大学物理

University Physics

华 中 科 技 大 学 物 理 学 院

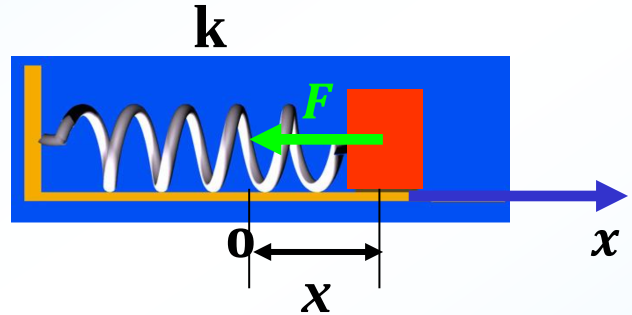
王宁

ningwang@hust.edu.cn

简谐振动的能量

三 谐振动的能量

1. 水平弹簧振子的能量



利用谐振子的振动方程：

动能： $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$

势能： $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

总能量： $E = E_k + E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$

总能量是常量，大小正比于振幅的平方！

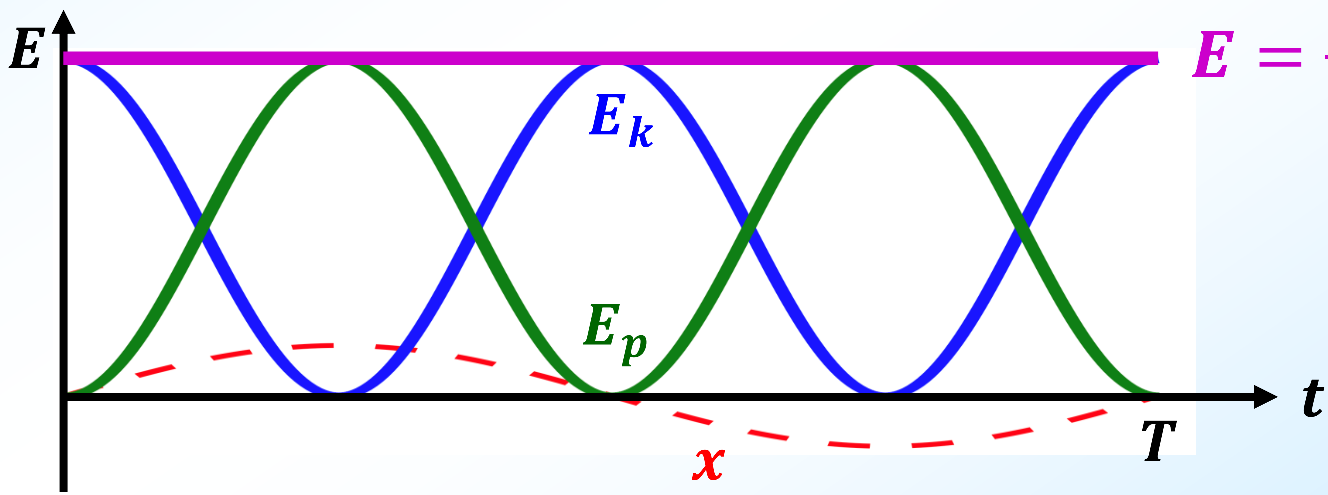
简谐振动的能量

2. 谐振子系统能量的特点

a） 动能和势能各自随时间作周期性变化；

动能和势能随时间互相转化，能量转换的周期是振动周期的一半。

b） 系统的总能量不随时间发生变化。



$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

简谐振动的能量

3. 动能与势能的时间平均值

$$\overline{E_k} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{kA^2}{2\omega T}\int_0^{\omega T} \sin^2(t+\frac{\varphi}{\omega})\,dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E_p} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{kA^2}{2\omega T}\int_0^{\omega T} \cos^2(t+\frac{\varphi}{\omega})\,dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\therefore \quad \overline{E_k} = \overline{E_p} = \frac{1}{2}E$$

弹簧振子动能与势能的平均值相等，
且等于机械能的一半。

简谐振动的能量

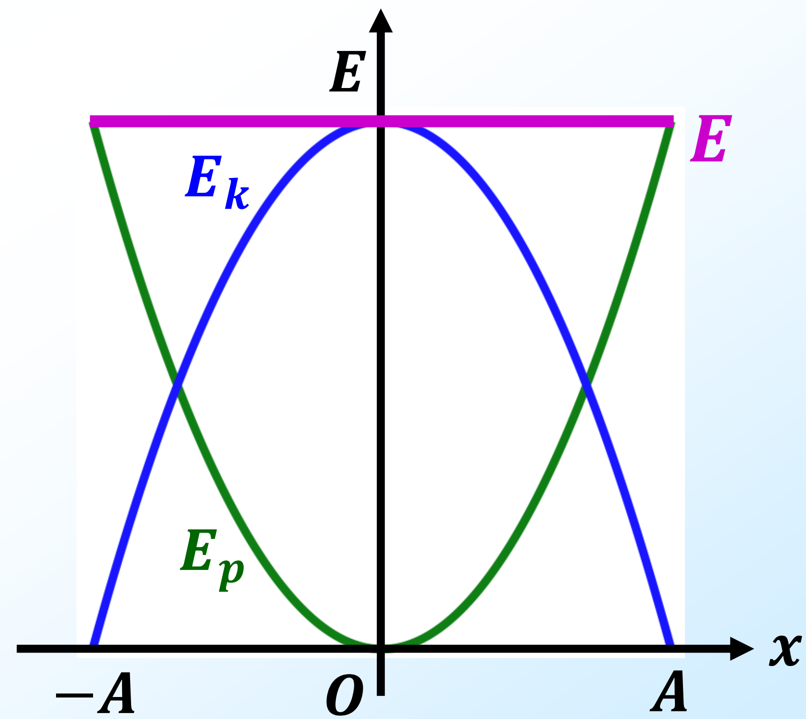
4. 能量与位移的关系

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) \qquad E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$\because \quad x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) \qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$



总能量与振幅的平方成正比，振幅不仅给出谐振动的范围，而且反映了振动系统的总能量。

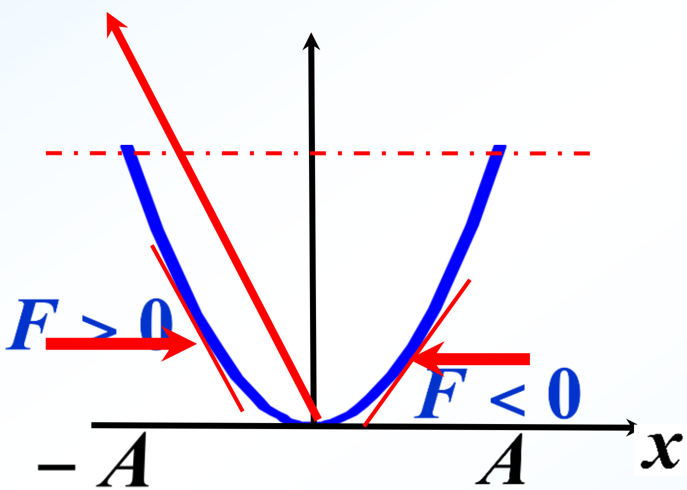
以上讨论适用于任何谐振动！

产生稳定简谐振动的一般物理机制

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$ 稳定解的条件： $$\frac{k}{m}>0$$

$$\boxed{E_p=\frac{1}{2}kx^2} \longrightarrow F=-\frac{dE_p}{dx}=-kx$$

稳定平衡点



$$F_{\text{平衡点}}=0$$

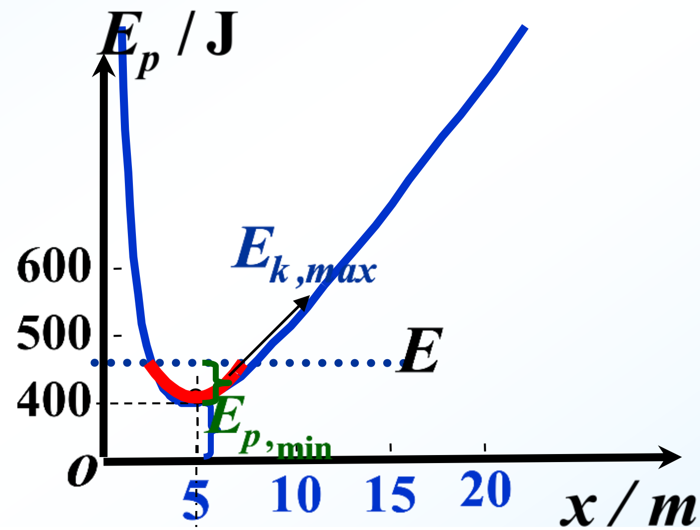
$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{\text{平衡点}}=0$$

