



大学物理(上)

梁浴榕

电话: 15527766880

email: liangyurong20@hust.edu.cn

作业答案3-4页:

$$2\text{-T1: } v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}), v_{\text{末}} = \frac{mg}{k}$$

$$2\text{-T2: } v = \sqrt{168} = 13\text{m/s}$$

$$2\text{-T3:(1) } v_t = \left(\frac{mg}{k} + v_0\right)e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$$

$$(2) h = \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$$

$$2\text{-T4:(1) } v_t = \frac{mv_0}{m + ktv_0}$$

$$(2) x = \frac{m}{k} \ln \frac{m + ktv_0}{m}$$

$$(3) v_t = v_0 e^{-\frac{k}{m}x}$$

$$2\text{-T5: } a = g \tan \alpha$$

$$2\text{-T6: } a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \quad T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$$

角动量守恒定律

上节回顾

当 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ 时, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} =$ 常矢量

功: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 功率: $P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

动能定理: 合外力做的总功为:

$$A_{ab} = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k$$

保守力所做的功等于势能增量的负值:

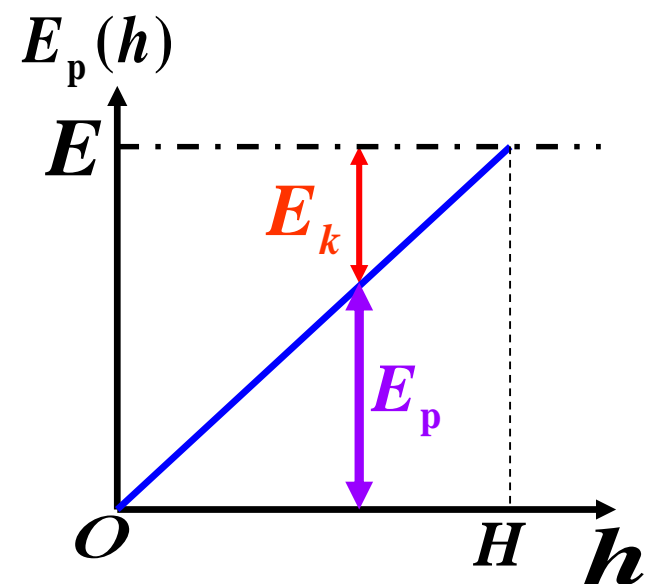
$$A_{ab} = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p$$

$$E_p = mgh$$

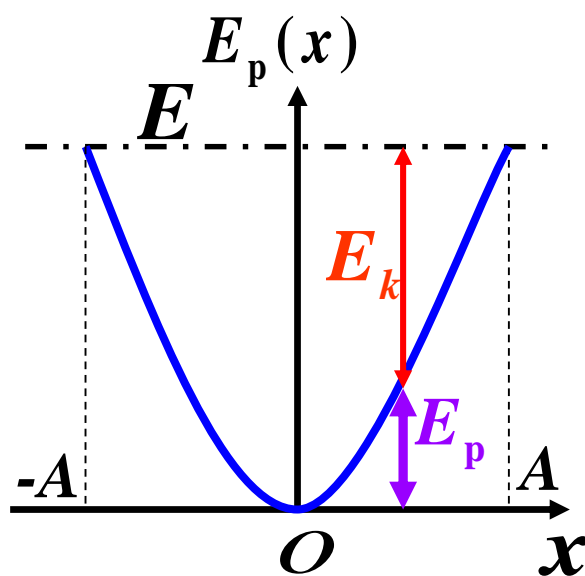
$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

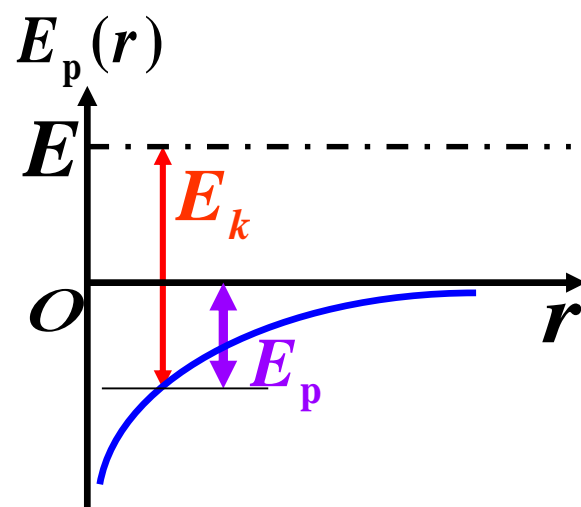
三、势能曲线： 势能随位置变化的曲线。



重力势能曲线



弹性势能曲线



万有引力势能曲线

由势能曲线可以确定质点的运动范围、能量的转换关系。

四、由势能函数求保守力

$$A_{ab} = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p$$

根据势能公式，有 $-\mathrm{d}E_p = \mathrm{d}A_{ab} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = F_l \mathrm{d}l$

$$\therefore F_l = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}l}$$

保守力沿某一给定的 l 方向的分量等于此保守力相应的势能函数沿 l 方向的空间变化率的负值。

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ &= -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k}\right)\end{aligned}$$

