大学物理

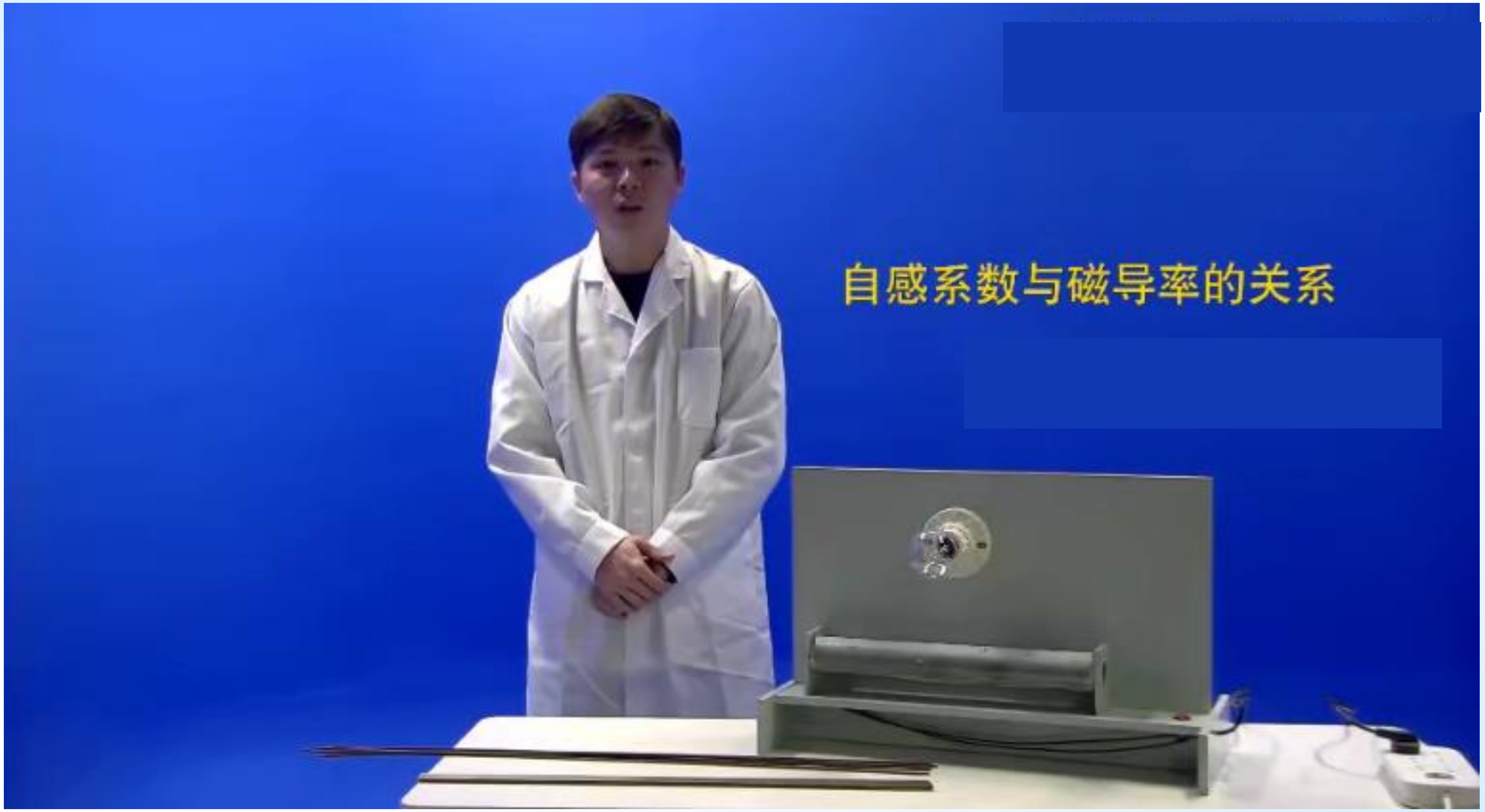
University Physics

华 中 科 技 大 学 物 理 学 院

王宁

ningwang@hust.edu.cn

演示实验

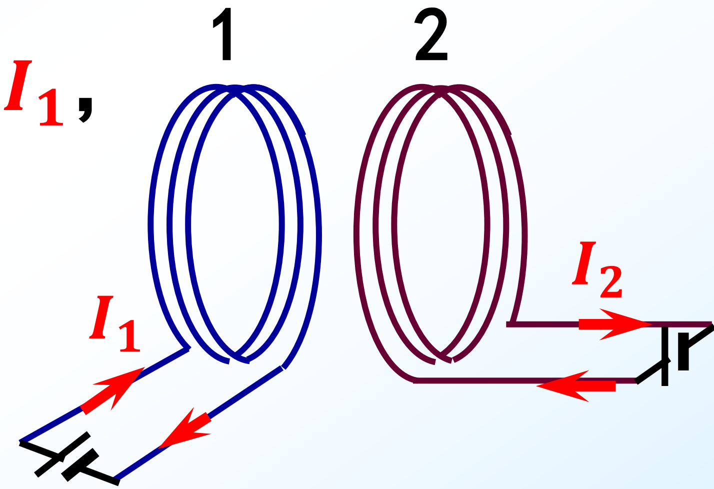


例2：通过计算回路的磁场能量，证明两电流回路的互感系数相同。

解： 假定两个回路开始处在断开状态。

先接通回路1的电源，其电流从$0 \to I_1$，

此过程中电源力做功，储存在回路1磁场的能量为：



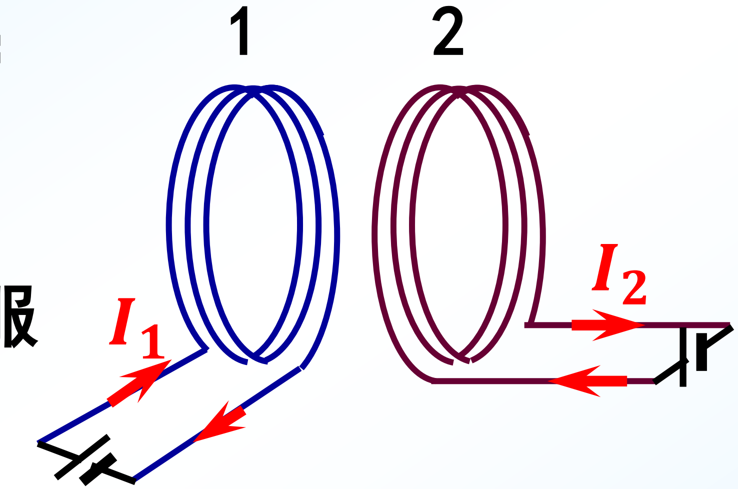
$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

再接通回路2的电源，其电流从$0 \to I_2$，

在回路2的磁场中储存的能量为：

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

但在此过程中回路1中产生了互感电动势：



$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{di_2}{dt}$$

为了保持电流I_1不变，回路1的电源要克服此电动势做功：

$$A = -\int \varepsilon_{21}\,dq = \int_0^{I_2} M_{21}\frac{di_2}{\cancel{dt}} I_1 \cancel{dt} = M_{21}I_1I_2$$

两回路的电流分别达到I_1和I_2时，整个系统的磁能为：

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{21}I_1I_2$$

反之，若先接通回路2的电源，最终整个系统的磁能为：

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{12}I_1I_2$$

$$\therefore M_{21} = M_{21} = M$$

小结

1. 法拉第电磁感应定律： $\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

2. 动生电动势 $\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

3. 感生电动势 $\varepsilon_i = \int_-^+ \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

   对闭合回路： $\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

4. 自感、互感的意义，
   自感系数L、互感系数M的计算。

5. 磁场能量和磁场能量密度的概念及计算

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$$

第五节 麦克斯韦方程

一点数学

高斯散度定理

$$\boxed{\oint_S \mathrm{A}\bullet d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\bullet \boldsymbol{A}dV}$$