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{\text{稳定平衡点}}>0$$

谐振动系统的意义

$$E_p(x)=\frac{A}{x}+Bx$$

$$F=-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}=\frac{A}{x^2}-B$$



$$E_p(x_0)=400\mathrm{J}$$

$$F(x_0)=-\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_0}=0$$

将E_p在x_0点附近做泰勒展开

$$E_p(x)=400+\cancel{\frac{E_p'(x_0)}{1!}}^{\,0}(x-x_0)+\frac{E_p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{E_p'''}{3!}(x-x_0)^3+\cdots$$

$$E_p(x)=400+\frac{\overbrace{E_p''(x_0)}^{k}}{2!}(x-x_0)^2$$

$$=400+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

$$F_{x附近}=-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}=-k(x-x_0)$$

$$=-kX$$

简谐振动的物理意义

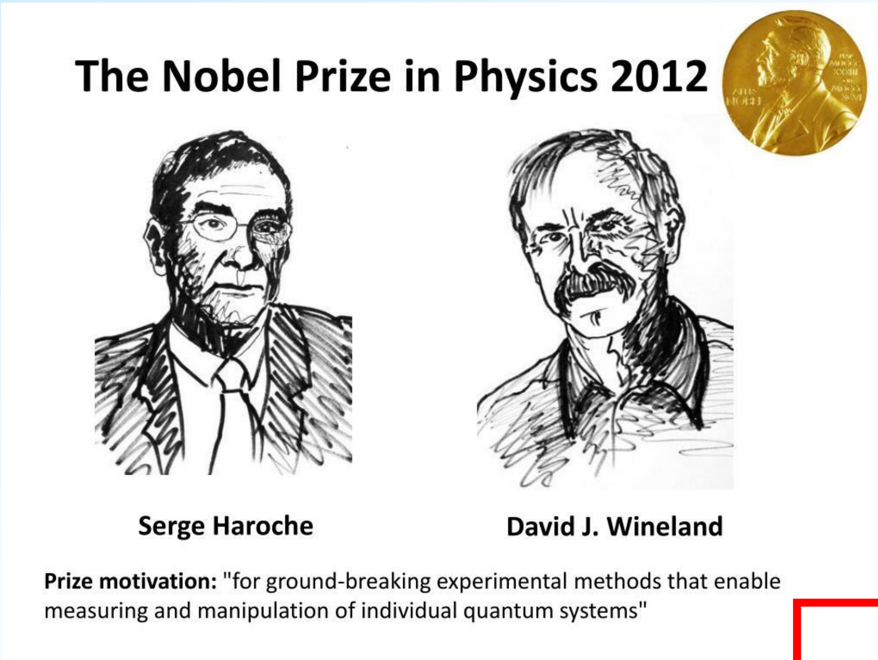
谐运动重要性：

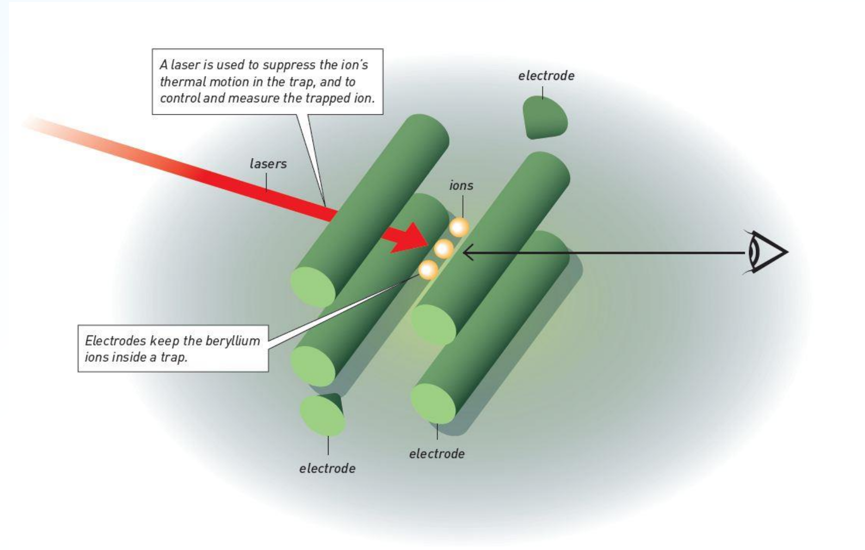
[1]任意周期振动都可用若干不同频率的简谐振动叠加

[2]处于稳定平衡的任何系统发生的微小位移，如果没有摩擦力，它的运动就是简谐运动

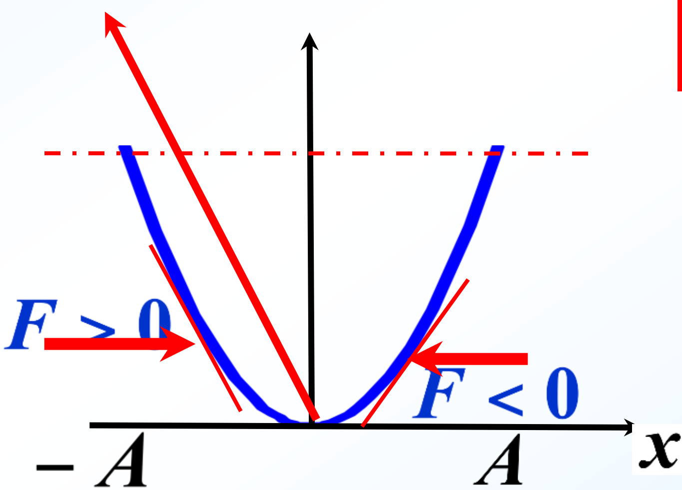
例如在空气阻力、摩擦力、散热等可忽略时，这种分析法对于桥梁、建筑物、化学反应等许多情况都是适用的

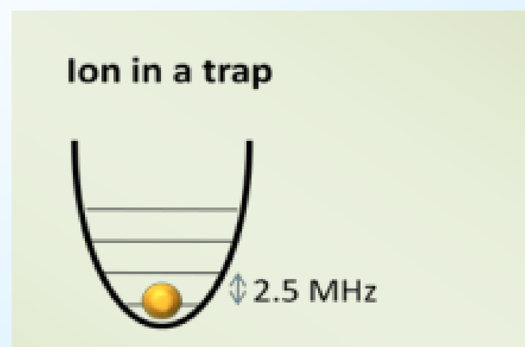
谐振动的例子：束缚离子





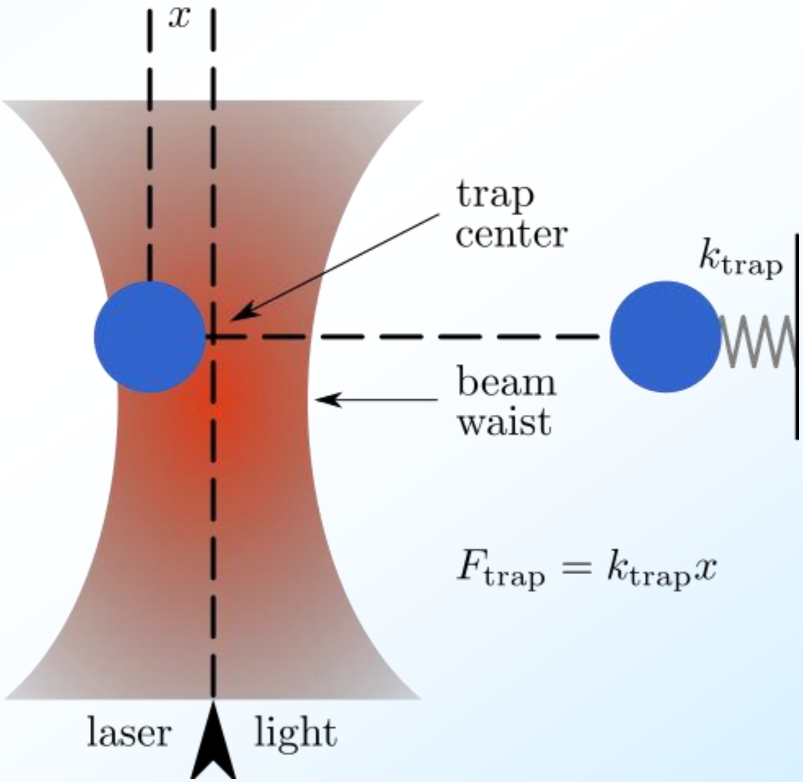
$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$





谐振动的例子：光镊

THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2018
Illustrations: Niklas Elmehed
Arthur Ashkin
Gérard Mourou
Donna Strickland
"for groundbreaking inventions in the field of laser physics"



x
trap center
k_{trap}
beam waist
$F_{\text{trap}} = k_{\text{trap}} x$
laser
light

第二节 振动的合成与分解

Combination of Simple Harmonic Motions

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

振动的重要参数：

振动方向、振动频率

振动幅度、初相位

一）两个同方向、同频率谐振动的合成

一个质点在同一个方向上同时参加两个谐振动，假设两个谐振动的频率均为ω，它们的振动方程为：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

则它们的合振动：

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= [A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2]\cos(\omega t) - [A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2]\sin(\omega t) \\ &= A\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 &= A\cos\varphi \\ A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 &= A\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi &= \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \end{aligned}\right.$$

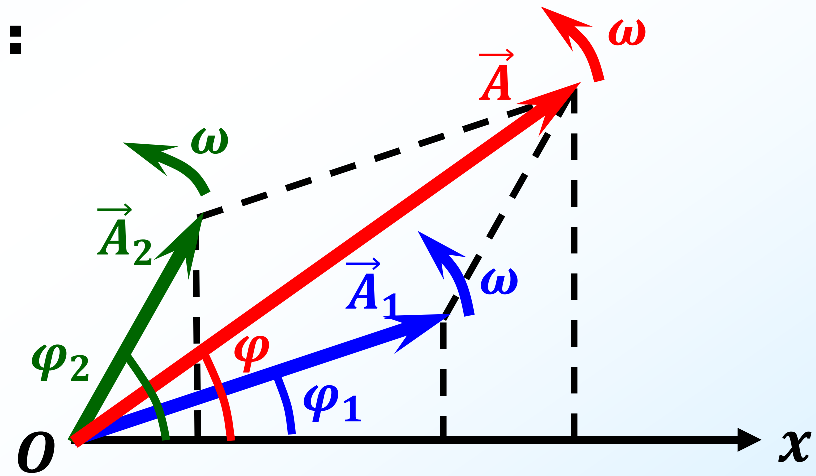
一）两个同方向、同频率谐振动的合成

利用旋转矢量法：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

合振动仍然是一个谐振动，频率为ω：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$



利用余弦定理可求得合振幅：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

根据各矢量的几何关系可求得合振动的初相位：

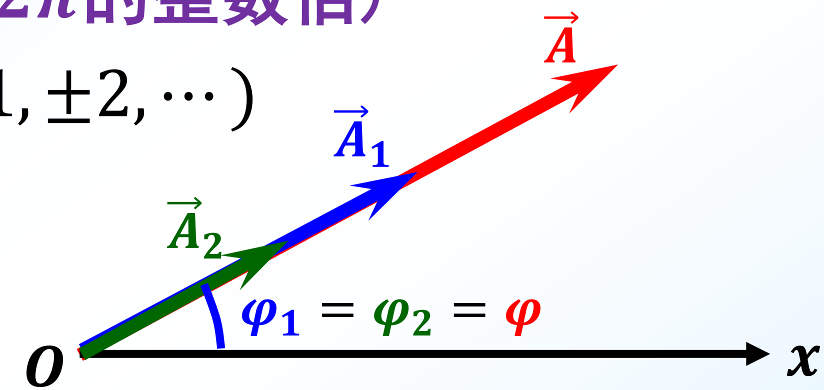
$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

