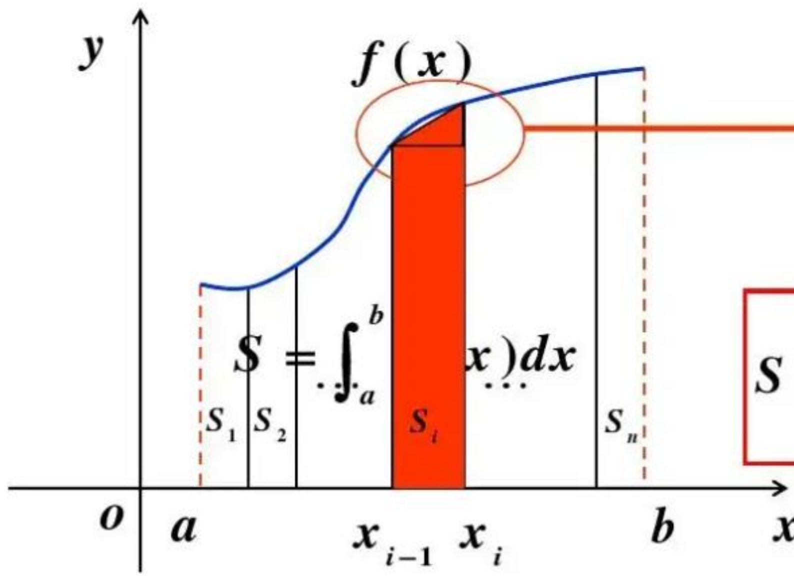
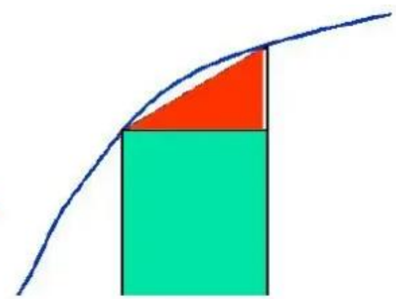
微积分学





$$S=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}S_i$$

一　函数的定义

二　函数的初等性质

三　函数的四则运算

四　复合函数与反函数

五　初等函数

一　函数的定义

函数的定义

定义1 设 x 与 y 是两个变量, D 是一非空数集. 若对每个 $x \in D$, 按某一确定的规则 f 总有唯一的数值 y 与之对应, 则称 y 或 f 为 x 的函数, 记作 $y = f(x)$; 称 D 为此函数的定义域, 而 x 与 y 分别称为函数 f 的自变量与因变量.

若对取定的 $x = x_0 \in D$, 与 x_0 对应的因变量为 y_0, 则称 y_0 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记为 $f(x_0)$. 通常称 "函数 $y = f(x)$" 为 "函数 $f(x)$" 或 "函数 f". 函数 f 的全体函数值构成的集合 $W = \{f(x) : x \in D\}$ 称为 f 的值域.

注

（1）一般情况, 给定一个函数须指明定义域. 有时不指明函数的定义域, 则默认其定义域是使该函数有意义的全体实数 x 组成的集合, 即

$$f \text{ 的定义域} = \{x : f(x) \in \mathbf{R}\}.$$

(2) 两个函数相同当且仅当他们有相同的定义域和对应法则.

例如, $f(x)=1,\ x\in\mathbf{R}$ 和 $f(x)=1,\ x\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 是不同的函数; 而 $f(x)=1,\ x\in\mathbf{R}$ 和 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x,\ x\in\mathbf{R}$ 是相同的函数.

(3) 函数的表示方法:

(a) 解析法(公式法): $y=\sin^2 x$ (b) 图像法

(c) 列表法 (d) 参数表示: $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in D.$

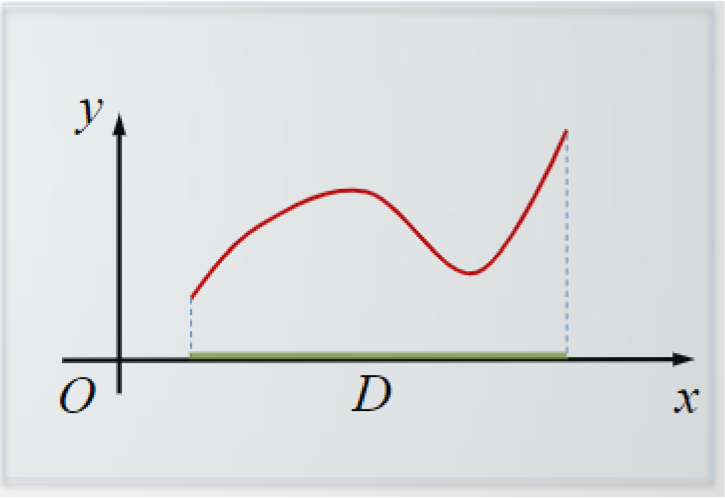
(e) 隐式表示: 例如通过方程 $F(x,y)=0$ 来确定 x 与 y 的函数关系.