矢量场***A***通过任意闭合曲面***S*** 的通量，等于该曲面所包围的体积***V***内矢量***A***的散度积分。

斯托克斯公式（旋度定理）

$$\boxed{\oint_L \mathrm{A}\bullet d\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times \boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}}$$

矢量场***A***在任意闭合环路***L***的环流，等于以该回路为边界的曲面***S***上矢量***A***的旋度的面积分。

电磁场的实验规律

静电场：

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_S q_i \\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

稳恒磁场：

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I_i \end{cases}$$

电 → 磁

磁 → 电

$$\oint_L \vec{E}_i\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

变化磁场 → 感应电场

变化电场 $\xrightarrow{?}$ 感应磁场

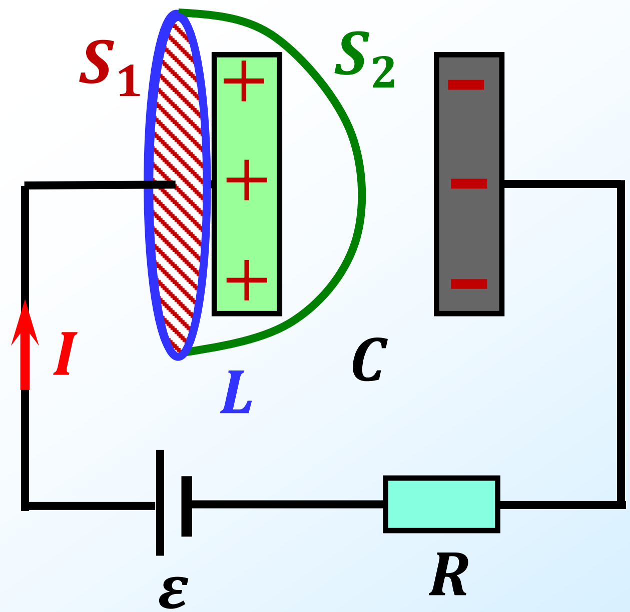
位移电流

1. 位移电流的引入

稳恒磁场：$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_L I_i}$

在电容器充放电的过程中：

以左极板边缘取为积分回路L，并以L为边界做两曲面S_1和S_2组成闭合曲面S。



$$\left.\begin{array}{ll}\text{对}S_1\text{面：} & \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I \\ \text{对}S_2\text{面：} & \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=0\end{array}\right\}\ \text{矛盾！}$$

安培环路定理对非稳恒磁场不适用。

麦克斯韦分析矛盾后，提出：

$$I \xrightarrow{\text{穿过}S_1} \text{极板} \longrightarrow q(t) \longrightarrow \sigma(t) \longrightarrow \text{极板间}D(t) \xrightarrow{\text{穿过}S_2} \Phi_D(t)$$

位移电流

变化的电场产生磁场！

充电过程中，流入闭合曲面S的传导电流为：

$$I=-\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \quad =\frac{d}{dt}q(t)$$

