# 第一章  函数

1. 区间与邻域：

左右邻域、空心邻域，**正、负无穷和无穷的邻域**

2. 常用不等式

(1) 三角不等式

$$\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$$

$$|b|-|a-b| \le |a| = |a-b+b| \le |a-b|+|b|$$

$$|a_1+a_1+\cdots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\cdots|a_n|$$

(2)贝努利(Bernoulli)不等式

$$(1+\alpha)^n \ge 1+n\alpha,\ \alpha > -1,\ n=0,1,2,\ldots$$

(3)均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(4) 柯西不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_n\,b_n)^2 \le (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2$$

(5) **三角恒等式**: 和差化积、积化和差、倍角公式、万能公式

3. 函数

（1）基本初等函数（六类），初等函数

**反三角函数的性质**

（2）函数的特性：有界性、周期性、单调性、凹凸性、

会用函数的(高阶)导数求单调区间、凹凸区间、极值、最值、拐点

(3)　复合函数和**反函数**

重点：证明函数有界（无界）

无界的定义（逻辑语言）: 存在一列$\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq D$, 使得$f(x_n) \geq n$.

# 第二章 极限与连续

# 1 数列极限

1. 极限概念和定义

极限的 $\varepsilon - N$ 语言，几何解释（在极限任意小的邻域之外只有有限个点）

2. 极限性质

唯一性，有界性（无界数列必发散）、保不等式性

**保号性（理解并熟练运用）：设** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ **则**

$\forall\ a' < a \Longrightarrow a_n > a',\ n \gg 1$ $\forall\ a' > a \Longrightarrow a_n < a',\ n \gg 1$

3. 判别：追敛性（夹逼准则）、单调有界定理（定义由递推关系给出）
4 子列的定义，子列敛散性与原数列敛散性之间的关系，会应用P29 定理7和例10

4. 计算：记住常见极限（如指数、对数、幂函数的增长关系），四则运算，
利用归结原则转化为函数极限，再用函数极限的洛必达法则、**Taylor 展开求极限、会用定积分算数列部分和的极限**

# 2 函数极限

1. 熟练掌握六种函数极限的$\varepsilon-\delta$ 语言，能根据正面情形写出极限不存在的$\varepsilon-\delta$ 语言
2. 性质

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 描述的是局部(**$x_0$的空心邻域**)性质，与该点处函数具体值无关，与函数在该点是否有定义无关。

唯一性、**局部**有界性、**局部保号性（理解并熟练运用）**、保不等式性

3. 判别：迫敛性、连续性、单侧函数极限的单调有界定理

归结原则： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall\, x_n\to x_0, x_n\neq x_0, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

归结原则可判断函数的发散性

4. 计算： 四则运算、复合运算、利用函数的连续性、熟练掌握两个重要极限及其变形、**等价无穷小替换、洛必达法则、Taylor 公式求极限**

5 无穷小量和无穷大量: 基本定义与相互转化

（1）无穷小量阶的比较：有界量、等价无穷小、同阶无穷小、高阶无穷小、

(2)小O的含义以及基本性质：**无穷小量乘以有界量为无穷小量**等

6. 常见等价无穷小：

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \arcsin x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1,\ (x \to 0)$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax,\ (a \neq 0)\ (x \to 0) \qquad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2\ (x \to 0)$$

$$a^x - 1 \sim x\ln a (a > 0, a \neq 1)$$

7 求无穷小（大）的主部和阶数：用常见等价无穷小关系代换，Taylor公式，直接用定义

# 3 连续性

1. 函数在一点连续、左（右）连续的定义，$\varepsilon-\delta$ 语言
2. 性质：局部有界性，局部保号性、复合函数的连续性、反函数的连续性、初等函数的连续性
3. 间断点的分类
4. **闭区间上连续函数的性质（重点），有界性、最值性、介值性（根的存在定理），**

**注意必须是闭区间，有限开区间在端点处极限存在的情况下可补充定义推导类似结论**

# 第三章 导数与微分

1. 导数和左（右）导数定义

（1）区分导函数的左（右）极限和函数的左（右）导数；一般情况下无法互推

（2）记熟求导公式

（3）熟练运用求导法则：复合函数求导、反函数求导、对数求导法

2. 高阶导数的计算：

（1）利用简单函数的高阶导数公式

(2) $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

(3)找规律逐项递推

3、隐函数求导法则

4、参数(极坐标)方程的导数

会求参数方程的一阶导数、会利用参数方程一阶导数满足的参数方程继续求二阶导数及其高阶导数

5 导数应用 相关变化率问题

2. 微分

（1）一阶微分的定义

对于 $y = f(x),$ 有 $dy = f'(x)dx$ 和 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

