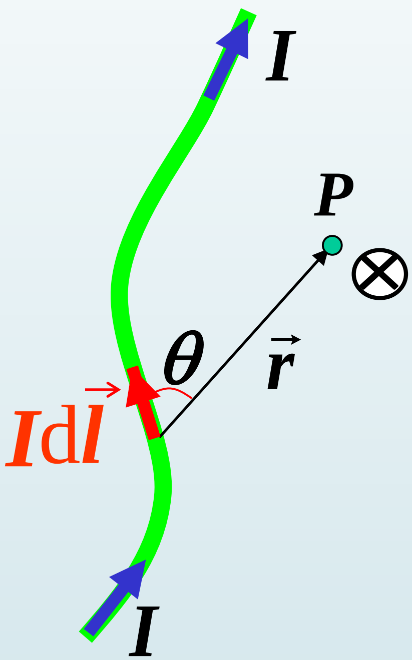
大学物理（一）

任课老师：蔡林
cailin@hust.edu.cn

回顾：毕奥 — 萨伐尔定律——电流激发磁场的规律

实验表明：

$\boxed{\text{任一电流激发的磁场}} = \boxed{\text{各小段电流产生的磁场的叠加}}$



毕奥— 萨伐尔定律：

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

真空的磁导率 $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}$

P点总的磁感应强度为：

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

● 无限长载流直导线：

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

磁力线是沿着垂直导线平面内的同心圆，其方向与电流方向成右手螺旋关系。

四、高斯定理

1.磁通量Φ_B： 磁场中任一给定面上的磁通量等于通过该面的磁感应线的总根数。

规定： $B=\dfrac{\Delta N}{S}$ （磁通密度）

1）$\vec{B}$为均匀场　　S面的磁通量：$\Phi_B=\vec{B}\cdot\vec{S}$

2) $\vec{B}$为非均匀场　　$\mathrm{d}\Phi_B=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

S面上的总通量： $\Phi_B=\int\mathrm{d}\Phi_B=\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

当S为闭合曲面时：$\Phi_B=\oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

对闭合面的法线方向规定：

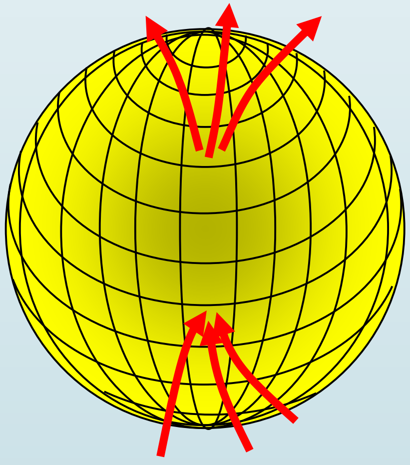
自内向外为法线的正方向。

磁感应线从曲面内向外穿出：$\Phi_B>0$

而从曲面外向内穿进：$\Phi_B<0$

Φ_B的单位：韦伯　Wb　$=\mathrm{Tm}^2$　　$1\mathrm{T}=1\mathrm{Wb/m}^2$

$\Phi_B>0$



$\Phi_B<0$

2. 真空中稳恒磁场的高斯定理

1）高斯定理：通过任意闭合曲面S的磁通量恒等于零。

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$ （毕奥 — 萨伐尔定律的直接推论）

高斯定理表明：

稳恒磁场是无源场 （对变化的磁场亦成立）

2）推论：

稳恒磁场的磁场线是连续的闭合曲线。

即：磁场线不会中断于任何一点。

2.真空中稳恒磁场的高斯定理

1）高斯定理：通过任意闭合曲面*S*的磁通量恒等于零。

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$ **(毕奥 — 萨伐尔定律的直接推论)**

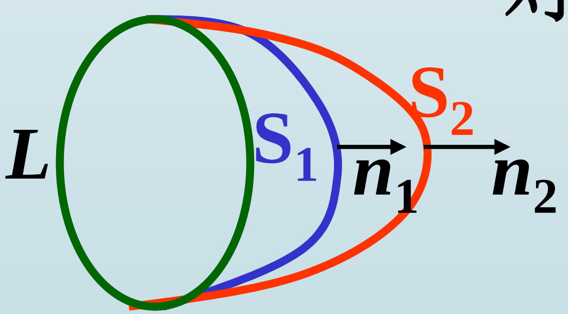
高斯定理表明：稳恒磁场是无源场 **(对变化的磁场亦成立)**

2）推论：

（1）稳恒磁场的磁场线是连续的闭合曲线。

即：在磁场的任何一点上磁场线既不是起点也不是终点。

（2）磁场中以任一闭合曲线*L*为边界的所有曲面的磁通量相等。曲面S_1、S_2均以*L*为边界，对S_1、S_2构成的闭合曲面有：



$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_{S_1}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\int_{S_2}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\int_{S_1}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_{S_2}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

