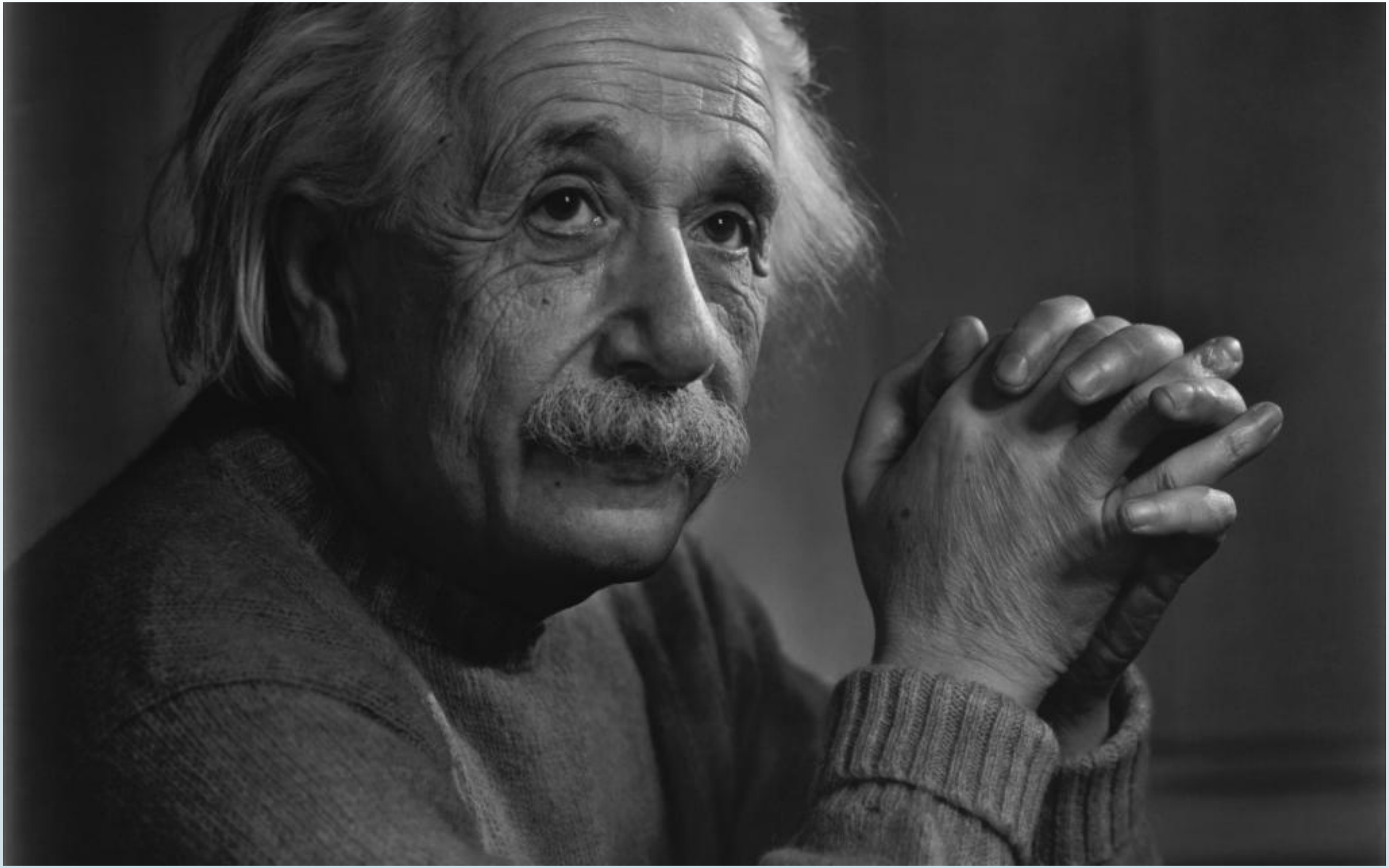
大学物理（一）

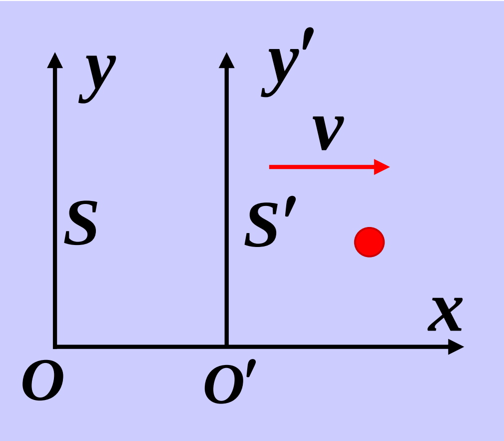
任课老师：蔡林
cailin@hust.edu.cn



Albert Einstein

(1879.3.14. – 1955.4.18.)

●爱因斯坦时空观



1. 爱因斯坦相对性原理
2. 光速不变原理

}狭义相对论的两个基本假设

3. 由光速不变原理得出的有关结论

原时最短

当$v<<c$时，
回到伽利略变换。

同时性的相对性 $\Delta t'=0,\ \Delta t\neq 0$

钟慢效应 **(时间膨胀)** $$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}$$

长度收缩 $$L=L'\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$$

原长最长

牛顿时空观在高速运动领域不成立。

重要概念：原时、原长

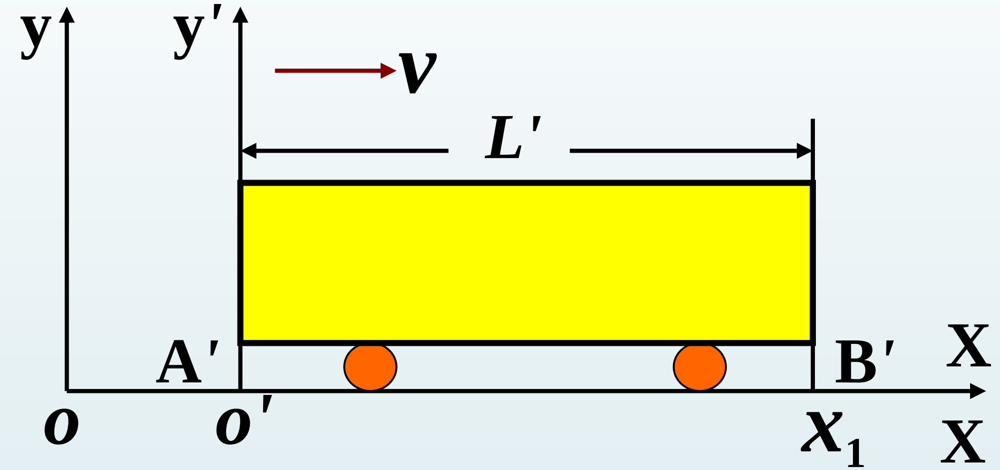
真空中的光速c是一切物体运动速度和能量传递速度的极限。

3）运动的尺变短(物体沿运动方向的长度收缩)

例如：在地面上测正在以速度v 行驶的汽车的长度。

垂直运动方向不受影响：

$y=y'$ $z=z'$



在S' 系测车的长度为：L'

在S 系测量:

t 时刻， B′到达x_1点；

$t+\Delta t$ 时刻，A′到达x_1点， 同时B′到达 $x_2=x_1+v\Delta t$ 点

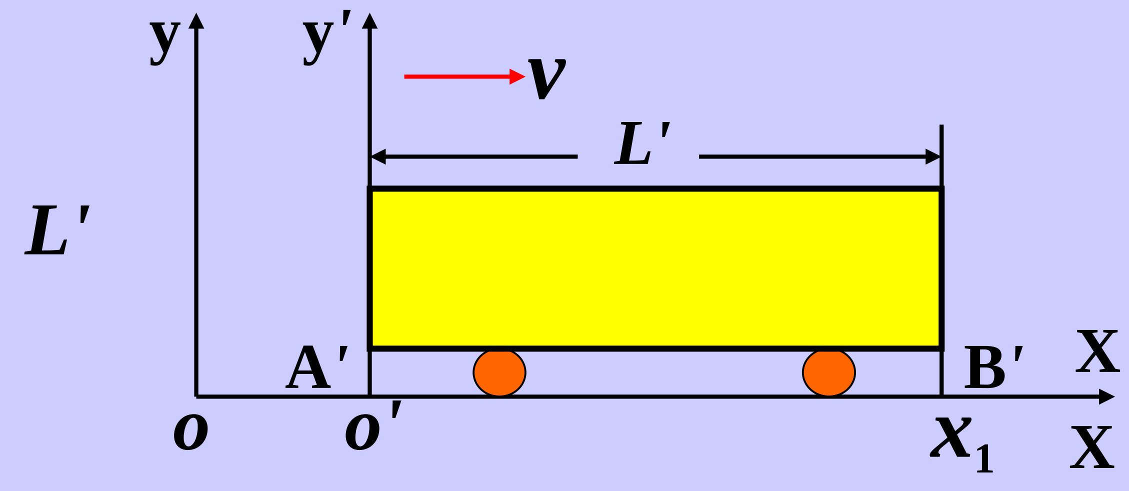
车的长度： $L=x_2-x_1=v\Delta t$ $\Delta t \longrightarrow$ 原时(钟放在x_1处)

在S' 系看： x_1点走过的距离为L'， 所用时间： $\Delta t'=L'/v$

而： $$\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$ $$\Delta t=\Delta t'\sqrt{1-(v/c)^2}$$

