习题课（第2章）

本章要点：

- 矩阵的概念
- 矩阵上定义的运算：

  $A+B$，kA，AB，A^T，A^{-1}，$|A|$，A^*

  - 各运算定义的条件和结果
  - 各运算之间的关系
  - 矩阵运算和实数运算的差异
  - 矩阵的分块技巧

重点

- 矩阵的初等变换
  - 行阶梯形、行标准形、标准形；
  - 初等矩阵与初等变换的应用

基本功

- 矩阵的秩
  - 秩的概念；
  - 秩的等式和不等式
  - 秩的求法

难点

矩阵乘法的其他公式：p33. 乘法表

$$A \overset{行}{=} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \qquad B \overset{列}{=} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{bmatrix}$$

1、 $AB = A\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_p \end{bmatrix}$

矩阵乘积的列的构成！

2、 $A_{m\times n}B_{n\times p} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_mB \end{bmatrix}$

矩阵乘积的行的构成！

初等变换的基本结果

- 初等变换后的矩阵和原矩阵不等.
- 行阶梯形不是惟一的，但是行标准形和标准型是惟一的.
- Gauss-Jordan 消元法可以将矩阵化为行标准型;仅用行初等变换不一定能将一个矩阵化为标准形F.
- 矩阵的行阶梯形、行标准型和标准型的共性:
  - 非零行的数目r相等.
  - n阶方阵的$r=n$时，行标准型是单位矩阵.
  - 从行阶梯形可以直接得到标准型.

练习题的类别：

- 判断与讨论题
- 基本习题
- 综合练习题
- 证明题
- 思考题

判断题

1. 设A，B, C为n 阶可逆方阵，则

① $A + B = B + A$；$AB = BA$；$|AB| = |BA|$.

② $(A^T)^T = A$; $(A^{-1})^{-1} = A$; $(A^*)^* = A$.

③ $(kA)^* = k(A^*)$; $|A^*| = |A|^n$

2. 设$A_{m\times m}$和$B_{n\times n}$均为不可逆矩阵, 则 $|A| = |B|$.

3. 若A是可逆矩阵, $AB = 0$，则有$B = 0$.

4. 若方阵$ABC = I$, 则

(1) $BAC = I$; (2) $CAB = I$;

(3) $BCA = I$; (4) $CBA = I$.

5. 若A, B 均为n 阶对称矩阵, 则AB也是对称矩阵.

6. 设A, B是方阵,下列等式是否成立?

- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
- $AB + 4B = (A+4)B$.
- $A^2 - I = (A + I)(A - I)$

7. 若A，B 为 n 阶方阵，$AB = 0$， 则

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2.$$

8. 设A，B为方阵，则矩阵乘法的秩的结果有

$$r(AB) = r(BA).$$

9. 设A是$(m\times n)$矩阵，如果对任何的$(n\times 1)$向量X，有$AX= 0$，则A是零矩阵.

二、填空题

1 设，$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$，则$A^{-1}=$ ________

2 设$|A|=2$，则$|A^{-1}+A^{*}|=$ ________

3 如果

$$F\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & 7 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 7 & 4\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

，则F= ________

4 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，则 $(kA^{*})^{-1}=$ ________

计算题

一、求下列矩阵A的n次幂A^n：

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

2、 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3、 $A = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}P^{-1}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

- 二、设 $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&1\\0&3&2\end{bmatrix}$，求矩阵$B$，使得 $A^*BA = BA + 3I$.

- 三、设3阶矩阵$A=(a_{ij})$满足条件$a_{ij} = A_{ij}$， $a_{33} = -1$，求

1. A的行列式
2. 求解

$$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

- 四、设n阶方阵A满足$AA^{\mathrm{T}} = I$（正交矩阵），$|A| < 0$, 求$|I+A|$.

✴ 五、证明题:

1、设 A 和 B 是 $(n\times n)$ 矩阵，有$AB = A+B$. 证明$A-I$是可逆的，求$(A-I)^{-1}$.

2、设n阶矩阵A不可逆，证明存在n阶非零矩阵B，使得$AB = 0$。

3、设矩阵A、B、$A+B$均为可逆矩阵，证明

$$A^{-1}+B^{-1}$$ 可逆，并且求逆.