3.5 欧氏空间R^n
Euclidean Spaces

- 在向量空间R^n中引入基于内积所定义的**度量(长度、夹角等)**概念---欧氏空间R^n。
- 欧氏空间使得向量空间可以用于处理有关向量度量的问题。

一、内积的定义及性质

定义3.12 设有n维空间R^n中的向量$\alpha=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$，$\beta=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)^T$.

记 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\alpha^T\beta,$

称(α,β)为向量α与β的内积。

定义了内积的向量空间R^n称为欧氏空间。

要点：

1. 内积是在向量间定义的一种运算 $(\alpha，\beta)=\alpha^T\beta$

2 $n(n\geq 4)$维向量的内积是3维向量数量积的推广，但是没有3维向量直观的几何意义.

内积的基本性质

$$(\alpha,\beta)=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$$

$$\left(\text{其中}\alpha,\beta,\gamma\text{为}n\text{维向量},k\text{为实数}\right)$$

(1) 对称性 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) 线性性 $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

$$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma);$$

(3) 非负性 $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 且 $\alpha=0\Leftrightarrow(\alpha,\alpha)=0.$

(4) Cauchy不等式:

可由此定义向量夹角

$$(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) \qquad \frac{|(\alpha,\beta)|}{\sqrt{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}}\leq 1$$

$$(2)\Rightarrow(k\alpha+l\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma)$$

$$(1)\Rightarrow(\gamma,k\alpha+l\beta)=k(\gamma,\alpha)+l(\gamma,\beta)$$

$\|\alpha-\beta\|$?

二、向量的长度及性质

定义3.13 令 $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$,

称$\|\alpha\|$为n维向量α的长度(或欧氏范数).

向量的长度具有下述性质:

1. 非负性 当$\alpha\neq 0$时,$\|\alpha\|>0$;当$\alpha=0$时,$\|\alpha\|=0$;

2. 齐次性 $\|\lambda\alpha\|=|\lambda|\|\alpha\|$; $\|-\alpha\|=\|\alpha\|$

3. 三角不等式 $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$; $\|\alpha-\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$.

证 $\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2(\alpha,\beta)$

$\leq\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2|(\alpha,\beta)| \leq\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|$

$$\|\alpha-\beta\| ?$$

二、向量的长度及性质

定义3.13 令 $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$,

称$\|\alpha\|$为n维向量α的长度(或欧氏范数).

向量的长度具有下述性质:

1. 非负性 当$\alpha\neq 0$时,$\|\alpha\|>0$;当$\alpha=0$时,$\|\alpha\|=0$;

2. 齐次性 $\|\lambda\alpha\|=|\lambda|\|\alpha\|$; $\|-\alpha\|=\|\alpha\|$

3. 三角不等式 $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$; $\|\alpha-\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$.

$$\big|\|\alpha\|-\|\beta\|\big|\leq\|\alpha-\beta\|.$$

证 $\|\alpha\|\leq\|\alpha-\beta\|+\|\beta\|$; $\|\beta\|\leq\|\beta-\alpha\|+\|\alpha\|=\|\alpha-\beta\|+\|\alpha\|$

$$\cos\theta = \frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$$

单位向量及*n*维向量间的夹角

(1) 当$\|\alpha\| = 1$时，称α为单位向量

(2) 当$\|\alpha\| \neq 0, \|\beta\| \neq 0$时，$\theta = \arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$

称为n维向量α与β的夹角。

分析：

1 向量的单位化（规范化） $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$

2 向量的正交

$$\cos\theta = \frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|} = 0$$

三、正交向量组的概念及求法

1 正交的概念（定义3.14）设$\alpha \neq 0, \beta \neq 0,$

当$(\alpha, \beta) = 0$时，称向量α与β 正交.

$$\leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|} = 0$$

2 正交向量组的概念

若一非零向量组中$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组.

$$\left(\alpha_i, \alpha_j\right) = 0, i \neq j$$

3 正交向量组的性质

定理3·10 **若n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一组两两正交的非零向量则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.**

证明 设有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$$

以α_1^T左乘上式两端,得 $\lambda_1\alpha_1^T\alpha_1=0$

由 $\alpha_1\neq 0\Rightarrow\alpha_1^T\alpha_1=\|\alpha_1\|^2\neq 0$, 从而有$\lambda_1=0$.

同理可得$\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$. 故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

4 向量空间的正交基

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基,且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是两两正交的非零向量组,则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的正交基.

例1 已知三维向量空间中两个向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\qquad \alpha_3=x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},x_3\neq 0$$

正交，试求α_3使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三维空间的一个正交基.

$$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T:\quad \alpha_3^T\alpha_1=0,\alpha_3^T\alpha_2=0.$$

5 标准正交基

定义3 设n维向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$是向量空间 $V(V\subset R^n)$的一个基,如果$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$两两正交且都是单位向量,则称$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$是 V的一个标准（规范）正交基.