S系中车的长度：$L=v\Delta t =v\Delta t'\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} =L'\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} < L'$

$$L = L'\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$$



结论

相对某一参考系静止的棒长度为L'，在另一参考系看要短一些即：$L < L'$

定义：物体相对参考系静止时，
测得物体的长度为原长。

显然：原长最长。

相对论效应之三：**(物体沿运动方向的)长度收缩**效应。

$$\boxed{L = L_{原长}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

例： 5m 长的宇宙飞船，以 $v = 9\times10^3$ m/s 相对地面飞行，在地面上测其长度为：

$$L = L'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 5\times\sqrt{1-\left(\frac{9\times10^3}{3\times10^8}\right)^2}$$

$$= 4.999999998 \text{ m} \approx 5\text{m}$$

可见：$L \approx L'$，即：当 $v << c$ 时又回到牛顿时空观。

例: π介子寿命为2.5×10^{-8}s，以 v =0.99c的速度相对实验室作直线运动，求相对实验室π介子运动的距离？

$$\boxed{L = L_{原长}\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

解: π介子（S'系）看，
实验室以速度v离它而去，
远离的距离L'为:

$$L' = v\Delta t' = 2.5\times10^{-8}\times0.99c = 7.4\ \mathrm{m}$$

实验室（S系）看L 满足： $L' = L\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$ 故 L = 52.6 m

另解： 实验室（S系）看，须考虑时间膨胀效应。

原时

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{2.5\times10^{-8}}{\sqrt{1-0.99^2}} = 1.8\times10^{-7}\mathrm{s}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}$$

则: $l = v\Delta t = 0.99\times3\times10^{8}\times1.8\times10^{-7} = 52.6\mathrm{m}$

$$L = L_{原长}\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$$

例：S系与S' 系是坐标轴相互平行的两个惯性系，S' 系相对S系沿X轴正向匀速运动。一根刚性尺静止在S' 系中与X' 轴成30º角，今在S系中观察得该尺与X轴成45º角，则S' 系相对S 系的速度是多少？

解：在S系：

$$tg45^0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \begin{cases} \Delta y = \Delta y' \\ \Delta x = \Delta x'\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} \end{cases}$$

在 S' 系：

$$tg30^0 = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} = tg45^0\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$$

解得：$v = \sqrt{\frac{2}{3}}c$

爱因斯坦时空观小结

讨论：光速不变合理吗？

1. 牛顿时空观在高速运动领域不成立

2.爱因斯坦相对性原理

3.光速不变原理

4. 由光速不变原理得出的有关结论

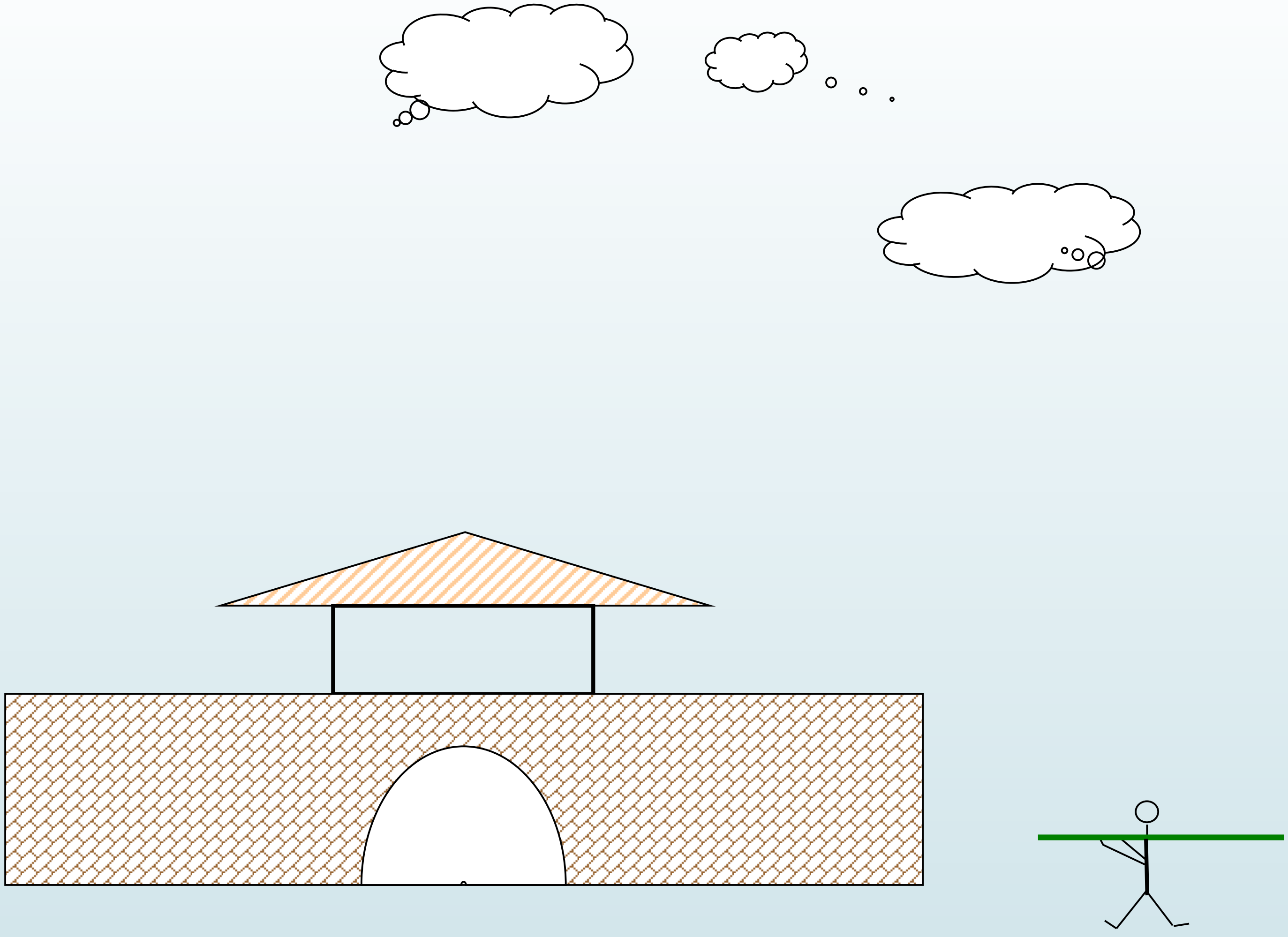
光速不变原理所得结论

- **同时性的相对性** $\Delta t'=0,\ \Delta t\neq 0$
- **运动的时钟变慢** $\Delta t=\dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$
- **运动的尺子缩短** $L=L'\sqrt{1-(v/c)^2}$

原时最短

原长最长

显然这些结论与牛顿时空及伽利略变换相矛盾



例： 宇航员到离地球为5光年的星球去旅行，希望路程缩短为3光年，他乘的火箭相对于地球的速率应是多少?

解： “5光年”为**原长**。

$$L = L_{原长}\sqrt{1-\left({}^{v}\!/_{c}\right)^2}$$

“3光年”不是原长。

$$\therefore\ 3 = 5\times\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad v = \frac{4}{5}c$$

另解： 考虑宇航员自地球出发和到达远处星球这两个事件的时间间隔，则

“3年”为原时，因为在飞船系看两事件同地发生，而在地球系看两事件是异地发生的。$\boxed{\Delta t = 5年,\ \Delta t' = 3年}$

$$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad \therefore\ 5 = 3 / \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad v = \frac{4}{5}c$$

例: 两个惯性系中的观察者甲和乙以 0.6*c*(*c*表示真空中光速)的相对速度互相接近。如果甲测得两者的初始距离是20m。则乙测得两者经过时间$t =$ ________ s 后相遇。

解: 甲测得两者相遇经过的时间为

$$\Delta t_{甲} = \frac{20\text{m}}{0.6c} = \frac{20}{0.6\times3\times10^{8}}\text{s} = \frac{10}{0.9}\times10^{-8}\text{s}$$

在甲参考系看来，从两者初始距离为20m (事件A)到相遇(事件B)发生在两个地点，故上述时间不是原时; 但在乙参考系看来，A、B两个事件发生在同一地点(乙所在处),故乙测得的两个事件的时间间隔是原时。于是,

$$\Delta t_{甲} = \frac{\Delta t_{乙}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow \Delta t_{乙} = \Delta t_{甲}\sqrt{1-(v/c)^2} = \Delta t_{甲}\times0.8$$

$$\boxed{v = 0.6c}$$

$$\therefore \Delta t_{乙} = \frac{10}{0.9}\times10^{-8}\times0.8\text{s} \approx 8.89\times10^{-8}\text{s}$$

例: 两个惯性系中的观察者甲和乙以 $0.6c$(c表示真空中光速)的相对速度互相接近。如果甲测得两者的初始距离是20m。则乙测得两者经过时间$t =$ <u>8.89×10^{-8}</u> s 后相遇。

