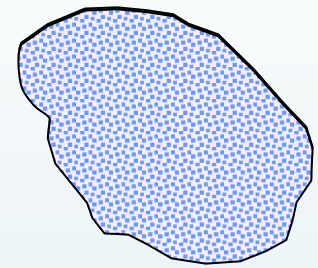
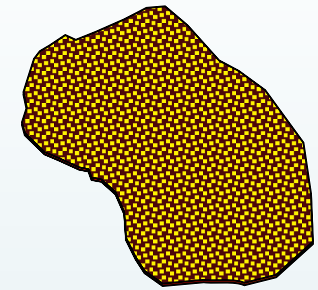
大学物理（一）

任课老师：蔡林
cailin@hust.edu.cn

回顾

一、库仑定律 $\vec{F}=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$





二、电力叠加原理

三、电场、电场强度及场强叠加原理

静电场：相对观察者静止的电荷激发的电场。

$\vec{E}$ 的定义：$\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$ （q_0很小, 是试验电荷）

点电荷：$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

带电体：
$$\begin{cases}\vec{E}=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{e}_{r_i}\\[2ex] \vec{E}=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\end{cases}$$

无限长带电细棒：$\vec{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$

(均匀)

无限大带电平面：$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

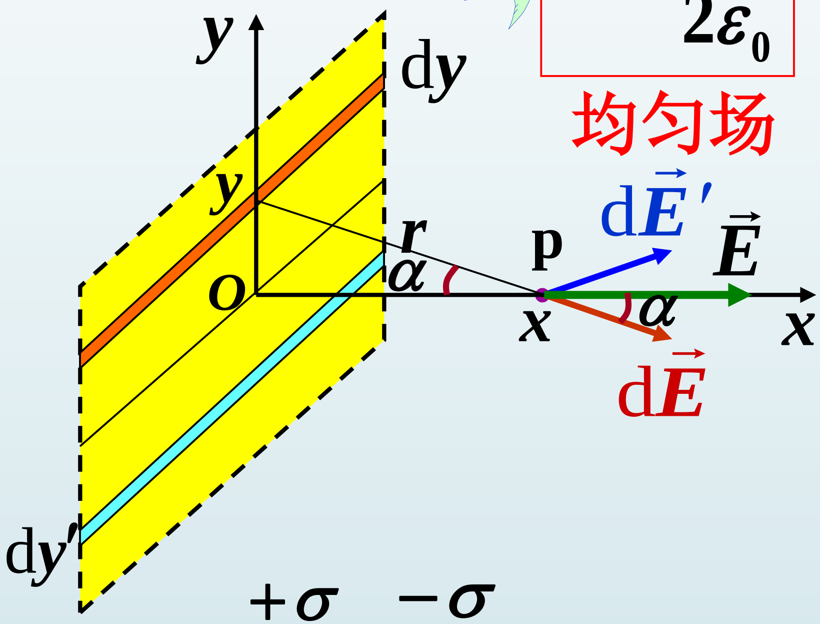
(均匀)

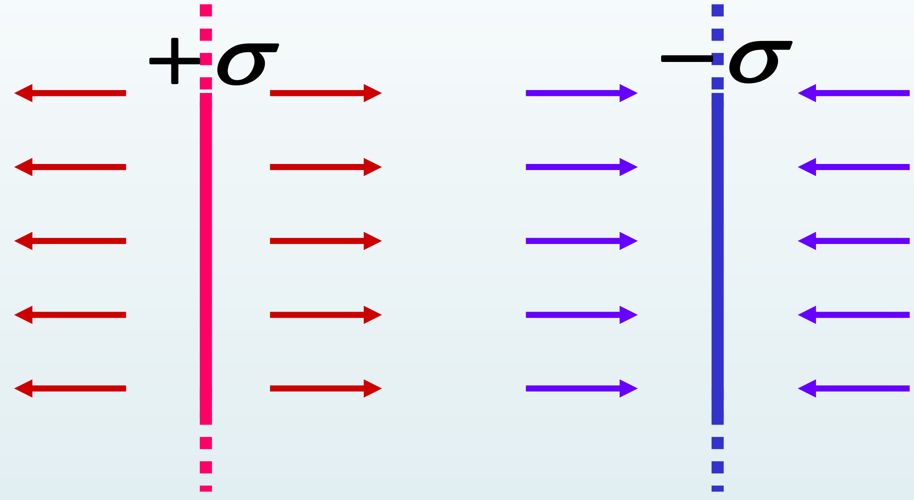
对于点电荷：$\vec{F}=q\vec{E}$

例： 一无限大带电平面的面电荷密度为σ，求其电场分布。

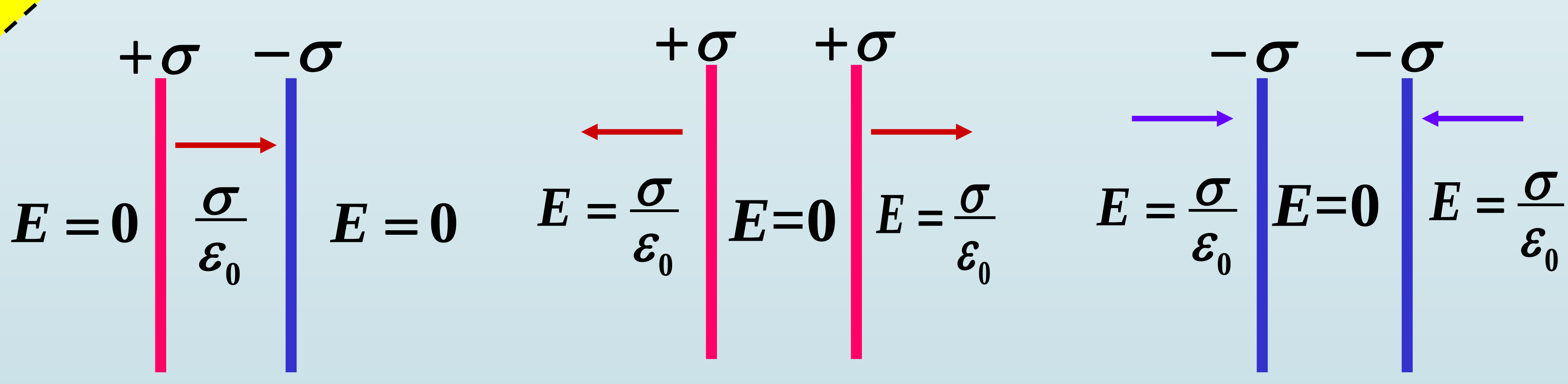
$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

均匀场





讨论：

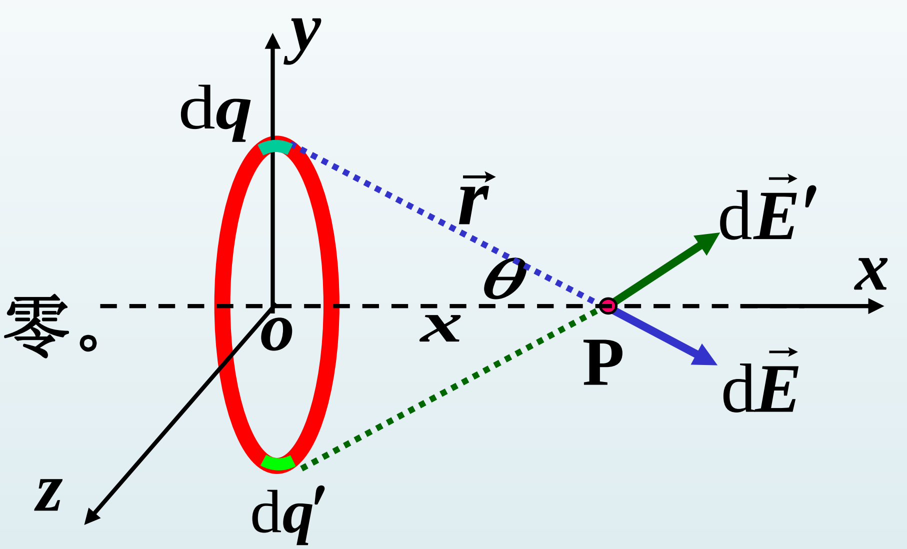


例：求一均匀带电圆环轴线上的电场强度。

设圆环半径为R，带电量为Q。

解：在圆环上任取电荷元$\mathrm{d}q$。

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



由对称性知，垂直x轴的场强为零。

$$\therefore E=E_x$$

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta$$

$$E=E_x=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta=\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int\mathrm{d}q=\frac{Q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}\rightarrow E=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\xrightarrow{x>>R}E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

