大学物理

University Physics

华 中 科 技 大 学 物 理 学 院

王 宁

ningwang@hust.edu.cn

第一次测试
电磁学与电磁感应

考试时间：8：00 am — 8：25 am

（10月8日）

考试内容：5道题，满分100 分

1. （20分）一半径为R的无线长圆柱形导体，其相对磁导率为μ_r (>1)，且均匀。沿圆柱体的轴线方向均匀地通有电流，其电流密度为j_0，试求：

(1)磁场强度H和磁感应强度B的分布；
(2)磁化强度M的分布；
(3)磁化面电流密度i'和磁化（体）电流密度j'的分布。

解：（1）根据介质中的安培环路定理，分情况讨论，如图所示

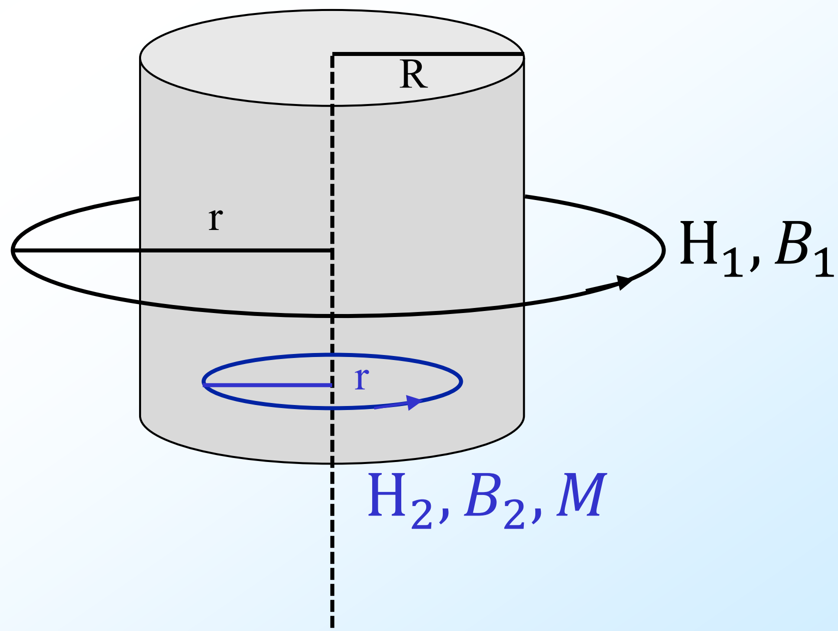
当$r > R$时，$$\oint_L H_1 \cdot dl = I_0 = \iint_s j_0 \cdot ds = j_0 \pi R^2$$

$$\therefore H_1 = \frac{j_0 R^2}{2r}, B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r}$$

当$r \le R$时，

$$\oint_L H_2 \cdot dl = I_0 = \iint_s j_0 \cdot ds = j_0 \pi r^2$$

$$\therefore H_2 = \frac{j_0 r}{2} \quad B_2 = \mu H_2 = \mu_0 \mu_r H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r j_0 r}{2}$$



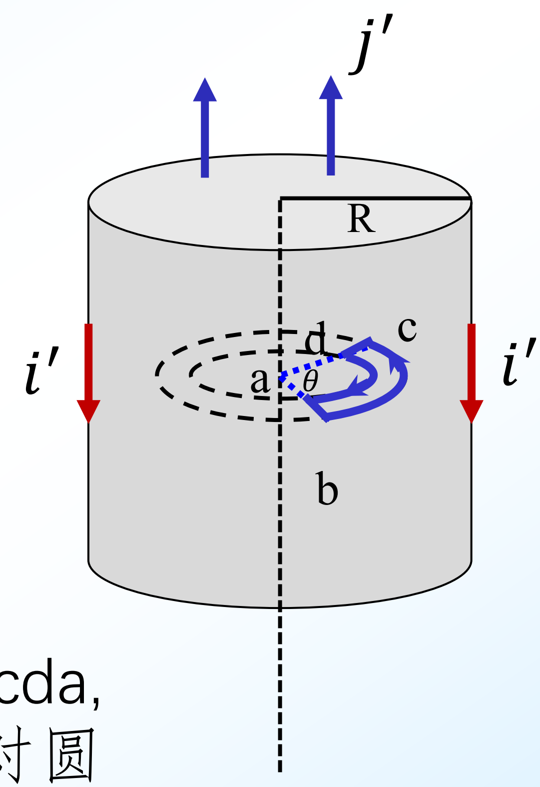
(2) 磁化仅存在于介质内

$$M = \chi_m H_2 = \frac{(\mu_r - 1) j_0 r}{2}$$

$$M(r = R) = \frac{(\mu_r - 1) j_0 R}{2}$$

(3) 由于$\overrightarrow{i'} = \vec{M}(r = R) \times \overrightarrow{e_n}$, 所以$\overrightarrow{i'}$的方向如图所示，因为$\vec{M}$垂直于$\overrightarrow{e_n}$，所以有

$$i' = M(r = R) = \frac{(\mu_r - 1)j_0 R}{2}$$



因为每个分子电流都闭合，所以磁化电流也一定闭合。这表明圆柱内一定有磁化电流$\vec{j}$, 它呈轴对称分布。

在圆柱体内任意横截面内作一扇面形环路abcda, 使ab边和cd边长度为无限小dr, 扇面性环路对圆柱轴线的张角为θ, 则将下式用于此环路，

$$\iint_S j' \cdot ds = \oint_L M \cdot dl$$

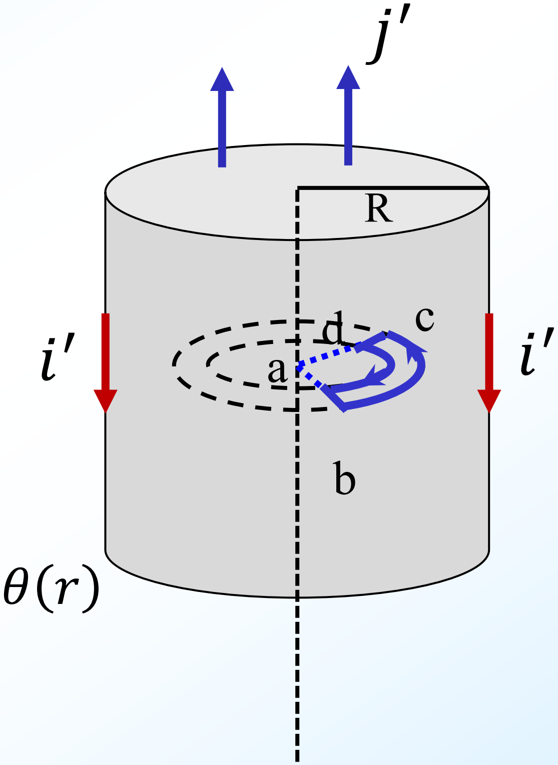
$$\iint_s j' \cdot ds = j'\theta r dr$$

$$\oint_L M \cdot dl = \int_a^b M \cdot dl + \int_b^c M \cdot dl + \int_c^d M \cdot dl + \int_d^a M \cdot dl$$

$$= 0 + M(r+dr) \cdot \theta(r+dr) + 0 - M(r)\theta r$$

$$= \frac{(\mu_r - 1)j_0(r+dr)}{2}\theta(r+dr) - \frac{(\mu_r - 1)j_0(r)}{2}\theta(r)$$

