# 7.2 初等积分法

一、可分离变量微分方程

二、齐次方程

三、一阶线性微分方程

四、伯努利方程

五、可降阶高阶微分方程

# 一、可分离变量微分方程——分离变量法

形式： $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

解法: (1) $g(y) \neq 0$ .分离变量

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

两边积分 $$\underbrace{\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\mathrm{d}x}_{F(x)}$$

则有 $G(y) = F(x) + C$ ——隐式通解

(2) $g(y)=0$, 即$g(y)=0$有实根 $y_1, y_2, \cdots, y_n$.
则$y(x)\equiv y_1, y(x)\equiv y_2, \cdots, y(x)\equiv y_n$都是该方程的解(特解).

故求原方程的通解则求出 $G(y)=F(x)+C$ 即可.若要得到所有解还需考虑$g(y)=0$所得的特解. 此外，特解$y(x)\equiv y_1, y(x)\equiv y_2, \cdots, y(x)\equiv y_n$可能包含在通解

$G(y)=F(x)+C$ 中.

**例1.** 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$ 的通解.

**解:** (1) $y \neq 0$ 时分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3x^2\,\mathrm{d}x$

两边积分 $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y| = x^3 + C_1$

即 $y = \pm e^{x^3 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^3}$ ( $C_1$ 为任意常数)

令 $C = \pm e^{C_1}$

$y = C e^{x^3}$ ( $C$ 为常数, $C \neq 0$ )

(2) $y = 0$ 为原方程特解

综上所述, 通解为 $y = C e^{x^3}$ ( $C$ 为任意常数)

**例2.** 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ \underline{y(0) = 1} \end{cases}$

**解:** **(1)**$y \neq 0$时分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1} = C$ ($C$为常数, $C \neq 0$ )

(2) $\boldsymbol{y = 0}$ 为原方程特解

综上所述,原方程所有解为 $y\sqrt{x^2+1} = C$ ($C$为任意常数)

由初始条件得 $C = 1$, 故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1} = 1$$

**练习:** 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{x+y}$ 的通解.

**解法 1** 分离变量 $e^{-y}\,\mathrm{d}y=e^{x}\,\mathrm{d}x$

$$-e^{-y}=e^{x}+C$$

即 $$(e^{x}+C)e^{y}+1=0\quad(C<0)$$

**解法 2** 令 $u=x+y$, 则 $u'=1+y'$

故有 $$u'=1+e^{u}$$

积分 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{1+e^{u}}=x+C$$

$$\boxed{\int\frac{(1+e^{u})-e^{u}}{1+e^{u}}\,\mathrm{d}u}$$

$$u-\ln(1+e^{u})=x+C$$

所求通解: $\ln(1+e^{x+y})=y-C$ ( $C$ 为任意常数 )

**例4.** 已知放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变原子的含量 $M$ 成正比, 已知 $t=0$ 时铀的含量为 $M_0$, 求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 $t$ 的变化规律.

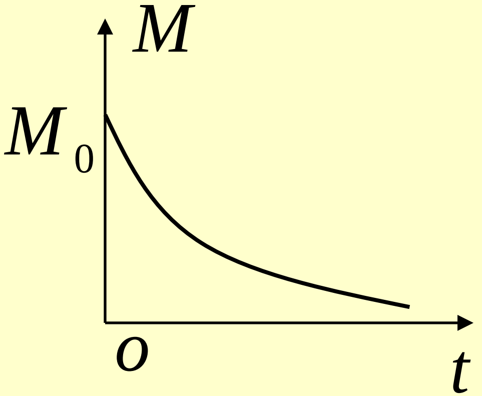
**解:** 根据题意, 有 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M \quad (\lambda > 0) \\ M\big|_{t=0} = M_0 \quad \text{(初始条件)} \end{cases}$

对方程分离变量, 然后积分: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}M}{M} = \int (-\lambda)\,\mathrm{d}t$

得 $\ln M = -\lambda t + \ln C$, 即 $M = C e^{-\lambda t}$

利用初始条件, 得 $C = M_0$

故所求铀的变化规律为 $M = M_0 e^{-\lambda t}$.