一）两个同方向、同频率谐振动的合成

两个重要的特例

1). 两个分振动为同相位(相位差为2π的整数倍)

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$



A_1与A_2同向，合振幅为：

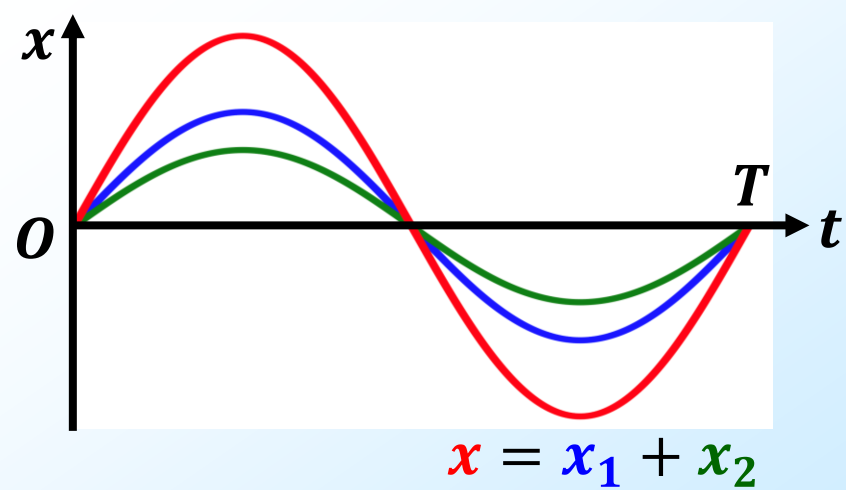
$$A = A_1 + A_2$$

合振动的初相位：

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$$

合振动方程：

$$x = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \varphi)$$



合振动的振幅最大。

两振动合成的效果：

----使振动加强

一）两个同方向、同频率谐振动的合成

2). 两个分振动为反相位（相位差为π的奇数倍）

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

A_1与A_2反向，合振幅为：

$$A = |A_1 - A_2|$$

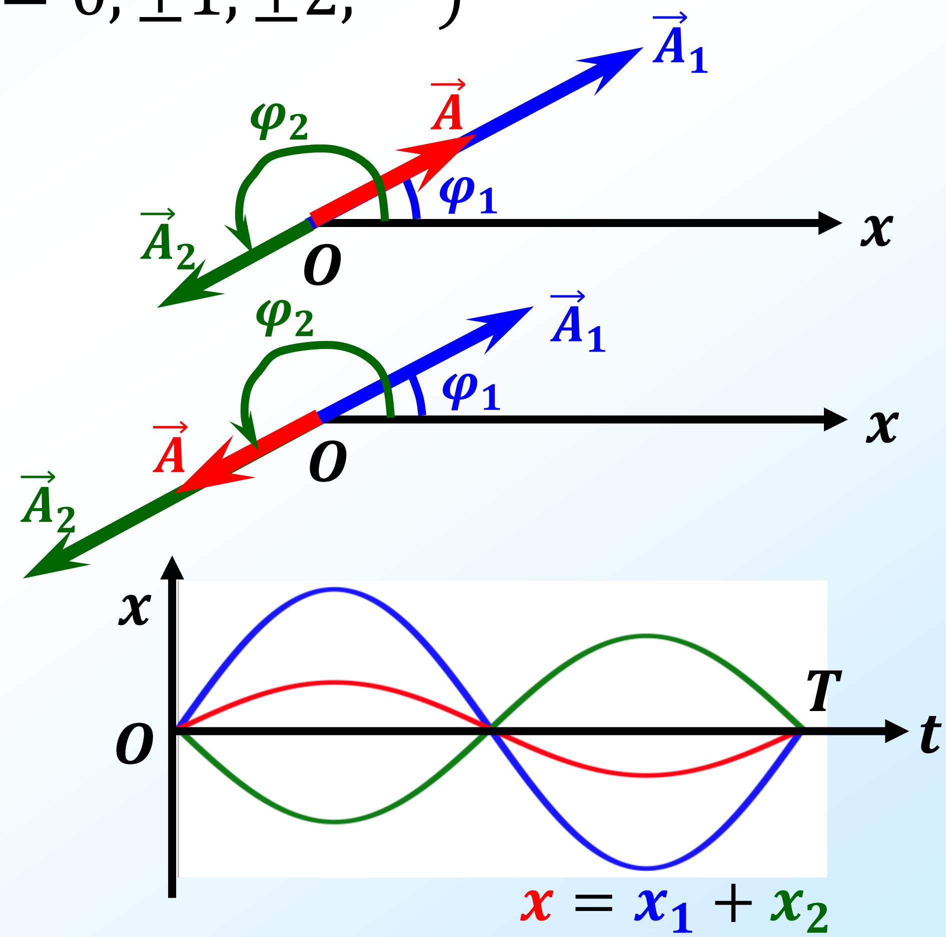
合振动的初相位：

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_1 & A_1 > A_2 \\ \varphi = \varphi_2 & A_1 < A_2 \end{cases}$$

合振动的振幅最小。

两振动合成的效果：

——使振动减弱



一）两个同方向、同频率谐振动的合成

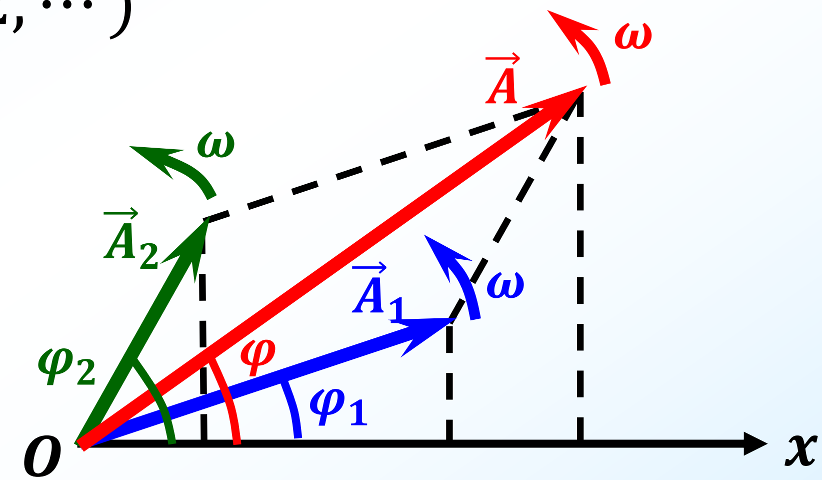
一般情况：两个分振动相位差不是π的整数倍

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \neq k\pi(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

A_1与A_2不同向，合振幅的范围：

$$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$$

三角形不等式的直接推论。



N个同方向，同频率的谐振动的合成

旋转矢量法仍然适用。

合振动仍是谐振动，其频率为ω；

二）两个同方向、不同频率谐振动的合成

两振动的振动方程为：

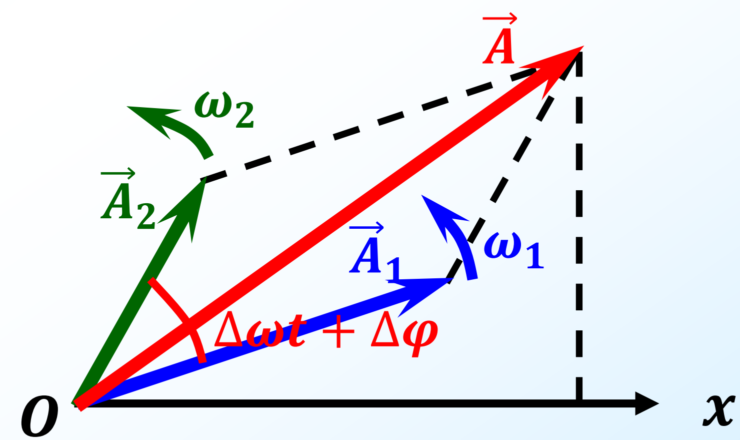
$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$\vec{A}_1$与$\vec{A}_2$以不同的角速度旋转，它们之间的夹角为：

$$\Delta\varphi = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$= (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$$



$\vec{A}$在x轴上投影点的运动不是谐振动。

二）两个同方向、不同频率谐振动的合成

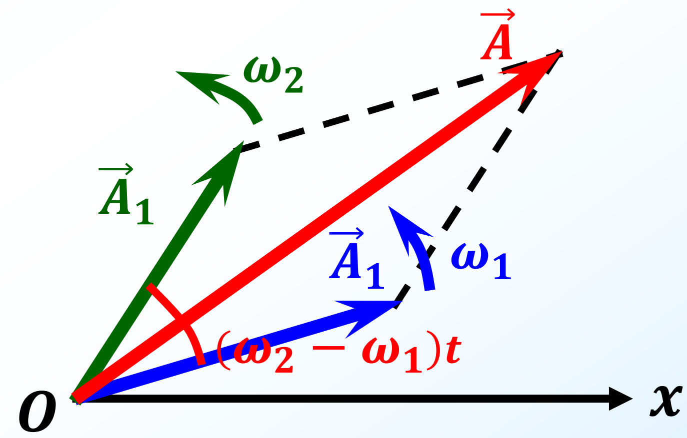
特例：两个振动的振幅和初相位相同 $A_1 = A_2 \ \ \varphi_1 = \varphi_2$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$$

