大学物理

University Physics

华 中 科 技 大 学 物 理 学 院

王 宁

ningwang@hust.edu.cn

通知

10月8日课堂网测，考试内容静磁场和电磁感应，考试时间为25分钟，共5道题，满分100分。

10月7日下午16：00至18：00东九B204答疑。

回顾:振动的合成与分解

相同频率

1. 两个同方向、相同频率的振动的合成
2. 两个同方向、不同频率的振动的合成 → 拍(演示实验)
3. 两个振动方向垂直、频率相同的振动的合成

不同频率

4. 两个振动方向垂直、频率不同的振动的合成 → 利萨如图(演示实验)
5. 振动的分解(谐振分析)

回顾:(拍)两个同方向、不同频率谐振动的合成

两个分振动频率相互接近时的合振动

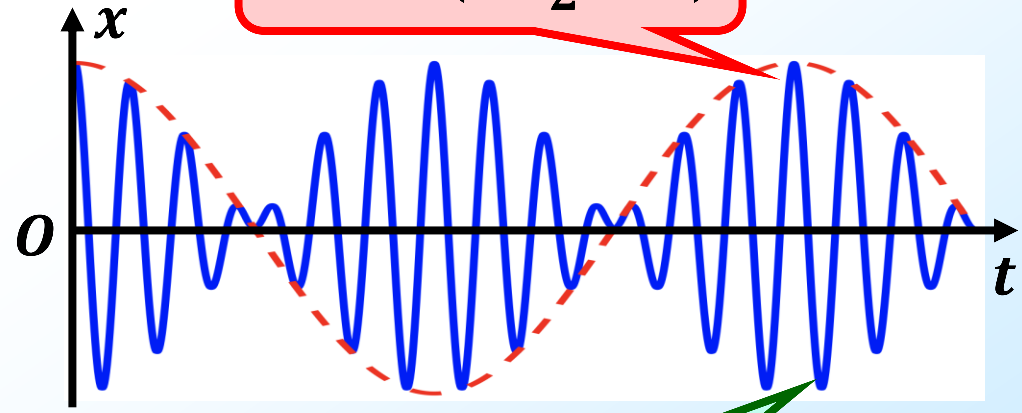
$$x = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi_1\right)$$

$$\omega_2+\omega_1 \gg |\omega_2-\omega_1|$$

振幅会出现明显加强和减弱的现象

——拍。

$$2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$



$$\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi_1\right)$$

振动的包络对应着低频因子，

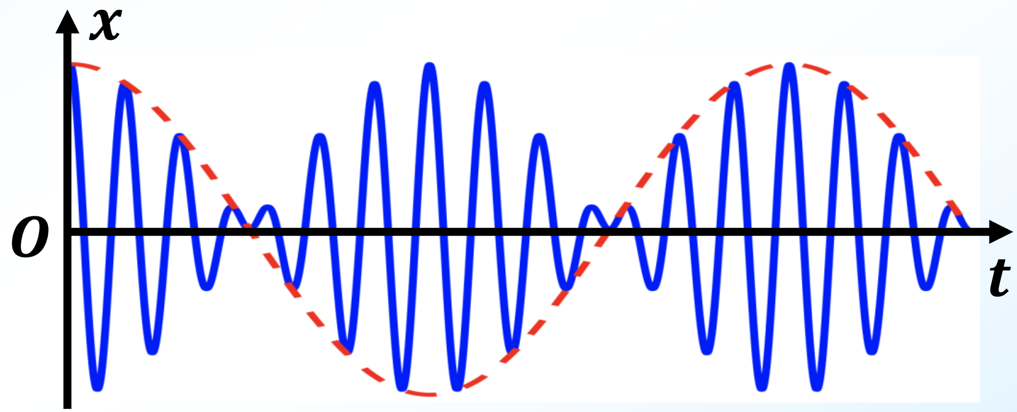
而振动的细节对应高频因子。

回顾:(拍)两个同方向、不同频率谐振动的合成

$$\boxed{x = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_1\right)}$$

$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$改变$\pi$时，

A就重复出现一次变化。



拍的周期(|A|的变化周期)τ:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\tau = \pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

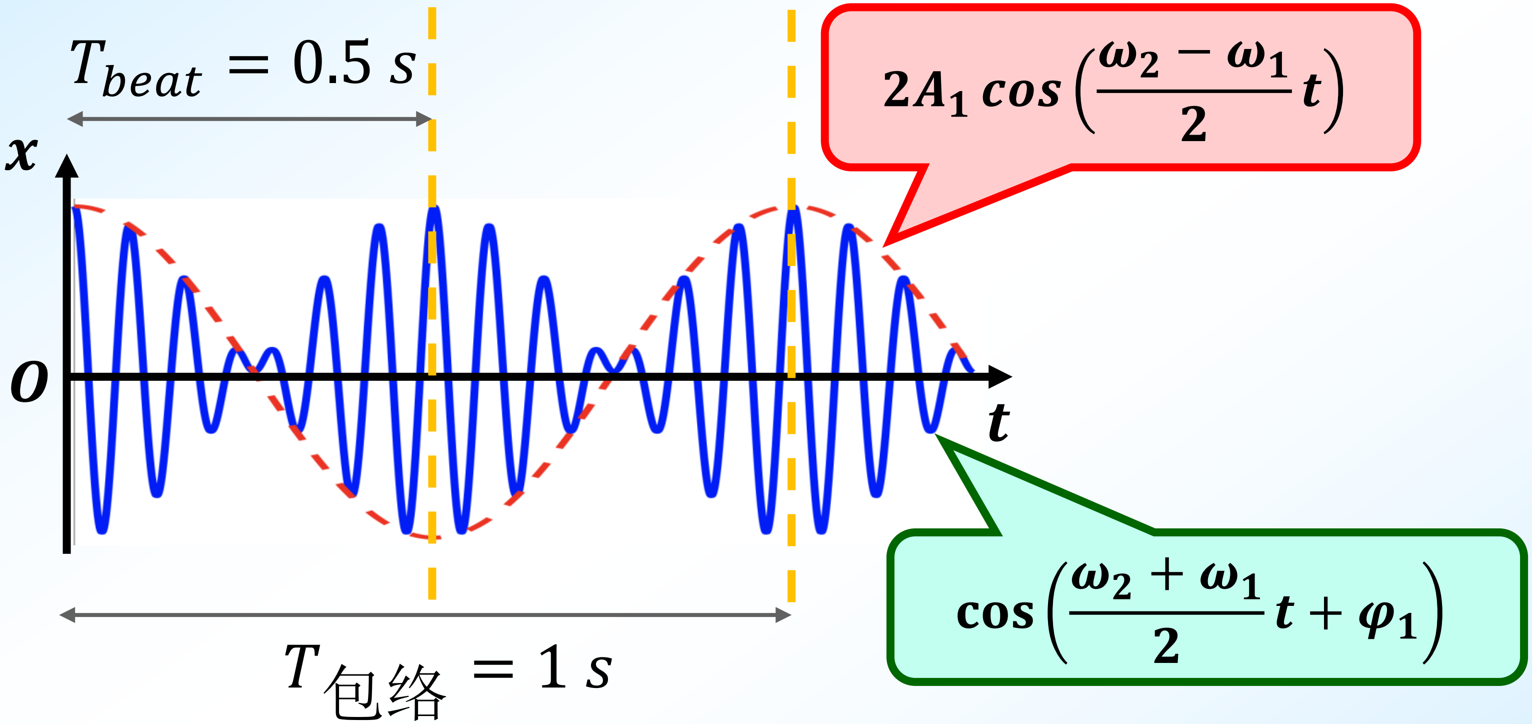
拍的频率(拍频)ν: $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1$

