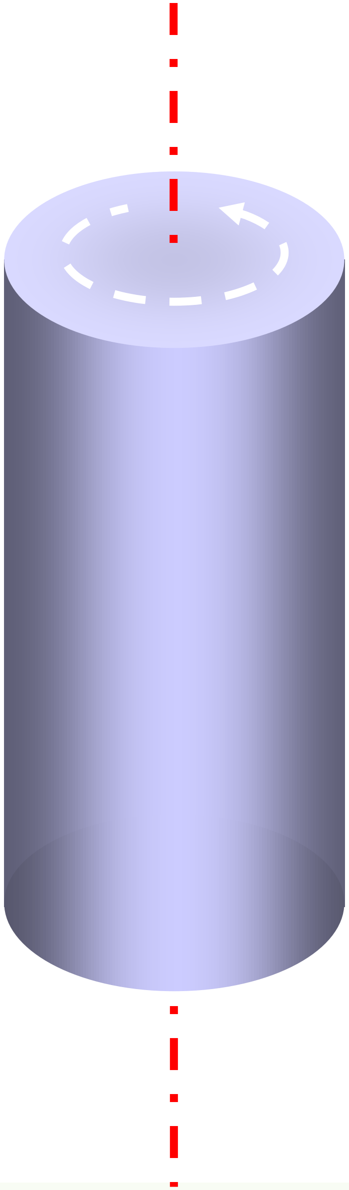
# 大学物理（上）

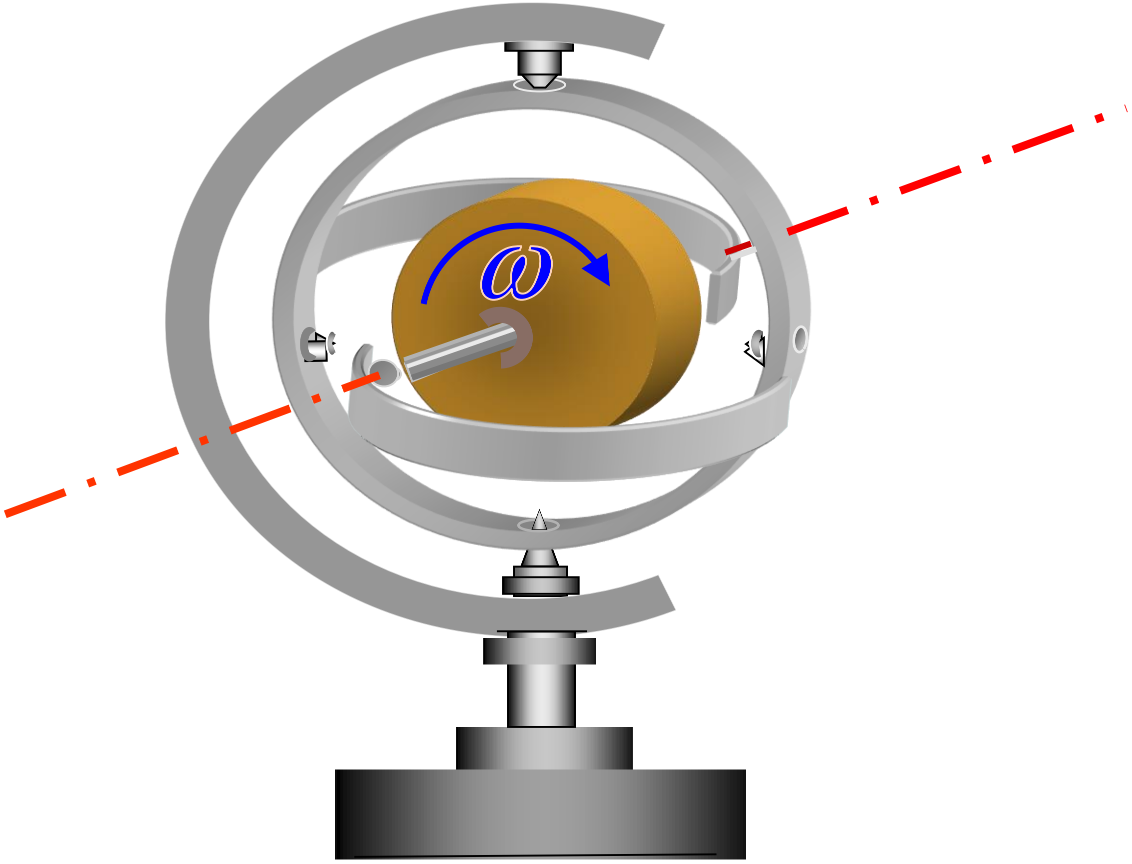
梁浴榕

电话：15527766880

email: liangyurong20@hust.edu.cn

# 第3章　刚体的定轴转动





# 第3章　刚体的定轴转动

第1节　刚体的平动和转动

第2节　刚体定轴转动定律

第3节　刚体转动的功和能

第4节　刚体的角动量定理和角动量守恒定律

第5节　进动

什么是刚体？

# 第3章　刚体的定轴转动

## Rotation of a Rigid Body About a Fixed Axis

**刚体**：在任何情况下，形状和大小都不发生变化的物体。

把刚体分割成许多微小的部分（称为**质元**），每一个质元都可看作质点。

刚体可看作一个特殊的质点系。

**特点：刚体在运动中各质点之间的距离保持不变。**

可运用质点系的基本定律结合这一特点来研究刚体的运动。

# 第1节　刚体的平动和转动

## Translation and Rotation of a Rigid Body

刚体的运动形式有时相当复杂，但总可以看作两种最简单的运动的组合。

**1、平动：**刚体中所有质元的运动轨迹都一样，或刚体内任意两点的连线总保持平行。

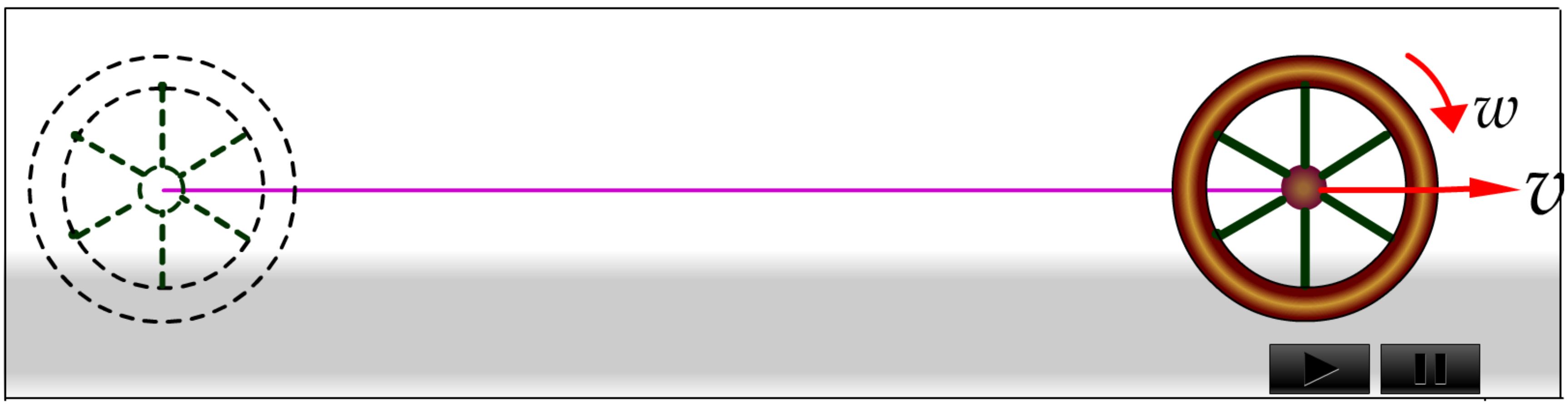
刚体的平动可用任意一点的运动来代表，

通常选其**质心**。


刚体平动 → 质点运动

**2、定轴转动：**刚体中所有质元都绕同一条固定不动的直线作圆周运动。这一直线称为**转轴**。

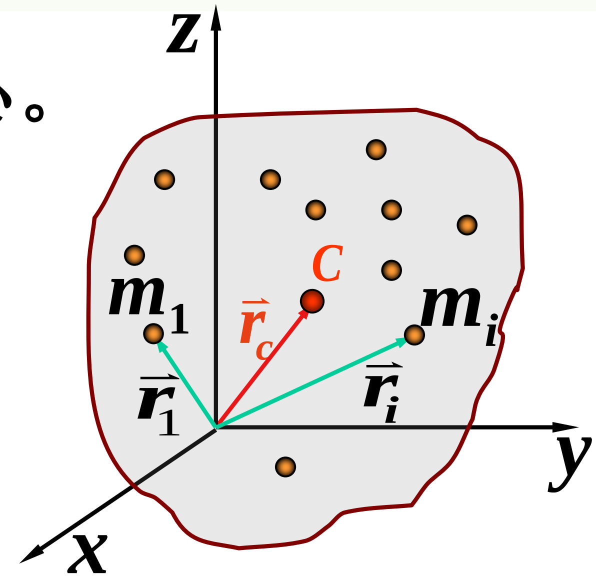
刚体的运动＝**平动**＋（绕某一轴的）**转动**



# 刚体的运动：平动+转动

# 一、刚体的平动　质心

**1、质心：** 质点系质量分布的中心。



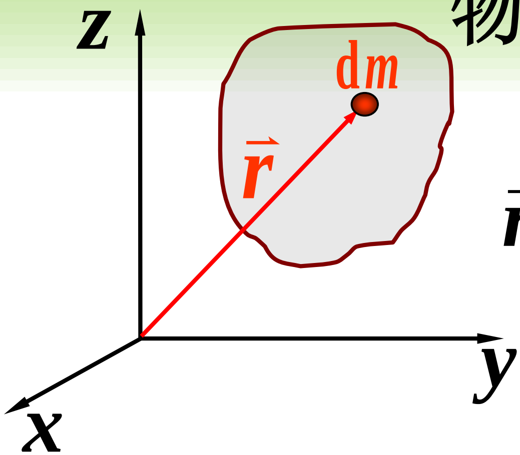