以曲面S高斯面，根据高斯定理：

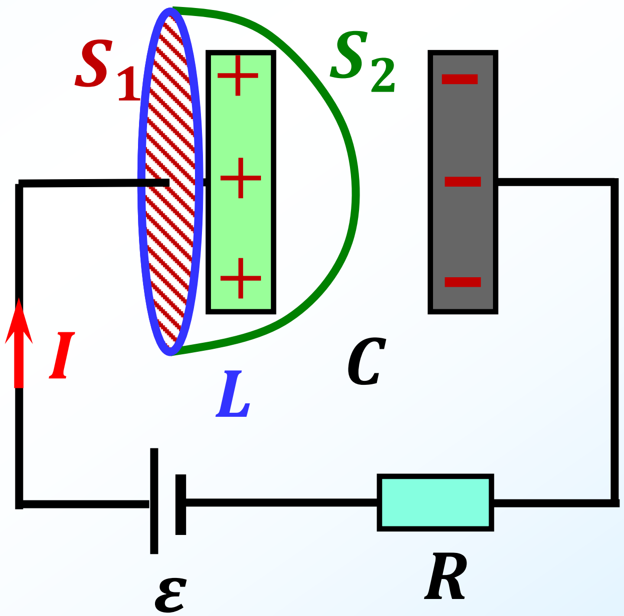
$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q(t)$$

$$\therefore \quad \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\frac{d}{dt}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=-\oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_S \left(\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}=0}$$

对于非稳恒电流，$\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$是连续的，

传导电流$\vec{j}$中断处由$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$连接。



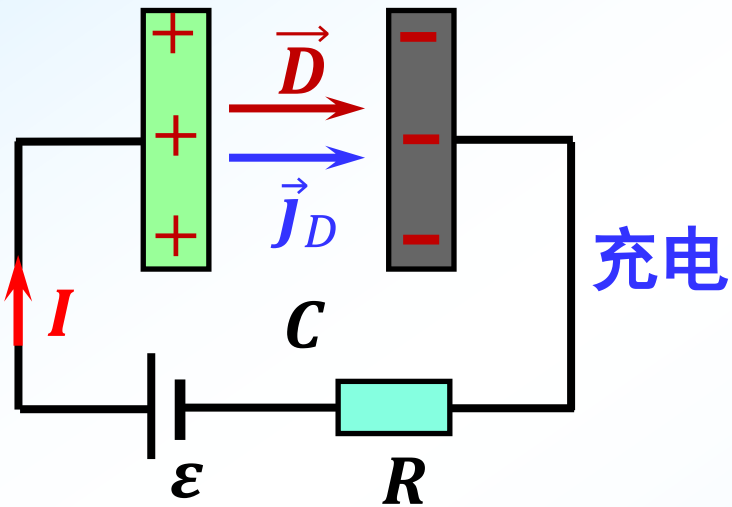
位移电流

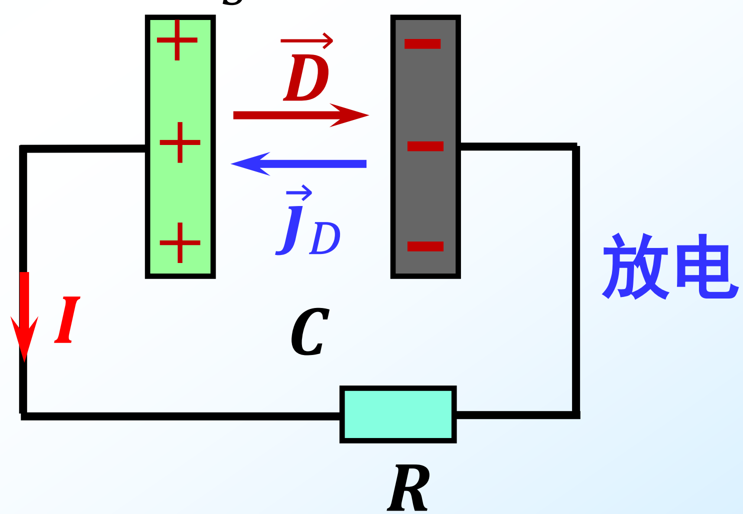
定义**位移电流**：变化的电场可以等效的视为一种“**电流**”。

$$\oint_S (\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}=0$$

位移电流密度： $\vec{j}_D=\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

通过空间任一曲面S的**位移电流**： $I_D=\displaystyle\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$



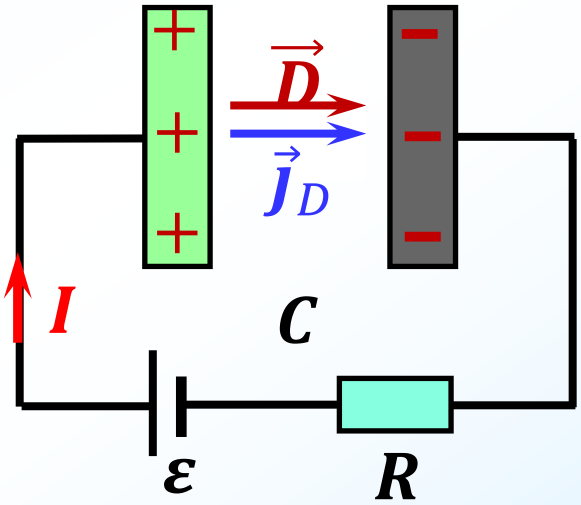


$$\left.\begin{array}{ll}\text{电容充电：}\ q(t)\uparrow D\uparrow\quad \partial\vec{D}/\partial t \parallel \vec{D} & \vec{j}_D \parallel \vec{D} \parallel I \\ \text{电容放电：}\ q(t)\downarrow D\downarrow\quad \partial\vec{D}/\partial t \uparrow\downarrow \vec{D} & \vec{j}_D \uparrow\downarrow \vec{D} \uparrow\downarrow I\end{array}\right\}\ \vec{j}_D \parallel I$$