拍现象只在两分振动频率的频率相差不太大时才能显现出来。

$$\omega_2 + \omega_1 \gg |\omega_2 - \omega_1|$$

拍现象很明显

回顾:(拍)两个同方向、不同频率谐振动的合成

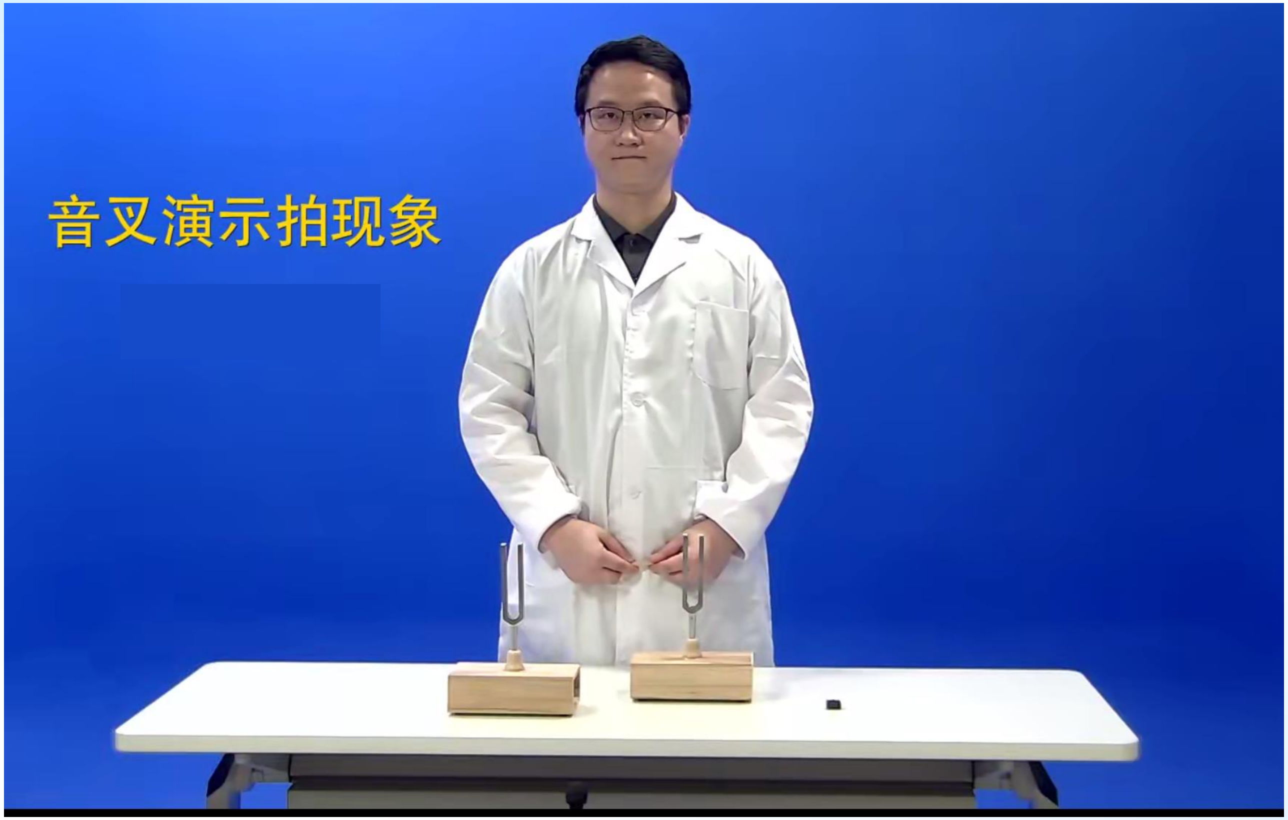


$\nu_1 = 439\ \mathrm{Hz}\quad \omega_1 = 2\pi\nu_1$

$\nu_2 = 441\ \mathrm{Hz}\quad \omega_2 = 2\pi\nu_2$

拍的频率(拍频)ν: $\nu = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1 = 2\ \mathrm{Hz}$

演示实验一



音叉演示拍现象

在拍现象的演示实验中，两个音叉的固有频率是一样的，但当其中一个音叉上附加小套环后，其振动频率将发生变化。为了听到明显的拍现象，可以上下调整套环的位置和质量。则下面的表述中正确的是:

（B）

(A) 套环向下移动，频率改变越大

(B) 套环向上移动，频率改变越大

(C) 套环质量越大，频率改变越小

(D) 拍频等于两音叉的频率差的两倍

音叉演示拍现象

音叉演示拍现象实验中，在 1 秒时间内听到有 2 次强音和 2 次弱音(即“拍频” 为 2 Hz)，已知其中一音叉的固有振动频率为 800 Hz，则另一音叉的振动频率为 <u>802/798</u> Hz。

回顾：两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

设一个物体在x方向参与振动　$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

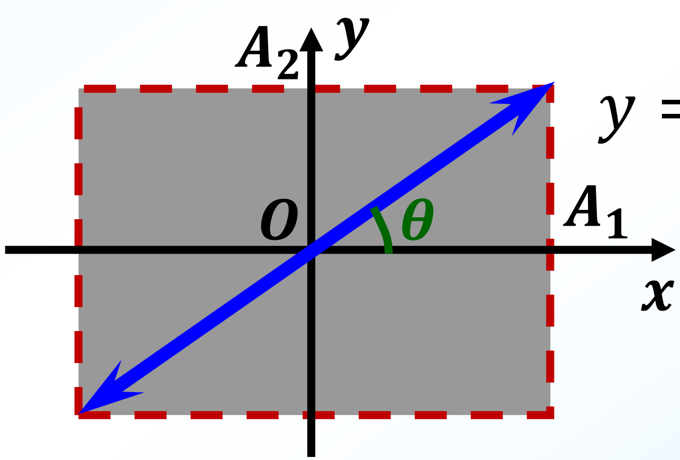
同时在y方向参与振动　$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

