5.2 矩阵的相似对角化

矩阵的相似对角化问题

对一个$(n\times n)$矩阵A，求一个可逆矩阵P和一个对角矩阵D，使得

$$P^{-1}AP = D.$$

矩阵相似对角化问题的条件分析

一、矩阵相似的概念

定义5.2 设A, B都是n阶矩阵，若有可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称B是A的相似矩阵，或说矩阵A与B相似. $\boldsymbol{A \sim B}$

要点：

1. $A \sim B \Leftrightarrow AP = PB$

2. $A \sim B \Leftrightarrow PBP^{-1} = A \Leftrightarrow S^{-1}BS = A$

3. 相似关系：自反性、对称性、传递性

二、矩阵相似的不变性

定理5.5　设矩阵A和B相似($A\sim B$)，则有

1. $R(A)=R(B)\ (=R(A^T)=R(B^T))$;
2. $|A|=|B|\ (=|A^T|=|B^T|)$;
3. $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|\ (=|\lambda I-A^T|=|\lambda I-B^T|)$.

相似矩阵满足：

- 矩阵A和B有相同的特征多项式、特征值
- 矩阵A和B的行列式相同：$|A|=|B|$
- 矩阵A和B的迹相等 $tr(A)=tr(B)$
- $g(A)\sim g(B)$；$A^T\sim B^T$
- 若A、B可逆，则 $A^{-1}\sim B^{-1}$; $A^*\sim B^*$ 且 $AB\sim BA$

二、矩阵相似的不变性

定理5.5 设矩阵A和B相似($A \sim B$)，则有

1. $R(A) = R(B)$ ($= R(A^T) = R(B^T)$);
2. $|A| = |B|$ ($= |A^T| = |B^T|$);
3. $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$ ($= |\lambda I - A^T| = |\lambda I - B^T|$).

注：满足1.-3.的矩阵不一定相似！

例如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

特征向量的关系？ $P^{-1}AP = B, AX = \lambda X, X \neq 0$

$$\Rightarrow PBP^{-1}X = \lambda X \quad \Rightarrow B(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X), P^{-1}X \neq 0$$

三、矩阵的相似对角化

定义5.4 对n阶方阵A，若存在可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵，则称A可以相似对角化。

定理5.6 n阶矩阵A与对角矩阵相似(即A能对角化)的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

证明要点 假设存在可逆阵P,使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵,

把P用其列向量表示为$P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

即 $$A(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

由 $P^{-1}AP=\Lambda$, 得 $AP=P\Lambda$,

把 P 用其列向量表示为 $P=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$.

即 $A\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\left(Ax_1,Ax_2,\cdots,Ax_n\right)=\left(\lambda_1 x_1,\lambda_2 x_2,\cdots,\lambda_n x_n\right).$$

于是有 $Ax_i=\lambda_i x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$

矩阵A相似对角阵的充要条件是A有n个线性无关的特征向量！

矩阵相似对角化的等价条件

矩阵A相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow$

1. A有n个线性无关的特征向量

2. A的r_i重特征值对应r_i个线性无关的特征向量:

$$n - R(\lambda_i I - A) = r_i, i = 1, 2, \dots, s$$

- 若 r_i 均为 1, 则上述条件一定满足!
- 若有$r_i > 1$，需要讨论上述条件是否满足。

推论 如果n阶矩阵A的n个特征值互不相等，则A与对角阵相似.

例1 判断下列实矩阵能否相似于对角阵?

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}\qquad (2)A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -5 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

解

(1) 由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}$ $\qquad A$ 可角化!

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7)\ =0$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-7.$

$n-R(2I-A)=3-1=2.$

只需要讨论2重特征值2对应的特征向量!

(2) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 2 \\ 5 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

所以A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$

把$\lambda=-1$代入$(\lambda I-A)x=0$，解之得基础解系

$$\xi=(1,1,-1)^T,$$

故A不能化为对角矩阵.

例2 设$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

A能否对角化？若能对角化,则求出可逆矩阵P,使$P^{-1}AP$为对角阵.

解

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

所以A的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-2.$

将$\lambda_1=\lambda_2=1$代入$(\lambda I - A)x=0$得方程组

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2=0 \\ -3x_1-6x_2=0 \\ -3x_1-6x_2=0 \end{cases}$$

解之得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

将$\lambda_3 = -2$代入$(A-\lambda E)x=0$,得方程组的基础解系

$$\xi_3 = (-1,1,1)^T .$$

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关. 所以A可对角化.

令
$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则有
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

注意

若令$P=(\xi_3,\xi_1,\xi_2)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

则有 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

即矩阵P的列向量和对角矩阵中特征值的位置要相互对应.