$$= (\mu_r - 1)j_0\theta r dr$$



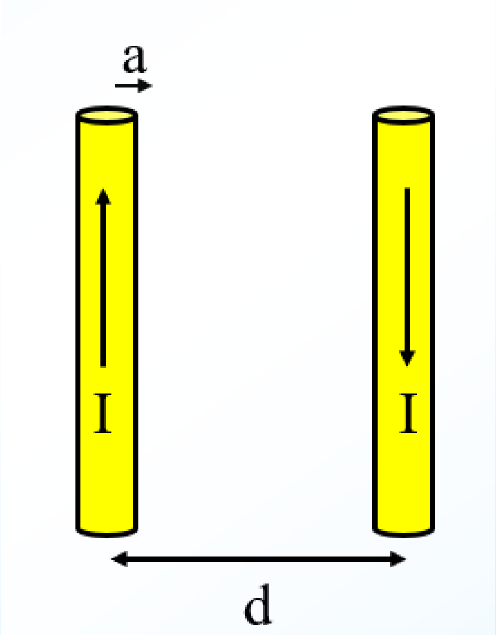
$$\therefore j' = (\mu_r - 1)j_0$$

2.（20分）两根平行的长直载流导线，相距为d，电流皆为I，方向相反，导线的半径皆为a, 且a远小于d, 如图所示。试求：

(1) 两导线单位长度上的自感系数；

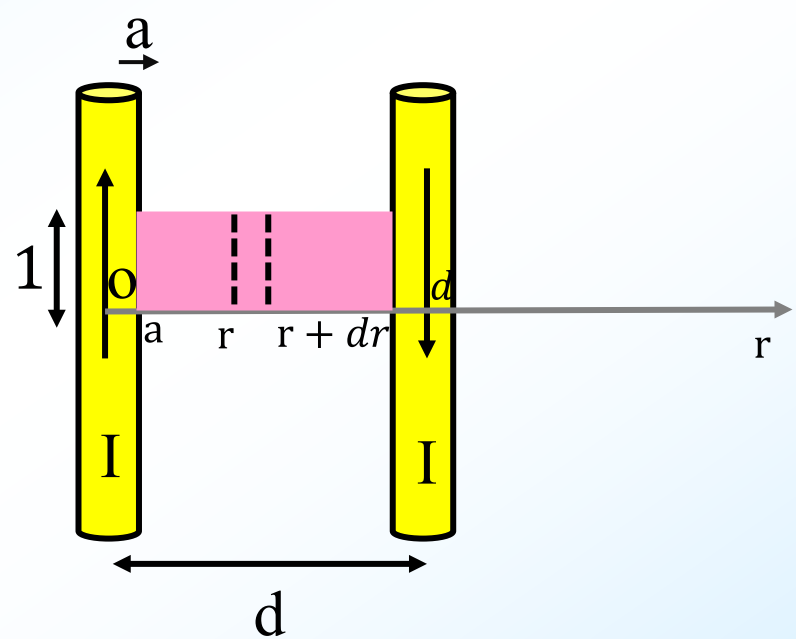
(2) 当两导线见的距离由d增至d'时，磁场对单位长度的导线所做的功；

(3) 当两导线见的距离由d增至d'时，单位长度电路上的磁能改变了多少？并解释能量转化的关系。



解：（1）因为两根导线上的电流相反，两个电流中间区域的磁感应方向相同，取两电流中间区域单位长度的面积如图所示，则这部分任意位置r处的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$



红色所示区域内的磁通量大小为

$$\phi=\int_a^{d-a} B\cdot dr\,\phi=\int_a^{d-a} B\cdot dr$$

$$=\int_a^{d-a}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right]\cdot dr$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}[\ln r-\ln(d-r)]\Big|_a^{d-a}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}\approx\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d}{a}$$

单位长度电路的自感系数为

$$L=\frac{\phi}{I}\approx\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}$$

(2) 导线之间的磁力为斥力，在两导线彼此远离的过程中磁力要做成正功。单位长度导线所受的磁力的大小为$\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$，在导线间的距离由d增大到d'的过程中磁力做的功为:

$$A=\int_d^{d'}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi \mathrm{r}}dr=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}$$

（3）导线间的距离由d增至d'，单位长度电路上增加的磁能为

$$\Delta W=\frac{1}{2}(L'-L)I^2\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d'}{a}-\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d'}{a}\right)I^2=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}$$

磁力做了正功，磁能又增加了,这是否违背能量守恒定律呢?

在导线彼此远离的过程中，电路上的磁通量要增大，故要产生与电流方向反向的自感电动势，于是维持电路上电流的电源就必须克服自感电动势做功，以保证电流I不变。电源克服单位长度电路上的自感电动势做的功为

$$A' = \int I\left[-\varepsilon_{感}\right]dt = \int I\left[\frac{d\Phi}{\mathrm{dt}}\right]dt = I(\Phi' - \Phi)$$

$$\approx I\left(\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d'}{d} - \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d}{a}\right) = \frac{\mu_0 I^2}{\pi}\ln\frac{d'}{d}$$

显然，电源克服自感电动势做的功A恰好等于磁力做的功A与增加的磁能ΔW之和，故仍然满足能量守恒定律。

3.（20分）分别写出反映下列现象的麦克斯韦方程：

① 电场线仅起始或终止于电荷或无限远处；
② 在静电条件下，导体内不可能有任何电荷；
③ 一个变化的电场，必定有一个磁场伴随它；
④ 一个变化的磁场，必定有一个电场伴随它；
⑤ 凡有电荷的地方就有电场；
⑥ 不存在磁单极子；
⑦ 凡有电流的地方就有磁场；
⑧ 磁感应线是无头无尾的；
⑨ 静电场是保守场。
⑩ 磁场的高斯定理。

$$\oint_s D\cdot ds=\int_V \rho dV \quad ①②⑤$$

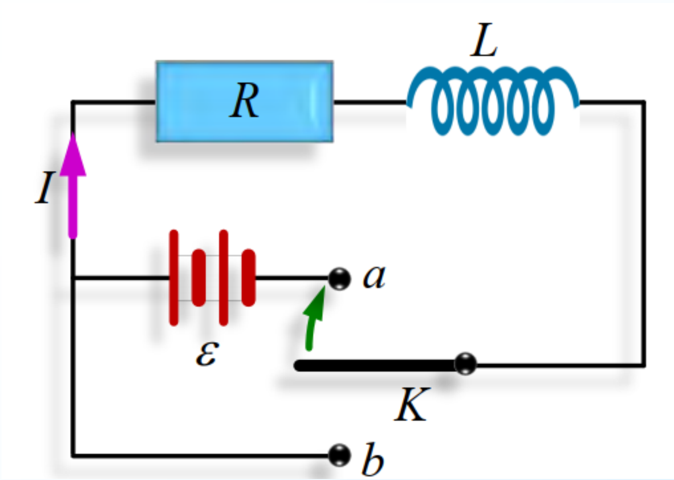
$$\oint_L E\cdot dl=-\int_S \frac{\partial B}{\partial t}\cdot dS \quad ④⑨$$

$$\oint_s \mathrm{B}\cdot ds=0 \quad ⑥⑧⑩$$

$$\oint_L H\cdot dl=\int_S \left(j+\frac{\partial D}{\partial t}\right)\cdot dS \quad ③⑦$$

4. （20分）如图所示，$\varepsilon = 10\,V, L = 300\,mH, R = 0.1\,\Omega$。问当开关闭合1s 后，下述各量将取何值？

1. 电流输出的瞬时功率；
2. 电阻每秒产生的热量；
3. 线圈每秒所储存的能量；
4. 此时线圈所储存的能量。



1. 由于回路中的电流为$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$，故电源的输出功率为

$$P=\varepsilon i=\frac{\varepsilon^2}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=283\ W$$

2. 电阻上每秒产生的热量为

$$i^2R=\frac{\varepsilon^2}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2=80\ J/S$$

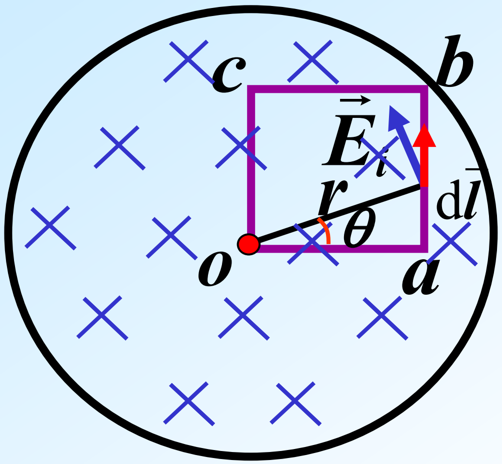
3. 根据电感器储存的能量$W_m=\frac{1}{2}Li^2$，则线圈每秒所储存的能量为

$$\frac{dW_m}{dt}=\frac{Lidi}{dt}=\frac{\varepsilon^2e^{-\frac{R}{L}t}}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=203\ J/s$$