➢ 函数的图形

函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形是 xOy 平面的一个点集

$$G=\{(x,f(x)):x\in D\}$$

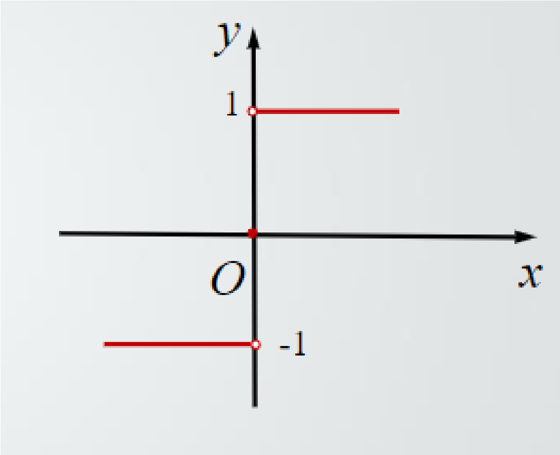
在很多情况下函数 f 的图形是一条平面曲线, 此时也将图形 G 说成是“曲线 $y=f(x)$ ”.



➢ 几个重要的分段函数

(1) 符号函数

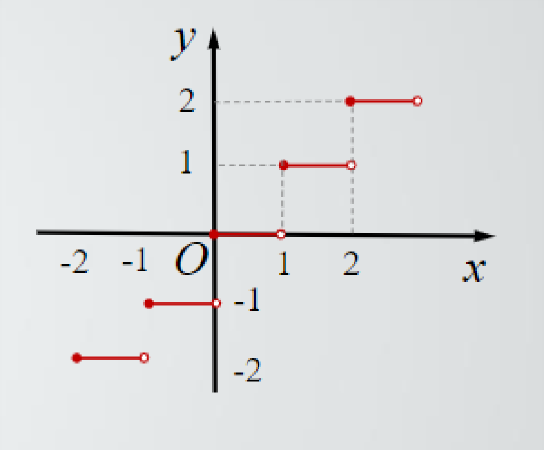
$$sgn(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$



定义域是$\mathbf{R}$, 值域是 $\{-1,0,1\}$.

(2) 取整函数

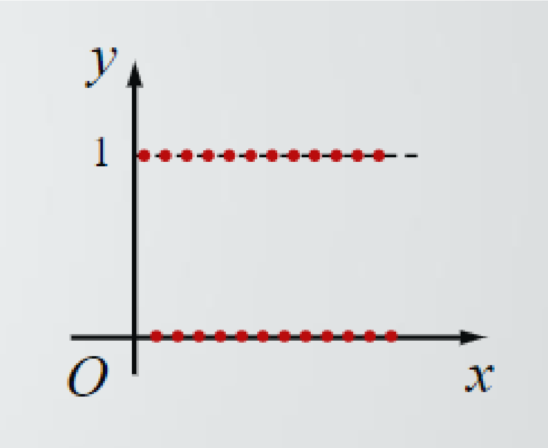
对任给的$x\in\mathbf{R}$, 以 $[x]$ 记不超过 x 的最大整数，如 $[\sqrt{2}]=1,\ [-\pi]=-4,\ [0]=0.$ 称 $f(x)=[x]$ 为“取整函数”. 定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为整数集.



(3) Dirichlet(狄利克雷)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

定义域是 $\mathbf{R}$, 值域是 $\{0,1\}$.



二　函数的初等性质

下面介绍函数的单调性、奇偶性、周期性与有界性，它们有很明显的几何意义，称为函数的“初等性质”.

单调性

定义2 设函数$f(x)$在区间 I 上有定义.

(i) 若 $\forall\, x, y \in I$, 当$x < y$时恒有$f(x) \le f(y)$（或 $f(x) \ge f(y)$)，则称函数 $f(x)$ 为 I 上的单调增(或单调减)函数. 单调增与单调减函数统称为单调函数.

(ii) 若 $\forall\, x, y \in I$, 当$x < y$时恒有$f(x) < f(y)$(或$f(x) > f(y)$)，则称函数$f(x)$为 I 上的严格单调增(或严格单调减)函数. 严格单调增与严格单调减函数统称为严格单调函数.

在几何上，单调增(减)函数的图形随着自变量的增大而逐渐升高(下降)

例 证明 $y = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格单调函数.