直角坐标系中由势能求保守力的一般公式。

例、速度大小为 $v_0=20\text{m/s}$ 的风作用于面积为 $S=25\text{m}^2$ 的船帆上,作用力 $F = aS\rho(v_0 - v)^2 / 2$,其中 a 为无量纲的常数, ρ 为空气密度, v 为船速。

(1)求风的功率最大时的条件;

(2) $a=1$, $v=15\text{m/s}$, $\rho=1.2\text{kg/m}$,求 $t=60\text{s}$ 内风力所做的功。

解: (1) $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv = aS\rho(v_0 - v)^2 v / 2$

$$\text{令 } \frac{dP}{dv} = 0$$

$$\text{即 } \frac{d}{dv}[aS\rho(v_0 - v)^2 v / 2] = 0$$

$$\therefore (v - v_0)(3v - v_0) = 0$$

$$\text{则 } v = \frac{v_0}{3} \text{ 时, } P \text{ 最大。}$$

例、速度大小为 $v_0=20\text{m/s}$ 的风作用于面积为 $S=25\text{m}^2$ 的船帆上, 作用力 $F = aS\rho(v_0 - v)^2/2$, 其中 a 为无量纲的常数, ρ 为空气密度, v 为船速。

(1)求风的功率最大时的条件;

(2) $a=1$, $v=15\text{m/s}$, $\rho=1.2\text{kg/m}$, 求 $t=60\text{s}$ 内风力所做的功。

解: (2) $P = \frac{dA}{dt}$

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_0}^t P dt = \int_0^{\Delta t} \frac{aS\rho(v_0 - v)^2 v}{2} dt = \frac{aS\rho(v_0 - v)^2 v}{2} \Delta t \\ &= \frac{1 \times 25 \times 1.2 \times (20 - 15)^2 \times 15}{2} \times 60 = 3.38 \times 10^5 (\text{J}) \end{aligned}$$

第11节 功能原理 机械能守恒定律

Work-Kinetic Energy Theorem & Conservation of Mechanical Energy

一、质点系的动能定理

对质点系中的第*i*个质点，质点的动能定理：

$$A_{i\text{外}} + A_{i\text{内}} = E_{k_{ib}} - E_{k_{ia}}$$

$$\sum_i A_{i\text{外}} + \sum_i A_{i\text{内}} = \sum_i E_{k_{ib}} - \sum_i E_{k_{ia}}$$

质点系的动能定理：

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_{k_b} - E_{k_a}$$

≠0

内力能改变系统的总动能，但不能改变系统的总动量。

动能定理适用于惯性系，非惯性系应考虑惯性力的功。

二、功能原理：

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_{k_b} - E_{k_a}$$

$$A_{\text{外}} + (A_{\text{保守力}} + A_{\text{非保守力}}) = E_{k_b} - E_{k_a}$$

$$\text{因为： } A_{\text{保守力}} = -(E_{p_b} - E_{p_a})$$

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保守力}} = (E_k + E_p)_b - (E_k + E_p)_a$$

动能与势能之和 $E = E_k + E_p$ 称为**机械能**。

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保守内力}} = E_b - E_a = \Delta E$$

——**功能原理**

质点系在运动过程中，其机械能的增量等于外力的功和非保守内力的功的总和。

功能原理适用于惯性系，非惯性系应考虑惯性力的功。

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保守内力}} = E_b - E_a = \Delta E$$

三、机械能守恒定律：

若 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保守内力}} = 0$ ， 则有： $E_b - E_a = 0$

