

大学物理（一）

任课老师：蔡林
cailin@hust.edu.cn

第9章 气体动理论

- 理想气体的微观模型
- 理想气体的状态方程: $\begin{cases} PV = \nu RT \\ P = nkT \end{cases}$

热力学第零定律： 如果两个热学系统中的每一个都与第三个系统的某一平衡态处于热平衡，则此两系统必定也处于热平衡。

宏观、微观描述是描述同一物理对象的两种不同方法。



统计规律及其特点

1) 是对大量偶然事件的整体起作用的规律

单个事件无规可循,具有极大的偶然性,但就大量事件的整体来看,却存在着一定的规律。

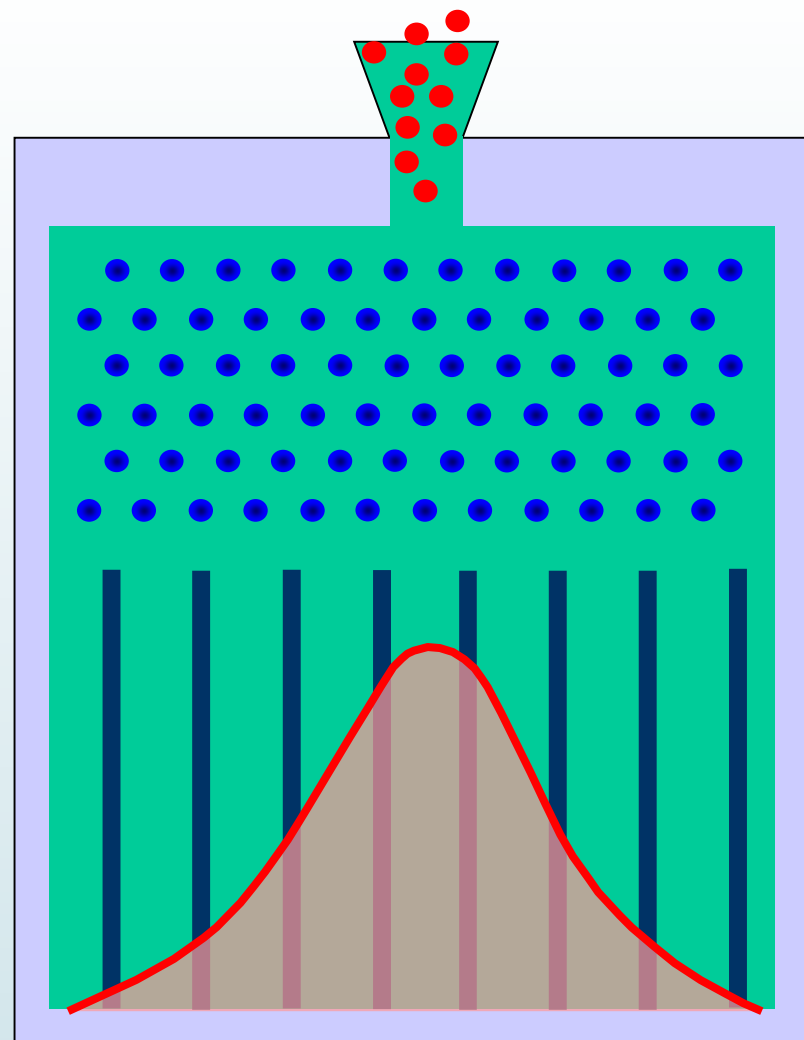
2) 统计规律永远伴随着涨落现象

例如：伽尔顿板实验

英国科学家Sir Francis Galton在他的著作《自然遗传》（Natural Inheritance. New York: Macmillan, 1894）中介绍了一种结构简单而又形象直观的统计实验装置，即伽尔顿板。

这种对大量偶然事件的整体起作用的规律称为
统计规律。

统计规律伴随着涨落现象。



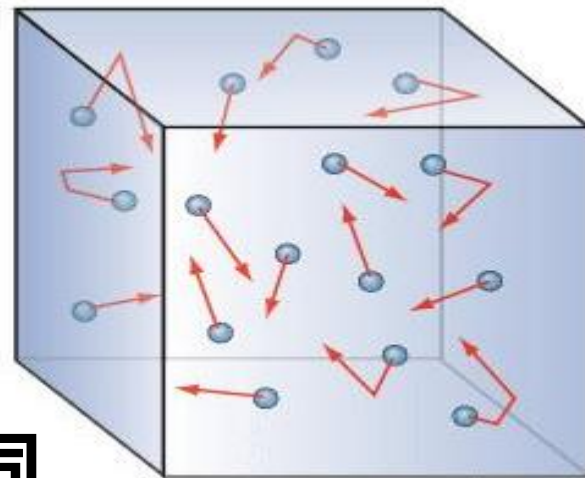
(Galton Board)
(Quincunx)
(Bean Machine)

5. 理想气体的压强

设长方体 V 中有 N 个理想气体分子，

单位体积有 $n = N/V$ 个分子

每个分子质量为 m ，



**每个分子速度的大小、方向各不相同，
热平衡下，分子与6个壁都要碰撞，各个
面所受的压强相等。**

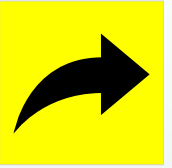
将所有分子分成若干组，每组内分子的速度大小和方向都相同：

第 i 组的分子数密度： n_i ，总分子数密度： $n = \sum_i n_i$

第 i 组的分子速度： \vec{v}_i ， $\vec{v}_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$

任取面积为 dA ,垂直 X 轴处的器壁(光滑), 计算 dA 上的压强:

1) 速度为 \vec{v}_i 的单个分子在一次碰撞中对器壁的作用

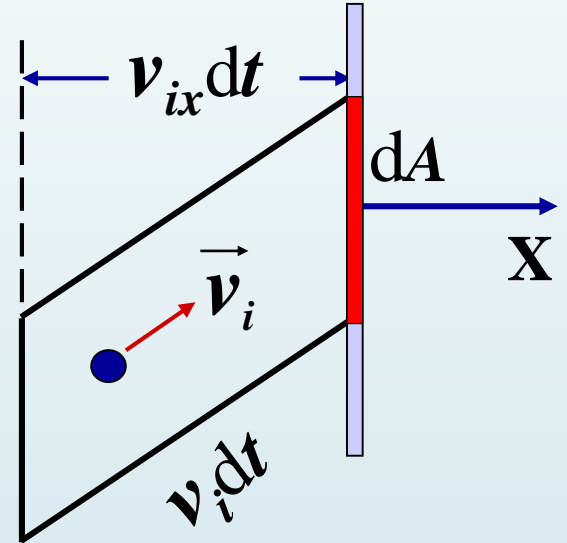


碰撞前速度: (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})