证： $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$
\begin{aligned}
x_2^3 - x_1^3 &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) \\
&= (x_2 - x_1)\big((x_2 + \frac{x_1}{2})^2 + \frac{3}{4} x_2^2\big) > 0,
\end{aligned}
$$

即 $x_2^3 > x_1^3$. 故该函数为 $\mathbf{R}$ 上是严格单调增函数.

奇偶性

定义3 设函数$f(x)$的定义域 D 关于原点对称, 即 $\forall x \in D$, 有 $-x \in D$,

(i) 若 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

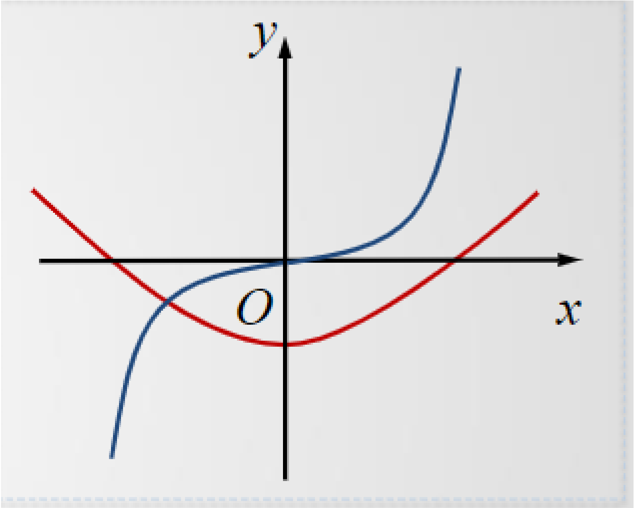
(ii) 若 $\forall x \in D$,有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

从几何上，奇函数的图形关于原点对称;偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 定义域关于原点对称的函数都能表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

提示： $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$,

$f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.



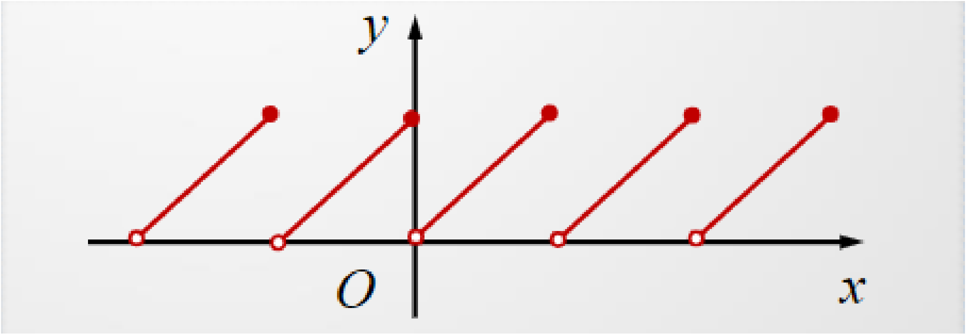
定义4 设函数$f(x)$的定义域为D. 若存在正常数T, 使得$\forall x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x+T)=f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, 并称 T 为 $f(x)$ 的一个周期.

若T为$f(x)$的一个周期, 则$nT\,(n \in \mathbb{N}^+)$ 都是 $f(x)$ 的周期. 若 $f(x)$ 有最小正周期, 通常将这个最小正周期称为该函数的基本周期.

注 (1) 存在没有最小正周期的非常值函数，例如Drichlet函数.

(3) 从几何上看, 周期函数的图形由它在区间 $[0, T]$ 上的图形平移而成. 因此，研究周期函数的性质，只需研究其在某个长度为 T 的区间上的性质.

(4) 注意验证条件 $x \pm T \in D$.



例 证明任意正有理数都是Drichlet函数 $D(x)$ 的周期.

证：设 r 是正有理数, 下面证 r 是 $D(x)$ 的周期.

任取实数 x，

若 $x \in \mathbf{Q}$ (有理数集), 则 $x + r \in \mathbf{Q}$，故 $D(x+r) = 1 = D(x)$.

若 $x \notin \mathbf{Q}$, 则 $x + r \notin \mathbf{Q}$，故 $D(x+r) = 0 = D(x)$.

因此 r 是 $D(x)$ 的一个周期.

回顾： $$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}. \end{cases}$$

例 若T为$f(x)$的基本周期, a, b 是常数, $a>0$. 证明 $p=\frac{T}{a}$ 是函数 $\varphi(x)=f(ax+b)$ 的基本周期.

证：设 D 是函数 f 的定义域, D' 是函数 φ 的定义域，则

$$D'=\{x : ax+b\in D\}.$$

(1) 先验证$\forall\ x\in D'$, 有 $x\pm\frac{T}{a}\in D'$. 事实上$\forall\ x\in D'$, 有

$$a(x\pm\frac{T}{a}+b)=ax+b\pm T.$$

因为 $ax+b\in D$ 且设若T为 f的周期, 所以 $ax+b\pm T\in D$.
故 $x\pm\frac{T}{a}\in D'$.