即： $E = E_k + E_p = \text{恒量}$

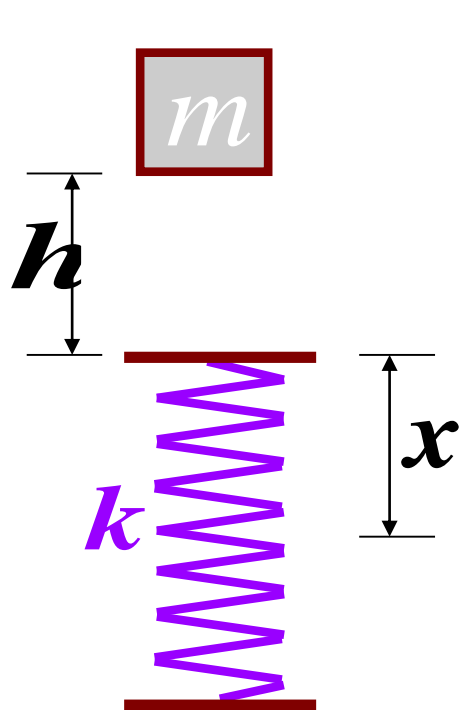
当**只有保守内力做功**时，质点系的总机械能保持恒定。

——质点系的机械能守恒定律

更普遍地，孤立系统能量守恒。

例1、如图，物体从静止落向弹簧，求物体可以获得的最大动能。

解：设物体落到弹簧上时，弹簧被压缩 x 。**取物体、弹簧、地球为系统**，系统不受外力，而内力为重力和弹簧的弹力，故系统**机械能守恒**。



$$mgh = -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + E_k$$

$$E_k = -\frac{1}{2}kx^2 + mg(x + h)$$

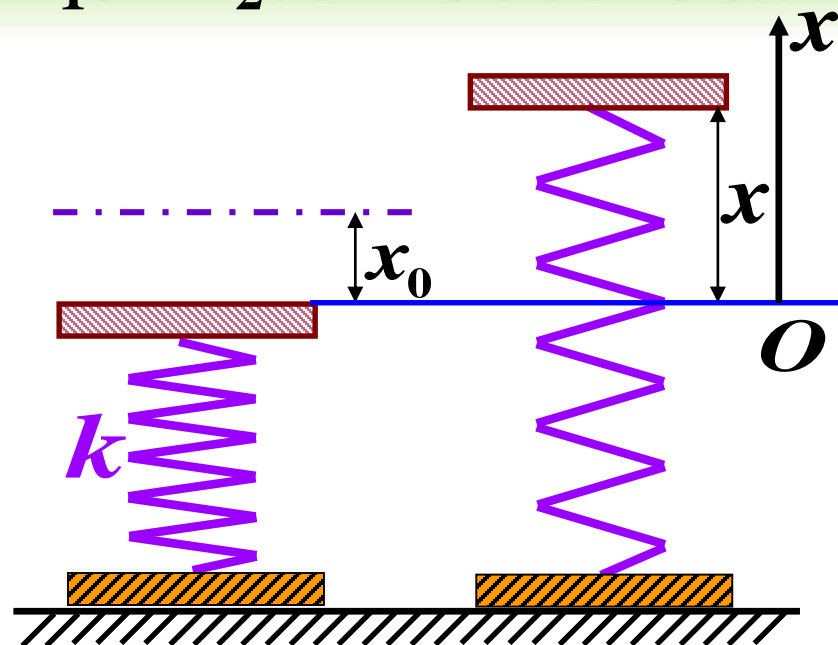
求极值：令： $\frac{dE_k}{dx} = 0 \rightarrow x = \frac{mg}{k}$

$$E_{k_{\max}} = mgh + \frac{m^2 g^2}{2k}$$

例2、一根弹簧将质量分别为 m_1 和 m_2 的上下两水平板连接，下板放在地面上。

(1)假定上板在弹簧上的平衡位置为重力势能和弹性势能零点，写出上板、弹簧以及地球这个系统的总势能。

解：取坐标如图。



系统的**弹性势能**： $E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$

系统的**重力势能**： $E_{pg} = m_1gx$

总势能： $E_p = E_{pe} + E_{pg} = \frac{1}{2}kx^2 - kxx_0 + m_1gx$

$$kx_0 = m_1g \quad \text{故：} E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

(2)对上板加多大的向下压力, 才能因突然撤去它, 使上板向上跳而把下板拉起来?

