第7章 电感、电容及动态电路

7.1 广义函数 Singularity Functions

7.2 电容 Capacitor

7.3 电感 Inductor

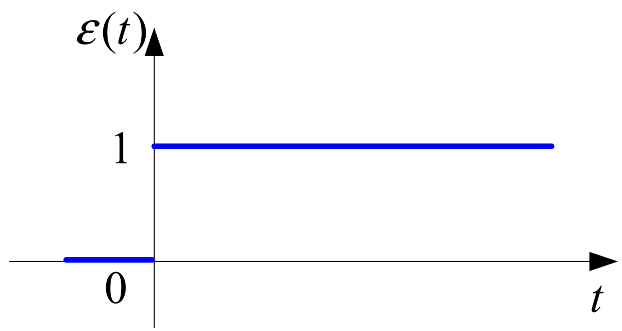
7.4 动态电路的暂态分析概述

7.2 单位阶跃函数和单位冲激函数

7.2.1 单位阶跃函数 Unit step function

1、定义

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

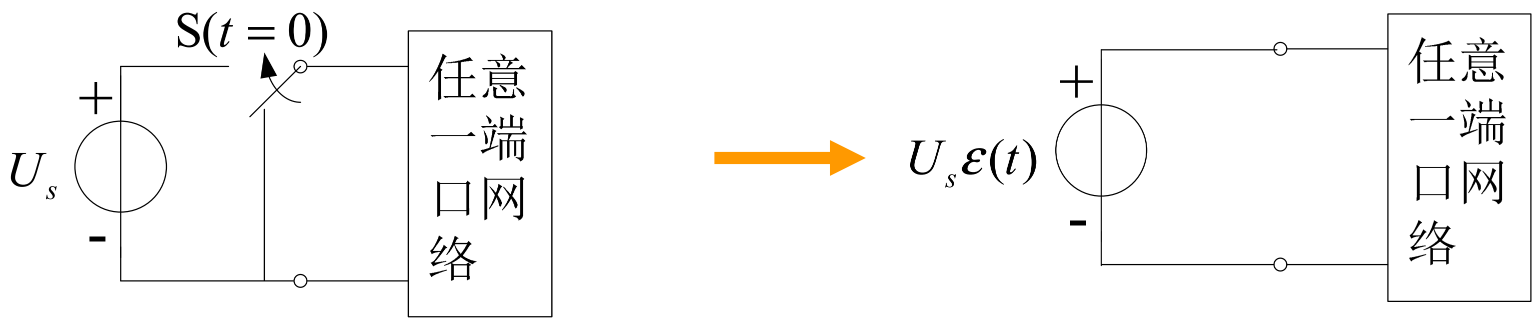


函数在t=0时刻发生跳变，在t=0时左右极限为：

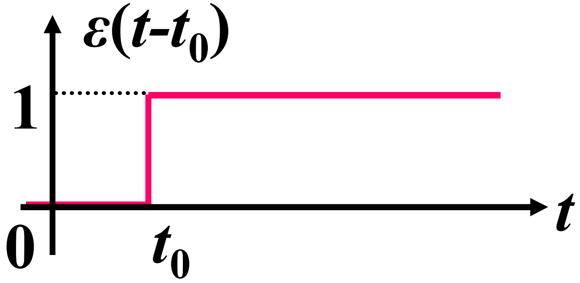
$$\varepsilon(0_-)=\lim_{t\to 0_-}\varepsilon(t)=0 \qquad \varepsilon(0_+)=\lim_{t\to 0_+}\varepsilon(t)=1 \qquad \Delta\varepsilon(0)=\varepsilon(0_+)-\varepsilon(0_-)=1$$