(2) 证明 $\frac{T}{a}$ 是φ的周期:

$$\varphi(x+\frac{T}{a})=f(a(x+\frac{T}{a})+b)=f(ax+b+T)=f(ax+b)=\varphi(x).$$

(3) 证明 $\frac{T}{a}$ 是 φ 的基本周期. 即证φ 的任何周期 q, 都有 $q \geq \frac{T}{a}$ 或 $aq \geq T$. 注意到若T为 f 的基本 周期, 于是要证 $aq \geq T$, 只需证 aq是 f 的一个周期. 事实上, $\forall x \in D$, 由 q是 φ的周期得

$$
\begin{aligned}
f(x+aq) &= f(a(\frac{x-b}{a}+q)+b) = \varphi(\frac{x-b}{a}+q) \\
&= \varphi(\frac{x-b}{a}) = f(a\frac{x-b}{a}+b) = f(x).
\end{aligned}
$$

因此 aq 是f 的周期, 从而 $aq \geq T$. 证毕.

推论：由于 $\sin x$ 的基本周期是 2π, 故 $\sin(ax+b)$ 的基本周期是 $2\pi/a$.

有界性

定义5 设函数$f(x)$的定义域为D. 若存在常数 B, 使得$\forall x \in D$, 有 $f(x) \le B$(或 $f(x) \ge B$), 则说函数 $f(x)$在D上有上界(或有下界), 且B 为函数 $f(x)$ 的一个上界(或下界). 若 $f(x)$ 在 D上既有上界又有下界, 则说 $f(x)$ 在 D 上有界, 并称$f(x)$为D上的有界函数; 否则, 便说$f(x)$在 D 上无界, 称$f(x)$为 D上的无界函数.

- 有上界: $\exists\, M \in \mathbf{R},\ s.t.\ \forall\, x \in D,$ 有 $f(x) \le M.$
- 有下界: $\exists\, L \in \mathbf{R},\ s.t.\ \forall\, x \in D,$ 有 $f(x) \ge L.$
- 有界: $\exists\, B \ge 0,\ s.t.\ \forall\, x \in D,\quad |f(x)| \le B.$
- 无上界: $\forall\, M \in \mathbf{R},\ \exists\, x_0 \in D,\ s.t.\ f(x_0) > M.$
- 无下界: $\forall\, L \in \mathbf{R},\ \exists\, x_0 \in D,\ s.t.\ f(x_0) < L.$
- 无界: $\forall\, B \ge 0,\ \exists\, x_0 \in D,\ s.t.\ |f(x_0)| > B.$

若 $f(x)$有上界(下界), 则它有无穷多个上界(下界).

例如，以下函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界：

$$\frac{x}{1+x^2},\ \sin x,\ e^{-x^2}.$$

（由不等式 $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 得 $|x| = 1\cdot|x| \leq \frac{1}{2}(1+x^2)$）

以下函数在区间 $(0,1)$ 上无界：

$$\tfrac{1}{x},\ \tfrac{1}{1-x},\ \lg x.$$

证明函数无界还可以通过下列方式：

$$\forall\ n \in \mathbf{N}^+,\ \exists x_n \in D : |f(x_n)| > n.$$

函数的一般概念

前面定义1中的函数 $y=f(x)$ 是从数集到数集的对应法则，即自变量和因变量都必须取实数值. 而一般的对应法则可以从任一集合对应到另外的任一集合，从而函数的概念可以扩展成下面映射的概念.

映射

定义6 设 X,Y 是两个非空集合，若对每个 $x\in X$，按照某一确定的规则 f 总有唯一的 $y\in Y$ 与 x 对应，则称 f 是定义在 X 上而取值于 Y 中的映射，称 y 是 x 在 f 下的像，记作 $y=f(x)$，称 X 为 f 的定义域，称集合 $W=\{f(x):x\in X\}$ 为 f 的值域.

通常以 $f:X\to Y$ 表示 f 是定义在 X 上而取值于 Y 中的映射，有时也称 f 是从 X 到 Y 的映射. **函数是特殊的映射，即映射的定义域和值域是实(复)数集.**

例　设 D 是 xOy 平面上的某个点集，$f: D \to \mathbf{R}$ 是一函数，则将每个点 $(x,y) \in D$ 对应一确定的实数 z，记作 $z = f(x,y)$，称这样的函数为"二元函数". 与此相区别，定义1中所述的函数 $f(x)$ 为"一元函数".