碰撞后速度: $(-v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$

碰撞前后动量改变: $\Delta P_i = -2mv_{ix}$

分子施于 dA 的冲量: $\Delta I_i = 2mv_{ix}$



2) dt 时间内第 i 组分子施于 dA 的冲量

取 $v_i dt$ 为斜高、 dA 为底的斜柱体

体积为: $v_{ix} dt dA$; 分子数为: $n_i v_{ix} dt dA$

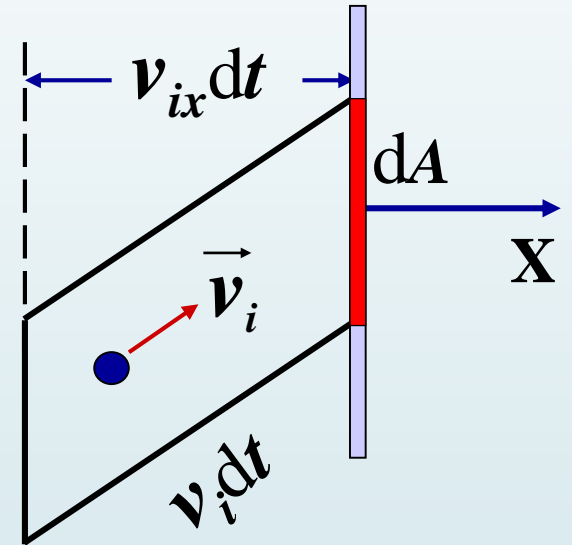
dt 内第 i 组分子施于 dA 的冲量:

$$dI_i = 2mv_{ix} n_i v_{ix} dt dA = 2mn_i v_{ix}^2 dt dA$$

任取面积为 dA ,垂直 X 轴处的器壁(光滑), 计算 dA 上的压强:

所有分子施于 dA 的冲量:

$$\begin{aligned} dI &= \sum_i dI_i \\ &= \sum_i 2mn_i v_{ix}^2 dt dA \end{aligned}$$



2) dt 时间内第 i 组分子施于 dA 的冲量

取 $v_{ix} dt$ 为斜高、 dA 为底的斜柱体

体积为: $v_{ix} dt dA$; 分子数为: $n_i v_{ix} dt dA$

dt 内第 i 组分子施于 dA 的冲量:

$$dI_i = 2m v_{ix} n_i v_{ix} dt dA = 2m n_i v_{ix}^2 dt dA$$

任取面积为 dA ,垂直 X 轴处的器壁(光滑), 计算 dA 上的压强:

所有分子施于 dA 的冲量:

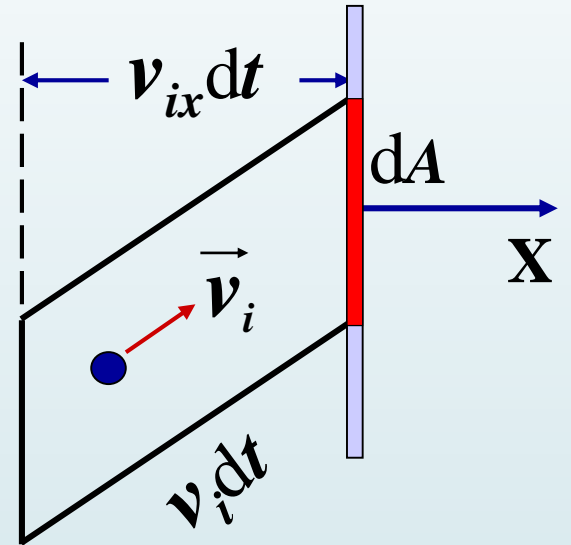
$$\begin{aligned} dI &= \sum_i dI_i \\ &= \sum_i 2mn_i v_{ix}^2 dt dA \end{aligned}$$

上式中对 i 求和应理解为:

$$dI = \sum_{v_{ix} > 0} 2mn_i v_{ix}^2 dt dA$$

按几率分布 $v_{ix} > 0$, $v_{ix} < 0$ 的分子数各占一半, 故

$$dI = \frac{1}{2} \sum_i 2mn_i v_{ix}^2 dt dA = \sum_i mn_i v_{ix}^2 dt dA$$



任取面积为 dA ,垂直 X 轴处的器壁(光滑), 计算 dA 上的压强:

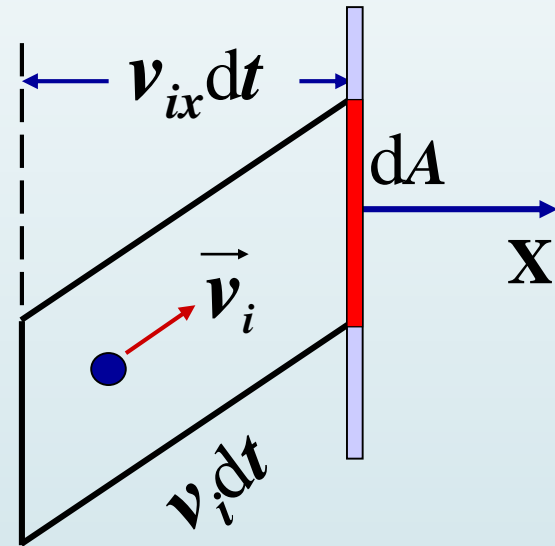
根据冲量的定义: $dI = F dt \quad \therefore F = \frac{dI}{dt}$ dA 上的压强: $P = \frac{F}{dA}$

$$\therefore P = \frac{dI}{dt dA} = \sum_i m n_i v_{ix}^2 = m \left[\sum_i n_i v_{ix}^2 \right] \cdot \frac{nV}{nV}$$

$$= \frac{nm \sum_i n_i V v_{ix}^2}{nV}$$

$$\therefore P = nm \overline{v_x^2}$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{\sum_i n_i V v_{ix}^2}{nV}$$



按几率分布 $v_{ix} > 0$, $v_{ix} < 0$ 的分子数各占一半, 故

$$dI = \frac{1}{2} \sum_i 2 m n_i v_{ix}^2 dt dA = \sum_i m n_i v_{ix}^2 dt dA$$

任取面积为 dA ,垂直 X 轴处的器壁(光滑), 计算 dA 上的压强:

x 方向特殊吗?