称ε(t)为单位阶跃函数。

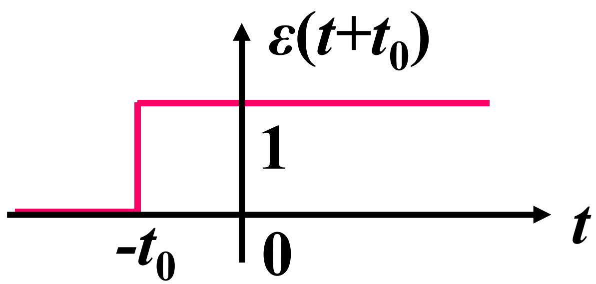
2. 用单位阶跃函数表示电压源在时刻t=0作用于电网络，取代开关：



3. 单位阶跃函数的延迟

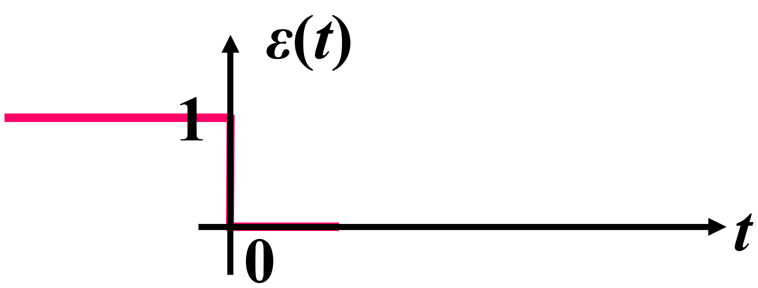


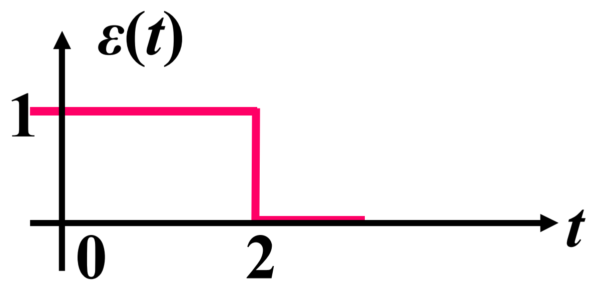
$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$



$$\varepsilon(t+t_0)=\begin{cases}0 & (t<-t_0)\\ 1 & (t>-t_0)\end{cases}$$

例： ε (-t)　　　　　　　　例 ε (-t+2)





4. 单位阶跃函数的主要功能

(1) 定义时间域

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ \sin\omega t & (t>0)\end{cases} \quad \rightarrow f(t)=\varepsilon(t)\sin\omega t$$

将一个分段函数用ε(t)表示其定义域写成一个函数。

(2) 截取函数

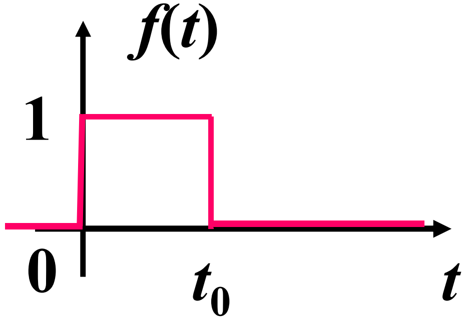
$$f(t)=\mathrm{A}e^{-2t} \qquad f(t)=\mathrm{A}e^{-2t}\varepsilon(t)\text{表示}t>0\text{的波形}$$

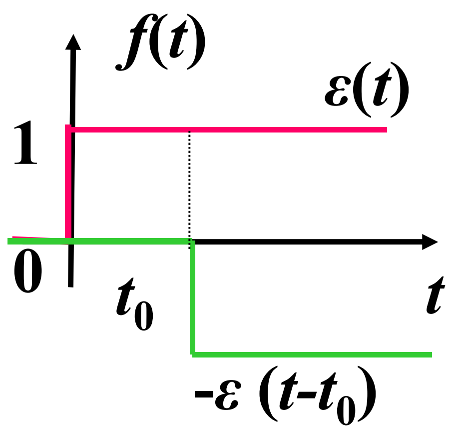
（3）构成闸门函数

$f(t) = \sin\omega t$在$0 < t < 2\pi$时的波形 $\rightarrow f(t) = \sin\omega t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - 2\pi)]$

