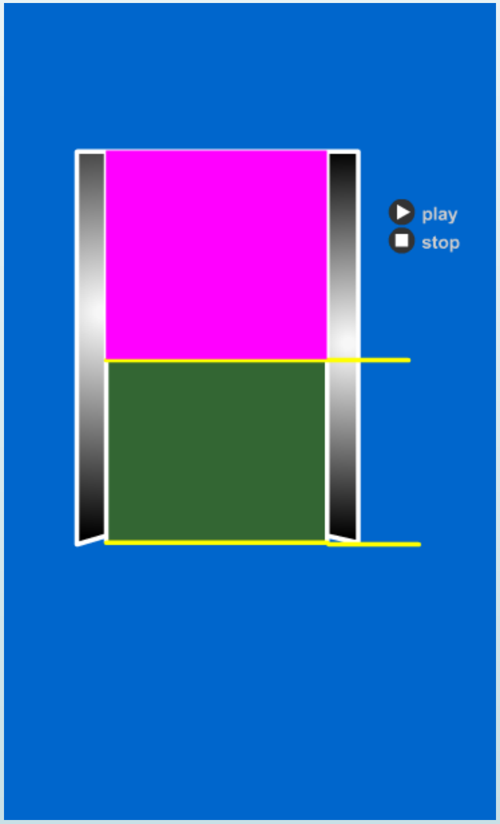
（1）流体的黏滞性

二、黏性流体的运动

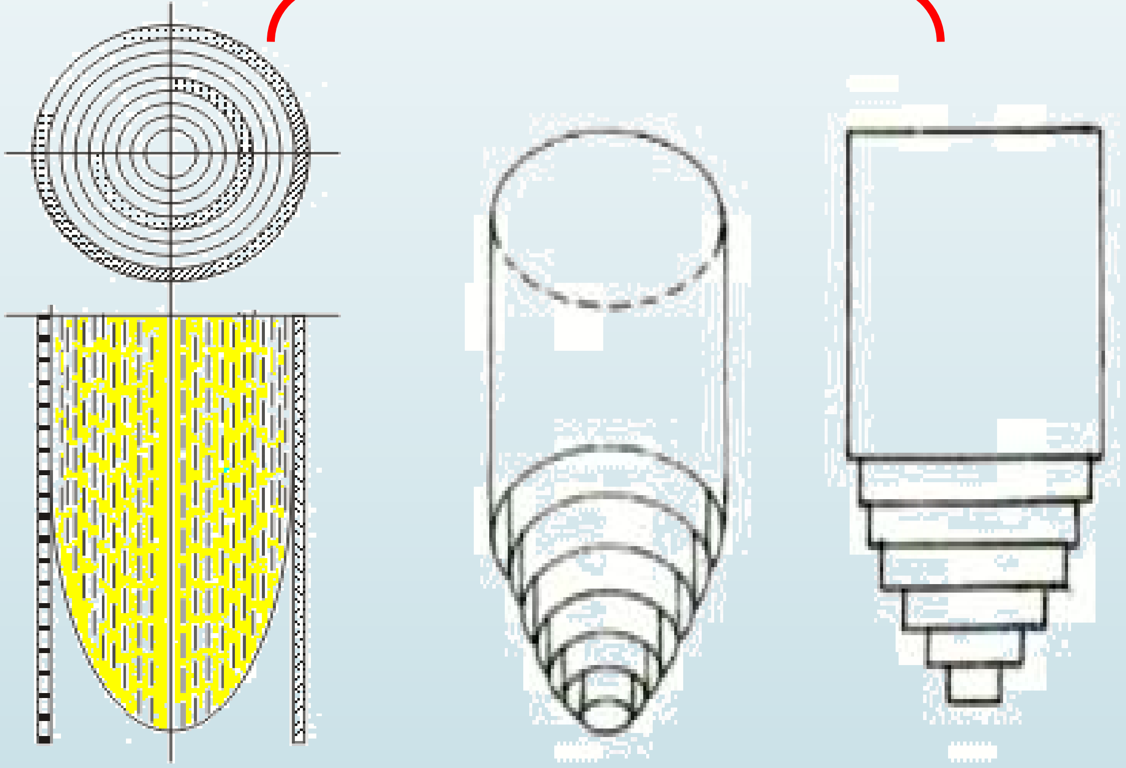
the motion of viscous fluid

1.牛顿黏滞定律

（1）流体的黏滞性



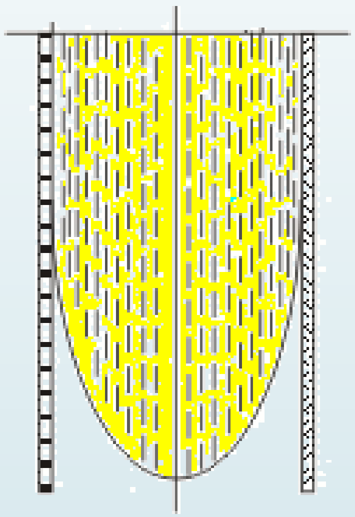
黏滞力（内摩擦力）?