同理可得:

否!

$$P = nm \overline{v_y^2}$$

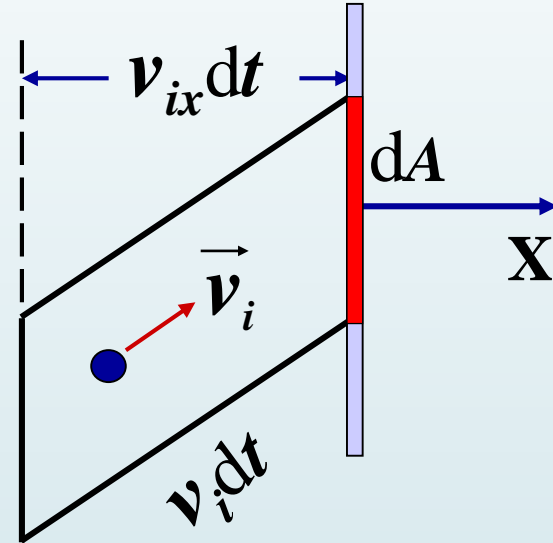
$$\therefore P = nm \overline{v_z^2}$$

以上三式相加可得:

$$3P = nm(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2})$$

$$= nm \overline{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = nm \overline{v^2}$$

故: $P = \frac{1}{3} nm \overline{v^2}$



$$P = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t} \quad \overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

(分子的平均平动动能)

$$P = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t}$$

宏观量

微观量

- (1) 压强公式把宏观量 P 与微观量 n 、 ε_t 联系起来了，揭示了宏观量和微观量的关系。
- (2) P 的意义：大量分子与器壁不断碰撞的结果，是统计平均值，对单个分子谈压强没有意义。

$$3P = nm(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2})$$

$$= nm\overline{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = nm\overline{v^2} \quad \text{故: } P = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

$$P = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t} \quad \overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

(分子的平均平动动能)

$$P = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t}$$

宏观量

微观量

- (1) 压强公式把宏观量 P 与微观量 n 、 ε_t 联系起来了，揭示了宏观量和微观量的关系。
- (2) P 的意义：大量分子与器壁不断碰撞的结果，是统计平均值，对单个分子谈压强没有意义。

利用理想气体状态方程 $P = nkT$

还可讨论理想气体的温度与微观量的关系。

$$P = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t} \quad \overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

(分子的平均平动动能)

$$P = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t}$$

宏观量

微观量

6. 理想气体的温度 **最直接反映热运动的剧烈程度的是平均速率。**

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t} \\ P = nkT \end{array} \right\} \overline{\varepsilon_t} = \frac{3}{2}kT$$

理想气体的温度
只与分子的平均
平动动能有关

温度 T 是统计平均值，是大量微观分子热运动的集体表现，谈论一个分子的温度没有意义。

温度的微观实质：

温度是物体内部分子无规则运动的剧烈程度的标志。

$$P = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t} \quad \overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

(分子的平均平动动能)

$$P = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t}$$

宏观量

微观量

6. 理想气体的温度 **最直接反映热运动的剧烈程度的是平均速率。**

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t} \\ P = nkT \end{array} \right\} \overline{\varepsilon_t} = \frac{3}{2}kT$$

理想气体的温度
只与分子的平均
平动动能有关

温度 T 是统计平均值，是大量微观分子热运动的集体表现，
谈论一个分子的温度没有意义。

温度的微观实质：

温度是物体内部分子无规则运动的剧烈程度的标志。

$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{3}{2}kT$$

$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

7. 方均根速率(分子速率的一种统计平均值)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_t &= \frac{3}{2} kT \\ \bar{\varepsilon}_t &= \frac{1}{2} m_f \overline{v^2} \end{aligned} \right\} \text{得方均根速率:}$$
$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_f}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\boxed{\nu R = N k} \quad \nu = \frac{m}{M} \quad N = \frac{m}{m_f} \quad \boxed{\frac{k}{m_f} = \frac{R}{M}}$$

例2. 求在 $T=273\text{K}$ 时氧分子的平均动能和方均根速率。

解: $\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 273 = 5.65 \times 10^{-21} \text{ J}$

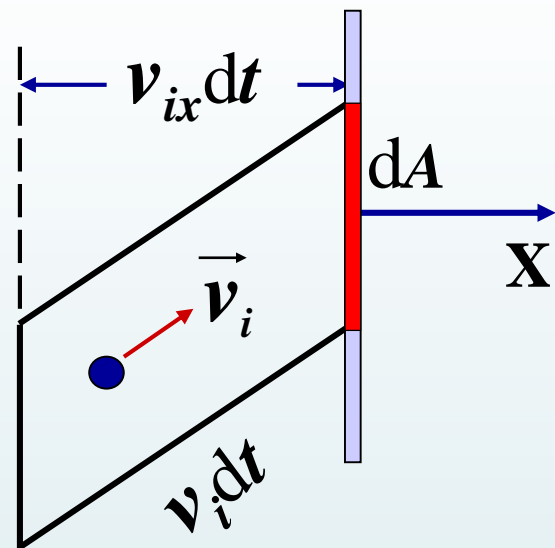
$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 273}{32 \times 10^{-3}}} = 4.61 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

● 理想气体的压强、温度

$$P = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon_t}$$

$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{3}{2} kT$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{1}{3} n m \overline{v^2} \\ \overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} \end{array} \right.$$