初态 (加力时): $E_{k1} = 0$, $E_{p1} = \frac{1}{2}kx_1^2$

末态 (撤力、弹簧伸长最大): $E_{k2} = 0$, $E_{p2} = \frac{1}{2}kx_2^2$

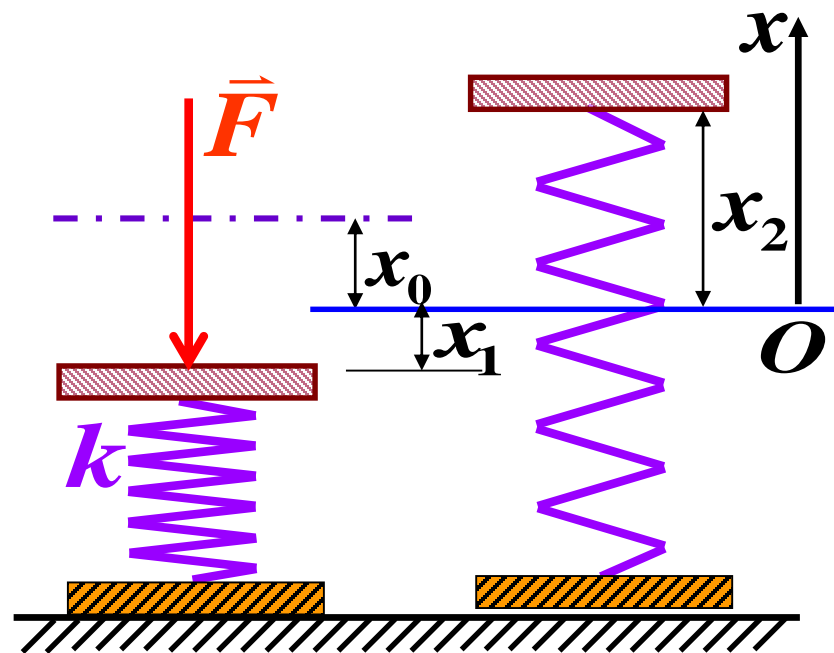
机械能守恒: $\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2$

下板恰好提起时:

$$k(x_2 - x_0) = m_2g$$

因为: $kx_1 = F$, $kx_0 = m_1g$

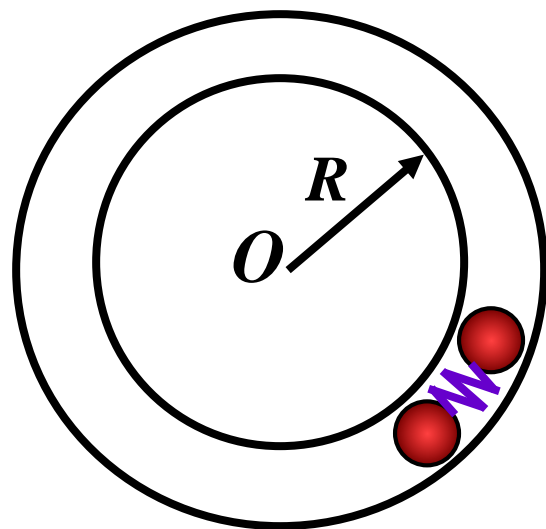
解得: $F = (m_1 + m_2)g$



即当 $F \geq (m_1 + m_2)g$ 时, 下板就能被提起。

例3、 在一个较大无摩擦的平均半径为 R 的水平圆槽内，放有两个小球。质量分别为 m 和 M 。两球可在圆槽内自由滑动。现将一不计长度的压缩的轻弹簧置于两球之间，如图：

(1) 将弹簧压缩释放后，两球沿相反方向被射出，而弹簧本身仍留在原处不动。问小球将在槽内何处发生碰撞？



解： (1) 设两小球被射出后的角速度分别为 ω_m 和 ω_M ，
小球射出后，两小球对槽心 O 点的角动量守恒，有：

$$mR^2\omega_m = MR^2\omega_M \quad \frac{\omega_m}{\omega_M} = \frac{M}{m}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_M} = \frac{M}{m} = \frac{\omega_m t}{\omega_M t} = \frac{\theta_m}{\theta_M}$$

$$\text{又: } \theta_m + \theta_M = 2\pi$$

$$\text{解得: } \theta_m = \frac{M}{m+M} 2\pi \quad \theta_M = \frac{m}{m+M} 2\pi$$

(2) 设压缩弹簧具有弹性势能 E_0 ，问小球射出后，经多长时间发生碰撞？

系统仅弹簧的弹力做功，**机械能守恒**，得：

$$\frac{1}{2} m (R \omega_m)^2 + \frac{1}{2} M (R \omega_M)^2 = E_0$$

$$\omega_M = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2mE_0}{M(m+M)}}$$

$$t = \frac{\theta_M}{\omega_M} = \frac{2\pi m R}{m+M} \sqrt{\frac{M(m+M)}{2mE_0}}$$