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ x, y \in \boxed{\mathbf{R}^2}. \longrightarrow xOy\text{平面}$$

例　设 I 是一个区间，$f: I \to \mathbf{R}^2$ 是一个函数，则 f 将每个 $t \in I$ 对应一确定的点 $(x,y) \in \mathbf{R}^2$，记作 $f(t) = (x(t), y(t))$. 这样的函数相当于一个"矢量函数". 例如，二维平面上的单位圆周可用矢量函数

$$f(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$$

的值域表示.

三　函数的四则运算

由已知函数构造新函数的基本方法:四则运算、复合、取反函数.

定义7 设函数$f(x)$与$g(x)$是分别定义于D_1与D_2上的函数，$D=D_1\cap D_2$非空. 在D上逐点对f与g的函数值作加、减、乘、除运算，得到四个函数:

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)g(x),\ f(x)/g(x)$$

(对于后者假定$g(x)\neq 0$), 分别称它们为函数f与g的和、差、积与商, 有时也简记为 $f\pm g,\ fg,\ f/g$.

保持性问题: 如果两个函数具有某种初等性质(单调性、奇偶性、周期性、有界性)，经过四则运算后是否还保持这种属性?

- 如果两个函数在同一区间上都单调增(减)，那么它们的和也单调增(减).
- 如果两个函数在同一区间上都非负且单调增，那么它们的乘积也单调增.
- 两个偶函数经过四则运算还是偶函数. 两个奇函数的和、差仍是奇函数，但两个奇函数的乘积是偶函数.
- 如果两个函数的周期之比是有理数，经过四则运算后的函数还是周期函数，周期是两个周期的最小公倍数. 例如，$\sin(\pi x)$ 的周期是 2， $\sin(\frac{2}{3}\pi x)$ 的周期是 3，和函数的周期是 6.
- 如果两个函数在同一集合上都有界，那么它们的和、差与积也有界.

四　复合函数与反函数

对一个函数 f，分别以D_f 与 W_f 记 f 的定义域与值域.

定义8 给定函数 f 与 g，若 $W_g \subset D_f$，则称由

$$\varphi(x) = f(g(x)),\ x \in D_g$$

所确定的函数 φ 为 f 与 g 的复合函数，也记作 $\varphi = f \circ g$ (不要与乘积 fg 混淆!)

例　函数 $f(u) = \sqrt{u},\ u \in [0, +\infty)$ 与函数 $u = 1 - x^2,\ x \in [-1, 1]$ 的复合函数为 $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]$. 一般称 u 为中间变量.

- 要构成复合函数,内层函数的值域必须落在外层函数的定义域内,必要时需将内层函数的定义域缩减.在上例中，为使得复合函数有意义，我们将内层函数的定义域有全体实数缩减成 $[-1,1]$.
- 复合次序不同时，所得的函数一般不同.
- 定义8可以扩充到多个函数复合的情形.
- 两个函数复合,若外层函数有界，则复合后的函数也有界.
- 若 T 为 $f(x)$ 的(基本) 周期, a, b 是常数, $a>0$. 则 $p=\frac{T}{a}$ 是函数 $\varphi(x)=f(ax+b)$ 的(基本)周期.

定义9 设 $y=f(x)$ 是一函数. 若 $\forall\, x,z\in D_f$, 当 $x\neq z$ 必有 $f(x)\neq f(z)$, 即自变量取值不同时函数值亦不同, 则称 f 为可逆函数. 若 f 为可逆函数. 则每个 $y\in W_f$ 对应唯一的 $x\in D_f$, 使得 $f(x)=y$, 记此 x 为 $f^{-1}(y)$, 于是 f^{-1} 是以 W_f 为定义域, 以 D_f 为值域的函数, 称它为 f 的反函数.

- 严格单调函数是可逆函数, 故存在反函数, 且反函数保持原来的单调性.
- 若 f 存在反函数 f^{-1}, 则 f^{-1} 的反函数也存在且为 f, 称 f 与 f^{-1} 互为反函数. 此时, 有

