第四十六讲（最后一课）

本学期的重点：

1、二阶常系数齐次线性微分方程

2、复合函数的微分法

3、隐函数微分法

4、极值（自由极值、条件极值）

5、二重积分的计算

6、三重积分的计算

7、曲线积分的计算（特别是 Green 公式、与路径无关）

8、曲面积分的计算（ 特别是 Gauss 公式）

9、正项级数的敛散性

10、展开函数为幂级数

11、幂级数求和

2023研究生入学考试数学一试题：

（2）若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则（　　）

（A）$a<0,b>0$　　（B）$a>0,b>0$

（C）$a=0,b>0$　　（D）$a=0,b<0$

【答案】C

【解析】$y''+ay'+by=0$ 的解一共三种情形：

① $\Delta=a^2-4b>0$，$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$，但此时无论 λ_1,λ_2 取何值，y 在 $(-\infty,+\infty)$ 上均无界；

② $\Delta=a^2-4b=0$，$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$，但此时无论 λ 取何值，y 在 $(-\infty,+\infty)$ 上均无界；

③ $\Delta=a^2-4b<0$，$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$，此时若 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则需满足 $\alpha=0$，所以 $a=0,b>0$，答案为（C）

（4）已知 $a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则"$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛"是"$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛"的（　　）

（A）充分必要条件　　（B）充分不必要条件

（C）必要不充分条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛

又因为 $|b_n|=|(b_n-a_n)+a_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|=(b_n-a_n)+|a_n|$

所以，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛；

同理可得：$|a_n|=|(a_n-b_n)+b_n|\le|a_n-b_n|+|b_n|=(b_n-a_n)+|b_n|$

所以，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛；故答案为充要条件，选（A）

（12）曲面 $z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为________

【答案】$x+2y-z=0$

【解析】两边微分可得，$dz=dx+2dy+\dfrac{2xdx+2ydy}{1+x^2+y^2}$，代入 $(0,0,0)$ 得 $dz=dx+2dy$，

因此法向量为 $(1,2,-1)$，切平面方程为 $x+2y-z=0$

（13）设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=1-x,x\in[0,1]$，若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$________

【答案】0

【解析】由已知得 $f(0)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=1$，$f(1)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=0$

相加可得 $f(0)+f(1)=a_0+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=1$

显然 $f(x)$ 为偶函数，则 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 为其余弦级数的系数，故 $a_0=2\int_0^1 f(x)dx=1$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=0$.

（18）（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值

【答案】极小值为 $f(\frac{2}{3},\frac{10}{27})=-\frac{4}{729}$

【解析】先求驻点 $\begin{cases} f_x'=5x^4-(3x^2+2x)y=0 \\ f_y'=2y-x^2-x^3=0 \end{cases}$，解得驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$，$(\frac{2}{3},\frac{10}{27})$

下求二阶偏导数，$\begin{cases} f_{xx}''=20x^3-(6x+2)y \\ f_{xy}''=-3x^2-2x \\ f_{yy}''=2 \end{cases}$

①对于点 $(0,0)$，$f(0,0)=0$，$f(x,0)=x^5$，由定义可得 $(0,0)$ 不是极值点；

②代入点 $(1,1)$，解得 $\begin{cases} A=f_{xx}''=12 \\ B=f_{xy}''=-5 \\ C=f_{yy}''=2 \end{cases}$，$AC-B^2=-1<0$，所以 $(1,1)$ 不是极值点

③代入点 $(\frac{2}{3},\frac{10}{27})$，解得 $\begin{cases} A=f_{xx}''=\frac{100}{27} \\ B=f_{xy}''=-\frac{8}{3} \\ C=f_{yy}''=2 \end{cases}$，$AC-B^2=\frac{8}{9}>0$ 且 $A>0$，所以 $(\frac{2}{3},\frac{10}{27})$ 是极小值点，

极小值为 $f(\frac{2}{3},\frac{10}{27})=-\frac{4}{729}$

（19）（本题满分 12 分）

设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成，Σ 为 Ω 的边界曲面的外侧，计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy$

【答案】$\frac{5\pi}{4}$

【解析】由高斯公式可得，

$$I=\oiint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2z-xz\sin y+3y\sin x)dv$$

因为 Ω 关于平面 xoz 对称，所以 $\iiint\limits_{\Omega}(-xz\sin y+3y\sin x)dv=0$

所以 $I=\iiint\limits_{\Omega}2zdv=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_0^{1-x}2zdz=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x)^2dxdy \qquad (D_{xy}:x^2+y^2\le 1)$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-2x+1)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy+\pi=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy+\pi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr+\pi=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2-2x+1)dxdy=\iint_{D_{xy}}x^2dxdy+\pi=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy+\pi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr+\pi=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

2023 研究生入学考试数学二试题：

13．设函数 z＝z（x，y）由 e^z＋xz＝2x－y 确定，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x}\right|_{(1,1)}$ ＝________.