4. 当开关合上1s时，线圈所储存的能量为

$$W_m=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}L\frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2=120\ J$$

轴对称磁场均匀分布在半径为R的范围内，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，而且大于零



$$\boxed{\varepsilon_i=\int_{-}^{+}\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}}$$

$$\boxed{E_i=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

■ 回路各边的感应电动势

$$\left.\begin{aligned}\because oa\perp\vec{E}_i\\ oc\perp\vec{E}_i\end{aligned}\right\}\quad\therefore\varepsilon_{oa}=\varepsilon_{oc}=0$$

$$\varepsilon_{ab}=\int_a^b\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b E\cos\theta\mathrm{d}l=\int_a^b\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos\theta\mathrm{d}l$$

$$=\int_a^b\frac{l}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l=\frac{l}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}l\Big|_a^b=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}l^2$$

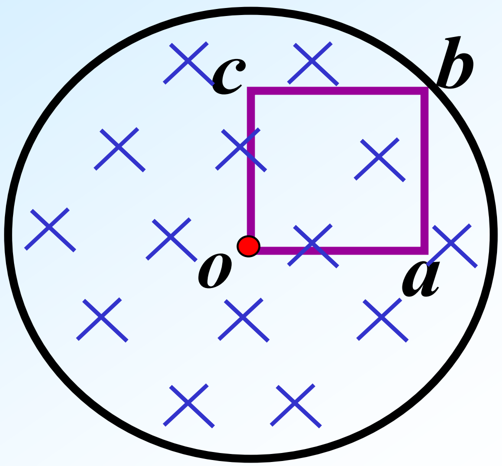
同理： $\varepsilon_{bc}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}l^2$

■ $\varepsilon_{i总}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}=l^2\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$，

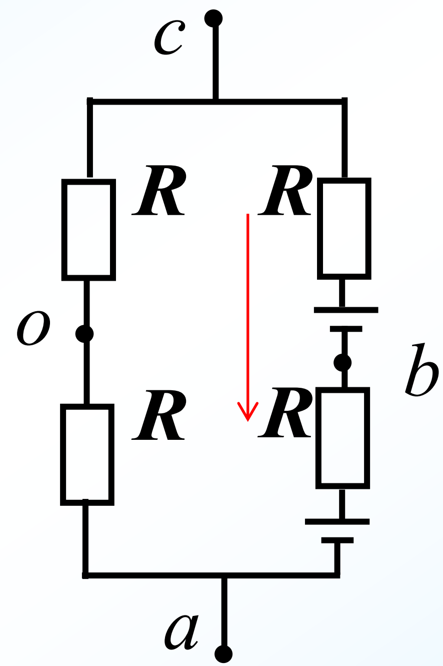
或$\varepsilon_{i总}=-\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{B}\cdot\vec{s})=s\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=l^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

轴对称磁场均匀分布在半径为R的范围内，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，而且大于零

$$\boxed{\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{bc}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}l^2}$$



等效电路



$\because \varepsilon_{oa}=\varepsilon_{oc}=0,$

$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{bc}$会使正电荷在$c$点聚集,而$a$点有负电荷积累.

$\therefore V_c > V_a$

考虑从a到c的电势变化：

$$V_a+|\varepsilon_{ab}|-iR+|\varepsilon_{bc}|-iR=V_c$$

$$V_a-V_c=2iR-2|\varepsilon_{ab}| \qquad i=\frac{2|\varepsilon_{ab}|}{4R}$$

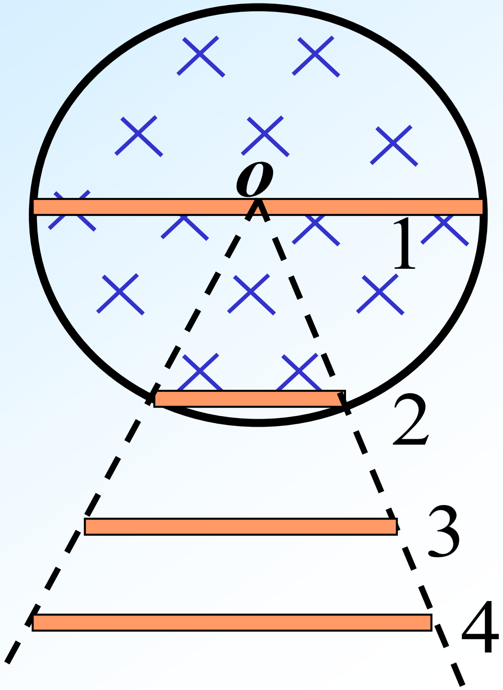
$$V_a-V_c=|\varepsilon_{ab}|-2|\varepsilon_{ab}|=-|\varepsilon_{ab}| \ <0$$

$$\therefore V_c > V_a$$

c点的电势比a点高

■ 直接用楞次定律判断

轴对称磁场均匀分布在半径为R的范围内，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，而且大于零



1）比较各棒中的ε_i。

2）3，4连成通路I_i=?

3）棒中哪端电势高?

1）$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 = 0$

2）I_i=0

3）$V_{右} > V_{左}$

讨论：

$\vec{E}_i$是涡旋场——**非保守场**，不能引入**势函数**。

使其场中的导体产生电动势： $\varepsilon_i = \int \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

①导体不闭合：→使导体内电荷重新分布→产生E_e

则导体内的总电场： $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_e$

静电平衡时： $\vec{E} = 0 \quad \therefore \vec{E}_e = -\vec{E}_i$

由于$\vec{E}_e$的存在，所以有对应$\vec{E}_e$的**电势**问题。

→导体的两端有**电势差**

在导体内：$\int_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L \left(\vec{E}_i + \vec{E}_e\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ **静电平衡**

即： $\int_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_L \vec{E}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon + (-V) = 0 \quad \therefore V = \varepsilon$

V为导体两端的电势差，即**开路**时电源的端电压。

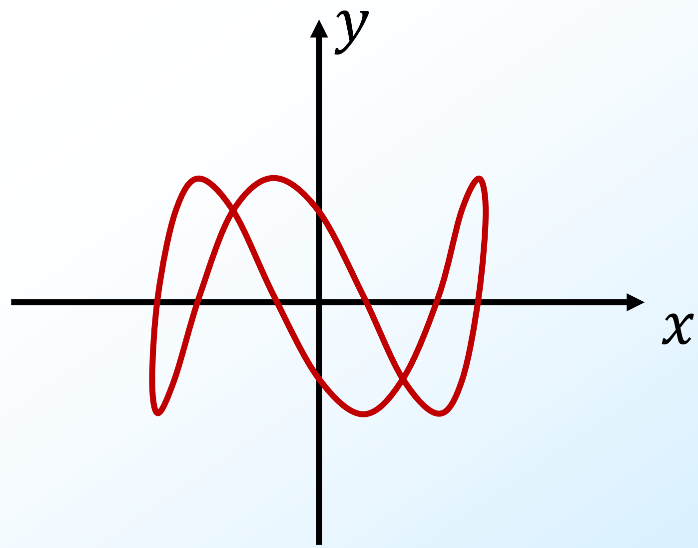
②导体闭合时： 若闭合导体恰好是以对称轴为心的圆环导体， 则导体内因无电荷堆积→无E_e→无电势。

其它闭合导体内因有电荷堆积→有E_e→有电势。

回顾：利萨如图

如左图所示利萨如图中，水平方向（x方向）振动频率（ω_1）与垂直方向（y方向）振动频率（ ω_2 ）的关系为 （ $\omega_1 : \omega_2 = 1:3$ ）

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{x\text{振动回归的次数}(y=0)}{y\text{振动回归的次数}(x=0)}$$



从振动到波动：对波动的认识

任何物理量随时间的周期性变化都可被称为振动。

力学量（如位移）——机械振动

电磁量（如I，$\vec{V}$，$\vec{E}$，$\vec{B}$）——电磁振动

振动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

（振动方向，振动幅度、振动频率、初始相位）

问题：什么是波动?