（2）微分与导数的区别和联系

一元函数可导与可微等价，可导必定连续

（3）一阶微分具有形式不变性（复合函数微分的链式法则）

（4）微分的应用：近似计算，估计误差

# 第四章 微分中值定理

1、 微分中值定理

遇到中值问题分四种情形，做法不是绝对，可能需要结合使用

（1）只知道函数连续，考虑用介值性，**或者对其变限积分函数用中值定理**

（2）函数一阶可导且出现一阶导数的中值，考虑费马定理和Rolle、Lagrange、Cauchy中值定理

（3）函数高阶可导且出现高阶导数的中值：优先考虑带Lagrange型余项的Taylor展开，其次考虑Rolle、Lagrange、Cauchy中值定理的多次应用

（4）与定积分相关的中值问题：积分中值定理和微分中值定理结合使用

**注意验证定理成立的条件！！！**

4. 洛必达法则：

（1）两种情形 $\frac{0}{0}, \quad \frac{*}{\infty}$ 其他情形通过变形（通分、取对数等）转化成前面两种

**验证定理成立的条件！！！**

**条件和结论不能倒置：**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

**反之不对！！！例如** $f(x)=\sin x,\ g(x)=x$

虽然 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ，但是 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在

5 Taylor公式

（1）熟练写出函数的带Peano型余项和Lagrange型余项的Taylor公式的一般形式

（2）**记住常见6个函数的带Peano型余项的Taylor公式**

（3）计算指定函数在特定点展开到特定阶的Taylor公式、特定点取0时即为 Maclaurin 公式

方法一：基于已知常见函数的为 Maclaurin 公式去计算(换元法、代入法、复合函数展开步骤、积分法、微分法)

方法二：直接计算高阶导数，再带入一般的Taylor公式

（4）**用带Peano型余项的Taylor公式计算极限、无穷小主部和阶数**

(5)用带 Lagrange型余项的Taylor公式证明不等式和中值问题.

6. 单调性与极值、最值

（1）会根据导数信息判断函数的单调性

（2）极值点：在稳定点或者不可导点处寻找

（3）最值：比较区间端点和极值点处的函数值

7. 会求函数的渐近线：垂直渐近线和斜渐近线

8. 函数的凸性和拐点

（1）函数凸性的等价定义

b, 一阶可导时的等价定义

c. 二阶可导时的等价定义

（2）函数凸性的判定

a. 一阶可导时，看导函数的单调性　b. 二阶可导时看二阶导函数的符号

（3）拐点的定义和求法：求出所有的凹凸区间

9. 利用函数的凹凸性证明不等式

**$f$凹则有** $$f\big((1-t)\alpha+t\beta\big)\le(1-t)f(\alpha)+tf(\beta)$$

**t=1/2，** $$f\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\le\frac{1}{2}f(\alpha)+\frac{1}{2}f(\beta)$$

10　熟记曲率和曲率半径公式

# 第五章 不定积分

1. 不定积分

（1）记住常见函数的积分表，特别是三角函数、反三角函数的原函数

能熟练(记忆)推导 $\tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \csc x,\ \sec^2 x,\ \tan^2 x, \sec x \tan x,\ \csc x \cot x$

这些三角函数的不定积分

（2）凑微分法、换元积分法（要求变换是双射）和分部积分法(常用于推导递推公式)