**例5.** 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时( $t=0$ ) 速度为0, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

**解:** 根据牛顿第二定律列方程 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$

初始条件为 $v\big|_{t=0}=0$

对方程分离变量, 然后积分 : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m}$

得 $-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C$ (此处 $mg-kv>0$ )

利用初始条件, 得 $C=-\dfrac{1}{k}\ln(mg)$

代入上式后化简, 得特解 $v=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$

$t$ 足够大时

$v\approx\dfrac{mg}{k}$

解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的共性及可贯穿于全过程的规律列方程.

**常用的方法:**

1) 根据几何关系列方程

2) 根据物理规律列方程

3) 根据微量分析平衡关系列方程

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.

## 二、齐次方程

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$ 的方程叫做**齐次方程**.

解法: 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$

分离变量: $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分, 得 $\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 $u$, 便得原方程的通解.

**例1.** 解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$.

**解:** 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + x u'$, 代入原方程得

$$u + x u' = u + \tan u \qquad (7.2.1)$$

(1) $\tan u \neq 0$ 时分离变量 $\frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分 $\int \frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

得 $\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|$, 即 $\sin u = C x$

从而 $\sin\frac{y}{x} = C x$ ($C$ 为常数, $C \neq 0$)

(2) $\tan u = 0$ 时, $u = k\pi$ 为方程(7.2.1)的特解,故 原方程有特解 $y = k\pi x (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,)$.

综上,原方程所有解为 $\sin\frac{y}{x} = C x$ ( $C$ 为任意常数)

**例2.** 解微分方程 $(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0.$

**解:** 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-(\dfrac{y}{x})^2$, 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则有

$$u+xu'=2u-u^2 \qquad (7.2.2)$$

(1) $u^2-u\neq 0$时分离变量

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad 即\ (\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u})\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得 $\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|$, 即 $\dfrac{x(u-1)}{u}=C$

代回原变量 $x(y-x)=Cy$ ($C$ 为常数, $C\neq 0$)

(2) $u^2-u=0$时, 方程(7.2.2)有特解 $u=0, u=1$. 故原方程有特解 $y=0$, $y=x$

综上, 原方程的所有解为 $x(y-x)=Cy$ ($C$ 为任意常数) 和 $y=0$.

**例3.** 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

**解:** 令 $u = x - y + 1$, 则

$$u' = 1 - y'$$

故有 $$1 - u' = \sin^2 u$$

即 $$\sec^2 u \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

解得 $$\tan u = x + C$$

所求通解: $\tan(x - y + 1) = x + C$ （ $C$ 为任意常数 ）

例 求方程 $x+yy'=(x^2+y^2+1)\tan x$ 的通解

解 作代换 $u=x^2+y^2$, 则 $u'=2x+2yy'$,方程变为

$$\frac{1}{2}u'=(1+u)\tan x.$$

分离变量得

$$\frac{1}{2(1+u)}\mathrm{d}u=\tan x\mathrm{d}x, \qquad (u\geq 0)$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln(1+u)=-\ln|\cos x|+\frac{1}{2}\ln C,$$

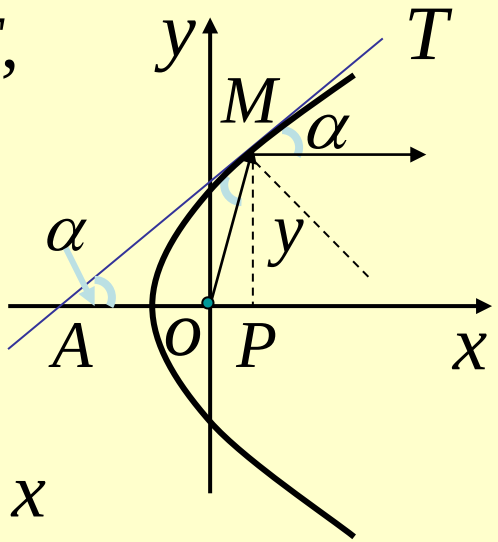
故通解为

$$(1+x^2+y^2)\cos^2 x=C.$$

**例3.** 在制造探照灯反射镜面时, 要求点光源的光线反射出去有良好的方向性 , 试求反射镜面的形状.

**解:** 设光源在坐标原点, 取$x$ 轴平行于光线反射方向, 则反射镜面由曲线 $y = f(x)$ 绕 $x$ 轴旋转而成 .

过曲线上任意点 $M(x, y)$ 作切线 $MT$,




由光的反射定律: $\boxed{\text{入射角} = \text{反射角}}$

可得 $\angle OMA = \angle OAM = \alpha$

从而 $AO = OM$

而 $AO = AP - OP = y\cot\alpha - x = \dfrac{y}{y'} - x$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