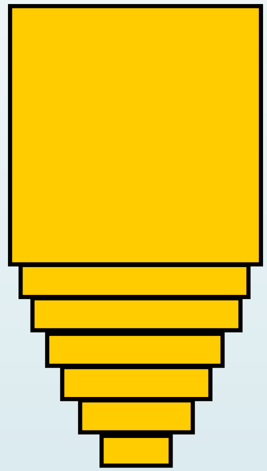


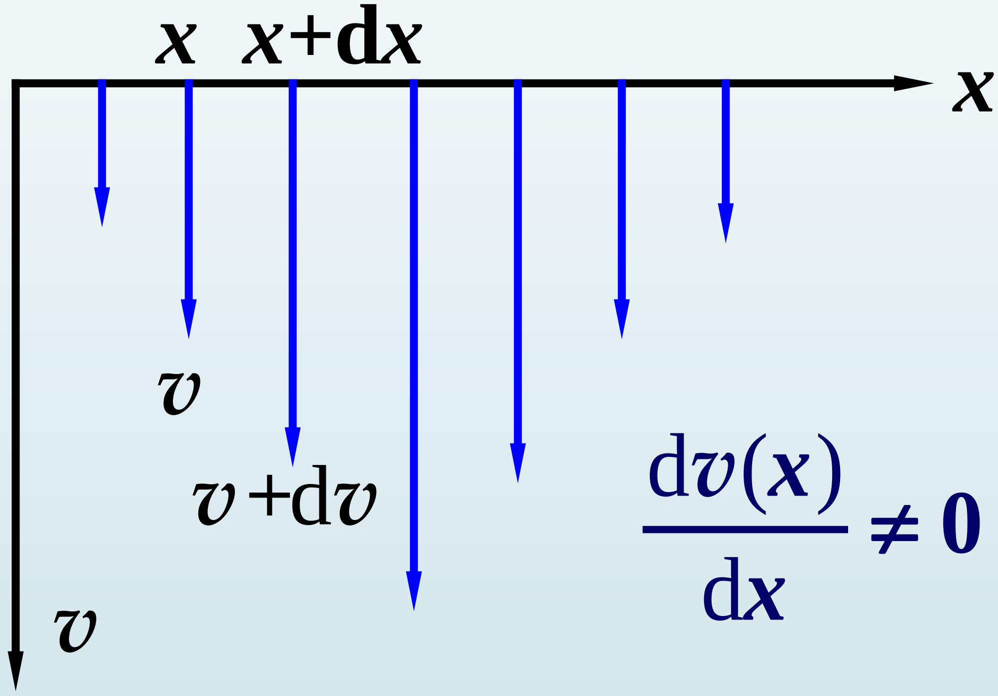
（2）速度梯度

黏性流体在流管中的分层流动

$$F_{摩} \propto \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$







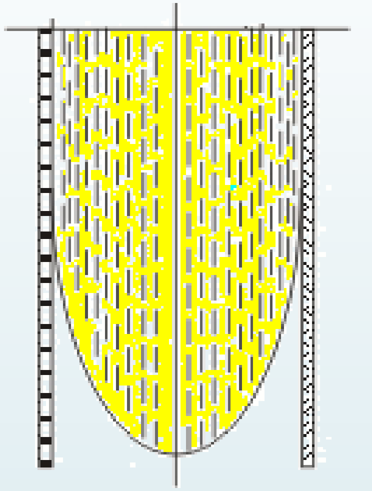
$$\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x} \neq 0$$

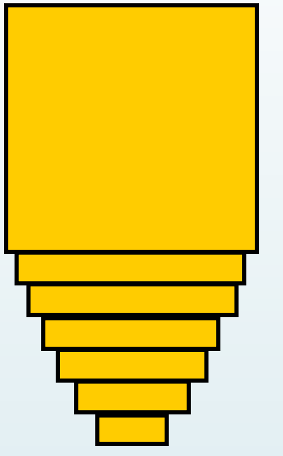
dv/dx 表示垂直速度方向相距单位距离的液层间的速度差, 叫做该处的**速度梯度**。

（3）粘性流体各层之间的摩擦力

$$F_{摩} \propto \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} S$$

$$\boxed{F = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} S}$$





——牛顿黏性定律

——符合此定律的流体称为牛顿流体

注

1° η 称作黏度系数或黏度， 单位: Pa · s

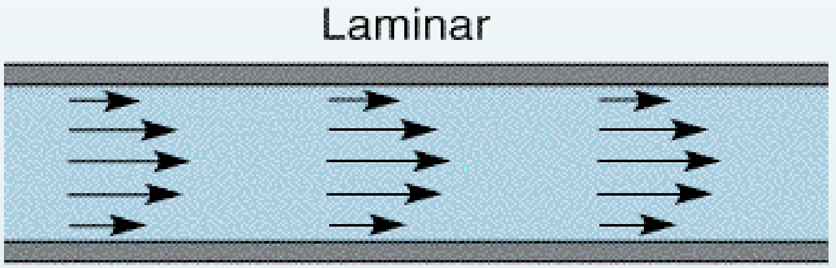
2° η 与流体种类有关, 不同的物质有不同的黏度

3° η 与温度有关

2. 黏性流体运动的特征 (层流与湍流)