合振动： $x = x_1 + x_2$

$$x = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_1\right)$$



根据旋转矢量法，合振幅为：

$$A^2 = A_1^2 + A_1^2 + 2A_1A_1 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t]$$

$$= 2A_1^2[1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

$$= 4A_1^2 \cos^2\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

合振幅随时间变化：

$$\boxed{A(t) = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)}$$

二）两个同方向、不同频率谐振动的合成

合振动方程：

振幅$A(t)$按余弦变化

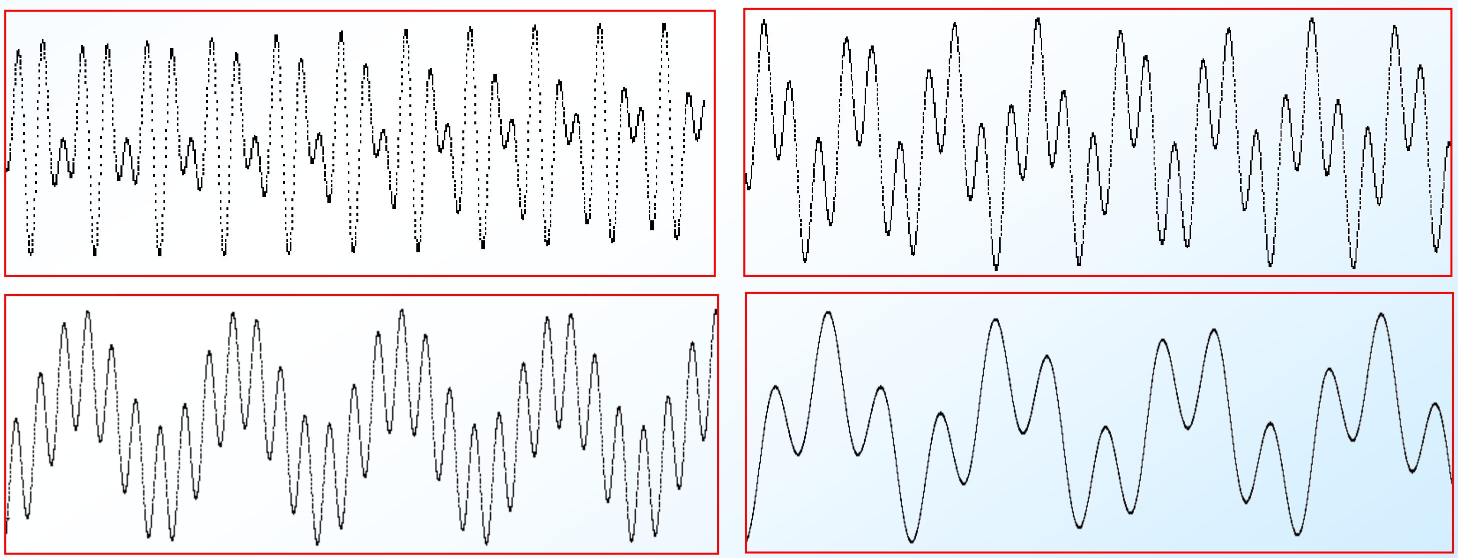
$$x = 2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi_1\right)$$

可以把合振动看成是一种振幅随时间周期性变化的振动。

$$0 \le |A(t)| \le 2A_1$$

合振动不是谐振动。

振动曲线取决于频率差



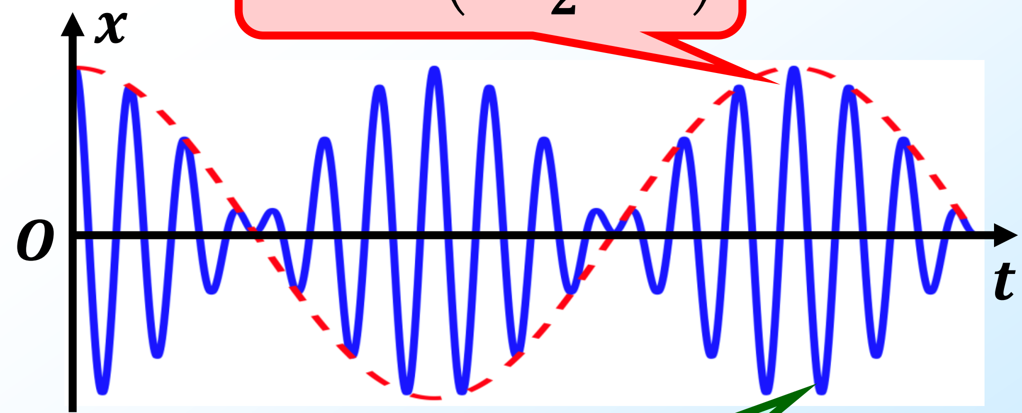
二）两个同方向、不同频率谐振动的合成

两个分振动频率相互接近时的合振动

$$x = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_1\right)$$

$$\omega_2 + \omega_1 \gg |\omega_2 - \omega_1|$$

$$2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$



$$\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_1\right)$$

振幅会出现明显加强和减弱的现象

——拍。

振动的包络对应着低频因子，

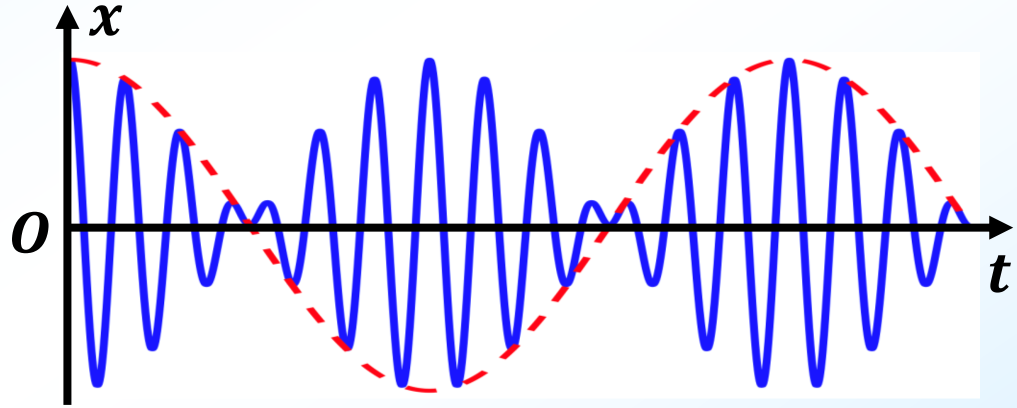
而振动的细节对应高频因子。

二）两个同方向、不同频率谐振动的合成

$$\boxed{x = 2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi_1\right)}$$

$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$改变$\pi$时，

A就重复出现一次变化。



拍的周期τ：

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau=\pi \Rightarrow \tau=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$$

拍的频率（拍频）ν： $\nu=\frac{1}{\tau}=\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}=\nu_2-\nu_1$

拍现象只在两分振动频率的频率相差不太大时才能显现出来。

$$\omega_2+\omega_1 \gg |\omega_2-\omega_1|$$

拍现象很明显

三）两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

设一个物体在x方向参与振动 $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

同时在y方向参与振动 $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

计算物体的轨迹方程：
$$\begin{cases} x = A_1 \cos\omega t \cos\varphi_1 - A_1 \sin\omega t \sin\varphi_1 \\ y = A_2 \cos\omega t \cos\varphi_2 - A_2 \sin\omega t \sin\varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\omega t = \dfrac{xA_2 \sin\varphi_2 - yA_1 \sin\varphi_1}{A_1 A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \sin\omega t = \dfrac{xA_2 \cos\varphi_2 - yA_1 \cos\varphi_1}{A_1 A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{cases}$$

代入：$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$

整理可得：

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

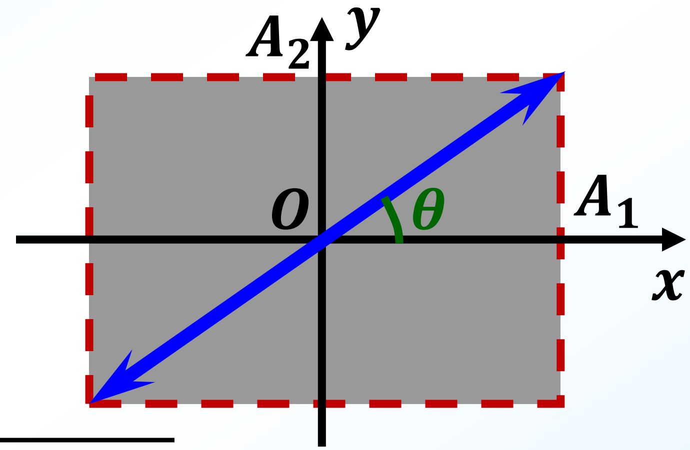
椭圆方程

三）两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

几种特殊情况

1). 两个分振动同相

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0 \quad \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$



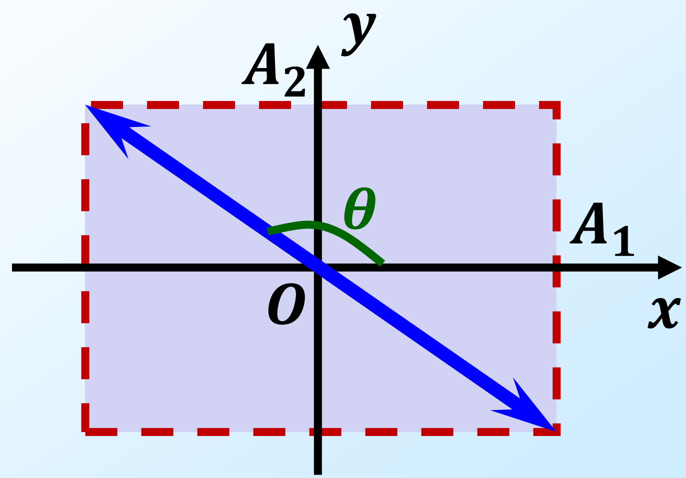
$$\therefore \quad y = \frac{A_2}{A_1}x$$ **直线斜率为：** $\tan\theta = \dfrac{A_2}{A_1}$

距离原点的位移： $S = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(\omega t + \varphi_1)$

直线振动

2). 两个分振动反相

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi \quad \left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

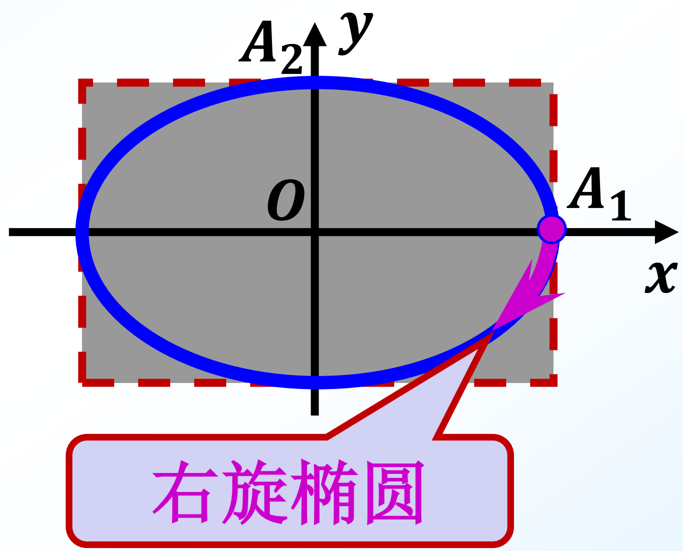


$$\therefore \quad y = -\frac{A_2}{A_1}x$$ **直线斜率为：** $\tan\theta = -\dfrac{A_2}{A_1}$