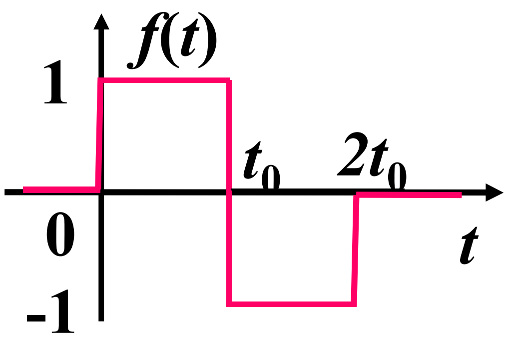
（4）由单位阶跃函数可组成复杂的信号

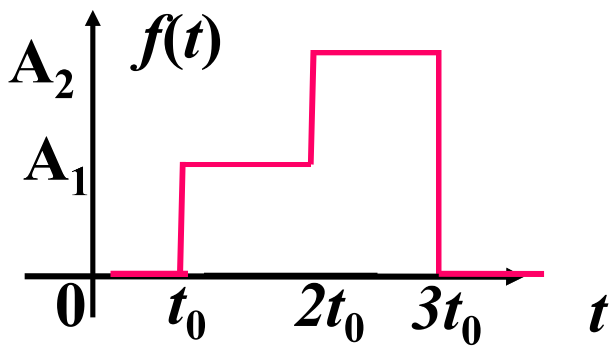
例





$$f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)$$





$$f(t) = \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t - t_0) + \varepsilon(t - 2t_0)$$

$$f(t) = A_1\varepsilon(t - t_0) + (A_2 - A_1)\varepsilon(t - 2t_0) - A_2\varepsilon(t - 3t_0)$$

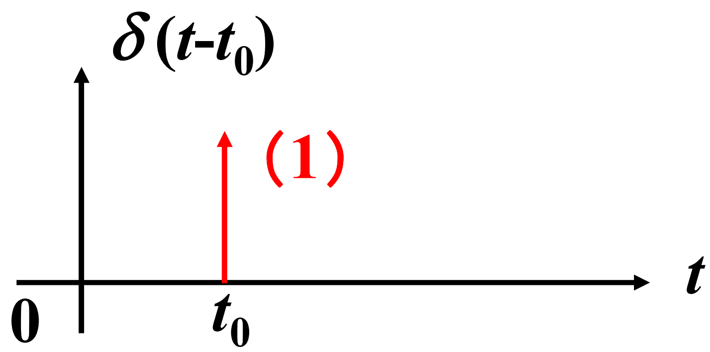
7.2.2 单位冲激函数δ(t)

1、定义

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases}$$

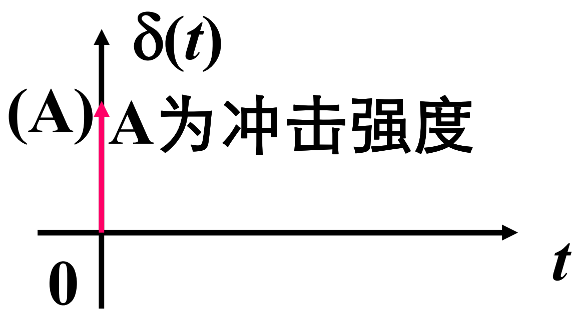
特征：单位冲激函数δ(t)仅在t=0取值，且其强度为1。

单位冲激函数的延迟$\delta(t-t_0)$



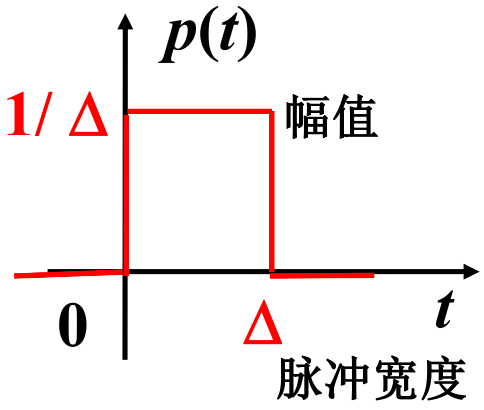
$$\begin{cases}\delta(t-t_0)=0 \quad (t\neq t_0)\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1\end{cases}$$