从振动到波动：对波动的认识

问题：什么是波动？

机械振动	→	机械波
电磁振动	→	电磁波
时空弯曲	→	引力波

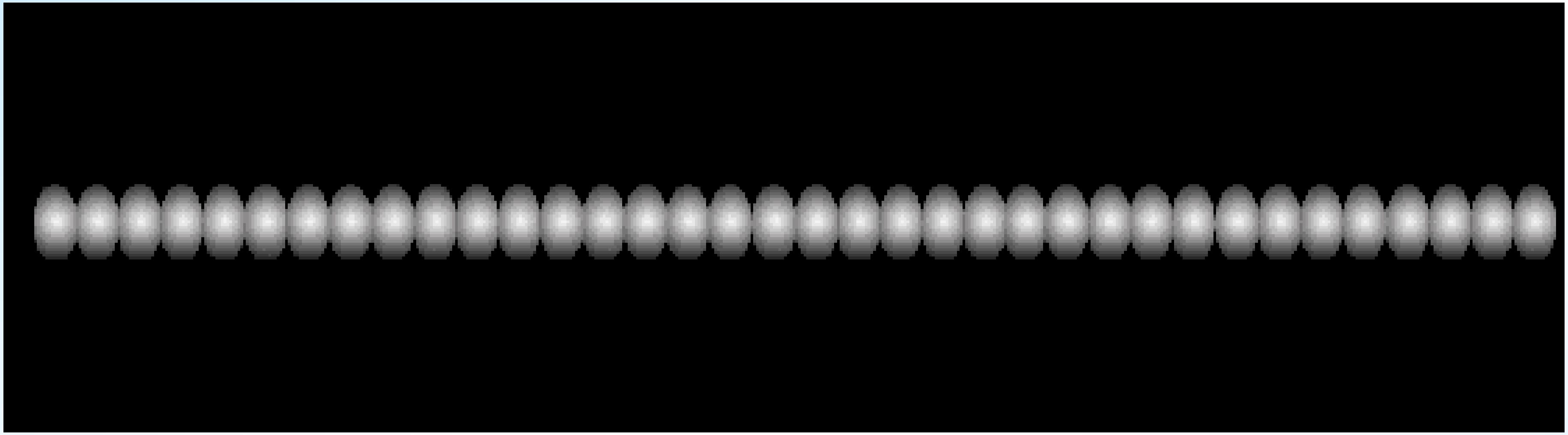
2017年8月17日，人类首次探测到双中子星并合事件（产生的引力波）！

1.7秒之后，美国宇航局费米空间望远镜探测到此双中子星并合所产生的伽玛暴（GRB170817A）！

智利的Swope超新星巡天（SSS）望远镜首先在星系NGC4993中观测到了明亮的光学源

中国南极光学巡天望远镜（AST3）

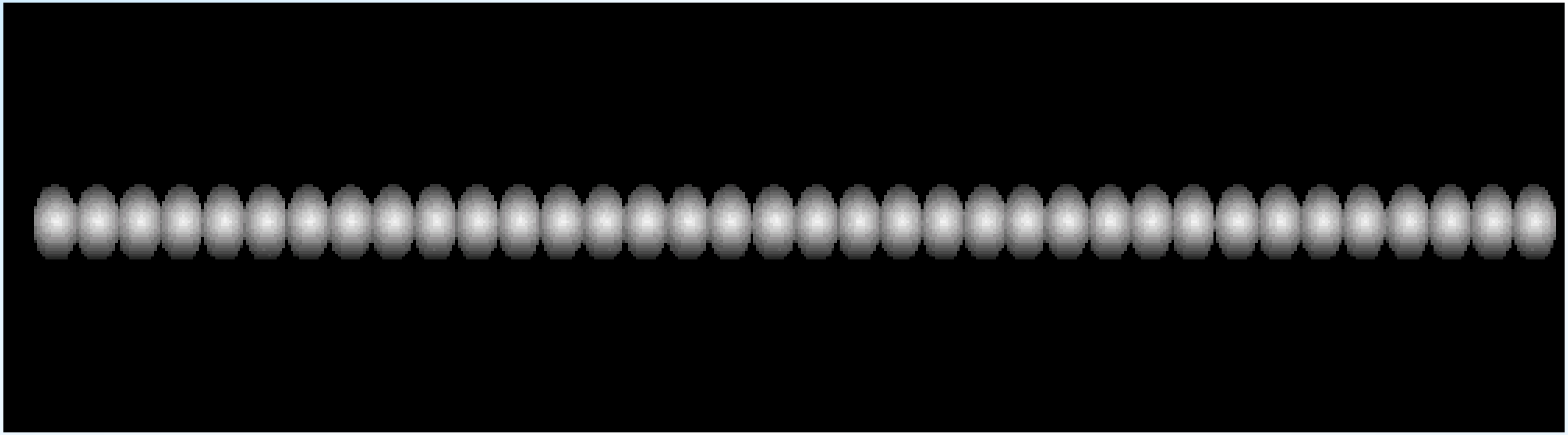
第五节 机械波



——从单一质点到连续介质

在弹性介质中，一个质元的振动会引起近邻质元的振动，而近邻质元的振动又会引起较远质元的振动，这样就会形成振动由近至远的传播。这种传播就是**机械波**。

第五节 机械波



机械波产生的条件：

1）. 波源 ---产生振动的物体；

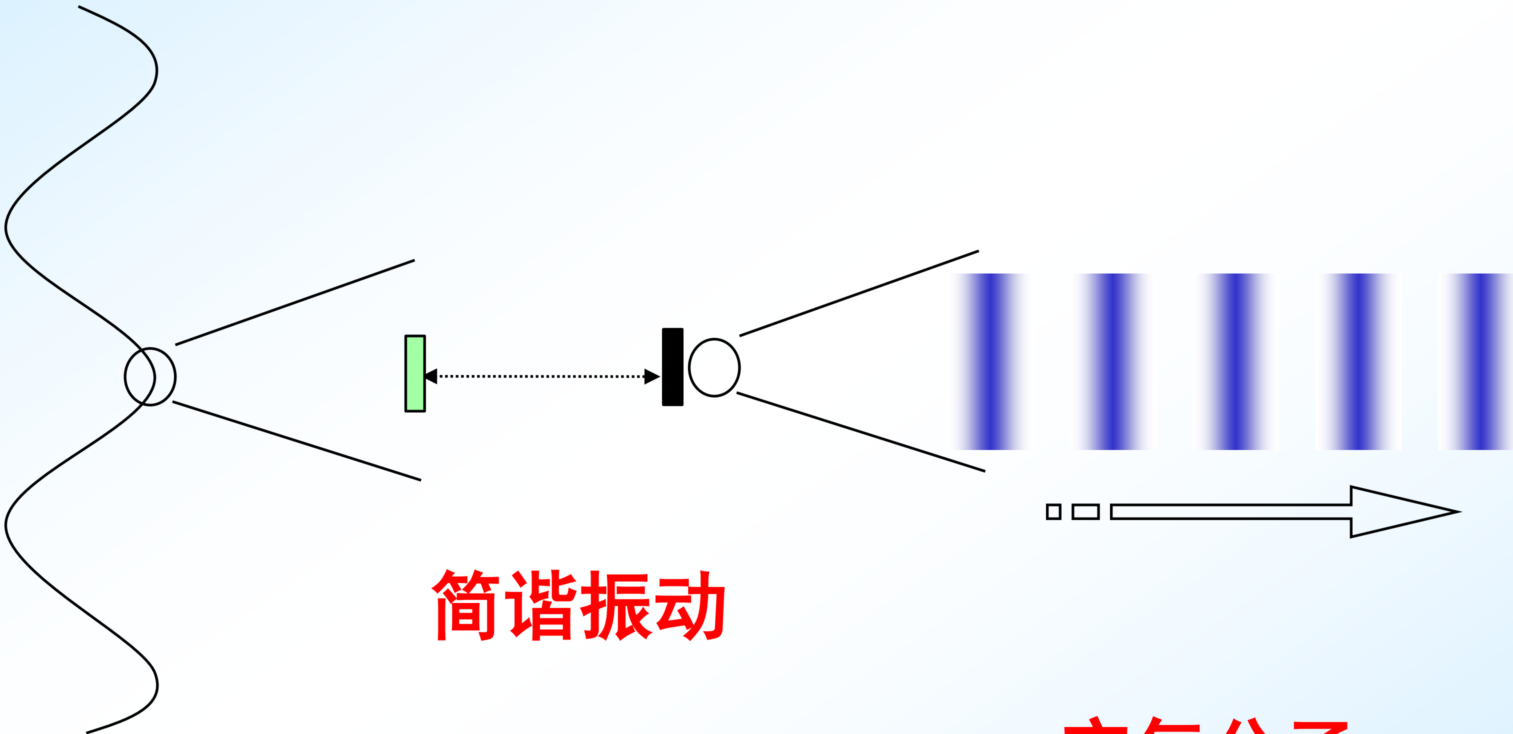
2）. 弹性媒质 ---传播振动的介质。

仅对机械波成立

振动是波动的基础，波动是振动的传播

一 从振动到波动

振动的琴弦

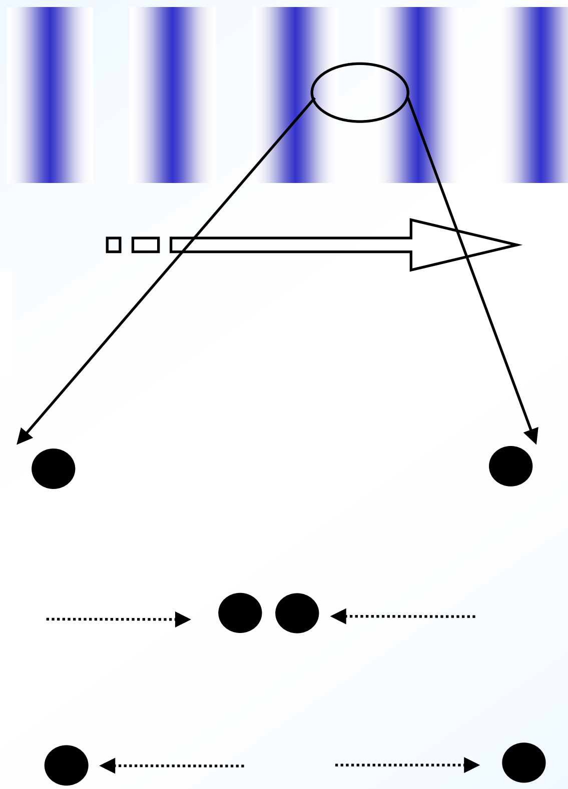