五、安培环路定理

1.安培环路定理 $\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$ (毕奥 - 萨伐尔定律的推论)
(对稳恒电流成立)

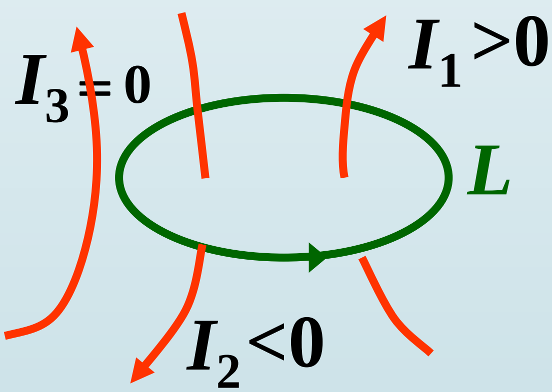
即：**磁感应强度沿任意闭合曲线L的线积分=穿过这闭合曲线的所有传导电流强度的代数和**

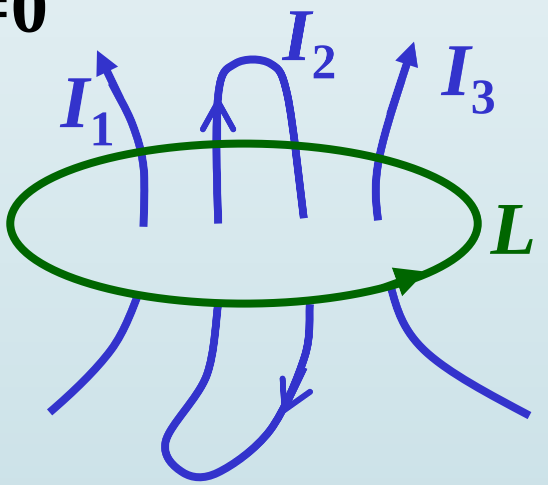
I的正负规定：

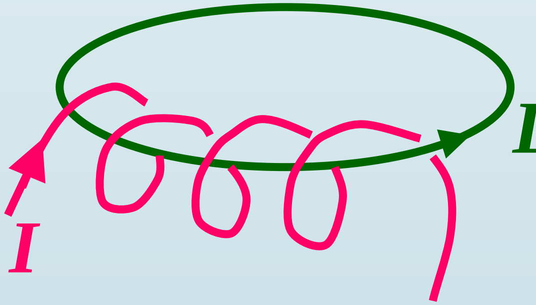
1）当I与L的绕行方向成右手关系时，$I>0$，反之，$I<0$。

2）若I不穿过L，则$I=0$

例：







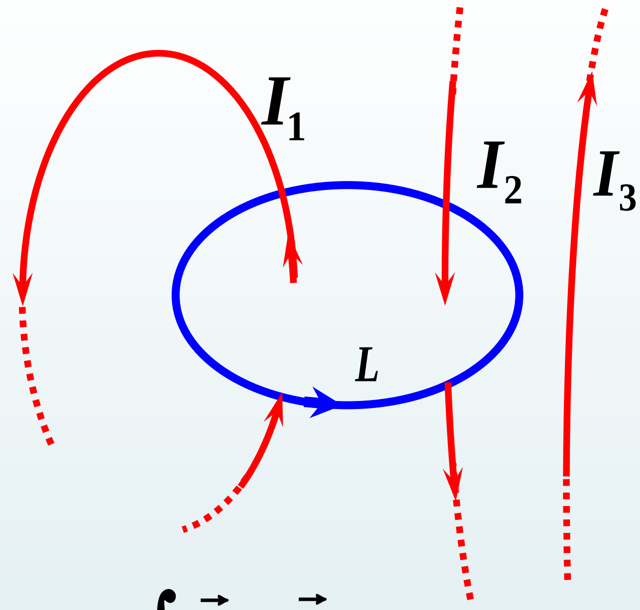
$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I_1 - I_2)$

$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I_1 + I_3)$

$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -4\mu_0 I$

说明：

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$$



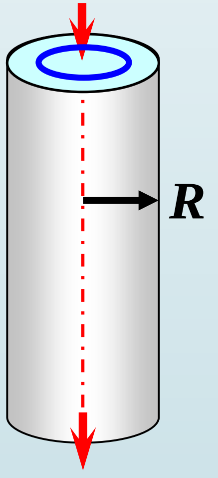
$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