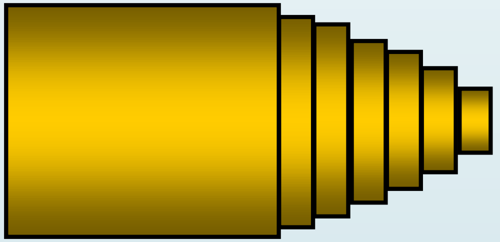
（1）层流（Laminar flow）

管中的流速很小时，黏性流体分层流动，在流管中各流体层之间只有相对滑动而不混杂。



同一层：v 相同

不同层：v 不同



v大的液层对v小的液层有**拉力**

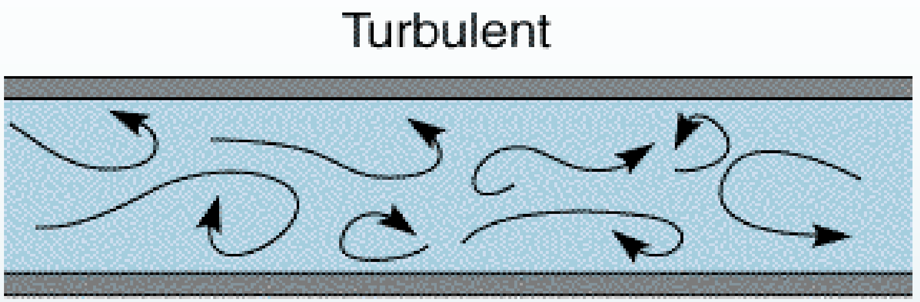
v小的液层对v大的液层有**拖曳力**

} **相互作用的黏性阻力**

当流速增大到一定程度时，稳定流动状态会被破坏，流动会不稳定，但流动仍具有部分层流的特征。

（2）湍流（turbulent flow）

流速进一步增大时，
层流状态将被破坏，
流体将作不规则流动。



各流体层相互混淆，
而且可能出现旋涡。

（3）雷诺数（Reynold number）

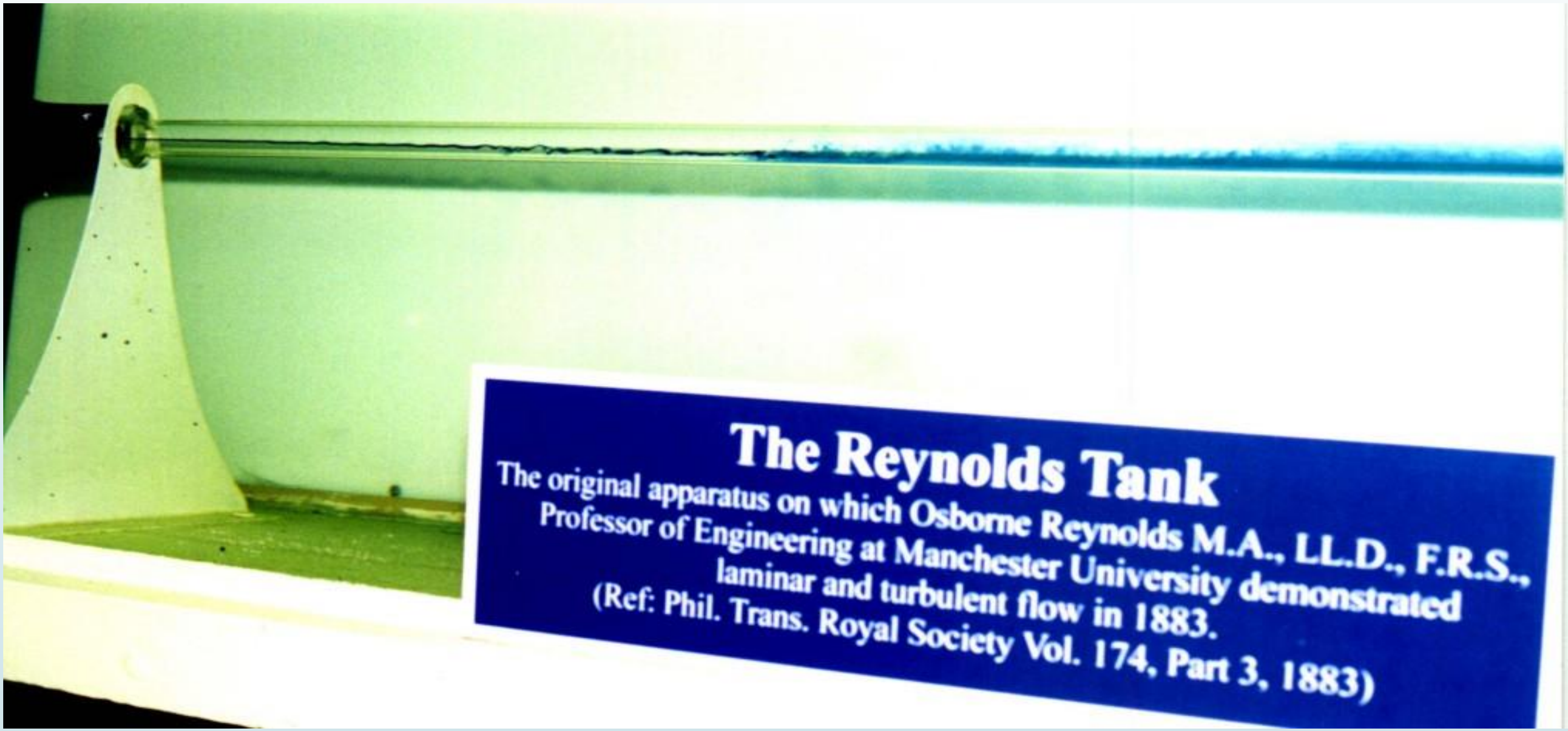
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}$$

ρ — 流体密度
v — 流速
d — 圆管直径
η — 黏度

1883年英国物理学家雷诺通过实验研究发现，对长直圆形管道，流体的流动形态取决于雷诺数Re。

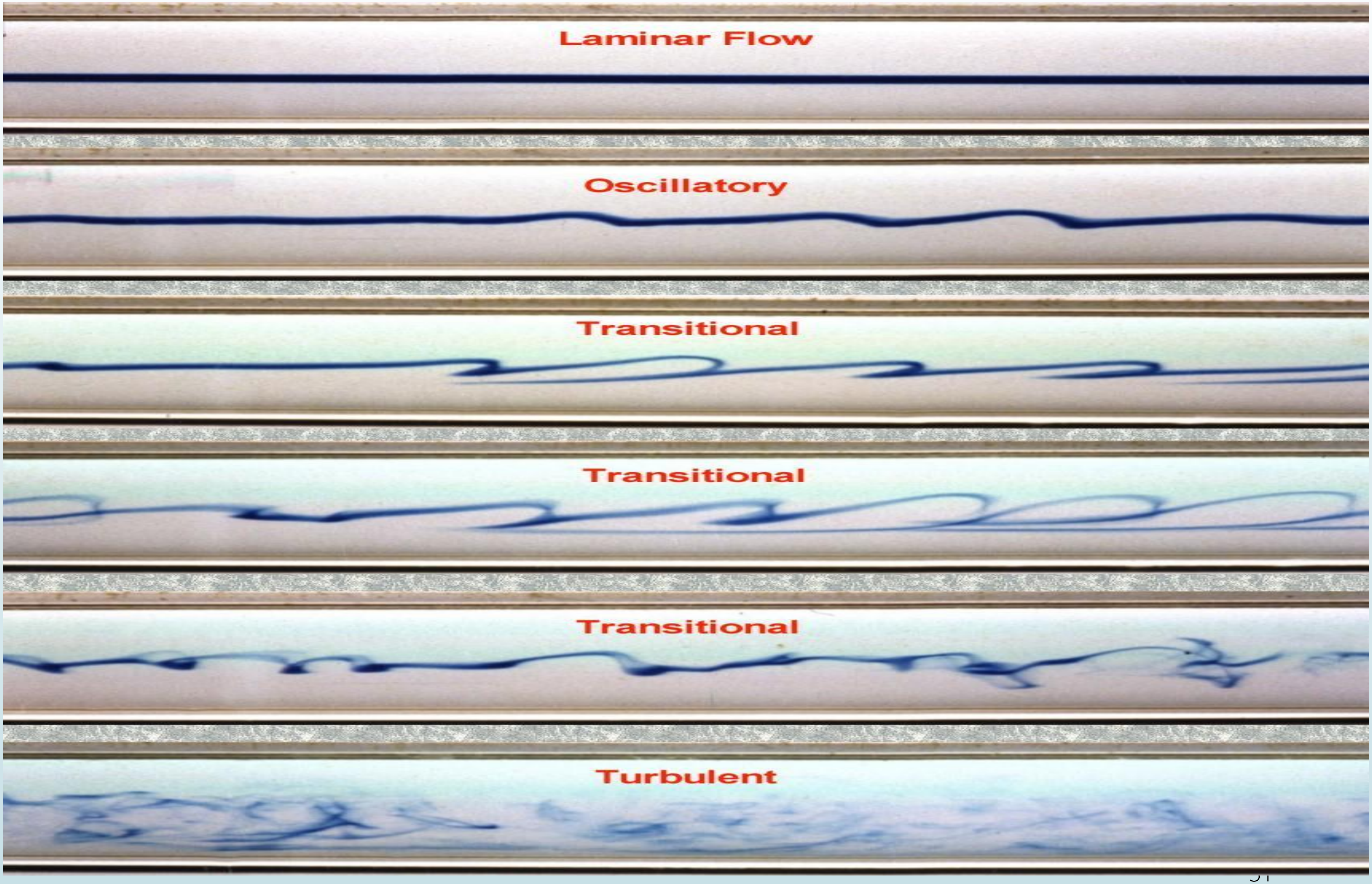
$\mathrm{Re} < 2000 \Rightarrow$ 层流
$2000 < \mathrm{Re} < 3000 \Rightarrow$ 过渡流
$\mathrm{Re} > 3000 \Rightarrow$ 湍流