问题：若器壁不是平面的，公式是否仍成立呢？（ A ）

A. 成立 B. 不成立 C. 要看具体情况

问题：对单个分子谈压强和温度有没有意义？（ B ）

A. 有意义 B. 无意义 C. 仅对理想气体有意义

P 和 T 是大量分子的统计平均值，对单个分子谈压强、温度没有意义。

三、麦克斯韦速率分布律

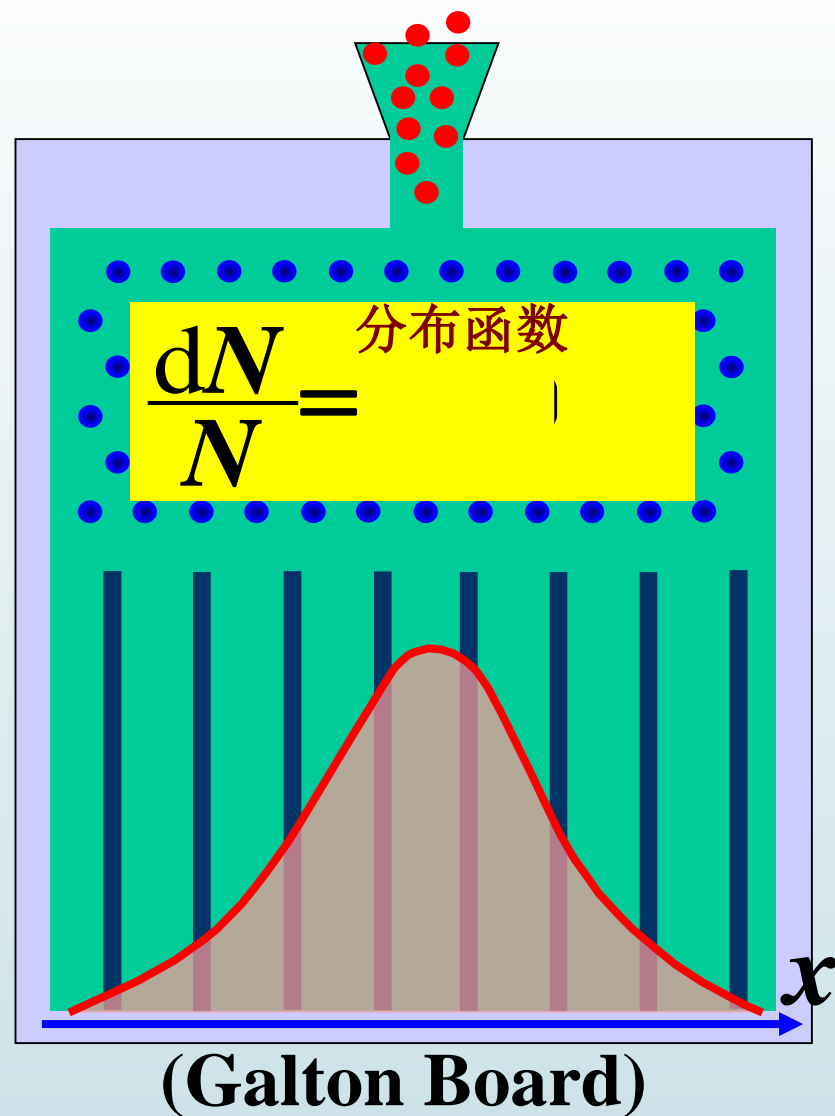
分布函数(举例):

$$0 \xrightarrow[\begin{smallmatrix} x & x+dx \end{smallmatrix}]{dN} x$$

$f(x)$ 称为分布函数。

$$f(x) = \frac{dN}{Ndx}$$

分布函数 $f(x)$ 表示在 x 附近的单位坐标区间内的豆子数占总豆子数的比例。



1) 麦克斯韦速率分布律的表达式


$$0 \xrightarrow[v]{v+dv} dN$$

对处在温度为 T 的平衡态下的理想气体,如果在 $v \rightarrow v+dv$ 的速率区间 dv 内有 dN 个分子,则有以下式成立:

