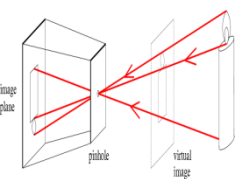


# 计算机视觉——图像采集

2025年春季

桑 农



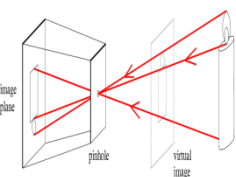
# 第3章 图像采集

## 3.1 采集模型

## 3.2 采集装置

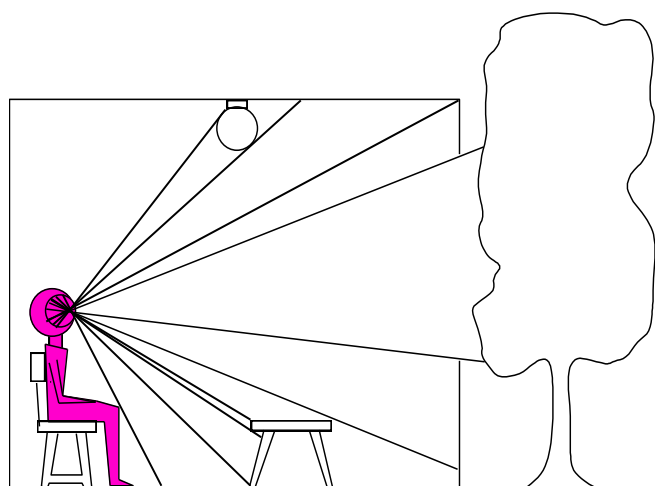
## 3.3 采集方式

## 3.4 摄像机标定



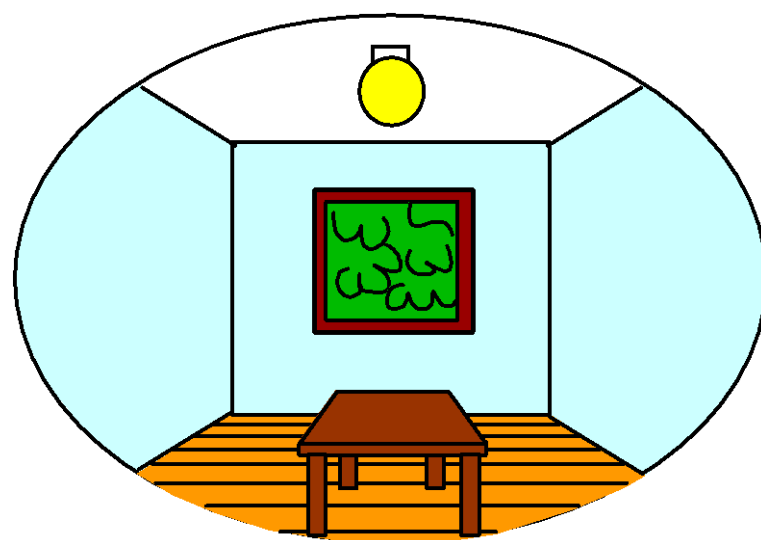
# 3.1 采集模型

## ■ 3D 世界

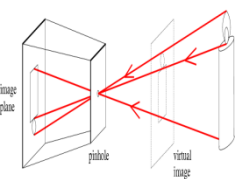


Point of observation

## ■ 2D 图像



- 景物：待求解信息
- 光源：已知或待求解
- 相机：需定标

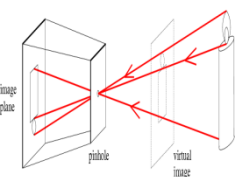


## 3.1 采集模型

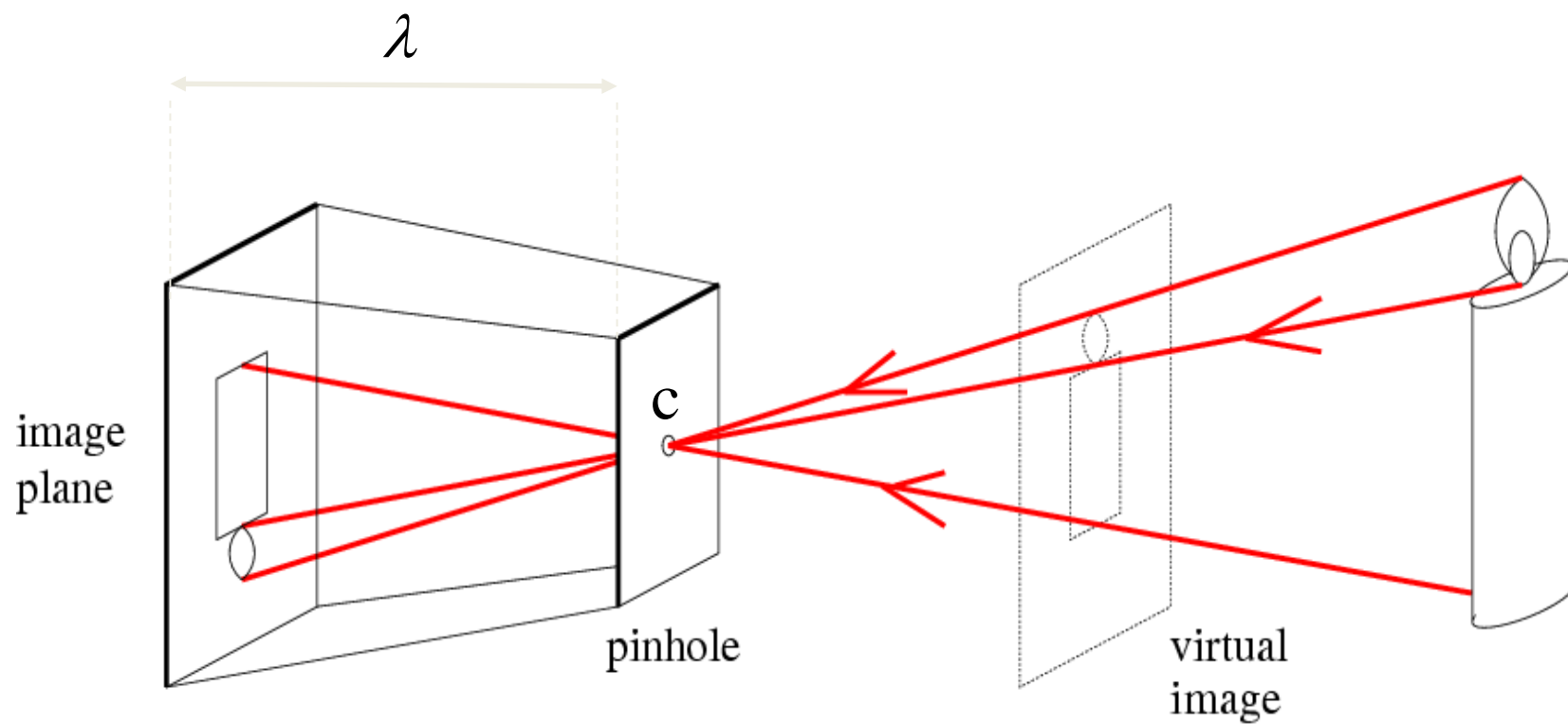
图像采集中的主要模型包括  
几何成像模型和亮度成像模型

3.1.1 几何成像模型

3.1.2 亮度成像模型



## 3.1.1 几何成像模型



- 针孔相机
- $\lambda$  = 焦距,  $c$  = 相机中心



## 3.1.1 几何成像模型

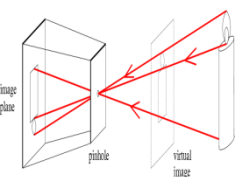
图像采集的过程从几何角度可看作是一个将客观世界的场景通过投影进行空间转化的过程

投影成像涉及到在不同坐标系统之间的转换

- (1) 世界坐标系:  $XYZ$
- (2) 相机坐标系:  $xyz$ , 一般取相机的光轴为 $z$ 轴
- (3) 图像平面坐标系:  $x'y'$

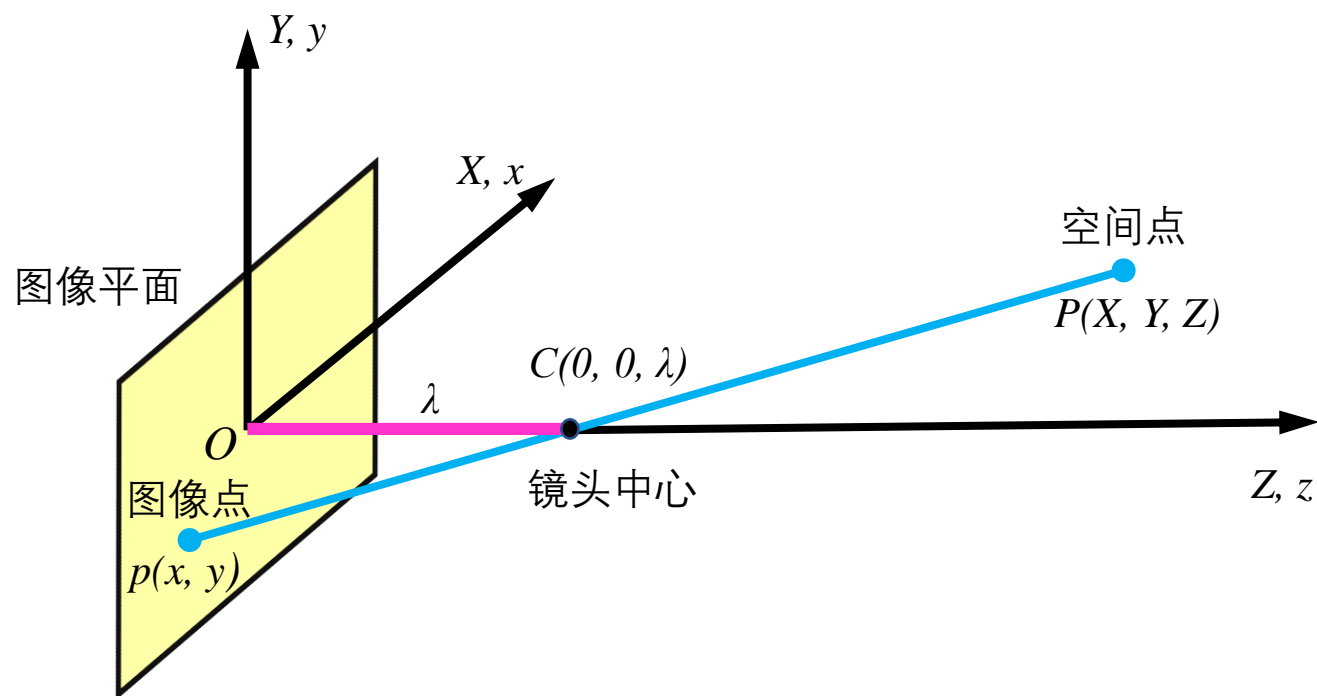
一般取图像平面与相机坐标系统的 $xy$ 平面平行, 且 $x$ 轴与 $x'$ 轴、 $y$ 轴与 $y'$ 轴分别重合, 则图像平面的中心为原点

图像平面坐标系不同于图像像素坐标系, 后者是离散化后的结果



## 3.1.1 几何成像模型

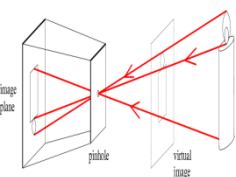
### 1. 重合模型：世界坐标系与相机坐标系重合



$$x = \frac{\lambda X}{\lambda - Z}$$

$$y = \frac{\lambda Y}{\lambda - Z}$$

投影变换中的重合模型示意图



## 3.1.1 几何成像模型

$$x = \frac{\lambda X}{\lambda - Z} \quad (\lambda - Z)x = \lambda X$$

$$y = \frac{\lambda Y}{\lambda - Z} \quad (\lambda - Z)y = \lambda Y$$

$$k = \lambda - Z \quad kx = \lambda X$$

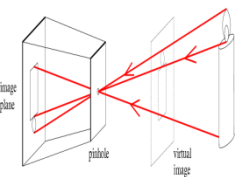
$$\Rightarrow \quad ky = \lambda Y$$

$$k = \lambda - Z$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

齐次坐标表达



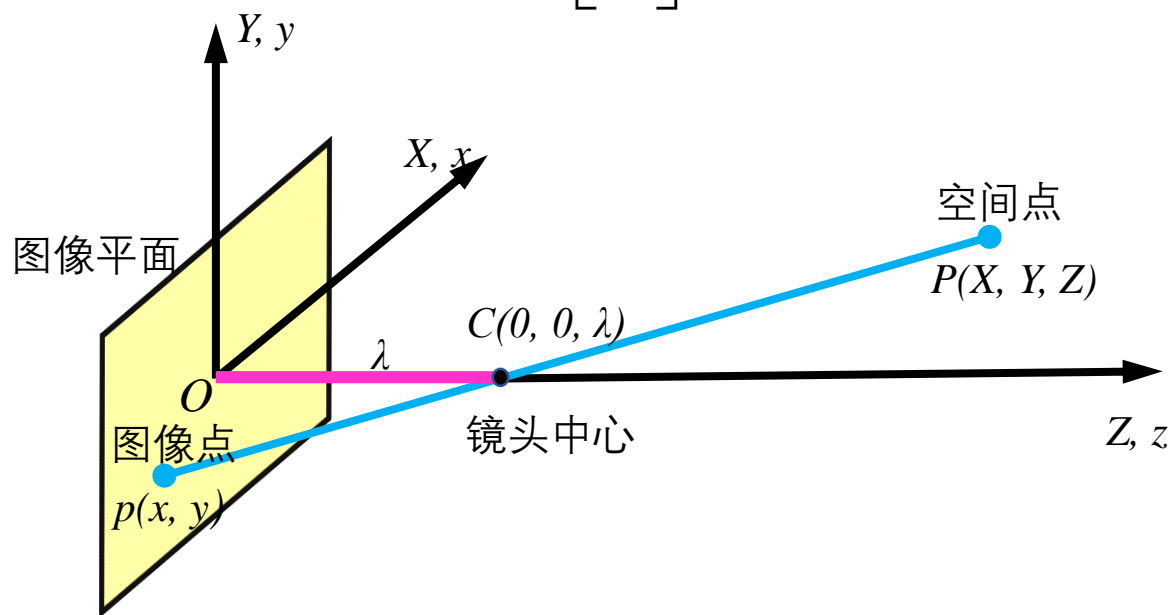


## 3.1.1 几何成像模型

### 齐次坐标

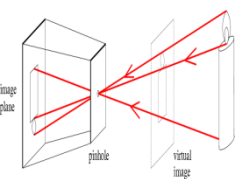
- 从图像坐标到世界坐标的变换

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ k \end{bmatrix}$$



$$x = \frac{\lambda X}{\lambda - Z} \Rightarrow X = \frac{x}{\lambda}(\lambda - Z)$$

$$y = \frac{\lambda Y}{\lambda - Z} \Rightarrow Y = \frac{y}{\lambda}(\lambda - Z)$$