物体的轨迹方程：　**椭圆方程**

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

1). 两个分振动同相

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$$

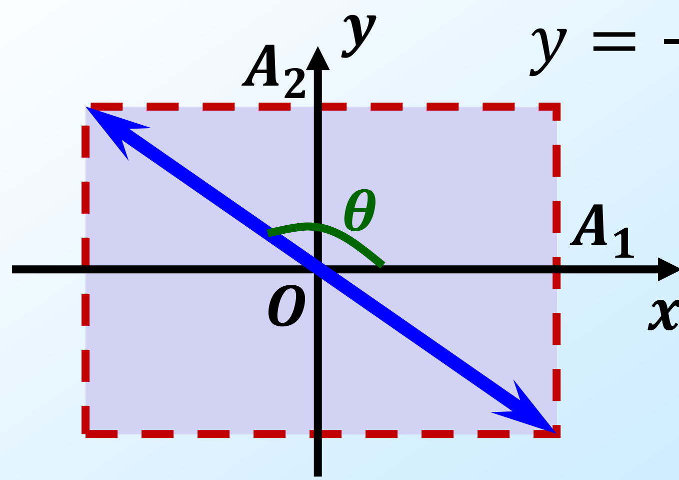


$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

2). 两个分振动反相

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$$

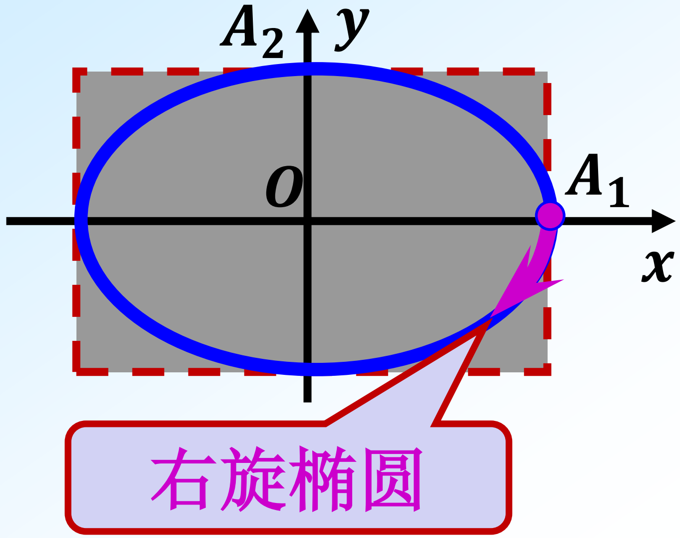
$$y = -\frac{A_2}{A_1} x$$



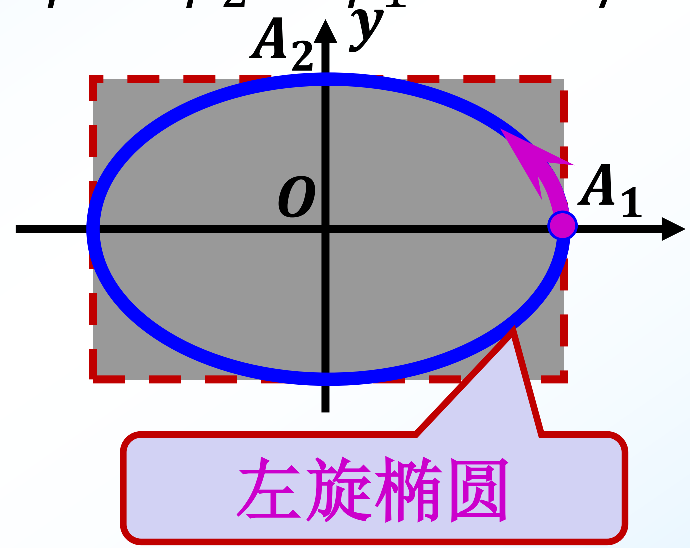
回顾：两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

3). $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$

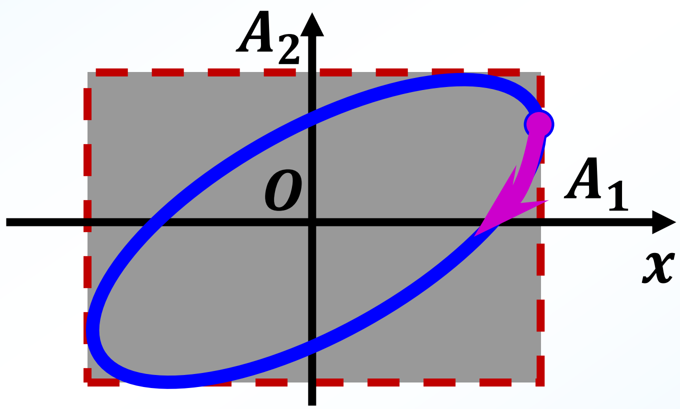
4). $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$

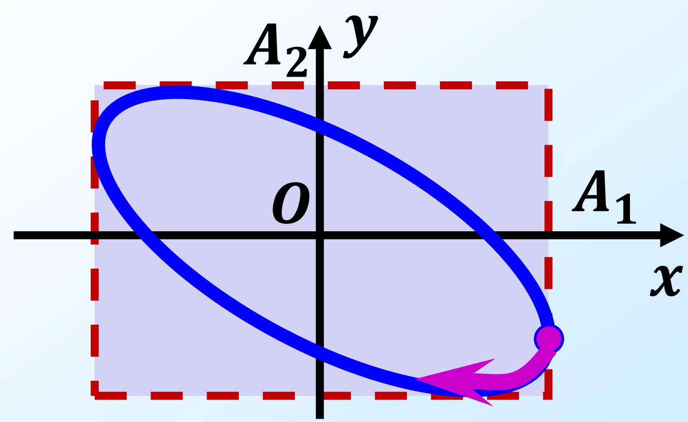


$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$



5). $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$ **φ为任意值。**





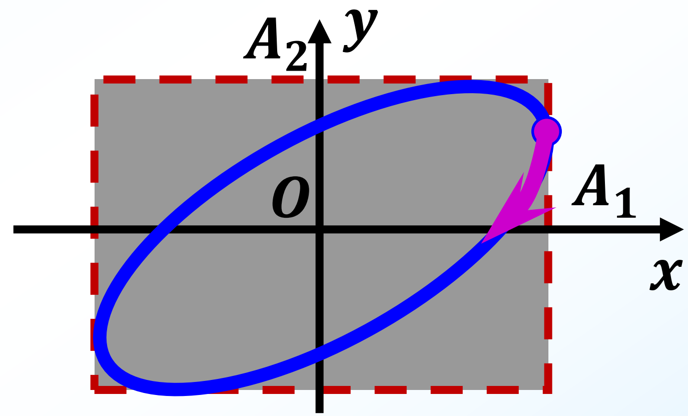
$-\pi < \varphi < 0$ **都是左旋** $0 < \varphi < \pi$ **都是右旋**

回顾：两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

$\Delta\varphi$为任意值时，合振动的轨迹一般为椭圆，旋转方向如何判定？

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi=\sin^2\varphi$$

方法一：分析相位为0和$\Delta\phi$时刻的位移及速度

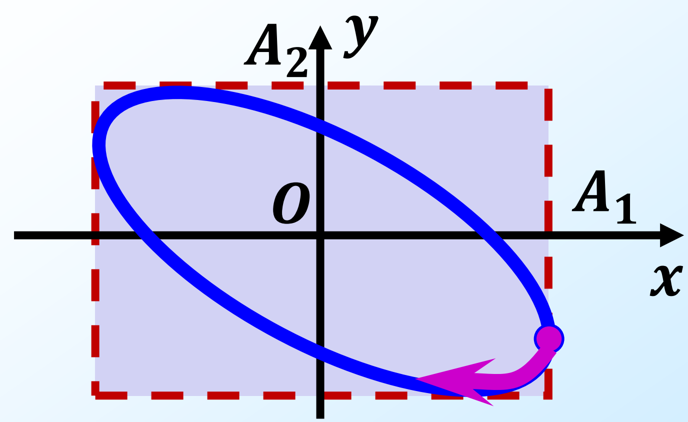


为简便起见，假定$\varphi_1=0$
$$\begin{cases} x=A_1\cos(\omega t) \\ y=A_2\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