例1：R⁴的标准正交基

$$\left(\varepsilon_i,\varepsilon_j\right)=\begin{cases}0, i\neq j\\1, i=j\end{cases}$$

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

由于 $\begin{cases}\left(\varepsilon_i,\varepsilon_j\right)=0, & i\neq j\text{且}i,j=1,2,3,4.\\ \left(\varepsilon_i,\varepsilon_j\right)=1, & i=j\text{且}i,j=1,2,3,4.\end{cases}$

所以$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$为$R^4$的一个标准正交基.

同理可知

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

也为R^4的一个标准正交基.

6 标准正交基的求法（Schmidt正交化方法）

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基,要求$V$的一个标准正交基,即求一组两两正交的单位向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$,使$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$等价,这一方法称为正交化方法。

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量空间$V$的一个基,

（1）正交化，取 $\beta_1=\alpha_1,$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_k=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\beta_i,\alpha_k)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i,2\le k\le r$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

• • • • • • • • • • • •

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\beta_1,\alpha_r)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_r)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\beta_{r-1},\alpha_r)}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

那么$\beta_1,\cdots,\beta_r$两两正交,且$\beta_1,\cdots,\beta_r$与$\alpha_1,\cdots\alpha_r$等价.

（2）单位化，取

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\quad \varepsilon_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\ \cdots\cdots,\varepsilon_r=\frac{\beta_r}{\|\beta_r\|},$$

那么$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$为$V$的一个标准正交基.

上述由线性无关向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$构造出正交向量组$\beta_1,\cdots,\beta_r$的过程,称为 **Schmidt正交化过程**.

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_k=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\beta_i,\alpha_k)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i,2\le k\le r$$

$$\Rightarrow\ \alpha_1=\beta_1,\alpha_k=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\beta_i,\alpha_k)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i+\beta_k,2\le k\le r$$

$$\varepsilon_k=\frac{\beta_k}{\|\beta_k\|},1\le k\le r\ \Leftrightarrow\ \beta_k=\|\beta_k\|\varepsilon_k,1\le k\le r$$

$$\Rightarrow\ \alpha_1=\|\beta_1\|\varepsilon_1,\alpha_k=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\beta_i,\alpha_k)}{\|\beta_1\|^2}\beta_i+\beta_k,2\le k\le r$$

$$\Rightarrow\ \alpha_1=\|\beta_1\|\varepsilon_1,\alpha_k=\sum_{i=1}^{k-1}(\varepsilon_i,\alpha_k)\varepsilon_i+\|\beta_k\|\varepsilon_k,2\le k\le r$$

求标准正交基的步骤：矩阵表示

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i + \beta_k = \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_k, \varepsilon_i)\varepsilon_i + \varepsilon_k \|\beta_k\|, \ k = 1, \cdots, r$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) \begin{bmatrix} 1 & \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} & \cdots & \frac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \\ & 1 & \cdots & \frac{(\alpha_r, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r) \begin{bmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \varepsilon_1) & \cdots & (\alpha_r, \varepsilon_1) \\ & \|\beta_2\| & \cdots & (\alpha_r, \varepsilon_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \|\beta_r\| \end{bmatrix}$$

由此可得得基变换公式！

求标准正交基的步骤：公式推导

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i + \beta_k = \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_k, \varepsilon_i) \varepsilon_i + \varepsilon_k \|\beta_k\|, \ k = 1, \cdots, r$$

设 $\beta_2 = \alpha_2 + l_{2,1}\beta_1$，$l_{2,1}$ 待定， 由 $(\beta_2, \beta_1) = 0$，得

$$(\alpha_2, \beta_1) + l_{2,1}(\beta_1, \beta_1) = 0 \quad \Rightarrow \ l_{2,1} = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$$

一般地，设已得到正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{k-1}$

令 $\beta_k = \alpha_k + \sum_{i=1}^{k-1} l_{k,i}\beta_i, \ k > 1$

由 $(\beta_k, \beta_j) = 0, 1 \le j \le k-1$ 得

$$(\alpha_k, \beta_j) + l_{k,j}(\beta_j, \beta_j) = 0 \quad \Rightarrow \ l_{k,j} = -\frac{(\alpha_k, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}, k > 1$$

$$\frac{(\alpha_k, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i = \frac{(\alpha_k, \beta_i)}{\|\beta_i\|^2} \beta_i = (\alpha_k, \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}) \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|} = (\alpha_k, \varepsilon_i) \varepsilon_i$$

例3 设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$, 试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解 取 $b_1=a_1$;

$$b_2=a_2-\frac{(a_2,b_1)}{\|b_1\|^2}b_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$b_3=a_3-\frac{(a_3,b_1)}{\|b_1\|^2}b_1-\frac{(a_3,b_2)}{\|b_2\|^2}b_2$$

$$=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

再把它们单位化，取

$$\varepsilon_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\qquad \varepsilon_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_3=\frac{b_3}{\|b_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$即为所求的标准正交基.