$$\frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv$$

其中: $f(v) = \frac{dN}{Ndv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2$

为麦克斯韦速率分布函数。

它表示: 处在温度为 T 的平衡态下的理想气体,在 v 附近的单位速率区间内的分子数占总分子数的比例。

推导见: 大学物理学 第二册 《热学》第二版, P53, 张三慧 主编, 清华大学出版社
《热力学与统计物理》, 薛增泉 编著, 北京大学出版社



$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv$$

$$\frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$$

2) 分布曲线

(1) 具有大速率和小速率的分子都较少，具有中等速率的分子居多。

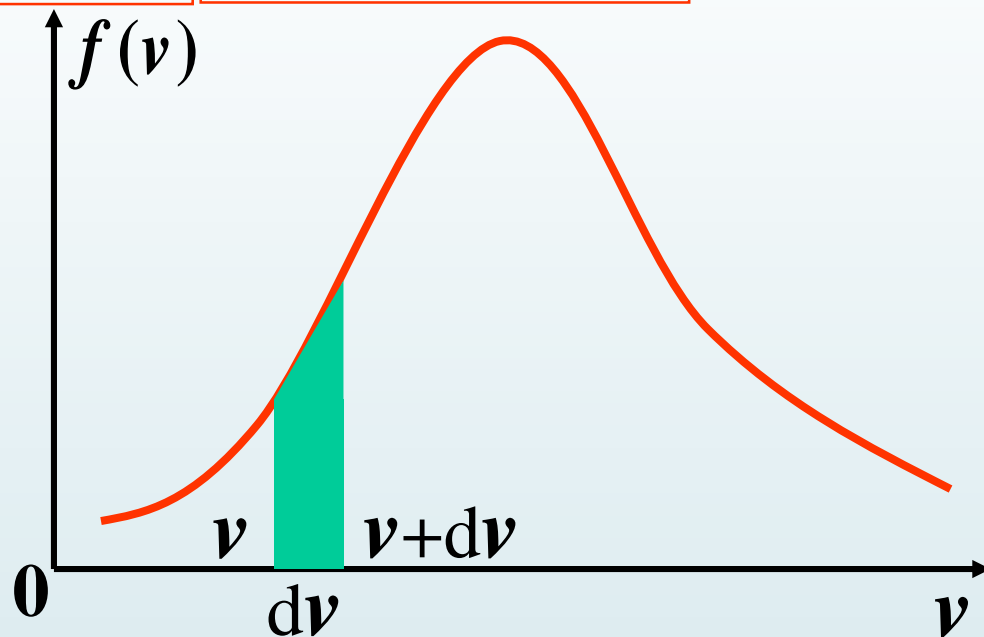
(2) 曲线下的一小块面积：

$$f(v)dv = \frac{dN}{N}$$

表示：速率在 v — $v+dv$ 区间内的分子数占总数的百分比。

(3) 整个曲线下的总面积为 **1**（速率分布函数的**归一化**条件）

$$\text{即：} \int_0^{\infty} f(v)dv = 1$$



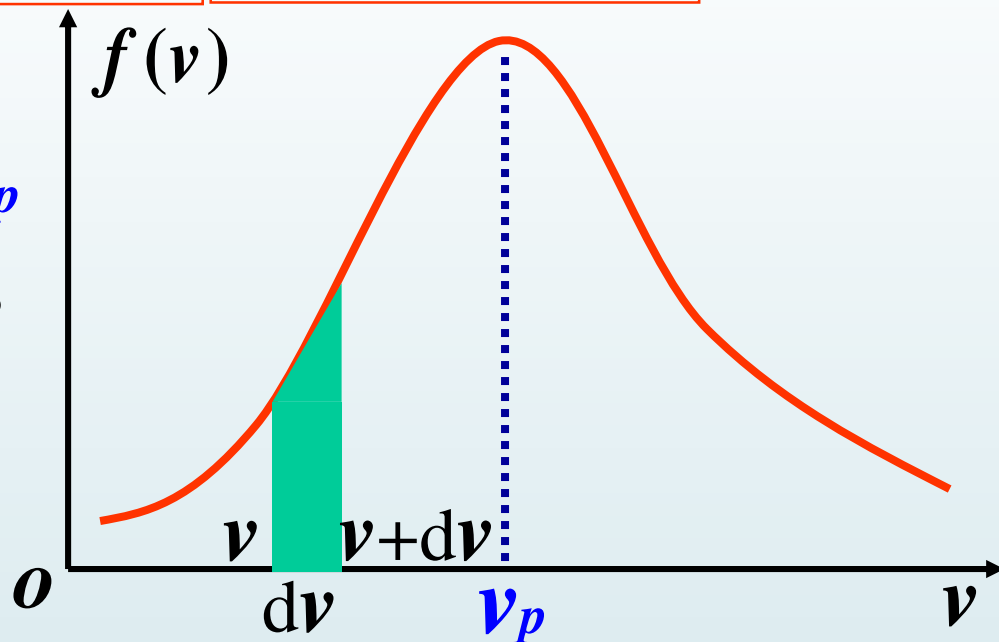


$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv$$

$$\frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$$

(4) 与 $f(v)$ 的极大值相应的速率 v_p 称为“最概然(可几)速率”。

v_p 的意义:



a) 就大量分子而言，在宽度相等的速率间隔中，位于 v_p 附近的间隔内的分子数最多。

b) 对单个分子而言，速率在 v_p 附近的几率最大。



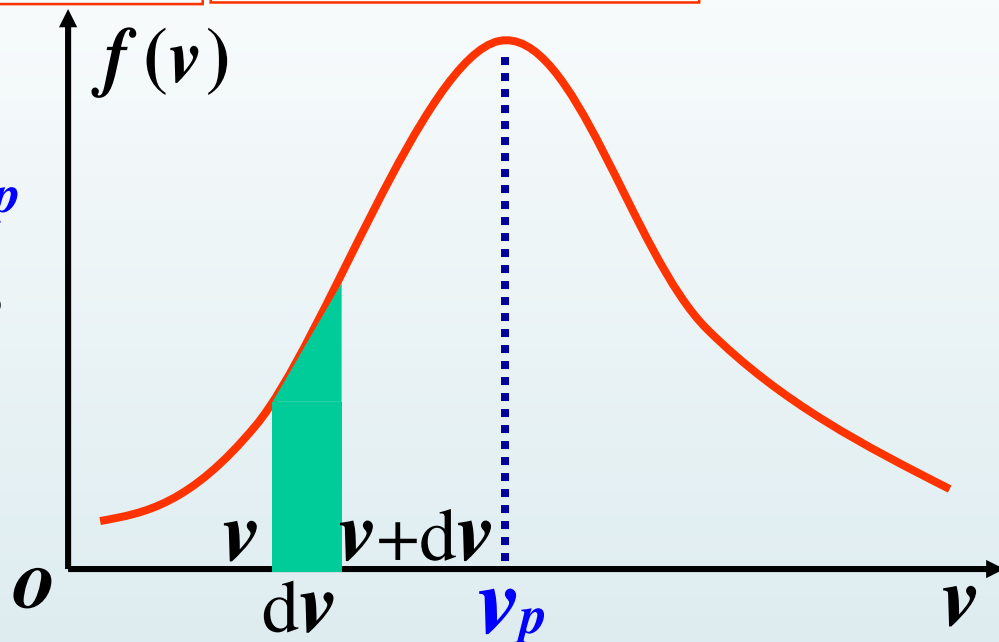
$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv$$

$$\frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$$

(4) 与 $f(v)$ 的极大值相应的速率 v_p 称为“最概然(可几)速率”。

判断关于 v_p 的意义的下列三种说法的对错。

- a. 就大量分子而言，在宽度相等的速率间隔中，位于 v_p 附近的间隔内的分子数最多。
- b. 对单个分子而言，速率在 v_p 附近的概率最大。
- c. 速率为 v_p 的分子最多。



关于 v_p 的三种说法，下面正确的结论是 (D)

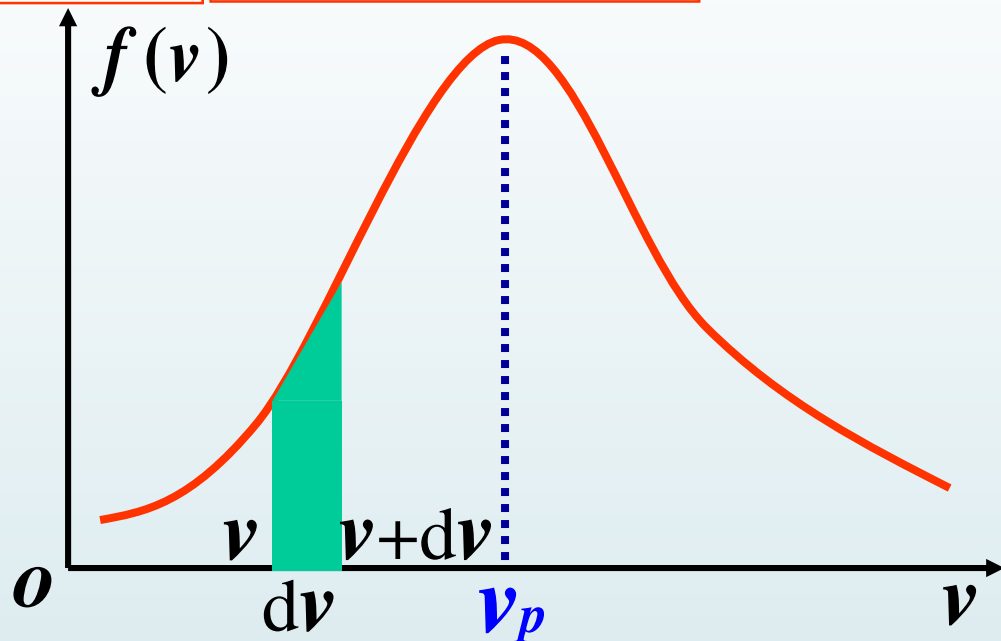
- A. 均对 B. 均错
- C. 仅a对 D. 仅c错
- E. 仅c对



$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv \quad \frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$$