1880年前后，英国的实验流体力学家雷诺（O. Reynolds）研究了在长管里流动的流体产生湍流的过程。



雷诺观察到的实验现象

从层流到湍流的过渡



例: 已知在0 °C时水的黏滞系数$\eta = 1.8 \times 10^{-3}$ Pa·s，若保证水在直径d=2.0×10^{-2} m 的圆管中作稳定的层流，要求水流速度不超过多少？

解: 保证水在圆管中作稳定的层流，则

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} < 2000$$

$$v < 2000 \times \frac{\eta}{\rho d} = 2000 \times \frac{1.8 \times 10^{-3}}{1000 \times 2.0 \times 10^{-2}} (\text{m/s})$$

$$v < 0.18 \text{ m/s}$$

通常水在管道中的流动一般都是湍流。

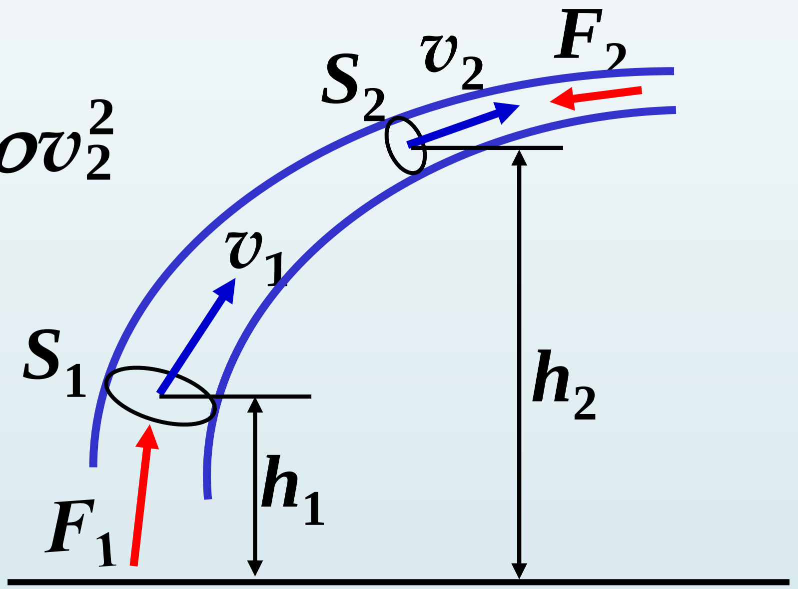
3. 黏性流体的运动规律

w是单位体积的流体从位置1运动到位置2的过程中克服粘滞力而消耗的机械能。

（1）黏性流体的伯努利方程

理想流体:

$$p_1+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho g h_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$



黏性流体:

内摩擦力做对系统做功

由功能原理　$A_{外}+A_{内}=\Delta E$

$$(p_1-p_2)\mathrm{d}V-A_{摩}=\frac{1}{2}(\mathrm{d}m)(v_2^2-v_1^2)+(\mathrm{d}m)g(h_2-h_1)$$

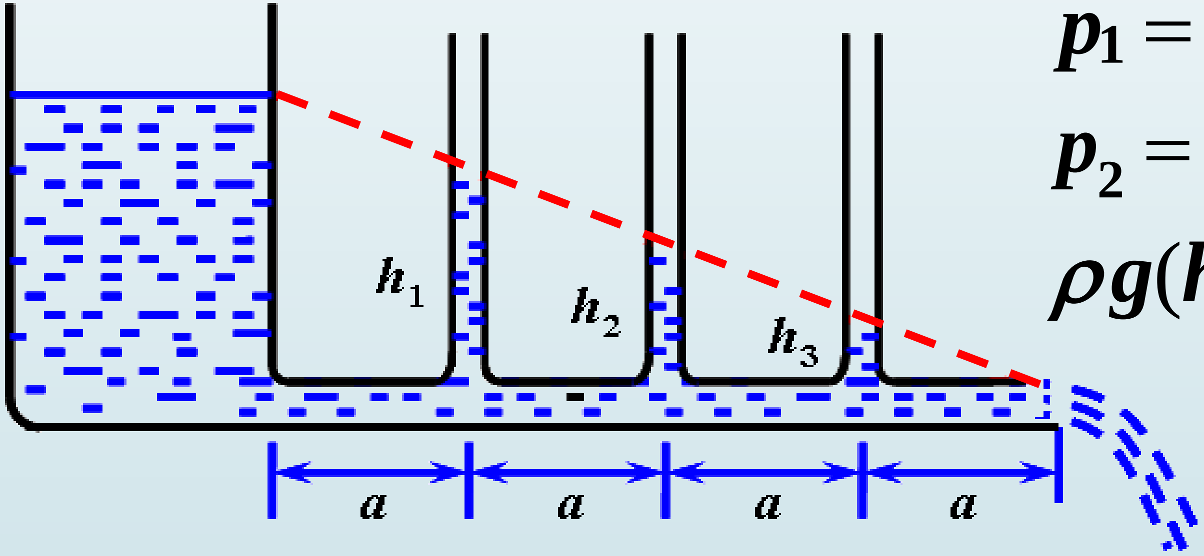
$$\boxed{p_1+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho g h_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+w}$$