于是得微分方程 : $\dfrac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$

利用曲线的对称性, 不妨设 $y>0$, 于是方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$ (齐次方程)

令 $v=\frac{x}{y}$, 则 $x=yv$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=v+y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$

$$y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\sqrt{1+v^2}$$

积分得 $\ln(v+\sqrt{1+v^2})=\ln y-\ln C$

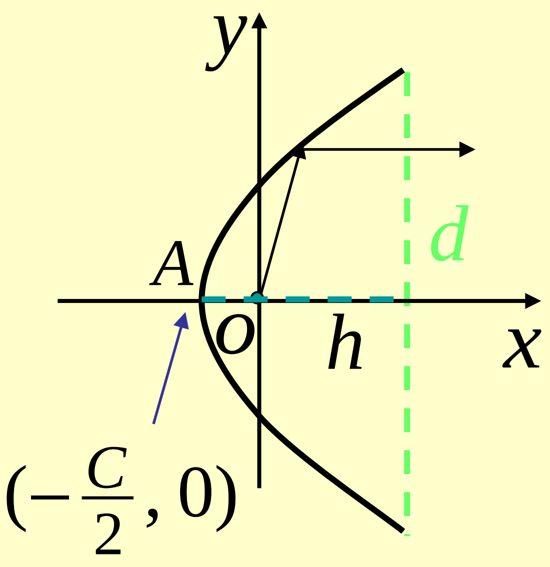
$$\boxed{\begin{array}{l} v+\sqrt{1+v^2}=\dfrac{y}{C} \\ \left(\dfrac{y}{C}-v\right)^2=1+v^2 \end{array}}$$

故有 $\frac{y^2}{C^2}-\frac{2yv}{C}=1$

代入 $yv=x$, 得 $y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)$ (抛物线)

故反射镜面为旋转抛物面.

**说明:** $y^2 = 2C(x + \frac{C}{2})$




若已知反射镜面的底面直径为 $d$，顶到底的距离为 $h$，则将

$$x + \frac{C}{2} = h, \quad y = \frac{d}{2}$$

代入通解表达式得 $C = \dfrac{d^2}{8h}$

这时旋转曲面方程为

$$y^2 + z^2 = \frac{d^2}{4h}\left(x + \frac{d^2}{16h}\right)$$

## 内容小结

1. 微分方程的概念

微分方程; 阶; 定解条件; 解; 通解; 特解

**说明:** 通解不一定是方程的全部解 .

例如, 方程 $(x+y)\,y'=0$ 有解

$$y=-x \text{ 及 } y=C$$

后者是通解 , 但不包含前一个解 .

2. 可分离变量方程的求解方法:

分离变量后积分; 根据定解条件定常数 .

3. 齐次方程----化为可分离变量方程

## 思考与练习

求下列方程的通解：

$$(1)\ (x+xy^2)\,\mathrm{d}x-(x^2y+y)\mathrm{d}y=0$$

$$(2)\ y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

**提示: (1)** 分离变量 $\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

**(2)** 方程变形为 $y'=-2\cos x\sin y$

$$\Longrightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|=-2\sin x+C$$

# 三、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

若 $Q(x)\equiv 0$, 称为**齐次方程** ;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称为**非齐次方程** .

1. 解齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解(全体解)为 $y=C\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ (C为任意常数).

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

解：在方程两边同时乘以 $e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ (注意这里 $\int P(x)\mathrm{d}x$ 只需取 $P$ 的一个原函数即可, 无需加上任意常数. ) 则原方程变为

$$y'(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)y(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

即

$$\longrightarrow \quad \left[y(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right]'=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

$$\longrightarrow \quad y(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C.$$

此处 $\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 也只需取 $Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ 的一个原函数.