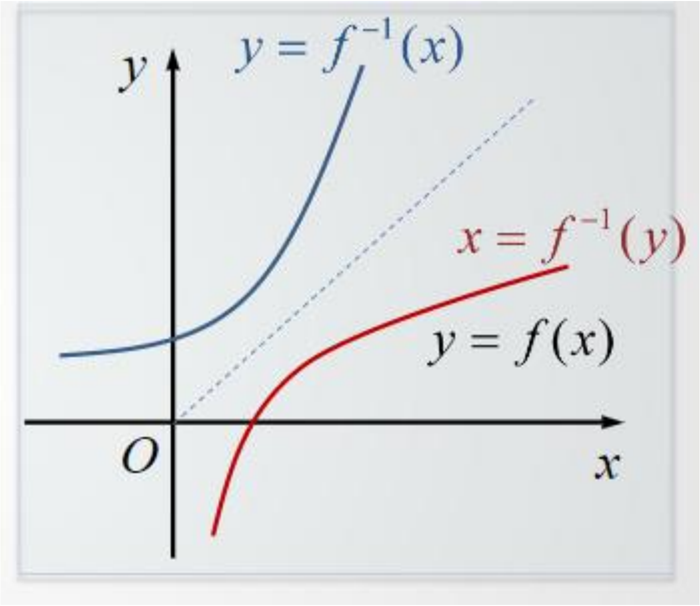
$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in D_f,$$

$$f(f^{-1}(y))=y,\ y\in W_f.$$

反函数的图形

在同一个坐标系中，$y=f(x)$ 的图形与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是重合的，与 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(点 (a,b) 与 (b,a) 关于 $y=x$ 对称.)



如何求反函数(给定 y 后, 从等式 $y=f(x)$ 中反解出 x)

例 求$y=e^{\sqrt{x}},\ x\geq 0$ 的反函数.

解 (1) 确定反函数的定义域: $[1,+\infty)$.

(2) 固定 $y\in[1,+\infty)$, 由方程式 $y=e^{\sqrt{x}}$ 得 $\ln y=\sqrt{x}$,

从而有 $x=(\ln y)^2,\ y\in[1,+\infty)$.

例 求下列函数的反函数

$$y=\begin{cases}\ln x, & x\geq 1,\\ x-1, & x<1.\end{cases}$$

解 分段反解. 当 $x\geq 1$ 时, 由 $y=\ln x$ 得 $x=e^y,\ y\geq 0$.

当 $x<1$ 时, 由 $y=x-1$ 得 $x=y+1,\ y<0$.

故所求反函数为

$$x=\begin{cases}e^y, & y\geq 0,\\ y+1, & y<0.\end{cases}$$

三角函数

三角函数都能有正弦函数通过复合和四则运算得到：

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \qquad \text{（余弦）；}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{（正切）；}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq n\pi \qquad \text{（余切）；}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\ x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{（正割）；}$$

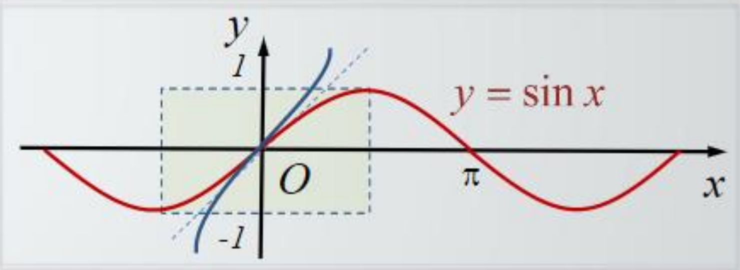
$$\csc x = \frac{1}{\sin x},\ x \neq n\pi \qquad \text{（余割）．}$$

几个重要的反函数

（1）反正弦函数 当$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$时，$y=\sin x$严格单调增，因此有反函数，记作

$$x=\arcsin y\ (-1\le y\le 1).$$

$y=\arcsin x\ (-1\le x\le 1)$



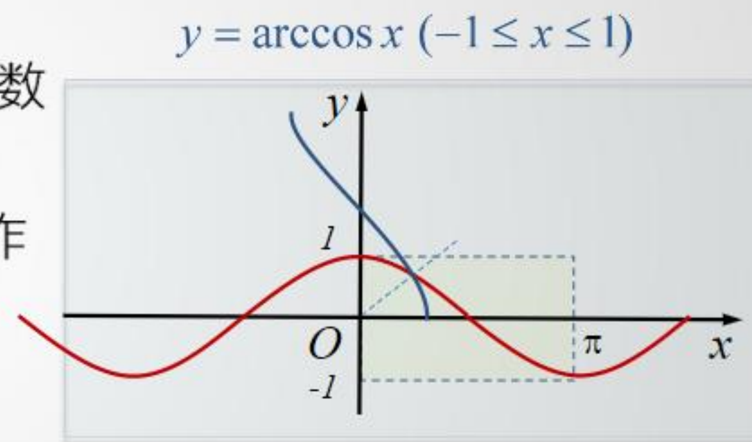
注意，与正弦函数（关注段）一致，其反函数也是有界的、严格单调增的奇函数.

正弦函数的反函数是其某一单调段的反函数.