## 3.1.1 几何成像模型

若  $Z \gg \lambda$

$$x = \frac{\lambda X}{\lambda - Z} \approx \frac{\lambda X}{-Z} \quad \Rightarrow \quad -Zx = \lambda X$$

$$y = \frac{\lambda Y}{\lambda - Z} \approx \frac{\lambda Y}{-Z} \quad \Rightarrow \quad -Zy = \lambda Y$$

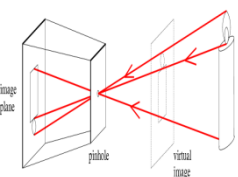
$$k = -Z \quad kx = \lambda X$$

$$\Rightarrow \quad ky = \lambda Y$$

$$k = -Z$$

内部矩阵

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

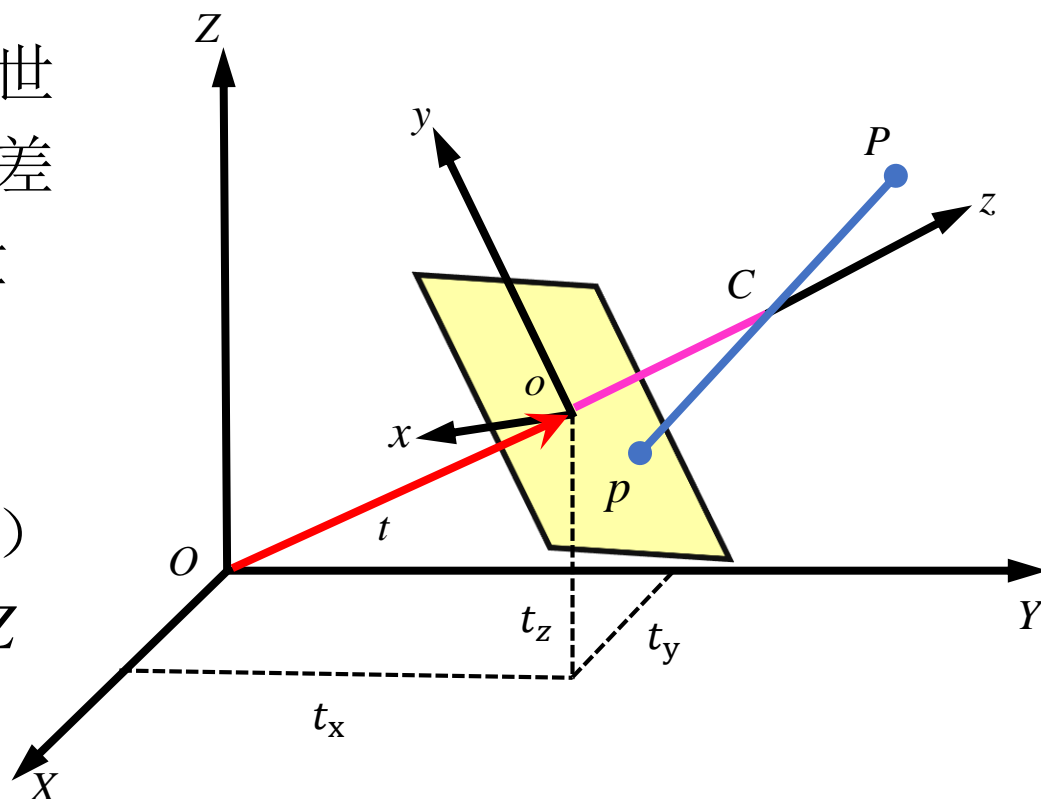


## 3.1.1 几何成像模型

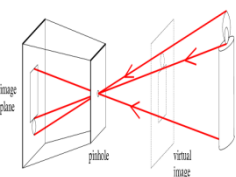
### 2. 分离模型

图像平面（原点）与世界坐标系统的位置偏差用矢量 $t$ 表示，其分量分别为 $t_x$ ， $t_y$ ， $t_z$ 。

这里假设相机的扫视  
角（ $x$ 和 $X$ 轴间的夹角）  
为 $\gamma$ ，而倾斜角（ $z$ 和 $Z$   
轴间的夹角）为 $a$



世界坐标系统与摄像机坐标系统  
不重合时的投影成像示意图



## 3.1.1 几何成像模型 ■ 错误

### 2. 分离模型

这个不重合的相机模型可通过以下一系列步骤转换为前面的重合模型：

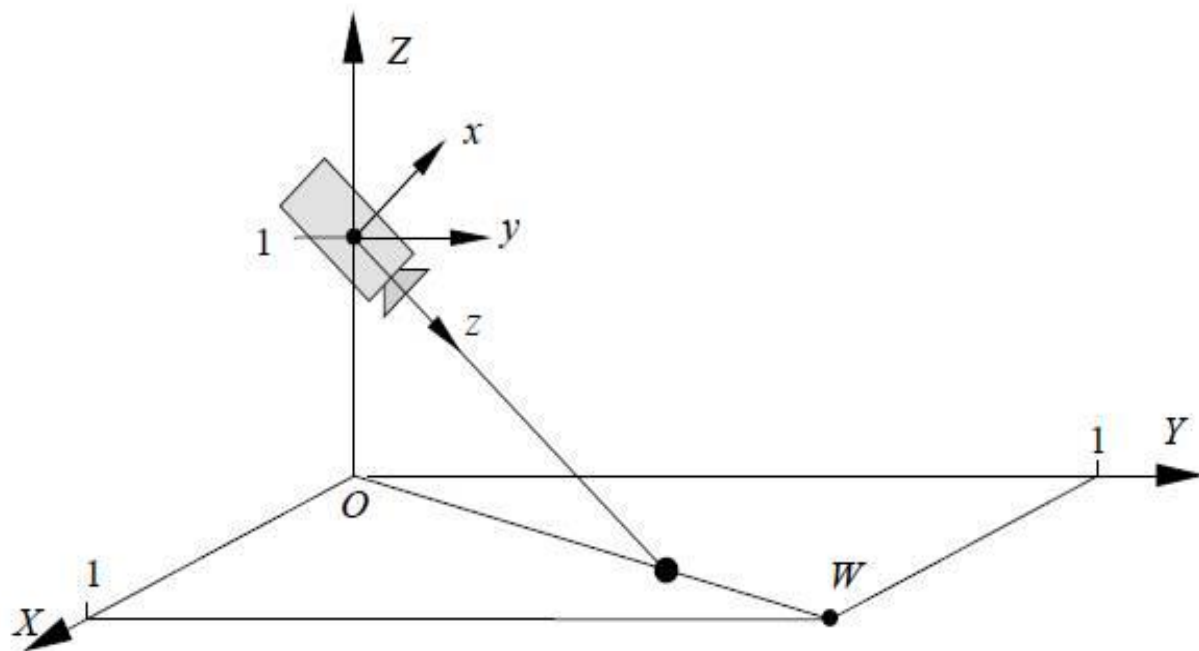
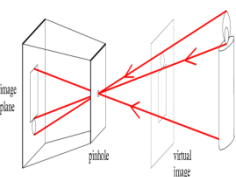


图 3.1.3 摄像机观察三维场景示意图



## 3.1.1 几何成像模型 ■ 错误

### 2. 分离模型

- ①将图像平面原点按矢量 $D$ 移出世界坐标系统的原点；
- ②以某个 $\gamma$ 角（绕 $z$ 轴）扫视 $x$ 轴；
- ③以某个 $\alpha$ 角将 $z$ 轴倾斜（绕 $x$ 轴旋转）

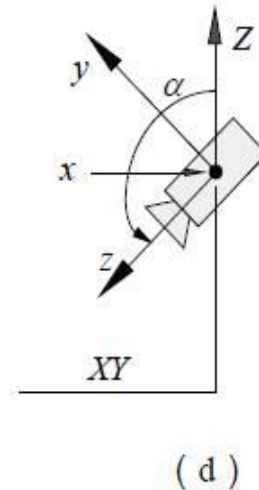
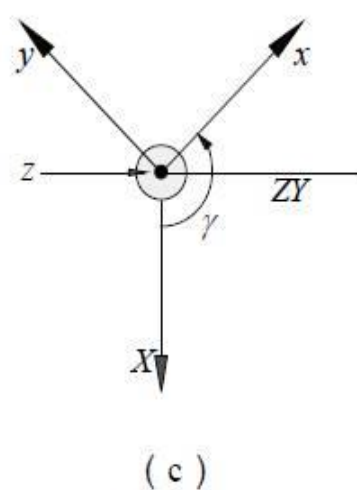
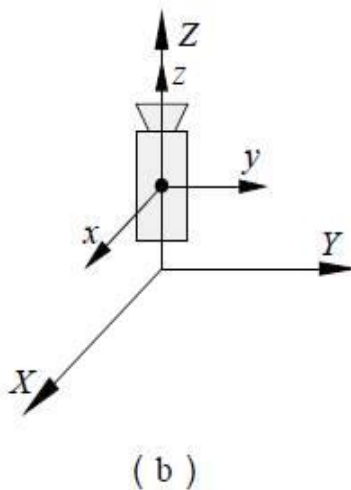
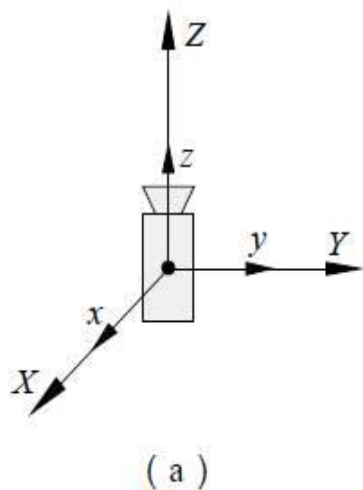


图 3.1.4 对摄像机的平移和旋转



# 3.1.1 几何成像模型 ■ 错误

## 2. 分离模型

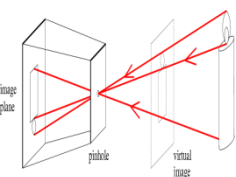
平移:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -D_x \\ 0 & 1 & 0 & -D_y \\ 0 & 0 & 1 & -D_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转:

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_\alpha R_\gamma$$



## 3.1.1 几何成像模型 ■ 错误

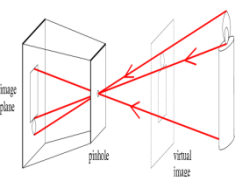
### 2. 分离模型

一个满足几何关系的相机观察到的齐次世界坐标点在相机坐标系统中具有如下的齐次表达

$$\mathbf{C}_h = \mathbf{PRTW}_h$$

$$x = \lambda \frac{(X - D_x) \cos \gamma + (Y - D_y) \sin \gamma}{-(X - D_x) \sin \alpha \sin \gamma + (Y - D_y) \sin \alpha \cos \gamma - (Z - D_z) \cos \alpha + \lambda}$$

$$y = \lambda \frac{-(X - D_x) \sin \gamma \cos \alpha + (Y - D_y) \cos \alpha \cos \gamma + (Z - D_z) \sin \alpha}{-(X - D_x) \sin \alpha \sin \gamma + (Y - D_y) \sin \alpha \cos \gamma - (Z - D_z) \cos \alpha + \lambda}$$



