第 2 章　矩　阵 (Matrix Theory)

- 内容
  - 矩阵的概念
  - 矩阵的运算：矩阵代数
  - 可逆矩阵
  - 分块矩阵与运算
  - 矩阵的初等变换与初等矩阵
  - 矩阵秩的概念
- 重点：矩阵的运算及其性质
- 难点：矩阵的乘法，矩阵秩的概念

一、矩阵概念的引入

例题

设一个线性线性方程组的系数和常数项是$a_{11}=2$, $a_{12}=-1$, $a_{13}=-3$, $a_{21}=-2$, $a_{22}=2$, *and* $a_{23}=5$, **and with constants** $b_1=-1$, **and** $b_2=3$. 请写出该线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-1x_2-3x_3=-1 \\ -2x_1+2x_2+5x_3=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y_1-1y_2-3y_3=-1 \\ -2y_1+2y_2+5y_3=3 \end{cases}$$

?

一个线性方程组是由什么来确定的？

一、矩阵概念的引入

1. 线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的解取决于

系数 $a_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m\,;\,j=1,2,\cdots,n\right)$,

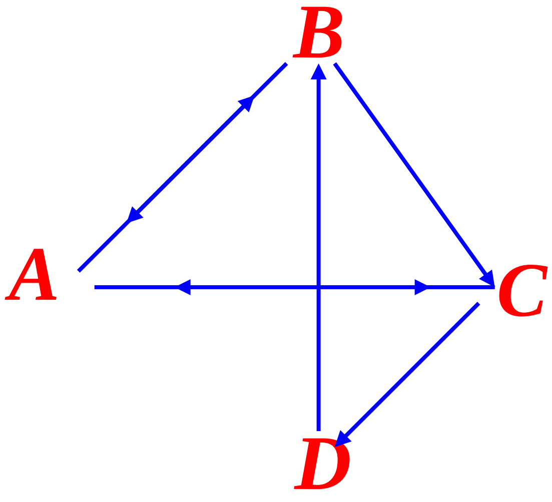
常数项 $b_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$.

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A, B, C, D四城市之间开辟了若干航线, 如图所示表示了四城市间的航班图, 如果从A到B有航班, 则用带箭头的线连接 A与B.



四城市间的航班图情况常用表格来表示:

发站 \ 到站	A	B	C	D
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

其中✓表示有航班.

为了便于计算, 把表中的✓改成1,空白地方填上0, 就得到一个数表:

	A	*B*	*C*	*D*
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**

这个数表反映了四城市间交通联接情况.

二、矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}
$$

称为 $m\times n$ 矩阵. 简称 $m\times n$ 矩阵. 记作

m=n主对角线

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵A的(m,n)元

m=n 副对角线

简记为 $$A=A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}.$$

$m\times n$称为矩阵的阶数，数a_{ij}称为A的元素.

矩阵由它的阶数和元素确定，本身没有运算的含义！

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**,

元素是复数的矩阵称为**复矩阵**.

矩阵的例子

2×4 的实矩阵： $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3×3 复矩阵： $\begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{6} & \mathbf{2}\boldsymbol{i} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

1×4矩阵： $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$　　**3×1矩阵：** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(4) 是一个 1×1 矩阵.

几种特殊矩阵（阶数特殊或元素特殊）

阶数特殊

(1) $m = n$，称为 n 阶方阵 $A_3 = \begin{pmatrix} 13 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $m = 1$ 的矩阵称为行向量

$$A_{1\times n} = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

(3) $n = 1$ 的矩阵称为列向量

$$B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

元素特殊

（1）对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

（2）单位矩阵

$$\mathrm{I}_{\mathrm{n}} \text{或} E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

全为**1**

（3）元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，$m \times n$ 零矩阵记作 $\boldsymbol{O}_{m \times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

注意　不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 上（下）三角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵的相等的概念

1、同型矩阵

两个矩阵的行数、列数均相等时，称为同型矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} 同型; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

2. 两个矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 与 $B=\left(b_{ij}\right)$ 为同型矩阵，并且对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵A与B相等，记作 $A = B$.

矩阵概念小结

(1)矩阵的概念　**m行n列的一个数表**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵

- 方阵 $(m = n)$;
- 行矩阵与列矩阵; $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- 对角矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- 三角矩阵; $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- 零矩阵 $O_{m \times n}$.

矩阵与行列式有何区别?

方阵A的行列式：$\det A = |A|$

矩阵与行列式有本质的区别，行列式是一个**算式（数）**，一个数字行列式经过计算可求得其值，而矩阵仅仅是一个**数表**，它的行数和列数可以不同.