当$t=0$时，$x=A_1, y=A_2\cos\varphi$

$0<\varphi<\pi/2 \quad x>0, y>0$

$$v_y=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}=-\omega A_2\sin\varphi<0$$



$\pi/2<\varphi<\pi$

$y<0, v_y<0$

都是右旋

回顾：两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

$\Delta\varphi$为任意值时，合振动的轨迹一般为椭圆，旋转方向如何判定？

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi=\sin^2\varphi$$

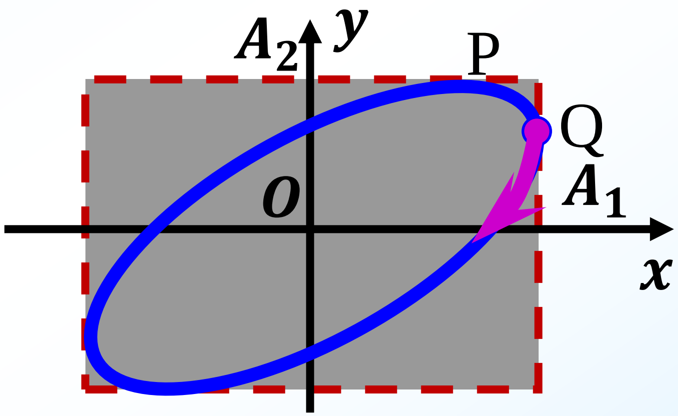
方法二：分析y正向最大P点和x正向最大Q点的到达时刻

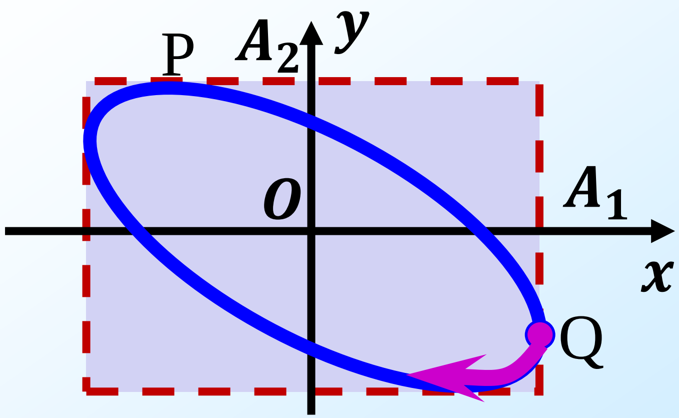
$$\begin{cases} x=A_1\cos(\omega t) \\ y=A_2\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

当$t=0$时，$x=A_1, y=A_2\cos\varphi$

$0<\varphi<\pi/2 \quad x>0, y>0 \quad$ P→Q

$\pi/2<\varphi<\pi \quad x>0, y<0 \quad$ P→Q

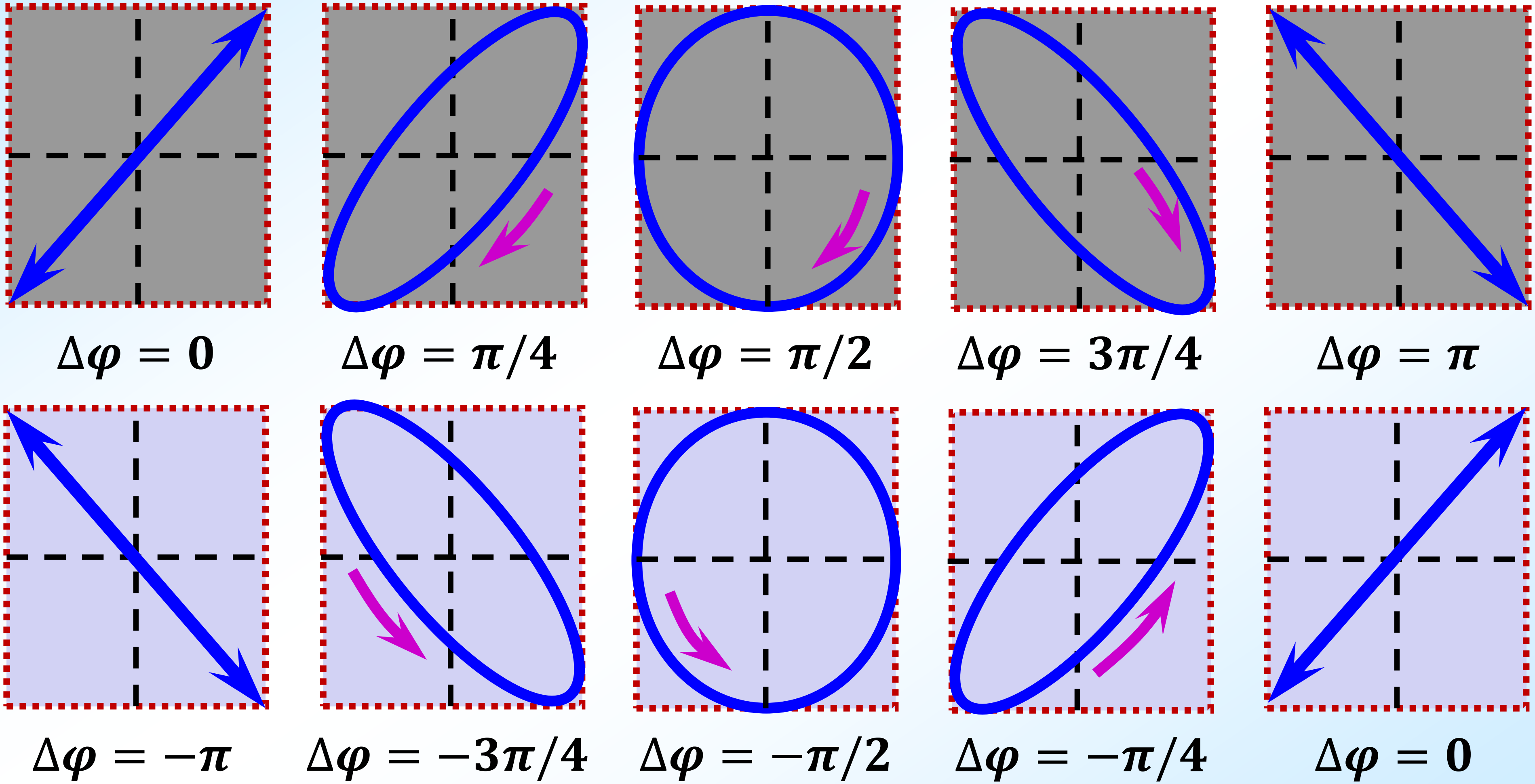




都是右旋

回顾：两个振动方向相互垂直、频率相同谐振动的合成

$\Delta\varphi$为任意值时，合振动的轨迹一般为椭圆



这些也是利萨如图。

回顾：两个振动方向相互垂直、频率不同谐振动的合成

两个振动的振动方程为：$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$

通常情况下，合振动非常复杂。仅简单讨论一种特殊情况：

两频率成简单的整数比：$\boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{N_x}{N_y}}$　　N_x, N_y都是整数。