——黏性流体的伯努利方程　　损耗的机械能

$$p_1+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho g h_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+w$$

若不可压缩的黏性流体在水平均匀圆管中运动

$$h_1=h_2=h,\ v_1=v_2 \quad \Rightarrow p_1-p_2=w$$



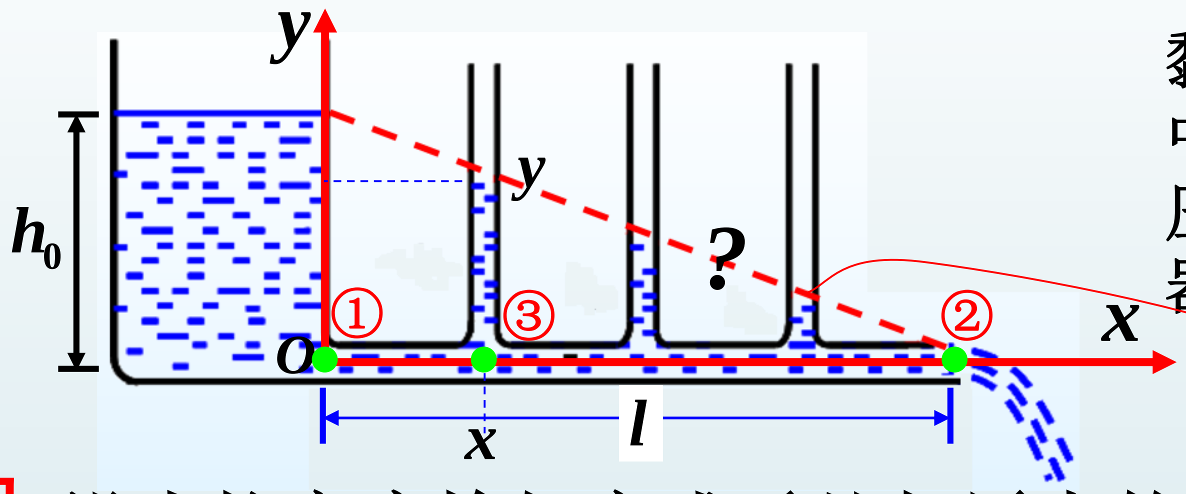
$$p_1=p_0+\rho g h_1$$

$$p_2=p_0+\rho g h_2$$

$$\rho g(h_1-h_2)=w$$

黏性流体在水平均匀圆管中沿着流体流动方向，其压强的降落与各支管到容器的距离成正比。

$$p_1+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho g h_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+w$$



黏性流体在水平均匀圆管中沿着流体流动方向，其压强的降落与各支管到容器的距离成正比。

证明: 设水柱高度恰好变成零处与原点的距离为l，x处水柱高度为y。

$$\boxed{y=-\frac{h_0}{l}x+h_0}$$

$$p_1+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v^2=p_2+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v^2+w$$

水平细管中粘滞力做功与管长成正比: $w=\alpha l$

$$p_1=p_0+\rho g h_0,\ p_2=p_0+\rho g\cdot 0$$

$$\therefore p_0+\rho g h_0=p_0+\alpha l$$

$$\alpha=\frac{\rho g h_0}{l}$$

$$p_1=p_3+\alpha x$$

$$p_0+\rho g h_0=p_0+\rho g y+\alpha x$$

$$y=-\frac{\alpha}{\rho g}x+h_0$$

（2）泊肃叶定律(Poiseuille's law)

法国医学家泊肃叶研究了血管内血液的流动，并对在压强差p_1-p_2作用下，在长度为L的细玻璃管中液体的流动进行了研究，发现流量Q随压强梯度线性增加，若给定压强梯度，则流量Q与管子半径的四次方成正比，即

(Poiseuille, 1778-1869)

$$Q \propto \frac{R^4(p_1 - p_2)}{L}$$

维德曼(Wiedmann)从理论上推道了该定律，给出了比例系数，即

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(p_1 - p_2)$$

条件: 不可压缩的牛顿黏性流体在水平圆管中做**稳定层流**。

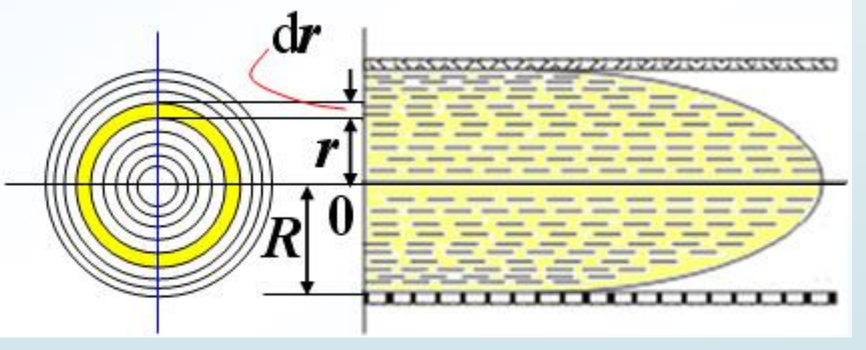
（2）泊肃叶定律(Poiseuille's law)

① **定律:** $Q=\dfrac{\pi R^4}{8\eta L}(p_1-p_2)$

（粘性流体有压强差才能流动）

条件: 不可压缩的牛顿黏性流体在水平圆管中做**稳定层流**。

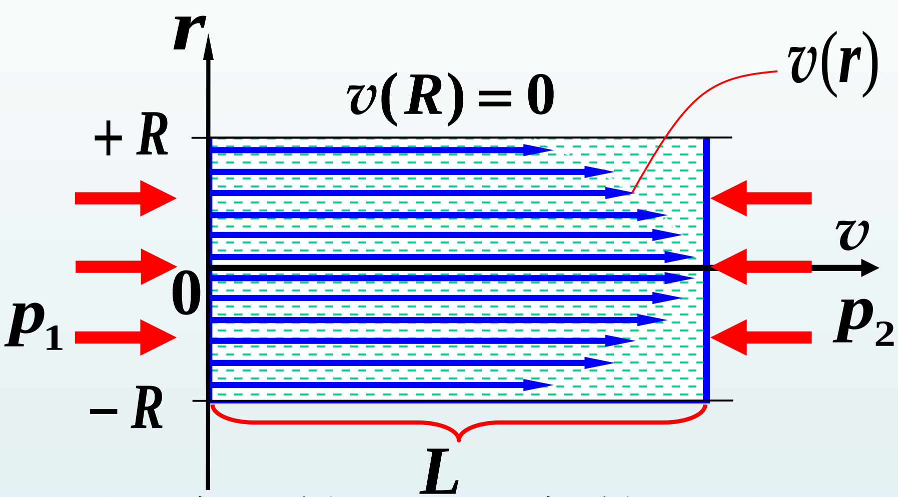
(Poiseuille, 1778-1869)

