# 第3章　*n* 维向量空间
# *n*-dimensional Vector Space

要点：向量空间是具有某种结构的向量集合

1-3维空间的推广；向量 ～ 行(列)矩阵

空间构建与表示；　～ 直角坐标系

向量是研究线性方程组解的结构与表示的工具；

<u>利用矩阵工具来研究向量</u>

讨论向量之间的关系—线性相关性；介绍*n*维向量空间和Euclidean空间(空间的代数结构、几何结构和度量：线性运算，基与维数，长度与夹角等)。

# 3.1 $n$维向量的概念

## 一、 向量的概述

- **定义3.1** 数域$F$中的 $n$ 个有次序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的数组称为 $n$ 维向量，这$n$个数称为该向量的$n$个分量，第$i$个数$a_i$是第$i$个分量 .

**分量全为实数的向量称为实向量，**

**分量全为复数的向量称为复向量.**

例如

$$(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n) \longrightarrow \text{\textit{n}维实向量}$$

$$(\underbrace{1+2i}_{\text{第1个分量}},\underbrace{2+3i}_{\text{第2个分量}},\cdots,\underbrace{n+(n+1)i}_{\text{第\textit{n}个分量}}) \longrightarrow \text{\textit{n}维复向量}$$

# 二、*n* 维向量的表示方法

***n*** 维向量写成一列，称为**列向量**，也就是列矩阵，通常用 $\alpha,\beta$ 等表示：

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

当没有特殊说明时，向量都指列向量.

**n维行向量**，也就是行矩阵，通常用 $\alpha^{\mathrm{T}},\beta^{\mathrm{T}}$ 等表示，如：

$$\alpha^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

# 例：矩阵与向量

矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$有$n$个$m$维列向量

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & & \boldsymbol{a}_j & & \boldsymbol{a}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

**向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$称为矩阵$A$的列向量组.**

矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$亦有$m$个$n$维行向量，称为$A$的行向量组。

## 线性方程组的向量表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$\boxed{a_1}x_1 + \boxed{a_2}x_2 + \cdots + \boxed{a_n}x_n = \boxed{b}$$

方程组与增广矩阵的列向量组之间**一一对应.**

# 3.2 向量组和向量的线性运算

- 若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合叫做向量组.
- 向量组中的向量作为类型特殊的矩阵，按照**矩阵的运算法则**进行运算;
- 当向量作为独立的数学工具时，主要针对向量组讨论问题，应用线性运算:
- $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ ; $\boldsymbol{k\alpha}$

$$k_1\alpha + k_2\beta$$

- 线性运算的**8条基本性质:**

**5条运算律和3个特殊元素(零元、负元，数1)**

# 三、向量空间$R^n$的概念

向　　量
$(n \le 3)$

解析几何

既有大小又有方向的量

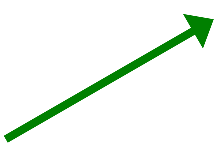
几何形象：可随意平行移动的有向线段

坐标系

线性代数

有次序的实数组成的数组

代数形象：向量的坐标表示式



$$a^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

空　　间

$(n \le 3)$

解析几何

线性代数

点空间：点的集合

坐标系

向量空间：向量的集合

几何形象：空间直线、曲线、空间平面或曲面

代数形象：向量空间中的平面

$$\{(x,y,z)\,|\,ax+by+cz=d\} \qquad \{r=(x,y,z)^T\,|\,ax+by+cz=d\}$$

$$P(x,y,z) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} r=(x,y,z)^T$$

$n>3$时，$n$ 维向量没有直观的几何形象.

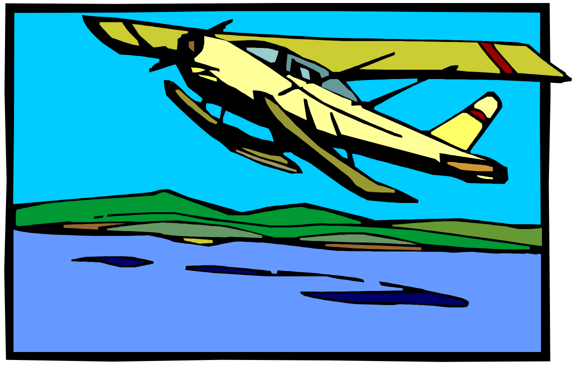
$$R^n=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$$

叫做 $n$ **维向量空间**.

$$\pi=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b\right\}$$

叫做 $n$维向量空间 $R^n$中的$n-1$**维超平面**.

## $n$ 维向量的实际意义



确定飞机的状态，需要以下6个参数：

机身的仰角 $\varphi \quad (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

机翼的转角 $\psi \quad (-\pi < \psi \le \pi)$

机身的水平转角 $\theta \quad (0 \le \theta < 2\pi)$

飞机重心在空间的位置参数P(x,y,z)

所以，确定飞机的状态，需用6维向量

$$a = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$$

# 四、小结

1． $n$ 维向量的概念，实向量、复向量；

2． 向量的表示方法：行向量与列向量；

3． 向量空间：

解析几何与线性代数中向量的联系与区别、向量空间的概念；

4． 向量在生产实践与科学研究中的广泛应用．