另解: 甲参考系测得的初始距离为原长,

在乙参考系看来，初始距离为

$$L_{乙} = L_{甲}\sqrt{1-(v/c)^2} = L_{甲}\times0.8 = 16\text{m}$$

$$\boxed{v = 0.6c}$$

$$\therefore \Delta t_{乙} = \frac{16}{0.6c} \approx 8.89\times10^{-8}\text{s}$$

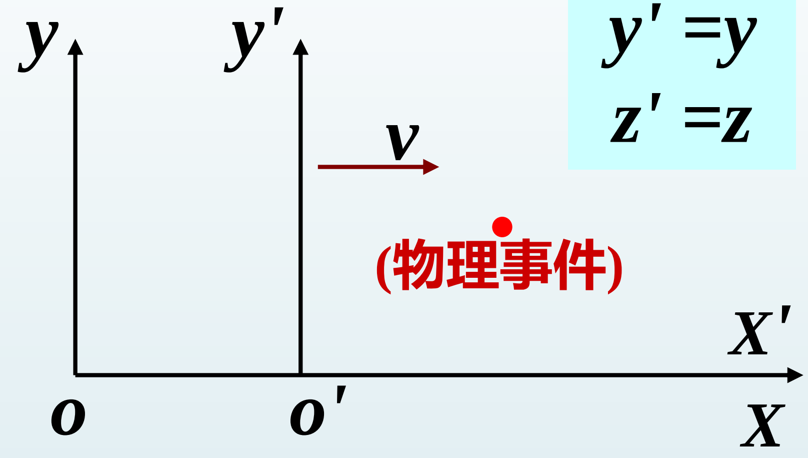
5. 洛仑兹变换 (要求满足两个基本原理及时空均匀性, 且低速时回到伽利略变换)

1）坐标变换： 设 S' 系相对 S 系沿X轴以速度v 运动。

且当$t = t' = 0$时， $x = x' = 0$

$y' = y$

$z' = z$



设： $\begin{cases} x' = ax + bt + \cancel{e} \\ t' = mt + nx + \cancel{f} \end{cases}$

下面在两个参考系中来考虑o点和o'点的坐标。

o'点的坐标为 $x = vt$, $x' = 0$ 。

代入上面方程组的第一式得：

$0 = avt + bt \quad \therefore b = -av$

$\therefore x' = a\,x - avt$

$$\left.\begin{aligned} mx' &= ma\,x - avmt \\ avt' &= avmt + avnx \end{aligned}\right\}\ \text{左右相加}$$

$mx' + avt' = max + avnx$

o点的坐标为 $x = 0$, $x' = -vt'$.

代入上式得：

$-mvt' + avt' = 0$

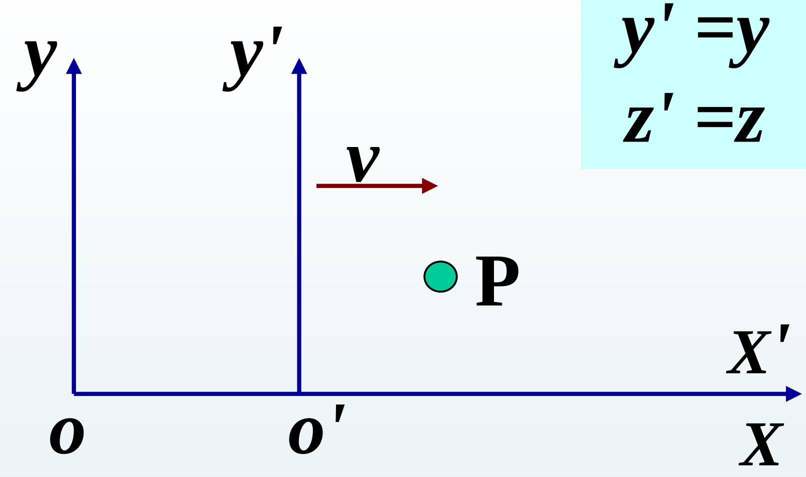
故 $m = a$

$t' = at + nx$

$t' = a\,(\,t + hx\,)$

$$\therefore \begin{cases} x' = a\,(\,x - v\,t\,) & (1) \\ t' = a\,(\,t + hx\,) & (2) \end{cases}$$

$y' = y$
$z' = z$



$$\begin{cases} x' = a(x - vt) & （1） \\ t' = a(t + hx) & （2） \end{cases}$$

设$t = t' = 0$时, 在$o = o'$点发一光信号。
在S(S')系看, t (t') 时刻光到达P点。
则:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{y' = y,\ z' = z} c^2t^2 - x^2 \equiv c^2t'^2 - x'^2$$

将（1）、（2）式代入上式可得:

$$c^2t^2 - x^2 \equiv c^2 a^2 (t + hx)^2 - a^2(x - vt)^2$$

$$= c^2 a^2 (t^2 + h^2x^2 + 2thx) - a^2(x^2 + v^2t^2 - 2xvt)$$

$$= c^2 t^2 (a^2 - a^2v^2/c^2) + (c^2 a^2 h^2 - a^2)\, x^2 + 2a^2 (c^2 h + v)\, xt$$

$$\boxed{h = -\frac{v}{c^2}}$$

$$\therefore\ (a^2 - a^2v^2/c^2) = 1$$

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

舍去 $a = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

因事先已假定X轴和X'轴同向,
在$t = t' = 0$时，任一事件的X和
X'坐标必定同号。
由(1) 式知，a 若取负号与上述
结论相矛盾。故舍去。

$$\begin{cases} x' = a\,(x - vt) & (1) \\ t' = a\,(t + hx) & (2) \end{cases} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad h = -\frac{v}{c^2}$$

洛仑兹变换

则有：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{cases}$$

令：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

相对论因子

讨论

当 $v << c$ 时

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

——伽利略变换

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - vt)$$

$$u' = u - v$$

$$\boxed{\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AC} + \vec{v}_{CB}}$$

洛仑兹变换

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$\longleftrightarrow$

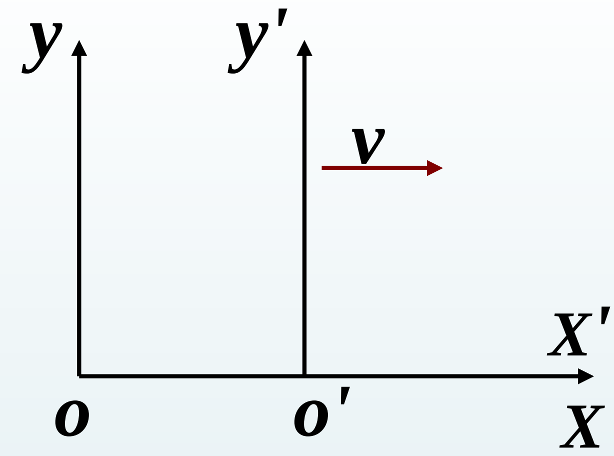
逆变换

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$y=y'$$

$$z=z'$$

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$



显然，S 系相对 S'系沿X'轴以速度 $-v$ 运动。

根据爱因斯坦相对性原理可得逆变换。

结论

1）时间、空间与物体的运动有关。

2）相对论中时空测量不可分离。

3）c是一切实物运动速度的极限。

即：任何物体相对另一物体的速度小于真空中的光速。

如：$x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ 则必须：$v<c$

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

4）从S'系$\rightarrow S$系的变换（满足爱因斯坦相对性原理）

$$\begin{cases} x=\gamma\left(x'+vt'\right) \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\gamma(t'+\frac{v}{c^2}x') \end{cases}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

5）伽利略变换是洛仑兹变换的在低速情况下的近似。

（2）时间效应

S' 系发生两事件的坐标：A $(x'_1,0,0,t'_1)$　B $(x'_2,0,0,t'_2)$

S系测得对应两事件的坐标：　A $(x_1,0,0,t_1)$　B $(x_2,0,0,t_2)$

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{t'_1+\frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ t_2 &= \frac{t'_2+\frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \Delta t = \frac{(t'_2-t'_1)+\frac{v}{c^2}(x'_2-x'_1)}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}$$

讨论

1) 在S'系中A, B同时不同地，即：$x'_1 \neq x'_2$　但 $t'_1 = t'_2$

同时发生

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} \neq 0$$

$t_1 \neq t_2 \longrightarrow$ 同时性的相对性

$$\Delta t=\frac{(t_2'-t_1')+\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}$$

2）若在S'系中：

A、B 同地不同时，

即：$x'_2=x'_1$，$t'_2\neq t'_1$

在S系看：$\Delta t=\dfrac{(t_2'-t_1')}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}>\Delta t'$ $\Delta t'\longrightarrow$原时

钟慢效应(时间膨胀)

若在S'系中, A 、B 同时且同地, 则在S系看，这两事件也是同时发生的。

3）在S'系中，若$t'_2>t'_1$, 则A′事件先于B′事件发生,

对不同的$(x'_2-x'_1)$,经过坐标变换后，在S系可得：

$$\Delta t=t_2-t_1=\begin{cases}>0 & \text{A先于B}\\ =0 & \text{A与B同时发生}\\ <0 & \text{A比B后发生}\end{cases}$$