质心的位矢：

$$\vec{r}_c=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}=\frac{1}{m}\sum m_i\vec{r}_i$$

**直角坐标系中的分量式为：**

$$x_c=\frac{\sum_i m_i x_i}{m},\quad y_c=\frac{\sum_i m_i y_i}{m},\quad z_c=\frac{\sum_i m_i z_i}{m}$$

质心的位矢随坐标系的选取而变化，但对一个质点系，质心的位置是固定的。




物体质量连续分布时：

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m$$

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{m}\int x\mathrm{d}m \\ y_c = \dfrac{1}{m}\int y\mathrm{d}m \\ z_c = \dfrac{1}{m}\int z\mathrm{d}m \end{cases}$$

质量均分分布：质心 ➡ 几何对称中心。

**注意：质心不一定在刚体上（圆环）。**

## 2、质心运动定理

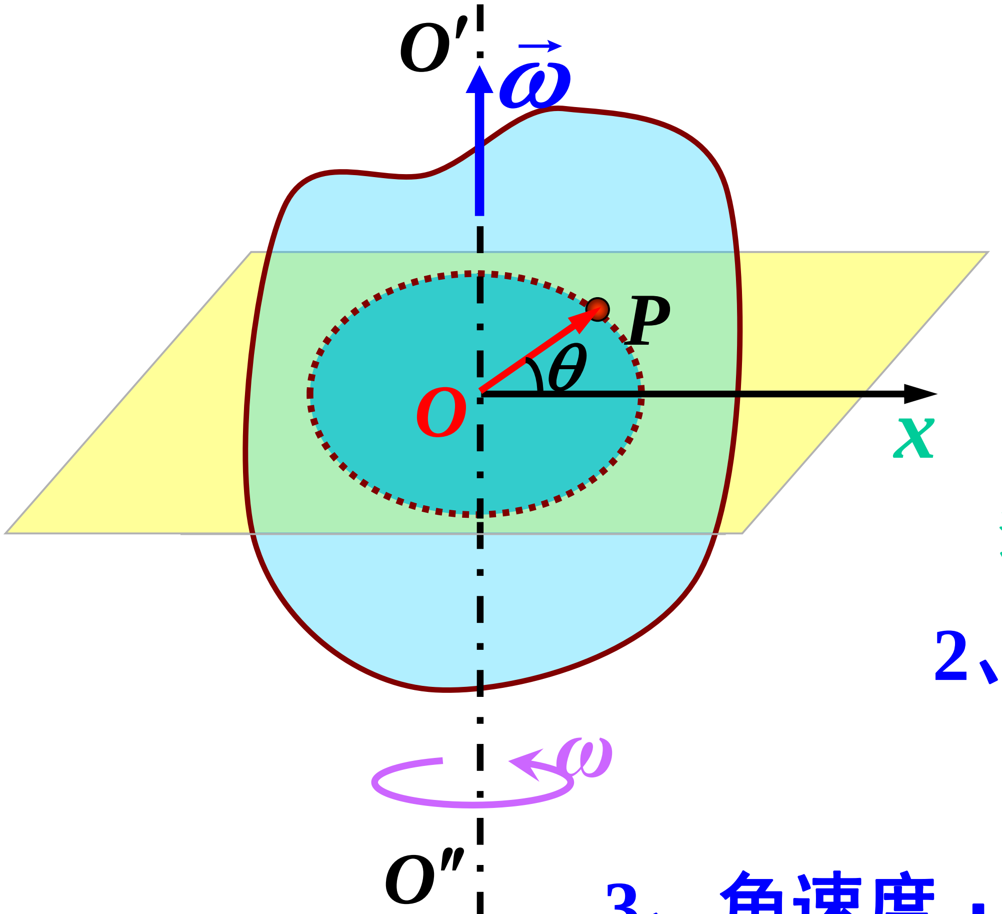
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\sum m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{v}_i \qquad m\vec{v}_c = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{p}$$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_c$$