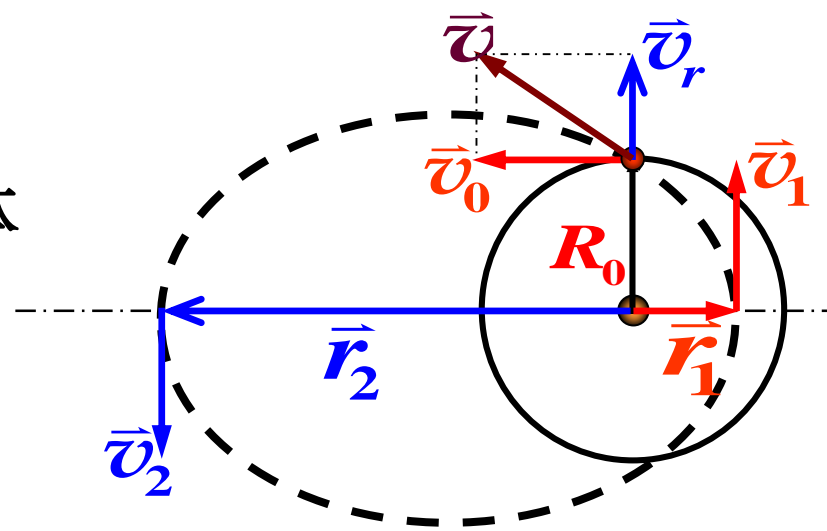
例4、一飞船环绕某星体作圆轨道运动，半径 R_0 ，速率为 v_0 。突然点燃一火箭，其冲力使飞船增加了向外的径向速度分量 v_r （设 $v_r < v_0$ ），因此飞船轨道变椭圆形。求飞船与星体的最远与最近距离。（习题2—60）

解：
$$G \frac{Mm}{R_0^2} = m \frac{v_0^2}{R_0} \dots\dots (1)$$

飞船在火箭点燃前或后对星体的**角动量守恒**。

对近星体点或远星体点有：

$$m v_0 R_0 = m v r \quad (2)$$



飞船在椭圆轨道上运动**机械能守恒**。

$$\frac{1}{2} m (v_0^2 + v_r^2) - G \frac{Mm}{R_0} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r} \dots\dots (3)$$

$$v_0^2 R_0^2 \left(\frac{1}{r}\right)^2 - 2v_0^2 R_0 \left(\frac{1}{r}\right) + (v_0^2 - v_r^2) = 0$$

$\frac{1}{r}$ 的两根即
为所求

例5、如图所示，一质量为 M 的光滑圆环，半径为 R ，用细线悬挂在支点上，环上串有质量都是 m 的两个珠子，让两珠从环顶同时静止释放向两边下滑，问滑到何处（用 θ 表示）时环将开始上升？

解：由于环对珠的支持力不做功，系统的机械能守恒。

当滑到图中位置时有

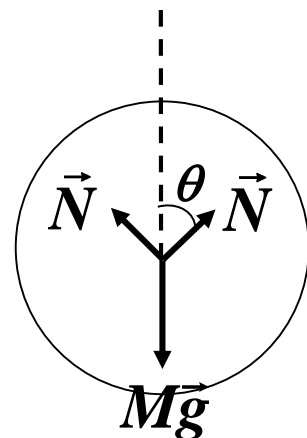
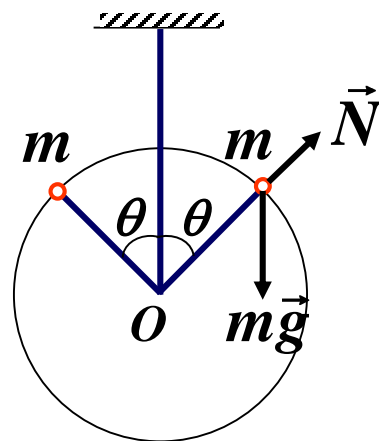
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos\theta)$$

珠子受的法向分力为 $f_n = mg \cos\theta - N = m \frac{v^2}{R}$

速度足够大时 \vec{N} 将反向。

故，环开始上升时 $2N \cos\theta = Mg$

由以上三式解得 $(2 - 3\cos\theta)\cos\theta = \frac{M}{2m}$



第2章 牛顿运动定律总结

1. 三个定律

牛顿三定律，特别是：

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$

2. 质点的动量： $\vec{p} = m\vec{v}$

动量定理： $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

质点系的动量： $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$

质点系动量定理： $\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_{i\text{外}} dt = (\sum \vec{p}_i)_2 - (\sum \vec{p}_i)_1$

质点系动量守恒定律： 当 $\sum \vec{F}_i = 0$ 时， $\sum \vec{p}_i = \text{恒矢量}$

3. 质点的角动量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

角动量定理:
$$\begin{cases} \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \\ \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \end{cases}$$

角动量守恒定律: 当 $\vec{M} = 0$ 时, $\vec{L} = \text{恒矢量}$

4. 质点的动能定理

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{kb} - E_{ka} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