位移电流

2. 位移电流I_D的性质

a). I_D的实质是变化电场 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0 \quad \vec{j}_D \neq 0$

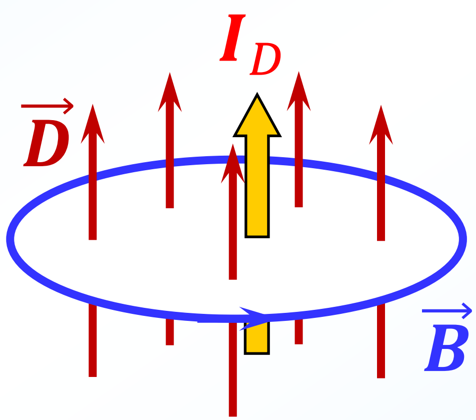


I_D不产生焦耳热！

b). I_D在激发磁场方面和传导电流I等效。

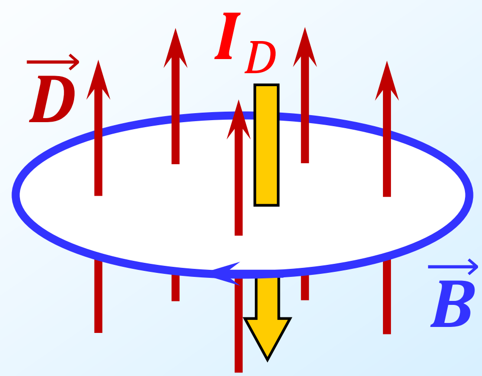
电容器两极板间没有传导电流，
但I_D仍然可以激发磁场。

c). I_D激发的磁场与其满足右手螺旋关系。 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_D$



$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} > 0$

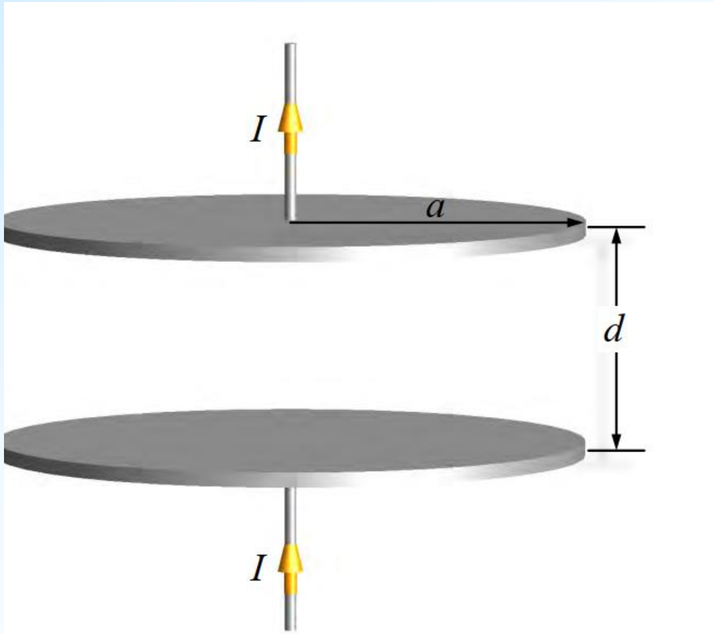
$\vec{D} \parallel I_D$

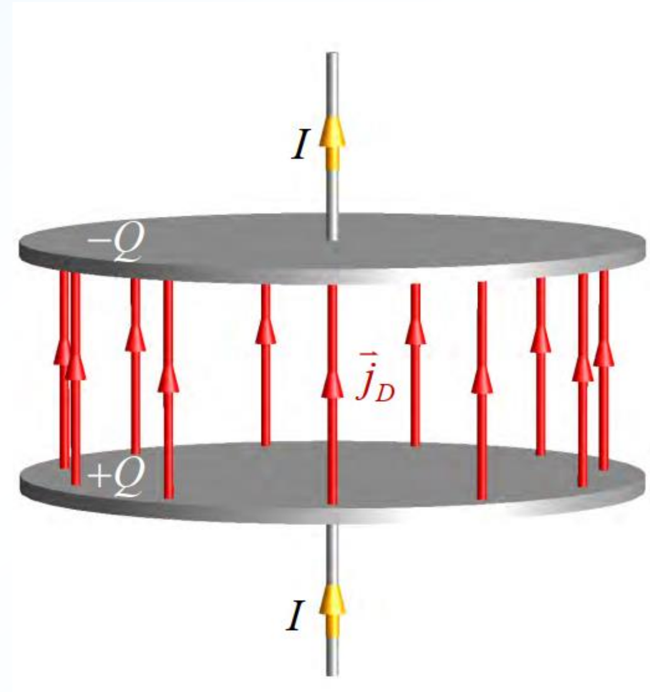


$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0$

$\vec{D} \uparrow\downarrow I_D$

位移电流的例子





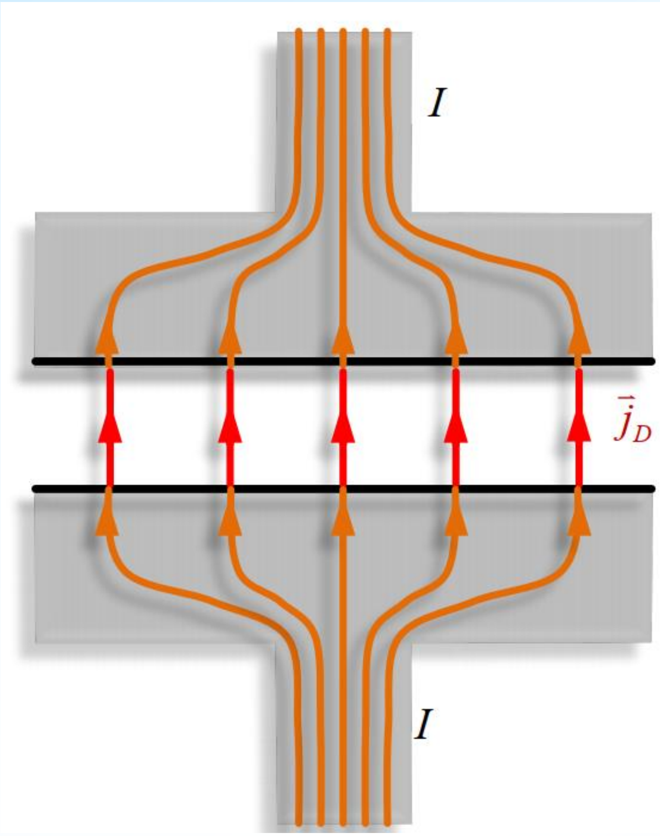
电场 $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0 a^2}$

位移电流密度

$$j_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\pi a^2}\frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\pi a^2}$$