简谐振动

空气分子

一 从振动到波动

考虑空气分子的运动



时间 0

时间 1

时间 2

空气分子做周期性的振动，方向与声波的传播方向一致

一 从振动到波动

① 从一个质点的振动到多个质点的振动

② 不同质点之间的振动状态的关系：传播

位 移：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ —— 振动方程

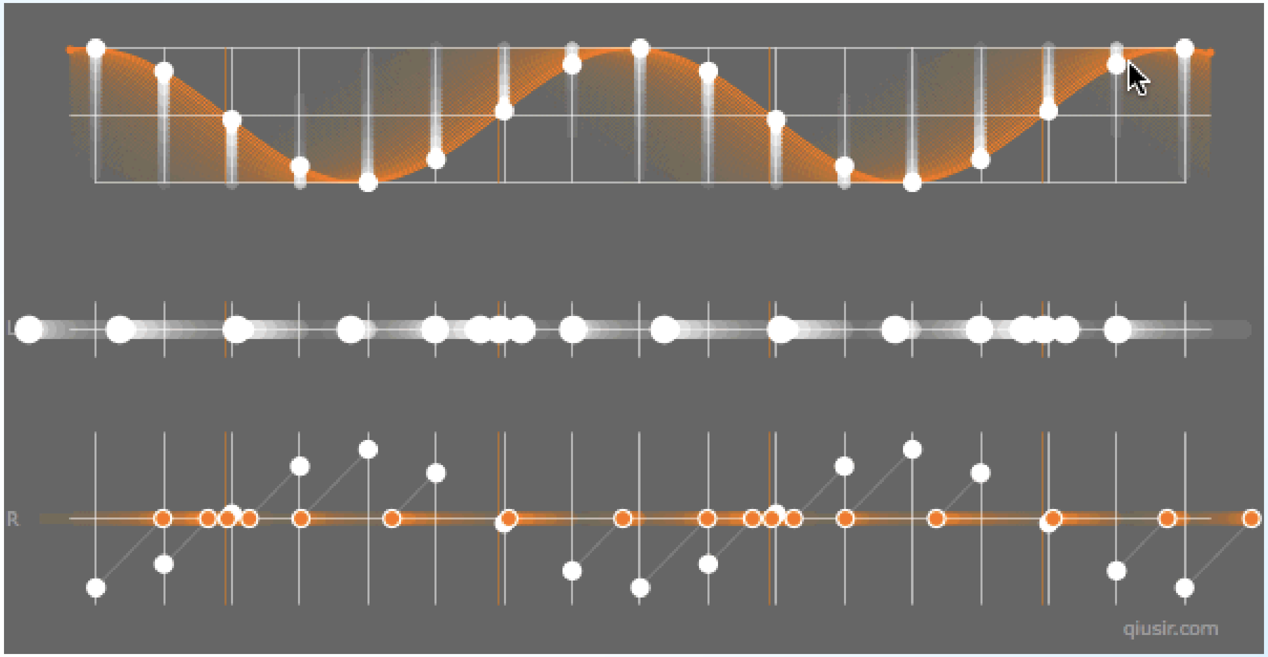
周期性变化的物理量

不同的空间位置的物理量随时间的周期性变化及相互关系

一 从振动到波动

波的分类 按振动方向与传播方向分类，波可以分为：

- **横波**：传播方向与振动方向垂直 **电磁波**
- **纵波**：传播方向与振动方向平行 **声波**
- **混合波**：同时包含横波和纵波 **水波、地震波**



质点只在平衡位置附近振动，传播的是波源的振动状态

一 从振动到波动

波的分类 按性质分类，波可以分为：

- **机械波**：机械振动在弹性介质种的传播过程
- **电磁波**：电磁场周期性变化在空间的传播
- **引力波**：时空形变，以光速在空间传播
- **物质波**：量子力学