1. 适用于稳恒磁场的任何情况；
2. 磁场是所有电流共同激发的；
3. 对不穿过回路L的电流：

   1) 在空间各点（L上各点）均产生磁场。

   2) 对$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$无贡献；

4. 若穿过回路的电流是连续分布：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

5. 选取合适的闭合路径，使 $\vec{B}$以标量形式提取出来。

2.稳恒磁场的性质

高斯定理： $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ → 无源场

安培环路定理： $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$ → 有旋场

与静电场比较：

静电场高斯定理： $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$ → 有源场

静电场环路定理： $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ → 无旋场

3.安培环路定理的应用

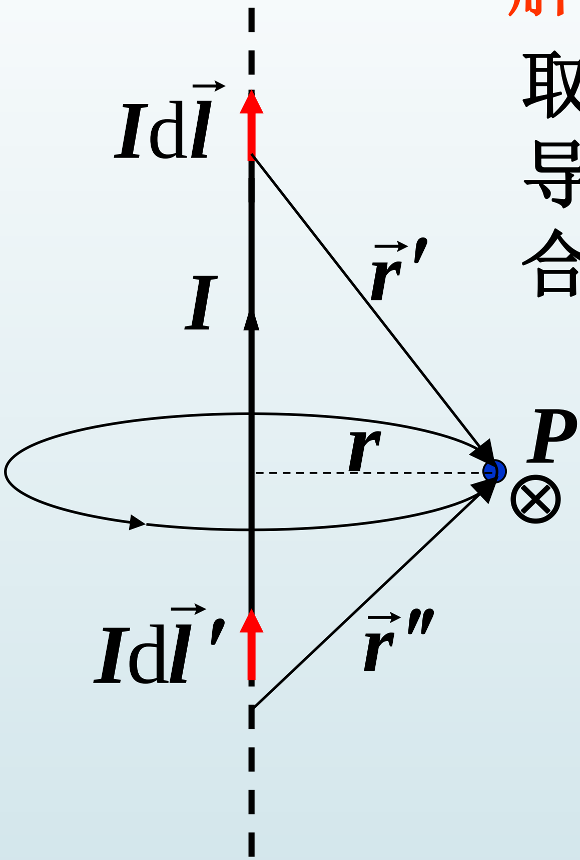
毕奥－萨伐尔定律可以计算任意电流的磁场 $\vec{B}$

安培环路定理可以计算对称性磁场的 $\vec{B}$

例: 求无限长载流直导线的磁场分布。

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$



解:

取包含P点在内的、以导线为对称轴的圆形闭合回路。则

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I = \mu_0 I$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cdot \mathrm{d}l$$

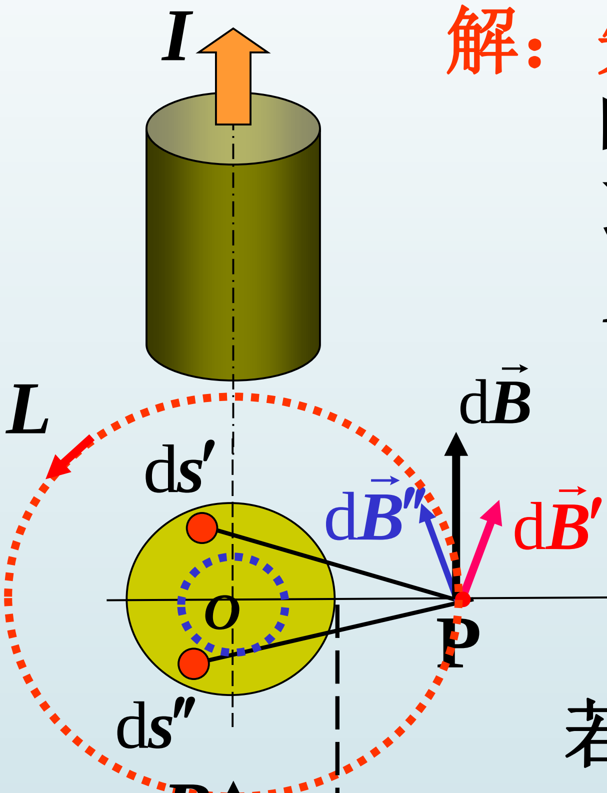
$$= B\oint_L \mathrm{d}l = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

例： 半径为R的无限长圆柱载流直导线，电流I沿轴线方向流动，并且载面上电流是均匀分布。计算任意点P的$\vec{B}$=？

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$$

解：先考虑磁感应强度的方向。



由电流对称分布可知：$\vec{B}\perp oP$

取过P点半径为 r =op 的圆周L，

L上各点B大小相等，方向沿切线

$r>R$时　由安培环路定理得：

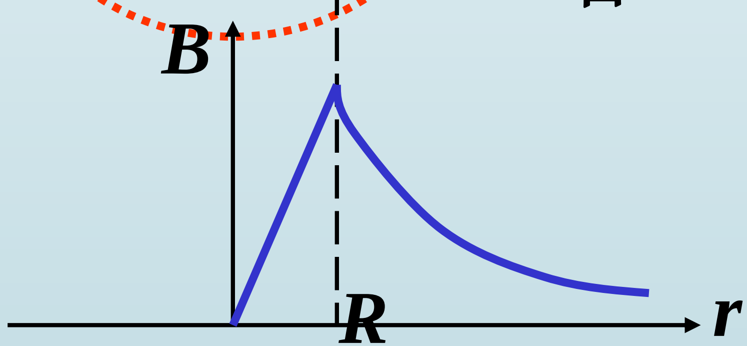
$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint B\,\mathrm{d}l\cos 0 = B\cdot 2\pi r$$