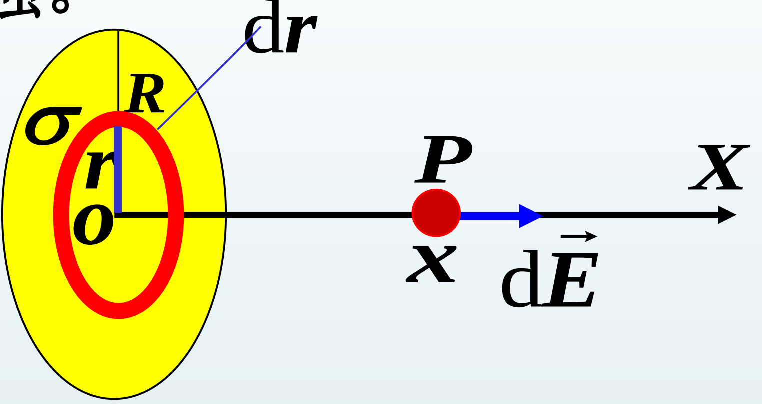
→点电荷

例: 半径为 R 的均匀带电圆盘的面电荷密度为$\sigma(>0)$。求此圆盘轴线上任一点 p 的场强。

解: 圆盘可视为由许多小圆环组成。

取半径为r宽为$\mathrm{d}r$的圆环,

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$



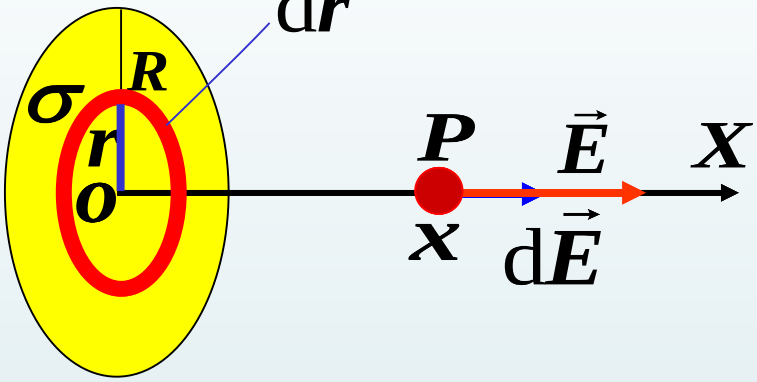
$$\boxed{E=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}}$$

(半径为R的圆环轴线上)

$$E=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

例: 半径为 R 的均匀带电圆盘的面电荷密度为 $\sigma\,(>0)$。求此圆盘轴线上任一点 p 的场强。

解: 圆盘可视为由许多小圆环组成。



取半径为 r 宽为 dr 的圆环,

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

代替右式中的 Q 得:

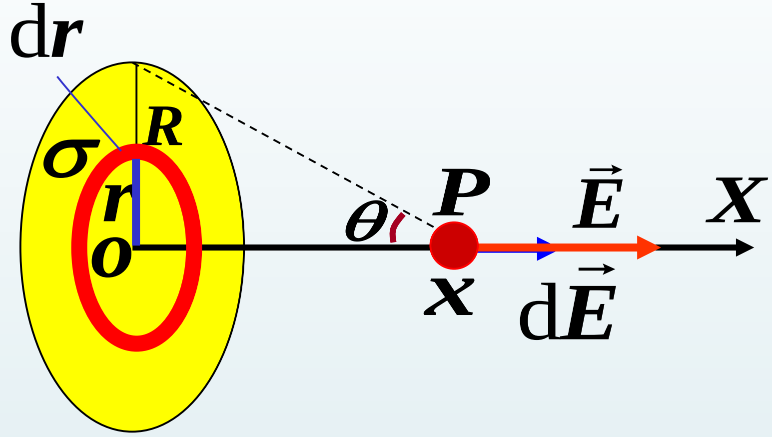
$$E=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}E=\frac{x\cdot\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E=\int\mathrm{d}E=\int_0^R\frac{\sigma x r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

场强方向：沿 x 轴正方向。

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)}$$



讨论:

(1) $R\to\infty$ 无限大带电平面

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

(2) $x\to 0,\ E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

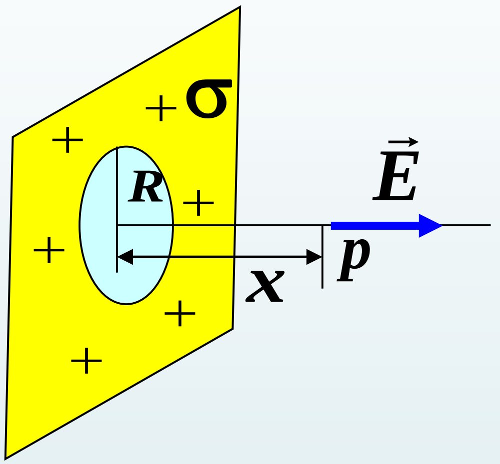
(3) $x>>R$时，$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$ （依二项式定理）

（相当于点电荷的场强）

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2}\right]$$

$$\approx\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}\right)\right]=\frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 x^2}=\frac{R^2}{4\varepsilon_0 x^2}\cdot\frac{q}{\pi R^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