各种类型的波有其特殊性，但也有普遍的共性。

—— 传播的是“运动”状态

一 从振动到波动

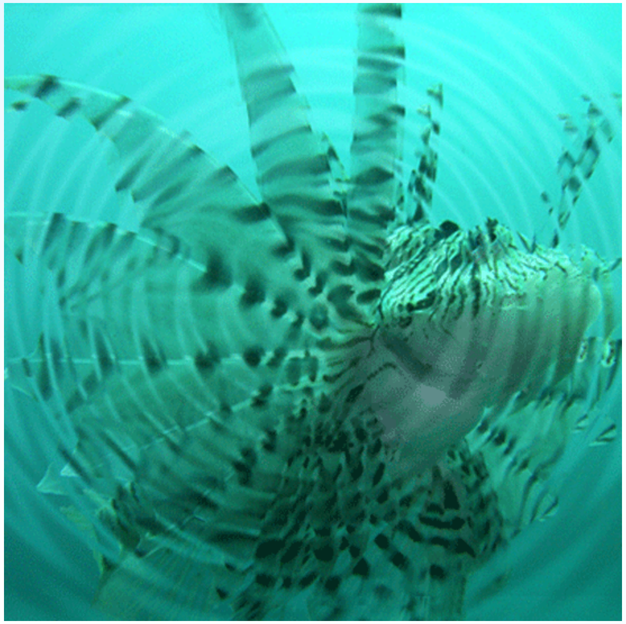
在介质中传播的是什么？

是物质微元的运动状态，而不是物质本身。

例：“随波逐流” 波和流动是有区别的。

随波：振动状态

逐流：水的运动



一 从振动到波动

波动的特点

1). 每个质点只能在平衡位置附近振动，不向前运动；

2). 后面质点重复前面质点的运动状态，有相位落后。

相位的超前与落后是绝对的而不是相对的。

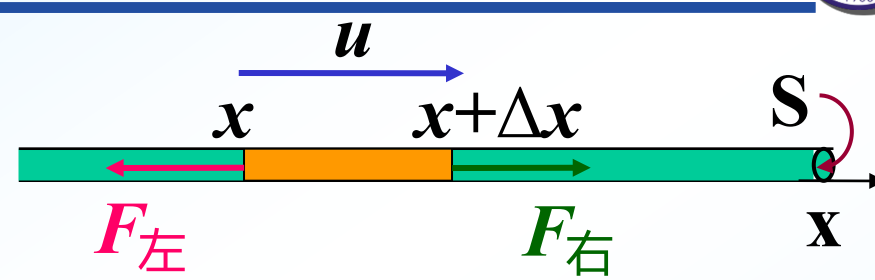
振动与波动

区别：
- 振动研究一个质点的运动；
- 波动研究大量有联系的质点振动的集体表现。

联系：振动是波动的根源，波动是振动的传播。

产生波动的物理机制：一维纵波的动力学方程

弹性细棒传播的纵波：



取棒中一小段原长为 Δx

设y表示各处质点相对平衡位置的位移

在左端 x 处，应变为 $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

在左端 $x+\Delta x$ 处，应变为 $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

设棒的截面积为S

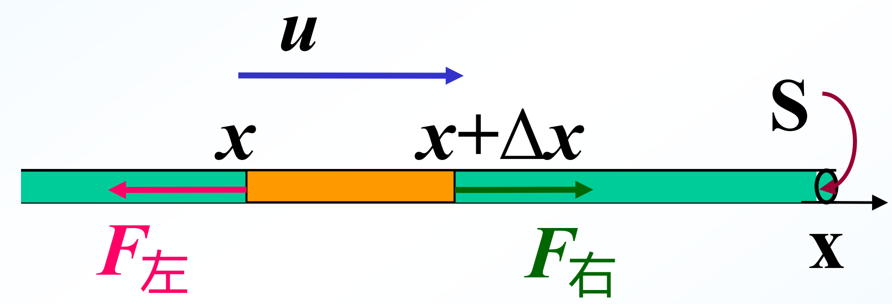
胡克定理：

左端受到左边材料的拉力为 $F_{左} = SY\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

右端受到右边材料的拉力为 $F_{右} = SY\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

产生波动的物理机制：一维纵波的动力学方程

弹性细棒传播的纵波：



取棒中一小段原长为 Δx

胡克定理：

左端受到左边材料的拉力为 $$F_{左}=SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}$$

右端受到右边材料的拉力为 $$F_{右}=SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

长Δx的棒受合外力为：

$$F_{合}=SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}=SY\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right]\frac{\partial x}{\partial x}$$

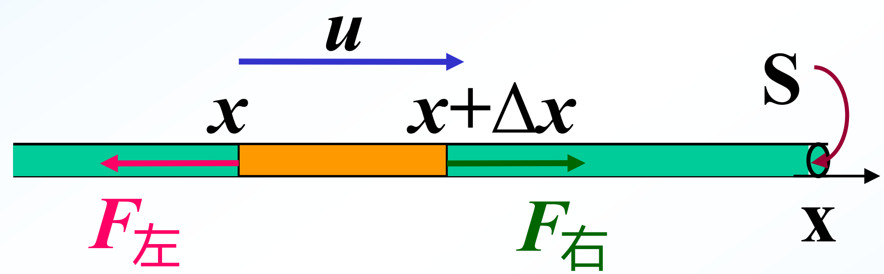
$$=SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x$$

$$\boxed{SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x}$$

产生波动的物理机制：一维纵波的动力学方程

棒的质量密度为 ρ，质量为

$$\Delta m = \rho s \Delta x$$



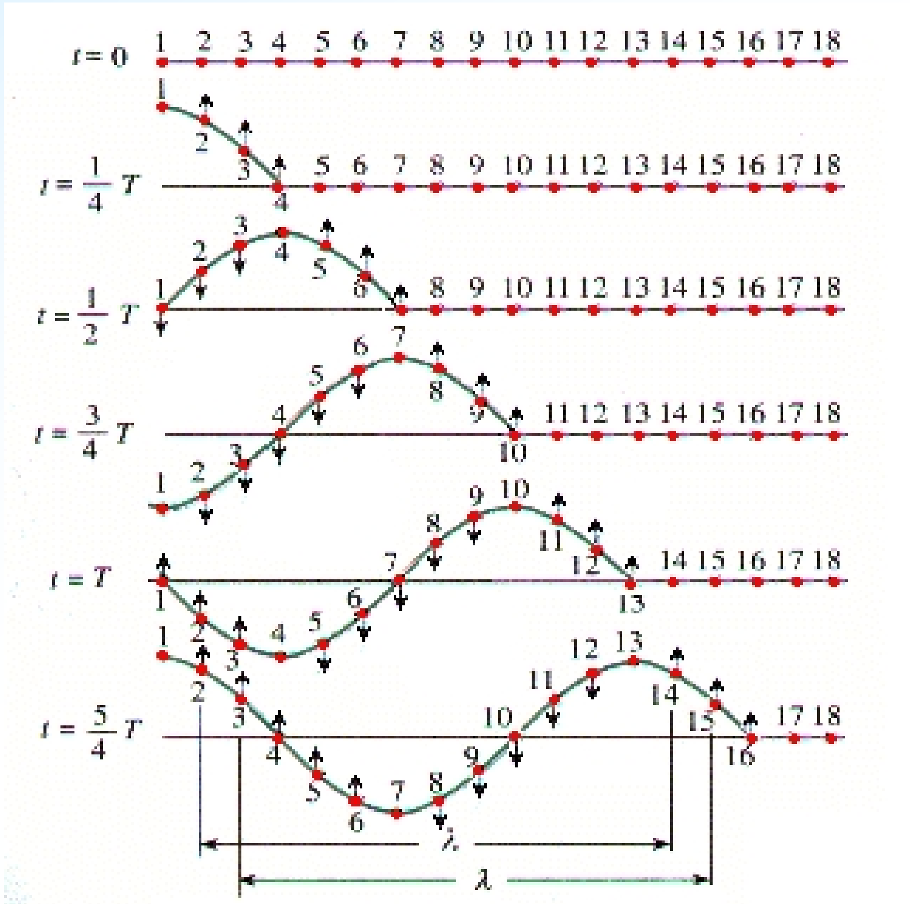
根据牛顿定律 $F = ma$ $\quad a = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$$\boxed{SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \rho S\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

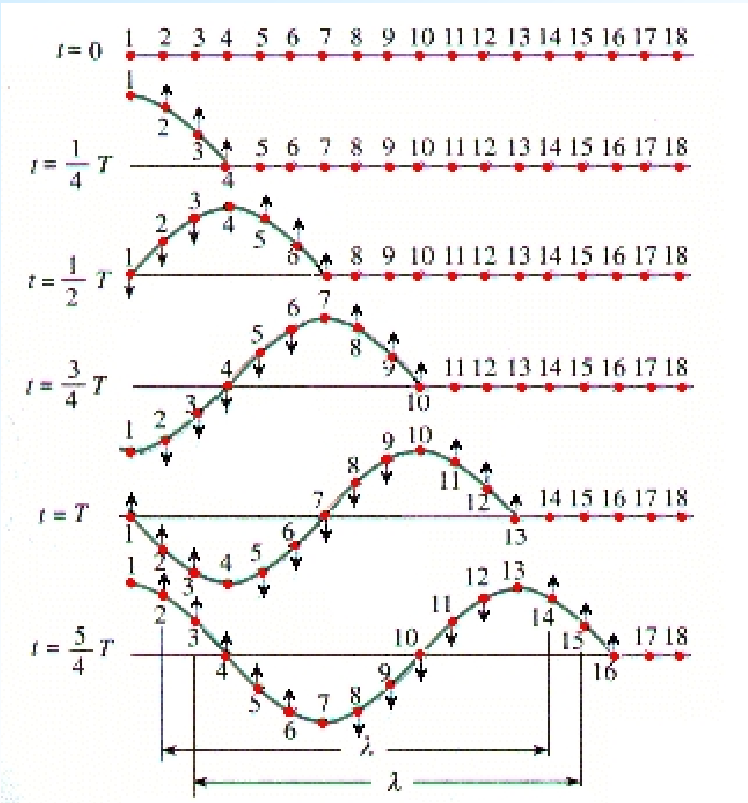
一维简谐波的动力学方程 $\quad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