## 3.1.1 几何成像模型

### 欧拉角

#### ■ 节线:

- XY平面和xy平面的交线AB

#### ■ 自转角（偏转角） $\theta$ :

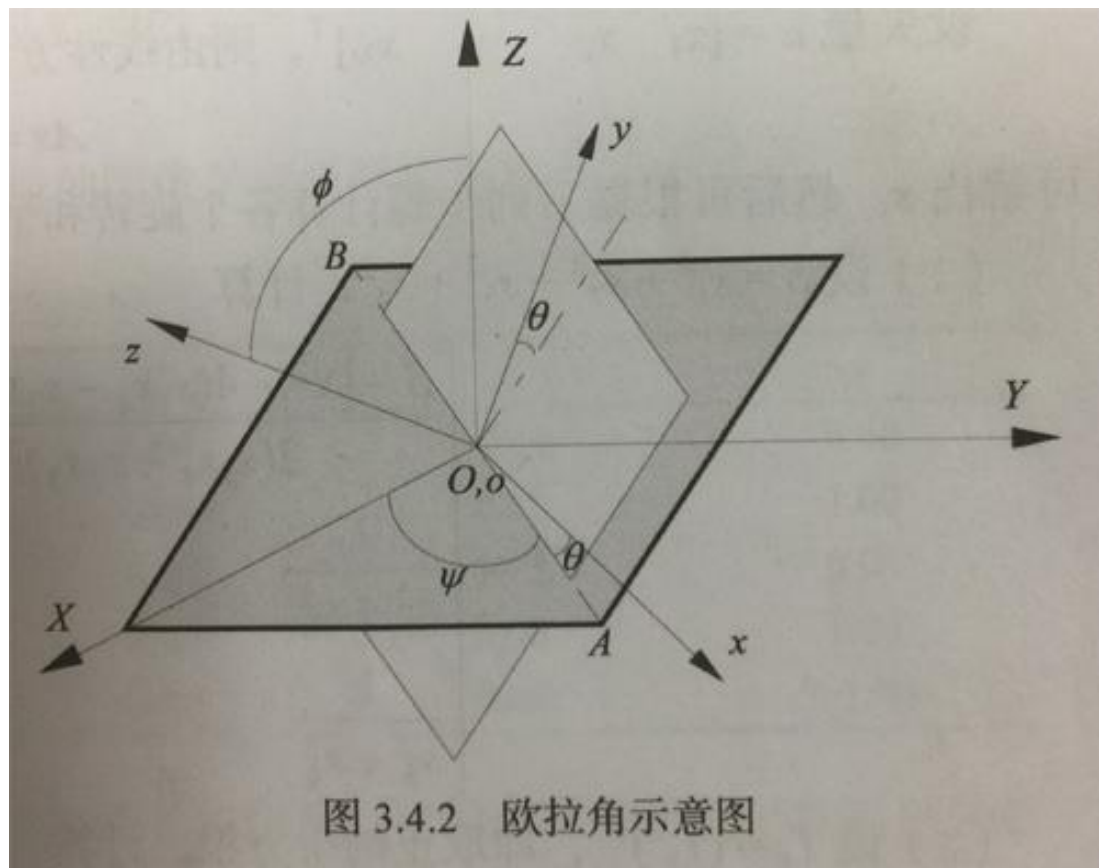
- AB和x轴之间的夹角

#### ■ 章动角（俯仰角） $\phi$ :

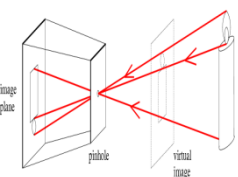
- Z轴和z轴之间的夹角

#### ■ 进动角（倾斜角） $\psi$ :

- AB和X轴之间的夹角

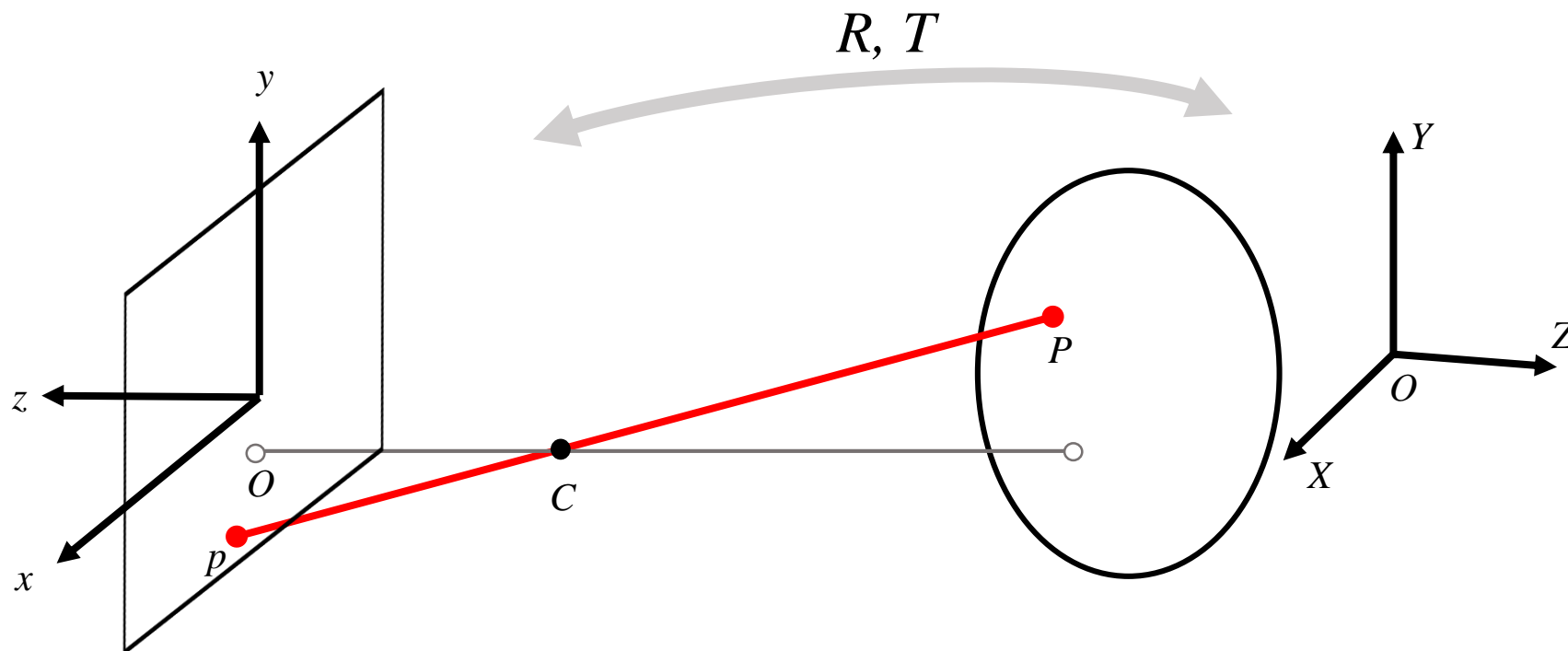




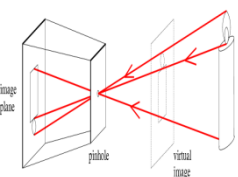


## 3.1.1 几何成像模型

■定义世界坐标系和相机坐标系如下：



■注意这里世界坐标系和相机坐标系分别为左手系和右手系，二者的z轴方向相反，因此前述内部矩阵中的-1化为1，便于表达。以后的推导均以此为准。



## 3.1.1 几何成像模型

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} kx \\ ky \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

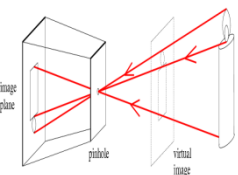
图像坐标 $\mathbf{x}$

内部矩阵 $\mathbf{K}$

旋转矩阵 $\mathbf{R}$

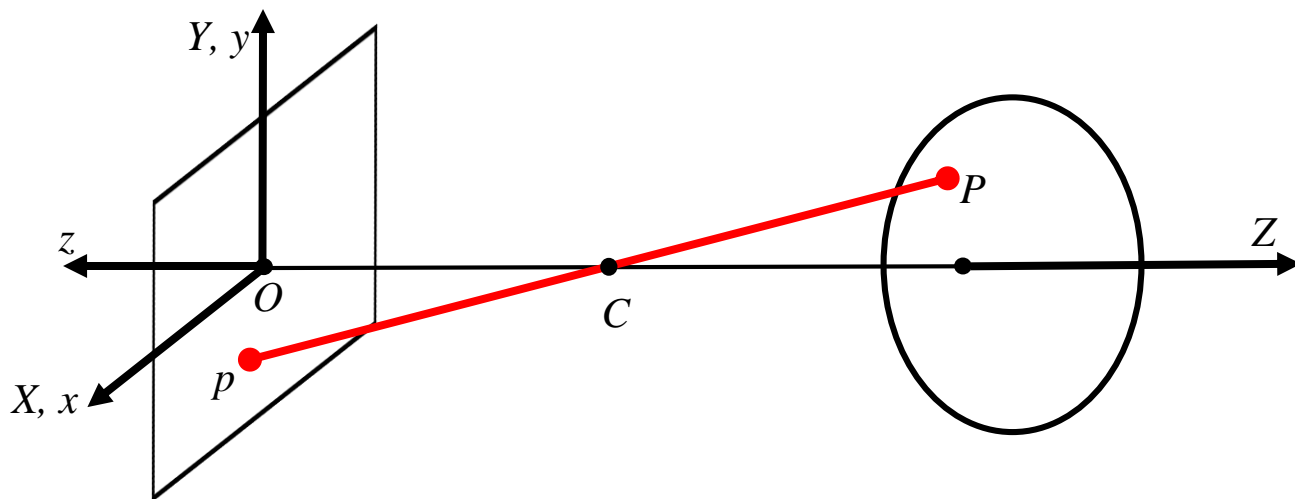
平移矩阵 $\mathbf{t}$

世界坐标 $\mathbf{X}$



# 3.1.1 几何成像模型

## ■ 投影矩阵



### ■ 内部假设

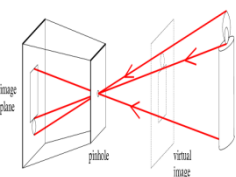
- 光心成像坐标在(0,0)点
- 纵横比为1
- 无扭曲

### ■ 外部假设

- 相机原点在世界坐标(0,0,0)点
- 相机无旋转

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}[\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \mathbf{X} \Rightarrow k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}$



## 3.1.1 几何成像模型

去除假设：光心成像坐标在(0,0)点  
并设光心成像坐标为 $(u_0, v_0)$

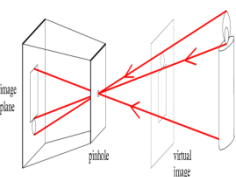
### ■ 内部假设

- 纵横比为1
- 无扭曲

### ■ 外部假设

- 相机原点在世界坐标(0,0,0)点
- 相机无旋转

$$\mathbf{x} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{X} \Rightarrow k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \lambda & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 3.1.1 几何成像模型

去除假设：纵横比为1，即每一像素为正方形，并设x轴和y轴的比例分别为 $1/\alpha$ 和 $1/\beta$

### ■ 内部假设

- 无扭曲

### ■ 外部假设

- 相机原点在世界坐标(0,0,0)点
- 相机无旋转

$$\mathbf{x} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{X} \Rightarrow k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \beta & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 3.1.1 几何成像模型

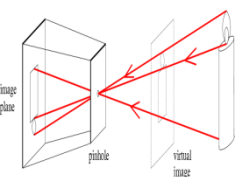
去除假设：无扭曲  
并设扭曲因子为  $s$

■ 内部假设

■ 外部假设

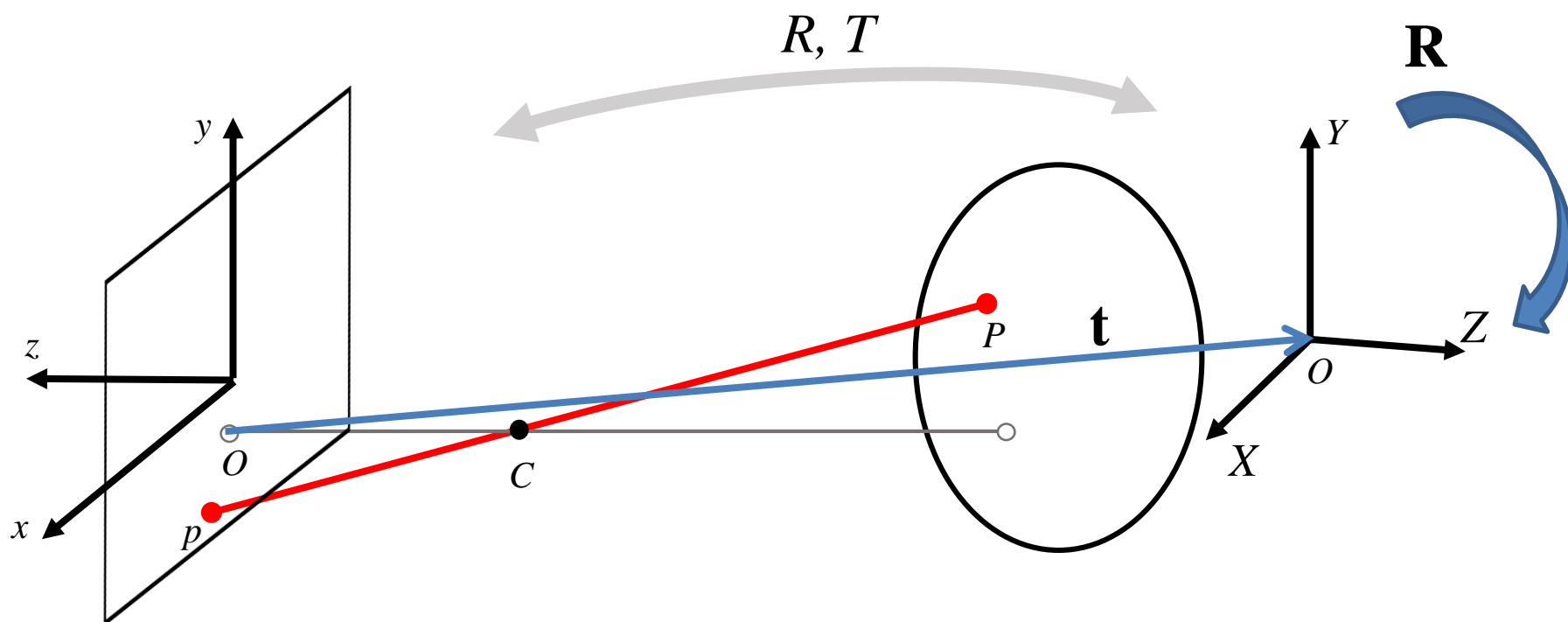
- 相机原点在世界坐标(0,0,0)点
- 相机无旋转

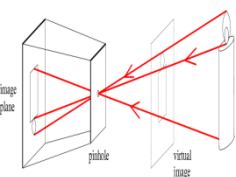
$$\mathbf{x} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{X} \rightarrow k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 & 0 \\ 0 & \beta & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 3.1.1 几何成像模型