频率，振幅同上，也是直线振动

三）两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

3). $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ $\quad \dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} = 1$



轨迹为一正椭圆形，长短轴分别为 $2A_1$和$2A_2$

若$A_1 = A_2$，轨迹是一个圆。

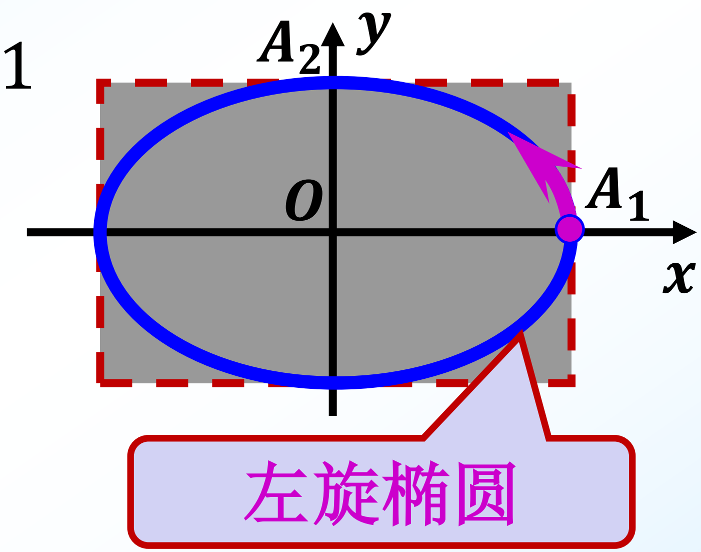
问题：振动方向？

$\because \ \varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ $\quad \begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_1 + \pi/2) \\ \quad = -A_2\sin(\omega t + \varphi_1) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{ll} \text{当}\omega t + \varphi_1 = 0\text{时，} & x = A_1, y = 0 \\ \text{当}\omega t + \varphi_1 = \Delta\varphi\text{时，} & x > 0, y < 0 \end{array}\right\}$ **振动为顺时针方向**

三）两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

4). $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ $\quad \dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} = 1$



轨迹同样为一正椭圆形，长短轴分别为 $2A_1$和$2A_2$

若$A_1 = A_2$，轨迹是一个圆。

问题：振动方向有什么变化？

$$\because \quad \varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2 \quad \begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_1 - \pi/2) \\ \quad = A_2\sin(\omega t + \varphi_1) \end{cases}$$

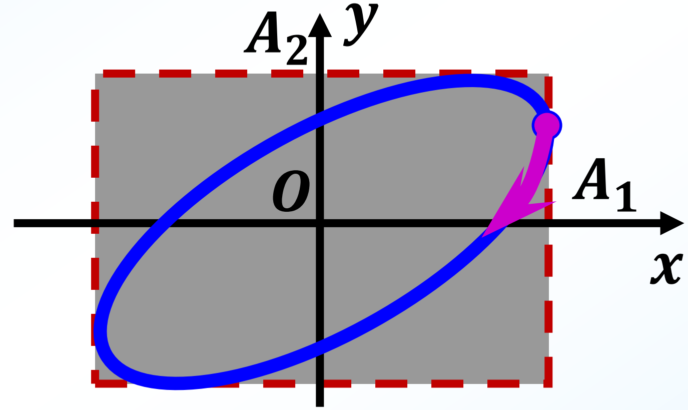
$$\left.\begin{array}{ll} \text{当}\,\omega t + \varphi_1 = 0\text{时，} & x = A_1, y = 0 \\ \text{当}\,\omega t + \varphi_1 = \Delta\varphi\text{时，} & x > 0, y > 0 \end{array}\right\} \text{振动为逆时针方向}$$

三）两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

5）. $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$ **φ为任意值。**

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

轨迹是任意一个斜椭圆。



问题：振动方向是左旋还是右旋？

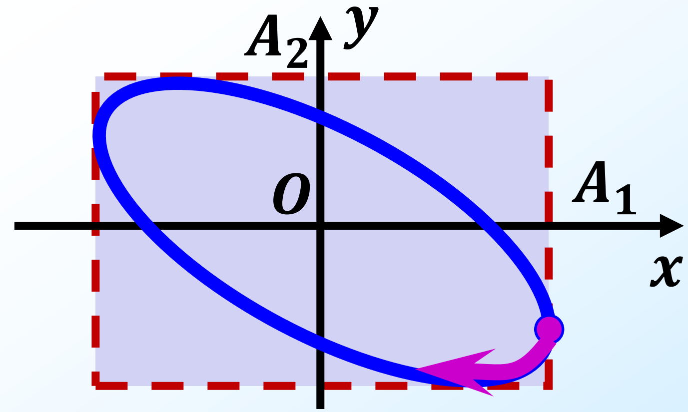
为简便起见，假定$\boldsymbol{\varphi_1 = 0}$

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

当$\boldsymbol{t = 0}$时， $x = A_1, y = A_2\cos\varphi$

$0 < \varphi < \pi/2 \quad x > 0, y > 0$

$$v_y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = -\omega A_2 \sin\varphi < 0$$



$\pi/2 < \varphi < \pi$

$y < 0, v_y < 0$

都是右旋

三）两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi=\sin^2\varphi$$

为简便起见，假定$\boldsymbol{\varphi_1=0}$

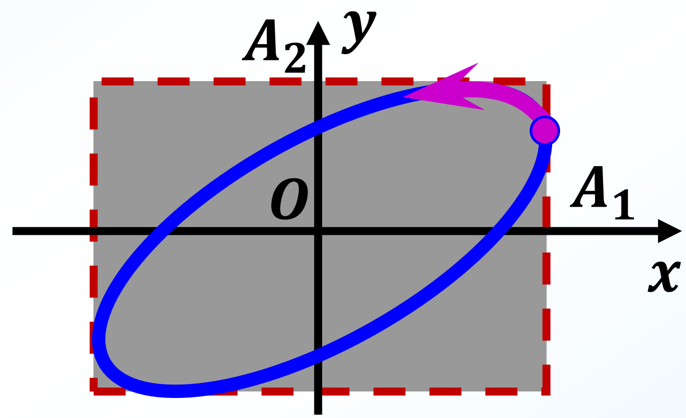
$$\begin{cases} x=A_1\cos(\omega t) \\ y=A_2\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

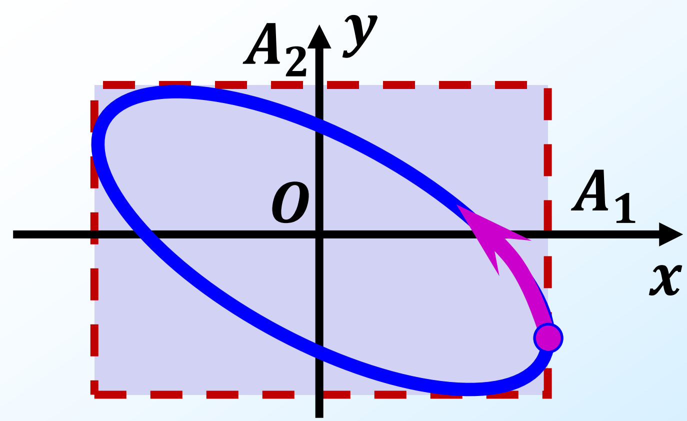
当$\boldsymbol{t=0}$时， $x=A_1, y=A_2\cos\varphi$

$$v_y=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}=-\omega A_2\sin\varphi$$