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_c}$$

## 二、刚体定轴转动的描述：




**基本特征：** 除转轴外所有点都在⊥转轴的平面内作圆周运动，且在相等的时间内转过的角度都相等。

**1、角坐标**

$\theta(t)$为刚体定轴转动的运动方程。 单位：rad

**2、角位移：** 角坐标的增量。

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

**3、角速度：** $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 单位：rad/s

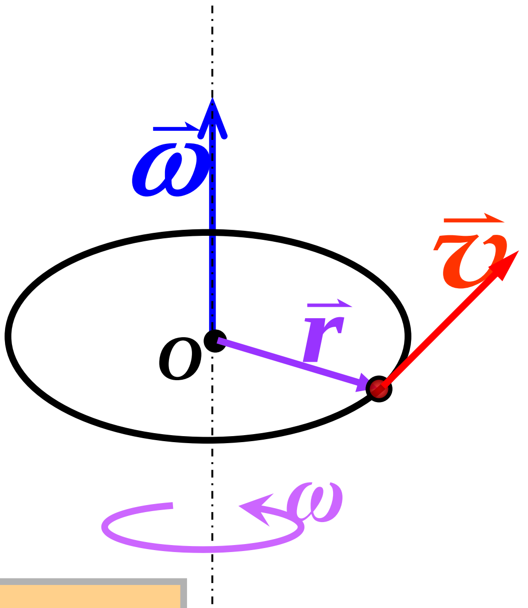
角速度**矢量** $\vec{\omega}$：方向与刚体转动方向符合右手螺旋法则。

不是刚体的转动方向！ 可用正负号表示其方向。

**4、角加速度：** $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ 单位：$1/\mathrm{s}^2$

角加速度矢量 $\vec{\beta}$：方向沿角速度矢量 $\vec{\omega}$ 的增量 $\Delta\vec{\omega}$ 方向。

**5、定轴转动的特点**




任一质点 $\Delta\theta, \vec{\omega}, \vec{\beta}$ 均相同，

但 $\vec{v}, \vec{a}$ 不同。

**6、角量与线量的关系：**

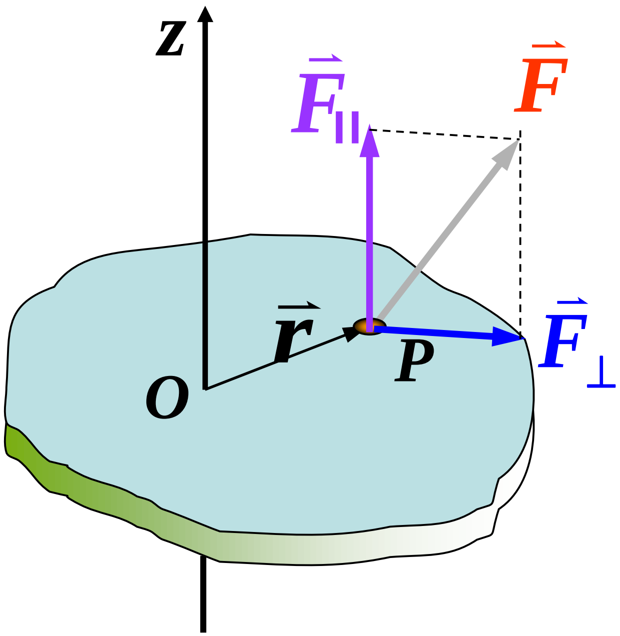
$$v = r\omega \qquad a_t = r\beta \qquad a_n = r\omega^2$$

矢量式：$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\quad \vec{a}_t = \vec{\beta} \times \vec{r}$ $\quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$

# 第2节 刚体定轴转动定律

## Principle of Rotation of a Rigid Body About a Fixed Axis

## 一、力对定轴转动刚体的力矩




将刚体所受的力分解为两个正交的分力：

$\vec{F}_{II}$ 对刚体绕定轴转动不起作用，

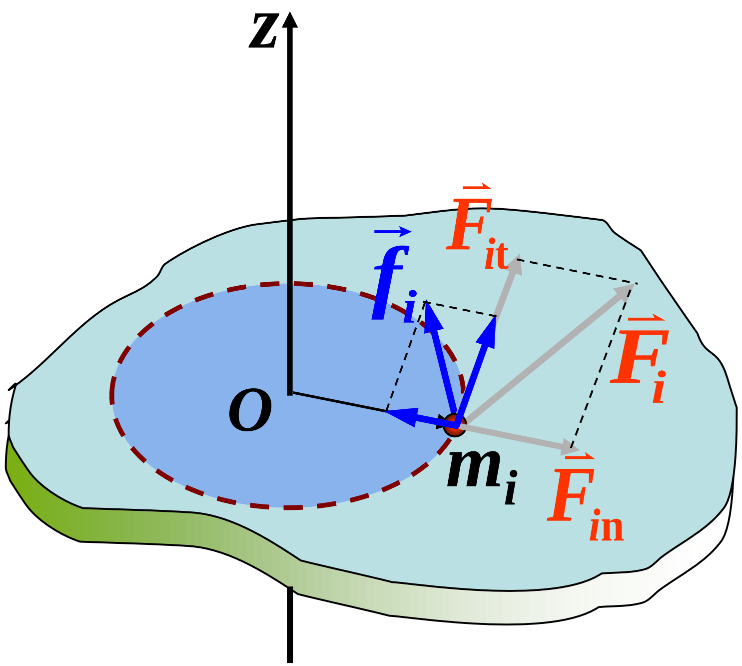
仅 $\vec{F}_{\perp}$ 才有对于转轴的力矩。

在讨论刚体的定轴转动时，可只考虑 $\vec{F}_{\perp}$ 的力矩。

即力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ 中，$\vec{F}$ 可理解为 $\vec{F}_{\perp}$。

