2.6　矩阵的秩
(The rank of matrix)

一、矩阵秩的概念

任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形，行阶梯形矩阵中非零行的行数是唯一确定的. 矩阵的秩

定义1　在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列（$k\le m$, $k\le n$），位于这些行列交叉处的个 k^2 元素,不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

$m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个.

定义2.14 设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D, 且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于0，那么 D 称为矩阵A的最高阶非零子式，数r称为矩阵A的秩，记作 $r(A)$ 或$R(A)$，并规定零矩阵的秩等于零.

$m \times n$ 矩阵 A 的秩 $r(A)$ 是 A 中不等于零的子式的最高阶数.

⇨ $\boldsymbol{r(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}}$;

若n阶矩阵 A 可逆，则 $r(A) = n$.

$r(A^T) = r(A)$.

例1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\because$ A的3阶子式只有一个$|A|$， 且 $|A|=0$,

$\therefore \quad R(A)\le 2.$

又因为在A中， $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0.$ $\therefore \quad R(A)=2.$

例2 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，求该矩阵的秩.

解 首先计算A的3阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0, \qquad \therefore R(A)=2.$$

例3 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\because$ B是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，

$\therefore$ B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$ $\therefore$ $R(B)=3.$

阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的数目！

二、矩阵秩的求法

*任何矩阵$A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换变为行阶梯形，
*行阶梯形的秩是其非零行的数目。

问题： 经过初等变换,矩阵的秩会变吗？

定理2.7 初等变换不改变矩阵的秩

证 先证明：若A经一次初等行变换变为B，则$R(A)\le R(B)$.

设 $R(A)=r$，且 A 的某个 r 阶子式 $D_r\neq 0$.

当$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$或$A \xrightarrow{r_i \times k} B$时，

在 B 中总能找到与 D_r 相对应的子式 $\overline{D_r}$,.

由于 $\overline{D_r} = D_r$ 或 $\overline{D_r} = -D_r$ 或 $\overline{D_r} = kD_r$,

因此 $\overline{D_r} \neq 0$，从而 $R(B) \geq r$.

当$A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$时，分三种情况讨论：

（1）D_r中不含第i行；

（2）D_r中同时含第i行和第j行；

（3）D_r中含第i行但不含第j行；

对 (1),(2) 两种情形，显然 B 中与 D_r 对应的子式 $\overline{D}_r = D_r \neq 0$,故 $R(B) \geq r$.

对情形 (3),

$$\overline{D}_r = \begin{vmatrix} \vdots \\ r_i + kr_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{vmatrix} = D_r + k\hat{D}_r,$$

若 $\hat{D}_r \neq 0$,

因 $\hat{D}_r$ 中不含第 i 行知 A 中有不含第 i 行的 r 阶非零子式, $\quad \therefore \quad R(B) \geq r$.

若$\hat{D}_r = 0$，则 $\overline{D}_r = D_r \neq 0$，也有 $R(B) \geq r$.

若A经一次初等行变换变为 B，则 $R(A) \leq R(B)$.

又由于 B 也可经一次初等行变换变为 A,

故也有 $R(B) \leq R(A)$.

因此 $R(A) = R(B)$.

经一次初等行变换矩阵的秩不变，即可知经有限次初等行变换矩阵的秩仍不变.

设A经初等列变换变为B，也有$R(A) = R(B)$.

设 A 经初等列变换变为B,

则 A^T 经初等行变换变为B^T,

$\because \quad R(A^T)=R(B^T)$,

且 $R(A)=R(A^T), R(B)=R(B^T)$,

$\therefore \quad R(A)=R(B)$.

综上,若 A 经有限次初等变换变为 B(即 $A \Leftrightarrow B$), 则 $R(A)=R(B)$.

证毕

初等变换求矩阵秩的方法：

用初等行变换将矩阵变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

例4 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩.