$-\pi/2<\varphi<0 \qquad y>0, v_y>0$

$-\pi<\varphi<-\pi/2 \qquad y<0, v_y>0$

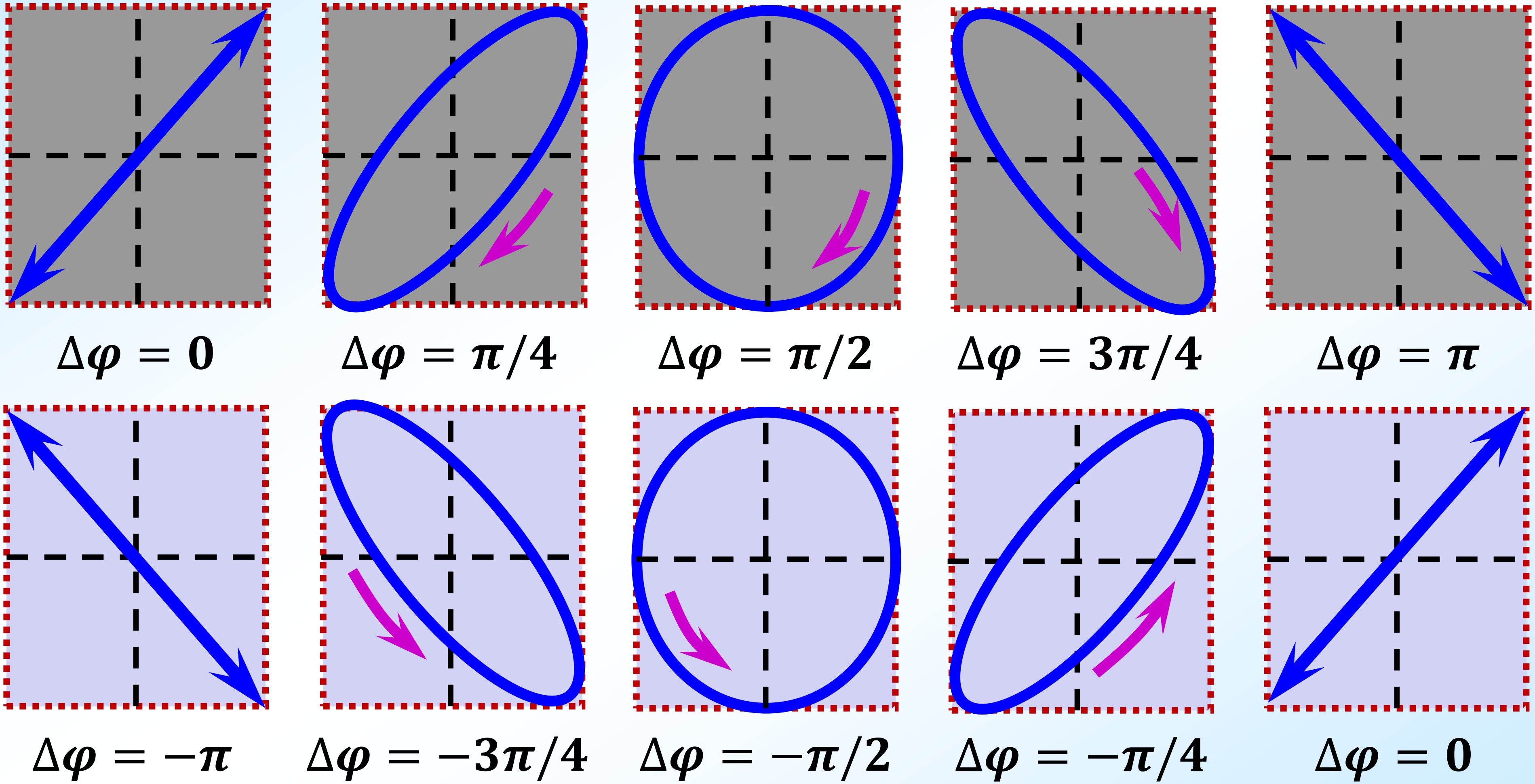




$\boxed{-\pi<\varphi<0 \quad \text{都是左旋} \qquad 0<\varphi<\pi \quad \text{都是右旋}}$

三）两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

$\Delta\varphi$为任意值时，合振动的轨迹一般为椭圆



例题

例1：已知一质点在x和y方向分别参与谐振动$x = A_1 \cos \omega t$和$y = A_2 \cos(\omega t + \pi/4)$，求 (1) 合振动的轨迹；(2) 质点在任意位置所受的力。

解： (1) $\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(A_2 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t) \end{cases}$

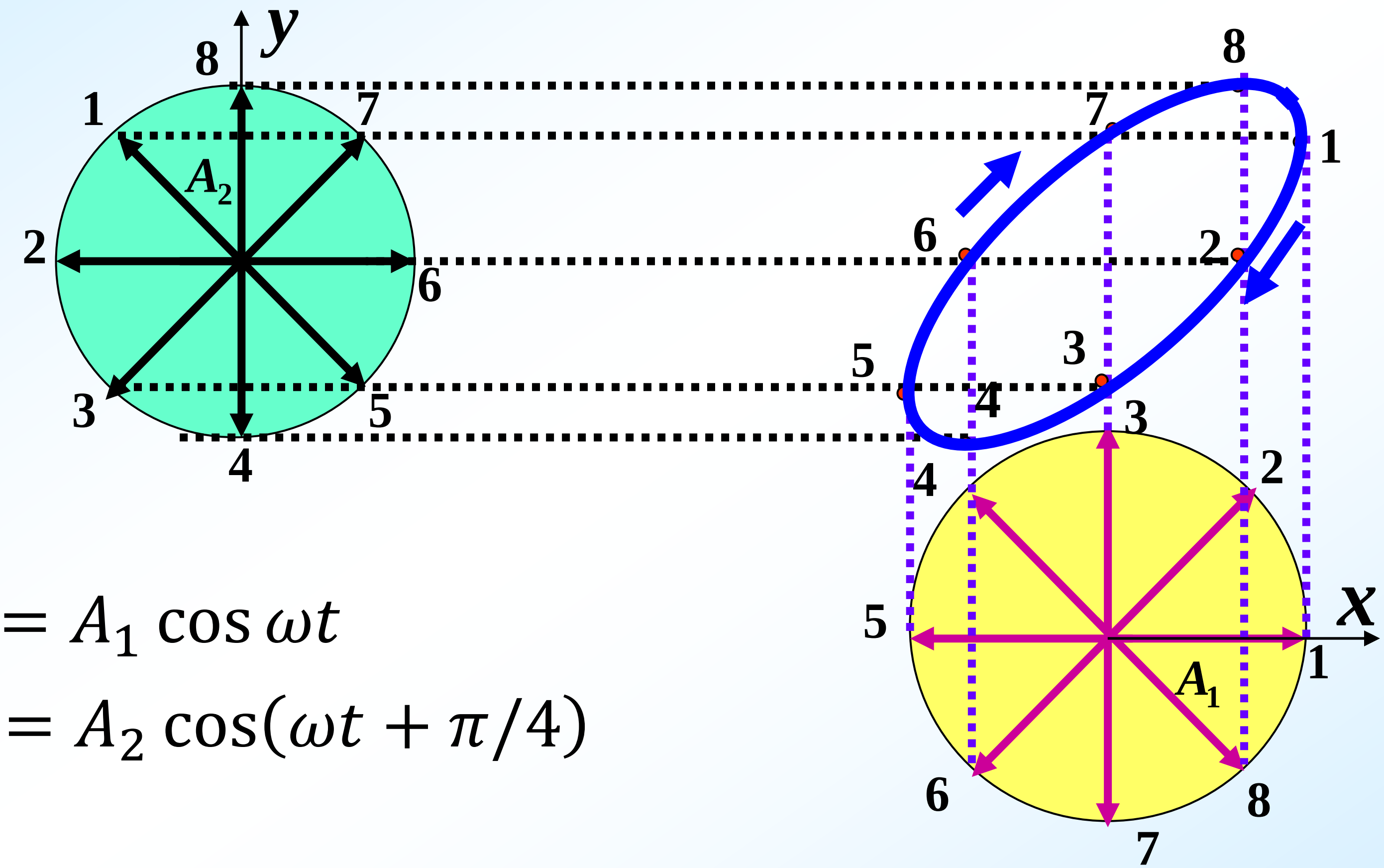
$$\therefore \quad \sin \omega t = \frac{x}{A_1} - \frac{\sqrt{2} y}{A_2} \qquad \cos \omega t = \frac{x}{A_1}$$

联立上式消去t，可得：

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{\sqrt{2} y}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = 1$$

例题

利用旋转矢量法画出振动轨迹



$$
\begin{cases}
x = A_1 \cos \omega t \\
y = A_2 \cos(\omega t + \pi/4)
\end{cases}
$$

例题

(2) 质点任意时刻所受的力：

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \pi/4) \end{cases}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + m\frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y$$

$$= -m\omega^2 A_1 \cos \omega t\,\vec{e}_x - m\omega^2 A_2 \cos(\omega t + \pi/4)\,\vec{e}_y$$

$$= -m\omega^2 x\vec{e}_x - m\omega^2 y\vec{e}_y$$

$$= -m\omega^2\vec{r}$$

向心力

四）两个振动方向相互垂直、频率不同谐振动的合成

两个振动的振动方程为：$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$

通常情况下，合振动非常复杂。仅简单讨论一种特殊情况：

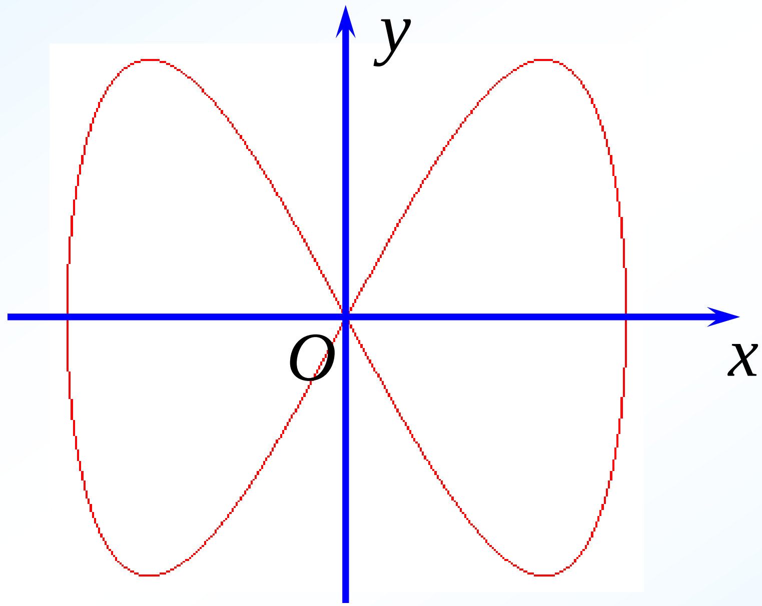
两频率成简单的整数比：$\boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{N_x}{N_y}}$ $\quad N_x, N_y$都是整数。