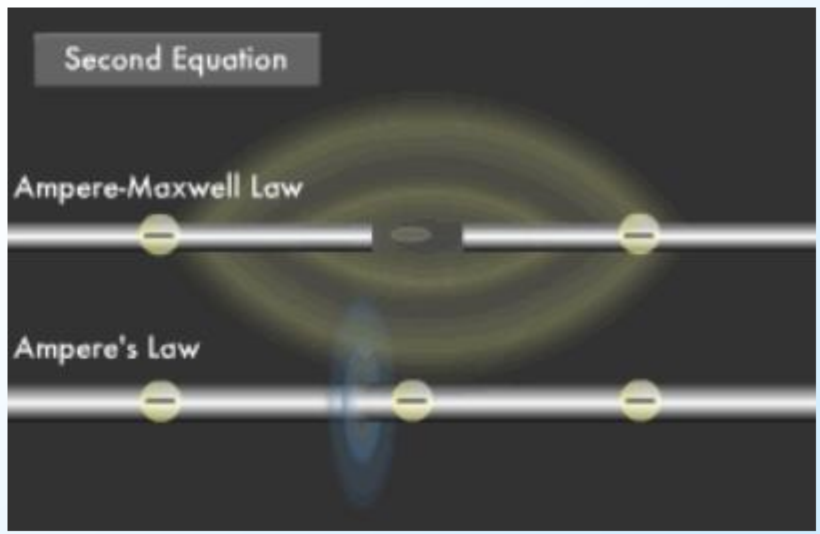
位移电流强度 $I_D = \pi a^2 j_D = I$

位移电流的本质



位移电流的本质：随时间变化的电场会激发磁场。

全电流连续：传导电流中断之处，由位移电流接上。



位移电流的例子

例.　一空气平行板电容器，略去边缘效应。

1）充电完毕后，断开电源，然后拉开两极板。

此过程中两极板间是否有 j_D?

$\longrightarrow$ $j_D=0$

2）充电完毕后，仍接通电源，然后拉开两极板。

此过程中两极板间是否有 j_D? 为什么?

$j_D \neq 0$　$\because V=E\cdot d$　V不变，$d\uparrow$，$E\downarrow$　D 改变

$$I_D=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\vec{j}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

全电流定理(安培—麦克斯韦定理)

传导电流+位移电流=全电流

在非稳恒情况，往往是传导电流I与位移电流I_D同时存在，两者之和的电流总是闭合的。

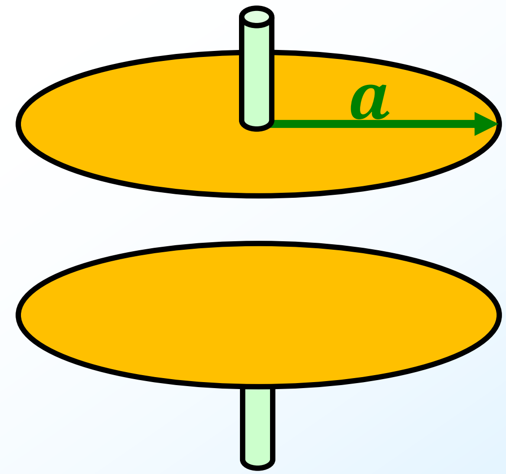
$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$ ----全电流定理

或者：

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + I_D$$

$\vec{H}$沿任意闭合回路的积分等于穿过此回路的全电流，或者等于穿过此回路的传导电流和位移电流的代数和。

例1：一圆形平行板电容器，两极板的半径为a，设其正在充放电，电荷按规律$Q = Q_0 \sin \omega t$变化，忽略边缘效应，求两极板间任意点的位移电流和磁场。