从而原方程的通解(全体解)为

$$y(x)=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

或用**常数变易法**：已知相应齐次方程的通解为 $y=C\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

设原方程有如下形式的解

$$y(x)=u(x)\,e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}\,x},\quad (*)\qquad \text{则}$$

$$u'\,e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}\cancel{-P(x)u\,e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}}\cancel{+P(x)\,u\,e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}}=Q(x)$$

即
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

两端积分得 $u=\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x+C$, 带入$(*)$ 则得

通解(全体解)为
$$y=e^{\underbrace{-\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}_{①}}\left[\int Q(x)\,e^{\underbrace{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}_{②}}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

**(1)(2)两处应取P(x) 的同一个原函数**

(1) 用常数变易法求解非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

时,先求出相应齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

的通解 $y=C\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$,再将其中的常数C变成函数:

$$y(x)=u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}\,x},$$

将上式带入非齐次方程求出**所有**满足原方程的$u(x)$ 即得通解.

(2) 通解公式中三处的不定积分积出后无需加任意常数.

此外该公式两处出现$\int P(x)\mathrm{d}x$ 的地方需取同一个原函数.

**例1.** 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$ .

**解:** 先解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{2\mathrm{d}x}{x+1}$

积分得 $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C|$，即 $y=C(x+1)^2$

用**常数变易法**求通解. 令 $y=u(x)\cdot(x+1)^2$，则

$$y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{1/2}$

解得 $u=\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

**例2.** 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{xy}}+\left[\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right]\mathrm{d}y=0$ 的通解 .

**解:** 注意 $x, y$ 同号, 当 $x>0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\,\mathrm{d}\sqrt{x}$ , 故方程可

变形为 $$2\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}y}-\frac{\sqrt{x}}{y}=-\frac{2}{\sqrt{y}}$$

这是以 $\sqrt{x}$ 为因变量, $y$ 为自变量的一阶线性方程

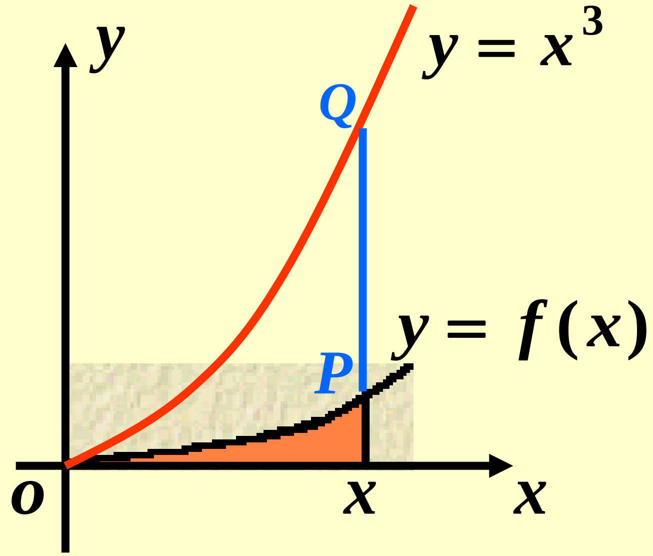
由一阶线性方程**通解公式**, 得

$$\sqrt{x}=e^{\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}\left[\int-\frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}\mathrm{d}y+\ln|C|\right]$$

$$=\sqrt{y}\left[-\int\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y+\ln|C|\right]=\sqrt{y}\ln\left|\frac{C}{y}\right|$$

所求通解为 $$y\,e^{\sqrt{x/y}}=C\ (C\neq 0)$$

例3　如图所示，平行于 $y$ 轴的动直线被曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^3\ (x \ge 0)$ 截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$.




解

$$\int_0^x y\,dx = x^3 - y,$$

两边求导得 $y' + y = 3x^2$,

解得 $y = e^{-\int dx}\left[C + \int 3x^2 e^{\int dx}\,dx\right]$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0$,　得 $C = -6$,

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x)$.

# 四、伯努利 ( Bernoulli )方程

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

**解法:** 以 $y^n$ 除方程两边, 得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ (线性方程)

求出此方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.

**例4.** 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

**解:** 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为 $$z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

# 内容小结

1. 一阶线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

方法1　先解齐次方程，再用常数变易法.

方法2　用通解公式

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

2. 伯努利方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad(n\neq 0,1)$

令 $u=y^{1-n}$，化为线性方程求解.