又 $$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I \qquad \therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

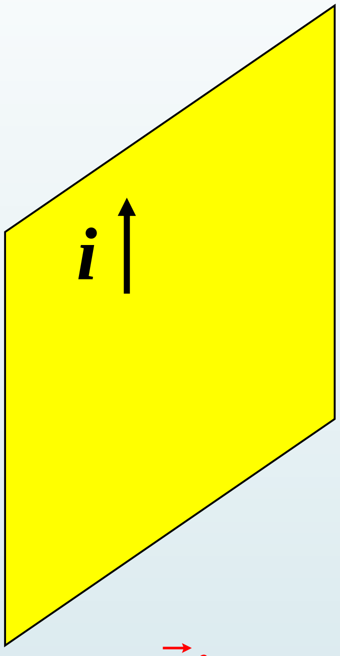
若$r<R$ $$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint B\,\mathrm{d}l\cos 0 = B\cdot 2\pi r$$

而 $$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$



例： 一无限大平面，有均匀分布的面电流，其横截线的电流线密度为 i，求平面外一点 $\vec{B}$=？



解： 由对称可知 $\vec{B}\perp\vec{i}$

并且离板等距离处$\vec{B}$的大小相等

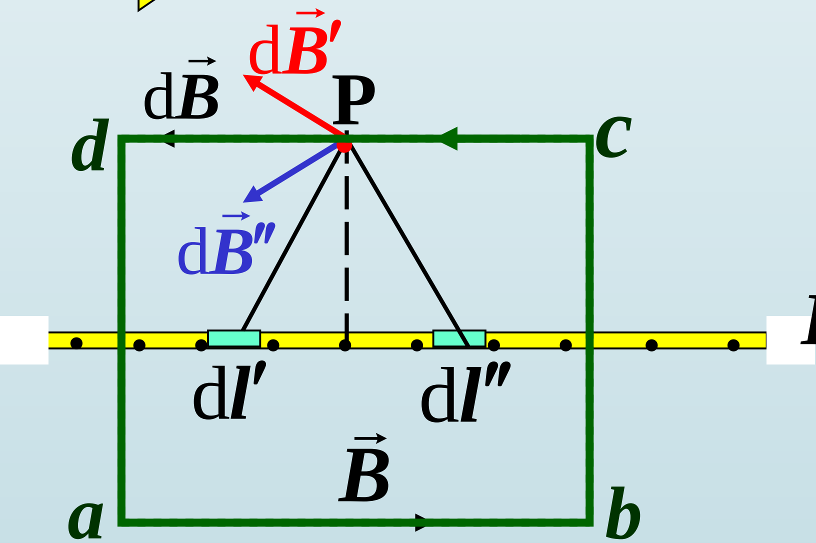
过P点取矩形回路$abcd\rightarrow L$

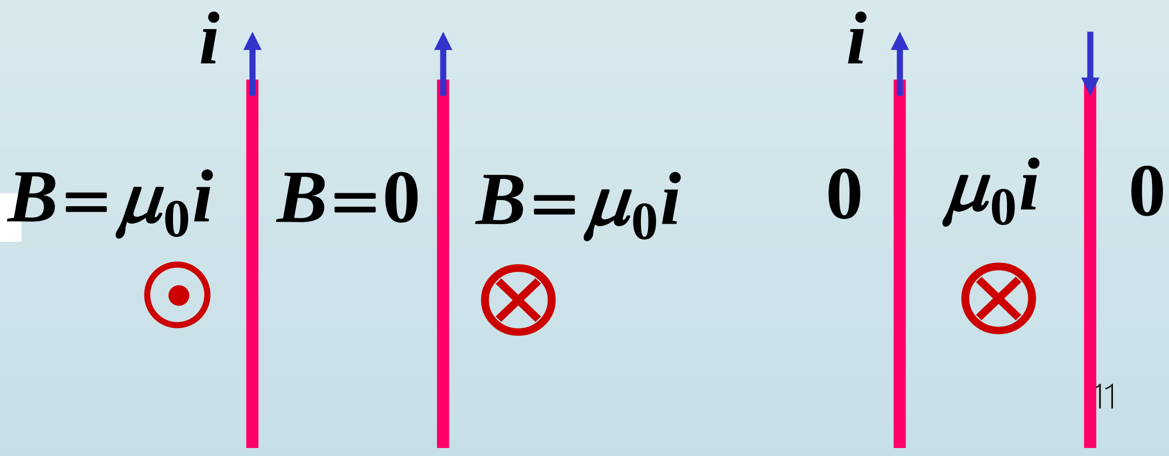
其中ab、cd与板面等距离

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \overset{0}{\int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l}} + \int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \overset{0}{\int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}}$$