例：S'系相对S系沿x轴做匀速运动，在S系中观察到两个事件同时发生在x轴上，距离是1m，在S'系中观察到这两个事件之间的距离是2m 。

求：在S'系中这两个事件的时间间隔。

解：依洛仑兹变换有

$$\boxed{x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$

$$\boxed{t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$

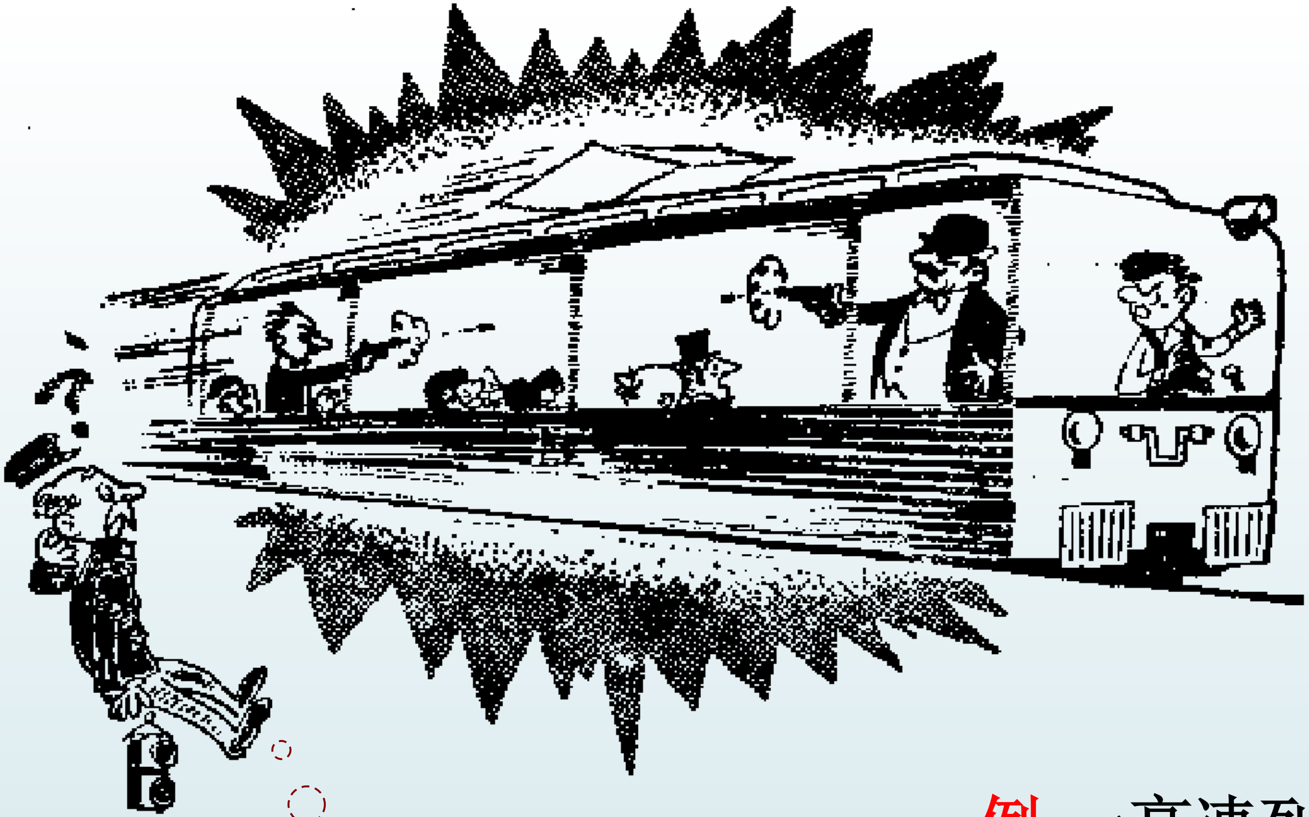
$$\Delta x'=x_2'-x_1'=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}[(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)]$$

$$\Delta t'=t_2'-t_1'=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}[(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)]$$

由题设知：$t_2-t_1=0 \quad x_2-x_1=1\text{m} \quad x_2'-x_1'=2\text{m}$

代入得：$2=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \Delta t'=\dfrac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$\therefore \Delta t'=-\frac{\sqrt{3}}{c}\approx-5.77\times10^{-9}\text{s}$$



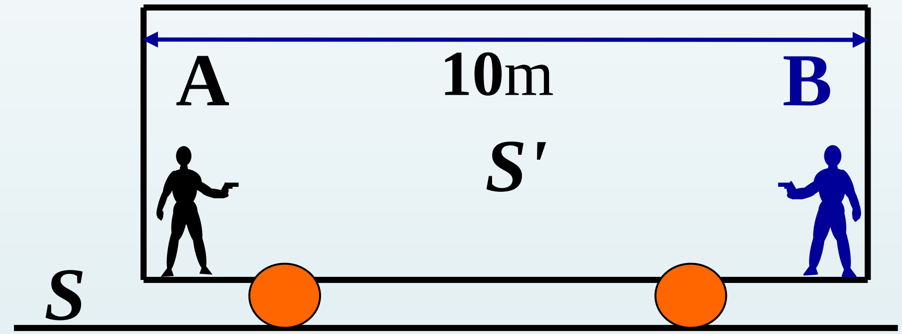
谁先动手？

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

例:一高速列车v=0.6c，沿平直轨道运动，车上A、B两人相距=10m。B在车前、A在车后，当列车通过一站台时突然发生枪战事件，站台上的人看到A先向B开枪， 过12.5ns，B才向A开枪。站台上的人作证，枪战是A挑起。车中乘客看到谁先开枪？若你是法官，你将如何判案？

例:一高速列车v=0.6c，沿平直轨道运动，车上A、B两人相距=10m。B在车前、A在车后，当列车通过一站台时突然发生枪战事件，站台上的人看到A先向B开枪， 过12.5ns，B才向A开枪。站台上的人作证，枪战是A挑起。车中乘客看到谁先开枪？若你是法官, 你将如何判案？



解： 已知$\Delta t = t_B - t_A = 12.5\text{ns}$,

$\Delta x' = x_B' - x_A' = 10\text{m}$,

$\Delta t' = t_B' - t_A'$, $\Delta x = x_B - x_A$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

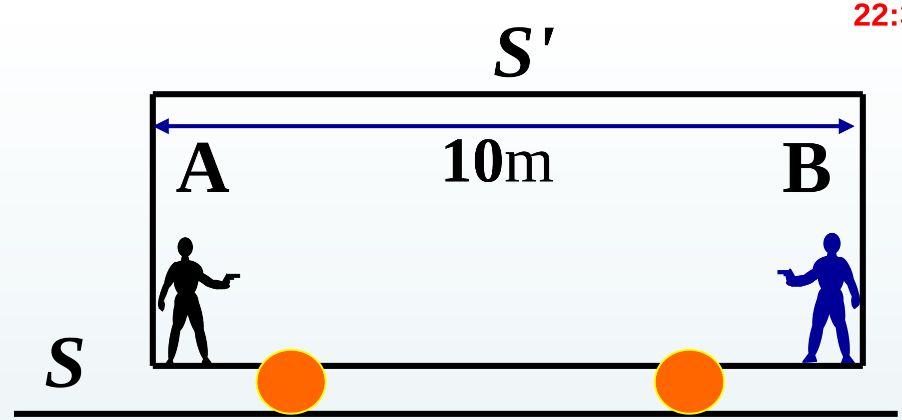
$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} - \frac{v}{c^2}\Delta x'$$

$$\Delta t = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$= -10^{-8}\text{s} < 0$ 故, B先开枪。

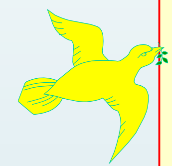
22:30:43

用 $\Delta t' = \dfrac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-(\dfrac{v}{c})^2}}$



$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} + v\Delta t$$

$$\boxed{\Delta x = x_B - x_A}$$



$$\boxed{L = L_0\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\therefore \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{\Delta x'}{\gamma} - \frac{v}{c^2}v\Delta t) = -10^{-8}\text{s}$$

如何判案?

$$\Delta t'' = \frac{L'}{c} = \frac{10}{3\times10^8} \approx 3.33\times10^{-8}(\text{s}) > 10^{-8}$$

两人开枪没有因果关系!

3）相对论不违背“因果律”

从事件A $\longrightarrow$ 事件B， 传递一种“作用”或“信号”。

传递的时间： $\Delta t = t_2 - t_1$ 传递的距离： $\Delta x = x_2 - x_1$

传递的速度：$u = \Delta x / \Delta t \le c$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left[1 - \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{v}{c^2}\right]$$

即： $$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\left[1 - u\frac{v}{c^2}\right]$$

≥ 0

由于$u \le c$，$v \le c$， Δt 与 $\Delta t'$ 同号。

因果律是绝对的

$$\Delta t''' = \frac{\Delta x}{c}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} + v\Delta t$$

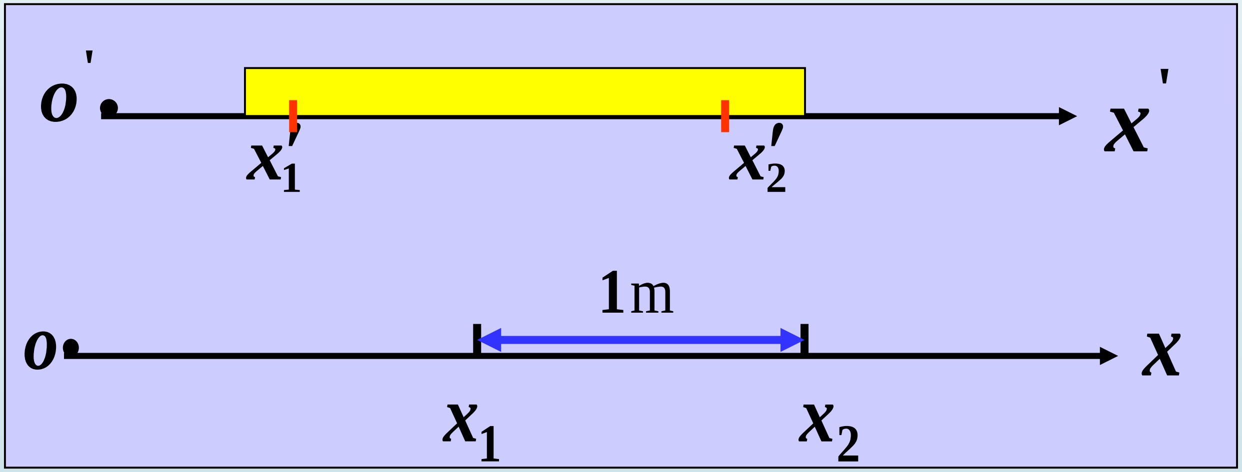
$$\Delta t''' = 34.2\text{ns}$$

（子弹射中所需时间）

$$\Delta t''' > 12.5\text{ns}$$

两事件无因果关系

例: 一根米尺固定在o系中的x 轴上,其两端各放一手枪, 另一根长尺固定在o'系中的x'轴上, 当后者从前者旁经过时, o系的观察者同时扳动两手枪，使子弹在o'系中的尺上打出两个孔。试问在o'系中这两个孔间的距离是小于、等于、还是大于 1m?