3) 用麦克斯韦速率分布函数求分子速率的三个统计平均值

即求: v_p 、 \bar{v} 、 $\sqrt{v^2}$



(1) 求 v_p

根据的 v_p 定义: v_p 是与 $f(v)$ 的极大值所对应的速率

$$\text{令: } \frac{df(v)}{dv} = 0 \rightarrow v = v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$



$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv \quad \frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$$

(2) 求 \bar{v}

$$\bar{v} = \frac{\Delta N_1 v_1 + \Delta N_2 v_2 + \cdots}{\sum \Delta N} = \frac{\sum \Delta N_i v_i}{N} = \int \frac{v dN}{N} = \int v f(v) dv$$

$$\therefore \bar{v} = \int v f(v) dv = \int_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^3 dv$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

(3) 求: $\sqrt{\overline{v^2}}$

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^4 dv = \frac{3KT}{m}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$



$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv \quad \frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$$

$$\text{比较知: } v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} < \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} < \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

(有什么含义吗?)

若 $g(v)$ 是与分子速率 v 有关的微观物理量, 如何计算 $\overline{g(v)}$?

$$\overline{g(v)} = \frac{\int_0^N g(v) dN}{N} = \int_0^\infty g(v) f(v) dv$$

$$\overline{g(v)} = \int_0^\infty g(v) f(v) dv \quad g(v) \text{ 的统计平均值的计算公式}$$

由麦克斯韦速率分布函数 $f(v)$ 可得:

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{m}$$

理想气体的微观模型

统计的方法

$\rightarrow P = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$
(理想气体压强公式)

$$\therefore P = \frac{1}{3}nm \cdot \frac{3kT}{m} = nkT$$

$$P = nkT$$

理论结果

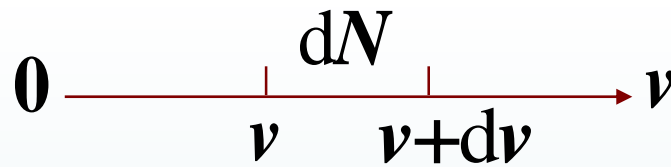
理想气体的状态方程:

$$\begin{cases} P = nkT \\ PV = \nu RT \end{cases}$$

实验结果

完全相符

注意：麦克斯韦速率分布律是统计规律。



对处在温度为 T 的平衡态下的理想气体,

如果在 $v \rightarrow v+dv$ 的速率区间 dv 内有 dN 个分子,则

$$\frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv$$

只适用于大量分子组成的气体。

关于在 $v \rightarrow v+dv$ 的速率区间 dv 内分子个数 dN 有3个说法:

1) dN 是速率区间 dv 内分子个数的统计平均值。

由于热运动的无规则性, dv 内的分子个数是不断变化的。


2) 速率区间 dv 是必须宏观小微观大 dN 才有意义。

若 dv 是微观小的, dN 的数值将十分不确定失去实际意义。

3) 速率正好等于某一确定值 v 的分子数的提法没有意义。

问题: 对于以上3个说法, 正确的判断是 (A)

A. 都对 B. 都错 C. 部分对 D. 仅说法3)错

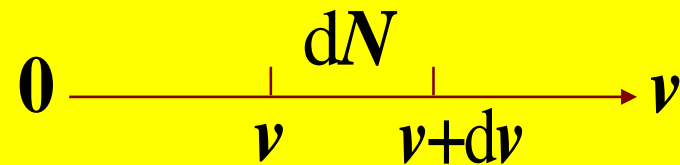
例： 已知理想气体在平衡状态下，分子的麦克斯韦速率分布函数为 $f(v)$ ， N 为总分子数，单个分子质量为 m ，请分别说明下列各种形式的物理意义： $\frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$

(1) $f(v) dv$ (2) $Nf(v) dv$ (3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$

(4) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v) dv$ (5) $\int_{v_1}^{v_2} vf(v) dv$ (6) $\int_0^{\infty} \frac{1}{2}mv^2 f(v) dv$

解：(1) $f(v)dv = \frac{dN}{N}$ ——在 $v \rightarrow v+dv$ 速率区间内出现的分子占总分子数的百分比

或：分子在 $v \rightarrow v+dv$ 区间出现的几率




(2) $Nf(v)dv = dN$

——在 $v \rightarrow v+dv$ 速率区间出现的分子数

(3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dN}{N} = \frac{1}{N} \int_{v_1}^{v_2} dN = \frac{N_{12}}{N}$

——在 $v_1 \rightarrow v_2$ 速率区间出现的分子占总分子数的比例

例： 已知理想气体在平衡状态下，分子的麦克斯韦速率分布函数为 $f(v)$ ， N 为总分子数，单个分子质量为 m ，请分别说明下列各种形式的物理意义： $\frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$

(1) $f(v) dv$ (2) $Nf(v) dv$ (3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$
 (4) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v) dv$ (5) $\int_{v_1}^{v_2} vf(v) dv$ (6) $\int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2 f(v) dv$

解：(4) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v) dv = \int_{v_1}^{v_2} N \frac{dN}{N} = N_{12}$

—— 在 $v_1 \rightarrow v_2$ 速率区间出现的分子数

判断：(5) $\int_{v_1}^{v_2} vf(v) dv = \int_{v_1}^{v_2} v \frac{dN}{N} = \frac{1}{N} \int_{v_1}^{v_2} v dN \rightarrow$ 无意义

A. 对
 B. 错

$$\frac{\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v dN}{\int_{v_1}^{v_2} dN} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v dN}{N_{12}} = \bar{v}_{12}$$

(6) $\int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2 f(v) dv = \int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2 \frac{dN}{N} = \frac{1}{2}m \overline{v^2} = \overline{\varepsilon_t}$

—— 在整个速率区间分子的平均平动动能

例：试计算，气体分子热运动的速率介于 $v_p - \frac{v_p}{100}$ 和 $v_p + \frac{v_p}{100}$ 之间的分子数占总分子数的百分比。

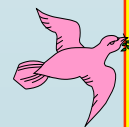
解：根据麦克斯韦速率分布律，在区间 $v \rightarrow v+dv$ 范围内的分子数占总分子数的比例为：

