2.3　可逆矩阵（Matrix Inverses）

概　述

建立矩阵可逆和逆矩阵的概念

讨论矩阵的逆矩阵存在的条件

给出求逆矩阵的一个方法

一、矩阵求逆问题的背景

对数的方程 $\boldsymbol{ax=c}$，数$\boldsymbol{a \neq 0}$时，$\boldsymbol{aa^{-1} = a^{-1}a = 1}$,

因此有 $$a^{-1}ax = a^{-1}c \Rightarrow x = a^{-1}c = \frac{c}{a}$$

对线性方程组的矩阵形式 $\boldsymbol{AX=b}$，希望能求得矩阵$\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB = BA = I}$.

从而类似于数的方程，有 $\boldsymbol{BAX = Bb \Rightarrow X=Bb}$

这样的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就将被定义为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

这时，矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$必须为方阵！

二、逆矩阵的概念和性质

定义2.8 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使得 $AB = BA = I$，则说矩阵A是**可逆**的，并把矩阵B称为A的**逆矩阵**.

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$，验证$B$是$A$的逆矩阵.

$\because AB = BA = I$，$\therefore B$是A的一个逆矩阵.

例2 设A为(2×2)的矩阵，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

证明矩阵A没有逆矩阵.

$A \neq 0$，推不出A是可逆矩阵！

例3

若A 是可逆矩阵，证明：A 的逆矩阵是惟一的.

证明要点：

- 设B和C都是矩阵A的逆矩阵，证明：$B = C$。

问题的意义：

- A 的逆矩阵是惟一的，记为 A^{-1}
- 以任何方式求得的逆矩阵无差异

- 例4

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\\2&-1\end{bmatrix},\ AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

讨论矩阵***B***是否为矩阵***A***的逆矩阵.

例5：设矩阵***A***可逆，讨论用矩阵***A***的逆求解线性方程组 $A_{n\times n}X_{n\times 1}=b_{n\times 1}$.

$$X=A^{-1}b$$

二、逆矩阵存在的充要条件与求法

- 矩阵A可逆，则 $|A| \neq 0$.
- 设$|A| \neq 0$，矩阵A的逆的存在性与结构分析：
  - 矩阵A的伴随矩阵A^*的定义

定义2.9

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

  - 矩阵的伴随矩阵A^*的基本性质

$$A\;\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=|A|$$

$$a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\cdots+a_{nn}A_{nn}=|A|$$

$$=\begin{pmatrix} |A| & & & \boldsymbol{O} \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & |A| \end{pmatrix},$$

定理2.2 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$

其中A^*为矩阵A的伴随矩阵.

证明

必要性： 若 A 可逆， 即有A^{-1}使$AA^{-1} = I$.

故$|A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$，所以$|A| \neq 0$.

充分性： 当$|A| \neq 0$时，$AA^* = A^*A = |A|I$

$$A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

推论：对n阶方阵A，如果存在n阶方阵B，使得$AB = I$ 或 $BA = I$，则矩阵B为矩阵A的逆矩阵。

证明 $AB = I \Rightarrow |A|\cdot|B| = |I| = 1$，故$|A| \neq 0$，

因而A^{-1}存在，　于是

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$$ 证毕

推论与例题4结论的差别？

推论的应用意义？

- 如果$AB = I$，则同时证明了矩阵A是可逆矩阵，而且B是的逆矩阵.
- 今后用于求逆矩阵，特别是求抽象矩阵的逆.

- 例5 证明矩阵**A**是可逆的，求矩阵***A***的逆矩阵.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

二阶可逆矩阵逆的一般公式：

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

例6 （p41eg11）证明矩阵***A***是可逆的，求矩阵***A***的逆矩阵.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

四、可逆矩阵逆的性质 p.44

- 讨论矩阵的求逆和其他运算的关系：
- 设矩阵A、B是n阶可逆矩阵，则

1. A^{-1} 是可逆的，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB 是可逆的， $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. 对任何非零的数 k, 矩阵 kA是可逆的，且
$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}.$$
4. $$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

推广 $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

三、逆矩阵的求法

例1　下列矩阵A, B是否可逆?若可逆,求出其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 5\\ 1 & 5 & -11\end{pmatrix}.$$

解

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=4\neq 0,$$ 所以A可逆.

$$\because \quad A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-3, \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5,$$

同理可求得 $A_{21}=3, A_{22}=0, A_{23}=-1, A_{31}=1,$

$$A_{32}=4, A_{33}=-3.$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

由于$|B|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -11 \end{vmatrix}=0,$ 故B不可逆.

例2 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}.

解 因 $|A|=5!\neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 由伴随矩阵法得

$$A^{-1}=A^*/|A|=\frac{1}{5!}\begin{pmatrix}2\cdot3\cdot4\cdot5&0&0&0&0\\0&1\cdot3\cdot4\cdot5&0&0&0\\0&0&1\cdot2\cdot4\cdot5&0&0\\0&0&0&1\cdot2\cdot3\cdot5&0\\0&0&0&0&1\cdot2\cdot3\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1/2&0&0&0\\0&0&1/3&0&0\\0&0&0&1/4&0\\0&0&0&0&1/5\end{pmatrix}.$$

对角矩阵的乘法性质？

例3 设$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

（1）证明A的伴随矩阵 A^* 可逆。

（2）求 $\left(3A^*\right)^{-1}$

$$|A| = 3! = 6 \neq 0$$

$$AA^* = |A|I \Rightarrow (A^*)^{-1} = A/|A|$$

$$(3A^*)^{-1} = \frac{1}{3}(A^*)^{-1} = \frac{1}{3|A|}A$$

例4 设方阵 A 满足方程：$A^2 - A - 2I = 0$, 证明：矩阵 A 和 $A+2I$ 都可逆, 求它们的逆矩阵.

证明 由$A^2 - A - 2\mathrm{I} = 0$,

得$A(A-\mathrm{I}) = 2\mathrm{I} \quad \Rightarrow A\dfrac{A-\mathrm{I}}{2} = I$

A^{-1}

故A可逆，$A^{-1} = \dfrac{A-I}{2}$.

因A可逆，故A^2可逆，于是$A+2I = A^2$可逆。

另解： $(A+2I)^{-1} = -\dfrac{1}{4}(A-3I) = (A^2)^{-1} = A^{-2}$.

$A^2 - A - 2I = 0 \Rightarrow (A-3I)(A+2I) = A^2 - A - 6I = -4I$,

推知 $A+2I$ 可逆。

例5 设三阶矩阵A,B满足关系：

$$A^{-1}BA=6A+BA,\text{且}A=\begin{pmatrix}1/2 & & O\\ & 1/4 & \\ O & & 1/7\end{pmatrix}\text{求}B.$$

解 $A^{-1}BA-BA=6A$

$$\Rightarrow\left(A^{-1}-\mathrm{I}\right)BA=6A \quad \Rightarrow\left(A^{-1}-\mathrm{I}\right)B=6\mathrm{I}$$

$$\Rightarrow B=6\left(A^{-1}-\mathrm{I}\right)^{-1}.$$

$$=6\begin{pmatrix}2-1 & & \\ & 4-1 & \\ & & 7-1\end{pmatrix}^{-1}.$$

本节内容要点：

逆矩阵的概念及运算性质.

逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

逆矩阵的计算方法

(1) 利用公式 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$;

（2）初等变换法(后面介绍).

思考题

若A可逆,那么矩阵方程$AX=B$是否有唯一解$X=A^{-1}B$? 矩阵方程$YA=B$是否有唯一解$Y=BA^{-1}$?

思考题解答

答　是的. 这是由于A^{-1}的唯一性决定的.