解: $(x_2'-x_1')$是o'中测得的两记号的间隔，而长尺是固定在o'系中的，故$(x_2'-x_1')$是原长。

根据 $x_2-x_1=(x_2'-x_1')\sqrt{1-(\frac{v}{c^2})}$

可知: $x_2'-x_1'=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}>x_2-x_1=1\text{m}$

$$\left.\right\} \boxed{x_2'-x_1'>1\text{m}}$$

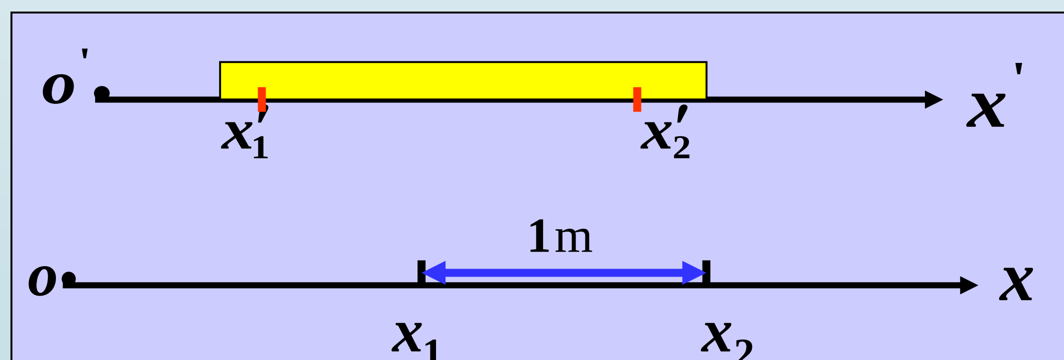
$$\boxed{\Delta t'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$

因为在o系中两枪发射是“同时”的,

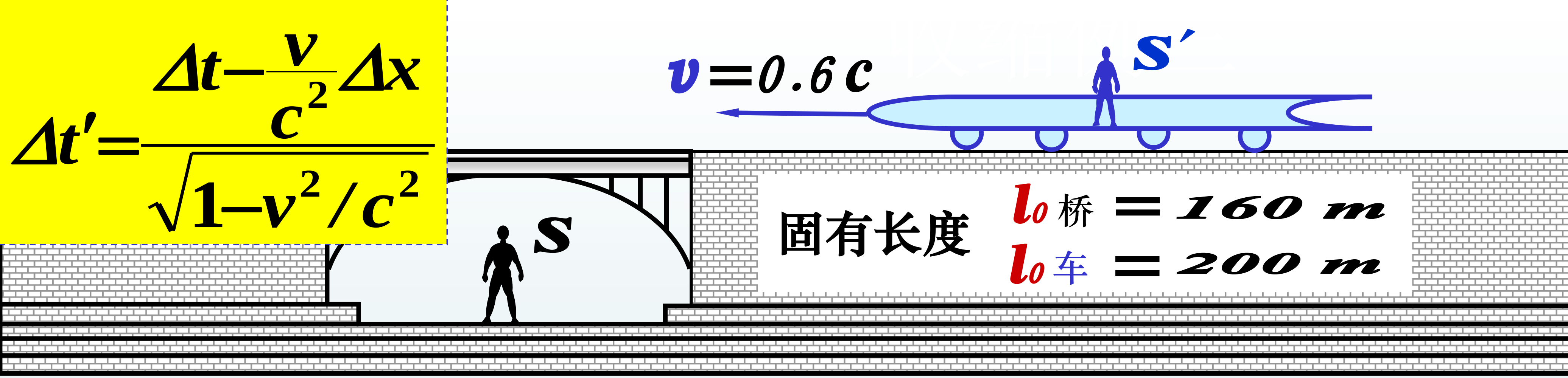
$$t_2-t_1=0$$

$$\therefore \Delta t'=t_2'-t_1'<0$$

即, o'中人看到 x_2 处先动作(刻出x_2')，x_1处后动作(刻出x_1') 。



$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$



问：车过桥时 S 是否认为桥长可容纳全车长? 在 S' 看来又如何?

解： $v=0.6c$ ， $\gamma=1\Big/\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}=1.25$

都对。不矛盾！

- 在 S 看来：桥静车动。桥长是固有长度 $l_{0桥}=160\ m$

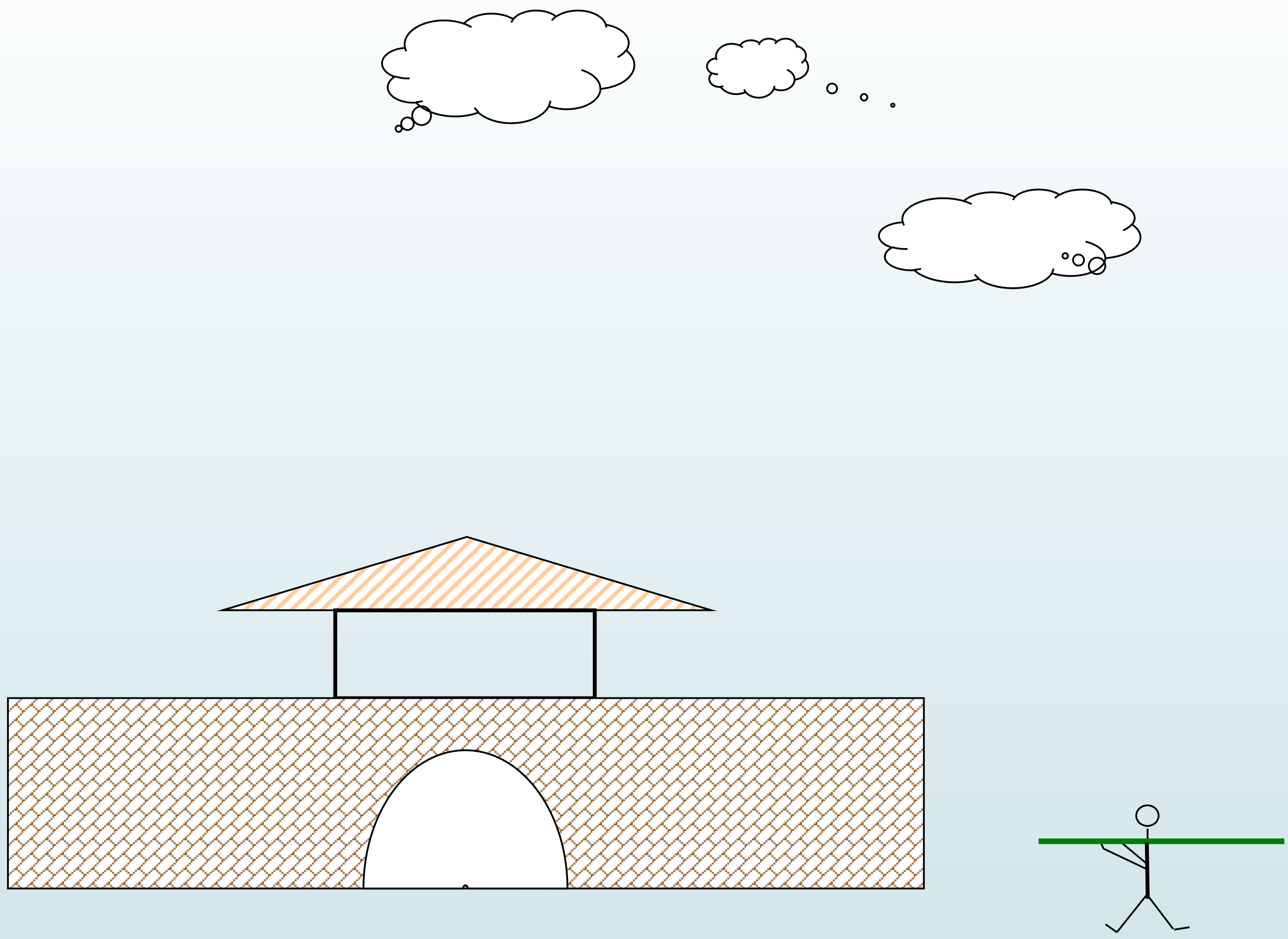
  车长是相对论长度 $l_{车}=l_{0车}/\gamma=160\ (m)$