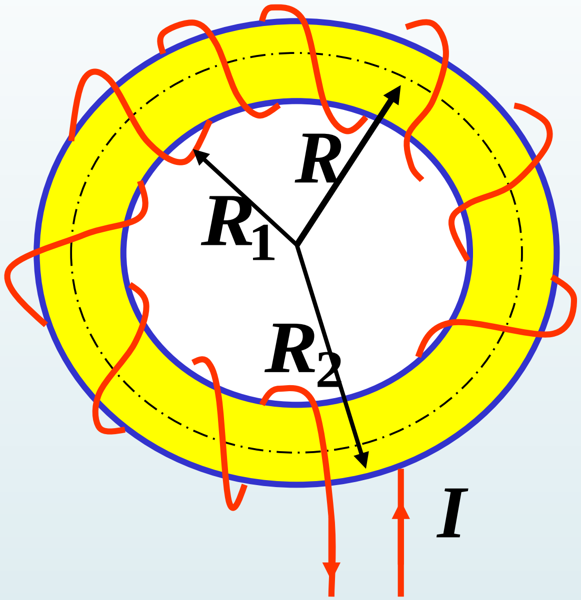
$$\left.\begin{aligned} &= B\cdot ab + B\cdot cd \quad = 2B\cdot ab \\ &\text{而}\quad \mu_0\sum I_i = \mu_0 i\cdot ab \end{aligned}\right\} \quad B = \frac{1}{2}\mu_0 i$$

与P点到平板的距离无关





例： 求通电螺绕环的磁场分布。已知环管轴线的半径为R，环上均匀密绕N匝线圈，设通有电流I。



解： 由于电流对称分布，与环共轴的圆周上，各点B大小相等，方向沿圆周切线方向。 ← $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$

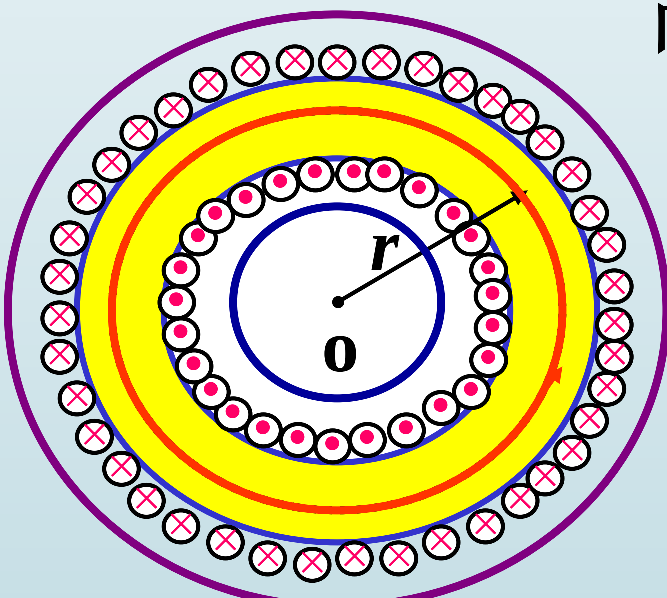
取以o为中心，半径为r的圆周为L

当$R_1< r <R_2$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B dl \cos 0 = B\cdot 2\pi r$$

而 $\mu_0 \sum I_i = \mu_0 NI$

$$\left.\begin{matrix} \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r \\ \mu_0 \sum I_i = \mu_0 NI \end{matrix}\right\} \quad B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