**力矩的方向？** 沿转轴方向，可用**正负号**表示。

## 二、刚体定轴转动定律




由牛顿第二定律得：

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$$

切向分量式：

$$F_{it} + f_{it} = m_i a_{it} = m_i r_i \beta$$

两端同乘 $r_i$：

$$\boxed{F_{it} r_i} + \boxed{f_{it} r_i} = m_i r_i^2 \beta$$

外力对转轴的力矩　　内力对转轴的力矩

$$\sum_i F_{it} r_i + \sum_i f_{it} r_i = \sum_i m_i r_i^2 \beta = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \beta$$

$$\sum_i F_{it} r_i + \underbrace{\boxed{\sum_i f_{it} r_i}}_{0} = \sum_i m_i r_i^2 \beta = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\beta$$

**第一项**为**刚体所受外力对转轴力矩的总和*M*；**

**第二项**为刚体所受内力对转轴力矩的总和。

**内力对转轴力矩的总和等于零。**

**第三项**中括号内的量：与刚体的运动以及所受的外力无关。

这一表示刚体本身特性的物理量叫刚体对转轴的

**转动惯量**：

$$\boxed{J = \sum_i m_i r_i^2}$$

单位：千克·米$^2$（kg·m$^2$）

$$\boxed{M = J\beta}$$ **刚体定轴转动定律**

**在定轴转动中，刚体所受各外力对转轴的合外力矩等于刚体对该轴的转动惯量和角加速度的乘积。**

与牛顿第二定律比较：

$M = J\beta$ 与 $\vec{F} = m\vec{a}$ 地位相当

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{M} = J\vec{\beta}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{M} \longrightarrow \vec{F} \\ \vec{\beta} \longrightarrow \vec{a} \\ J \longrightarrow m \end{array}\right.$$

$m$反映质点的平动惯性

**$J$反映刚体的转动惯性**

## 三、转动惯量的计算

$$J=\sum_i m_i r_i^{\ 2}$$

### 1、与转动惯量有关的因素：

- 刚体的总质量；
- 刚体的质量相对轴的分布；
- 转轴的位置。

若质量连续分布：

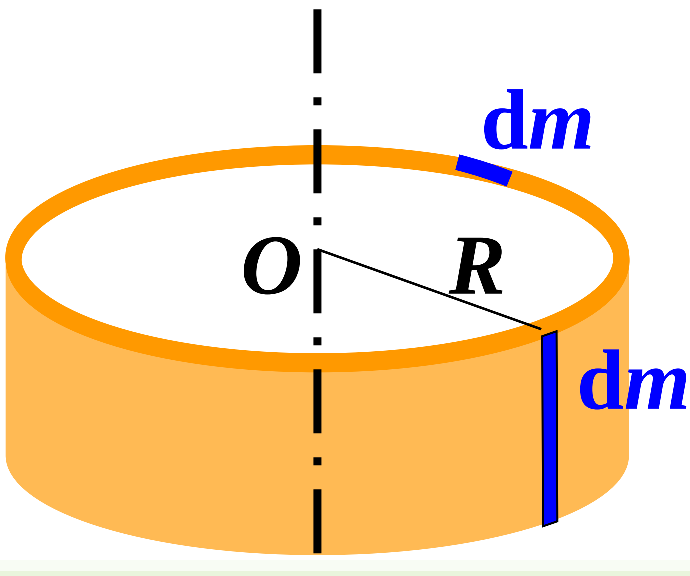
$$J=\int r^2 \mathrm{d}m \qquad \mathrm{d}m=\begin{cases}\lambda\cdot \mathrm{d}l\\ \sigma\cdot \mathrm{d}s\\ \rho\cdot \mathrm{d}V\end{cases}$$

**例1、**求质量为$m$、半径为$R$的均匀圆环的转动惯量。轴与圆环平面垂直并通过圆心。

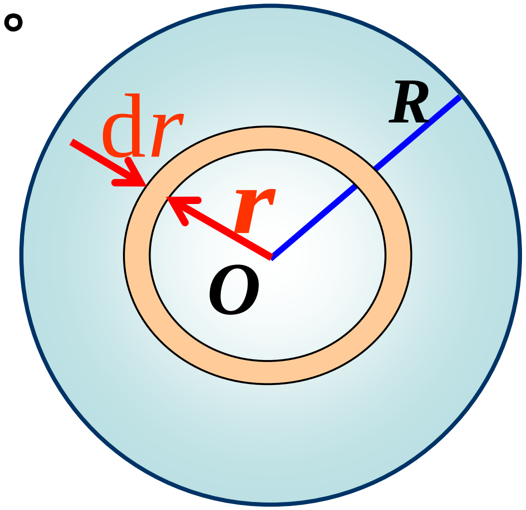
**解：** $J=\int r^2 \mathrm{d}m = R^2\int \mathrm{d}m = mR^2$

**薄圆筒？**

**结果相同。**



**例2、**求质量为$m$、半径为$R$、厚为$l$ 的均匀圆盘的转动惯量。轴与盘平面垂直并通过盘心。




**解：**取半径为$r$ 宽为$\mathrm{d}r$ 的薄圆环,

$$\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r \qquad \mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$$