相机旋转和平移





## 3.1.1 几何成像模型

去除假设：相机原点在世界坐标(0,0,0)点  
并设相机原点坐标为  $(-t_x, -t_y, -t_z)$

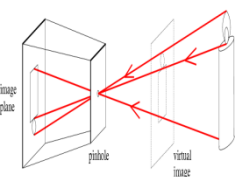
■ 内部假设

■ 外部假设

• 相机无旋转

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}[\mathbf{I} \quad \mathbf{t}] \mathbf{X} \Rightarrow k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$





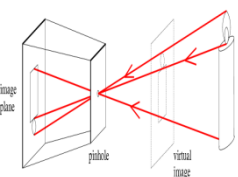
# 3.1.1 几何成像模型

去除假设：相机无旋转  
引入旋转 变换矩阵

■内部假设

■外部假设

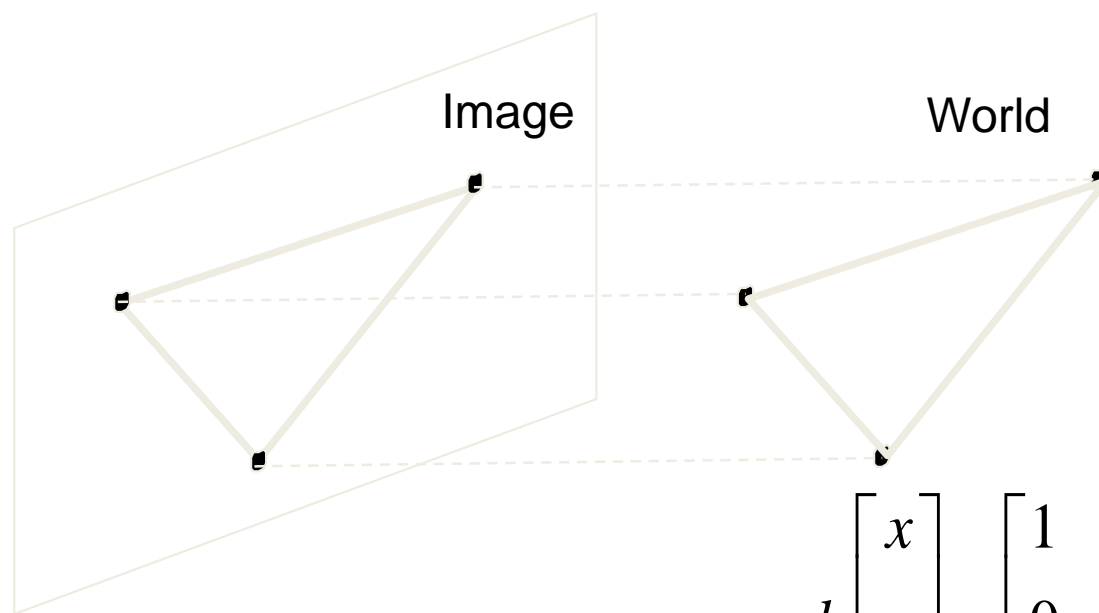
$$\mathbf{x} = \mathbf{K} [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}] \mathbf{X} \rightarrow k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 3.1.1 几何成像模型

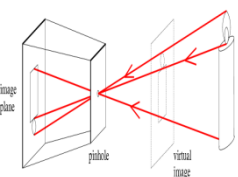
### 正交（orthographic）投影

- 透视投影的特殊形式
  - 景像中各点到投影中心的距离相等，或投影线垂直于投影面



- 也称“平行投影”

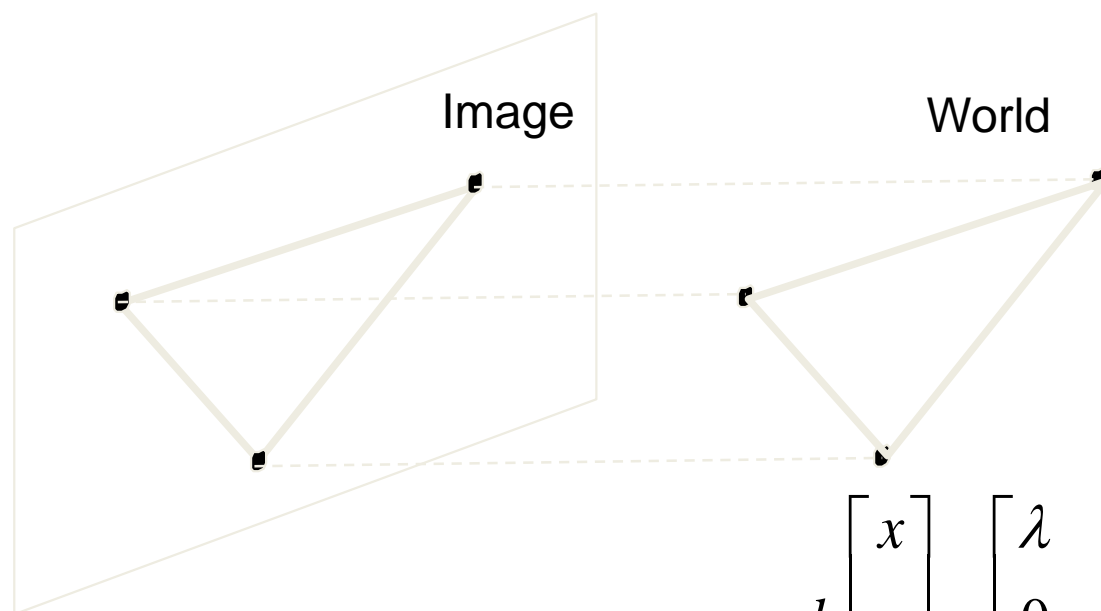
$$k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 3.1.1 几何成像模型

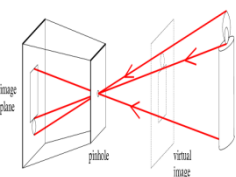
尺度 (scaled) 正交投影

- 透视投影的特殊形式
  - 目标尺度相对于目标到相机的距离很小，即目标上的所有点可视为位于同一深度处



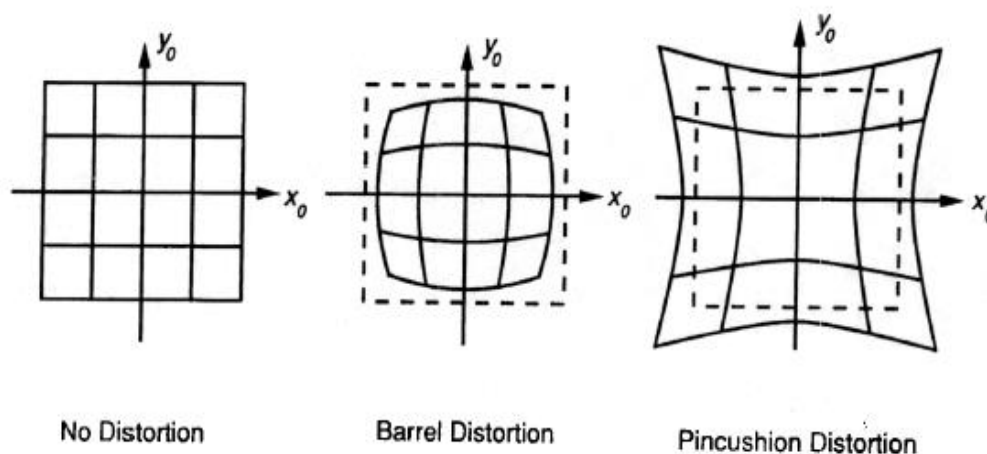
- 也称“拟 (weak) 透视投影”

$$k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



# 3.1.1 几何成像模型

## 径向失真



■桶形失真校正例

- ◆ 图像越大，径向失真越大
- ◆ 视场越大，径向失真越大

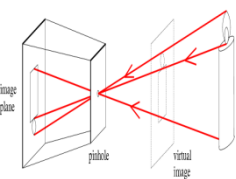
$$x = x_d (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4)$$

$$y = y_d (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4)$$

$(x, y)$  : 真实位置  
 $(x_d, y_d)$  : 失真后位置

$$r^2 = x_d^2 + y_d^2$$

若仅取二阶畸变，则 $k_1 > 0$ 时为桶形畸变， $k_1 < 0$ 时为枕形畸变



## 3.1.2 亮度成像模型

### 1. 景物亮度

场景中景物本身的亮度与光辐射的强度及景物的反射特性有关

对发光的景物，考虑其辐射的功率或光辐射量



## 3.1.2 亮度成像模型

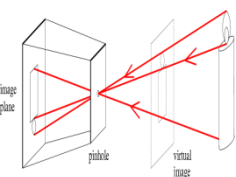
### 1. 景物亮度

#### ◆ 辐射度学

- ◆ 辐射度  $W$
- ◆ 辐照度（辐出度）  $W/m^2$
- ◆ 点辐射源辐射强度（辐强度）  $W/sr$
- ◆ 面辐射源辐射度（辐亮度）  $W/m^2 sr$

#### ◆ 光度学

- ◆ 光通量  $lm$
- ◆ 光照度  $lx (lm/m^2)$
- ◆ 点光源光强度  $lm/sr (cd)$
- ◆ 面光源光辐射度  $lm/m^2 sr$



## 3.1.2 亮度成像模型

### 2. 图像灰度

亮度是能量值

$$0 < f(x, y) < \infty$$

照度分量

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

反射分量

$$0 < i(x, y) < \infty$$

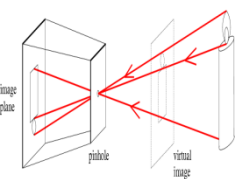
入射量总是大于零

$$0 < r(x, y) < 1$$

反射率在0（全吸收）  
到1（全反射）之间

$$G_{\min} \leq g \leq G_{\max}$$

灰度值的范围

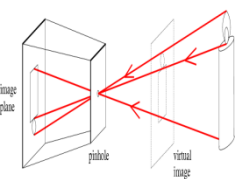


## 3.2 采集装置

### 3.2.1 采集装置及性能指标

### 3.2.2 空间和幅度分辨率





## 3.2.1 采集装置及性能指标

### 1. 常用的摄像机

#### CCD摄像机

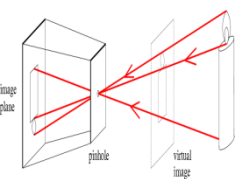
具有非常快的快门速度

#### CMOS摄像机

低功耗，小尺寸，总体成本低

#### CID摄像机

随机访问，不会产生图像浮散



## 3.2.1 采集装置及性能指标

### 2. 基本性能指标

(1) 线性响应:

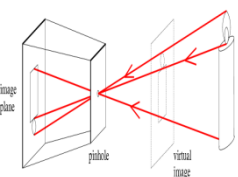
(2) 灵敏度: 绝对/相对, 影响动态范围和成像幅度分辨率

(3) 信噪比: 非信杂 (clutter) 比

(4) 阴影 (不均匀度):

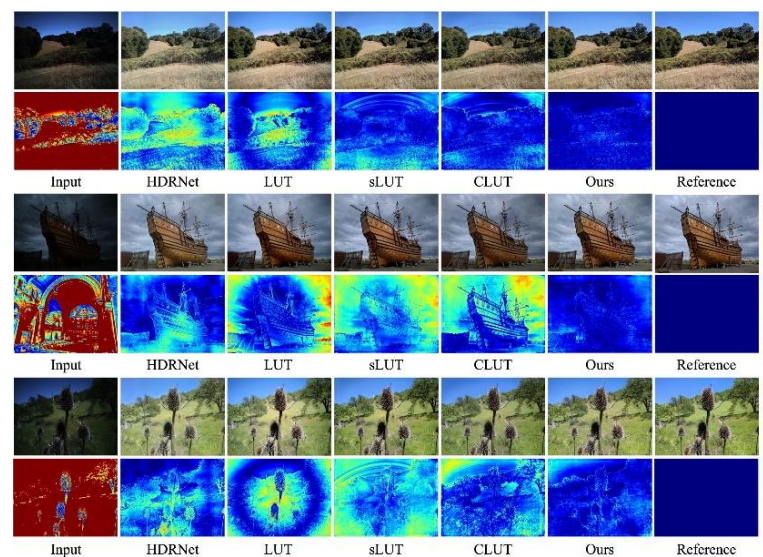
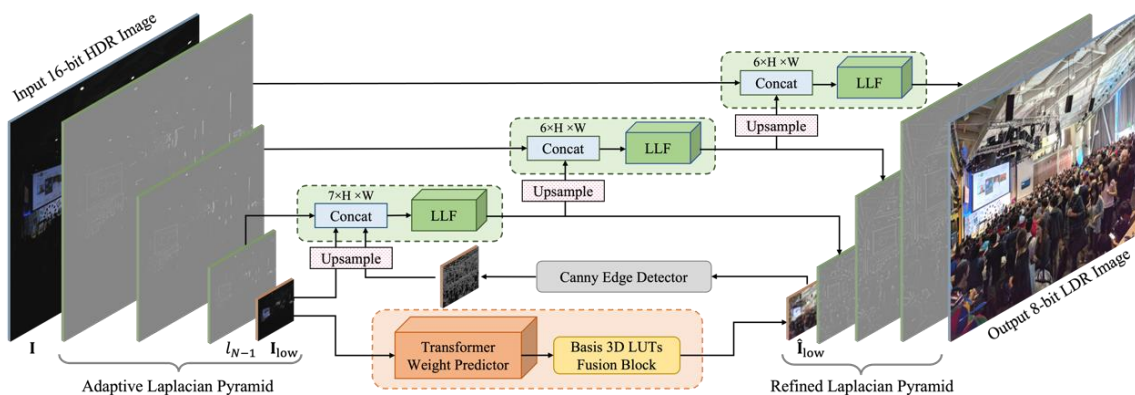
(5) 快门速度: 影响灵敏度和图像清晰度