## 思考与练习

判别下列方程类型:

**提示:**

(1) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \longrightarrow \frac{y-1}{y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 可分离变量方程

(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x) \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ 齐次方程

(3) $(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y=0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}y=-\frac{x^2}{2}$ 线性方程

(4) $2y\,\mathrm{d}x+(y^3-x)\mathrm{d}y=0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{2y}x=-\frac{y^2}{2}$ 线性方程

(5) $(y\sin x-2)y\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\frac{\sin x}{x}y^2$ 伯努利方程

# 例题

1. 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$$

令 $u=x-t$

**提示:** $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

利用公式可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$$

**2.** 设有微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} 2\,, & 0 \le x \le 1 \\ 0\,, & x > 1 \end{cases}$$

试求此方程满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 的连续解.

**解:** 1) 先解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 2, & 0 \le x \le 1 \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

利用通解公式, 得

$$y = e^{-\int \mathrm{d}x}\left(\int 2e^{\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C_1\right)$$

$$= e^{-x}(2e^{x} + C_1) = 2 + C_1 e^{-x}$$

利用 $y\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = -2$

故有 $\quad y = 2 - 2e^{-x} \quad (0 \le x \le 1)$

2) 再解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 0, & x > 1 \\ y\big|_{x=1} = y(1) = 2 - 2e^{-1} \end{cases}$

此齐次线性方程的通解为 $y = C_2 e^{-x} \quad (x \geq 1)$

利用衔接条件得 $C_2 = 2(e-1)$

因此有 $y = 2(e-1)\,e^{-x} \quad (x \geq 1)$

3) 原问题的解为

$$y = \begin{cases} 2(1-e^{-x}), & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(e-1)\,e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

# 五、可降阶高阶微分方程

1、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

2、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

3、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

## 1、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

令 $z = y^{(n-1)}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{(n)} = f(x)$ ,因此

$$z = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

即 $$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

同理可得 $$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2$$

$$= \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

依次通过 $n$ 次积分, 可得含 $n$ 个任意常数的通解 .

**例1.** 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

**解:** $$y'' = \int \left(e^{2x} - \cos x\right) dx + C_1'$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

（此处 $C_1 = \frac{1}{2} C_1'$ ）

## 2、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 （不显含$y$）

设 $y' = p(x)$，则 $y'' = p'$，原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分，得原方程的通解 $y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$

---

**注：$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})$ 型**

因变量换元：$p = y^{(k)}$

降阶为 $p^{(n-k)} = f(x, p, \cdots, p^{(n-k-1)})$。

**例2.** 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1, \quad y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

**解:** 设 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$, 即 $p=C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0}=3$, 得 $C_1=3$, 于是有 $y'=3(1+x^2)$

两端再积分得 $y=x^3+3x+C_2$

利用 $y\big|_{x=0}=1$, 得 $C_2=1$, 因此所求特解为

$$y=x^3+3x+1$$

## 3、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 (不显含自变量 $x$)

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

**例4.** 求解$yy'' - y'^2 = 0$.

**解:** 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$\therefore \quad y' = C_1 y$ (一阶线性齐次方程)

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$

**例5.** 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

**解:** 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = e^{2y}\,\mathrm{d}y$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = e^{y}$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$

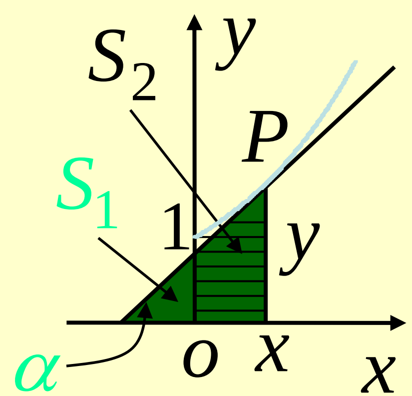
**例6.** 设函数 $y(x)\ (x\ge 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x)>0$, $y(0)=1$, 过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 $x$ 轴的垂线, 上述两直线与 $x$ 轴围成的三角形面积记为 $S_1$, 区间$[\,0,x\,]$ 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 $S_2$, 且 $2S_1-S_2\equiv 1$, 求 $y=y(x)$ 满足的方程 .