Schmidt正交化过程的几何解释

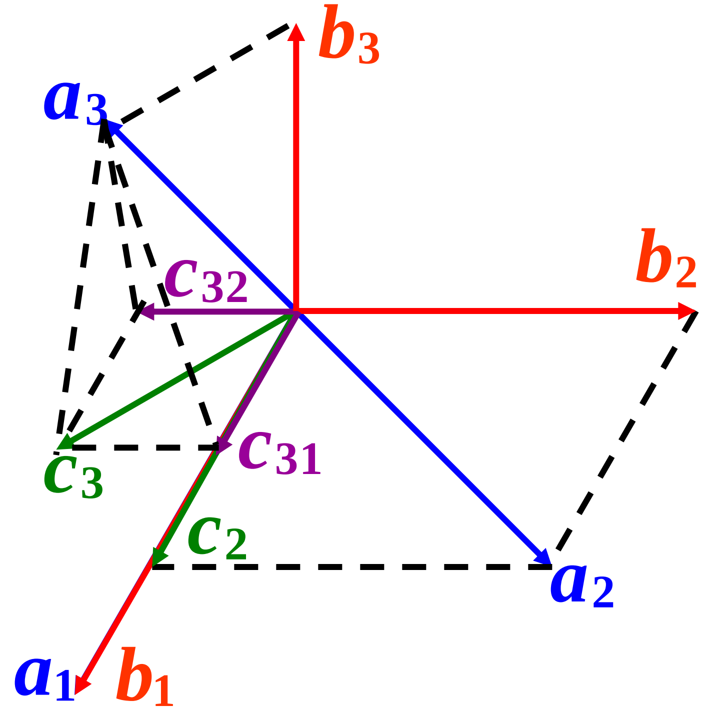
$\boldsymbol{b_1 = a_1;}$

c_2为a_2在b_1上的投影向量,即

$$c_2 = \frac{(a_2, b_1)}{\|b_1\|^2} b_1,$$

$\boldsymbol{b_2 = a_2 - c_2;}$

c_3为a_3在平行于b_1, b_2的平面上的投影向量,



由于$b_1 \perp b_2$,故c_3等于a_3分别在b_1, b_2上的投影向量c_{31}及c_{32}之和,即

$$c_3 = c_{31} + c_{32} = \frac{(a_3, b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{(a_3, b_2)}{\|b_2\|^2} b_2,$$

$\boldsymbol{b_3 = a_3 - c_3.}$

四、正交矩阵与正交变换

定义4　若n阶方阵A满足 $A^T A = I\left(即A^{-1} = A^T\right)$,则

称A为正交矩阵.

定理　A为正交矩阵的充要条件是 A的行(列) 向量都是单位向量且两两正交.

证明　$AA^T = I$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = I$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \left(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T\right) = I$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_1^T & \alpha_1 \alpha_2^T & \cdots & \alpha_1 \alpha_n^T \\ \alpha_2 \alpha_1^T & \alpha_2 \alpha_2^T & \cdots & \alpha_2 \alpha_n^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n \alpha_1^T & \alpha_n \alpha_2^T & \cdots & \alpha_n \alpha_n^T \end{pmatrix} = I$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i \alpha_j^T = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{当} i = j; \\ 0, \text{当} i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

(2) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以它是正交矩阵.

例6 验证矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$是正交矩阵.

解 P的每个列向量都是单位向量,且两两正交,所以P是正交矩阵.

五、小结

1．将一组基标准正交化的方法：

先用施密特正交化方法将基正交化，然后再将其单位化.

2． A 为正交矩阵的充要条件是下列条件之一成立：

(1) $A^{-1} = A^T$;

(2) $AA^T = E$;

(3) A的列向量是两两正交的单位向量;

(4) A的行向量是两两正交的单位向量.

思考题1

求一单位向量，使它与

$$\alpha_1 = (1,1,-1,1),\ \ \alpha_2 = (1,-1,-1,1),\ \ \alpha_3 = (2,1,1,3)$$

正交.

求 $x = (a, b, c, d)$, 使得

$$x\alpha_k^T = 0, k = 1, 2, 3$$

$$xx^T = 1$$

思考题1解答

解 设所求向量为 $x=(a,b,c,d)$，则由题意可得：

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=1,\\ a+b-c+d=0,\\ a-b-c+d=0,\\ 2a+b+c+3d=0.\end{cases}$$

解之可得：$x=c(4,0,1,-3)$. $\quad xx^T=1 \Rightarrow 26c^2=1$

进而可得：$x=(\frac{4}{\sqrt{26}},0,\frac{1}{\sqrt{26}},-\frac{3}{\sqrt{26}})$

或 $\quad x=(-\frac{4}{\sqrt{26}},0,-\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{3}{\sqrt{26}})$.

思考题2

R^n中的超平面的向量内积表示.

解：设a为平面的法向量，X_0为平面上的给定一点（向量），则平面上的动点X（向量）满足：

$$(a, X - X_0) = 0$$

即

$$a^T(X - X_0) = 0$$

$$a_1(x_1 - x_{01}) + a_2(x_2 - x_{02}) + \cdots + a_n(x_n - x_{0n}) = 0$$