(6) 读取速率: 影响成像空间分辨率和时间分辨率

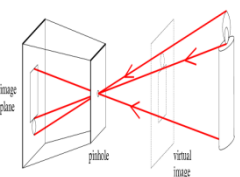


## 3.2.1 采集装置及性能指标

- 基于拉普拉斯金字塔的色调映射（tone mapping）方法：通过三维查找表进行图像的低分辨率色调映射，再融合可学习的拉普拉斯滤波器逐层进行高分辨率色调映射，实现了4K高动态范围（HDR）图像的色调映射

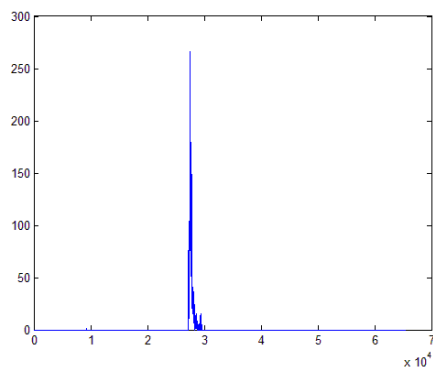
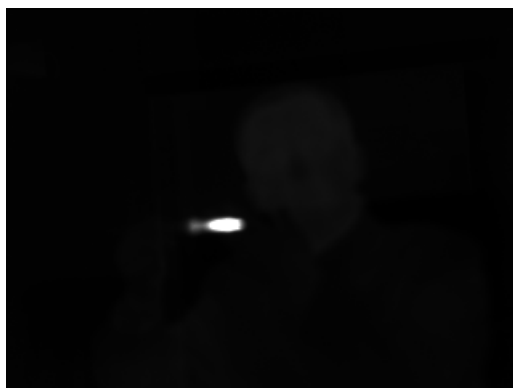


Lookup Table meets Local Laplacian Filter: Pyramid Reconstruction Network for Tone Mapping. NeurIPS 2023

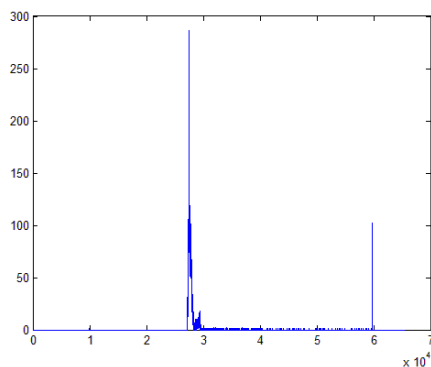


## 3.2.1

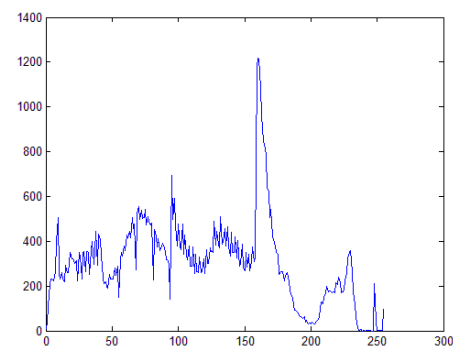
# 采集装置及性能指标



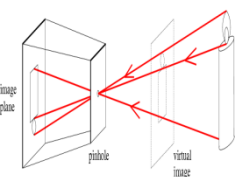
不含强热电烙铁的  
原始红外图像的最  
值归一化结果



含强热电烙铁的最  
原始红外图像的最  
值归一化结果



含强热电烙铁的自  
原始红外图像的最  
适应归一化结果



## 3.2.1 采集装置及性能指标



原始红外图像



校正后红外图像



## 3.2.2 空间和幅度分辨率

空间分辨率（即数字化的空间采样点数）

幅度分辨率（即采样点值的量化级数）

辐射到图像采集矩阵中光电感受单元的信号在空间上被**采样**，而在强度上被**量化**

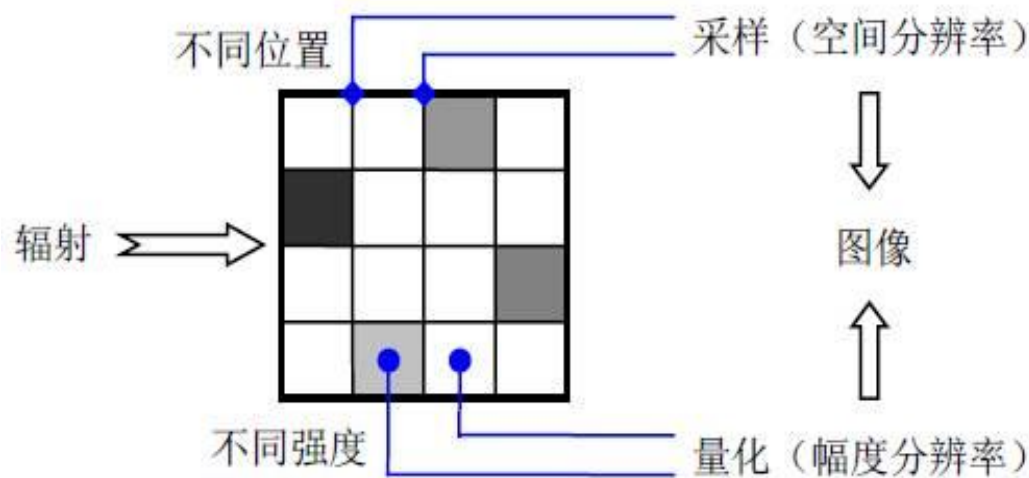
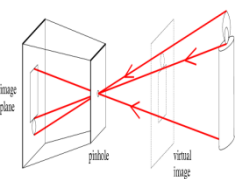


图 3.2.1 空间分辨率和幅度分辨率



## 3.2.2 空间和幅度分辨率

- 图像的尺寸为  $M \times N$

- 用  $G$  个灰度值

$$M = 2^m$$

- 将这些量均取为2的整数次幂

$$N = 2^n$$

- 存储一幅图像所需的数据量

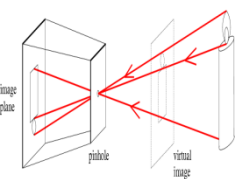
$$G = 2^k$$

由图像的空间分辨率和幅度

分辨率决定

$$b = M \times N \times k$$

- 存储一幅图像所需的位数  $b$

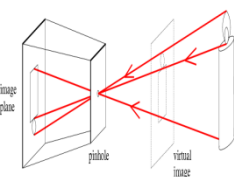


## 3.3 采集方式

### 3.3.1 成像方式一览

### 3.3.2 结构光法

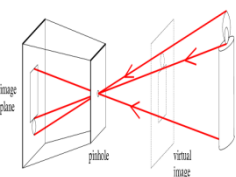




## 3.3.1 成像方式一览

表 3.3.1 常用成像方式的特点概述

成 像 方 式	光 源	采 集 器	景 物
单目成像	固定	固定	固定
双目（立体）成像	固定	两个位置	固定
多目（立体）成像	固定	多个位置	固定
光移（光度立体）成像	移动	固定	固定
主动视觉成像	固定	运动	固定
主动视觉（自运动）成像	固定	运动	运动
视频/序列成像	固定/运动	固定/运动	运动/固定
结构光成像	固定/转动	固定/转动	转动/固定



## 3.3.2 结构光法

- 在采集图像时直接获取深度信息的方法
- 利用照明中的几何信息来帮助提取景物自身的几何信息

### 结构光成像

$$Z = s + d = s + \frac{r \times \csc \beta \times h / \lambda}{1 - \cot \beta \times h / \lambda}$$

成像高度中包含  
了3-D的深度信息

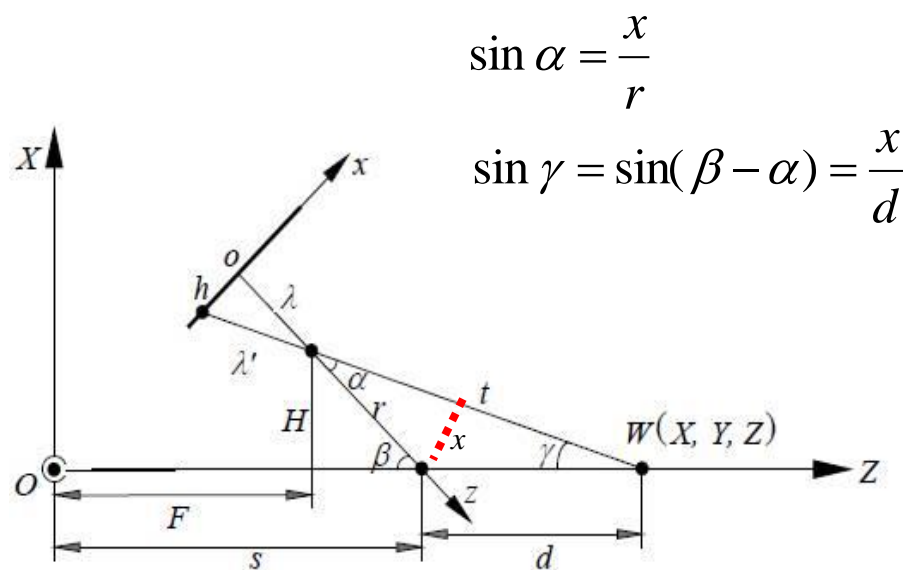
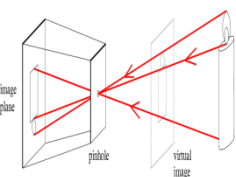


图 3.3.1 结构光成像示意图



## 3.3.2 结构光法

### 成像宽度

结构光成像不仅能给出空间点的距离 $Z$ ，  
同时也能给出沿 $Y$ 方向的物体厚度

$$Y = \frac{wt}{\lambda'} = w \sqrt{\frac{(Z - F)^2 + H^2}{h^2 + \lambda^2}}$$

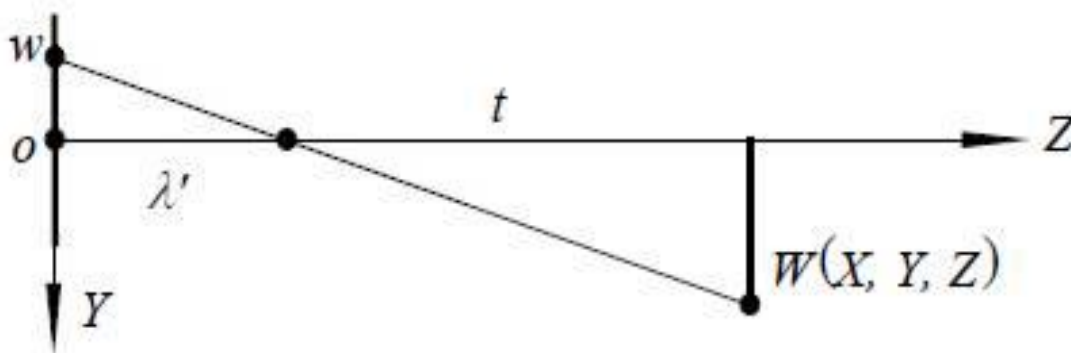
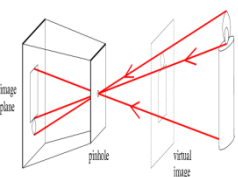
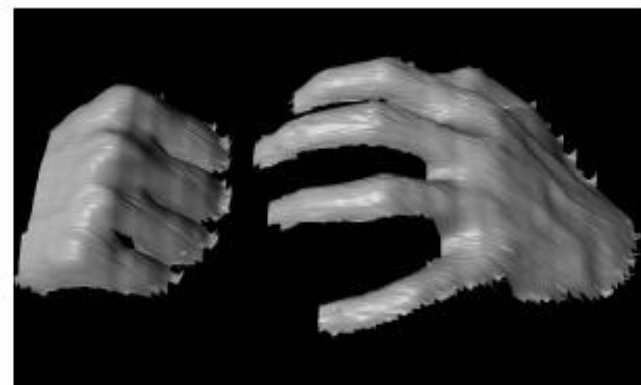