【参考答案】－3/2

【参考解析】两边同时对 x 求导得：$e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=2-0$①

两边再同时对 x 求导得：$e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+e^z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$②

将 x＝1，y＝1 代入原方程得 e^z＋z＝1⇒z＝0

代入①式得 $e^0\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+0+\frac{\partial z}{\partial x}=2\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=$

代入②式得 $e^0\cdot1+e^0\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+1+1+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{3}{2}.$

18.（本题满分 12 分）

求函数 f（x，y）＝$xe^{\cos y}$＋$x^2/2$ 的极值.

【参考解析】$\begin{cases}f'_x=e^{\cos y}+x=0\\ f'_y=xe^{\cos y}(-\sin y)=0\end{cases}$，得驻点为：（－$e^{-1}$，kπ），其中 k 为奇数；（－e，kπ），其中

k 为偶数.则$\begin{cases} f''_{xx}=1 \\ f''_{xy}=e^{\cos y}(-\sin y) \\ f''_{yy}=xe^{\cos y}\sin^2 y+xe^{\cos y}(-\cos y) \end{cases}$ 代入（$-e^{-1}$，kπ），其中 k 为奇数，得$\begin{cases} A=f''_{xx}=1 \\ B=f''_{xy}=0 \\ C=f''_{yy}=-e^{-2} \end{cases}$，

$AC-B^2<0$，故（$-e^{-1}$，kπ）不是极值点；

代入（−e，kπ），其中 k 为偶数，得$\begin{cases} A=f''_{xx}=1 \\ B=f''_{xy}=0 \\ C=f''_{yy}=e^{2} \end{cases}$，$AC-B^2>0$ 且 $A>0$，故（−e，kπ）是极小值点，

f（−e，kπ）$=-e^2/2$ 为极小值.

20.（本题满分 12 分）

设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $x^2+y^2-xy=1$，$x^2+y^2-xy=2$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$，y=0 围成，计算 $\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【参考解析】本题目采用极坐标进行计算

$$\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}}\frac{1}{r^2\left(3\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}}\frac{1}{\left(3\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\frac{1}{r}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(3\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\cdot\ln r\Big|_{\sqrt{\frac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(3\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\cdot\ln\sqrt{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(3+\tan^2\theta\right)\cdot\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(3+\tan^2\theta\right)}\mathrm{d}\tan\theta$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{8\sqrt{3}}\ln 2.$$

2023研究生入学考试数学三试题：

（1）已知函数 $f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$，则（ ）

A. $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,1)}$ 不存在，$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,1)}$ 存在

B. $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,1)}$ 存在，$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,1)}$ 不存在

C. $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,1)}$，$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,1)}$ 均存在

D. $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,1)}$，$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,1)}$ 均不存在

(1)

【答案】：A

【解析】 $f(0,1)=0$，由偏导数定义

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 1|x|)}{x}=\sin 1\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$，所以 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,1)}$ 不存在，

$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,1)}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1}=1$，所以 $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,1)}$ 存在

（12）已知函数 $f(x,y)$ 满足 $df(x,y)=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，$f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$，则 $f(\sqrt{3},3)=$ ______

（12）

【解析】：已知 $f_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, f_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$f=\int\dfrac{-y}{x^2+y^2}dx=-\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)+\phi(y)$，另外：

$f_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\phi'(y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\phi(y)=C$，带入初值：$f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$，得到：

$f(x,y)=-\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{\pi}{2}$，则 $f(\sqrt{3},3)=\dfrac{\pi}{3}$

（13）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=$ ________

（13）

【解析】：令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，对变量 x 求导，则有：

$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, s''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=s(x)$，得到：$s''(x)=s(x)$

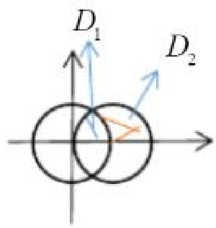
另外已知初值条件，有：$s(0)=1, s'(0)=0$，解出微分方程，得到：$s(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}$

（19）（本题满分 12 分）

$D=\left\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$，求 $\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|dxdy$.

4

（19）



【解析】

$$\iint\limits_{D_1}1-\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1(1-r)rd\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(1-r)rd\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{6}+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta-\frac{8}{3}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{\pi}{18}+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta+1d\theta-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$$

$$=\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{6}-\frac{16}{9}+\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}-1dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}(r-1)rdr=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{8}{3}\cos^3\theta-2\cos^2\theta+\frac{1}{6}d\theta=\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}$$

$$I=2\left[\iint\limits_{D_1}1-\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy+\iint\limits_{D_2}1-\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\right]=-\frac{\pi+32}{9}+3\sqrt{3}$$