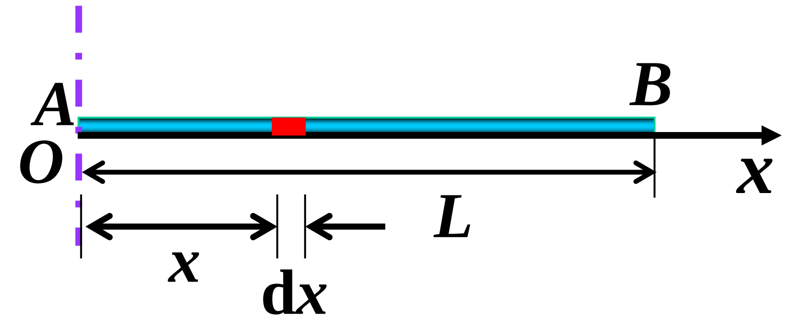
$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m = \sigma 2\pi r^3\mathrm{d}r$$

$$J = \int \mathrm{d}J = \int_0^R \sigma 2\pi r^3\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4$$

$$\because \sigma = \frac{m}{\pi R^2} \qquad \therefore J = \frac{1}{2}mR^2$$

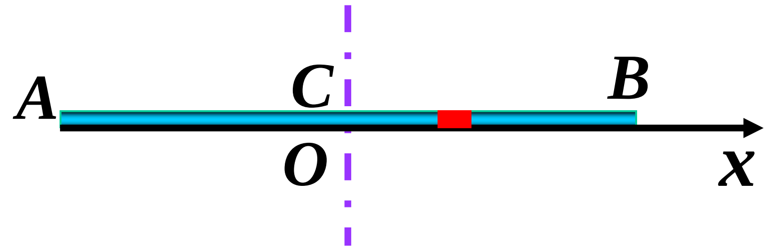
实心圆柱对其对称轴的转动惯量也是 $mR^2/2$。

**例3、**求长为$L$、质量为$m$ 的均匀细棒对图中不同轴的转动惯量。




**解：** 取如图坐标，$\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}x$

$$J_A=\int_0^L x^2\lambda \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\lambda L^3=\frac{1}{3}mL^2$$




$$J_C=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\lambda \mathrm{d}x=\frac{1}{12}mL^2$$

## 2、平行轴定理

前例中$J_C$表示刚体通过质心的轴的转动惯量，$J_A$表示刚体通过棒端的轴的转动惯量。两轴平行，相距$L/2$。

$$J_A - J_C = \frac{1}{3}mL^2 - \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{4}mL^2 = m(\frac{L}{2})^2$$