5. 保守力的功

$$A_{ab} = -(E_{pb} - E_{pa})$$

典型保守力对应的势能函数，势能零点。

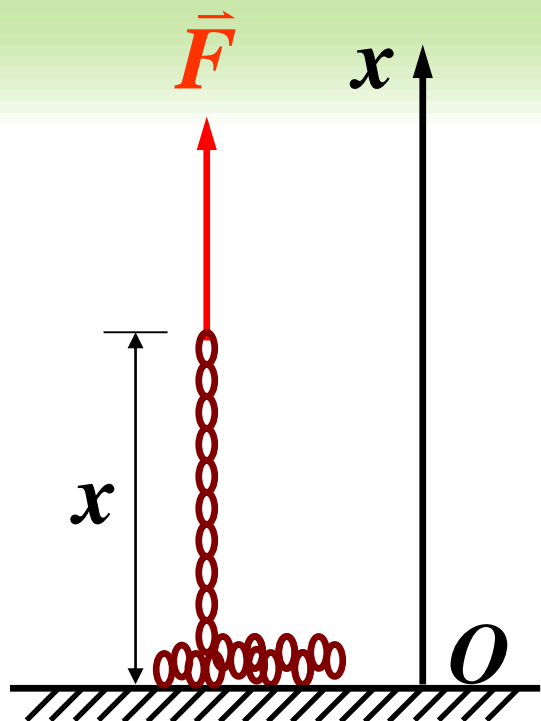
6. 质点系的功能原理

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保守内力}} = E_b - E_a = \Delta E$$

7. 机械能守恒定律

当 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0$ 时， $E = E_k + E_p = \text{恒量}$

专题：柔绳问题的讨论 (牛顿运动定律)



桌面上团缩有一质量线密度为 λ 的均匀柔软绳子。若手握绳子的一端，以匀速 v 将其上提，当绳端提离地面高度为 x ($x < l$) 时，求手的提力。

解一：选整个绳子为系统，

质点系动量定理：

$$(F - \lambda x g) dt = d(\lambda x v)$$

$$F = \lambda x g + \lambda v^2$$

解二：选绳子,地球为系统，

质点系功能原理：

设绳子上升 dx ：

$$F dx = \frac{1}{2} \lambda dx \cdot v^2 + \lambda x g dx$$

$$F = \lambda x g + \frac{1}{2} \lambda v^2$$

分析： 设 t 时刻绳子运动端距原点高度为 x ，（**主体**）

dt 时间后**微元** $dm=\lambda dx$ 参与运动

对**主体**： $(F - \lambda xg - f)dt = \lambda xv - \lambda xv$

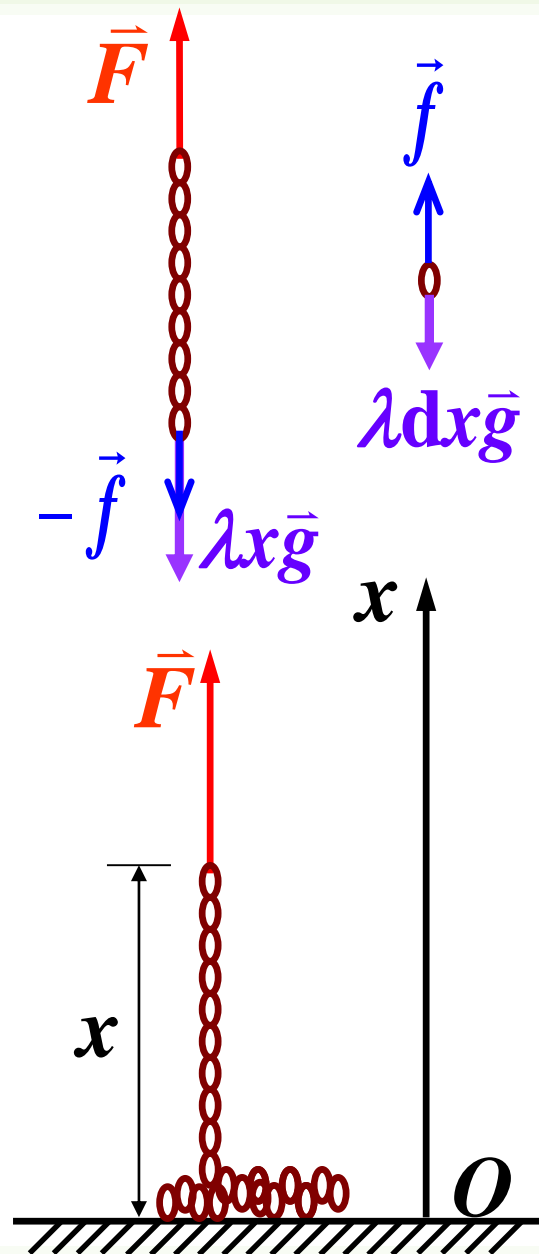
对**微元**： $(f - \lambda dxg)dt = \lambda dxv - \lambda dx \times 0$