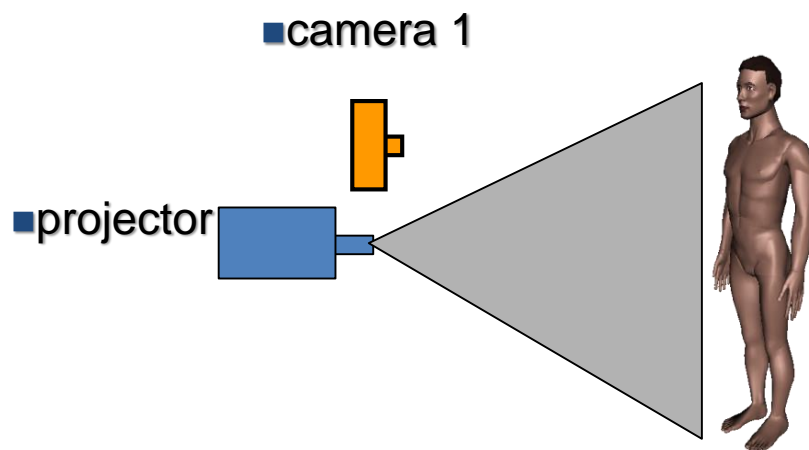
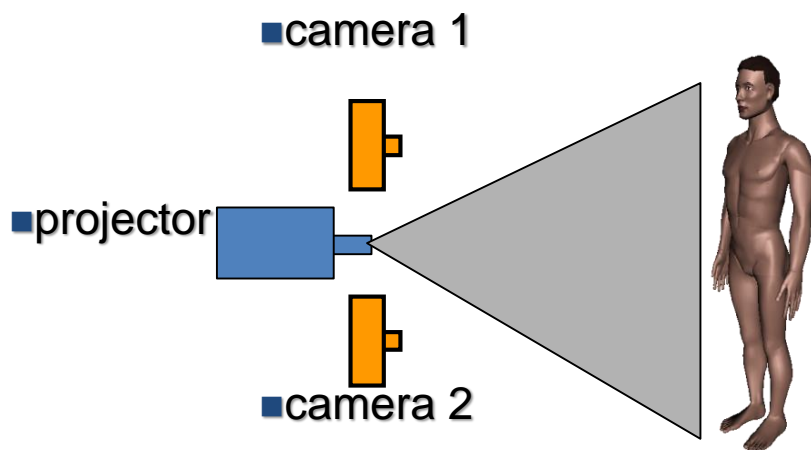
图 3.3.2 结构光成像时的顶视示意图



## 3.3.2 结构光法

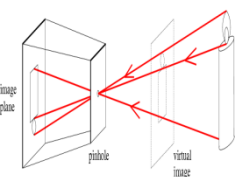


■ Li Zhang's one-shot stereo

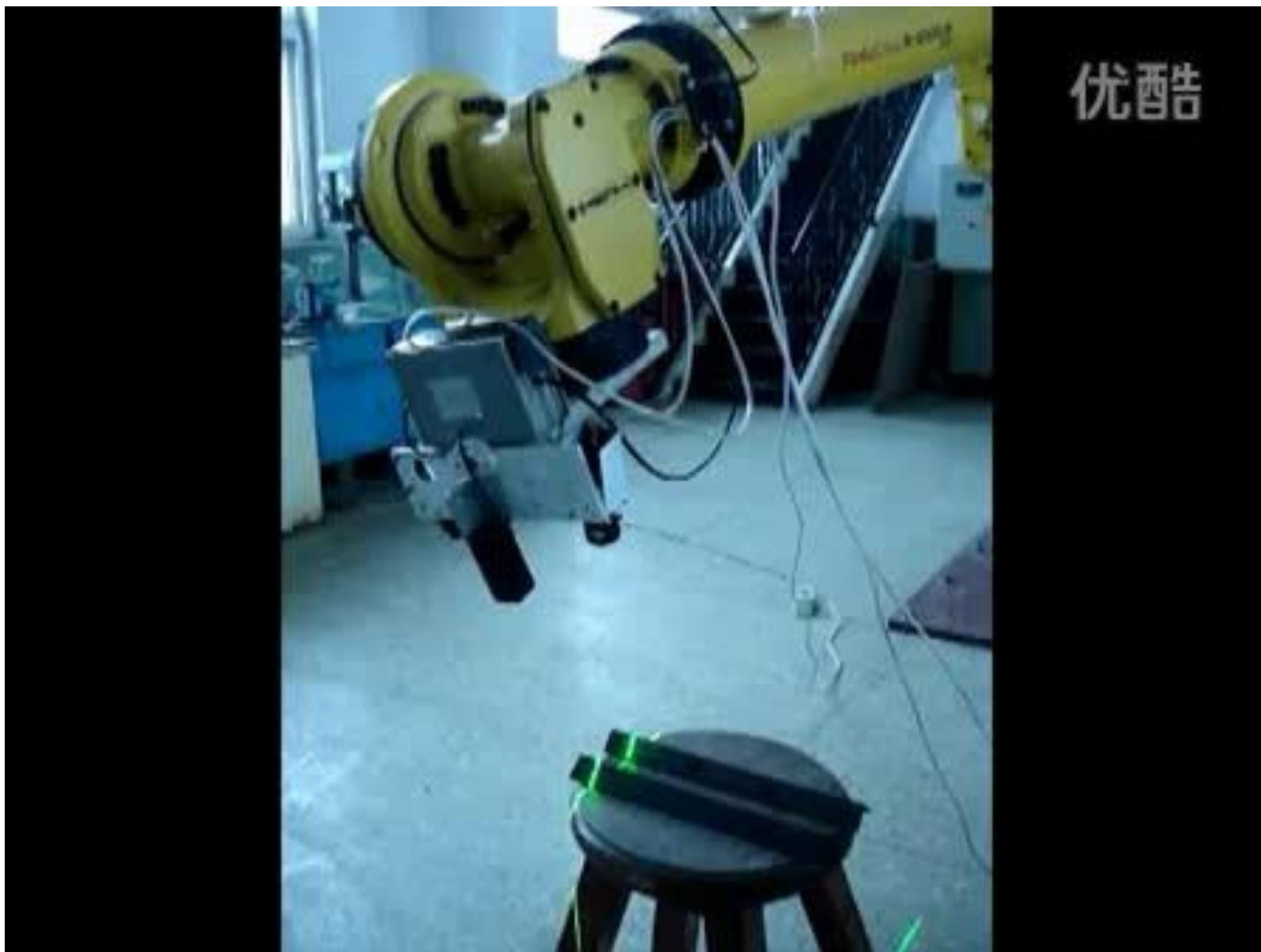


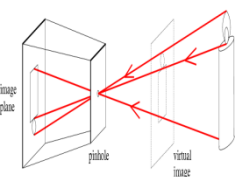
■ Li Zhang, Brian Curless, and Steven M. Seitz. Rapid Shape Acquisition Using Color Structured Light and Multi-pass Dynamic Programming. In *Proceedings of the 1st International Symposium on 3D Data Processing, Visualization, and Transmission (3DPVT)*, Padova, Italy, June 19-21, 2002, pp. 24-36.

## 特定结构的主动光源



## 3.3.2 结构光法

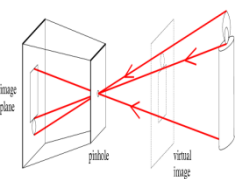




## 3.3.2 结构光法

- kinect

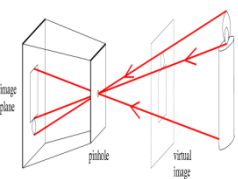




## 3.4 摄像机标定

- ◆ 目的：对景象进行定量分析的需要
- ◆ 内容：确定与模型有关的参数，包括外部参数和内部参数

$$k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

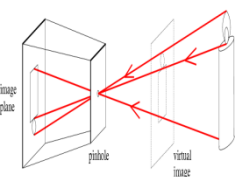


## 3.4 摄像机标定

### 3.4.1 标定程序和步骤

### 3.4.2 两级标定法





## 3.4.1 标定程序和步骤

### 线性模型相机的标定

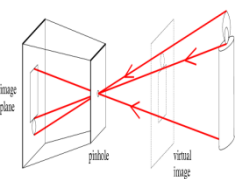
- ◆ 不考虑径向失真
- ◆ 利用世界坐标系与图像坐标系间的齐次坐标变换

$$k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \lambda \Rightarrow \alpha = \mu\lambda$$

不考虑扭曲s，即认为s=0

$$\Rightarrow k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\lambda & 0 & u_0 \\ 0 & \lambda & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 3.4.1 标定程序和步骤

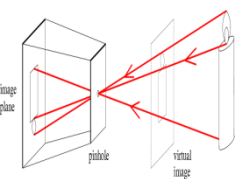
### 线性模型相机的标定

$$k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

◆ 令  $k_1 = k / a_{34}$

$$k_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{ij} = a_{ij} / a_{34}$$



## 3.4.1 标定程序和步骤

### 线性模型相机的标定

$$k_1 x = b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z + b_{14}$$

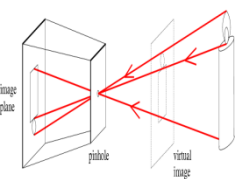
$$k_1 y = b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z + b_{24}$$

$$k_1 = b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1$$

$\Rightarrow$

$$(b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1) \bullet x = b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z + b_{14}$$

$$(b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1) \bullet y = b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z + b_{24}$$



## 3.4.1 标定程序和步骤

### 线性模型相机的标定

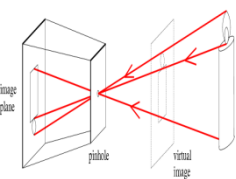
$$Xb_{11} + Yb_{12} + Zb_{13} + b_{14} - xXb_{31} - xYb_{32} - xZb_{33} = x$$

$$Xb_{21} + Yb_{22} + Zb_{23} + b_{24} - yXb_{31} - yYb_{32} - yZb_{33} = y$$

⇒

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -xX & -xY & -xZ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 1 & -yX & -yY & -yZ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{24} \\ b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

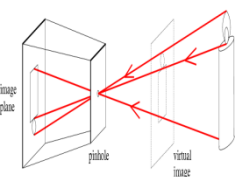
由世界坐标系中的一点(X,Y,Z)及其在图像中的对应点(x,y)，可得到两个方程



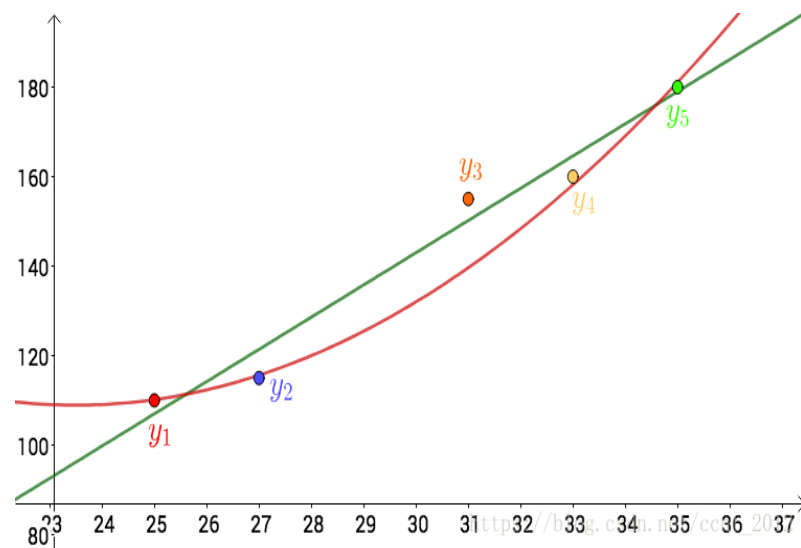
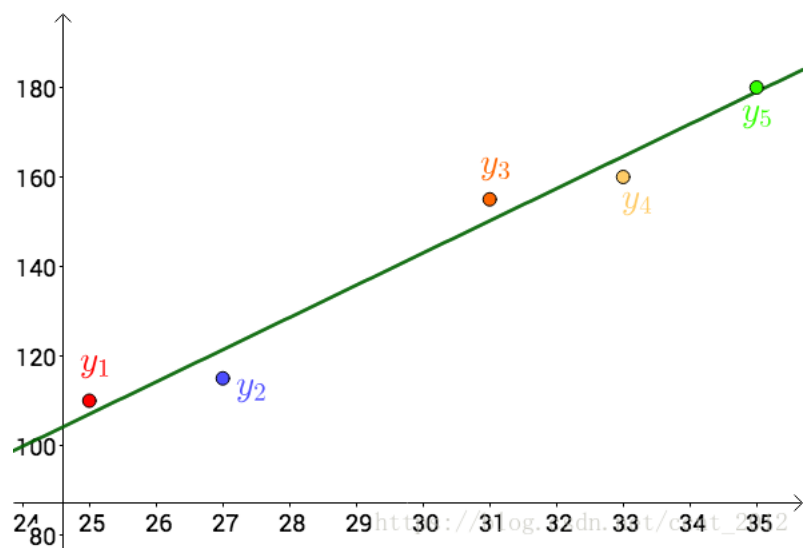
## 3.4.1 标定程序和步骤

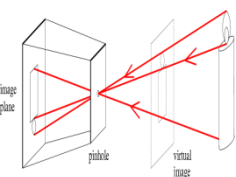
### 标定程序

- ①获得 $M \geq 6$ 个具有已知世界坐标 $(X_i, Y_i, Z_i)$ 的空间点
- ②用相机拍摄这些点以得到图像平面坐标 $(x_i, y_i)$
- ③把这些坐标代入上两式以解出未知系数
- ④实际中，为了克服噪声的影响，常使用远大于6的多个参照点（>25）。



## 3.4.1 标定程序和步骤

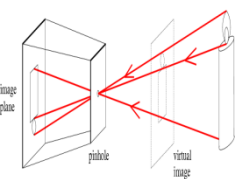




## 3.4.1 标定程序和步骤

### 讨论

- ①从得到的11个未知参数解，可恢复出摄像机的内外参数。详见马颂德《计算机视觉——计算理论与算法基础》
- ② 11个未知参数中，仅有10个是相互独立的，因此这11个参数间存在着约束关系。以上的求解过程并未考虑此约束关系，所得结果易受噪声影响，更精确的方法是引入一定的约束关系。详见马颂德《计算机视觉——计算理论与算法基础》