$$J_A = J_C + m(\frac{L}{2})^2$$

推广上述结论，若有任一轴与过质心的轴平行，相距为$d$，刚体对其转动惯量为$J$，则有：

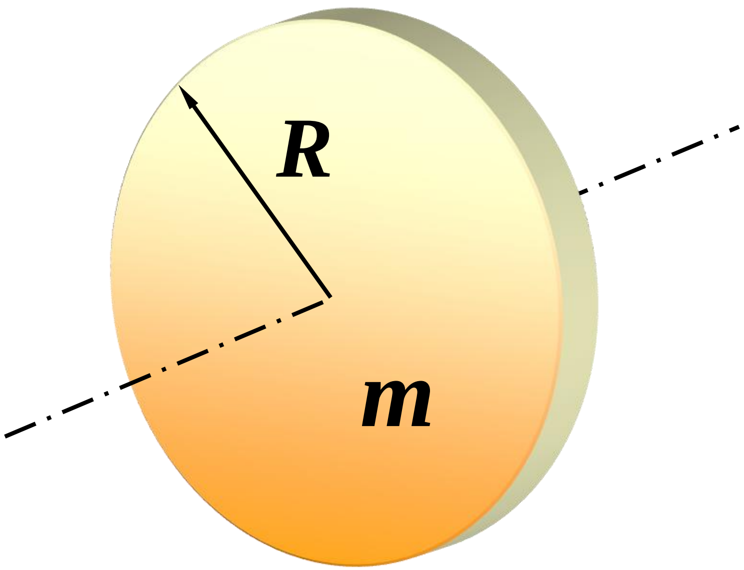
$$\boxed{J = J_C + md^2}$$

——平行轴定理

# 两个常用的结果

匀质薄圆盘

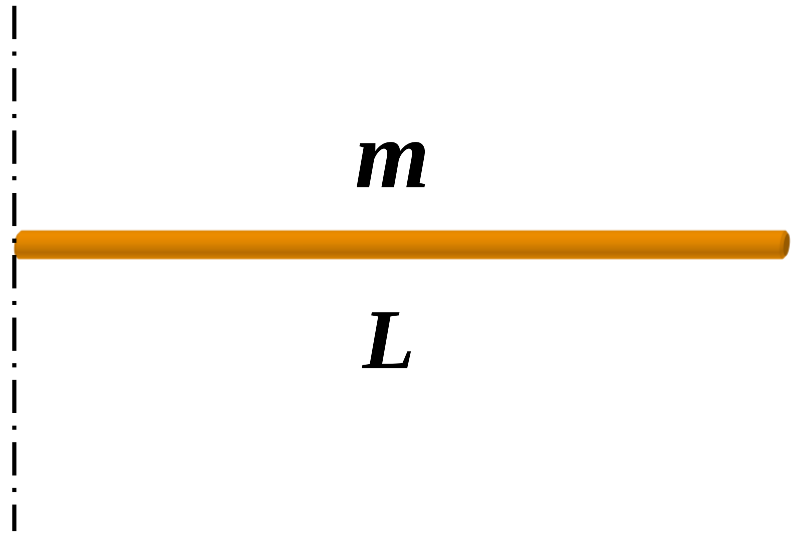
转轴通过中心垂直盘面




$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

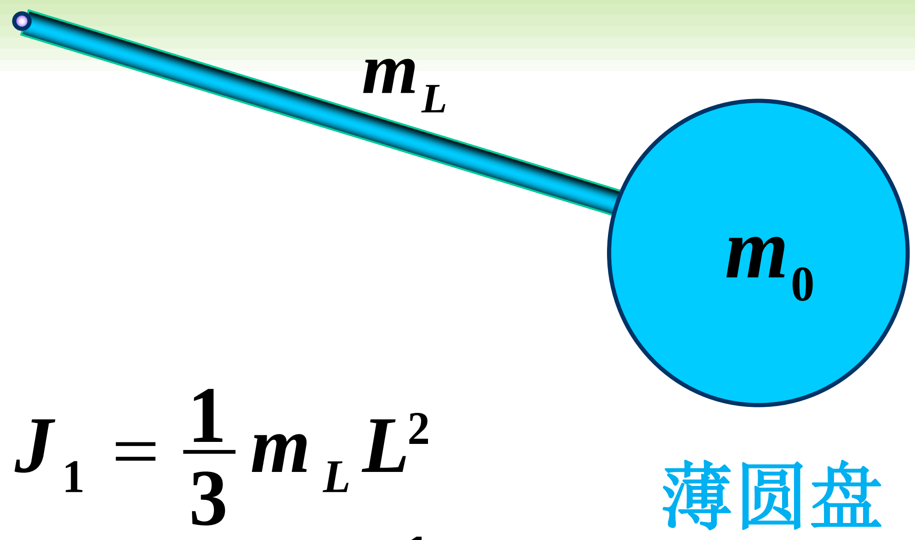
匀质细直棒

转轴通过端点与棒垂直




$$J = \frac{1}{3} m L^2$$

**例4、**右图所示刚体对经过棒端且与棒垂直的轴的转动惯量如何计算？（棒长为$L$、圆半径为$R$）




**解：** 棒对转轴的转动惯量 $J_1 = \frac{1}{3} m_L L^2$

圆盘对自身对称轴的转动惯量 $J_0 = \frac{1}{2} m_0 R^2$

圆盘对转轴的转动惯量

$$J_2 = J_0 + m_0 d^2 = \frac{1}{2} m_0 R^2 + m_0 (L + R)^2$$

$\therefore$ 刚体对转轴的转动惯量

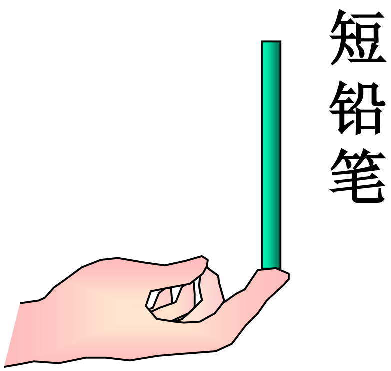
$$J = \frac{1}{3} m_L L^2 + \frac{1}{2} m_0 R^2 + m_0 (L + R)^2$$

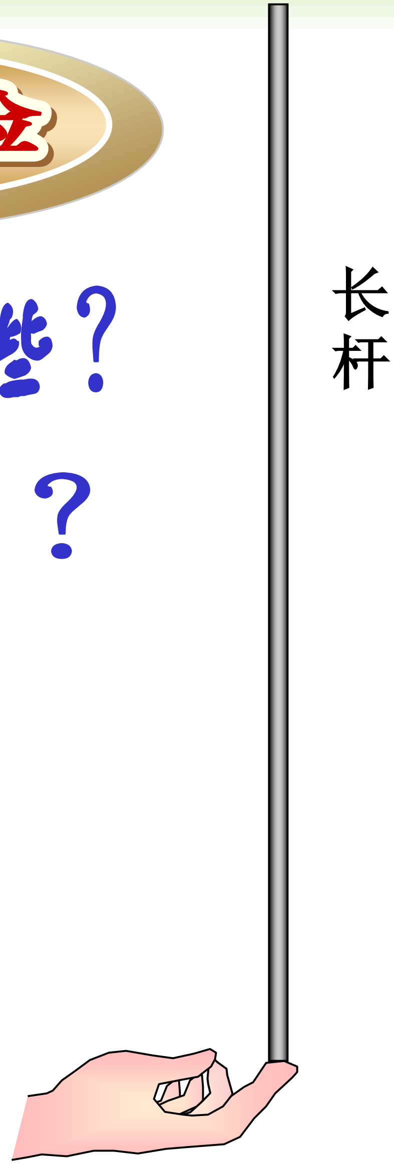
# 四、刚体定轴转动定律的应用

**小实验**

哪个易控些？

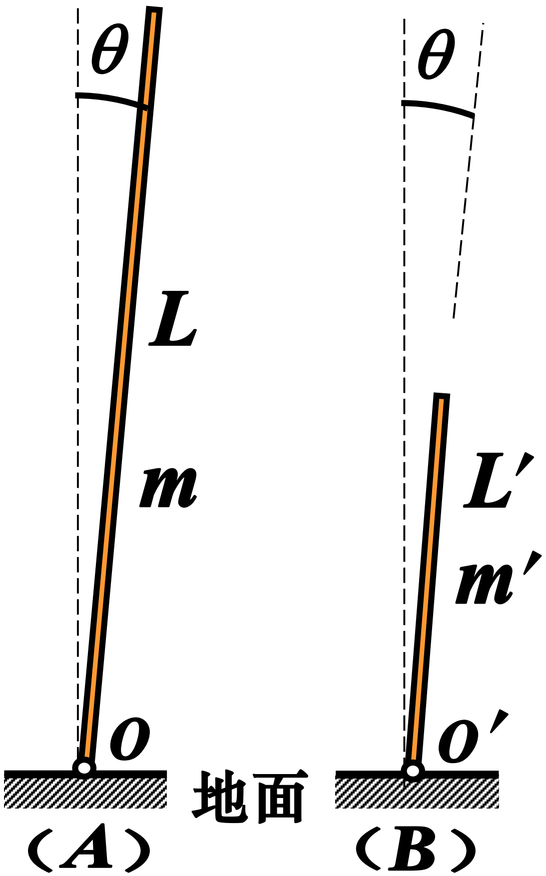
为什么？




# 例：已知

两匀直细杆 $L=2L'$




从小倾角 $\theta$ 处静止释放

$$\begin{cases} \boxed{M=J\beta} \\ M=mg\dfrac{1}{2}L\sin\theta \\ J=\dfrac{1}{3}mL^2 \end{cases}$$

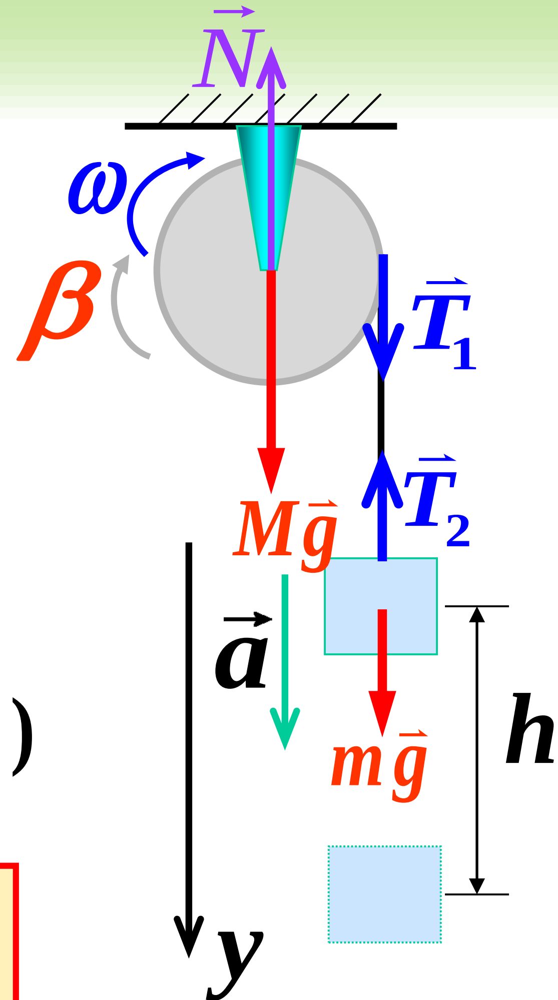
$$\Rightarrow \beta=\frac{3g\sin\theta}{2L}$$