（2）**反余弦函数**　当$0 \le x \le \pi$时，余弦函数

$y = \cos x$严格单调减，因此有反函数，记作

$$x = \arccos y \quad (-1 \le y \le 1).$$



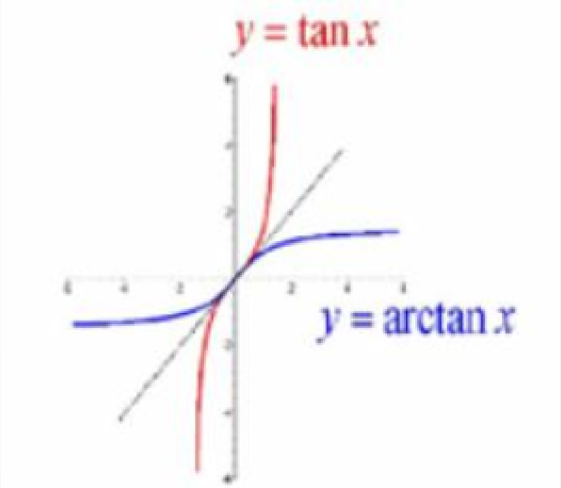
注意，余弦函数是偶函数，但是其反函数非奇非偶.

余弦函数的反函数是其某一单调段的反函数.

（3）反正切函数　当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，正切函数

$y=\tan x$ 严格单调增，因此有反函数，记作

$$x=\arctan y\ (-\infty<y<+\infty).$$



注意，正切函数是无界函数，其反函数是有界函数.

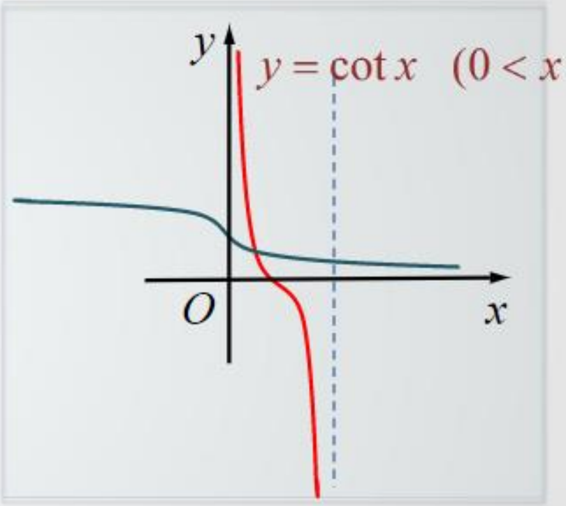
正切函数的反函数是其某一单调段的反函数.

（4）**反余切函数**　当$0<x<\pi$时，余切函数

$y=\cot x$严格单调，因此有反函数，记作

$$x=\operatorname{arccot} y\ (-\infty<y<+\infty)$$

$y=\operatorname{arccot} x\ (-\infty<x<+\infty)$



注意，余切函数是奇函数，无界，其反函数非奇非偶，有界.

双曲函数

双曲函数（hyperbolic function）可借助指数函数定义

双曲正弦：$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

双曲余弦：$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

双曲正切：$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

双曲余切：$\coth x = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

双曲正割：$\mathrm{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

双曲余割：$\mathrm{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

双曲函数的恒等式　基本关系　减法公式

基本关系

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh x \cdot \coth x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

加法公式

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

双曲函数的恒等式 基本关系 二倍角公式

减法公式

$$\sinh(x-y) = \sinh x\cosh y - \cosh x\sinh y$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x\cosh y - \sinh x\sinh y$$

$$\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1-\tanh x\tanh y}$$

二倍角公式

$$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$$

$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$$

五　初等函数

定义9　以下六类函数称为基本初等函数：

(1) 常量函数　$y = c$ (c为常数);

(2) 幂函数 $y = x^{\alpha}$ (α 为实数);

(3) 指数函数　$y = a^{x}$ ($a > 0, a \neq 1$);

(4) 对数函数　$y = \log_{a} x$ ($a > 0, a \neq 1$);

(5) 三角函数　$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$,

$y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$.

(6) 反三角函数　$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,

$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

定义10 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

- 初等函数进行有限次四则运算和复合运算所得到的函数仍是初等函数.
- 一般而言，大部分有显式表达式的函数都是初等函数.Drichlet函数不是初等函数.

例 证明 $y=|x|,\ x\in\mathbf{R}$是初等函数.

证： $y=\sqrt{x^2}$ 是由基本初等函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成.