  S 认为，桥长恰好可容纳全车长。

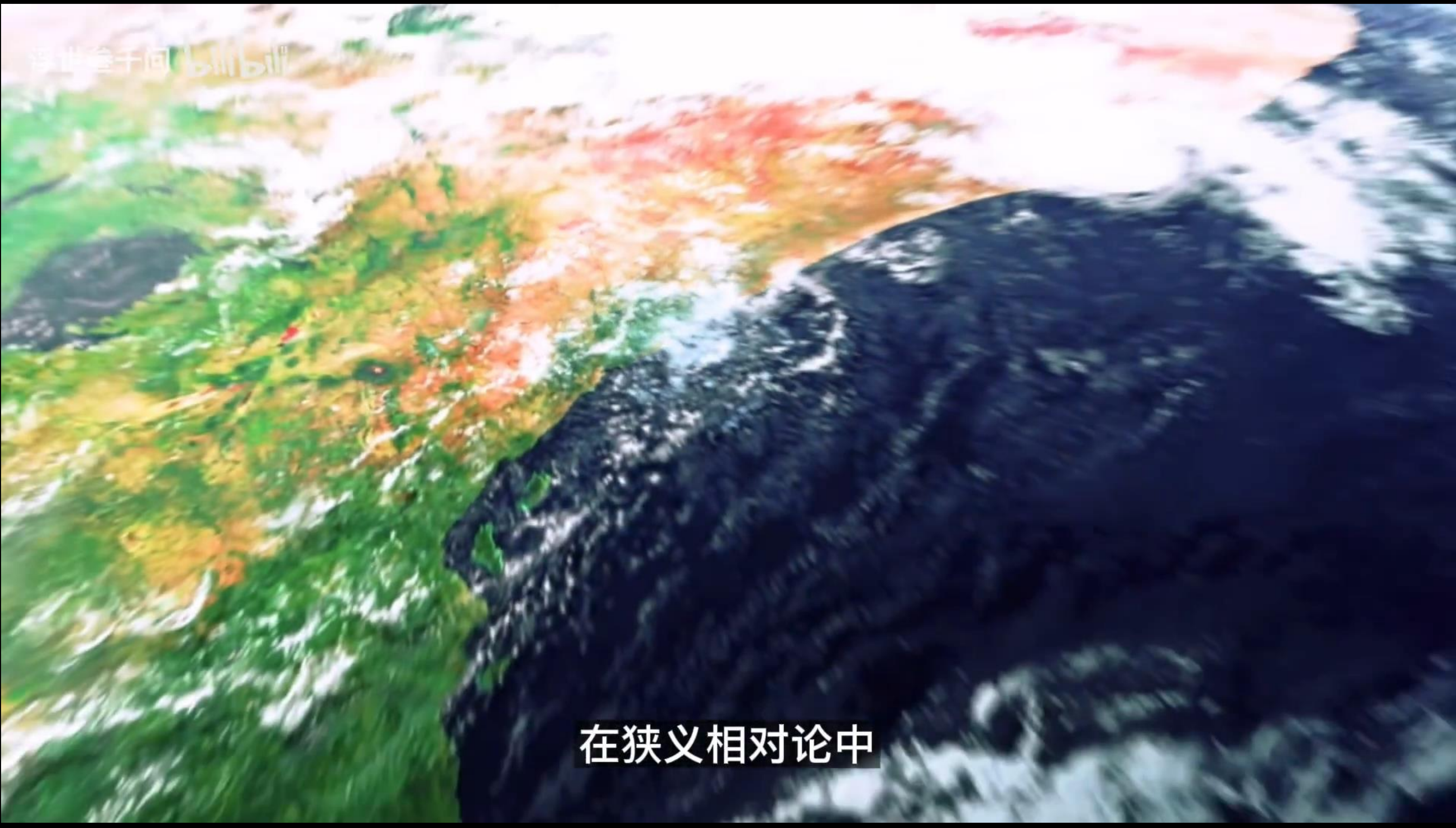
- 在 S' 看来：车静桥动。车长是固有长度 $l_{0车}=200\ m$

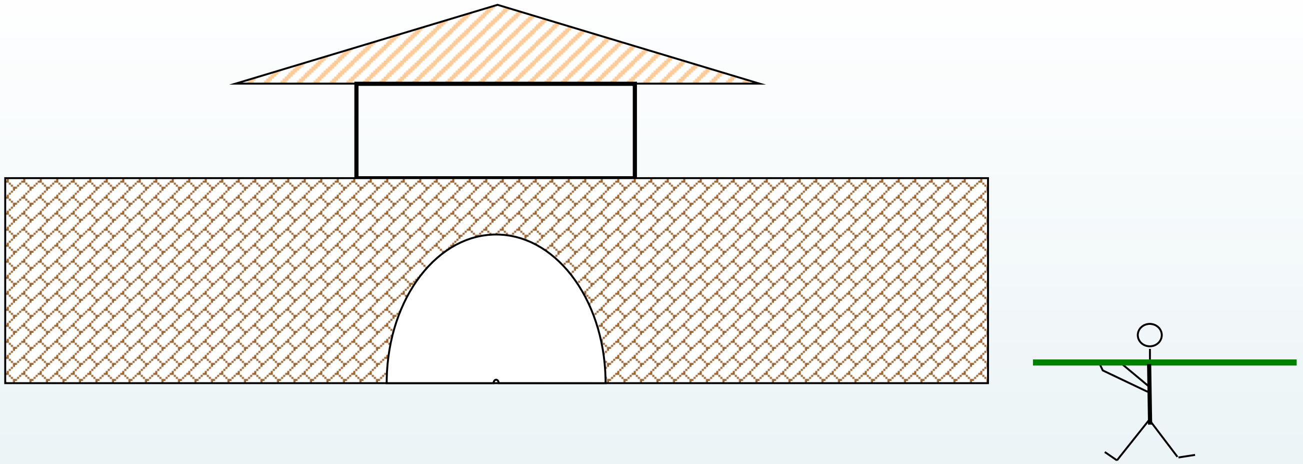
  桥长是相对论长度 $l_{桥}=l_{0桥}/\gamma=128\ (m)\ <200\ m$

  S' 认为，桥长不能容纳全车长。 矛盾？！



高速火车与隧道





$$\Delta t'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

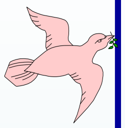
问题实质： 竹杆两端是否能同时与城门的两边对齐？

若在地面系(S系)看，竹杆两端同时与城门的两边对齐；则在杆子系(S'系)看，竹杆两端不是同时与城门的两边对齐的，而是一先一后。

并且在杆子系(S'系)看，竹杆两端不可能同时与城门的两边对齐，而只能是一先一后。

结论：只要沿城墙跑得足够快，竹杆就可以横着进城门。

4）洛仑兹速度变换



$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

S系 $\begin{cases} u_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ u_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ u_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{cases}$ $\quad S'$ 系 $\begin{cases} u'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \\ u'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \\ u'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} \end{cases}$

根据： $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}$

得： $\cancel{\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}}$

$\cancel{u'_x = \dfrac{u_x - v}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}}$ ？

$$\mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t)$$

$$\mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t)}{\gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x\right)}$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

洛仑兹速度变换

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y = \dfrac{u_y}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \sqrt{1 - \left(v/c\right)^2} \\ u'_z = \dfrac{u_z}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \sqrt{1 - \left(v/c\right)^2} \end{cases}$$

洛仑兹速度变换公式符合光速不变原理

注意： $y' = y \quad z' = z$

但 $u'_y = \dfrac{dy'}{dt'} \cancel{=} \dfrac{dy}{dt} = u_y$

讨论

1）若$v \ll c$，则：
$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$$

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$$

加利略速度变换

2）若一束光沿S系的X轴传播 $u_x=c \quad u_y=0 \quad u_z=0$

在S'系看：
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} = \frac{c - v}{1 - \dfrac{v}{c}} = c \qquad u'_y = u_y = 0 \qquad u'_z = u_z = 0$$

光速不变

$u' = c$

从S系变换 S'系的速度

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y = \dfrac{u_y}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \sqrt{1 - \left(v/c \right)^2} \\ u'_z = \dfrac{u_z}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \sqrt{1 - \left(v/c \right)^2} \end{cases}$$

从S' 系变换S 系的速度

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y = \dfrac{u'_y}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \sqrt{1 - \left(v/c \right)^2} \\ u_z = \dfrac{u'_z}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \sqrt{1 - \left(v/c \right)^2} \end{cases}$$