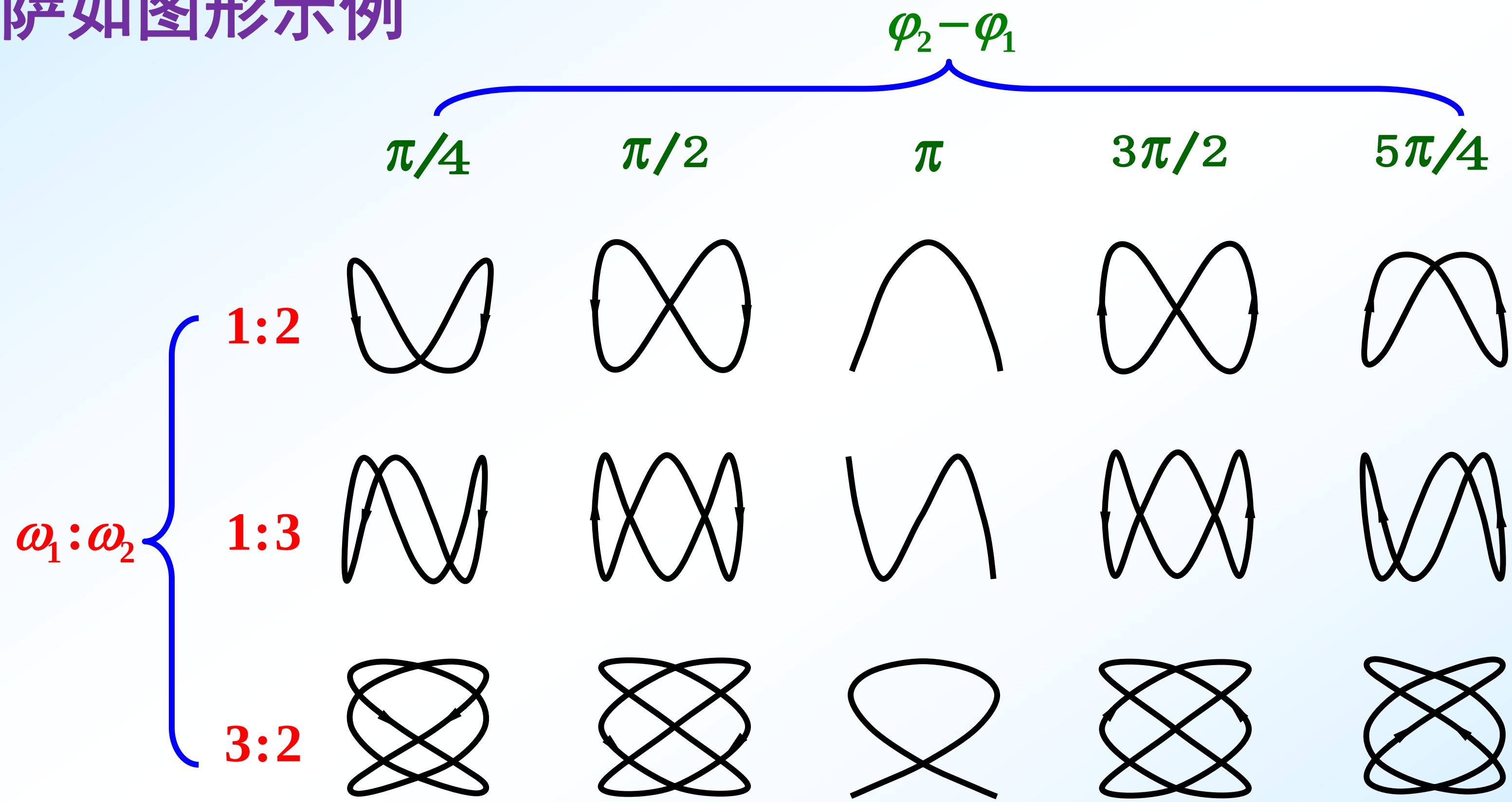
合运动轨迹为闭合曲线。 ---其运动也有周期性

利萨如图：不同频率之比和不同相位差时合振动的轨迹图

回顾：两个振动方向相互垂直、频率不同谐振动的合成

图形形状与频率、相位差及振幅有关。

利萨如图形示例

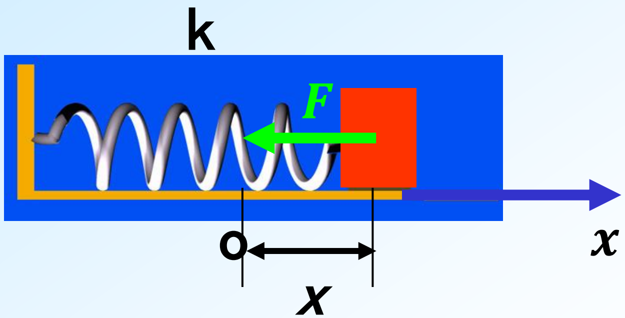


Lissajous curve | Desmos

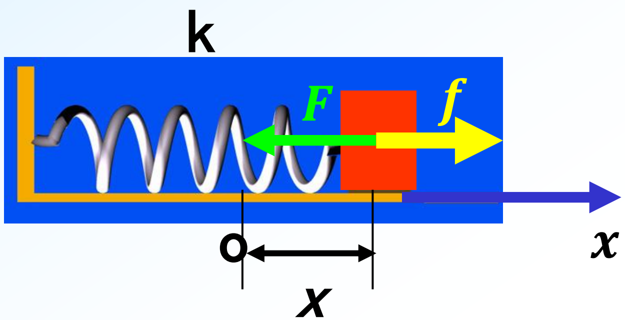
演示实验二

激光演示垂直振动合成

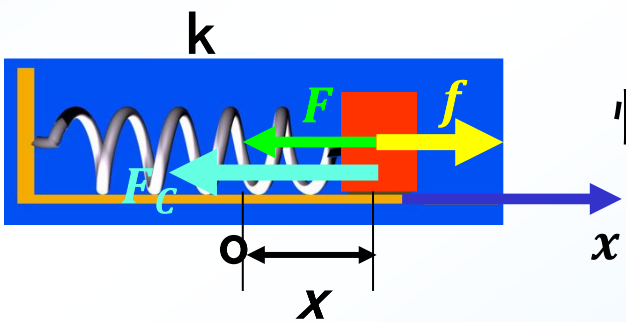
第三节 阻尼振动、受迫振动和共振



只有恢复力：简谐振动



恢复力+摩擦力（阻尼力）：
阻尼振动



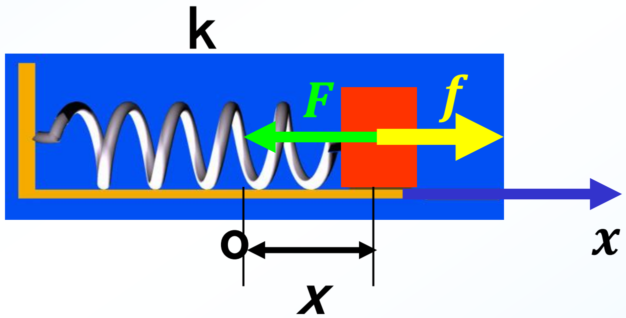
恢复力+摩擦力（阻尼力）+周期性外力：
受迫振动

特定条件：共振

阻尼振动

一 阻尼振动

1). 动力学特征



以弹簧振子为例： $F=-kx$

真实情况下，需要考虑阻力的影响。

$$f=-\gamma v=-\gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore\quad m\frac{d^2x}{dt^2}=F+f=-kx-\gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\omega_0^2=\frac{k}{m}\qquad 2\beta=\frac{\gamma}{m}}$$

