$$\begin{vmatrix} & & & n \\ & & \iddots & \\ & 3 & & \\ 2 & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$$

法一：(逆序数) $= (-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,1)} n! = (-1)^{1+2+\cdots+n-1} \cdot n!$

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n!$

法二：(按行展开) $= (-1)^{n+1} n \cdot \begin{vmatrix} & & & n-1 \\ & & \iddots & \\ & 2 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$

$= (-1)^{n+1+n} \cdot n(n-1) \begin{vmatrix} & & & n-2 \\ & & \iddots & \\ & 2 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{2+3+\cdots+n+1} \cdot n!$

$= (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \cdot n!$

法三：列互换

$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & 2 & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ 0 & & & & n \end{vmatrix}$

n为偶数时 $= (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot n!$

n为奇数时 $= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n!$

扫描全能王 创建