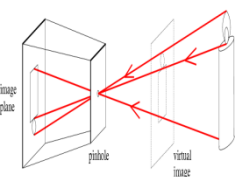


## 3.4.2 两级标定法

Tsai法 ( A Versatile Camera Calibration Techniaue  
for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-  
the-shelf TV Cameras and Lenses, IEEE JOURNAL OF  
ROBOTICS AND AUTOMATION, VOL. RA-3, NO. 4,  
AUGUST 1987)

非线性模型相机的标定





## 3.4.2 两级标定法

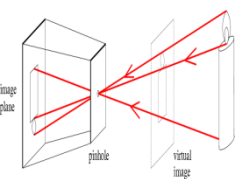
假设1：光心成像坐标 $(u_0, v_0)$ 位于图像中心且是径向畸变中心

$$k \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\lambda & 0 & u_0 \\ 0 & \lambda & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u_0=0, v_0=0$

假设2：只考虑二阶径向畸变

$$\begin{aligned} x &= x_d(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) & x &= x_d(1 + k_1 r^2) \\ y &= y_d(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) & \Rightarrow & y = y_d(1 + k_1 r^2) \\ r^2 &= x_d^2 + y_d^2 & r^2 &= x_d^2 + y_d^2 \end{aligned}$$



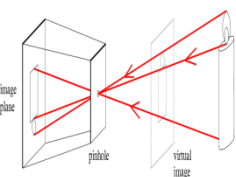
## 3.4.2 两级标定法

确定光心成像坐标的方法：激光束法。郑南宁《计算机视觉与模式识别》

### (2) 图像中心点

图像中心点是光轴穿过图像平面的点。对于不需要精确中心点位置的系统，通常假设图像帧存的中心点即为图像中心点。对要求精确摄像机模型的三维计算机视觉系统，有必要给出具有较高精度的图像中心点的位置。

利用激光束照射摄像机的透镜系统，根据激光束的反射情况调节激光束使其精确地通过光学中心，此时图像中激光束的像（一个光点）表示出了图像中心，这是一种最为精确的直接计算图像中心点的方法。



## 3.4.2 两级标定法

确定光心成像坐标的方法：变焦距法。郑南宁《计算机视觉与模式识别》

当一个摄像机系统的有效焦距变化时，视场将有一个比例扩缩变化，在这个过程中，只有一个图像点，即视场中心是保持不变的。假设小孔摄像机的焦距变化时，小孔沿光轴运动，则视场扩缩中心就是光轴与图像平面的交点，也就是图像中心点。根据这个原理用两个不同焦距的镜头分别拍摄同一图像，然后计算扩缩中心就可以求得图像中心点 $(X_c, Y_c)$ 。

假设有效焦距由 $f$ 变至 $f'$ ，由式(2.33)~式(2.34)可得：

$$\frac{X_{f'}' - X_c}{X_f - X_c} = \frac{X'}{X} = \frac{f'z(1 + kr^2)}{fz'(1 + kr'^2)} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Y_{f'}' - Y_c}{Y_f - Y_c} \approx 1 + z_f \quad (2.37)$$

于是

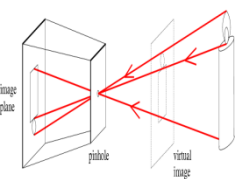
$$X_c(Y_f - Y_{f'}') + Y_c(X_{f'}' - X_f) = X_{f'}'Y_f - X_fY_{f'}' \quad (2.38)$$

式中  $(X_f, Y_f)$ ——为在有效焦距 $f$ 下某特征点的坐标；

$(X_{f'}', Y_{f'}')$ ——同一特征在有效焦距 $f'$ 下的坐标；

$z_f$ ——扩缩比例( $z_f=0$ 表示无扩缩)。

根据式(2.38)，利用最小二乘法可解出 $X_c, Y_c$ 。

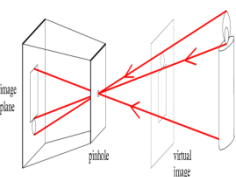


## 3.4.2 两级标定法

具体方法：

先摄像机旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 、平移参数 $t_x$ 、 $t_y$ ，  
以及不确定性图像尺度因子 $\mu$

后摄像机平移参数 $t_z$ 、焦距 $\lambda$ 、镜头径向  
失真 $k_1$



## 3.4.2 两级标定法

$$k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t_x \\ r_4 & r_5 & r_6 & t_y \\ r_7 & r_8 & r_9 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

无径向畸变时成像位置

有径向畸变时成像位置

$$x_1 = x_d (1 + k_1 r^2)$$

$$y_1 = y_d (1 + k_1 r^2)$$

$$r^2 = x_d^2 + y_d^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x/\mu}{y} = \frac{x_d}{y_d} = \frac{x_1}{y_1}$$

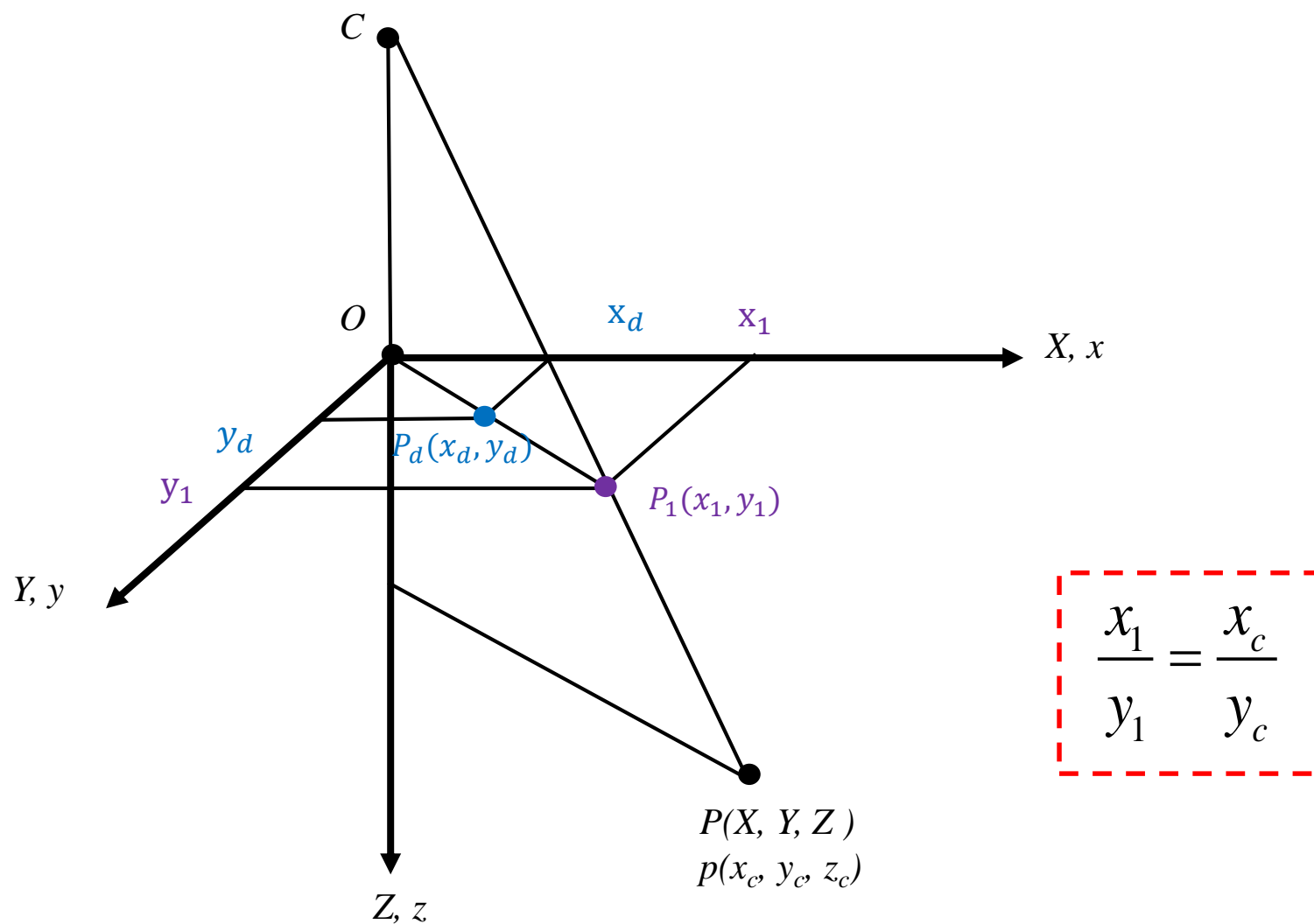
$$x = \mu x_d$$

$$y = y_d$$

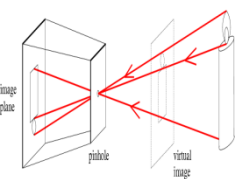
实测成像位置



## 3.4.2 两级标定法



相机坐标系与世界坐标系重合



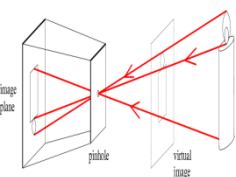
## 3.4.2 两级标定法

若相机坐标系与世界坐标系不重合

$$k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t_x \\ r_4 & r_5 & r_6 & t_y \\ r_7 & r_8 & r_9 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{x_c}{y_c} &= \frac{r_1 X + r_2 Y + r_3 Z + t_x}{r_4 X + r_5 Y + r_6 Z + t_y} \end{aligned}}$$



## 3.4.2 两级标定法

$$\frac{x/\mu}{y} = \frac{x_d}{y_d} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_c}{y_c} = \frac{r_1X + r_2Y + r_3Z + t_x}{r_4X + r_5Y + r_6Z + t_y}$$

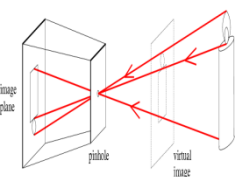
$$\Rightarrow \frac{x/\mu}{y} = \frac{r_1X + r_2Y + r_3Z + t_x}{r_4X + r_5Y + r_6Z + t_y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y\mu} = \frac{r_1X + r_2Y + r_3Z + t_x}{r_4X + r_5Y + r_6Z + t_y}$$

$$\Rightarrow x(r_4X + r_5Y + r_6Z + t_y) = y\mu(r_1X + r_2Y + r_3Z + t_x)$$

$$\Rightarrow xt_y = y\mu(r_1X + r_2Y + r_3Z + t_x) - x(r_4X + r_5Y + r_6Z)$$



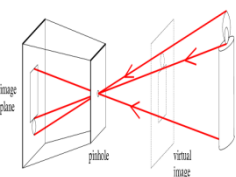


## 3.4.2 两级标定法

$$xt_y = yX \mu r_1 + yY \mu r_2 - xX r_4 - xY r_5 + y \mu t_x + yZ \mu r_3 - xZ r_6$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} yX & yY & -xX & -xY & y & yZ & -xZ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \mu r_1 / t_y \\ \mu r_2 / t_y \\ r_4 / t_y \\ r_5 / t_y \\ \mu t_x / t_y \\ \mu r_3 / t_y \\ r_6 / t_y \end{bmatrix} = x$$

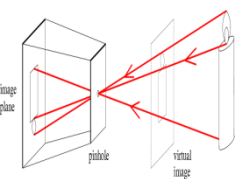
由世界坐标系中的一点 $(X,Y,Z)$ 及其在图像中的对应点 $(x,y)$ ，可得到一个方程



## 3.4.2 两级标定法

$$\begin{bmatrix} yX & yY & -xX & -xY & y & yZ & -xZ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix} = x$$

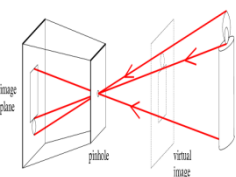
若有 $M \geq 7$ 个具有已知世界坐标的空间点及其图像平面坐标，就可以求出 $s_1$ 至 $s_7$ 。



## 3.4.2 两级标定法

$$\begin{bmatrix} yX & yY & -xX & -xY & y & yZ & -xZ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix} = x$$

但因旋转矩阵只有3个自由度，即方程组中的  $r_1 \sim r_6$  中只有3个是独立的，加上  $\mu$ 、 $t_x$ 、 $t_y$  也只有6个独立变量，因此直接求解得到的  $s_1 \sim s_7$  是不可靠的。



## 3.4.2 两级标定法

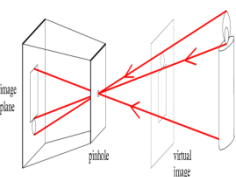
取 $Z=0$

$$\begin{bmatrix} yX & yY & -xX & -xY & y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \mu r_1 / t_y \\ \mu r_2 / t_y \\ r_4 / t_y \\ r_5 / t_y \\ \mu t_x / t_y \end{bmatrix} = x$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} yX & yY & -xX & -xY & y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = x$$

$r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_4$ 、 $r_5$  中有3个独立变量，加上 $\mu$ 、 $t_x$ 、 $t_y$ ，共有6个独立变量，可以可靠求解 $s_1 \sim s_5$



## 3.4.2 两级标定法

考察旋转矩阵的性质：

旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 为正交矩阵，即：

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

伴随矩阵

也即：

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} r_1 & r_4 & r_7 \\ r_2 & r_5 & r_8 \\ r_3 & r_6 & r_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}^*$$

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r_1 & r_4 & r_7 \\ r_2 & r_5 & r_8 \\ r_3 & r_6 & r_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_4 & r_7 \\ r_2 & r_5 & r_8 \\ r_3 & r_6 & r_9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 3.4.2 两级标定法