β：阻力系数

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

----阻尼振动的运动方程

阻尼振动

2). 运动学特征

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0\ (\text{or}\ \ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0)}$$

令 $x=Ae^{\lambda t}$**，代入上式，有：**

$$(\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2)Ae^{\lambda t}=0$$

$$\therefore\ (\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2)=0$$ **则**

$$\lambda_\pm=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

因此有：$\boldsymbol{x(t)=A_+e^{\lambda_+t}+A_-e^{\lambda_-t}}$

接下来，对$\lambda_\pm$进行分情况讨论

阻尼振动

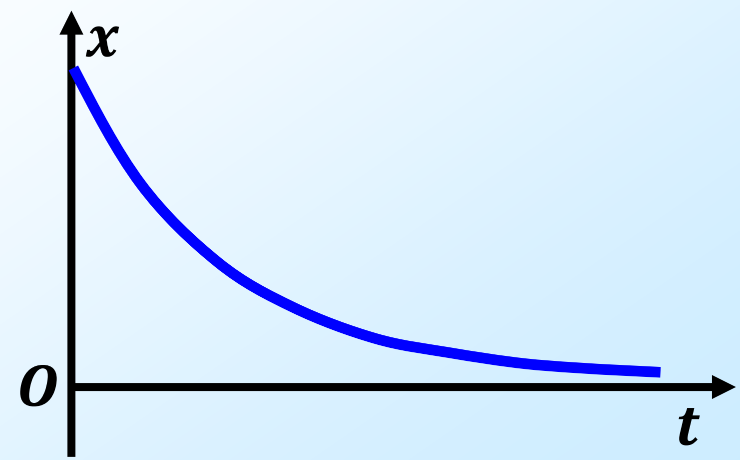
2). 运动学特征

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

a). 阻尼较大时：$\beta > \omega_0$ 则$\lambda_{\pm}$为实数 ——过阻尼

$$\therefore \quad \boxed{x(t) = A_+ e^{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_- e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}}$$

A_+和A_-是积分常数，由初始条件决定。



过阻尼振动的特征

非周期运动，无振动发生。

运动一开始，便逐渐回到平衡位置。

阻尼振动

2). 运动学特征

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

b). 阻尼较小时： $\beta < \omega_0$ 令$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ **——弱阻尼**

则 $\lambda_{\pm} = -\beta \pm i\omega$

$$x(t) = A_+ e^{-\beta t} e^{i\omega t} + A_- e^{-\beta t} e^{-i\omega t}$$
$$= e^{-\beta t}(A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t})$$
$$= e^{-\beta t}[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]$$

其中：$a = A_+ + A_-$，$b = i(A_+ - A_-)$

$$\therefore \quad \boxed{\boldsymbol{x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)}}$$

思考题

课后思考1：$\forall t, x(t) \in \mathbb{R}$，证明，$a, b \in \mathbb{R}$

课后思考2：用a, b表达A_0和φ

阻尼振动

2). 运动学特征

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

b). 阻尼较小时： $\beta < \omega_0$ 令$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ ——弱阻尼

则 $\lambda_{\pm} = -\beta \pm i\omega$

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}}$$

阻尼振动的振幅 $A = A_0 e^{-\beta t}$

阻尼振动的角频率 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

阻尼振动

弱阻尼振动的特征

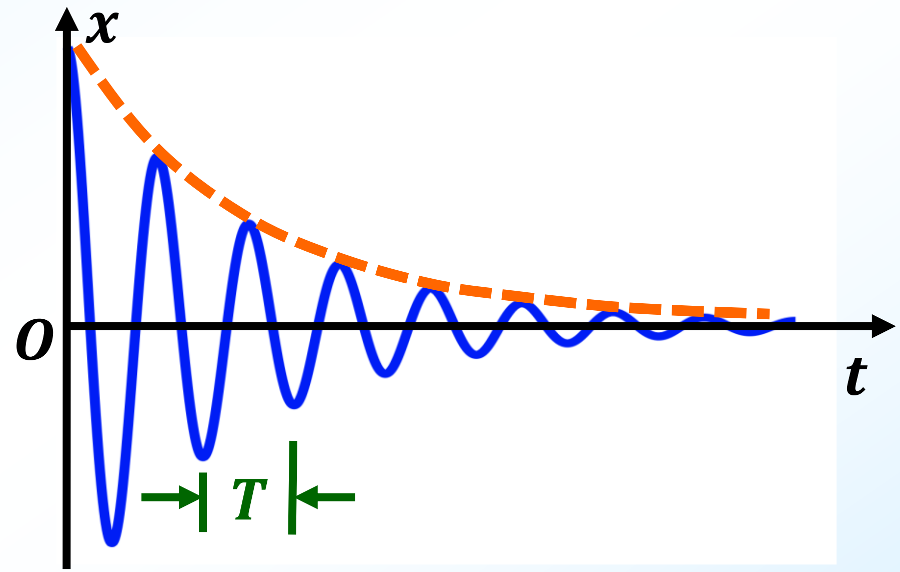
$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