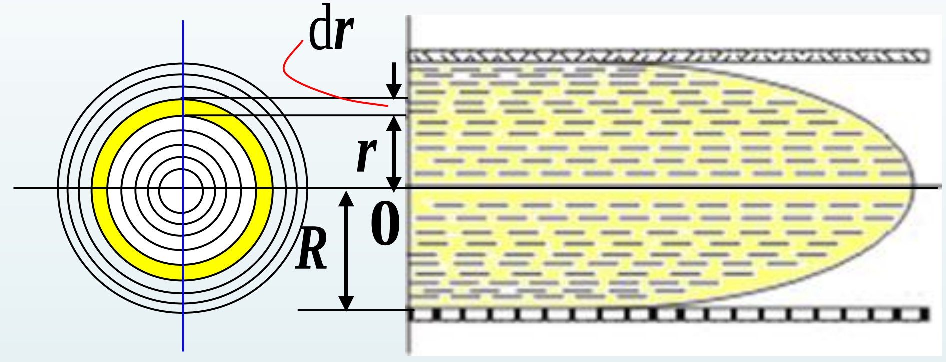


Re<2000, 层流; $r\uparrow$, $v\downarrow$, 轴心, v_{max}; 管壁, $v_{min}\to 0$。

② 理论推导

$$Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}$$





取长为L的一段流体进行分析。可看成由很多薄层组成。考虑任意r处的一层（$r \rightarrow r+\mathrm{d}r$间），它以$v(r)$作匀速运动，故所受合外力为零，即两端面所受压力$F$与其内、外表面所受内摩擦力(粘滞力) f_1、f_2的合力为零。

$$F=\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}S$$

$$F=(p_1-p_2)\cdot\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}S=2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$F+f_1-f_2=0$$

r处（内表面）：

$$f_1=-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi rL$$

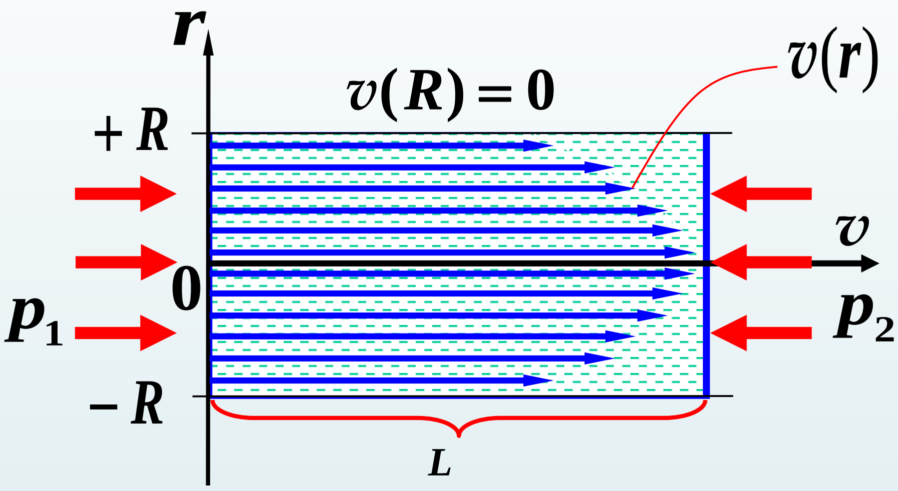
$r+\mathrm{d}r$处(外表面):

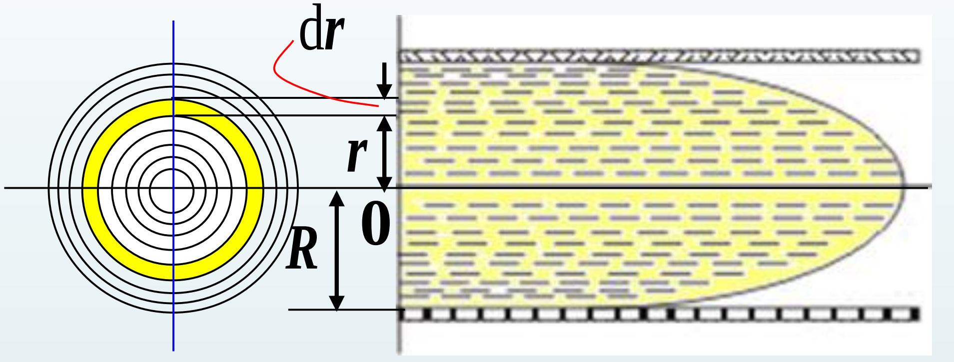
$$f_2=f_1+\mathrm{d}f_1$$

$$=-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi rL+\mathrm{d}(-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi rL)$$

② 理论推导

$$Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}$$





$$\therefore (p_1-p_2)2\pi r\,\mathrm{d}r-\mathrm{d}f_1=0$$

$$(p_1-p_2)2\pi r\,\mathrm{d}r=\mathrm{d}f_1$$

$$(p_1-p_2)2\pi r\,\mathrm{d}r=\mathrm{d}\left(-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi r L\right)$$

$$\int_0^r(p_1-p_2)r\,\mathrm{d}r=\int_0^r\mathrm{d}\left(-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}r L\right)$$

$$F=(p_1-p_2)\cdot\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}S=2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$F+f_1-f_2=0$$

r处（内表面）:

