2. 2 矩阵的运算

- 矩阵的加法与数乘矩阵(线性运算)
- 矩阵的乘法及其性质
- 矩阵的其他运算
  - 矩阵的转置
  - 方阵的行列式

2.2 矩阵的运算

- 在矩阵集合上定义基本的矩阵运算
  - 矩阵的加法和数乘
  - 矩阵的乘法
  - 矩阵的转置
- 定义的基本思想
  - 依矩阵的相等性原则，给出所定义运算的结果矩阵的阶数和元素.
  - 研究运算的基本性质.

一、矩阵的加法

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$$

1、定义

设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(b_{ij}\right)$, 则矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- 只有当两个矩阵是同型矩阵时，进行加法运算才有意义.
- 加法本质上是对应的元素相加.

例1

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2、 矩阵加法的运算规律

与数的加法性质一样

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$$(3)\ -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=\left(-a_{ij}\right)$$

称为矩阵A的**负矩阵**.

$(4)\ A+(-A)=0,\ A+0=A,\ A-B=A+(-B).$

二、数与矩阵相乘(数乘矩阵）

1、定义

数$\boldsymbol{k}$与矩阵$\boldsymbol{A}$的乘积记作$\boldsymbol{kA}$，定义为

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}=\left(ka_{ij}\right)_{m\times n}$$

例题：计算

$$3\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ -3 & 12 & 18 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2、数乘矩阵的运算规律

（设 A、B 为 $m \times n$ 矩阵，k, l 为数）

$$(1)\ (kl)A = k(lA);$$

$$(2)\ (k+l)A = kA + lA;$$

$$(3)\ k(A+B) = kA + kB.$$

矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为矩阵的线性运算.

两个矩阵的线性运算：k_1A+k_2B

m 个矩阵的线性运算：$k_1A_1+k_2A_2+\ldots+k_mA_m$

三、矩阵与矩阵相乘

- 定义的基本思想
  - 希望将线性方程组类似于数的方程表示出来.
  - 所定义的矩阵乘法要能将线性方程组表示成为系数矩阵与变元向量相乘的形式:

定义方法分析: 系数、变元、常数项三类量的分离处理

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow AX = b$$

1、定义2.4： 矩阵的行列积

- 矩阵A的第 i 行A_i 与矩阵B 的第 j 列B_j

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}); B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$A_i B_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

运算需要A_i和B_j的元素个数相同！

2 矩阵的乘法

- 定义2.5

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 阶矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $n\times p$ 的矩阵，矩阵A和B分别按行和列表示为:

$$A\overset{\text{行}}{=}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix},\quad B\overset{\text{列}}{=}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{bmatrix},$$ 则有

乘积(AB)的结构分析

$$AB=\begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_p \end{bmatrix}_{m\times p}$$

AB 的行？
AB 的列？
AB 的元素？

$$A_{m\times n} \overset{行}{=} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad B_{n\times p} \overset{列}{=} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$A_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}],$$

$$A_{m\times n} B_{n\times p} =$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_p \end{bmatrix}_{m\times p}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_p \end{bmatrix}_{m\times p}$$

记 $C = AB = \left[c_{ij}\right]_{m\times p}$ 则C的元素为

$$c_{ij} = A_iB_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

方阵A_n，B_n的乘积的行列式： $|AB| = |A||B|$

方阵A_n的乘方：$A^m = \underbrace{AA\cdots A}_{m个}$ $\quad |A^m| = |A|^m$

记 $A^0 = I$

$$c_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

例 1

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

?

例 2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

解 $\because A = (a_{ij})_{3\times 4}, \quad B = (b_{ij})_{4\times 3},$

$\therefore C = (c_{ij})_{3\times 3}.$

故

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

- 例3 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

计算矩阵乘法***AB***和***BA***

$$AB=\begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 10 & -6 \end{bmatrix} \quad BA=\begin{bmatrix} -6 & 3 & 11 \\ 6 & -6 & -12 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

有可能 AB与 BA都有意义，一般$AB \neq BA$。

矩阵乘法不满足交换律！

- **例4** 设矩阵A, B , C, D 为如下给定:

$$A=\begin{bmatrix}6 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

计算AC，BC，CD.

$$AC=\begin{bmatrix}5 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix} \quad BC=\begin{bmatrix}5 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix} \quad CD=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

- $AC = BC$, 但是 $A \neq B$.
- 矩阵 C 和 D 都不是零矩阵，但是 $CD = 0$.
- 一般矩阵$CD = 0 \not\Rightarrow C = 0$ 或 $D = 0$.

例5 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，计算 A^2（$=AA$）

$A^3=AA^2$.