若 $r<R_1$ $\quad \because \mu_0 \sum I_i = 0 \quad \therefore B=0$

若 $r>R_2$ $\quad \because \mu_0 \sum I_i = \mu_0 (NI-NI)=0$

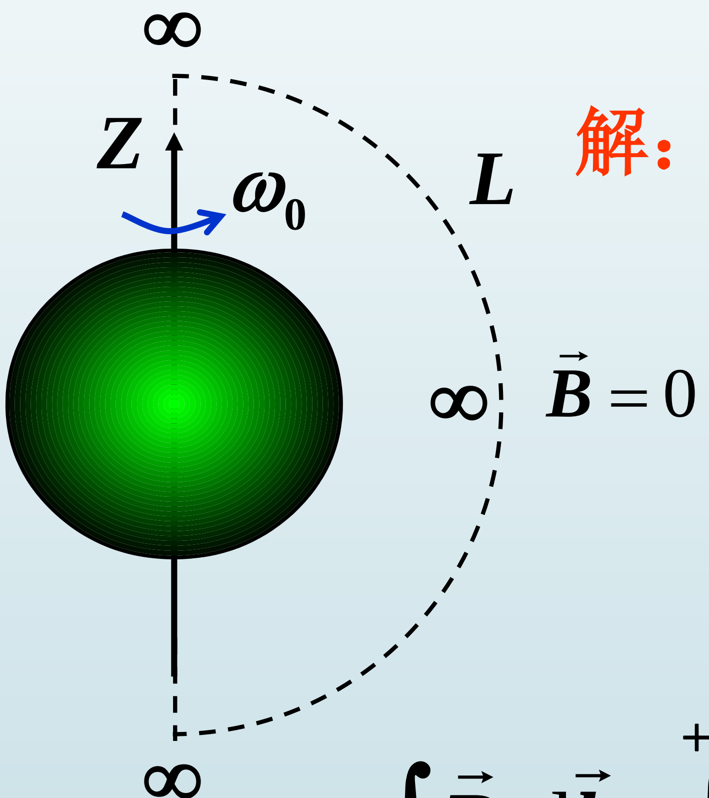
$\therefore B=0$

当 $R_{管截面} << R$ 即 $r \approx R$

$$B=\mu_0 nI \qquad n=\frac{N}{2\pi R}$$

例： 如图，电荷q（>0）均匀分布在半径为R的薄球壳外表面上。Z轴过球心。若球壳以恒定的角速度ω_0绕Z轴转动。则沿着Z轴从$-\infty$到$+\infty$磁感应强度的线积分是多少？

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?\right)$$



解： 取如图所示的半圆形闭合回路L，

$$I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = q/T = \frac{q\omega}{2\pi}$$

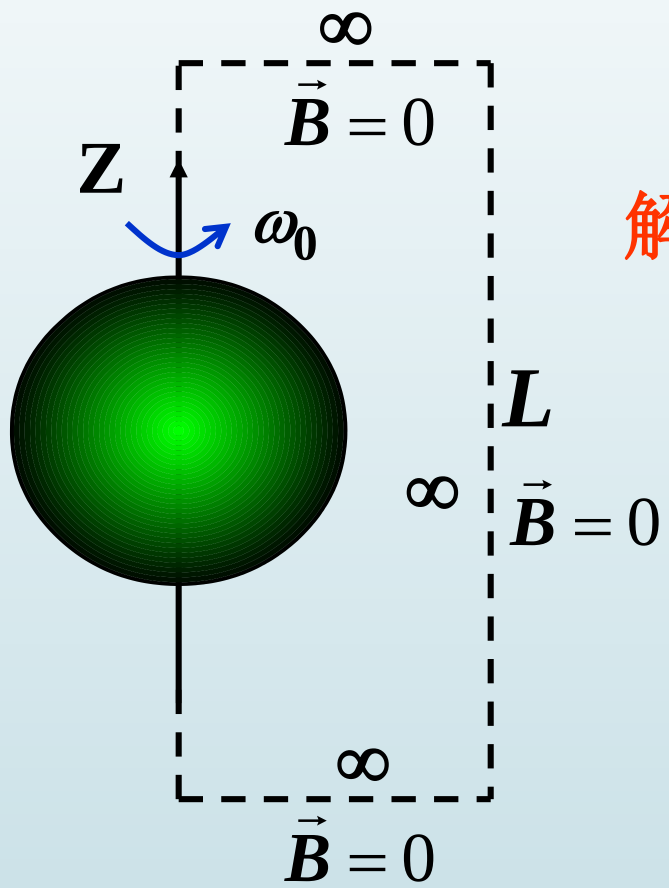
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \Sigma I$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi}$$

例： 如图，电荷q（>0）均匀分布在半径为R的薄球壳外表面上。Z轴过球心。若球壳以恒定的角速度ω_0绕Z轴转动。则沿着Z轴从$-\infty$到$+\infty$磁感应强度的线积分是多少？

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=?\right)$$

$$I=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t=q/T=\frac{q\omega}{2\pi}$$



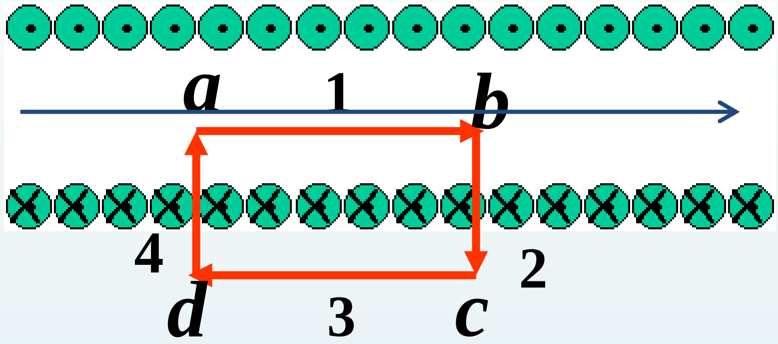
解： 取如图所示的闭合回路L，则

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\Sigma I=\mu_0 I$$

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+0+0+0$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi}$$