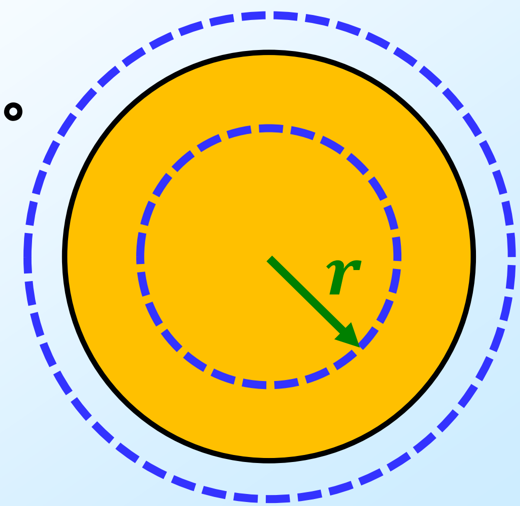
解：(1) 两极板间的电位移矢量大小为：

$$D = \sigma = \frac{Q}{S}$$

位移电流密度为：

$$j_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\omega Q_0}{\pi a^2} \cos \omega t$$

j_D均匀的分布在横截面上，与传导电流同向。



(2) 在两极板间取半径为r的同心圆环为闭合回路，根据全电流定理：

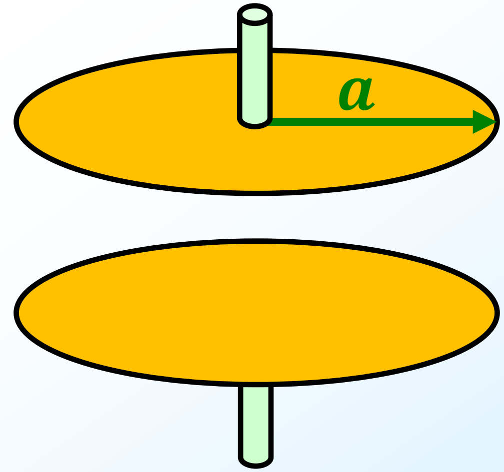
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \cancel{I} + I_D$$

$$j_D = \frac{\omega Q_0}{\pi a^2}\cos\omega t$$

$r < a$时：

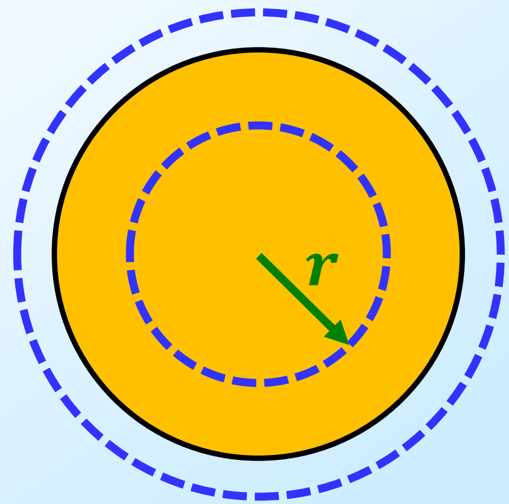
$$\left.\begin{aligned} &\oint_L \vec{\boldsymbol{H}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = H\cdot 2\pi r \\ &I_D = \int_S \vec{\boldsymbol{j}}_D\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = j_D\cdot \pi r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H = \frac{j_D}{2}r$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0\omega Q_0}{2\pi a^2} r\cos\omega t$$



$r > a$时：

$$\left.\begin{aligned} &\oint_L \vec{\boldsymbol{H}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = H\cdot 2\pi r \\ &I_D = \int_S \vec{\boldsymbol{j}}_D\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = j_D\cdot \pi a^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H = \frac{j_D}{2}\frac{a^2}{r}$$



$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0\omega Q_0}{2\pi r}\cos\omega t$$

极板间的磁感应强度为：

$$B=\mu_0 H=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 j_D}{2}r & (r<a)\\[2ex] \dfrac{\mu_0 j_D}{2}\dfrac{a^2}{r} & (r>a)\end{cases}$$

$$\boxed{j_D=\frac{\omega Q_0}{\pi a^2}\cos\omega t}$$

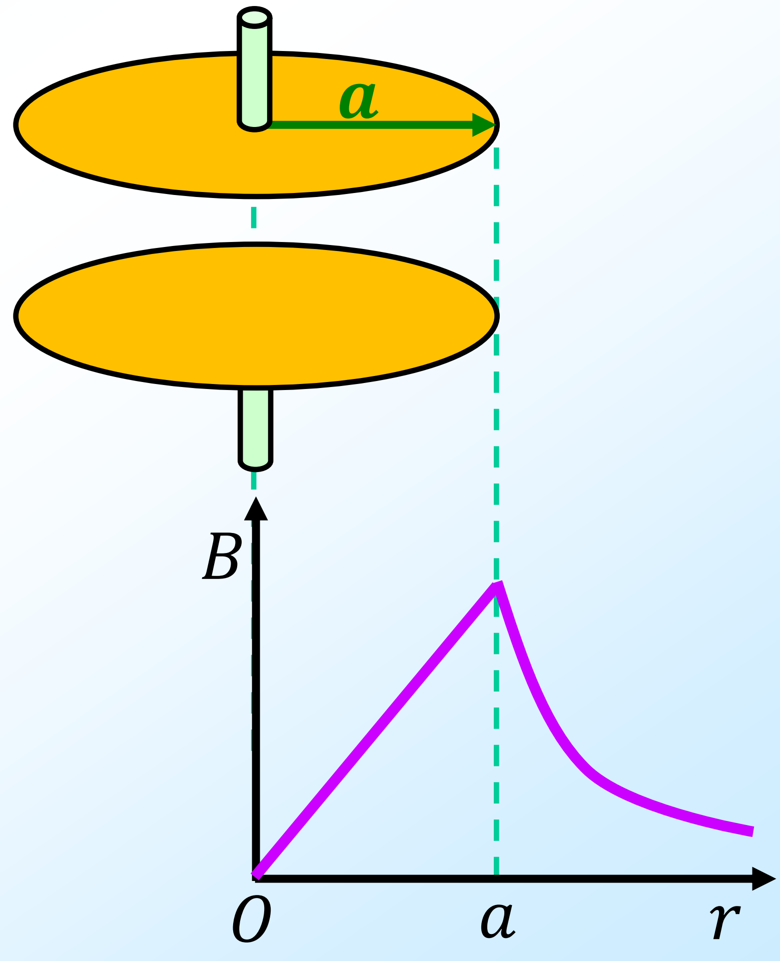
$\boldsymbol{r=a}$时：$B=B_{\max}=\dfrac{\mu_0\omega Q_0}{2\pi a}\cos\omega t$