与匀质直杆的质量大小无关

$$\Rightarrow \frac{\beta'}{\beta}=\frac{L}{L'}=2$$

短杆的角加速度大，更难控制！

**例1、** 一个质量为$M$、半径为$R$的定滑轮（当作均匀圆盘）上面绕有细绳，绳的一端固定在滑轮边上，另一端挂一质量为$m$的物体而下垂。忽略轴处摩擦，求物体$m$由静止下落高度$h$时的速度和此时滑轮的角速度。**(3-T3)**




**解：** 对$M$： $TR = J\beta \quad \left(J = \frac{1}{2}MR^2\right)$

对$m$： $mg - T = ma$

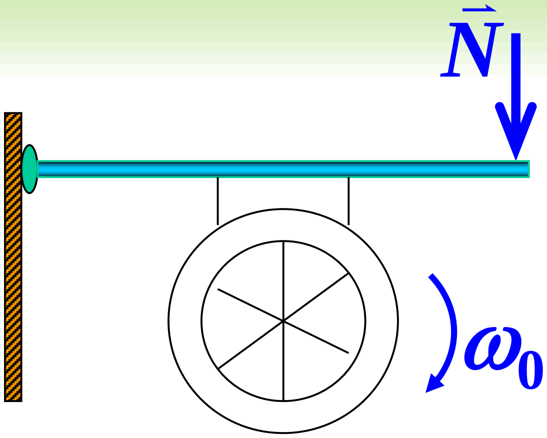
**刚体与物体的运动学关系为：** $\boxed{a = R\beta}$

解方程得： $$a = \frac{m}{m + \frac{M}{2}}g$$

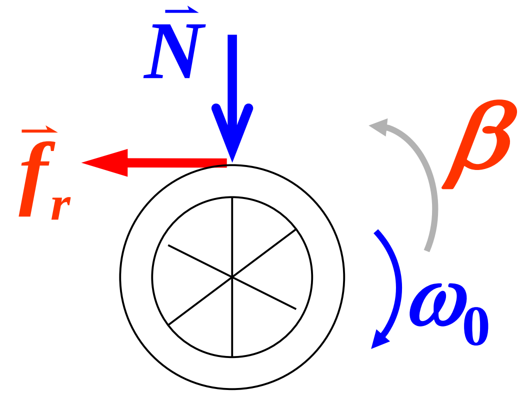
$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}$$

**例2、**一飞轮质量为60kg，半径0.25m，正以每分1000转的转速转动。要制动飞轮，在5.0秒内使它均匀减速而停下来。求闸瓦对轮子的压力$N$多大？设闸瓦与飞轮间的滑动摩擦系数为0.8。




**解：飞轮制动时的角加速度：**




$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \qquad \beta = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$\omega_0 = 1000\ \mathrm{r/min} = 104.7\ \mathrm{rad/s}$$

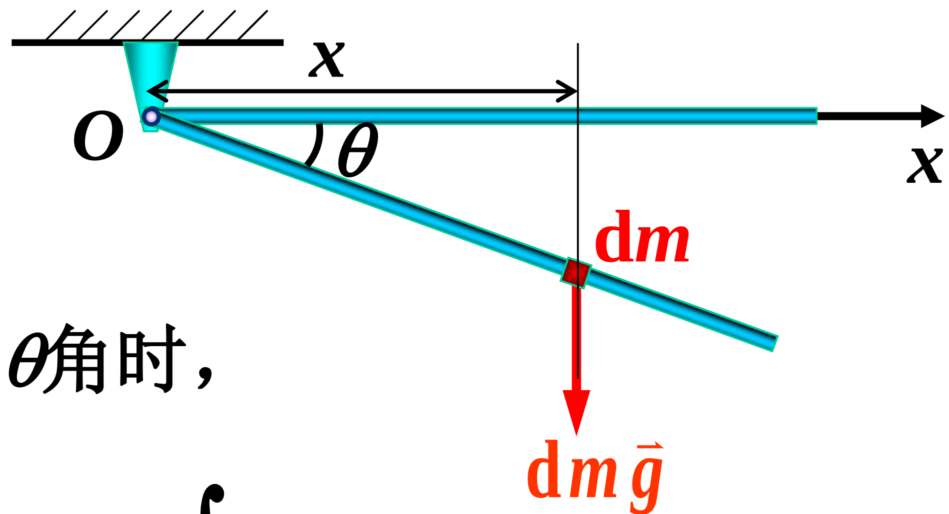
$$\omega = 0\ ,\quad t = 5\ \mathrm{s} \qquad \therefore \beta = -20.9\ \mathrm{rad/s^2}$$

外力矩是摩擦阻力矩，角加速度为负值。

$$M = -f_r R = -\mu N R \quad = \quad M = J\beta = mR^2\beta$$

$$\therefore N = -mR\beta/\mu = 392\ \mathrm{N}$$

**例3、**一根长为$l$ 、质量为$m$ 的均匀细直棒，其一端有一固定的光滑水平轴，因而可以在竖直平面内转动。最初棒静止在水平位置，求它由此下摆$\theta$ 角时的角加速度和角速度。




**解：**重力对$O$的力矩使棒加速下摆。

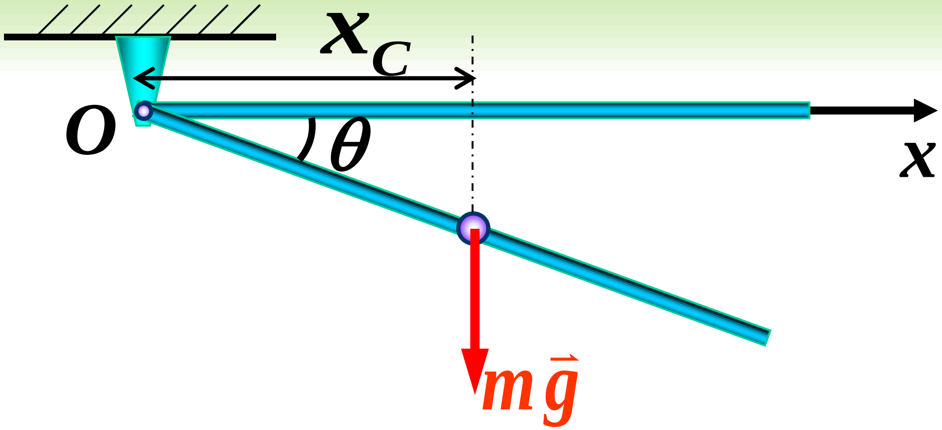
取质元d$m$，当棒处在下摆$\theta$角时，

重力矩为：

$$M = \int g x \mathrm{d}m = g \int x \mathrm{d}m$$

据质心定义：$x_C = \dfrac{\int x \mathrm{d}m}{m}$ $\quad \therefore M = m g x_C$

$$x_c = \frac{1}{2} l \cos\theta$$




$$M = \frac{1}{2} mgl \cos\theta$$

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2} mgl \cos\theta}{\frac{1}{3} ml^2} = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$\boxed{\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$$