A与δ(t)的乘积称为冲激函数



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{A}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\mathrm{A}\delta(t)\mathrm{d}t=\mathrm{A}$$

2、单位冲激函数δ(t)与单位阶跃函数ε(t) 之间的关系



$$p_{\Delta}(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)]$$

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}p_{\Delta}(t)$$

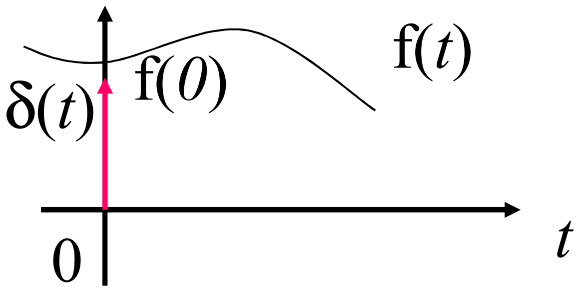
$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)]$$

$$=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

3、单位冲激函数δ(t)的重要性质

性质 1： $\delta(t)$所与任意连续函数$f(t)$的相乘特性

设$f(t)$为任意连续函数，则 $$f(t)\cdot\delta(t)=f(0)\delta(t)$$



$$\Rightarrow t\delta(t)=0$$

$$\Rightarrow f(t-t_0)\delta(t)$$
$$=f(t-t_0)\big|_{t=0}\delta(t)$$
$$=f(-t_0)\delta(t)$$

$$\Rightarrow f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

性质2： 筛分性

设*f*(t)为任意连续函数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = f(0)$$

同理有： $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

例 $\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t + t)\delta(t-\frac{\pi}{6})\mathrm{d}t = \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6} = 1.02$

用分段函数表示波形

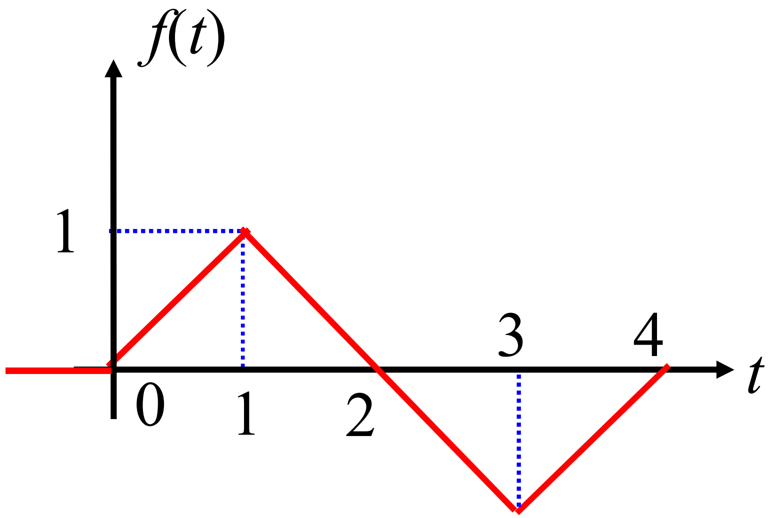
- 分段表示

　　用分段表示法对所有t不能将波形用一个完整的数学式子表达出来，因而不便进行数学运算。

- 分段叠加表示

　　将各段波形用闸门函数去截取。然后再相加从而写出完整的函数表达式。

例：



$$f(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]-(t-2)[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)]$$