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv$$

$$\begin{cases} v = v_p - \frac{v_p}{100} = \frac{99}{100} v_p \\ \Delta v = \left(v_p + \frac{v_p}{100} \right) - \left(v_p - \frac{v_p}{100} \right) = \frac{v_p}{50} \\ v_p = \sqrt{2kT / m} \end{cases}$$

代入上式得：

$$\frac{\Delta N}{N} = 1.66\%$$



$$\frac{dN}{N} = f(v) \cdot dv$$

例：某系统有 N 个粒子，其速率分布函数为：

$$\begin{cases} f(v) = \frac{dN}{Ndv} = C & (v_0 \geq v \geq 0) \\ f(v) = 0 & (v > v_0) \end{cases}$$

求：(1) 速率分布曲线；(2) 由 v_0 求常数 C ；
(3) 求粒子的平均速率。

(3)的答案是(B)

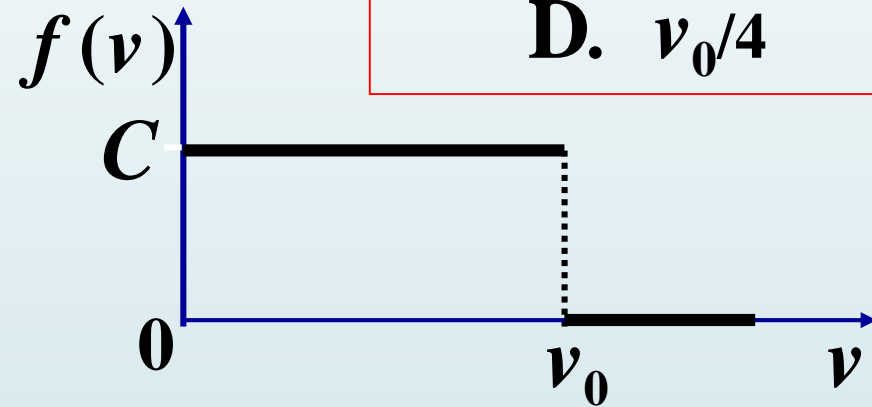
A. v_0

B. $v_0/2$

C. $v_0/3$

D. $v_0/4$

解：(1) 速率分布曲线见右图



(2) 由归一化条件：

$$\int_0^{v_0} f(v) dv = 1$$

$$\int_0^{v_0} C dv = 1 \longrightarrow C v_0 = 1 \longrightarrow C = \frac{1}{v_0}$$

(3) 平均速率：

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{v_0} v \frac{1}{v_0} dv = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{2} v_0$$

四、能量均分定理、理想气体的内能

1. 自由度:

决定一物体在空间的位置所需要的独立坐标数
——物体的自由度（通常用 i 表示）

在直角坐标系中:

1) 确定一质点位置: (x, y, z) 需要3个独立坐标数

即: 自由度为3 ——称平动自由度 $t = 3$

例单原子分子: 氦 (He)、氖 (Ne) $i = t = 3$

2) 确定一直线的位置:

确定线上一个点, 需 $t = 3$ 个平动自由度

确定线的方位, 还需 (α, β, γ) 3个角度

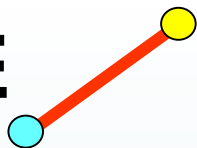
$\because \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 故转动自由度 $r = 2$

故, 一直线的自由度为: $i = t + r = 3 + 2 = 5$

双原子分子:

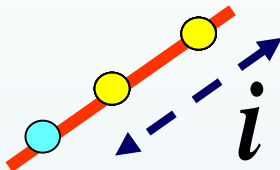
H_2 、 O_2 、 CO ...

刚性



$$i = 3 + 2 = 5$$

非刚性



$$i = t + r + s = 3 + 2 + 1 = 6$$

振动

3) 确定一刚体的位置

确定刚体一轴线要5个自由度: $t = 3$ 、 $r = 2$

确定刚体绕轴转动加一个自由度: $r = 1$

所以, 刚体的自由度数:

$$i = t + r = 3 + 3 = 6$$

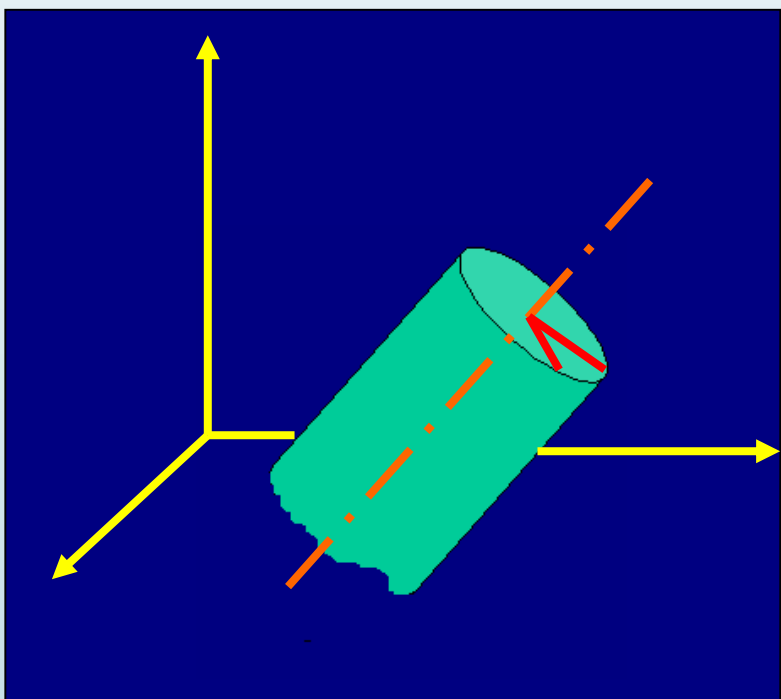
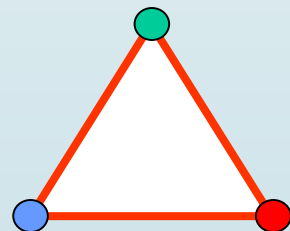
三原子分子: H_2O ...