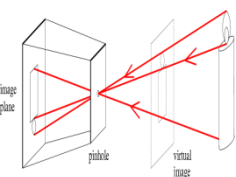
因此有：

正交矩阵的行（列）向量的模为1

$$\begin{array}{lll}
 r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 & r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 = 1 & r_7^2 + r_8^2 + r_9^2 = 1 \\
 r_1^2 + r_4^2 + r_7^2 = 1 & r_2^2 + r_5^2 + r_8^2 = 1 & r_3^2 + r_6^2 + r_9^2 = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 r_1 = r_5 r_9 - r_6 r_8 & r_2 = r_6 r_7 - r_4 r_9 & r_3 = r_4 r_8 - r_5 r_7 \\
 r_4 = r_3 r_8 - r_2 r_9 & r_5 = r_1 r_9 - r_3 r_7 & r_6 = r_2 r_7 - r_1 r_8 \\
 r_7 = r_2 r_6 - r_3 r_5 & r_8 = r_3 r_4 - r_1 r_6 & r_9 = r_1 r_5 - r_2 r_4
 \end{array}$$

矩阵的逆与其伴随矩阵的关系



## 3.4.2 两级标定法

于是

$$\begin{aligned}
 r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 1 - r_6^2 - r_9^2 \\
 &= r_1^2 + r_2^2 + 1 - (1 - r_4^2 - r_5^2) - (r_1 r_5 - r_2 r_4)^2 \\
 &= r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + r_5^2 - (r_1 r_5 - r_2 r_4)^2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

以及

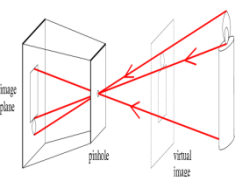
$$s_1 = \mu r_1 / t_y \quad s_2 = \mu r_2 / t_y \quad s_3 = r_4 / t_y \quad s_4 = r_5 / t_y$$

$\Rightarrow$

$$\left( (s_1 / \mu)^2 + (s_2 / \mu)^2 + s_3^2 + s_4^2 \right) t_y^2 - \left( (s_1 / \mu) \bullet s_4 - (s_2 / \mu) \bullet s_3 \right)^2 \bullet (t_y^2)^2 = 1$$

前提:  $\mu$  已知

关于  $t_y^2$  的一元二次方程



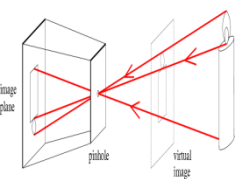
## 3.4.2 两级标定法

确定 $\mu$ : 圆环法。郑南宁《计算机视觉与模式识别》

(1) 比例系数(scale factor)

对 CCD 面阵摄像机而言,  $Y$  方向的比例系数(即 CCD 面阵上相邻两行感光电荷的距离)由硬件制造厂给出, 而  $X$  方向的比例系数受时序及采样的影响, 将是不确定的。我们可以设法测量  $X$ 、 $Y$  方向比例系数之比。最简便的方法就是垂直拍摄一个圆环, 然后计算水平方向和垂直方向上的直径比  $N_y/N_x$ 。这种直接的方法简便而有足够的精度。





## 3.4.2 两级标定法

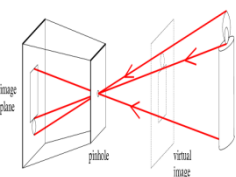
因此解得：

$$t_y^2 = \frac{S \pm \left[ S^2 - 4(s_1 s_4 - s_2 s_3)^2 / \mu^2 \right]^{1/2}}{2(s_1 s_4 - s_2 s_3)^2 / \mu^2}$$

$$S = (s_1 / \mu)^2 + (s_2 / \mu)^2 + s_3^2 + s_4^2$$

$$s_1^2 + s_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_y^2 = \frac{1}{s_3^2 + s_4^2}$$

$$s_3^2 + s_4^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_y^2 = \frac{\mu^2}{s_1^2 + s_2^2}$$



## 3.4.2 两级标定法

以及

$$s_1 = \mu r_1 / t_y \quad s_2 = \mu r_2 / t_y \quad s_3 = r_4 / t_y \quad s_4 = r_5 / t_y \quad s_5 = \mu t_x / t_y$$

$$\Rightarrow r_1 = s_1 t_y / \mu \quad r_2 = s_2 t_y / \mu \quad r_4 = s_3 t_y \quad r_5 = s_4 t_y \quad t_x = s_5 t_y / \mu$$

再由  $r_1^2 + r_4^2 + r_7^2 = 1$  和  $r_2^2 + r_5^2 + r_8^2 = 1$ , 分别得到  $r_7^2$  和  $r_8^2$

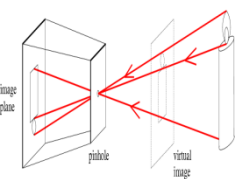
进一步由  $r_7^2 + r_8^2 + r_9^2 = 1$ , 得到  $r_9^2$

并由  $|r_9| \leq 1$  和三角不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , 可得:

$$t_y^2 = \frac{S - \left[ S^2 - 4(s_1 s_4 - s_2 s_3)^2 / \mu^2 \right]^{1/2}}{2(s_1 s_4 - s_2 s_3)^2 / \mu^2}$$

可确定  $|t_y|$

详见Tsai的论文



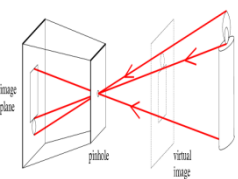
## 3.4.2 两级标定法

确定  $t_y$  的符号：

选标定板上的一点  $(X, Y, Z)$ ，设其在图像中的对应点为  $(x, y)$ ，则有（因为  $Z = 0$ ）：

$$\frac{x/\mu}{y} = \frac{r_1X + r_2Y + t_x}{r_4X + r_5Y + t_y}$$

在  $t_y > 0$  的条件下，计算  $r_1X + r_2Y + t_x$  和  $r_4X + r_5Y + t_y$ ，若它们的符号分别与  $x$  和  $y$  的符号相同，则  $t_y$  为正，否则为负。

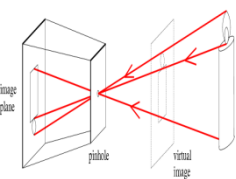


## 3.4.2 两级标定法

确定  $t_y$  的符号:

为保证可靠性, 需要满足以下两个条件:

- (1) 世界坐标系的原点要远离图像的y轴, 即  $|t_y|$  足够大, 避免  $t_y$  求解误差导致其符号反向;
- (2) 选定的标定板上的点  $(X, Y, Z)$  在图像中的对应点  $(x, y)$  要远离图像坐标系原点 (光心成像位置), 避免  $x$  和  $y$  的计算误差导致它们的符号反向。



## 3.4.2 两级标定法

$$r_3 = \pm \left(1 - r_1^2 - r_2^2\right)^{1/2} \quad r_6 = \mp \operatorname{sgn}(r_1 r_4 + r_2 r_5) \bullet \left(1 - r_4^2 - r_5^2\right)^{1/2}$$

$$r_7 = r_2 r_6 - r_3 r_5$$

$$r_8 = r_3 r_4 - r_1 r_6$$

$$r_9 = r_1 r_5 - r_2 r_4$$

详见Tsai的论文



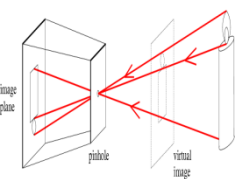


## 3.4.2 两级标定法

考虑径向畸变  $k_1$  的影响，由成像模型，有：

$$y(1 + k_1 r^2) = \lambda \bullet \frac{r_4 X + r_5 Y + r_6 Z + t_y}{r_7 X + r_8 Y + r_9 Z + t_z}$$

迭代求解  $\lambda$ 、 $t_z$  和  $k_1$ 。

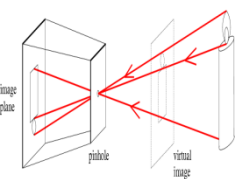


## 3.4.2 两级标定法

$$y(1 + k_1 r^2) = \lambda \bullet \frac{r_4 X + r_5 Y + r_6 Z + t_y}{r_7 X + r_8 Y + r_9 Z + t_z} \text{ 可化为:}$$

$$yr^2 k_1 t_z + yr^2 (r_7 X + r_8 Y + r_9 Z) k_1 + yt_z + y(r_7 X + r_8 Y + r_9 Z) - (r_4 X + r_5 Y + r_6 Z + t_y) \lambda = 0$$

这是一个形如  $f(\lambda, t_z, k_1) = 0$  的三元非线性方程。给定  $M$  个标定点点，就有  $M$  个上述方程，从而构成一个三元非线性方程组。采用牛顿迭代法求解。



## 3.4.2 两级标定法

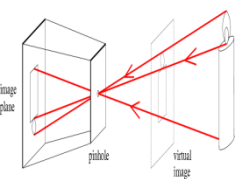
将各方程在未知数的第  $k$  个近似值  $\bar{\mathbf{x}}^{(k)}$  处进行泰勒展开，保留一次线性项，得到如下线性方程组：

$$f_i(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) + \left( f_i'(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) \right)^T (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}^{(k)}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M$$

其中  $\bar{\mathbf{x}} = (\lambda, t_z, k_1)^T$ 。用该线性方程组的解作为未知数的第  $k+1$  个近似值  $\bar{\mathbf{x}}^{(k+1)}$ ，如此迭代下去，直到收敛，即得到  $\lambda$ 、 $t_z$  和  $k_1$  的解。

这里  $k_1$  的初始值  $k_1^{(0)}$  一般取为0，而  $t_z$  和  $\lambda$  的初始值则如下求取。





## 3.4.2 两级标定法

假设  $k_1=0$ , 则  $y(1+k_1r^2) = \lambda \bullet \frac{r_4X + r_5Y + r_6Z + t_y}{r_7X + r_8Y + r_9Z + t_z}$  化为:

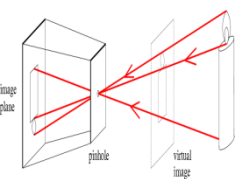
$$y = \lambda \bullet \frac{r_4X + r_5Y + r_6Z + t_y}{r_7X + r_8Y + r_9Z + t_z}$$

即:

$$(r_4X + r_5Y + r_6Z + t_y)\lambda - yt_z - y(r_7X + r_8Y + r_9Z) = 0$$

给定  $M > 2$  个标定点点, 就有  $M$  个上述方程, 但只有  $\lambda$  和  $t_z$  两未知数, 因此是一个超定方程组。求解这个超定方程组, 得到  $\lambda$  和  $t_z$  的解  $\lambda^{(0)}$  和  $t_z^{(0)}$ 。





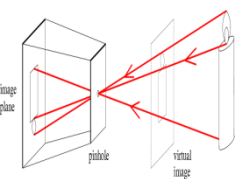
## 3.4.2 两级标定法

标定板不能与成像面平行

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \lambda \bullet \frac{r_4 X + r_5 Y + r_6 Z + t_y}{r_7 X + r_8 Y + r_9 Z + t_z}$$

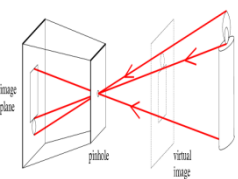
$$\Rightarrow y = \lambda \bullet \frac{Y + t_y}{t_z} \quad \text{因为 } Z=0$$



## 3.4.2 两级标定法

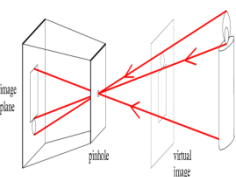
若求解得到的 $\lambda^{(0)}$ 为负数，则需要将 $r_3$ 和 $r_6$ 的符号取反，相应地， $r_7$ 、 $r_8$ 和 $t_z$ 的符号也取反。





## 3.4.2 两级标定法

精确测量参照点的计算机图像坐标是困难的，一种有效的替代方法是利用参照直线，而非参照点进行摄像机标定。详见马颂德，基于线段的摄像机定标，计算机学报，1992



# 作业

- 练习题:

- 3.1

**3.1** 用一个带有 50 mm 焦距镜头的照相机拍摄距离 10 m 外，高 2 m 的物体，该物体的成像尺寸为多少？如果换一个焦距为 135 mm 的镜头，成像尺寸为多少？

- 3.6

**\*3.6** 设图像的长宽比为 4:3，进行以下计算。

(1) 100 万像素的手机上摄像机的空间分辨率约是多少？

(2) 1 000 万像素的相机的空间分辨率约是多少？它拍的一幅彩色图像需多少个字节来存储？



# 作业

- 非线性相机模型标定中，在已估计得到世界坐标系Y轴与相机坐标系y轴间的相对偏移 $t_y$ 的绝对值 $|t_y|$ 时，为了确定其符号，通常选定标定板上的一点 $(X, Y, Z)$ ，在 $Z = 0$ 的假设下，根据其在图像中的对应点 $(x, y)$ ，计算

$$\frac{x/\mu}{y} = \frac{r_1X + r_2Y + t_x}{r_4X + r_5Y + t_y}$$

并在估计得到的 $t_y > 0$ 的条件下，计算 $r_1X + r_2Y + t_x$ 和 $r_4X + r_5Y + t_y$ 。若它们的符号分别与 $x$ 和 $y$ 的符号相同，则 $t_y$ 为正，否则为负。

- (1) 请说明世界坐标系的原点到相机坐标系y轴的距离分别为1和10的两种情况下，哪种对于估计 $t_y$ 的符号更有利，并给出解释。
- (2) 请说明所选标定板上的点 $(X, Y, Z)$ 在图像中的对应点 $(x, y)$ 分别为(2,1)和(10,12)的两种情况下，哪种对于估计 $t_y$ 的符号更有利，并给出解释。

***The end !***