- 例3 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

1. 讨论矩阵**A**是否可以对角化
2. 当矩阵**A**可以对角化时，求可逆矩阵**P**，使得 $P^{-1}AP$为对角矩阵。
3. 求A^{10}

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&\lambda-1&-2\\1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$\lambda_1 = 5,$

$$(5I - A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1/2)r_1 \\ (-1/2)r_2 \\ (-1/2)r_3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$0=\left|\lambda I-A\right|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2 \Rightarrow \lambda_1=5, \lambda_2=\lambda_3=-1$$

$$\lambda_1=5,$$

$$\left(5I-A\right)=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1/2)r_1\\(-1/2)r_2\\(-1/2)r_3}}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\r_2-r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3-r_2\\(-1/3)r_2}}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, x_3\in R \quad \Rightarrow P_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$0=\left|\lambda I-A\right|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2 \Rightarrow \lambda_1=5, \lambda_2=\lambda_3=-1$$

$\lambda_2=\lambda_3=-1,$

$$\left(-I-A\right)=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ (-1/2)r_1}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, x_2, x_3\in R$$

$$\Rightarrow P_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$0=\left|\lambda I-A\right|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2 \Rightarrow \lambda_1=5, \lambda_2=\lambda_3=-1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}P&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(r_1+r_2+r_3)/3}\begin{pmatrix}1&0&0&1/3&1/3&1/3\\1&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1/3&1/3&1/3\\0&1&0&-1/3&2/3&-1/3\\0&0&1&-1/3&-1/3&2/3\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{10} = P\begin{pmatrix} 5^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{10}+2 & 5^{10}-1 & 5^{10}+1 \\ 5^{10}-1 & 5^{10}+2 & 5^{10}-1 \\ 5^{10}-1 & 5^{10}-1 & 5^{10}+2 \end{pmatrix}$$

矩阵对角化的应用：

1、计算方阵的幂次

若$A = PBP^{-1}$, 则

k个

$$A^k = PB\boxed{P^{-1}\ PB}\boxed{P^{-1}\cdots PB}\boxed{P^{-1}PB}P^{-1} = PB^kP^{-1}.$$

2、计算矩阵多项式

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE \\ &= a_0PB^nP^{-1} + a_1PB^{n-1}P^{-1} + \cdots \\ &\quad + a_{n-1}PBP^{-1} + a_nPEP^{-1} \\ &= P(a_0B^n + a_1B^{n-1} + \cdots + a_{n-1}B + a_nE)P^{-1} \\ &= P\varphi(B)P^{-1}.\end{aligned}$$

矩阵对角化的应用：

1、计算方阵的幂次

若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$，则

$$A^k=PB^kP^{-1}.$$

2、计算矩阵多项式

$$\boldsymbol{\varphi(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE}$$

$$\boldsymbol{=P\varphi(B)P^{-1}}.$$

3、简化微分方程 $X'(t)=AX(t)$.

$$X'(t)=\left(x_1'(t),x_2'(t),\cdots,x_n'(t)\right)^T,A=\left(a_{ij}\right)$$

$$A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow P^{-1}X'=\Lambda P^{-1}X\Rightarrow(P^{-1}X)'=\Lambda(P^{-1}X)$$

矩阵对角化的应用：

1、计算方阵的幂次

若$A = PBP^{-1}$，则

$$A^k = PB^kP^{-1}.$$

2、计算矩阵多项式

$$\varphi(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE$$
$$= P\varphi(B)P^{-1}.$$

3、简化微分方程　$X'(t) = AX(t).$

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow P^{-1}X' = \Lambda P^{-1}X \Rightarrow (P^{-1}X)' = \Lambda(P^{-1}X)$$

$$Y(t) = P^{-1}X(t) \Rightarrow y_i'(t) = \lambda_i y_i(t), i = 1, 2, \cdots n$$

四、相似矩阵小结

相似是矩阵之间的一种关系，它具有很多良好的性质，例如：

(1) A与B相似，则$\det(A)=\det(B)$;

(2)若A与B相似，且A可逆，则B也可逆，且A^{-1}与B^{-1}相似;

(3) A与B相似，则kA与kB相似，k为常数;

(4)若A与B相似，而$f(x)$是一多项式，则$f(A)$与$f(B)$相似.

思考题1

判断下列两矩阵A, B是否相似.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

思考题1解答

解　因 $\det(A-\lambda E)=(n-\lambda)(-\lambda)^{n-1}$, A的特征值为 $\lambda_1=n, \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 又$A$是实对称矩阵,存在可逆矩阵$P_1$,使得　(或由 $n-R(A-0\lambda)=n-1$)

$$P_1^{-1}AP_1=\Lambda=diag(n,0,\cdots,0),$$

还可求得

$$\det(B-\lambda E)=(n-\lambda)(-\lambda)^{n-1},$$

即B与A有相同的特征值.

对应特征值$\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$,有$n-1$个线性无关的特征向量, 故存在可逆矩阵$P_2$,使得

$$P_2^{-1} B P_2 = \Lambda,$$

从而 $$P_1^{-1} A P_1 = P_2^{-1} B P_2,$$

即 $$P_2 P_1^{-1} A P_1 P_2^{-1} = B,$$

故A与B相似.