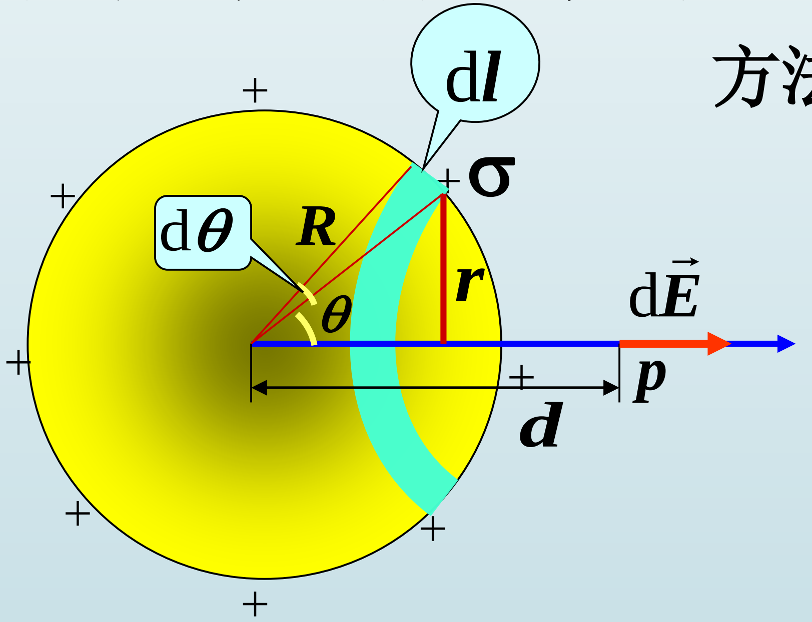
例: 无限大均匀带电平面中间有一圆孔，求轴上 $\vec{E}$ 。



三种方法
- 视为一系列圆环 $\int_R^\infty$
- 相减法
- 叠加法

$$E=\frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}$$

例: 求均匀带电球面的轴线上的 $\vec{E}$ 。



方法: 将球面视为一系列圆环

圆环宽度 $dl=Rd\theta$

圆环电量为

$$dq=\sigma 2\pi r dl$$

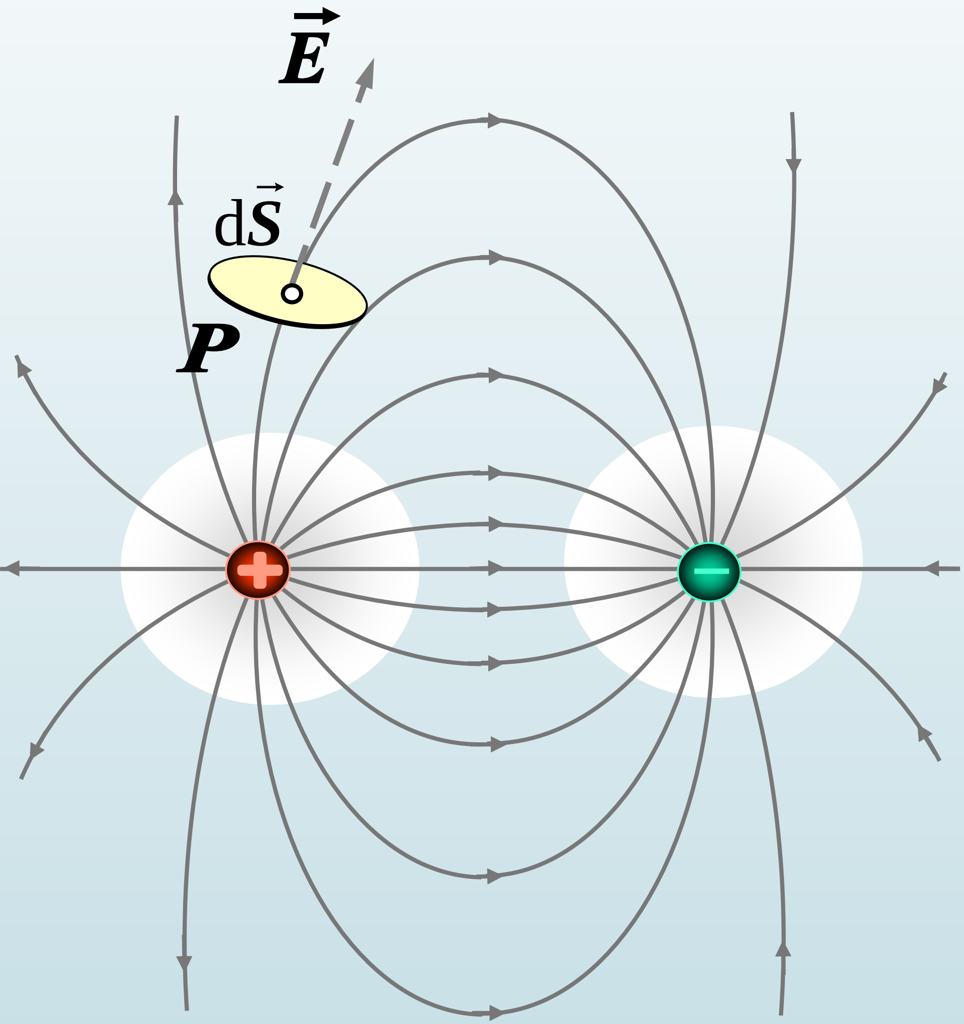
$$=\sigma 2\pi R\sin\theta R d\theta$$

积分

便得

四、静电场的高斯定理

1.电场线：（电力线）　**为形象地描述电场分布而在电场中引入的一系列假想曲线。**



并规定：

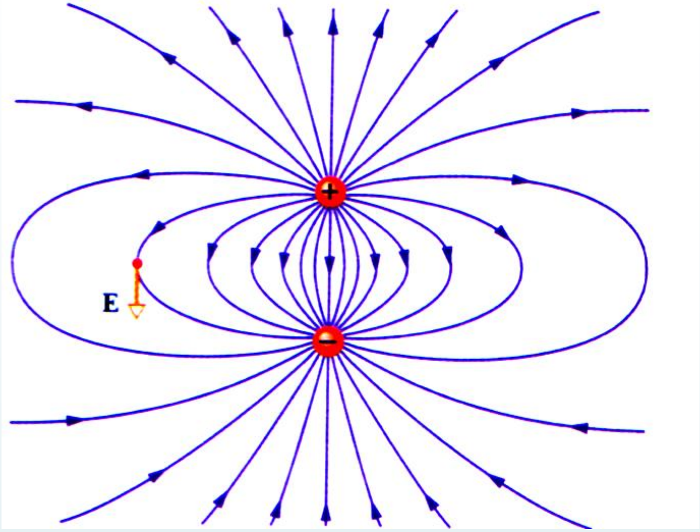
（1）电场线上每点的切线方向表示该点场强的方向；

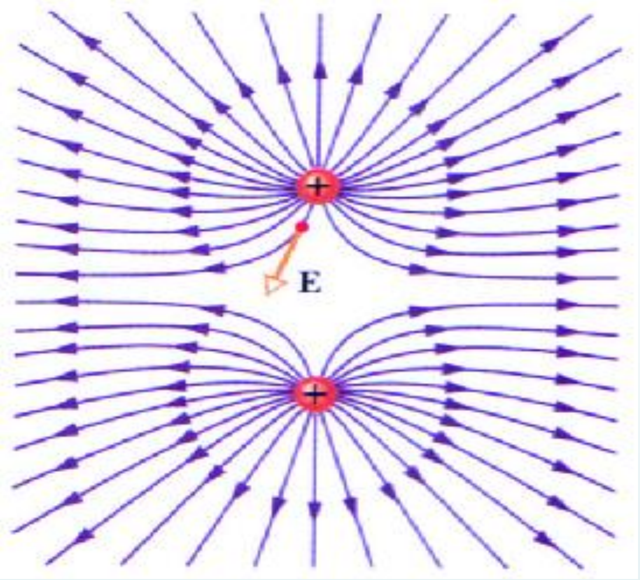
（2）电场中任意一点处，电场强度的大小等于通过该处的且垂直于电场方向的单位面积的电场线的条数。

$$E=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}$$ **（也称电场线密度）**

$$\mathrm{d}\vec{S}=\mathrm{d}S\cdot\vec{n}\quad(\mathrm{d}\vec{S}\perp\vec{E})$$

$$\vec{E}\,/\!/\,\vec{n}\quad \text{或}\quad \vec{E}\,/\!/-\vec{n}$$





注意：引入电场线，只是为了形象地表示电场，电场实际上是连续分布于空间的。

静电场中电场线的性质：

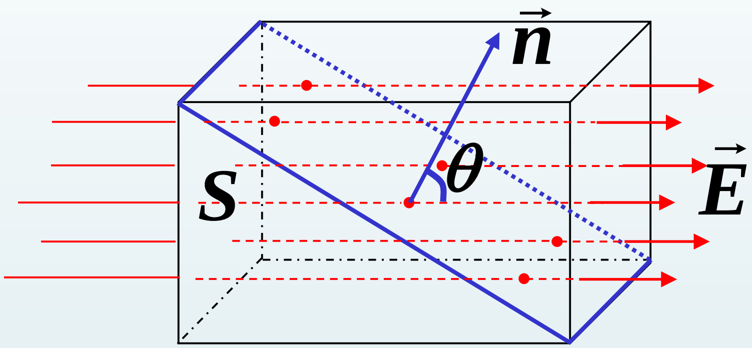
（1）起于正电荷，止于负电荷，有头有尾，不会在无电荷处中断。

（2）在没有电荷的空间里，任何两条电场线不会相交。

（3）电场线不会形成闭合曲线。

2.电通量 Φ_E

定义：通过电场中任一给定面的电场线总根数，就是该面的电通量Φ_E。

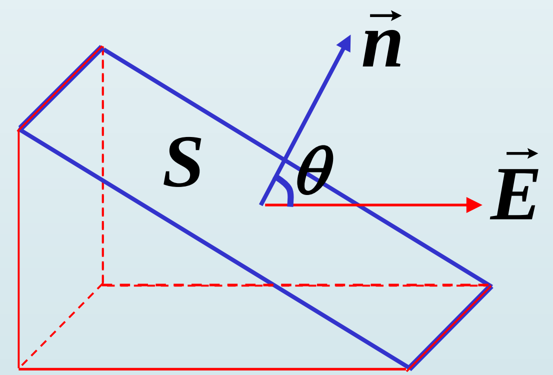


1）E为均匀场

(a)电场方向与平面S垂直，

$\vec{S}\perp\vec{E}$或其面法线$\vec{n}\parallel\vec{E}$

该面的电通量： $\Phi_E = ES$



(b) 若$\vec{n}$与$\vec{E}$成θ角

$$\Phi_E = ES\cos\theta \begin{cases} \theta < 90^\circ & \Phi_E > 0 \\ \theta > 90^\circ & \Phi_E < 0 \end{cases}$$

总之，在均匀电场中对于平面：$\boxed{\Phi_E = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}}$

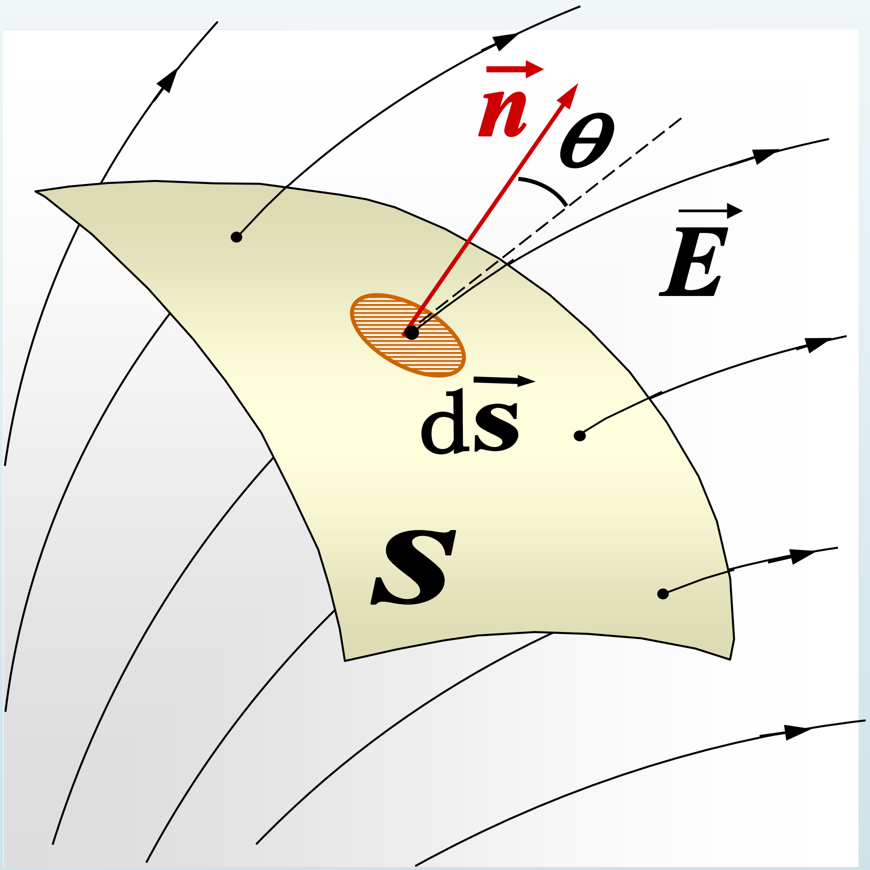
2）$\vec{E}$为非均匀场

$$\Phi_E = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

(均匀场,平面)