* 振幅随时间按指数衰减

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

* 弱阻尼振动是准周期运动。

周期仍然定义为相位改变 2π 所需要的时间。



出现两次极大的时间间隔：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$$

周期变长
振动变慢

* 能量 E 随振幅 A 的减小而衰减。

$$E \propto A^2$$

阻尼振动

2). 运动学特征

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

有重根下的微分方程，
令通解为：

$$x(t) = u(t)e^{-\beta t}$$

则 $\ddot{u}(t) = 0$

c). 临界阻尼： $\beta = \omega_0 \quad \therefore \lambda_+ = \lambda_- = \beta$

$$\therefore \boxed{x(t) = e^{-\beta t}(At + B)}$$

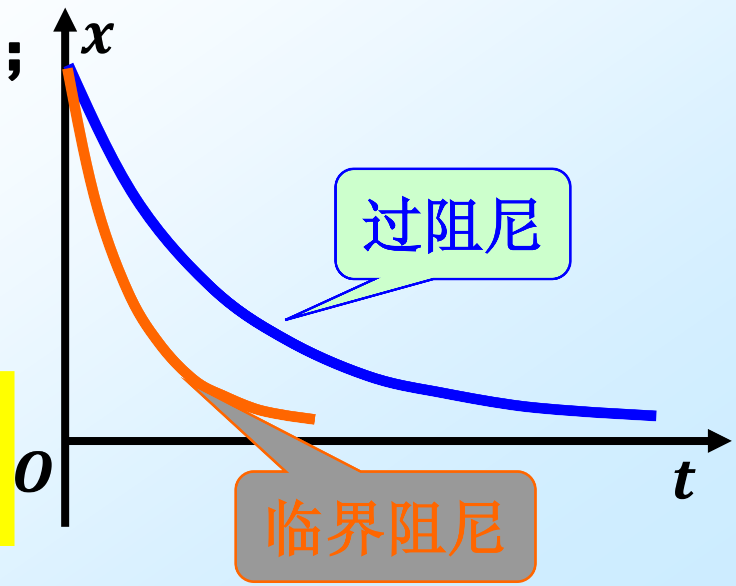
A和B是积分常数，
由初始条件决定。

临界阻尼振动的特征

类似于过阻尼，非周期运动，无振动发生；

快速回到平衡位置；

是从准周期运动到非周期运动的临界点。



和过阻尼相比，临界阻尼条件下，物体快速回到平衡位置并停留在那里，所需时间最短。

（*）阻尼振动方程的解法二

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

----阻尼振动的运动方程

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_0^2&=\frac{k}{m}\\ 2\beta&=\frac{\gamma}{m}\end{aligned}}$$

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

拉普拉斯变换：

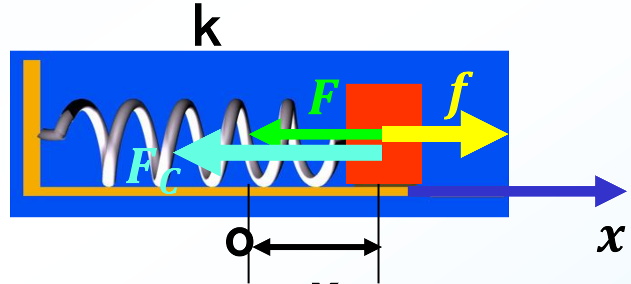
$$s^2X(s)-sx_0-v_0+2\beta[sX(s)-x_0]+\omega_0^2X(s)=0$$

$$\boxed{[(s+\beta)^2+(\omega_0^2-\beta^2)]X(s)=(s+\beta)x_0+(v_0+\beta x_0)}$$

阻尼振动的应用

受迫振动

在有阻尼的情况下，为了保持谐振子的振动状态，通常引入周期性外力作用



$$F_C = F_0 \cos \Omega t$$

$$\therefore \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = F + f + F_C$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

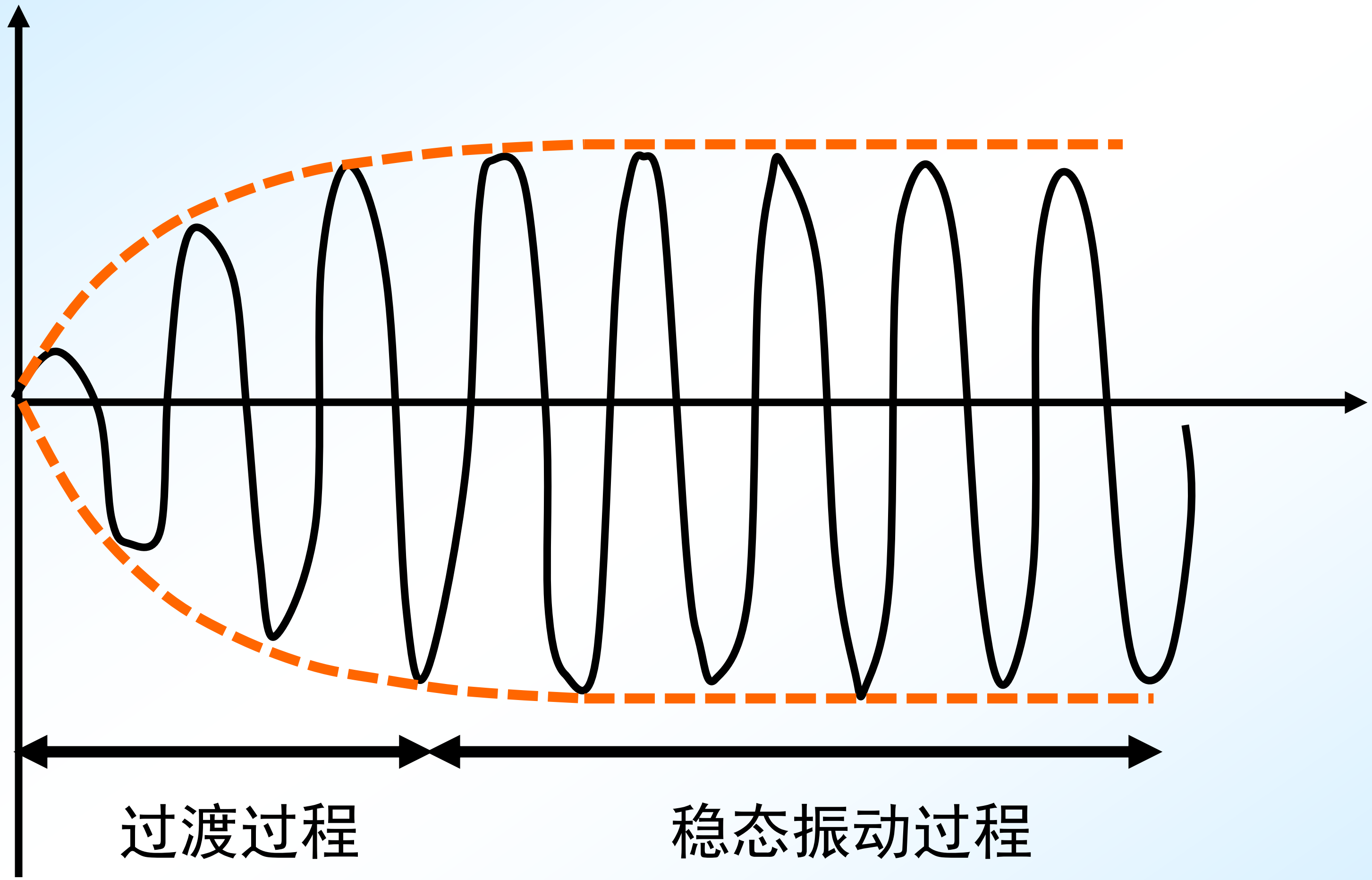
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t}$$

----受迫振动的运动方程

方程通解为：

$$x = \underbrace{A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{指数衰减项，反映系统的暂态行为}} + \underbrace{A_P \cos(\Omega t + \alpha)}_{\text{系统的稳定振动状态}}$$

受迫振动



受迫振动

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\Omega t}$$

一定时间后，达到稳定振动状态： $x(t)=A_P\cos(\Omega t+\alpha)$

稳态时的受迫振动按谐振动的规律变化。

稳态时振动频率： Ω ——外加强迫力的角频率

将稳态解带入方程可得：

振幅： $$A_P=\frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}$$

相位： $$\tan\alpha=-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\qquad -\pi\le\alpha\le 0$$