例5. 求通电长直螺线管内的磁场，已知：n、I



解：对称性分析：

管很长，管中央（管内各处）磁场是均匀的，方向与轴平行，管外的磁场可忽略。

根据右手螺旋 I 为正，作闭合环路 $a\ b\ c\ d$ 如图

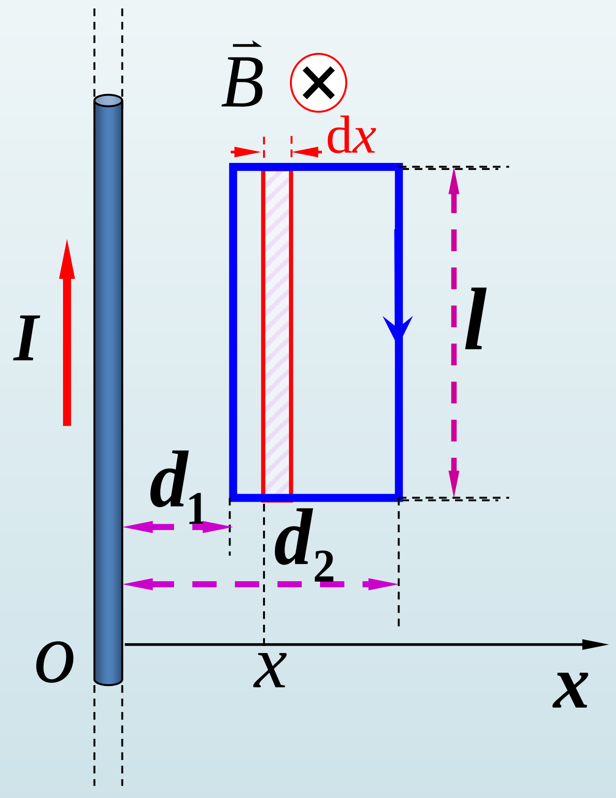
$$\text{左：}\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{ab} \vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{bc} \vec{B}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{cd} \vec{B}_3\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{da} \vec{B}_4\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{ab} \vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\overline{ab}$$

$$\text{右：}\mu_0 \sum I = \mu_0 (n\overline{ab}) I$$

安环定理： $B\cancel{\overline{ab}} = \mu_0 n \cancel{\overline{ab}} I$ $\boxed{B = \mu_0 n I}$

例6. 如图载流长直导线的电流为I，试求通过矩形面积的磁通量。



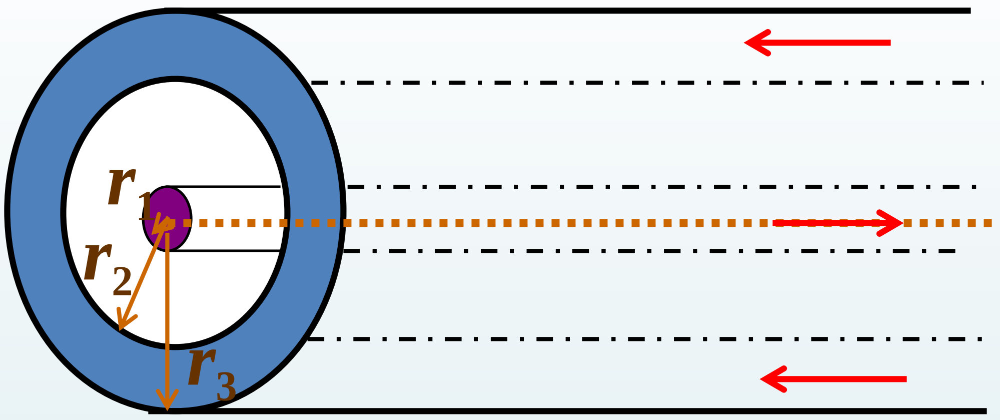
解： $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

$$\mathrm{d}\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}l\,\mathrm{d}x$$

$$\Phi=\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_{d_1}^{d_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Phi=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}$$