曲面S上, 各点的$\vec{E}$大小方向均不相同。

取面积元$\mathrm{d}\vec{S}$， 其上的电通量：



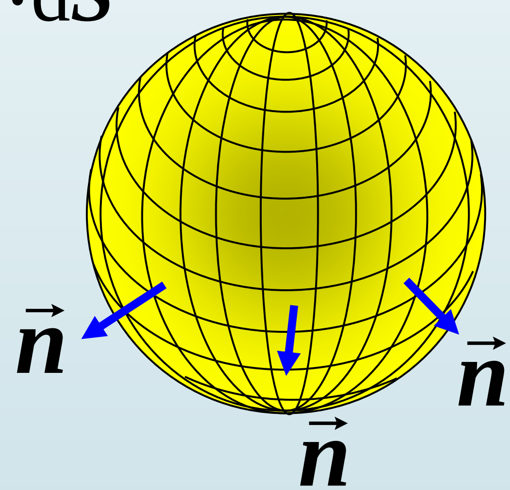
$$\mathrm{d}\Phi = E\mathrm{d}S\cos\theta = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

S面上总的电通量**(电场线的条数)**：

$$\Phi_E = \int \mathrm{d}\Phi_E = \int_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

若S为闭合曲面：

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



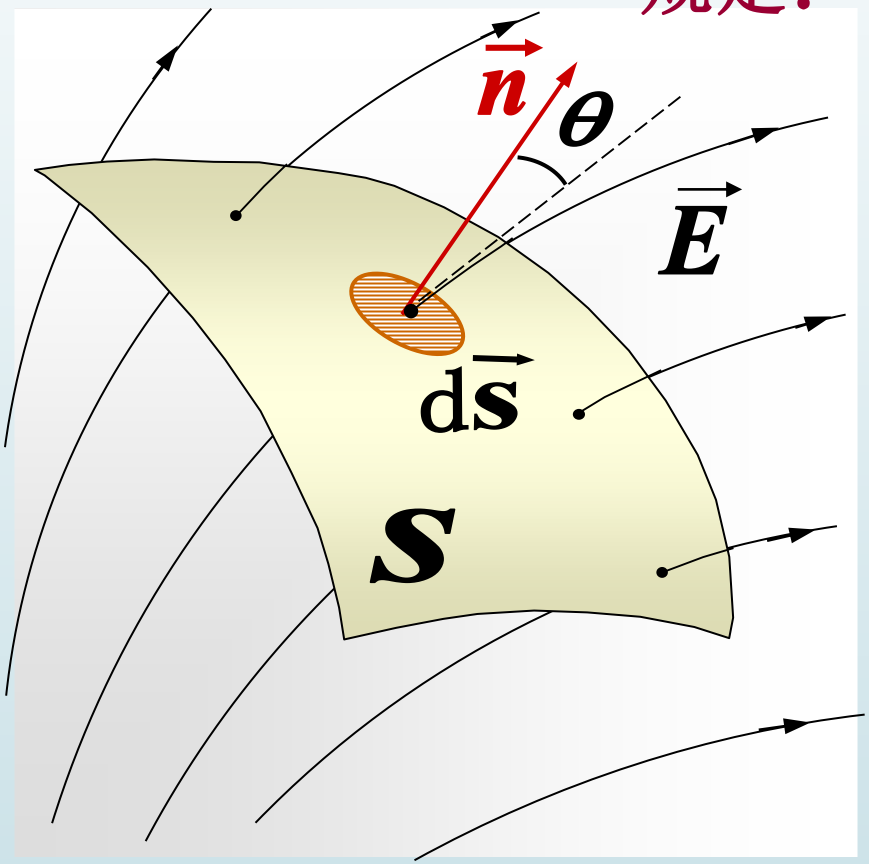
规定：

闭合曲面的法线自内向外为正方向。

曲面S的电通量：$\Phi_E = \int \mathrm{d}\Phi_E = \int_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

若S为闭合曲面：$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

规定：闭合曲面的法线自内向外为正方向。



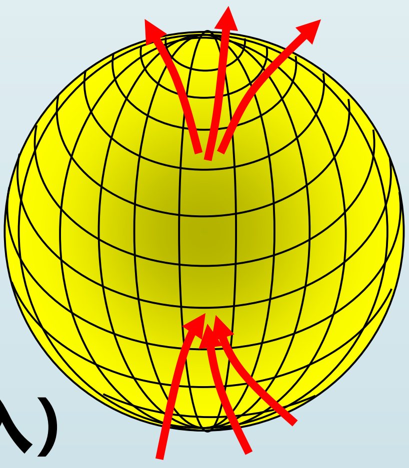
电场线从曲面内向外穿出：

$$\Phi_E > 0$$

电场线从曲面外向内穿进：

$$\Phi_E < 0$$

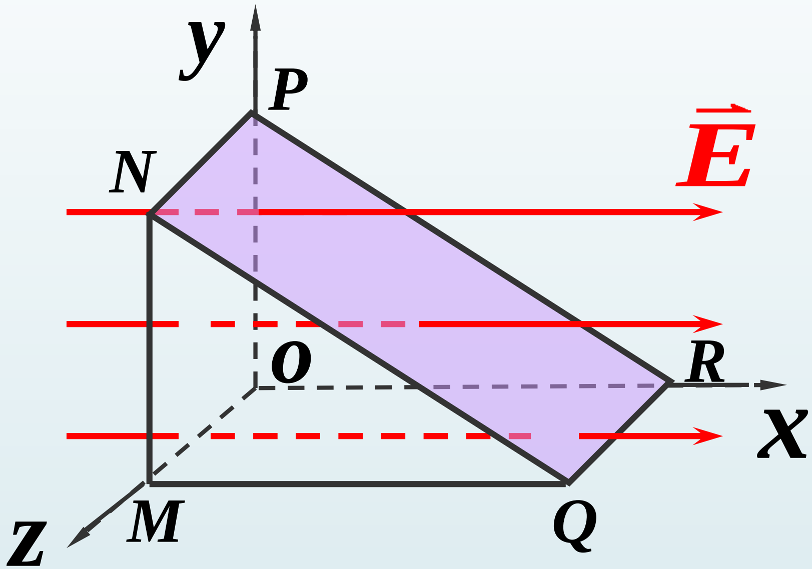
$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$



上式表示净穿出（或净穿入）闭合曲面的电场线的总根数。

Φ_E的单位：$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 / \mathrm{C}$

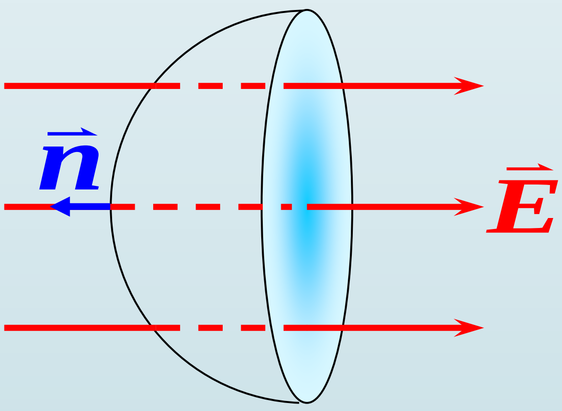
例1. 三棱柱体放置在如图所示的匀强电场中， 求通过此三棱柱体的电场强度通量。



$$\Phi_E = 0$$

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

例2. 半径为R的半球面放置在如图所示的匀强电场中，求通过此半球面的电场强度通量。



$$\Phi_E = -E\pi R^2$$

3. 真空中静电场的高斯定理

——静电场的基本规律之一

（1）高斯定理

通过任意闭合曲面S的电通量 $\propto$ S面包围的电荷的代数和

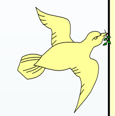
即：　$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$

$\int_V \rho \mathrm{d}V$

若S内的电荷是连续分布的, 则

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i}$$ ——高斯定理

可根据库仑定律，并借助立体角的概念加以证明。



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

注意：

（*a*）Φ_E只取决于S面包围的电荷，S面外的电荷对Φ_E无贡献。

（*b*）定理中$\vec{E}$是所取的封闭面S（高斯面）上的场强，它是由全部电荷（S内外）共同产生的合场强。

高斯定理的意义：

揭示了静电场的重要性质 ——静电场是有源场

正、负电荷就是场源 $\begin{cases}\sum q_i>0 \quad \Phi_E>0 & \text{电场线穿出}S\\ \sum q_i<0 \quad \Phi_E<0 & \text{电场线穿入}S\end{cases}$