当S' 系相对于S 系的速度是沿 x轴的负方向呢？

将上述公式中的v换成$-v$就可以。

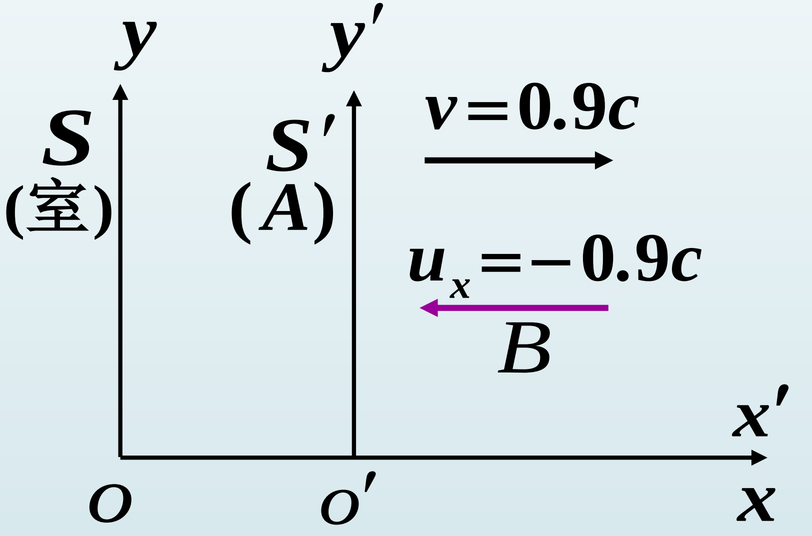
例: 从高能加速器中发射出两个运动方向相反的粒子A和粒子B, 这两个粒子相对实验室的速率都是$0.9c$，求粒子B相对于粒子A的速度。

解: S系 —— 实验室

S'系 —— A粒子

考察对象 —— B粒子

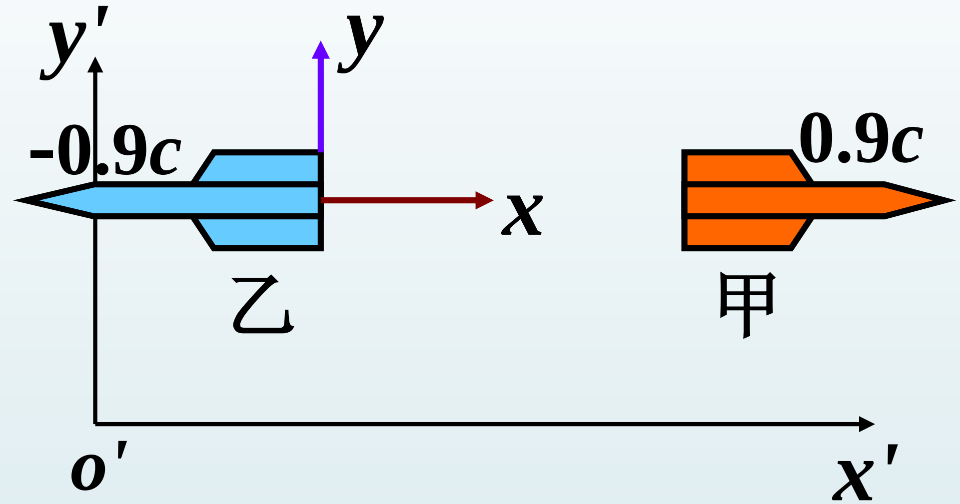
取$v=0.9c$，如图所示:



已知：$v=0.9c$　$u_x=-0.9c$

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{-0.9c-0.9c}{1-\frac{0.9c}{c^2}\cdot(-0.9c)}\approx -0.994c$$

例：在地面测到两艘飞船分别以0.9c和–0.9c的速度向相反方向飞行，求其中一飞船看另一飞船的速度是多少？



解：取乙飞船为S系，取地面为S'系。

S' 系相对S系的速度 v=0.9c

甲船相对S' 系的速度：

$$u'_x = 0.9c$$

甲船相对S系（乙船）的速度：

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.9 \times 0.9} \approx 0.994c$$

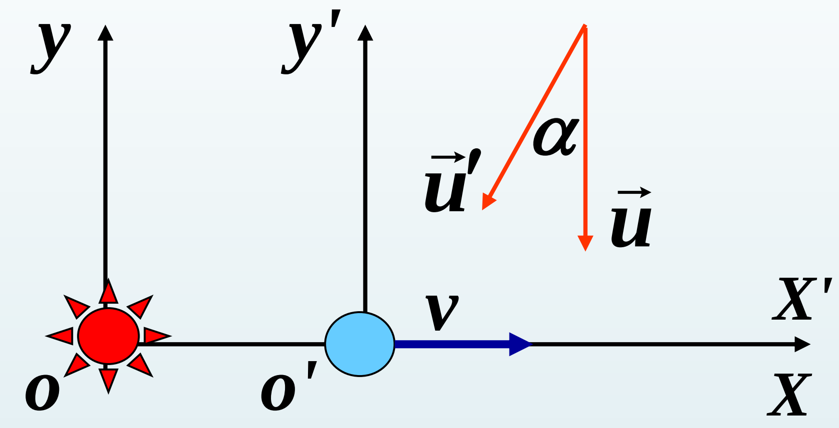
$$\boxed{u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}}$$

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}}$$

$$u_y = u'_y = 0 \qquad u_z = u'_z = 0 \longrightarrow u = 0.994c < c$$

若按伽利略变换：$u = u' + v = 1.8c$　显然不对。

例：在太阳系中观察一束星光垂直射向地面，速率c，而地球以速率v 垂直光线运动，求地面上测量这束星光的速度大小方向？



解：设太阳系为S系，地球S'系

在S系看星光的速度：

$u_x=0$，$u_y=-c$，$u_z=0$

在S' 系看星光的速度：

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=-v$$

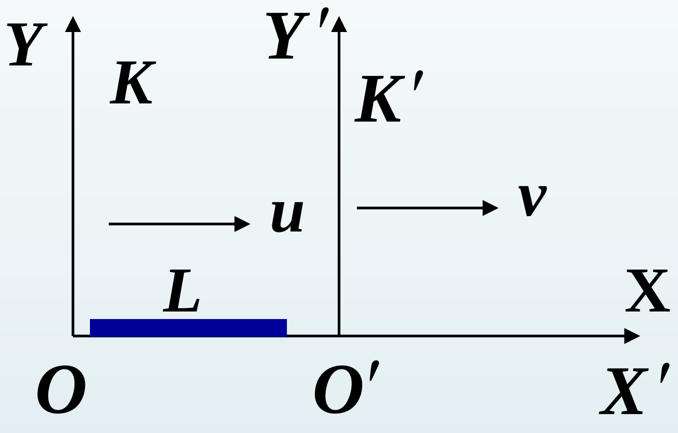
$$u'_y=\frac{u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=-c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$u'_z=\frac{u_z}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=0$$

$$u'=\sqrt{{u'_x}^2+{u'_y}^2}=c$$

$$\alpha'=tg^{-1}\frac{u'_x}{u'_y}=20.6''$$

例: 在K系中细杆以速度u沿X轴运动，长为L。今有一观察者以速度v沿X轴运动。则此观察者看到的杆长为多少?



解: 取观察者为K'系，则K'系相对于K系的速度为v。设杆的原长为L_0。则

$$L=L_0\sqrt{1-u^2/c^2}\text{，即 } L_0=L/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

杆在K '系中的速度 $u'_x=\dfrac{u-v}{1-\dfrac{v}{c^2}u}$ 于是杆在K '系中的长度为

$$L'=L_0\sqrt{1-u_x'^2/c^2}=\frac{L\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-uv/c^2}$$

双生子佯谬

Twin paradox

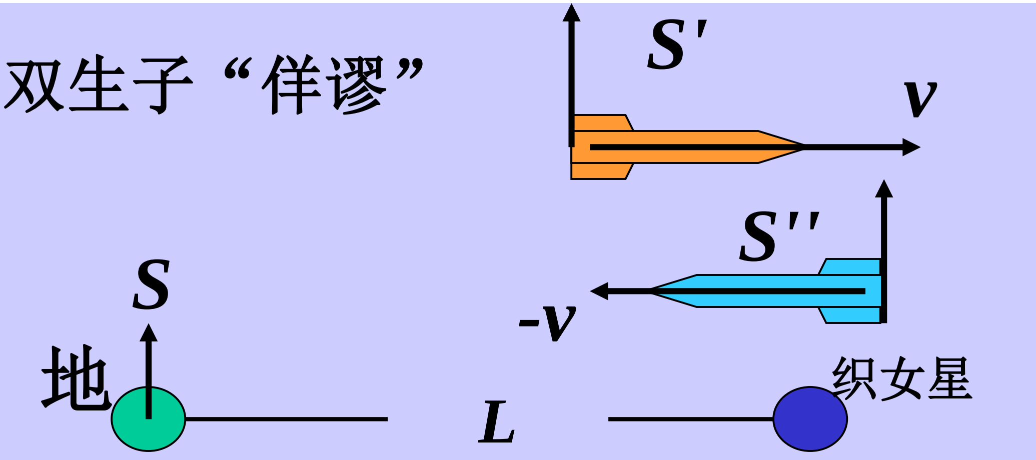
双生子佯谬

原因：两人经过的物理过程不对等.

当v=0.8c时，T'＝0.6T.

哥哥坐飞船离开，旅行后再回来。

双生子“佯谬”



哥哥到达织女星时突然跳上S''往回走，S''到地球时再突然跳回地球。事件1：哥哥启程离开地球; 事件2：哥哥跳上S'' ;事件3：哥哥跳回地球。问题实质：比较弟弟和哥哥分别看到的事件1和事件3的时间间隔T和T'.