合运动轨迹为闭合曲线。 ---其运动也有周期性

利萨如图：不同频率之比和不同相位差时合振动的轨迹图

四）两个振动方向相互垂直、频率不同谐振动的合成

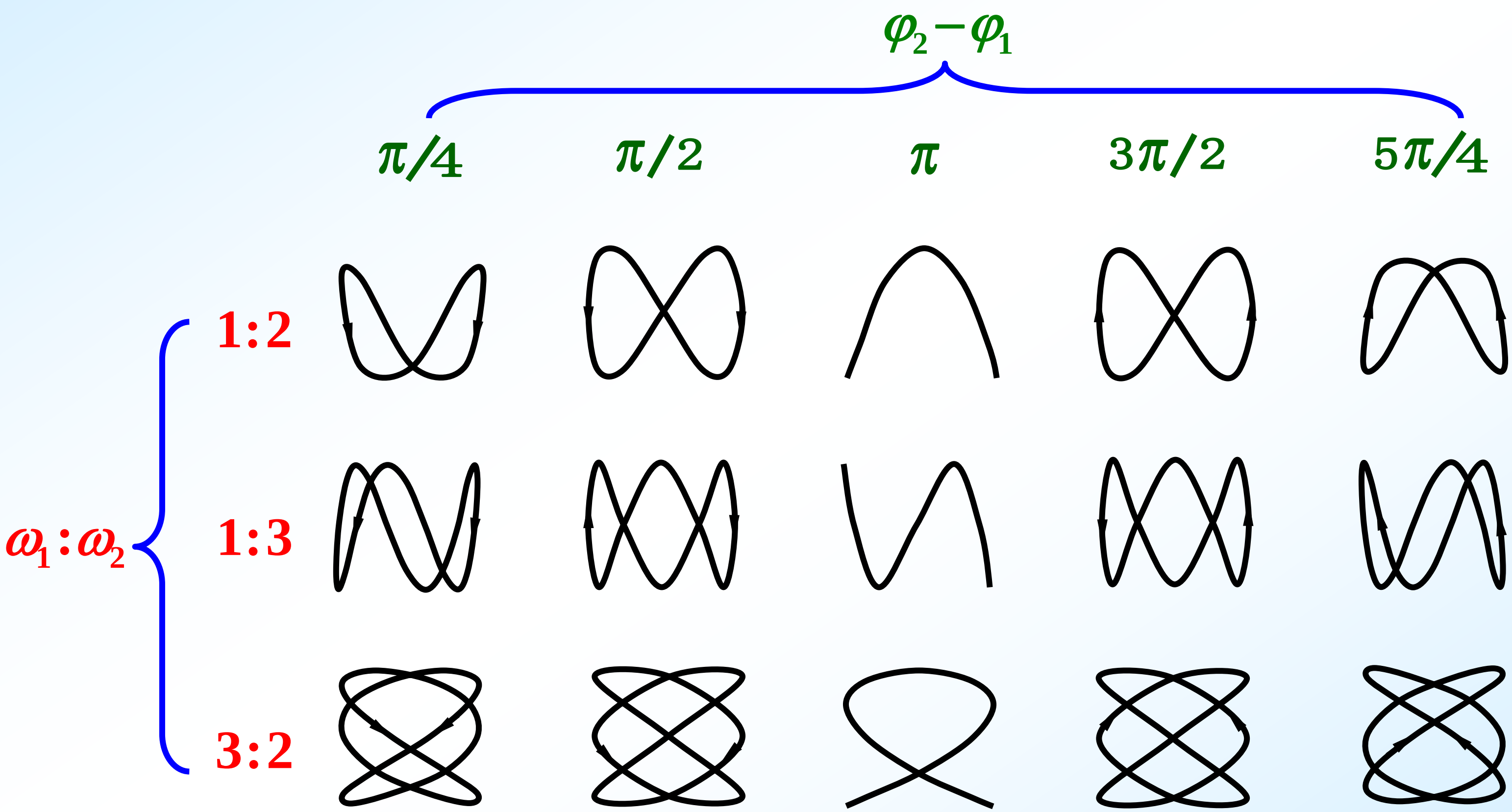
$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 2$时，对应不同初相位差的利萨如图形



相邻的利萨如图形初始相位差为12°

四）两个振动方向相互垂直、频率不同谐振动的合成

利萨如图形示例

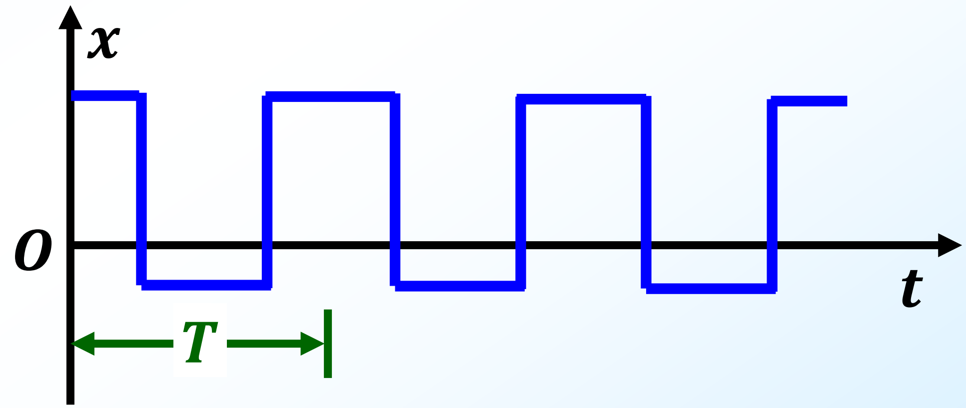


五）振动的分解（谐振分析）

任何一个复杂的振动都可以看成一系列谐振动的组合。

谐振分析： 把复杂振动分解成一系列不同频率，不同振幅的谐振动的方法。

使用的数学方法：傅立叶分析



例：方波的谐振分析

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

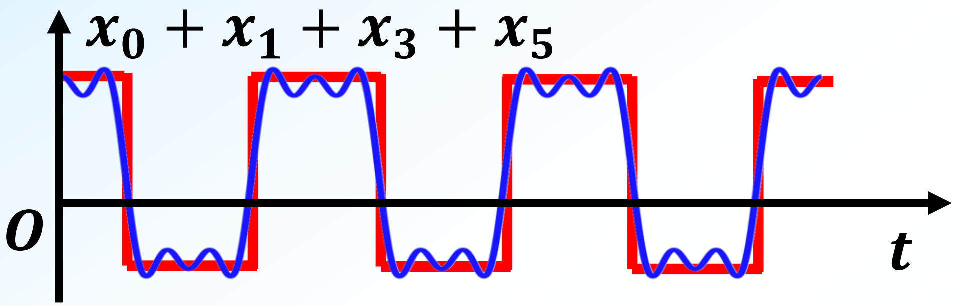
每个谐振动的周期：$T_n = \dfrac{2\pi}{n\omega} = \dfrac{T}{n}$

$\therefore \quad x(t+T) = x(t)$

五）振动的分解（谐振分析）

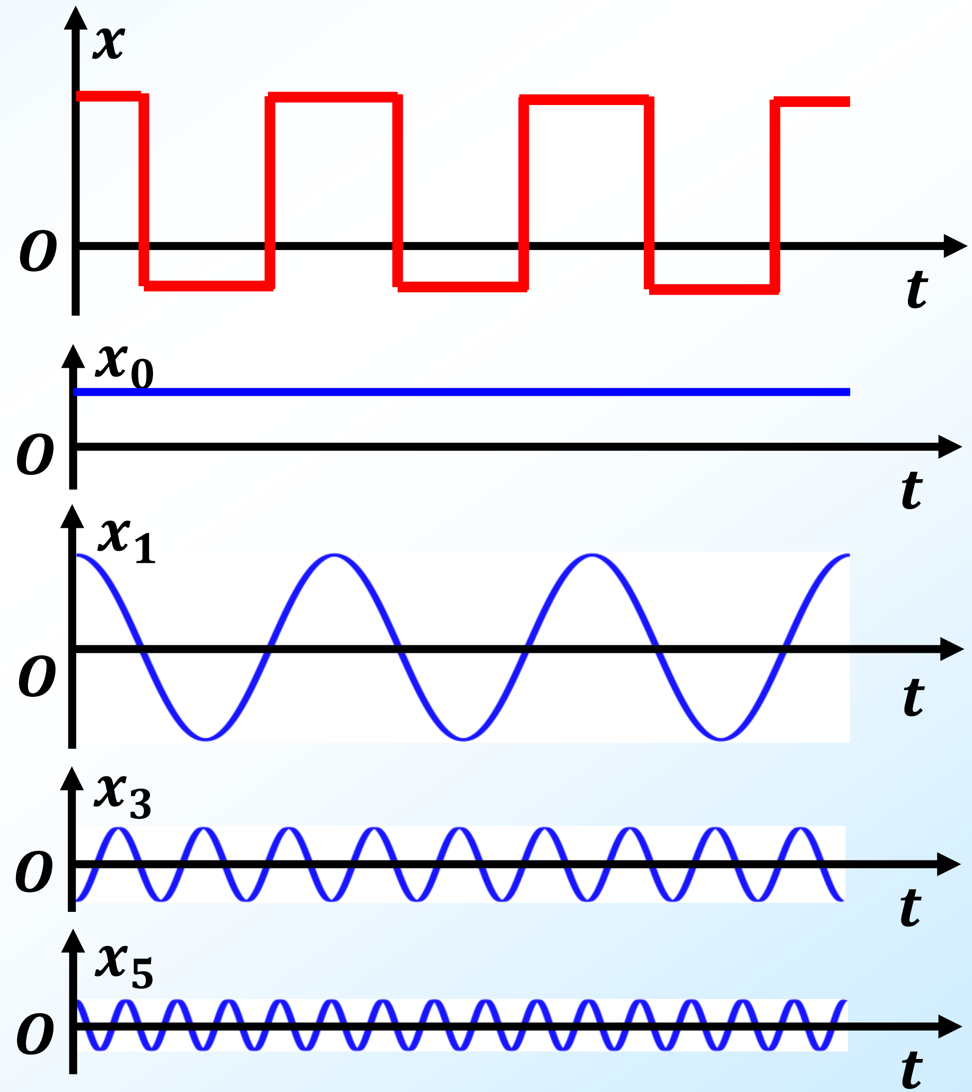
方波的谐振分析

$$x(t) = A_0 + A\cos\omega t - \frac{A}{3}\cos 3\omega t + \frac{A}{5}\cos 5\omega t - \frac{A}{7}\cos 7\omega t + \cdots$$