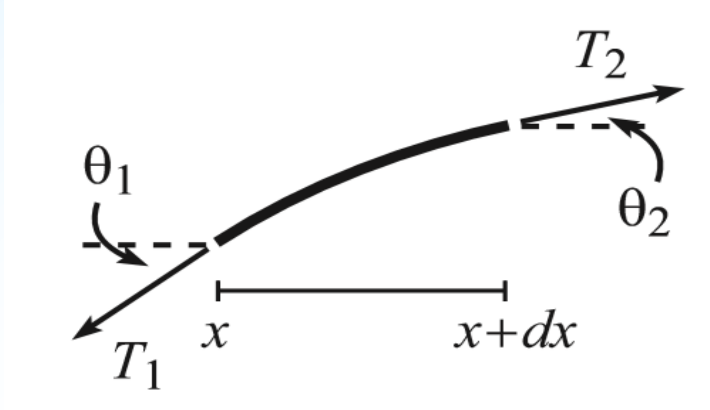
其中：$u^2 = \dfrac{Y}{\rho}$

产生波动的物理机制：横波的动力学方程（*）



产生波动的物理机制：横波的动力学方程（*）





从 $x \to x + dx$ 的质元

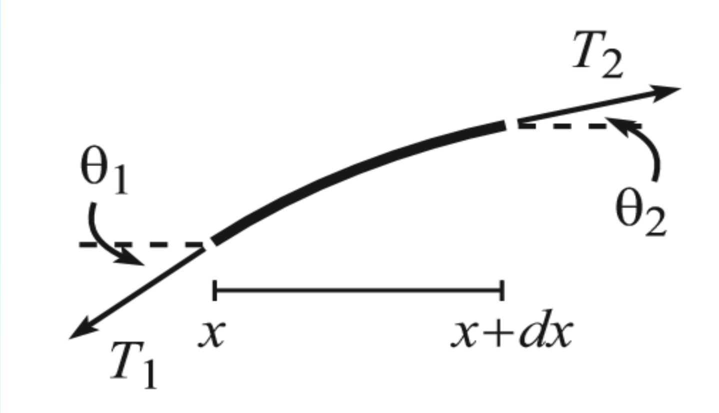
横向（垂直x方向）受力分析：

上端质元拉力：$T_2 tg\theta_2$

下端质元拉力：$-T_1 tg\theta_1$

横向合力：$\mathrm{F} = T_2 tan\theta_2 - T_1 tan\theta_1$

产生波动的物理机制：横波的动力学方程（*）



横向合力： $F = T_2 tan\theta_2 - T_1 tan\theta_1$

（1）**绳子张力：** $T_2 = T_1$

（2）**近似（角度较小）：**

$$tan\,\theta_2 \approx sin\,\theta_2 = \frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{x+dx}$$

$$tan\,\theta_1 \approx sin\,\theta_1 = \frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{x}$$

横向合力： $F = T\left(\frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{x}\right) = \frac{Tdx\partial^2 s}{\partial x^2}$

产生波动的物理机制：横波的动力学方程（*）

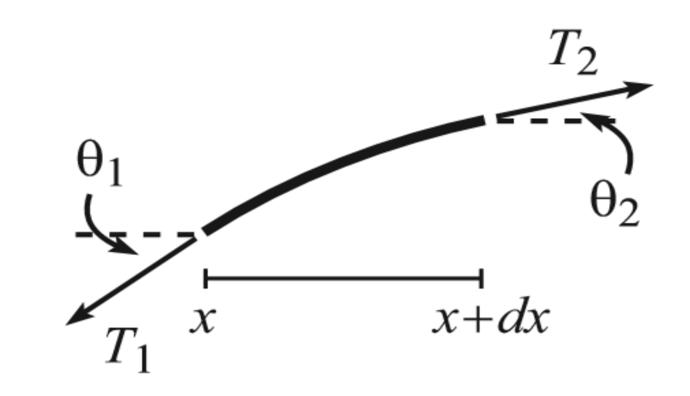
一维简谐波的动力学方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

其中：

$$\boxed{u^2 = \frac{T}{\rho}}$$

$$\boxed{\frac{d^2 s(x)}{dt^2} + \omega^2 s(x) = 0}$$



从 $x \to x + dx$ 的质元

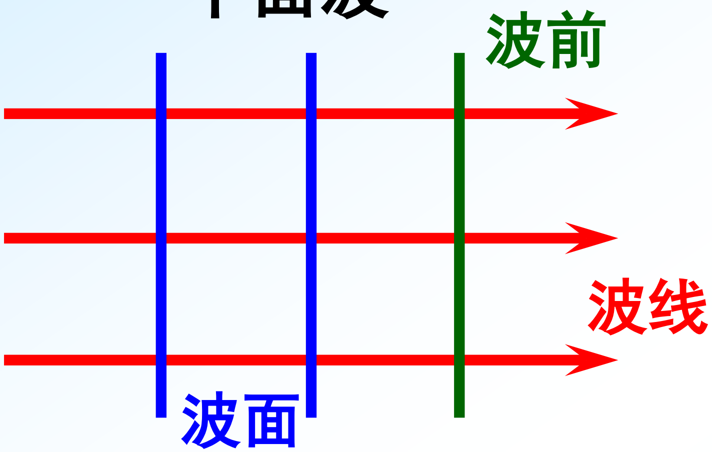
横向合力：$\mathbf{F} = T\left(\frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{x}\right) = \frac{T dx \partial^2 s}{\partial x^2} = \rho dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$

动力学方程 $$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

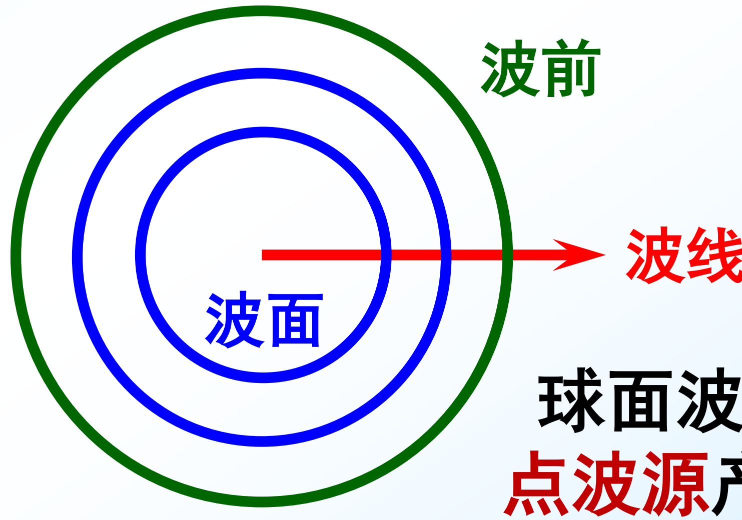
二 波动的描述

1). **波阵面(波面)**：振动相位相同的点所组成的面。

平面波



球面波



球面波由**点波源**产生

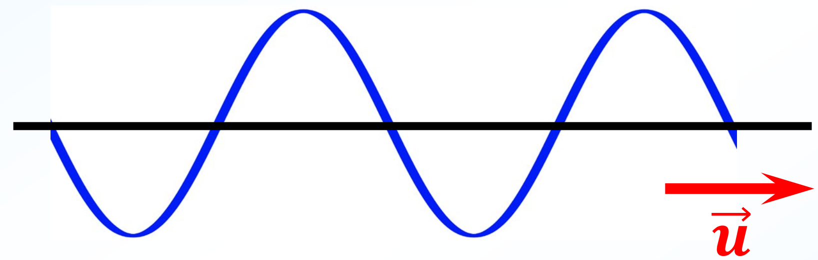
2). **波前**：传播在最前面的波面。

3). **波线**：发自波源，与波面垂直指向波的传播方向的射线。

二 波动的描述

描述波动的基本物理量

1). 波速$\vec{u}$：振动状态(**相位**)在媒质中的传播速度。



机械振动的传播源于介质形变产生的弹性力

机械波的波速取决于介质的**弹性**和**惯性**，与频率无关。

固体 $\begin{cases} \text{横波：} & u = \sqrt{G/\rho} \\ \text{纵波：} & u = \sqrt{Y/\rho} \end{cases}$