**解:** 因为 $y(0)=1,\ y'(x)>0$, 所以 $y(x)>0.$

设曲线 $y=y(x)$在点 $P(x,y)$ 处的切线倾角为 $\alpha$, 于是

$$S_1=\frac{1}{2}y^2\cot\alpha=\frac{y^2}{2y'}$$

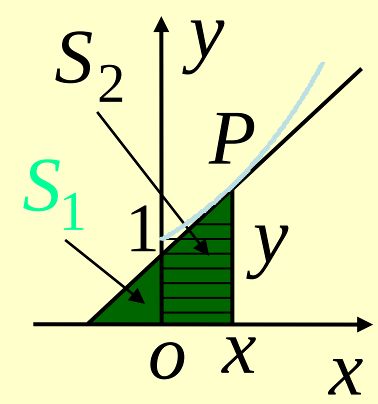
$$S_2=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$



利用 $2S_1 - S_2 = 1$，得 $\dfrac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1$

两边对 $x$ 求导，得 $yy'' = (y')^2$

定解条件为 $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$




令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解得 $p = C_1 y$，利用定解条件得 $C_1 = 1$，再解 $y' = y$，得

$y = C_2 e^x$，再利用 $y(0) = 1$ 得 $C_2 = 1$，故所求曲线方程为

$$y = e^x$$

# 内容小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$

逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

## 思考与练习

1. 方程 $y'' = f(y')$ 如何代换求解？

**答:** 令 $y' = p(x)$ 或 $y' = p(y)$ 均可.

一般说, 用前者方便些.

有时用后者方便 .

2. 解二阶可降阶微分方程初值问题需注意哪些问题？

**答:** (1) 一般情况 , 边解边定常数计算简便.

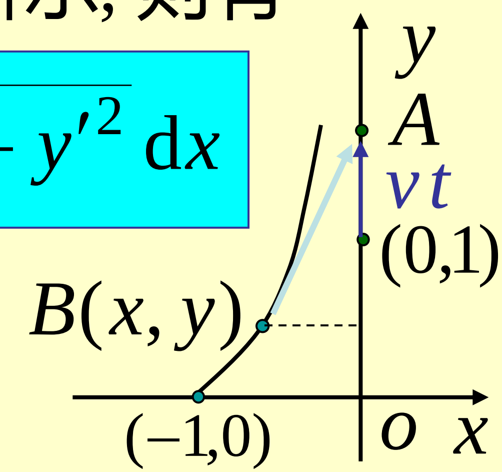
(2) 遇到开平方时, 要根据题意确定正负号.

**例题** 设物体 $A$ 从点( 0, 1 )出发, 以大小为常数 $v$ 的速度沿 $y$ 轴正向运动, 物体 $B$ 从 (–1, 0 ) 出发, 速度大小为 $2v$, 方向指向$A$ , 试建立物体 $B$ 的运动轨迹应满足的微分方程及初始条件.

**提示:** 设 $t$ 时刻 $B$ 位于 ( $x, y$ ), 如图所示, 则有

$$y' = \frac{1+vt-y}{-x}$$

$$\boxed{s = \int_{-1}^{x} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}$$



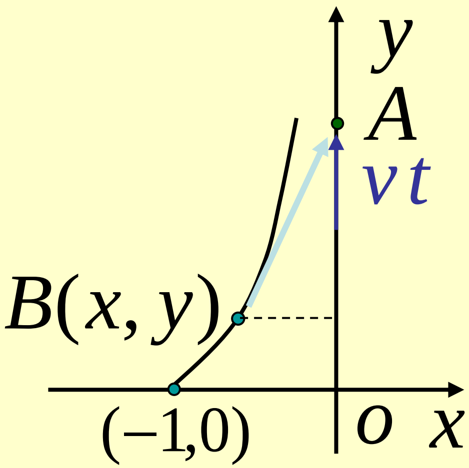

去分母后两边对 $x$ 求导, 得

$$x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \qquad ①$$

又由于 $2v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1+y'^2}\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

弧微分 $\mathbf{d}s = \sqrt{\mathbf{1}+y'^{\mathbf{2}}}\,\mathbf{d}x$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$




代入 ① 式得所求微分方程:

$$x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2} = 0$$

其初始条件为

$$y\big|_{x=-1} = 0,\ \ y'\big|_{x=-1} = 1$$