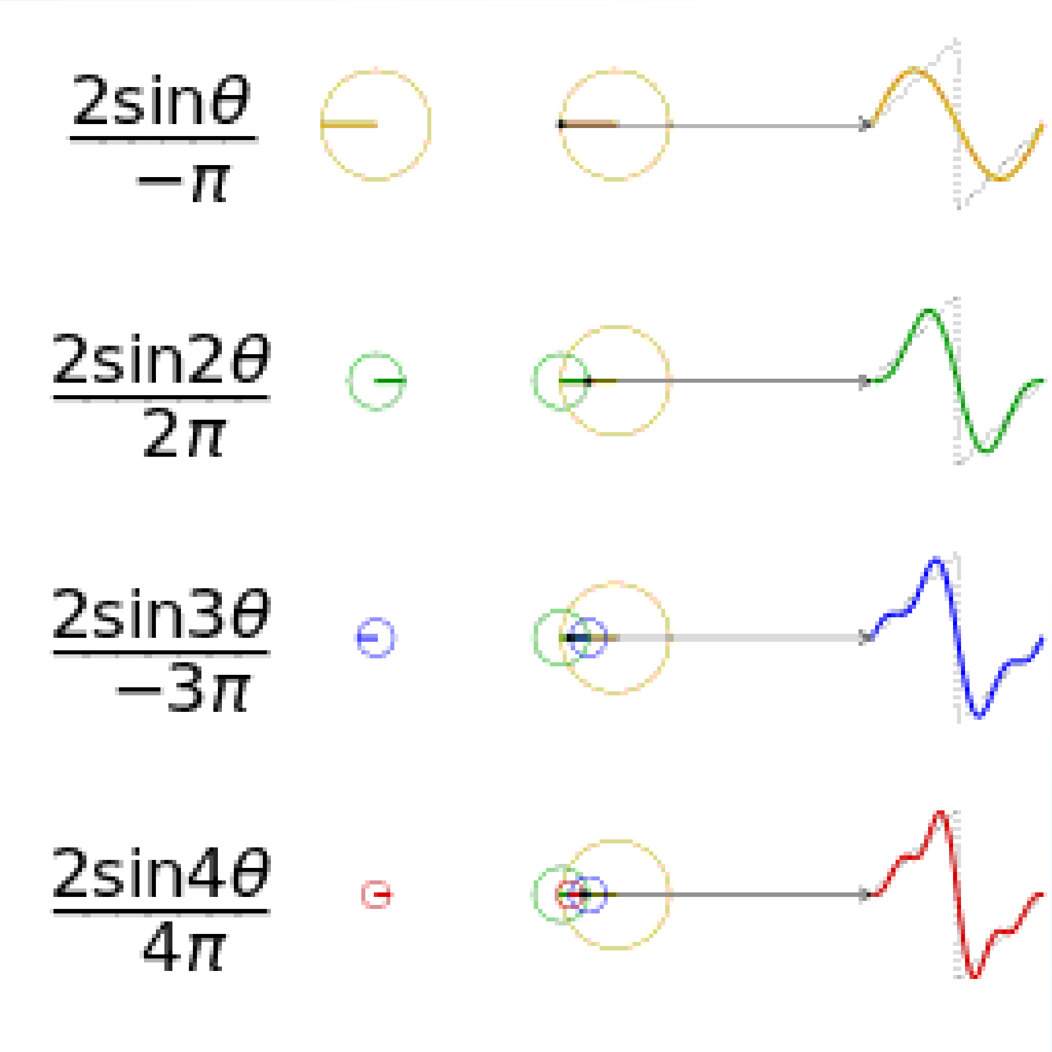


振动的分解不仅只是一个数学运算，而是真正的物理过程。

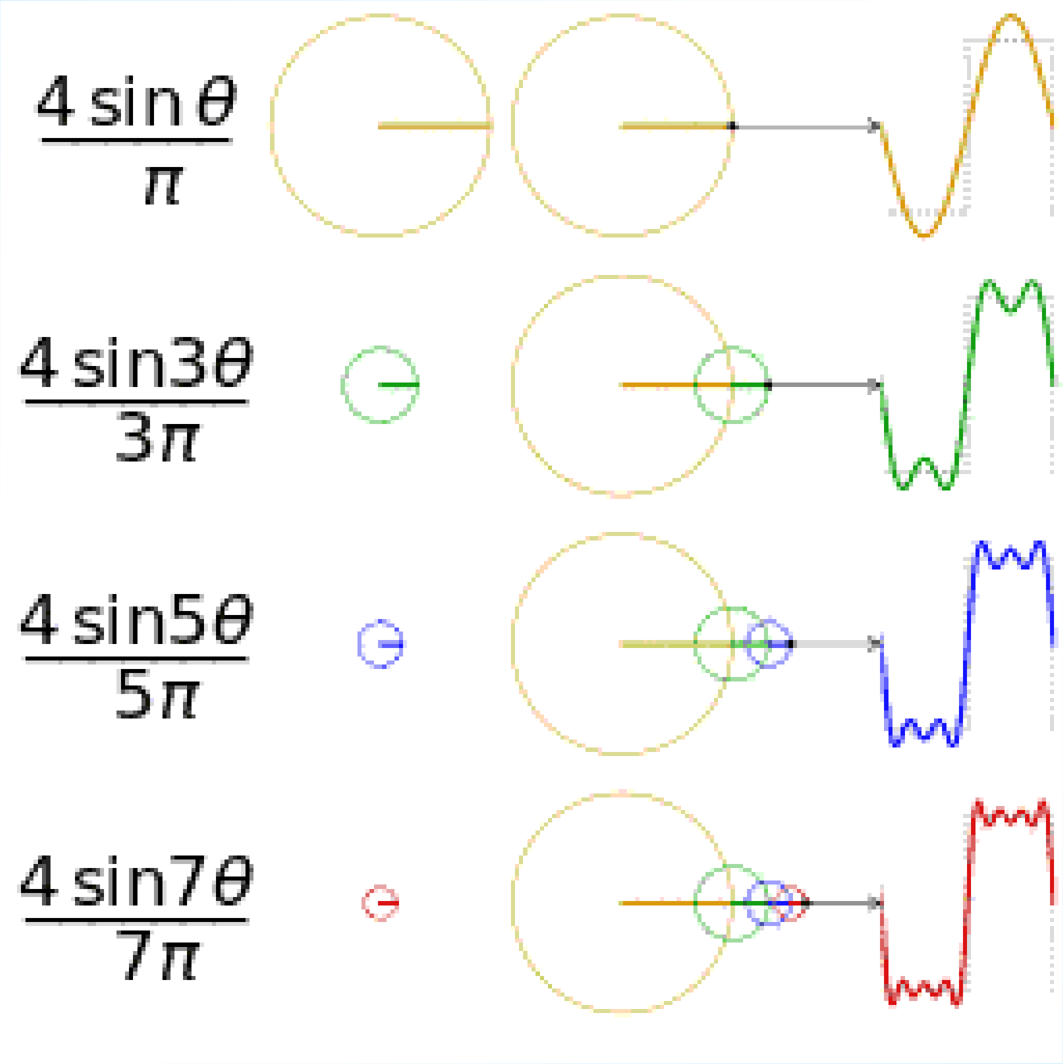
例如：人耳的柯蒂氏器官。



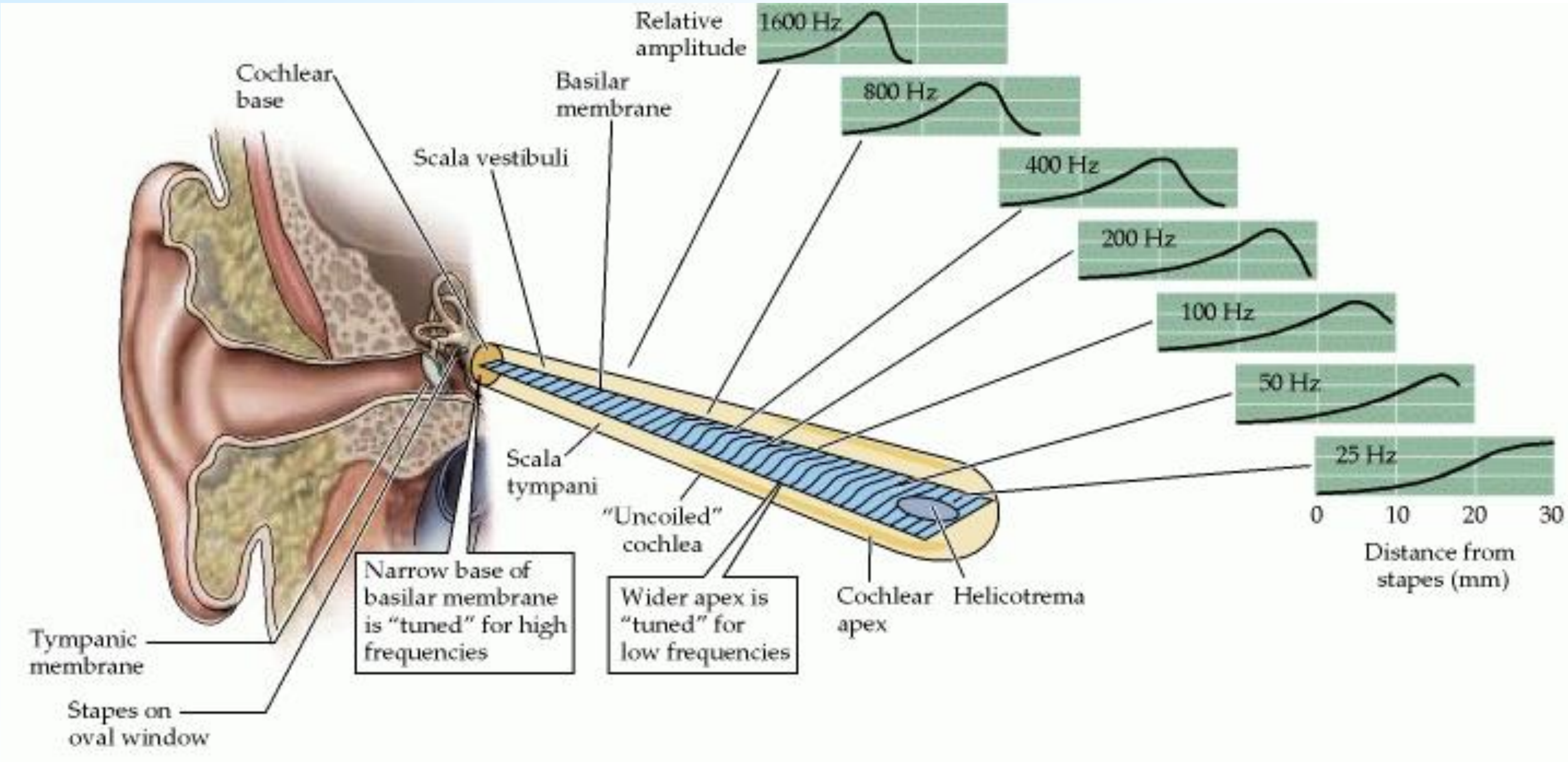
旋转矢量表示法与频谱分析



旋转矢量表示法与频谱分析



人体的频谱分析仪



音乐是我们的灵魂在做算术练习。

—— 莱布尼兹

作业： Chap.11 —T3、T4、T5、T6、 T7、 T8

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 通过学习通提交作业。
4. 作业缺交三分之一及以上者按规定不能参加考试。