忽略高阶小量 $dx \cdot dt$ ，有：

$$f = \lambda v \frac{dx}{dt} = \lambda v^2$$

$$F = \lambda xg + f = \lambda xg + \lambda v^2$$

力 F 不但要克服柔绳竖直部分的重力，还要附加一项拉力 f 使后续微元能加速到 v 。



位移差问题:

dt 时间内**主体**的位移: $dx = v dt$

微元的位移: $dx' = \frac{1}{2} v dt = \frac{1}{2} dx$

能量问题:

能量损失: $f \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \lambda v^2 dx$

质点系功能原理:

错误写法: $F dx = \frac{1}{2} \lambda dx \cdot v^2 + \lambda x g dx$

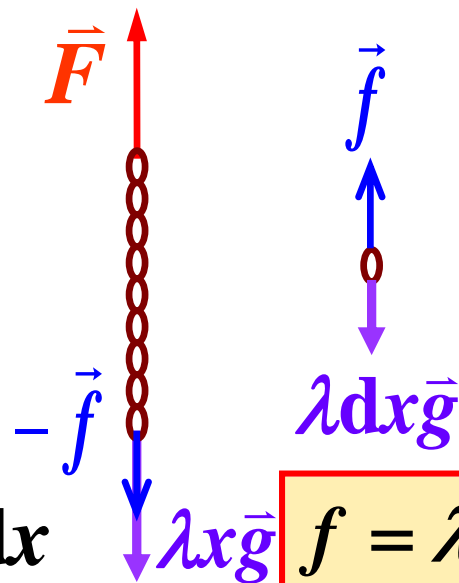
正确写法: $F dx - f \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \lambda dx \cdot v^2 + \lambda x g dx$

$$F = \lambda x g + \lambda v^2$$

结论: 柔绳问题用质点系动量定理处理。

$$(F - \lambda x g) dt = d(\lambda x v)$$

主体与微元间为完全非弹性碰撞!



例、一质量均匀分布的柔软细绳铅直地悬挂着，绳的下端刚好触到水平桌面上，如果把绳的上端放开，绳将落在桌面上。

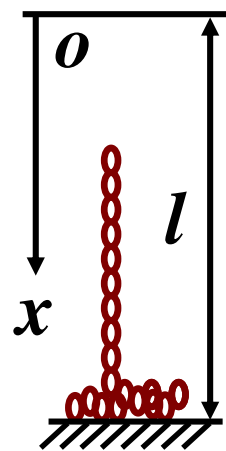
试证明：在绳下落的过程中，任意时刻作用于桌面的压力，等于已落到桌面上的绳重量的三倍。

分析：任意时刻作用于桌面的压力，在数值上等于已落到桌面上的柔绳对桌面的压力与柔绳对桌面的冲力的和。

证明：取如图坐标，设 t 时刻已有 x 长的柔绳落至桌面，随后的 dt 时间内将有质量为 λdx 的柔绳以 v 的速率碰到桌面而停止。

根据动量定理，桌面对柔绳的冲力为：

$$F' dt = dp = -\lambda dx \cdot v$$



$$F' = \frac{-\lambda \mathrm{d}x \cdot v}{\mathrm{d}t} = -\lambda v^2$$

柔绳对桌面的冲力 $F = -F'$, 即:

$$F = \lambda v^2 = \frac{M}{L} v^2$$

$$\text{而 } v^2 = 2gx \quad \therefore F = 2Mgx / L$$

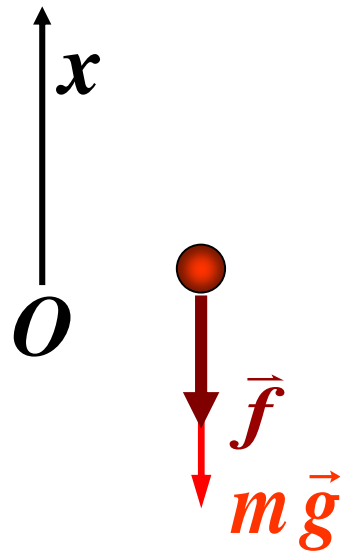
已落到桌面上的柔绳的重量为 $mg = Mg \frac{x}{L}$

任意时刻作用于桌面的压力

$$F_{\text{合}} = F + mg = 2Mg \frac{x}{L} + Mg \frac{x}{L} = 3mg$$

2-T3. 将质量为 m 的物体以初速度 v_0 竖直上抛。设物体所受空气的阻力大小正比于物体的速度，比例系数为 $k>0$ 。求
(1) 任一时刻物体的速度； (2) 物体达到的最大高度。