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

- $A\neq 0$，$A^3=0$ （幂零矩阵）.
- A 的结构与幂次计算公式？

- **例6** 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$，$\mathbf{I}_n$为$n$阶单位矩阵，

计算$A\mathbf{I}_3$ 与 $\mathbf{I}_2A$.

$$I_2A=AI_3=A$$

$$I_2A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AI_3=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

单位矩阵为矩阵乘法的单位元！

单位矩阵为矩阵乘法的单位元！

- 一般地，设$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$为$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$阶矩阵，则有$\mathbf{I}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\mathbf{I}_n = \boldsymbol{A}$.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix},$$

$$E_j = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$I_m = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}, \quad I_n = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_n \end{bmatrix}$$

$$e_i = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \end{array}$$

单位矩阵为矩阵乘法的单位元！

- 一般地，设$A = (a_{ij})$为$m\times n$阶矩阵，则有 $\mathbf{I}_m A = A\mathbf{I}_n = A$.

$$e_i = \begin{array}{ccccccc} [\,0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\,] \\ & & & i & & & \end{array}$$

$$(I_m A)_{ij} = e_i B_j = a_{ij}$$

$$(AI_n)_{ij} = A_i E_j = a_{ij} \qquad E_j = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow I_m A = AI_n = A.$$

$$\Rightarrow e_i A = A_i,\ AE_j = B_j.$$

矩阵乘法的其他公式：p33. 乘法表

行
$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

列
$$B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{bmatrix}$$

1、 $$AB = A\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_p \end{bmatrix}$$

矩阵乘积的列的构成！

2、 $$A_{m\times n}B_{n\times p} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_mB \end{bmatrix}$$

矩阵乘积的行的构成！

2、矩阵乘法的运算规律 p36

$(1)\ (AB)C = A(BC);$

$(2)\ A(B+C) = AB + AC,\quad (B+C)A = BA + CA;$

$(3)\ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

$(4)\ AI = IA = A;$

(5) 若A是n阶方阵，则 A^k 为A的k次幂，即

$$A^k = \underbrace{A\,A\cdots A}_{k\text{个}}$$ 并且 $A^m A^k = A^{m+k}, (A^m)^k = A^{mk}$.

$(m,k$为正整数$)$

注意：矩阵运算性质和实数运算的差异：

1、 矩阵乘法不满足交换律

$$AB \neq BA,\ \left(AB\right)^k \neq A^k B^k.$$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$

故 $AB \neq BA.$

2、矩阵乘法不满足消去律

$$AX=BX \overset{?}{\Rightarrow} A=B$$

上述性质都有例外，例如：

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=BA.$$

这时称A与B乘法可交换

- **线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- 记为： $\boldsymbol{A_{m\times n} X_{n\times 1} = b_{m\times 1}}$.

四、矩阵的其它运算

1、转置矩阵

定义　把矩阵A的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做A的转置矩阵，记作A^T.

例　$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}$,　$A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix}$,　$B^T=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}$.

四、矩阵的其它运算

1、转置矩阵

定义 把矩阵A的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做A的转置矩阵，记作A^T.

设 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$

即

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, A^T=\left(b_{ij}\right)_{n\times m},$$

$$\Rightarrow b_{ij}=a_{ji}, i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m$$

转置矩阵的运算性质

$$(1)\left(A^{T}\right)^{T}=A;$$

$$(2)(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T};$$

$$(3)(\lambda A)^{T}=\lambda A^{T};$$

$$(4)(AB)^{T}=B^{T}A^{T}.$$

例5 已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},\ 求\ (AB)^T.$$

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}\quad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$$

例5 已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ 求 (AB)^T.$$

解法2

$$(AB)^T=B^TA^T$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

矩阵转置的特殊矩阵：对称阵与反对称矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么 A 称为**对称阵**.

例如 $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 为对称阵.

说明 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

如果 $A^T = -A$ 则矩阵A称为反对称的.

矩阵转置的特殊矩阵：对称阵与反对称矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

那么 A 称为**对称阵**.

如果 $A^T = -A$ 则矩阵 A 称为反对称的.

对角矩阵是对称的.

给定任一 $m \times n$ 阶矩阵 A，可以构造出两个对称矩阵：AA^T 和 A^TA.

例6 设列矩阵 $X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$, 满足 $X^TX=1$, I为n阶单位矩阵, $H=I-2XX^T$, 证明H是对称矩阵, 且$HH^T=I$.

证明 $\because H^T=\left(I-2XX^T\right)^T=I^T-2\left(XX^T\right)^T$

$$=I-2XX^T=H,$$

$\therefore H$是对称矩阵.

$$HH^T=H^2=\left(I-2XX^T\right)^2$$

$$=I-4XX^T+4\left(XX^T\right)\left(XX^T\right)=I-4XX^T+4X\left(X^TX\right)X^T$$

$$=I-4XX^T+4XX^T=I.$$

例7 证明任一 n 阶方阵 A 都可表示成对称阵与反对称阵之和.

证明 设 $C = A + A^T$

则 $C^T = \left(A + A^T\right)^T = A^T + A = C,$

所以 C 为对称矩阵.

设 $B = A - A^T$, 则 $B^T = \left(A - A^T\right)^T = A^T - A = -B,$

所以B为反对称矩阵.

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = \frac{C}{2} + \frac{B}{2},$$ 命题得证.

本章的内容要点：

矩阵运算

- 加法
- 数与矩阵相乘
- 矩阵与矩阵相乘
- 转置矩阵
- 矩阵运算产生的特殊矩阵

注意的要点

（1）只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

（2）只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘, 且矩阵相乘不满足交换律.

（3）矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

思考题

设A与B为n阶方阵,问等式

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

成立的充要条件是什么?

思考题解答

答 $\because (A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2,$

故 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 成立的充要条件为

$$AB=BA.$$