（*）受迫振动稳定解振幅与初相位推导

$$x(t) = A_P \cos(\Omega t + \alpha) \quad \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t}$$

$$\ddot{x} = -A_p\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha)$$

$$\dot{x} = -A_p\Omega\sin(\Omega t + \alpha)$$

$$A_p[(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t + \alpha) - 2\beta\Omega\sin(\Omega t + \alpha)] = f_0 \cos \Omega t$$

$\cos(\Omega t)$ 系数整理 $\quad A_p[(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos(\alpha) - 2\beta\Omega\sin(\alpha)] = f_0$

$\sin(\Omega t)$ 系数整理 $\quad A_p[(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin(\alpha) - 2\beta\Omega\cos(\alpha)] = 0$

则有

$$\tan\alpha = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$A_P = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

稳定受迫振动与谐振动的区别

形式一致，都是周期性运动，但本质不同。

a). 受力不同；

谐振动 ---- $\vec{F}$　　　　受迫振动 ---$\vec{F}+\vec{f}+\vec{F}_C$

b). 振动的三个特征量不同；

谐振动 $\begin{cases} \omega_0 & \text{---系统固有} \\ A & \text{---由初始} \\ \varphi & \text{条件决定} \end{cases}$

受迫振动 $\begin{cases} \Omega & \text{---外界驱动} \\ A_P & \text{---由阻尼，驱动} \\ \alpha & \text{等多种因素决定} \end{cases}$

c). 能量不同。

谐振动能量守恒；

受迫振动中阻尼消耗能量，外力做功增加能量，且稳态时两者达到平衡。

共振

在一定条件下，受迫振动的振幅达到极大值，振动剧烈的现象。

振幅：

$$A_P = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

计算函数 $f(\Omega^2) = (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2$ **极小值的位置。**

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

——共振频率

$$A_R = A_{\mathrm{Max}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

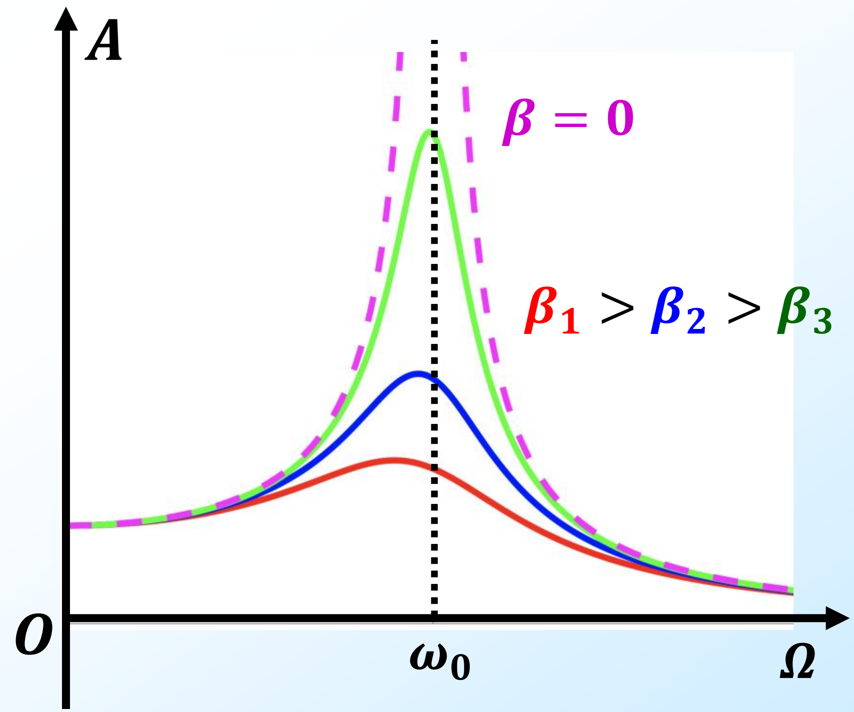
共振

$$\begin{cases} \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} & \text{——共振频率} \\ A_R = A_{\text{Max}} = \dfrac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \end{cases}$$

若$\boldsymbol{\beta} \ll \boldsymbol{\omega_0}$，则

$$\Omega_R \approx \omega_0 - \frac{\beta^2}{\omega_0} \qquad A_R \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$$

若$\boldsymbol{\beta} \to \mathbf{0}$，则$\boldsymbol{A} \to \infty$



无法形成稳定的受迫振动。

实际中，$\boldsymbol{\beta}$不可能为零。

共振

当$\beta \to 0$时，共振发生在固有频率处，称为尖锐共振。

$$\Omega_R \approx \omega_0 \quad A_R \to \infty \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} A_P = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\Omega^2}} \\ \tan\alpha = -\dfrac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} \quad -\pi \le \alpha \le 0 \end{cases}$$

共振时受迫振动的相位落后于强迫力相位$\pi/2$，即共振速度与强迫力同相位，外力始终对系统做正功。

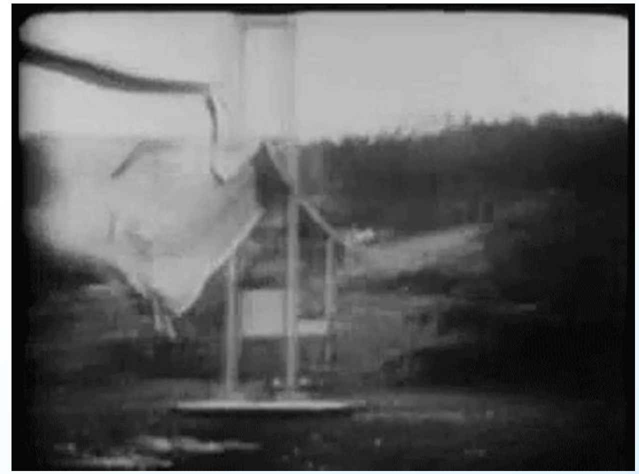
对能量增大有最大的效率，这正是增幅急剧增大的原因。

但增幅增大的同时，阻力的功率也随之增大，最后与强迫力的功率相抵。从而使增幅保持恒定。

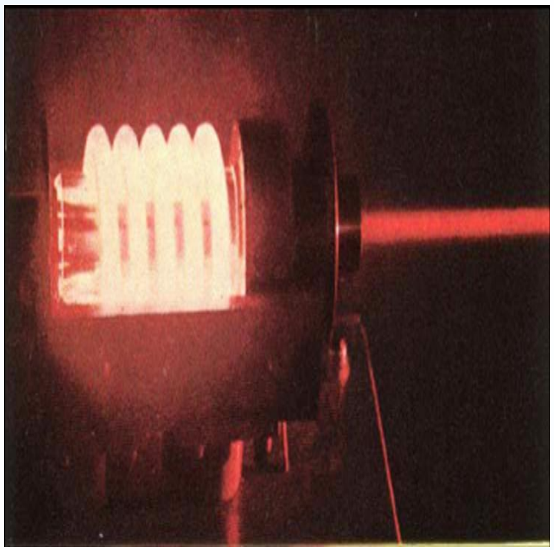
从能量的观点看，在共振时，能量转变为共振质点的能量，叫做共振吸收。

生活中共振的例子

塔科马大桥



生活中共振的例子



激光
核磁共振

作业：　Chap.11 —T9、T10、T11、T12

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 通过学习通提交作业。
4. 作业缺交三分之一及以上者按规定不能参加考试。