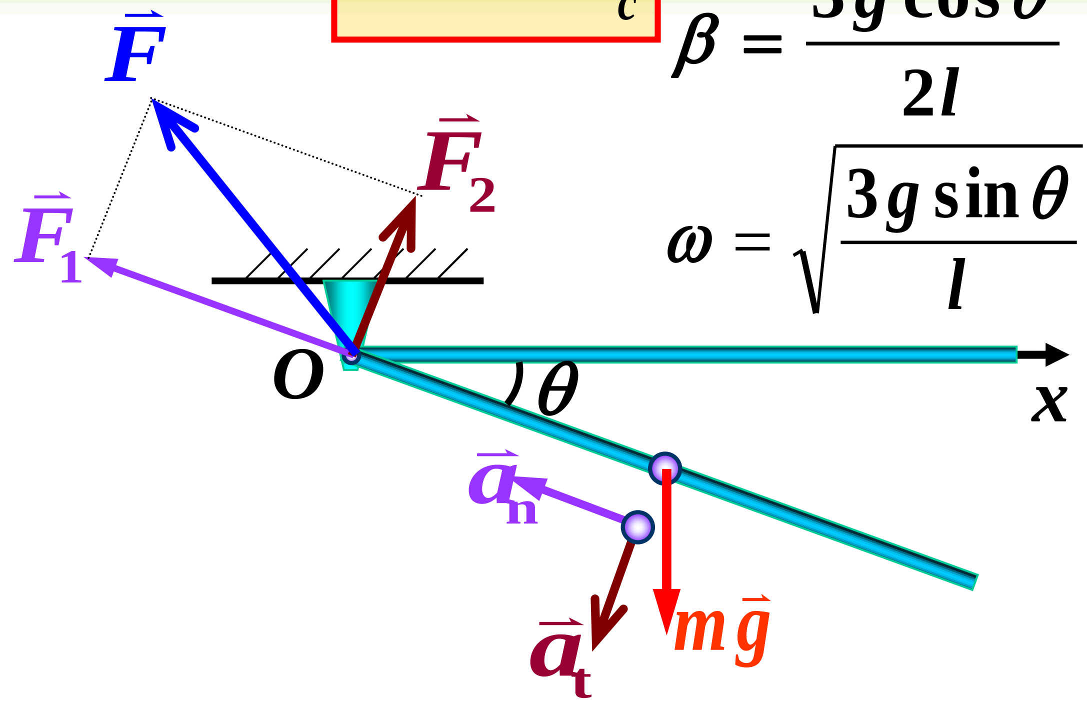
$$\frac{3g\cos\theta}{2l} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^{\omega} \omega \mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta} \frac{3g}{2l} \cos\theta \mathrm{d}\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

求此时棒受轴的力的大小和方向。 $\boxed{\vec{F}=m\vec{a}_c}$

$$\beta=\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$




质心的法向加速度：

$$a_n=\omega^2\frac{l}{2}=\frac{3g\sin\theta}{2}$$

切向加速度：

$$a_t=\beta\frac{l}{2}=\frac{3g\cos\theta}{4}$$

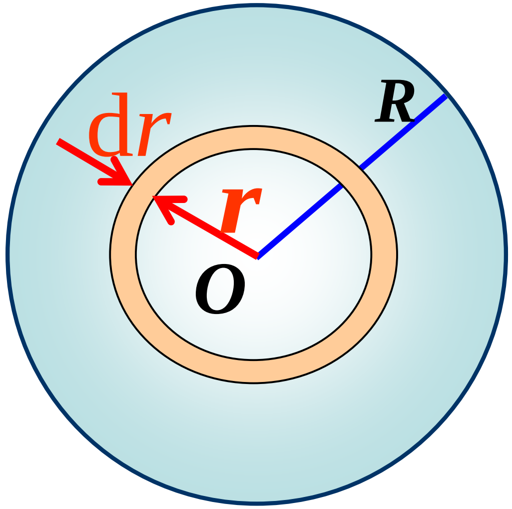
法向： $$F_1-mg\sin\theta=ma_n=\frac{3}{2}mg\sin\theta$$

切向： $$mg\cos\theta-F_2=ma_t=\frac{3}{4}mg\cos\theta$$

$$F_1=\frac{5}{2}mg\sin\theta\qquad F_2=\frac{1}{4}mg\cos\theta$$

**例4、**均质圆盘平放在水平桌面上，设盘与桌面的摩擦系数为 $\mu$，圆盘最初以角速度 $\omega_0$ 绕通过中心且垂直盘面的轴旋转，问它将经过多少时间才停止转动？

**解：** 由于摩擦力不是集中作用于一点，而是分布在整个圆盘与桌子的接触面上，**摩擦阻力矩的计算要用积分法！**




取环形质元：$dm = \sigma \cdot 2\pi r dr$

所受阻力矩为：$dM = r\mu dm g$

$$M = \int_0^R 2\pi\mu g\sigma r^2 dr = \frac{2}{3}\pi\mu g\sigma R^3$$

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2} \qquad M = \frac{2}{3}\mu m g R$$

$$\boxed{M=\frac{2}{3}\mu mgR}$$

阻力矩使圆盘减速：

$$-\frac{2}{3}\mu mgR=J\beta \quad =\frac{1}{2}mR^{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

设圆盘经过时间$t$ 停止转动,

$$-\frac{2}{3}\mathrm{g}\mu\int_{0}^{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}R\int_{\omega_0}^{0}\mathrm{d}\omega$$

$$t=\frac{3}{4}\frac{R}{\mathrm{g}\mu}\omega_0$$