第一章　函数

1. 区间与邻域：

左右邻域、空心邻域，**正、负无穷和无穷的邻域**

2. 常用不等式

(1) 三角不等式

$$\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$$

$$|b|-|a-b| \le |a| = |a-b+b| \le |a-b|+|b|$$

$$|a_1+a_1+\cdots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\cdots|a_n|$$

(2)贝努利(Bernoulli)不等式

$$(1+\alpha)^n \ge 1+n\alpha,\ \alpha > -1,\ n = 0,1,2,\ldots$$

(3)均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(4) 柯西不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_n b_n)^2 \le (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2$$

(5) **三角恒等式**: 和差化积、积化和差、倍角公式、万能公式

3. 函数

（1）基本初等函数（六类），初等函数

反三角函数的性质

（2）函数的特性：有界性、周期性、单调性

(3)　复合函数和**反函数**

重点：证明函数有界（无界），无界的定义（逻辑语言）

第二章 极限与连续

1 数列极限

1. 极限概念和定义

极限的 $\varepsilon - N$ 语言，几何解释（在极限任意小的邻域之外只有有限个点）

2. 极限性质

唯一性，有界性（无界数列必发散）、保不等式性

保号性（理解并熟练运用）：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ **则**

$\forall\, a' < a \Longrightarrow a_n > a',\ n \gg 1$　　　$\forall\, a' > a \Longrightarrow a_n < a',\ n \gg 1$

3. 判别：追敛性（夹逼准则）、单调有界定理（定义由递推关系给出）
4 子列的定义，子列敛散性与原数列敛散性之间的关系，会应用P29 定理7和例10

4. 计算：记住常见极限（如指数、对数、幂函数的增长关系），四则运算，
利用归结原则转化为函数极限，再用函数极限的洛必达法则、**Taylor 展开求极限**

2 函数极限

1. 熟练掌握六种函数极限的$\varepsilon-\delta$ 语言，能根据正面情形写出极限不存在的$\varepsilon-\delta$ 语言
2. 性质

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 描述的是局部(**x_0的空心邻域**)性质，与该点处函数具体值无关，与函数在该点是否有定义无关。

唯一性、**局部**有界性、**局部保号性（理解并熟练运用）**、保不等式性

3. 判别：迫敛性、连续性、单侧函数极限的单调有界定理

归结原则：$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall\, x_n\to x_0, x_n\neq x_0, \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

归结原则可判断函数的发散性

4. 计算： 四则运算、复合运算、利用函数的连续性、熟练掌握两个重要极限及其变形、**等价无穷小替换、洛必达法则、Taylor 公式求极限**

5 无穷小量和无穷大量: 基本定义与相互转化

（1）无穷小量阶的比较：有界量、等价无穷小、同阶无穷小、高阶无穷小、

(2)小O的含义以及基本性质：**无穷小量乘以有界量为无穷小量**等

6. 常见等价无穷小：

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \arcsin x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1,\ (x \to 0)$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax,\ (a \neq 0)\ (x \to 0) \qquad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2\ (x \to 0)$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a\,(a > 0, a \neq 1)$$

7 求无穷小（大）的主部和阶数：用常见等价无穷小关系代换，Taylor公式

3 连续性

1. 函数在一点连续、左（右）连续的定义，$\varepsilon-\delta$ 语言
2. 性质：局部有界性，局部保号性、复合函数的连续性、反函数的连续性、初等函数的连续性
3. 间断点的分类
4. **闭区间上连续函数的性质（重点），有界性、最值性、介值性（根的存在定理），**

注意必须是闭区间，有限开区间在端点处极限存在的情况下可补充定义推导类似结论

第三章 导数与微分

1. 导数和左（右）导数定义

（1）区分导函数的左（右）极限和函数的左（右）导数；一般情况下无法互推

（2）记熟求导公式

（3）熟练运用求导法则：复合函数求导、反函数求导、对数求导法

2. 高阶导数的计算：

（1）利用简单函数的高阶导数公式

(2) $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

(3)找规律逐项递推

3、**隐函数求导法则**

4、**参数方程的导数**

会求参数方程的一阶导数、会利用参数方程一阶导数满足的参数方程继续求二阶导数及其高阶导数

5 导数应用 **相关变化率问题**

2. 微分

（1）一阶微分的定义

对于 $y = f(x)$, 有 $dy = f'(x)dx$ 和 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

（2）微分与导数的区别和联系

一元函数可导与可微等价，可导必定连续

（3）一阶微分具有形式不变性（复合函数微分的链式法则）

（4）微分的应用： 近似计算，估计误差

第四章 微分中值定理

1、 微分中值定理

遇到中值问题分四种情形，做法不是绝对，可能需要结合使用

（1）只知道函数连续，考虑用介值性

（2）函数一阶可导且出现一阶导数的中值，考虑费马定理和Rolle、Lagrange、Cauchy中值定理

（3）函数高阶可导且出现高阶导数的中值：考虑Rolle、Lagrange、Cauchy中值定理的多次应用

注意验证定理成立的条件！！！

4. 洛必达法则：

（1）两种情形 $\frac{0}{0}$，$\frac{*}{\infty}$ 其他情形通过变形（通分、取对数等）转化成前面两种

验证定理成立的条件！！！

条件和结论不能倒置：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

反之不对！！！例如 $f(x)=\sin x,\ g(x)=x$

虽然 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，但是 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在