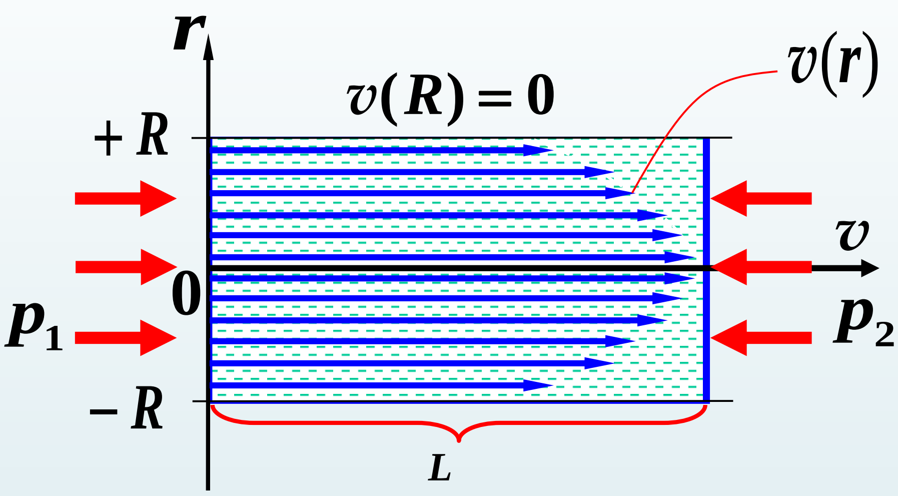
$$f_1=-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi r L$$

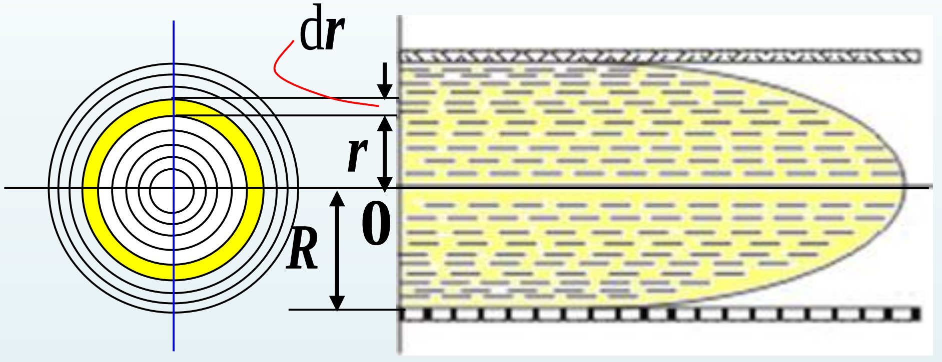
$r+\mathrm{d}r$处(外表面):

$$f_2=f_1+\mathrm{d}f_1$$
$$=-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi r L+\mathrm{d}\left(-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi r L\right)$$

② 理论推导

$$Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}$$





可得速度分布函数为：

$$v(r)=\frac{(p_1-p_2)}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

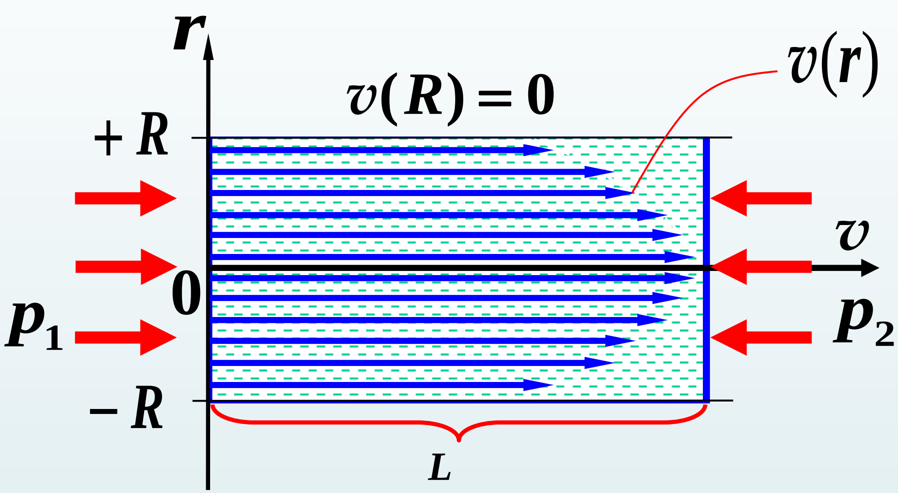
$$\boxed{\int_0^r (p_1-p_2)\,r\,\mathrm{d}r=\int_0^r \mathrm{d}\left(-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}r\,L\right)}$$

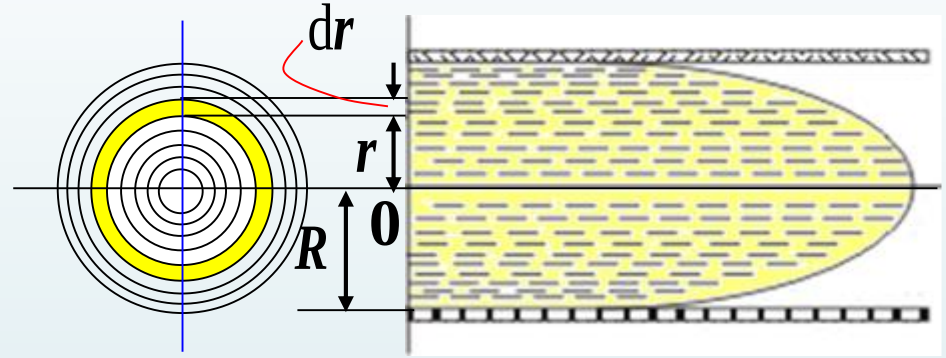
$$\frac{(p_1-p_2)}{2}r^2=\left(-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}r\,L\right)\Big|_0^r=-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}r\,L$$

$$\therefore\int_r^R\frac{(p_1-p_2)}{2\eta L}r\,\mathrm{d}r=-\int_{v(r)}^{v(R)\to 0}\mathrm{d}v$$

② 理论推导

$$Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}$$





可得速度分布函数为： $v(r)=\dfrac{(p_1-p_2)}{4\eta L}(R^2-r^2)$

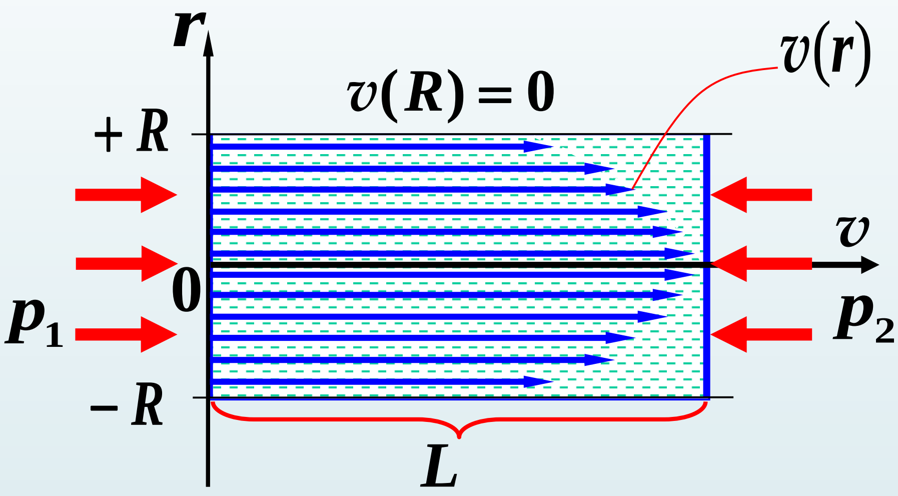
任一圆环流层的流量： $\int \mathrm{d}Q=\dfrac{(p_1-p_2)}{4\eta L}\int_0^R (R^2-r^2)\,2\pi r\,\mathrm{d}r$