会求解 $\int e^{ax} \sin(bx)\, dx,\quad \int e^{ax} \cos(bx)\, dx$ 等特殊不定积分

（3）有理函数的不定积分

a. 通过有理多项式的部分分式分解有理多项式

b. **三角函数的有理多项式的不定积分：**

**先观察看能否化简，然后用换元t=sinx,cos x,tanx，或者用万能公式**

**c. 二次函数的根号：**

**(1)配方后三角（双曲）代换**

**(2)欧拉变换化为有理多项式**

# 第六章 定积分

1. 基本符号和概念

a. 分割，分割的模、黎曼和的概念，定积分的几何意义

b. 可积函数的性质：有界性、线性性质、乘积性、**保序性、绝对可积性、区间可加性、柯西-施瓦茨不等式**

**c. 连续非负函数若定积分等于0，则在区间上恒为零(P169 例4及其推论)**

**d.改变区间上有限个点处的函数值不影响函数的定积分**

2 判定：

充分条件：连续函数可积、单调函数可积、有界只有有限个间断的函数可积。

3 **积分中值定理**

a. 计算带定积分的极限　　b. 证明含定积分的不等式

c. 证明带定积分的中值问题（难点）

4 使用牛顿-莱布尼茨公式、换元积分法（不要求双射，但对值域有要求）、分部积分法计算定积分、**变上限积分求导法则**

计算时先观察，**利用周期性、奇偶性(对称区间)、三角函数的周期性结合换元法化简再求定积分**；

**5 会利用定积分计算数列的部分和的极限**

6 反常积分-无穷积分和瑕积分

（1）无穷积分和瑕积分的基本定义、性质、**计算(换元、分部积分、推广的牛顿-莱布尼茨公式)**

**（2）判定收敛性：**

**a. 用定义直接判断,归结为变限函数极限的敛散性**

**b. 比较判别法：**

**推论3 (比阶判别法)**

设 $f(x)$ 定义于 $[a,+\infty)$ 的非负函数且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda.$

则有:

(i)当 $p>1, 0\le\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(ii)当 $p\le 1, 0<\lambda\le+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

**比阶判别法** 选用 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 作为比较对象

推论3 设 $f(x)$ 是定义于 $(a,b]$($a$为瑕点) 的非负函数且在任何区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-a)^q f(x) = \lambda.$

则有:(i)当 $q<1, 0\le\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii)当 $q\ge 1, 0<\lambda\le+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

(3) 欧拉积分 伽马函数与贝塔函数
a. 会判定伽马函数于贝塔函数收敛的条件
b. 伽马函数与贝塔函数的几个基本性质

7 定积分的应用
(1)几何应用 (2) 物理应用

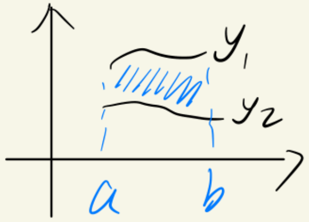
1. 平面图形面积

直角坐标方程 $A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$

参数方程 $A=\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|dt$

2. 平行截面体/旋转体的~~面积~~体积

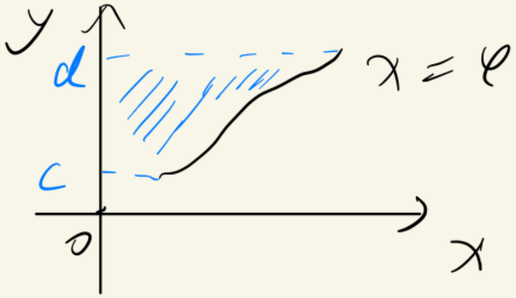
$V=\int_a^b S(x)dx$ (S为截面面积)




绕x轴: $S(x)=\pi y_1^2-\pi y_2^2$

绕y轴: $S(x)=2\pi x\cdot(y_1-y_2)$

特殊情形: $y_2=0$




绕y轴: $S(y)=\pi\varphi^2(y)$

$$V=\int_c^d \pi\varphi^2(y)\,dy$$

3. 平面曲线弧长.

弧微分: $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$$\begin{cases} \text{直角坐标方程} & ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx \\ \text{参数方程} & ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt \\ \text{极坐标方程} & ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'(\theta)^2}\,d\theta \end{cases}$$

弧长为 $\int_a^b ds$

# 第七章 常微分方程

1. 常微分方程解的概念、通解、特解、初值问题的概念

**2. 一阶线性微分方程的求解**

**a. 分离变量法**

**b. 常数变易法: 先求齐次方程的通解、再用常数变易法求非齐次方程的通解**

a. 定解问题（初值问题），先求通解，再代入定解条件确定任意常数求出定解问题的解

（所有解）

3. 可转化为一阶线性微分方程的情形

齐次方程、伯努利方程、可降阶的方程(二阶方程不显含 x或 y)

求解时要先判断方程类型，在选用合适的初等积分法！！！