一般变化电场产生的磁场都很小。

例如：$a=5cm$，$\dfrac{dE}{dt}=10^{12}V/m\cdot s$

$\because\quad \dfrac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\dfrac{\partial E}{\partial t}\quad\therefore\quad B_{\max}=3\times10^{-7}T$

——当时无法验证

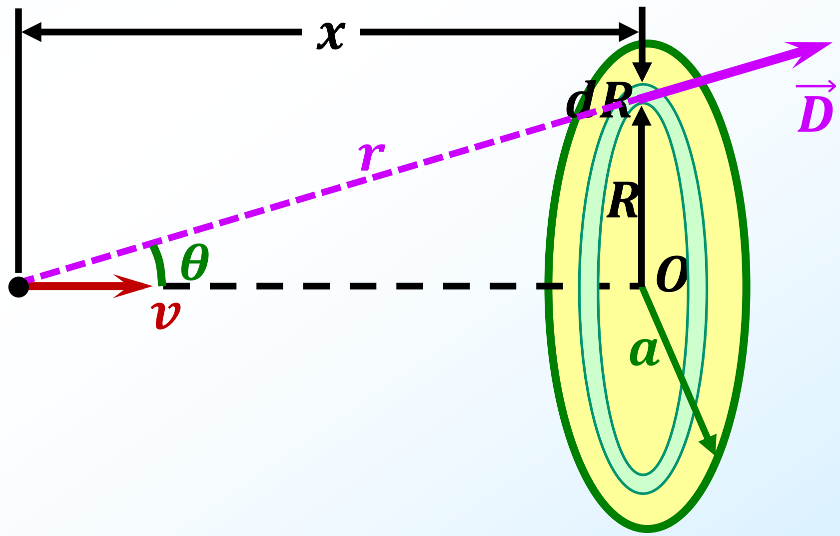


极板间的磁感应强度是由位移电流和传导电流共同产生的。

例2：如图所示，点电荷q以速度v ($v \ll c$) 向O点运动，在O点作一半径为a的圆，圆面与v垂直。当q与O距离为x时，求(1) 通过此圆面的位移电流；(2) 此圆面边缘上一点的磁场B。

解：

(1) 由于$v \ll c$，运动电荷产生的电场可以近似用瞬时的静电场描述。与点电荷相距r处的电位移矢量为：



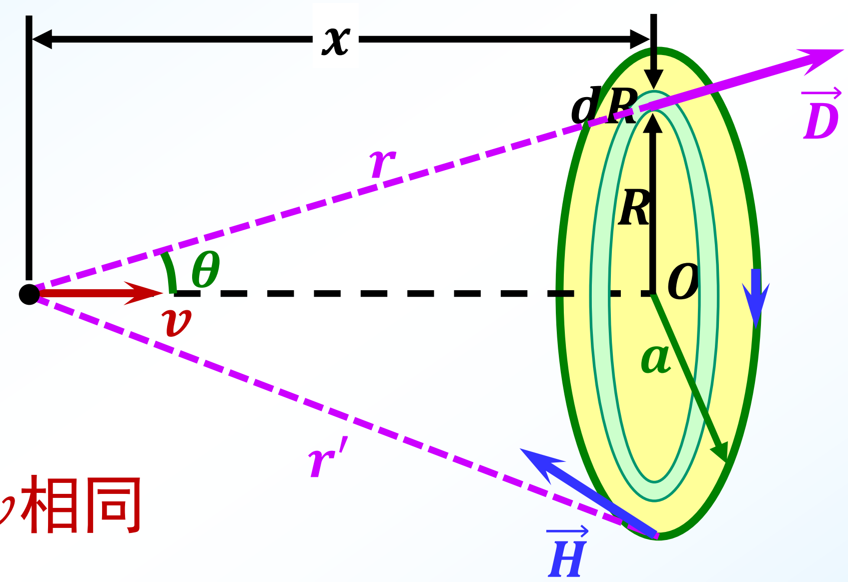
$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

计算通过半径为a的圆面的电位移通量：

$$\Phi_D = \int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_S \frac{q}{4\pi r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi}\int_S \frac{\cos\theta}{r^2}dS$$

$$= \frac{q}{4\pi}\int_0^a \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}2\pi R dR = \frac{q}{2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$\Phi_D = \frac{q}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$$



点电荷移动的过程中x发生变化，电位移通量随之变化，位移电流为：

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{qa^2v}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

方向与速度v相同

(2) 由对称性，磁场线是与圆面同心的圆周线，且同一圆周上磁场大小相等。根据全电流定理：

$$I_D = \int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi a \Longrightarrow H = \frac{qav}{4\pi(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 qav}{4\pi(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

运动电荷激发的磁场：

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 q\vec{v} \times \vec{r}'}{4\pi r'^3}}$$

麦克斯韦方程组

1. 积分形式

稳恒情况的电磁场规律

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_S q_i$$

任意电场 →

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

变化磁场 → 产生电场

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

任意磁场 →

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_L I_i$$

变化电场 → 产生磁场

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_S q_i \quad ①$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad ②$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \quad ③$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I+\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad ④$$

麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组

2. 微分形式

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_S q_i \quad = \int_V \rho\, dV = \int_V \nabla\cdot\vec{D}\, dV$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \mathbf{0} = \int_V \nabla\cdot\vec{B}\, dV$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \int_S (\nabla\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$$

电磁学基本规律

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

麦克斯韦方程组物理意义：

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_S q_i \quad ①$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad ②$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad ③$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad ④$$

(1) 在任何电场中，通过任何闭合曲面的电通量等于该闭合曲面内自由电荷的代和。

—— 有源场

(2) 在一般电场中，电场强度E 沿任意闭合环路的积分，等于穿过该环路磁通量随时间变化率的负值。

——有旋场

(3) 在任何磁场中，通过任何闭合曲面的磁通量恒等于0。

——无源场

(4) 磁场强度$\vec{H}$ 沿任意闭合环路的积分，等于穿过该环路传导电流和位移电流的代数和。

——有旋场

a). 方程①中的$\vec{D}$包含了静电场和感应电场，而方程③中的磁场是由传导电流和位移电流激发的。

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_S q_i \quad ①$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad ②$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \quad ③$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I+\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad ④$$

b). 麦克斯韦方程组中的物理量：$\vec{D}$， $\vec{E}$， $\vec{B}$， $\vec{H}$不仅是空间的函数而且是时间的函数。

c). 麦克斯韦方程组的微分形式才是最常用的。

d). 麦克斯韦电磁理论是物理学史上的一次重大突破。

解释了一切宏观电磁现象；
预言了电磁波的存在；
指出光波就是一种电磁波。

麦克斯韦方程并非完全对称

电磁场的物质性

电磁场 ----客观存在的一种物质形态。

电磁场的能量

1） 能量密度 静电场的能量密度： $w_e = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}$

稳恒磁场的能量密度： $w_m = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}$

变化的电磁场同时具有电场能和磁场能：

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}} + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}$$

通常情况下，电磁场的能量密度是空间和时间的函数：

$$w = w(x, y, z, t)$$

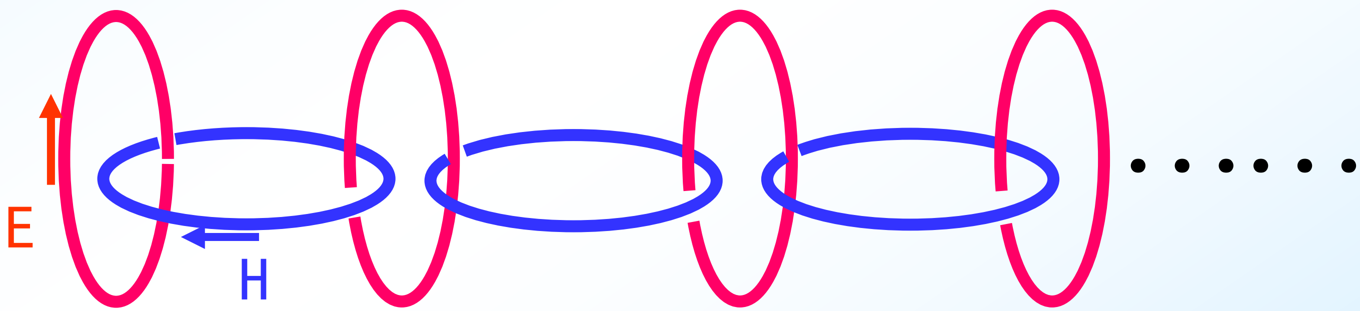
电磁场的物质性

电磁场的能量可以通过电磁波的形式传播。

波源：LC回路电磁振荡

传播：不需要媒介

机制：变化的电场和变化的磁场互相激发



电磁场的物质性

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla \times \left(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}\right) = -\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2 \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2 \vec{\boldsymbol{B}}$$ **同理可得：** $$\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}$和$\vec{\boldsymbol{B}}$的运动方程就是波动方程。

电磁波 ----电磁场以波动的形式运动。

波速： $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{n} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 299792458\ m/s$

平面电磁波

波动方程：

$$\boxed{u^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow E_y = E_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

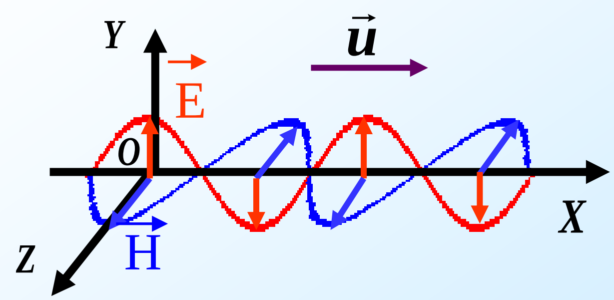
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \Rightarrow H_z = H_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

性质：

a） $\vec{E} \perp \vec{H}$，且$\vec{E}$，$\vec{H}$，$\vec{u}$满足右手螺旋法则；

b） $\vec{E}$和$\vec{H}$同相位；

c） $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E \quad B = uE = \sqrt{\mu\varepsilon}E$



电磁波的能量

$$\boxed{B = uE = \sqrt{\mu\varepsilon}E}$$

电场能量密度： $w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

磁场能量密度： $w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}\mu H^2$

总能量密度： $w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$

$$= \varepsilon E^2 = \mu H^2 = \sqrt{\mu\varepsilon}EH = \frac{EH}{u}$$

能流密度： $\boxed{\vec{S} = w\vec{u} = \vec{E}\times\vec{H}}$ ——玻印亭矢量

$E_y = E_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$ $H_z = H_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$ $\boxed{S = EH}$

平均能流密度： $\langle S\rangle = \frac{1}{2}E_m H_m$