正电荷是电场的源头，负电荷是电场的尾闾。

例：有一对等量异号的电荷，如图。 求通过S_1、 S_2、S_3、 S_4各面的电通量。

(A) $\dfrac{q}{\varepsilon_0}, \dfrac{q}{\varepsilon_0}, 0, 0$

(B) $\dfrac{q}{\varepsilon_0}, \dfrac{-q}{\varepsilon_0}, 0, 0$

(C) $\dfrac{q}{\varepsilon_0}, \dfrac{-q}{\varepsilon_0}, 0, \dfrac{2q}{\varepsilon_0}$

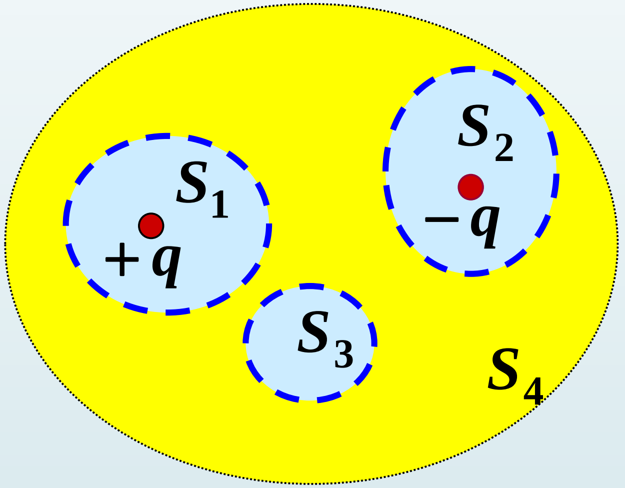
(D) 以上均不对

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_3} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

$$\oint_{S_4} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$



$$\boxed{\oint_{S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i}$$

正确的是（ B ）

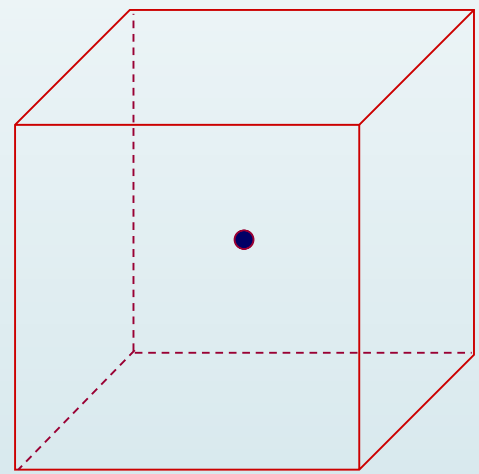
例: 有一边长为a 的正方形平面，对角线的交点为o 。过o点作此正方形的垂线，在垂线上距o点$a/2$处放有一点电荷q。求通过此正方形平面的电通量。

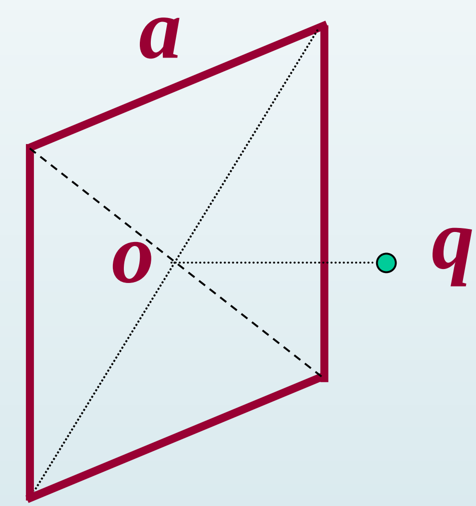
正确的是（　C　）

(A) $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$　　(B) $\dfrac{-q}{\varepsilon_0}$

(C) $\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$　　(D) $\dfrac{-q}{6\varepsilon_0}$

(E) 以上均不对





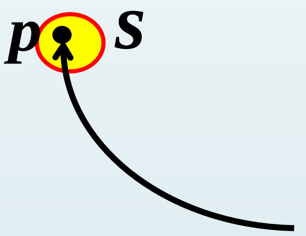
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

例：证明静电场的电场线在无电荷处不会中断。

证明：假设电场线在无电荷的p点处中断。

可作一无限小高斯面S包围p点，

根据高斯定理：



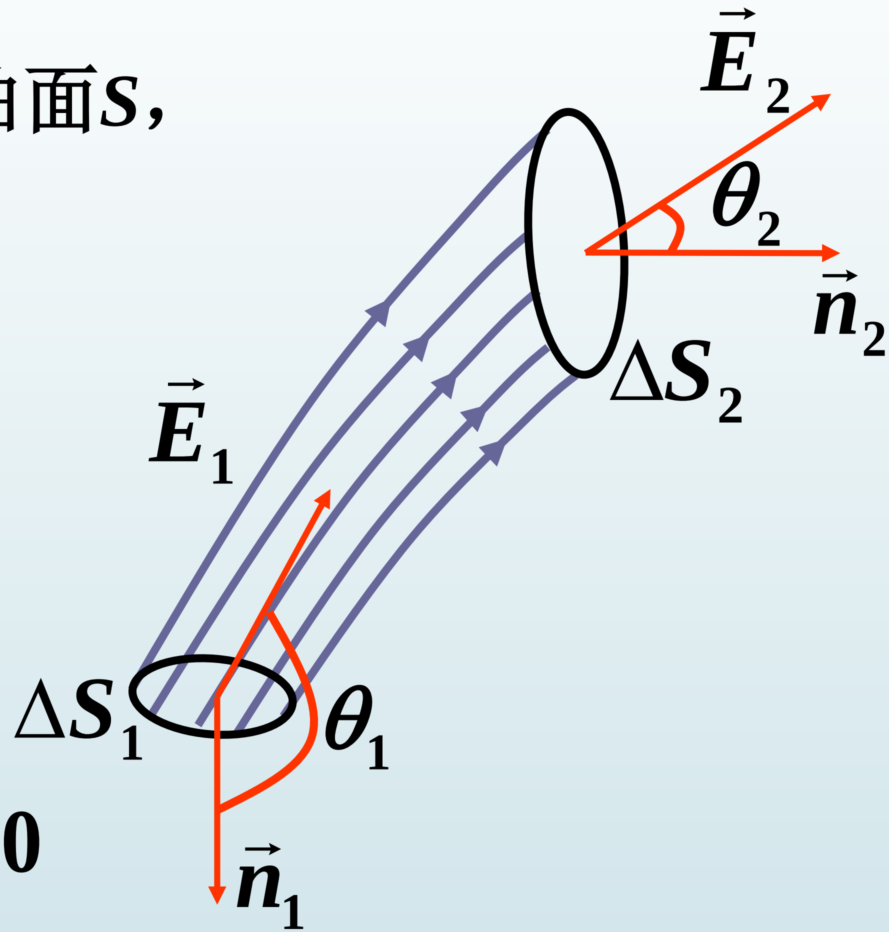
$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

S面内一定有净的负电荷，即p点有负电荷 。

这与题设不符，故假设不成立。命题得证。

例： 证明静电场中电场线疏的地方场强小，密的地方场强大。

证明： 如图，在静电场中取封闭曲面S，且S面内无电荷。



根据高斯定理：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = 0$$

$$\therefore E_1 \Delta S_1 \cos\theta_1 + E_2 \Delta S_2 \cos\theta_2 = 0$$

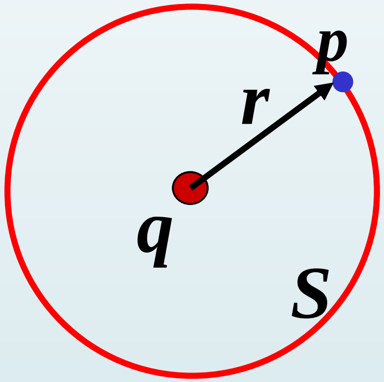
$$-\frac{E_1\cos\theta_1}{E_2\cos\theta_2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} \xrightarrow{\theta_1=\pi,\ \theta_2=0} \frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$$ 得证。

（2）用高斯定理求$\vec{E}$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

例: 用高斯定理求点电荷q的电场$\vec{E}$。

解: 分析可知，q的电场是以其为中心的球对称的场。



取以q为中心的球面为S面，

则:
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint E dS=E\oint dS$$
$$=E\cdot 4\pi r^2$$

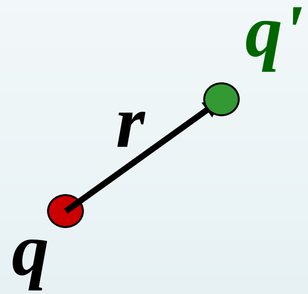
又:
$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i=\frac{1}{\varepsilon_0}q=E\cdot 4\pi r^2$$

$$\therefore E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 沿径向。

可利用上面的结论导出库仑定律。

已求得点电荷的电场为：$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

定义：$\vec{E}$是单位正电荷受的力。导出库仑定律：



将电荷q'放在 r 处，

则 q' 受力为：

$$\vec{F}=q'\,\vec{E}=\frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$ ——库仑定律