刚性:

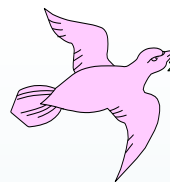
$$i = t + r = 3 + 3 = 6$$

非刚性:

$$i = t + r + s = 3 + 3 + 3 = 9$$



2. 能量按自由度均分原理



$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

1) 分子平均平动动能 $\overline{\varepsilon_t}$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

按自由度均分

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{1}{3} \overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2} kT$$

每个自由度上都得到相同的平均平动动能：

$$\frac{1}{2} kT$$

(这是分子无规则运动中不断碰撞的结果)

2) 分子平均动能 $\overline{\varepsilon_t}$ 按自由度均分的推广：


在一定温度 T 的平衡态下，所有物质的分子在每个自由度上（平动、转动、振动）都有一份相同的平均动能，其值为： $\frac{1}{2} kT$

能量均分定理

具有 i 个自由度的分子，其总平均动能：

$$\overline{\varepsilon_k} = \frac{i}{2} kT$$

具有*i* 个自由度的分子，其总平均动能：


$$\overline{\epsilon_k} = \frac{i}{2} kT$$

例：刚性双原子分子， $i = t + r = 5$

分子总平均动能为： $\overline{\epsilon_k} = \frac{5}{2} kT$

刚性三原子分子， $i = t + r + s = 6$

分子总平均动能为： $\overline{\epsilon_k} = \frac{6}{2} kT$

分子平均动能的总和一般形式为：

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{i}{2} kT = \frac{t + r + s}{2} kT$$

动能按自由度均分的原理体现的是统计规律。

3. 理想气体的内能

一般气体的内能

{ 分子平均动能的总和（平动、振动、转动）
原子间振动平均势能的总和
分子间相互作用的势能总和

理想气体的内能:

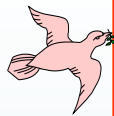
{ 分子平均动能的总和: $\bar{\epsilon}_k = \frac{t+r+s}{2} kT$
原子间振动平均势能的总和: $\bar{\epsilon}_p = \frac{s}{2} kT$

把分子的总自由度看成:

$$i = t + r + 2s \quad (\text{对于非刚性分子 } s \text{ 才不为零})$$

所以，一个分子的平均总内能为:

$$E = \frac{i}{2} kT = \frac{t+r+2s}{2} kT \longrightarrow \text{能量按“自由度”均分}$$



$$E = \frac{i}{2} kT$$

—— 一个理想气体分子的内能

$$k = \frac{R}{N_0}$$

1摩尔理想气体的内能为: $E_{N_0} = N_0 \cdot \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} RT$

ν 摩尔理想气体的内能为: $E = \frac{i}{2} \nu RT$

若是 { 单原子分子气体: $E = \frac{3}{2} \nu RT$

双原子分子 { 刚性: $E = \frac{t+r}{2} \nu RT = \frac{5}{2} \nu RT$

非刚性: $E = \frac{t+r+2s}{2} \nu RT = \frac{7}{2} \nu RT$

可见:

一定质量的某种理想气体的内能, 只取决于分子的自由度 i 和气体的温度 T , 与气体的体积、压强无关。

即: 理想气体的内能是温度的单值函数。

例：一个能量为 10^{12}eV 的宇宙射线粒子射入氖管中，氖管中含有氖气 0.01mol ，如果宇宙射线粒子的能量全部被氖气分子所吸收而变为热运动能量，氖气温度能升高几度？

解：将氖管中含有的氖气视为理想气体。

$$\because E = \frac{i}{2} \nu R T \quad \therefore \Delta E = \frac{i}{2} \nu R \Delta T \quad E = \frac{i}{2} \nu R T$$

$$\Delta T = \frac{2\Delta E}{i \nu R}$$

$$= \frac{2\Delta E}{3\nu R} = \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-7}}{3 \times 0.01 \times 8.31} = 1.28 \times 10^{-6} \text{K}$$

例：一篮球充气后，其中有氮气8.5g。温度为17°C，在空气中以65km/h的高速飞行。求：

- (1) 一个氮分子（设为刚性分子）的热运动平均平动动能、平均转动动能和平均总动能；
- (2) 球内氮气的内能；
- (3) 球内氮气的轨道动能。

解：(1) $\overline{\varepsilon_t} = \frac{i}{2} kT = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times (273 + 17) = 6.00 \times 10^{-21} \text{ J}$

$\overline{\varepsilon_r} = \frac{2}{2} kT = 1.38 \times 10^{-23} \times (273 + 17) = 4.00 \times 10^{-21} \text{ J}$

$\overline{\varepsilon_k} = \frac{5}{2} kT = 10.00 \times 10^{-21} \text{ J}$

(2) $E = \frac{m}{\mu} \times \frac{5}{2} RT = \frac{8.5 \times 10^{-3} \times 5 \times 8.31 \times 290}{28 \times 10^{-3} \times 2} = 1.83 \times 10^3 \text{ J}$

(3) $E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 8.5 \times 10^{-3} \times \left(\frac{65 \times 10^3}{3600} \right)^2 = 1.39 \text{ J}$

例：容器内有11.00kg二氧化碳和2.00kg氢气（均视为刚性分子气体）。已知混合气体的内能为 $8.10 \times 10^6 \text{J}$ 。求（1）混合气体的温度；（2）两种气体分子各自的平均动能。

解：（1）混合气体的内能 $E = \frac{i_1}{2} \frac{m_1}{\mu_1} RT + \frac{i_2}{2} \frac{m_2}{\mu_2} RT$

$$T = \frac{2E}{\frac{m_1}{\mu_1} i_1 R + \frac{m_2}{\mu_2} i_2 R}$$

$$\mu_1 = 44.0 \times 10^{-3} \text{kg/mol},$$

$$\mu_2 = 2.0 \times 10^{-3} \text{kg/mol}$$

$$i_1 = 6 \quad i_2 = 5$$

$$= \frac{2 \times 8.10 \times 10^6}{\left(\frac{11}{44} \times 6 + \frac{2}{2} \times 5\right) \times 10^3 \times 8.31} \approx 300 \text{K}$$

例：容器内有11.00kg二氧化碳和2.00kg氢气（均视为刚性分子气体）。已知混合气体的内能为 $8.10 \times 10^6 \text{J}$ 。求（1）混合气体的温度；（2）两种气体分子各自的平均动能。

解：(2) $\bar{\varepsilon}_{k,1} = \frac{6}{2} kT = 3kT$

$$= 3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300$$

$$= 1.24 \times 10^{-20} \text{J}$$

$$\bar{\varepsilon}_{k,2} = \frac{5}{2} kT = \frac{5}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300$$

$$= 1.04 \times 10^{-20} \text{J}$$

动量定理:

冲量等于动量的增量。 $\vec{I} = \Delta \vec{P}$

冲量: $\vec{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \quad (\text{积分形式})$$

$$\vec{F} dt = d\vec{P} \quad (\text{微分形式})$$