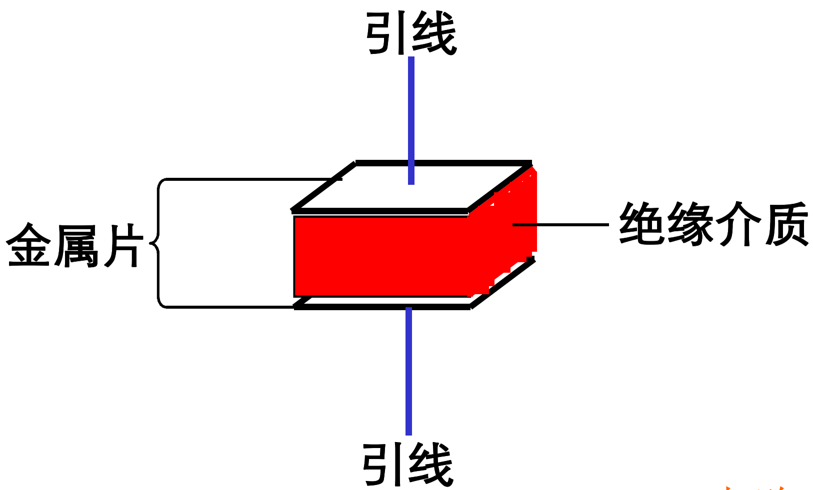
$$+(t-4)[\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-4)]$$

7.3 电容 （capacitor）

瓷片电容

电解电容

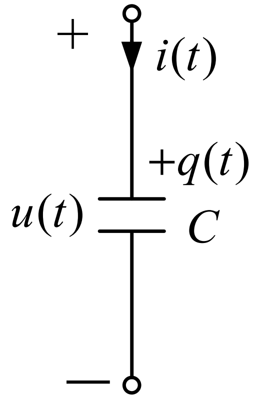
电力电容器

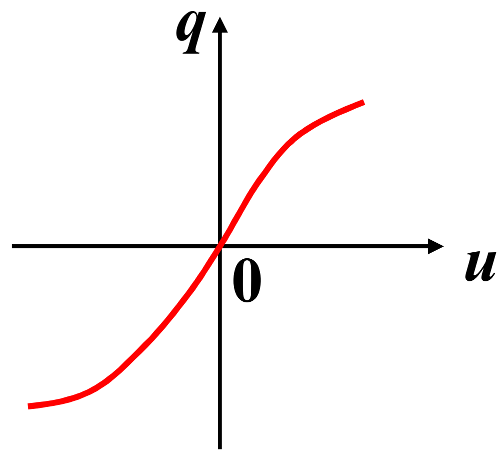


电容器的主要电磁性质

7.3.1 电容元件的q-u特性

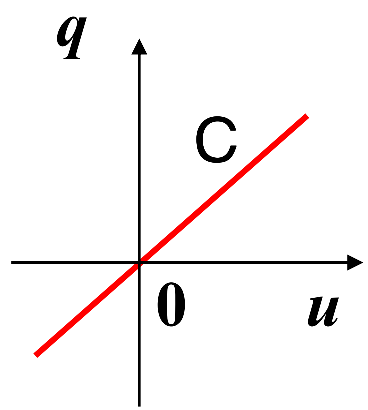
电路符号





线性非时变电容元件： q-u 特性是过原点且不随时间变化的直线

特性方程为： $q(t) = Cu(t)$

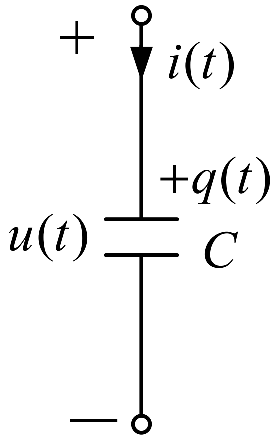


电容 C 的单位：F (法) (Farad，法拉)

常用μF，nF，pF等表示。

7.3.2 电容伏安关系

$$q(t)=Cu(t)$$



在电流、电压参考方向一致的条件下:

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \boxed{i(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}}$$

或

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\mathrm{d}t=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(t)dt+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt$$

$$\longrightarrow \boxed{u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\mathrm{d}t} \longrightarrow \boxed{u(t)=u(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(t)\mathrm{d}t}$$

- t_0表示初始时刻，$U(t_0)$为电容电压的初始电压值。
- 电容电压等于初始值$U(t_0)$与在时间间隔[t_0，t]内电容电流积分所决定的电容电压之和。

7.3.3 电容的重要性质

1 直流稳态性能

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}}$$

- 电容在直流电路中相当于**开路**，电流为0，电压恒定；
- *i*的大小与 *u* 的**变化率成正比**，与 *u* 的大小无关；

2.记忆特性

$$\boxed{u(t) = u(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(t)\mathrm{d}t}$$