（1）两定律以不同形式表示场源电荷与电场的关系。

（2）两者在反映静电场性质是等价的，但对运动电荷库仑定律不成立。

库仑定律：已知$q\rightarrow$求$\vec{E}$

高斯定理：当q对称分布时$\rightarrow$求$\vec{E}$。

$$\begin{cases}\vec{E}=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{e}_{r_i}\\[2ex]\vec{E}=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\end{cases}$$

高斯定理的意义：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\cdot dV$$

给出了静电场的重要性质

——静电场是**有源场**

正负电荷就是场源

$$\begin{cases} \sum q_i > 0 & \Phi_E > 0 \text{ 电场线穿出} \\ \sum q_i < 0 & \Phi_E < 0 \text{ 电场线穿入} \\ \sum q_i = 0 & \Phi_E = 0 \begin{cases} \text{有电荷} \\ \text{无电荷} \end{cases} \end{cases}$$

对于静止电荷的电场，库仑定律和高斯定理等价。

对于运动电荷的电场，库仑定律不再正确，而高斯定理仍然有效.

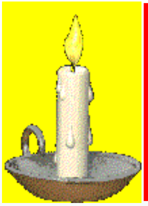
高斯定理是关于电场的普遍的基本规律。

高斯定理的应用：

①当电荷分布具有某种对称性时，可用高斯定理**简便地**求出该电荷系统的电场的分布。

②当已知场强分布时，可用高斯定理求出任一区域的电荷。

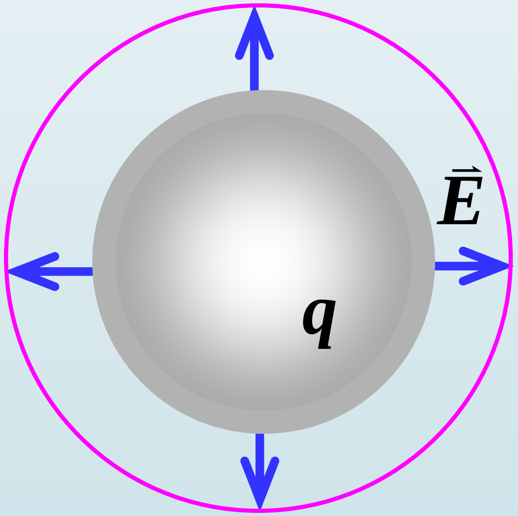
利用高斯定理求静电场的分布

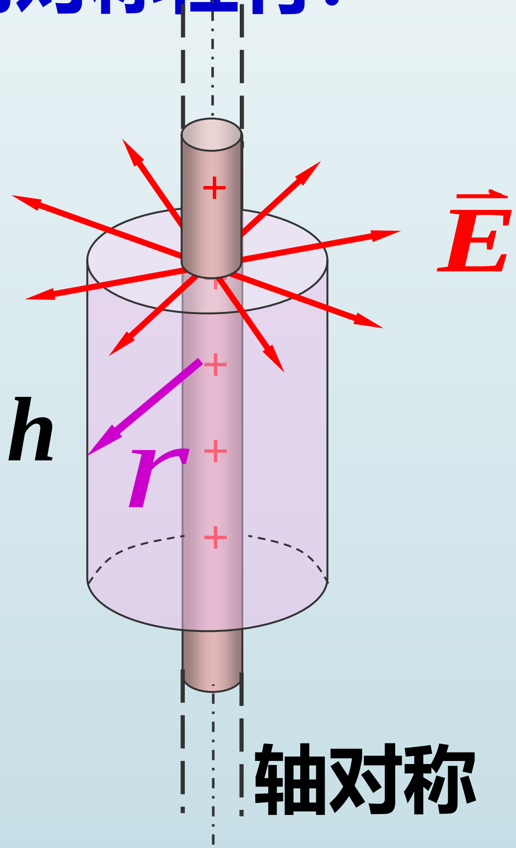


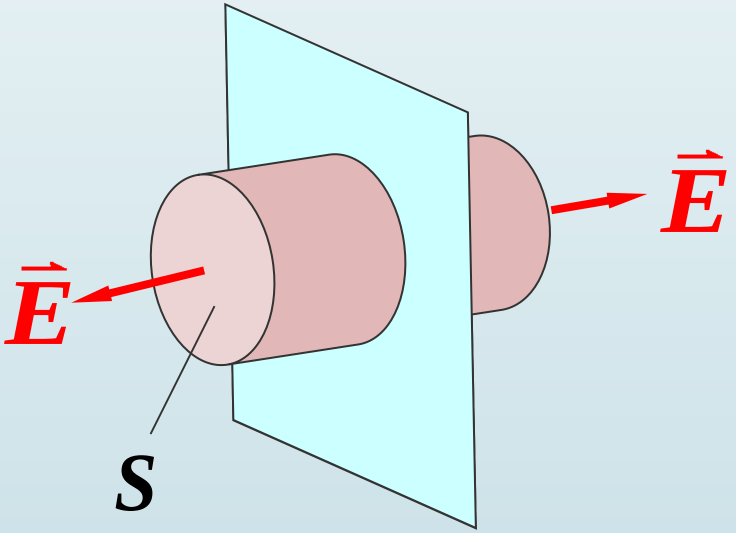
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S内)} q_i$$

当场源电荷分布具有某种对称性时，应用高斯定理，选取适当的高斯面，使面积分中的 $\vec{E}$ 能以标量形式提出来，即可求出场强。

常见的电荷分布的对称性有：



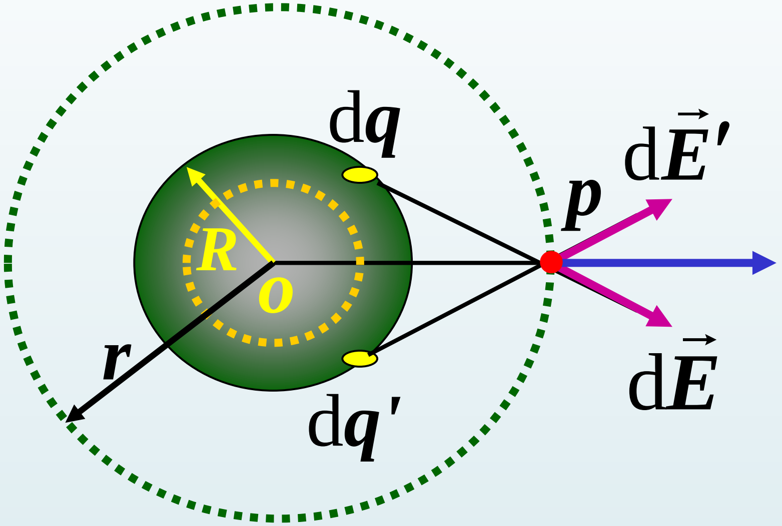




例：求均匀带电球面的电场分布。设半径为R，电量为q (>0) 。

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

解：取以r为半径的同心高斯球面S



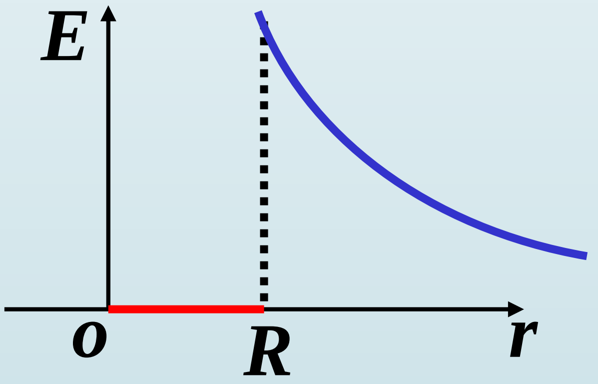
$r \geq R$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint E dS$$

$$= E \cdot 4\pi r^2$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 沿径向。



若$r \leq R$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint E dS = E \cdot 4\pi r^2$$