思考题2 设A、B分别为$m\times n$和$n\times m$阶矩阵，证明AB和BA有相同的非零特征值。

证明 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ 相似，则

$$\left|\lambda I_{m+n} - \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\lambda I_{m+n} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}\right|$$

即 $$\left|\begin{pmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}\right|$$

推出 $$\lambda^n \left|\lambda I_m - AB\right| = \lambda^m \left|\lambda I_n - BA\right|$$

因此，**AB和BA有相同的非零特征值。**

思考题2 设A、B分别为$m\times n$和$n\times m$阶矩阵，证明AB和BA有相同的非零特征值。

讨论：若A、B都是n阶方阵，

1. AB和BA的特征多项式是否相同？

2. AB和BA是否相似？

若A、B都是n阶方阵，则

$$A^{-1}(AB)A = BA$$

AB和BA: 特征多项式相同; 因而特征值相同。

但不一定相似！若A或B可逆，则AB和BA相似！

AB和BA: 行列式和迹均相同！秩不一定相同。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow AB=B, BA=0.$$

思考题3 设A、B分别为$m\times n$和$n\times m$阶矩阵,

证明 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ 相似.

分析：用行和列初等变换转换

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的初等变换：分块初等变换

1. 分块行初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ PC & PD \end{pmatrix}, (P\text{可逆});$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+PC & B+PD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

- 分块行初等矩阵：对分块单位矩阵实行1.

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, (P\text{可逆});$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

分块矩阵的初等变换：分块初等变换

1. 分块行初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ PC & PD \end{pmatrix}, (P\text{可逆});$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+PC & B+PD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

- 实行分块行初等变换：左乘相应的分块行初等矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ PC & PD \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+PC & B+PD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的初等变换：分块初等变换

2. 分块列初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix}, (P\text{可逆});$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B+AP \\ C & D+CP \end{pmatrix}.$$

- 分块列初等矩阵：对分块单位矩阵实行2.

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, (P\text{可逆});$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

分块矩阵的初等变换：分块初等变换

2. 分块列初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix}, (P\text{可逆});$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B+AP \\ C & D+CP \end{pmatrix}.$$

- 实行分块列初等变换：右乘相应的分块列初等矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B+AP \\ C & D+CP \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的初等变换：分块初等变换

例1 设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值。

解

$$\left|\lambda I_{2n}-\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda I_n & -A \\ -A & \lambda I_n \end{pmatrix}\right| = |\lambda I - A||\lambda I + A|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I & -A \\ -A & \lambda I \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda I - A & \lambda I - A \\ -A & \lambda I \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} \lambda I - A & \lambda I - A \\ -A & \lambda I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda I - A & 0 \\ -A & \lambda I + A \end{pmatrix}\right|$$

故所求$2n$阶方阵的特征值为 $\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_n$.

分块矩阵的初等变换：分块初等变换

例2 给定n阶方阵A和可逆矩阵P。试写出下列分块初等变换的表达式（矩阵相等），并给出解释。

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P^T A P \\ P \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} P^T A P \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T A \\ I \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} P^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} P.$$

应用：给定n阶方阵A和D，求可逆矩阵P：

$$P^T A P = D.$$

第五章部分例题

例1　已知向量 $x = (1, k, 1)^T$是矩阵A的逆矩阵A^{-1}的特征向量，试求常数k，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}. \quad \Rightarrow \begin{cases}k=1;-2\\ \lambda=1/4;1\end{cases}$$

解　$$A^{-1}x=\lambda x \Rightarrow x=\lambda Ax \Rightarrow \begin{cases}\lambda(3+k)=1\\ \lambda(2+2k)=k\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3+k\\2+2k\\3+k\end{pmatrix}$$

第五章部分例题

例1 已知向量 $\boldsymbol{x} = (1, k, 1)^{\mathrm{T}}$是矩阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征向量，试求常数$\boldsymbol{k}$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow \begin{cases} k=1;-2 \\ \lambda=1/4;1 \end{cases}$$

解 $$A^{-1}x=\lambda x \Rightarrow x=\lambda Ax \Rightarrow \begin{cases} \lambda(3+k)=1 \\ \lambda(2+2k)=k \end{cases}$$

由$Ax=\mu x$，亦可求出k.

例2 设矩阵*A*、*B*相似，求*x*与*y*的值，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

解法1 $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$

$$\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-1)=(\lambda-2)(\lambda-y)(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow x=y-1,y=1\quad\Rightarrow x=0,y=1$$

解法2 $|A|=|B|,tr(A)=tr(B)$

$$\Rightarrow-2=-2y,2+x=1+y\quad\Rightarrow y=1,x=0.$$

第五章部分例题

例3 已知A相似于对角阵，求x的值，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\2&3&0\end{pmatrix}.$$

解 $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_1=0,\lambda_{2,3}=1.$

再由$R(I-A)=1$，定出$x=0.$

$$I-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-x&0&0\\-2&-3&1\end{pmatrix}.$$