整个管中的流量： $\boxed{Q=\dfrac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}}$ 泊肃叶定律

$$\boxed{Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}}$$

泊肃叶定律

（粘性流体有压强差才能流动）



速度分布

$$v(r)=\frac{(p_1-p_2)}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

最大流速 $$v_{Max}=v(0)=\frac{(p_1-p_2)}{4\eta L}R^2$$

平均流速 $$\langle v\rangle=\frac{Q}{S}=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L(\pi R^2)}$$

$$=\frac{(p_1-p_2)R^2}{8\eta L}$$

$$\langle v\rangle=\frac{1}{2}v_{Max}$$

$$Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}$$

例： 石油的密度 $\rho=888\ \mathrm{kg/m^3}$，在半径为 $r=1.5\mathrm{mm}$、长度为 $L=0.50\mathrm{m}$ 的水平细管中流动，测得其流量 $Q=5.66\times10^{-6}\mathrm{m^3/s}$。细管两端的压强差为 $\Delta h=0.455\mathrm{m}$ 石油柱高，求石油的粘滞系数？

解： 压强差 $p_1-p_2=\rho g(h_1-h_2)$

根据泊肃叶公式

$$\eta=\frac{\pi r^4(p_1-p_2)}{8QL}=\frac{\pi r^4\rho g\Delta h}{8QL}=2.78\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$$

$$=\frac{3.14\times(1.5\times10^{-3})^4\times888\times9.8\times0.45}{8\times5.66\times10^{-6}\,0.5}$$

（2）泊肃叶定律

$$Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}$$

③ 流阻(Flow Resistance)

直流电路中的欧姆定律 $I=\dfrac{\Delta U}{R_{电阻}}$

流阻

$$Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}=\frac{p_1-p_2}{R_f}\Rightarrow R_f=\frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

电流 I → Q 流量

电压ΔU → (p_1-p_2)压强差

电阻 R → R_f流阻

串联: $R_{f串}=R_{f1}+R_{f2}+\cdots$

并联: $\dfrac{1}{R_{f并}}=\dfrac{1}{R_{f1}}+\dfrac{1}{R_{f2}}+\cdots$

例： 主动脉半径R=1.30cm， 血流量Q=1.00×10^{-4} m^3/s；某支小动脉半径r =R/ 2，其中血流量q=Q/5；已知血液黏度 η=3.00×10^{-3} Pa·s。 求主动脉和小动脉在L=0.10 m一段长度上的R_f和Δp 。

解： （1）主动脉的流阻和压强降落分别为

$$R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = 2.68\times 10^4 (\mathrm{Pa\cdot s/\,m^3})$$

$$\Delta p = Q\cdot R_f = 2.68\ (\mathrm{Pa})$$

（2）小动脉的流阻和压强降落分别为

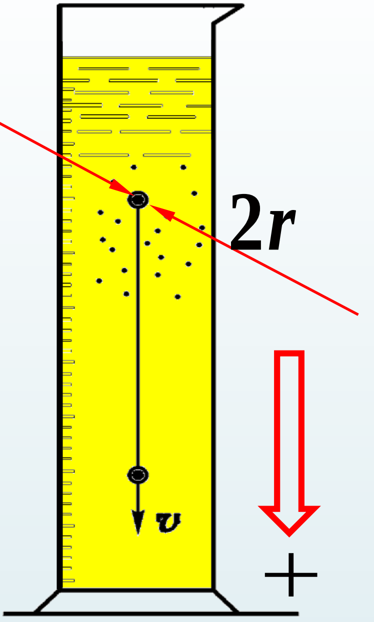
$$R_f = \frac{8\eta L}{\pi r^4} = 4.68\times 10^5 (\mathrm{Pa\cdot s/\,m^3})$$

$$\Delta p' = Q\cdot R_f' = 8.56\ (\mathrm{Pa})$$

（3）固体小球在静止的粘性流体中的运动

固体小球运动受粘性流体阻力

$$f = 6\pi\eta r v$$ ——斯托克斯定律



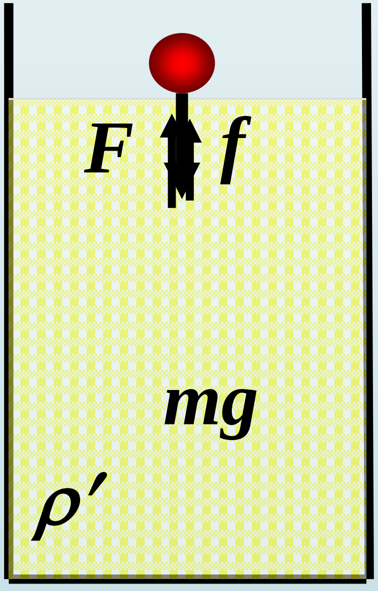
条件: 小球的 r、v 较小，雷诺数 $Re<1$

小球在黏性流体中运动速度？

受力： 重力 mg，浮力 F，黏性阻力 f

最终合力为零 $mg = F + f$

$$\frac{4\pi r^3}{3}\rho g = \frac{4\pi r^3 \rho'}{3} g + 6\pi\eta r v_T$$



最终沉降速度

（收尾速度）

$$v_T = \frac{2gr^2(\rho - \rho')}{9\eta}$$

$$v_T=\frac{2gr^2(\rho-\rho')}{9\eta}$$

应用

① 沉降法测量流体的黏度　$\eta=2gr^2(\rho-\rho')/9v_T$

② 测量小球的半径（密立根油滴实验）

③ 离心机的原理

…… ……