练习题

1. 试问下列函数是由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y = (1+x)^{20}$；　　(2) $y = (\arcsin x^2)^2$

(3) $y = \lg(1+\sqrt{1+x^2})$；　　(4) $y = 2^{\sin^2 x}$

解　(1) $y = u^{20}, u = v_1 + v_2, v_1 = x, v_2 = 1$

(2) $y = u^2, u = \arcsin v, v = x^2$

(3) $y = \lg u, u = u_1 + u_2, u_1 = 1, u_2 = \sqrt{v}$

$v = u_1 + w, w = x^2$

(4) $y = 2^u, u = v^2, v = \sin x$

2. 试问下列等式是否成立：

(1) $\tan(\arctan x) = x, x \in R$

(2) $\arctan(\tan x) = x, x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \cdots$

解　由 $\tan x$ 与 $\arctan x$ 的定义知(1)式成立,(2)式不成立.

注意使用关系式

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in D_f, \qquad \text{(a)}$$

$$f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in W_f. \qquad \text{(b)}$$

前提是 $x \in D_f$, $y \in W_f$. 上题中, $y = \arctan x,\ x \in \mathbf{R}$ 是 $f(x) = \tan x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$的反函数. 故 $D_f = \mathbf{R},\ W_f = (-\pi/2, \pi/2)$.

因此, (1) 式成立, (2) 式不成立. 为使 (2) 式成立, 应该改成

$$\arctan(\tan x) = x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2). \qquad \text{(c)}$$

注意，（2）不成立并不是意味着 $x \notin (-\pi/2, \pi/2)$ 时 $\arctan(\tan x)$ 一定没有意义，只要 $x \neq \pi/2 + n\pi$ 它都有意义，但是它不一定等于 x. 例如，

$$\arctan(\tan \tfrac{5\pi}{4}) = \arctan 1 = \pi/4 \neq \tfrac{5\pi}{4}$$

设 $\arctan 1 = z$，$z \in (-\pi/2, \pi/2)$ （注意z的范围来源于其值域），故 $\tan z = 1$，$z \in (-\pi/2, \pi/2)$，因此，$z = \frac{\pi}{4}$.

此外，由 $\arctan x$ 的值域是 $(-\pi/2, \pi/2)$ 也能判断 (2) 不成立.

3. (1) 叙述无界函数的定义

(2) 证明 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为 $(0,1)$ 上的无界函数

(3) 举出函数 f 的例子,使 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的无界函数.

解 (1) 设 $f(x)$ 在 D 上有定义. 若对任意的正数 M,都存在 $x_0\in D$,使 $|f(x_0)|>M$,则称函数 $f(x)$ 为 D 上的无界函数.

(2) 对任意的正数 M,存在 $x_0=\frac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$,使 $|f(x_0)|=\frac{1}{x_0^2}=M+1>M$,所以 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 是 $(0,1)$ 上的无界函数.

(3) 例如 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in(0,1)\\ 2 & \text{当 } x=0,1 \text{ 时}\end{cases}$

4. 证明：$f(x)=x+\sin x$ 在 R 上严格增.

证：任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty),x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)$

$=x_2-x_1+(\sin x_2-\sin x_1)=(x_2-x_1)-2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}$ 而

$\left|2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leqslant 2\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|$

$\leqslant x_2-x_1$ 所以 $f(x_2)-f(x_1)>(x_2-x_1)-(x_2-x_1)=0$，因此

$f(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格递增.

关键点： (1) 不等式 $|\sin x|\le|x|,\ x\in\mathbf{R}$

(2) 和差化积(见教材)

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

5. 设 f 是定义在 R 上以 h 为周期的函数，a 为实数.

证明：若 f 在 $[a, a+h]$ 上有界，则 f 在 R 上有界.

证：因为 f 在 $[a, a+h]$ 上有界，从而对任意的 $x \in [a, a+h]$，存在 $M > 0$，使 $|f(x)| \leqslant M$，对任意的 $y \in (-\infty, +\infty)$，一定存在整数 K，使 $y = \mathrm{kh} + x$，其中 $x \in [a, a+h]$，于是 $|f(y)| = |f(\mathrm{kh} + x)| = |f(x)| \leqslant M$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

6. 设 $a,b\in R$,证明:

(1) $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$

(2) $\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

证:因为 $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=$

$$\begin{cases} a, & \text{当 } a\geqslant b \text{ 时} \\ b, & \text{当 } a<b \text{ 时} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\begin{cases} a, & \text{当 } a<b \text{ 时} \\ b, & \text{当 } a\geqslant b \text{ 时} \end{cases}$$

所以 $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$

$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

7. 设 f 和 g 都是 D 上的初等函数,定义

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},m(x)=\min\{f(x),g(x)\},x\in D$$

试问 $M(x)$ 和 $m(x)$ 是否为初等函数?

解　由 1 知

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$$

$$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$$

因为 $f(x),g(x)$ 都是 D 上的初等函数,所以 $M(x),m(x)$ 都是初等函数.