解

对A作初等行变换，变成行阶梯形矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 - r_4}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_4 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 $r(A)=3.$

例2的另解

对矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 做初等变换，

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

显然，非零行的行数为2，

方法简单！

$$\therefore r(A)=2.$$

秩的等式和不等式

秩的等式

- **定理2.8** P，Q为可逆矩阵，则

$$R(PA) = R(AQ) = R(PAQ) = R(A)$$

- $k \neq 0$，$R(kA) = R((kI)A) = R(A)$，
- $R(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$$R(A^T) = R(A).$$

定理2.8的证明

由于可逆阵可以表示成有限个初等矩阵的乘积，而由定理2.7知，初等变换不改变矩阵的秩，故定理得证。

秩的等式和不等式

秩的不等式:

$$R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\};$$

定理2.9 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$ $\qquad r = R(B)$

定理2.10 $R(AB) \ge R(A) + R(B) - n$， ($n$为$A$的列数)

特别地，$AB = 0$ 时，$R(A) + R(B) \le n$

定理2.11 $R(A+B) \le R(A) + R(B)$

Th2.9的证明

$$B = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q \Rightarrow AB = AP\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

分块: $AP = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} D_1 & O \end{pmatrix} Q$

秩的等式和不等式

秩的不等式:

$$R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\};$$

定理2.9 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$ $\qquad r = R(B)$

定理2.10 $R(AB) \ge R(A) + R(B) - n$， $(n$为A的列数$)$

特别地，$AB = 0$ 时，$R(A) + R(B) \le n$

定理2.11 $R(A+B) \le R(A) + R(B)$

Th2.9的证明

$$AB = \begin{pmatrix} D_1 & O \end{pmatrix} Q \quad \Rightarrow \quad R(AB) = R\begin{pmatrix} D_1 & O \end{pmatrix} \le r = R(B)$$

同理，可证 $R(AB) \le R(A).$ 证毕！

秩的等式和不等式

秩的不等式:

$$R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\};$$

定理2.9 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$

定理2.10 $R(AB) \ge R(A) + R(B) - n$， ($n$为$A$的列数)

特别地，$AB = 0$ 时，$R(A) + R(B) \le n$

定理2.11 $R(A+B) \le R(A) + R(B)$

应用1 对于矩阵$A_{m\times n}$、$B_{n\times s}$，有

$$R(A)+R(B)-n \le R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$$

进而有 (1) $R(A)=n \Rightarrow R(AB)=R(B);$

(2) $R(B)=n \Rightarrow R(AB)=R(A).$

秩的等式和不等式

秩的不等式:

$$R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\};$$

定理2.9 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$ $r = R(B)$

定理2.10 $R(AB) \ge R(A) + R(B) - n$， ($n$为$A$的列数)

特别地，$AB = 0$ 时，$R(A) + R(B) \le n$

定理2.11 $R(A+B) \le R(A) + R(B)$

应用2 对于n阶矩阵A、B，有

$$R(A+B) \le R(A) + R(B) \le R(AB) + n$$

进而有

$$R(A+B) = n, R(AB) = 0 \Rightarrow R(A) + R(B) = n$$

- 例 1 设矩阵A是n阶方阵，证明对A的伴随矩阵A^*的秩，成立如下结果：

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$$

A^*可逆的充要条件是A可逆！

(1) $R(A)=n \Rightarrow A^*$可逆 $\Rightarrow R(A^*)=n$;

(2) $R(A)<n-1 \Rightarrow A_{ij}=0 \Rightarrow A^*=O \Rightarrow R(A^*)=0$;

(3) $R(A)=n-1 \Rightarrow |A|=0$, 且至少有一个$n-1$阶子式不为零 $\Rightarrow AA^*=O$ 且 $R(A^*)\geq 1$. 再由定理2.10知：

$$R(A)+R(A^*)\leq n \Rightarrow R(A^*)\leq 1 \Rightarrow R(A^*)=1.$$

例2（p67，eg22）设A为n阶幂等阵，即 $A^2 = A$， 证明 $R(A) + R(I - A) = n.$

证明 因 $A^2 = A$， 故

$$A(I - A) = O, \quad A + (I - A) = I.$$

由定理2.10，2.11知（应用2）：

$$n = R(I) \leq R(A) + R(I - A) \leq n,$$

因此， $R(A) + R(I - A) = n.$ 证毕。

三、小结

1. 矩阵秩的概念

2. 求矩阵秩的方法

(1) 利用定义

(即寻找矩阵中非零子式的最高阶数);

(2) 初等变换法

(把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩).

(3) 利用矩阵秩的等式和不等式

主要应用于非数值矩阵的求秩问题