设地球上(S系)弟弟看到1、3间隔为T，则1、2和2、3的间隔均为$T/2$; 哥哥看到1、3间隔为$T'=t_1+t_2$.其中，t_1是哥哥在S'上看到的1、2的间隔；t_2是哥哥在S'上看到的2、3的间隔。t_1和t_2都是原时. 故

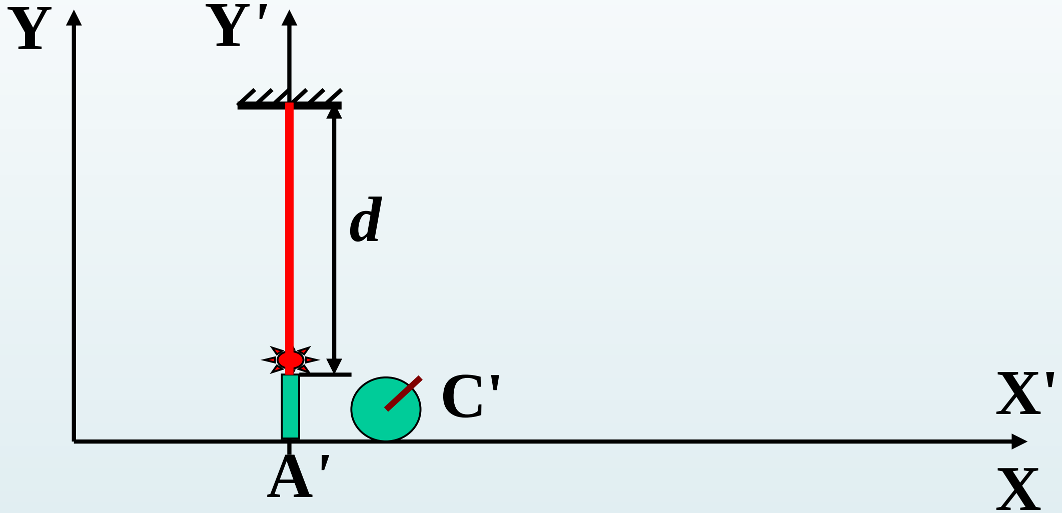
$$T/2 = t_1/\sqrt{1-(v/c)^2}, \quad \therefore t_1 = T\sqrt{1-(v/c)^2}/2$$

$$T/2 = t_2/\sqrt{1-(-v/c)^2}, \quad \therefore t_2 = T\sqrt{1-(v/c)^2}/2$$

$$\therefore T' = t_1 + t_2 = T\sqrt{1-(v/c)^2} < T$$

●时间膨胀（运动的时钟变慢）

设S′ 系中，A′ 点有一闪光光源，在Y′ 轴放一反射镜



在S'系看：

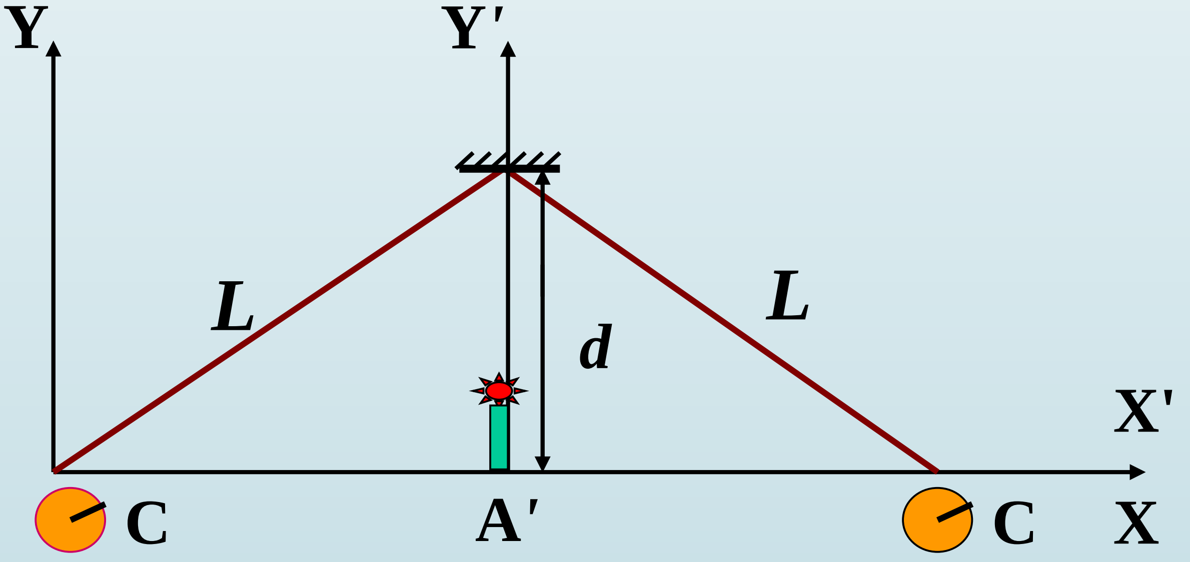
两事件时间间隔：

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

在S系看：

$$L = \sqrt{d^2 + \left(v\Delta t/2\right)^2}$$

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2d/c}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}$$

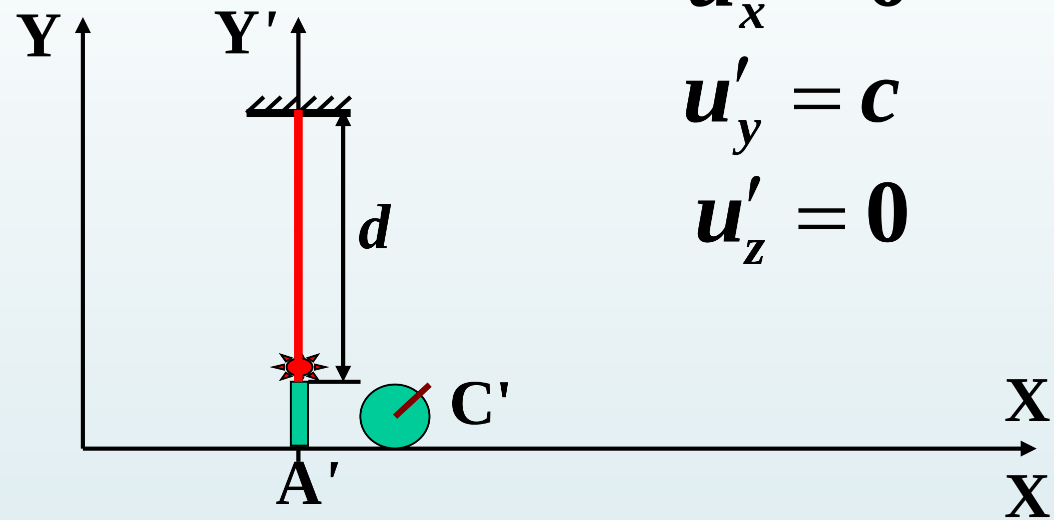


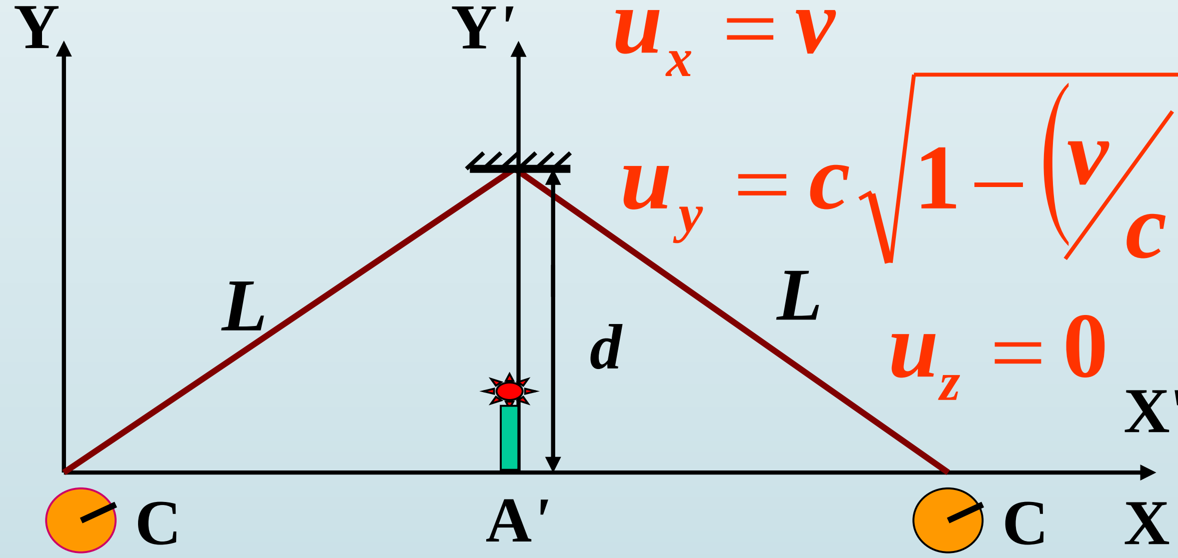
显然： $\Delta t > \Delta t'$

●时间膨胀（运动的时钟变慢）

$$
\begin{cases}
u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \\
u_y = \dfrac{u'_y}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \sqrt{1 - \left(v/c\right)^2} \\
u_z = \dfrac{u'_z}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \sqrt{1 - \left(v/c\right)^2}
\end{cases}
$$

$$u'_x = 0$$
$$u'_y = c$$
$$u'_z = 0$$





$$u_x = v$$
$$u_y = c\sqrt{1 - \left(v/c\right)^2}$$
$$u_z = 0$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$
$$= c$$