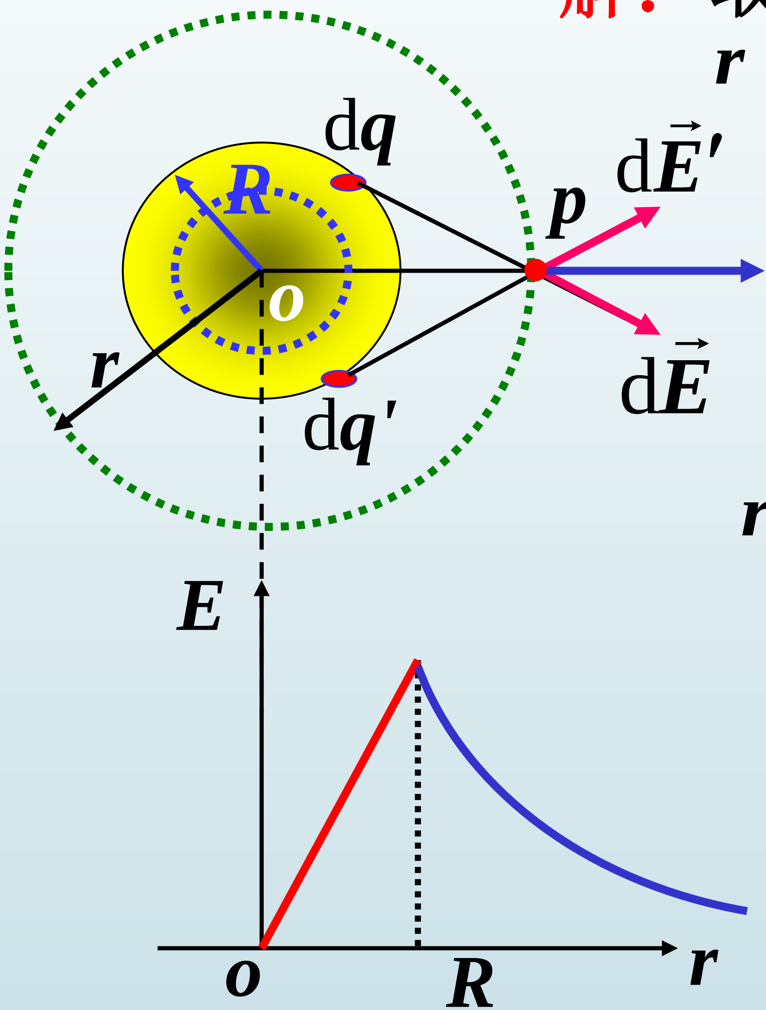
$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = 0 \qquad \therefore E = 0$$

例： 求均匀带电球的电场分布。

设半径为R，电量为q (>0)。

$$\Phi_E=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

解： 取以r为半径的同心高斯球面S



$r \geq R$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint E\,dS=E\cdot 4\pi r^2$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq=\frac{1}{\varepsilon_0}q$$

$$\therefore E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 沿径向。

$$q\,\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$r \leq R$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint E\,dS=E\cdot 4\pi r^2$$

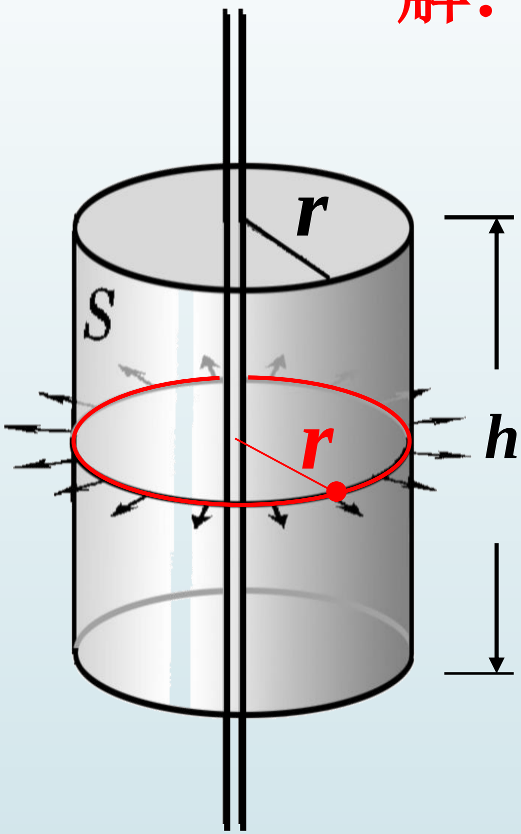
$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\cdot dV=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$$ 沿径向。

例： 用高斯定理求均匀带电的无限长圆柱的电场分布，已知线电荷密度为λ (>0)，半径为R。

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

解： 取以棒为轴，r为半径，高为h的柱状高斯面S。



通过该面的电通量：

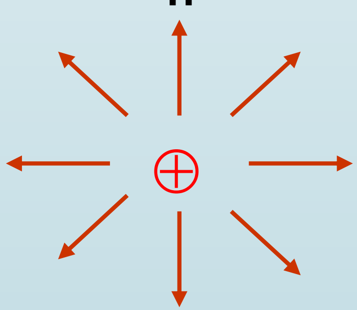
$$0 \quad \vec{n}\perp\vec{E} \quad 0$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{侧面}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{上底}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{侧面}\vec{E}\cdot d\vec{S} = E\int_{侧面} dS = E\cdot 2\pi r\cdot h$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\cdot dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda h$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



问： $r\to 0$，$E \not\to \infty$？

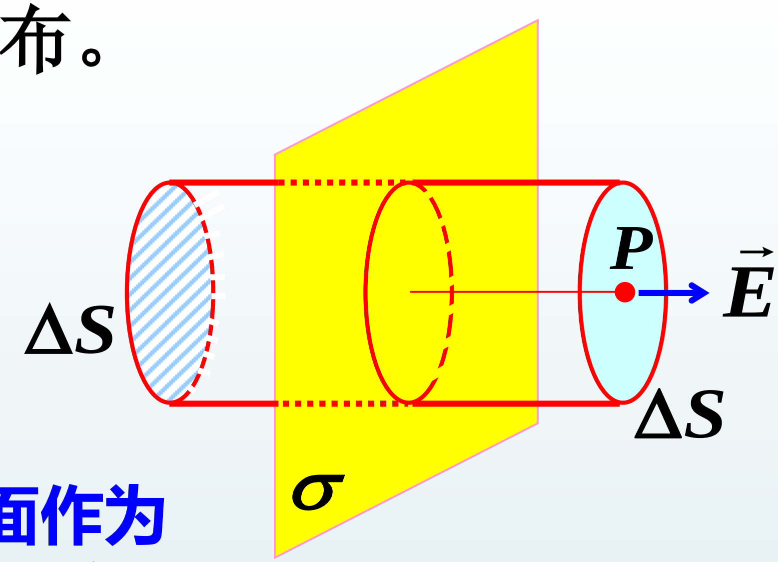
$r < R$

体密度

- 均匀带电：$E = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} r$
- 表面带电：$E = 0$

例：求无限大均匀带电平面的场强分布。

设面电荷密度为σ。



解：由电荷分布的对称性可知，

P点的场强方向垂直于带电面，

与平面等距处场强大小相等。

选一轴垂直于带电平面的圆筒式封闭面作为高斯面S，带电平面平分此圆筒，场点P位于它的一个底面上。

$$\Phi_E=\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\overbrace{\int_{侧}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}^{0}+\int_{左}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\int_{右}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=2E\Delta S$$

$$2E\Delta S=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \longrightarrow \boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$ **(均匀场)**

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i}$$

场强方向垂直于带电平面

$\begin{cases}\text{若}\sigma>0\text{，场强方向背离平面。}\\ \text{若}\sigma<0\text{，场强方向指向平面。}\end{cases}$

高斯定理解题步骤小结：

（1）根据电荷分布分析电场分布是否有对称性；

（2）依电场分布的对称性取合适的高斯面；

高斯面(封闭面)应取在场强相等的曲面上；

若场强相等的面不构成闭合面，要另取与场强方向垂直的面与之一起构成高斯面。

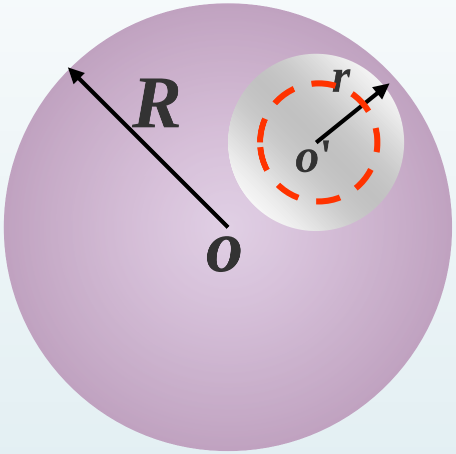
球对称——选与带电体同心的球面

轴对称——选与带电体同轴圆柱面

面对称——选轴与带电平面垂直，两底与平面等距的圆柱面

（3）由 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$ 求出场强的大小，说明其方向。

例8. 一半径为R、电荷密度为ρ的均匀带电球内有一半径为r 的空腔，两球心相距a。证明空腔内为均匀电场。



证明：

~~取以r'为半径，o'为心的高斯球面~~

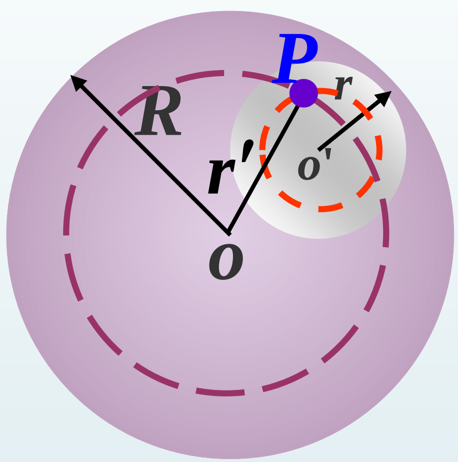
~~用高斯定理：~~

$$\Phi_E=\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint E\,dS=E\cdot 4\pi r^2$$