例7. 无限长柱同轴电缆，电流 I 内去外回，均匀分布，求B的分布。



解： 用安培环路定理

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$$

1) B的分布具有轴对称分布，即环绕电缆的同一环上B的大小相等。

2) 取与圆柱同轴的圆环(封闭)曲线

电流密度

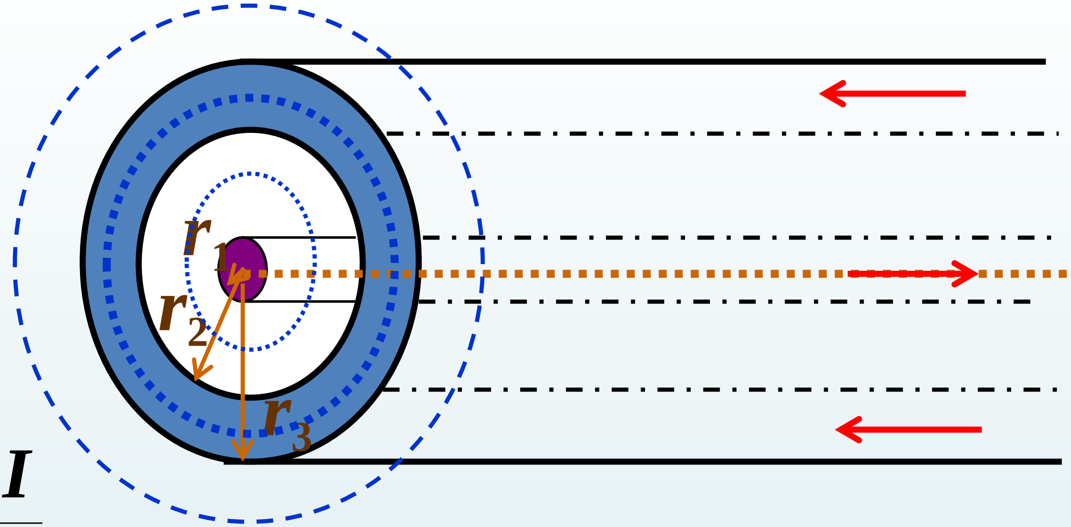
法向向右

$$r < r_1 \qquad \oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 \int_s \vec{j}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$j_1 = \frac{I}{\pi r_1^2} \qquad B_1(2\pi r) = \mu_0 \frac{I}{\pi r_1^2}\pi r^2 \qquad B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}$$

——可直接引用圆柱内的B

$r < r_1$ $\quad B_1 = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}$



$r_1 < r < r_2$

可直接引用圆柱外的B $\quad B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$r_2 < r < r_3$ $\quad$ 取回路如图

外层的电流密度

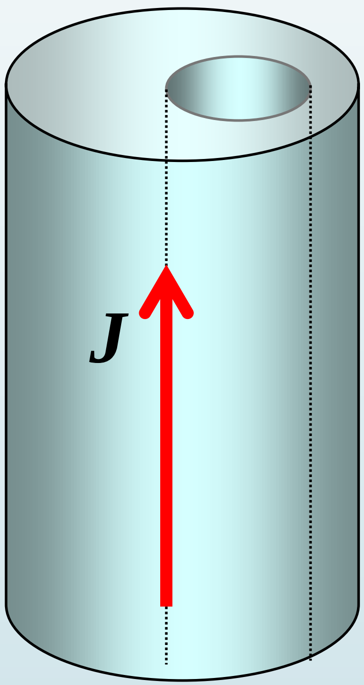
$$B_3(2\pi r) = \mu_0\left[I - \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}\pi(r^2 - r_2^2)\right] \qquad B_3 = \frac{\mu_0 I(r_3^2 - r^2)}{2\pi r(r_3^2 - r_2^2)}$$

$r > r_3$ $\quad B_4(2\pi r) = \oint \vec{B}_4 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I - I) = 0 \qquad B_4 = 0$

方向均与中心导线的电流方向成右手螺旋关系。

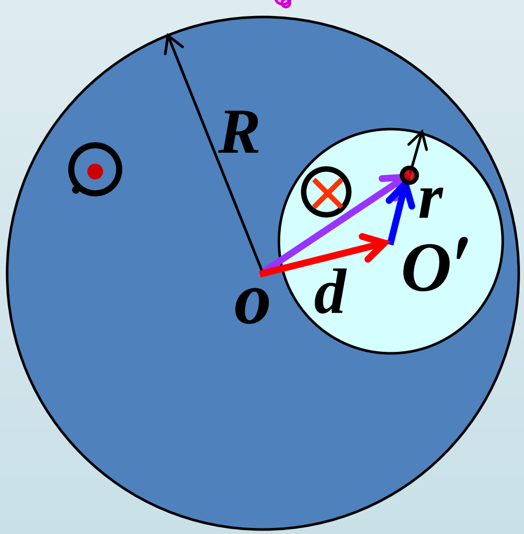
例8. 一长圆柱形导体，截面半径为R 。导体内有电流均匀分布，电流密度J，沿柱轴方向流动。在导体中挖去一个与轴平行的，半径为r的圆柱体，形成一个柱形空洞。两轴间距离为d，求空柱轴线上的磁场B。

解： 柱形空洞中任一点的磁场应为导体无空洞时，通有电流密度J的磁场与空洞部分通有电流密度 $J' = -J$ 的磁场的叠加。



空洞中任一点的B？

补偿法



$$J = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} Jd$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2} J'r = -\frac{\mu_0}{2} Jr = 0$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}}$$

洞内为均匀场

计算B的两种方法

求磁场： 1）毕 — 萨定律 + 叠加原理

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B}$$

计算任意电流的磁场

2）安培环路定理

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$$

计算对称性的磁场