$\boldsymbol{G}$：切变弹性模量

$\boldsymbol{Y}$：杨氏弹性模量

气体中只有纵波：$u = \sqrt{B/\rho}$

$\boldsymbol{B}$：体变弹性模量

二 波动的描述

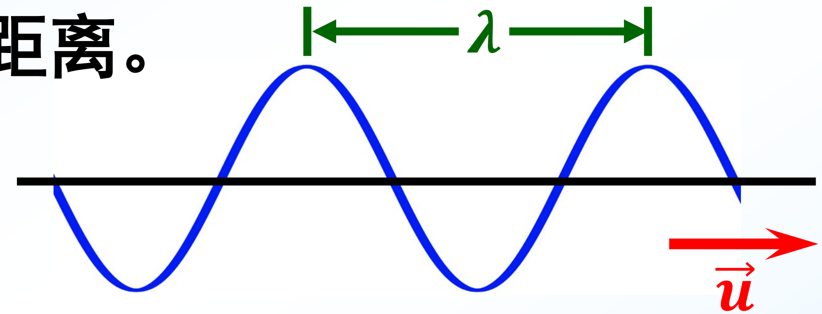
例子：声波

介质	波速 (m/s)
Air	343
Helium	972
Water	1500
Steel (solid)	5600

思考：波速=振动速度？

二 波动的描述

2). 波长λ：在波的传播方向上，两相邻的相位差为2π的质点间的距离。



3). 周期T：振动相位每增加2π所需要的时间。

$$T_{振动}=T_{波动} \qquad T=\lambda/u$$

4). 频率ν：周期的倒数。 $\nu=\dfrac{1}{T}=\dfrac{u}{\lambda}$

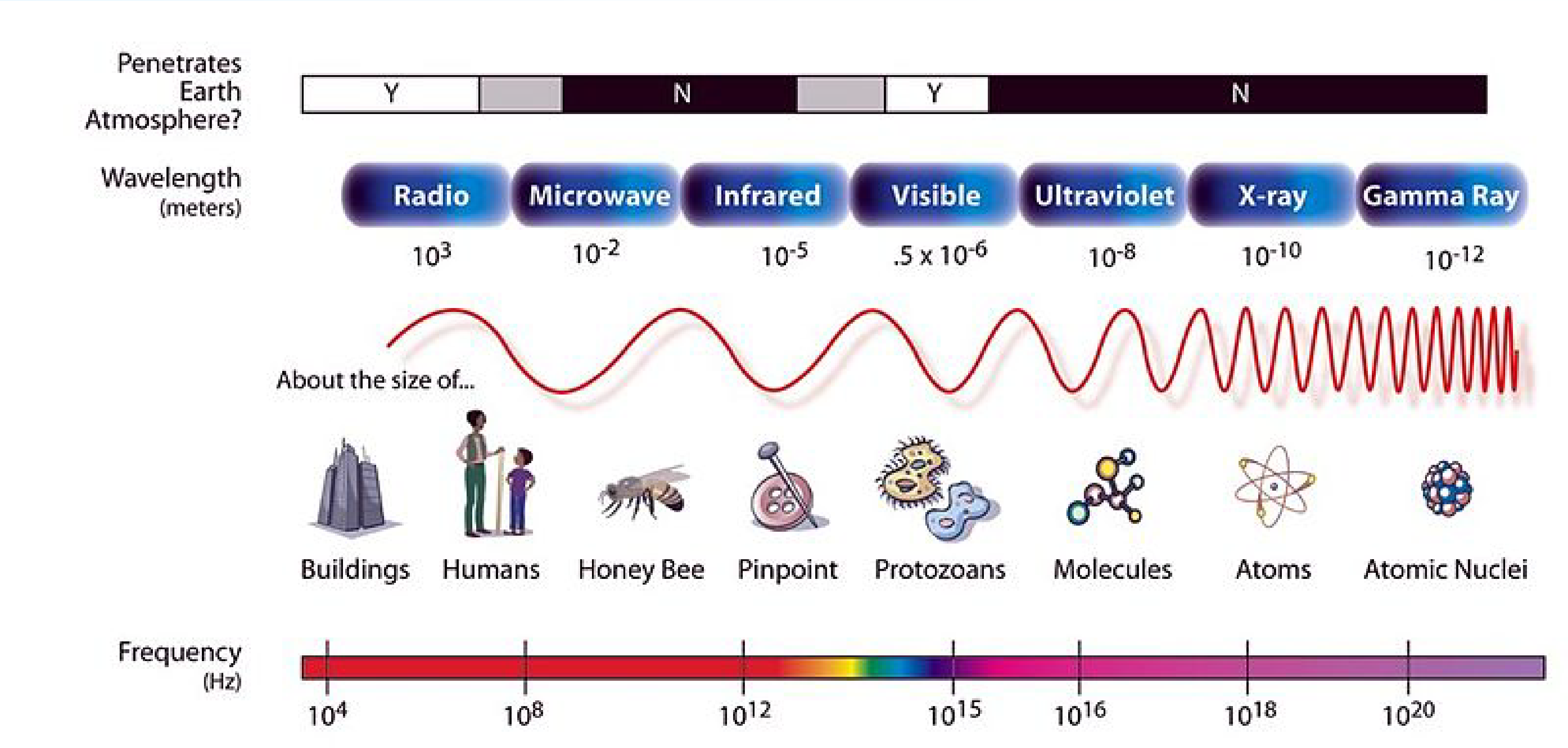
频率的物理意义：单位时间内，波前进的距离中包含的完整波长的数目。

5). 波数k：在波的传播方向上2π的距离内包含的波长的数目。

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

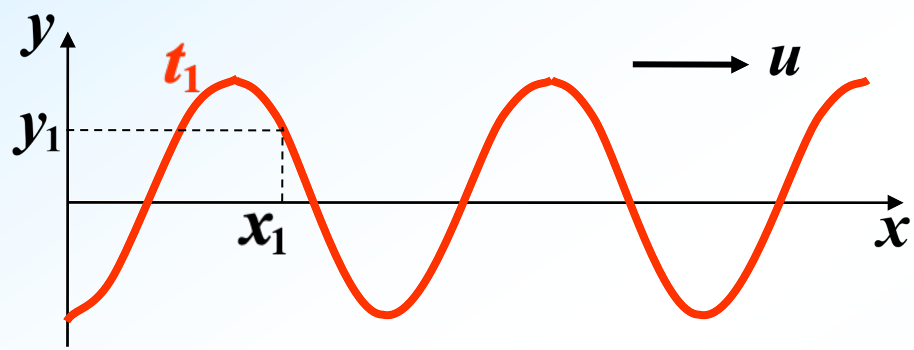
二 波动的描述

周期（角频率/频率）、波速、波长（波数）

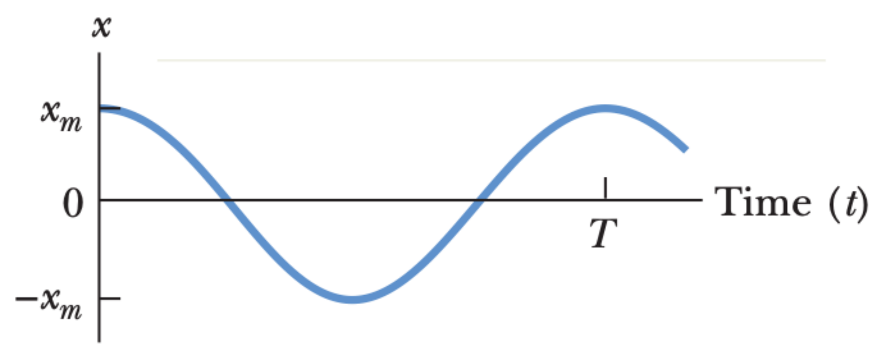


二 波动的描述

波形曲线：某个时刻各个质点位移状况的曲线



振动曲线：某一个质点在不同时刻的位移状况的曲线



问题：如何用数学方法去描述波的传播？

作业： Chap.11 —T13、T14、T15、T16

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 通过学习通提交作业。
4. 作业缺交三分之一及以上者按规定不能参加考试。