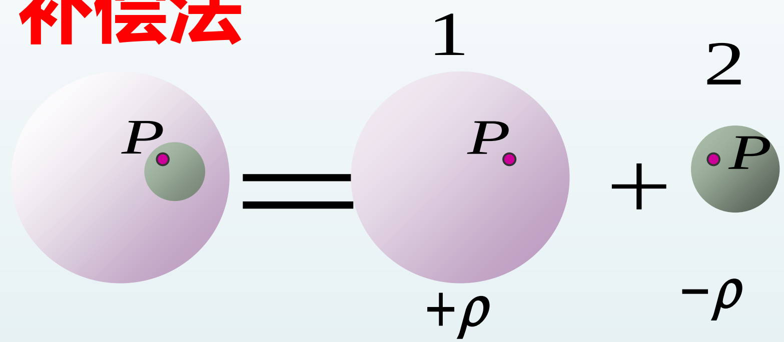
$$\Phi_E=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq=0 \qquad \therefore E=0$$

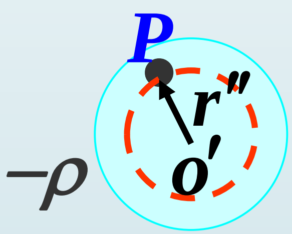
腔内为均匀电场。

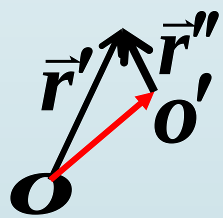
例8. 一半径为R、电荷密度为ρ的均匀带电球内有一半径为r 的空腔，两球心相距a。证明空腔内为均匀电场。



解：补偿法







$$\vec{r}\,' - \vec{r}\,'' = \overline{oo'}$$

均匀带电球体内 $\vec{E}_{内} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$

$$\vec{E}' = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,' \qquad \vec{E}'' = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,''$$

空腔内任意一点P点的合场强：

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r}\,' - \vec{r}\,''\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

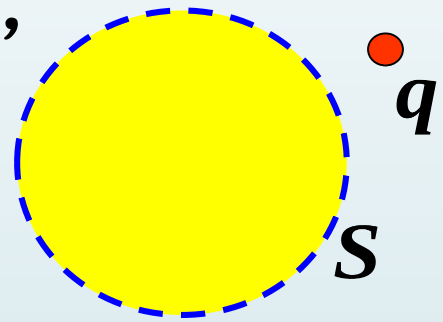
即腔内为均匀电场 方向由 $o \rightarrow o'$

判断下列关于高斯定理的说法是否正确：

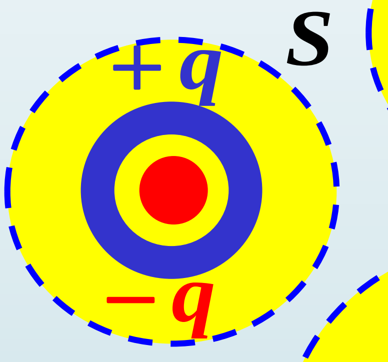
$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i}$$

(1) 高斯定理成立的条件是电场必须具有对称性。

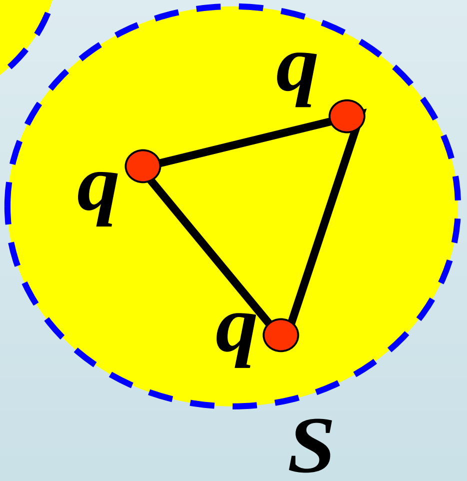
(2) 对静电场中任一闭合曲面S, 若有 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$ ，则S面上的 $\vec{E}$ 处处为零。



(3) 若闭合曲面 S 上各点的场强为零，则 S 面内必定未包围电荷。



(4) 三个相等的点电荷置于等边三角形的三个顶点上，以三角形的中心为球心作一球面S, 如图，则可以用高斯定理求面S上的场强。



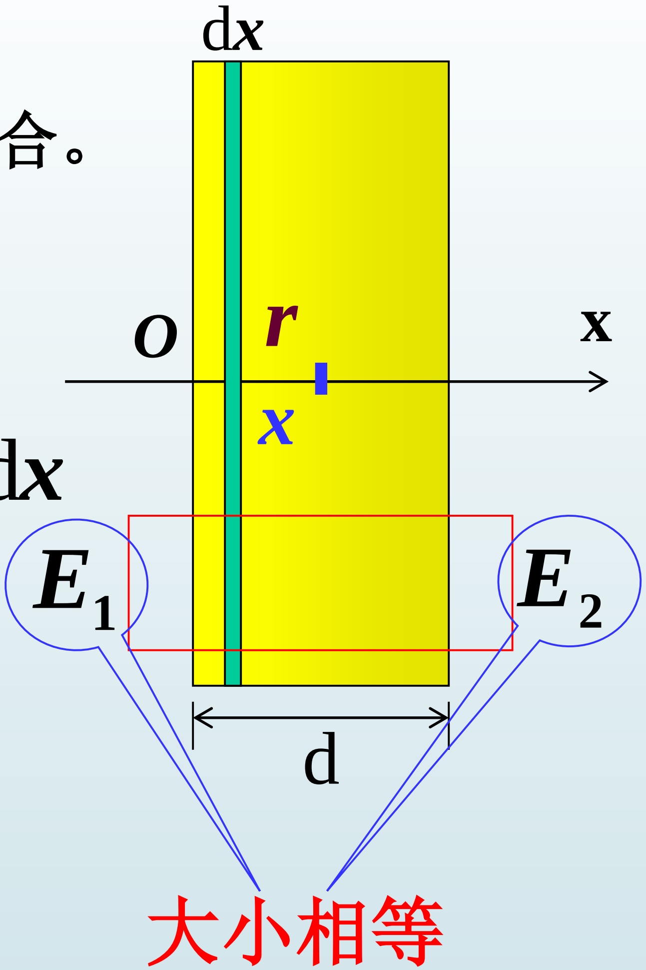
例：一很大的厚度为d的带电平板的电荷密度为 $\rho(x)=kx \quad (k>0)$ 。

求平板内距离O点 r 处的电场强度。

解： 将平板看成无数个无限大均匀带电平面的组合。

取x轴的正方向为电场的正方向。

考虑 x 处的无限大均匀带电平面，



$$\sigma=\frac{\Delta q}{\Delta s}=\frac{1}{\Delta s}\rho(x)\mathrm{d}V=\frac{1}{\Delta s}kx\cdot\Delta s\mathrm{d}x=kx\mathrm{d}x$$

$$\therefore\ E(r)=\int_0^r\frac{kx\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}-\int_r^d\frac{kx\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}$$

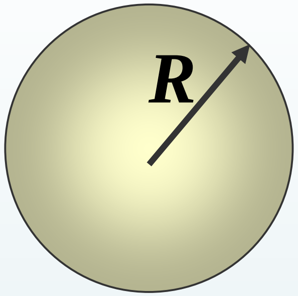
$$=\frac{k}{2\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{d^2}{2}+\frac{r^2}{2}\right)=\frac{k}{4\varepsilon_0}(2r^2-d^2)$$

能否用高斯定理求解？ 可以。分两步。

求平板外的电场强度则可用高斯定理求解。为什么？

均匀带电空心球壳的电场分布：

$$\begin{cases} r < R & E = 0 \\ r > R & \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \end{cases}$$

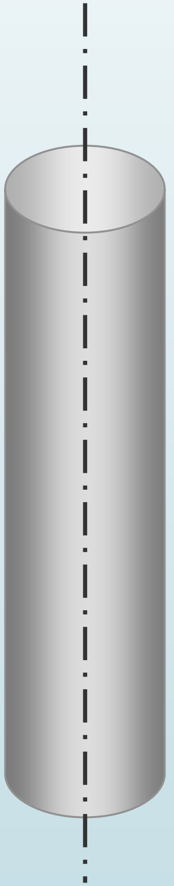


均匀带电实心球体的电场分布：

$$\begin{cases} r < R & \vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \\ r \geq R & \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \end{cases}$$

均匀带电无限长细棒的电场分布：

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$



均匀带电无限长实心圆柱的电场分布：

$$\begin{cases} r < R & \vec{E} = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R & \vec{E} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \end{cases}$$