解： (1) 建立坐标系，以竖直向上为正方向，
作受力图，如右图所示。



根据牛顿第二定律：

$$-mg - kv = m \frac{dv}{dt}$$

分离变量后积分：

$$\int_{v_0}^{v_t} \frac{dv}{(-mg - kv)/m} = \int_0^t dt$$

解方程得到：

$$v_t = \left(\frac{mg}{k} + v_0 \right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$$

2-T3. 将质量为 m 的物体以初速度 v_0 竖直上抛。设物体所受空气的阻力大小正比于物体的速度，比例系数为 $k>0$ 。求
(1) 任一时刻物体的速度； (2) 物体达到的最大高度。

解： (2) 根据牛顿第二定律：

$$-mg - kv = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} v$$

分离变量后积分：

$$\int_{v_0}^0 \frac{v dv}{(-mg - kv) / m} = \int_0^h dx$$

解方程得到：

$$h = \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right)$$

2-T4、 快艇以速率 v_0 行驶，摩擦阻力与速度的平方成正比，比例系数为 k ，快艇的质量为 m 。求当快艇发动机关闭后（1）速度随时间变化的规律；（2）路程随时间变化的规律；（3）速度随路程变化的规律。

解：（1）根据牛顿第二定律： $-kv^2 = m \frac{dv}{dt}$

分离变量后积分： $\int_{v_0}^v \frac{dv}{-kv^2/m} = \int_0^t dt$

解方程得到： $v = \frac{mv_0}{m + ktv_0}$

（2）路程与时间的关系： $v = \frac{dx}{dt}$ $x = \int_0^t v dt$

带入（1）的结果得： $x = \frac{m}{k} \ln \frac{m + ktv_0}{m}$

(3) 根据牛顿第二定律: $-kv^2 = m \frac{dv}{dt}$

变量代换: $-kv^2 = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$

分离变量得到: $-k dx = m \frac{dv}{v}$

积分: $-\frac{k}{m} \int_0^x dx = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$

得: $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}x}$

例1: (2-T12)

对功的概念有以下说法: (1)保守力做正功时, 系统内相应的势能增加; (2)质点运动经一闭合路径, 保守力对质点做的功为零; (3)作用力和反作用力大小相等、方向相反, 所以两者所做的功的代数和为零。

上述说法中: (A)(1)(2)是正确的。

(B)(2)(3)是正确的。

 (C)只有(2)是正确的。

(D)只有(3)是正确的。

2-T14:一质量为 m 的质点做平面运动，其位矢为

$\vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}$ ，式中， a 、 b 为正值常量，且 $a > b$ 。

问：（1）质点在点 $A(a, 0)$ 和点 $B(0, b)$ 时的动能有多大？

（2）质点所受作用力 \vec{F} 是怎样的？当质从点 A 运动到点 B 时， \vec{F} 的分力 $F_x \vec{i}$ 和 $F_y \vec{j}$ 所做的功为多少？（3） \vec{F} 是保守力吗？为什么？

解：（1） $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega \sin \omega t \vec{i} + b\omega \cos \omega t \vec{j}$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m b^2 \omega^2, \quad \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \vec{F} &= m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= -ma\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - mb\omega^2 \sin \omega t \vec{j} = -m\omega^2 \vec{r} \end{aligned}$$

2-T14:一质量为 m 的质点做平面运动, 其位矢为

$\vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}$, 式中, a 、 b 为正值常量, 且 $a > b$ 。

问: (2) 当质从点A运动到点B时, \vec{F} 的分力 $F_x \vec{i}$ 和 $F_y \vec{j}$ 所做的功为多少? (3) \vec{F} 是保守力吗? 为什么?

$$\vec{F} = -ma\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - mb\omega^2 \sin \omega t \vec{j} = -m\omega^2 \vec{r}$$

$$\begin{aligned} A_x &= \int dA_x = \int F_x dx = \int_a^0 -ma\omega^2 \cos \omega t d(a \cos \omega t) \\ &= -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \cos^2 \omega t \Big|_1^0 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_y &= \int dA_y = \int F_y dy = \int_0^b -mb\omega^2 \sin \omega t d(b \sin \omega t) \\ &= -\frac{1}{2}mb^2\omega^2 \sin^2 \omega t \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}mb^2\omega^2 \end{aligned}$$

(3) \vec{F} 是有心力, 是保守力。