在任意时刻t，电容电压不仅与该时刻电流有关，而且还与i以前的电流历史状况有关。这一性质称为**记忆特性**。

3. 电容电压的连续性 $u(t)=u(t_{0-})+\dfrac{1}{C}\int_{t_{0-}}^{t}i(t)\mathrm{d}t$

- 电容电流在t_0处为有限值，电容电压就在t_0处连续
- 电容电流在t_0处为无限大，电容电压就在t_0处不连续

讨论 $t=t_{0-}$时,电容电压的连续性

$$u(t_{0+})=u(t_{0-})+\frac{1}{C}\int_{t_{0-}}^{t_{0+}}i(t)\mathrm{d}t$$

i有界，则＝ 0

$$u(t_{0+})=u(t_{0-})$$

连续

$$u(t_{0+})=u(t_{0-})+\frac{1}{C}\int_{t_{0-}}^{t_{0+}}\delta(t\text{-}t_0)dt$$

$$u(t_{0+})=u(t_{0-})+\frac{1}{C}$$

不连续

7.3.4 储能特性

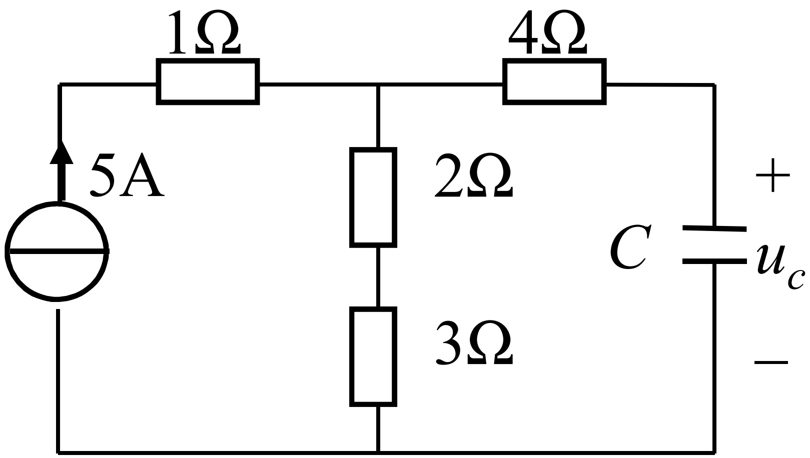
$$p(t)=u(t)i(t)\ \ =Cu(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

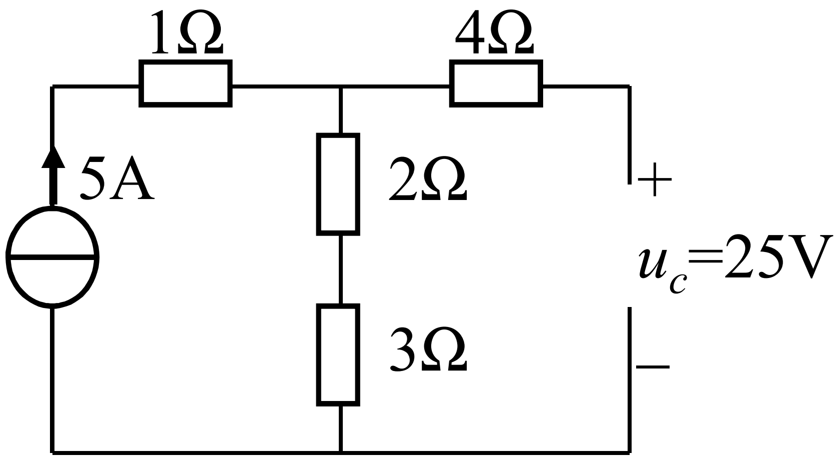
$$w(t)=\int_{-\infty}^{t}p(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t}Cu(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}Cu^2(t)-\frac{1}{2}Cu^2(-\infty)$$

$$\boxed{w(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)}$$

- 在任一时刻t，电容的能量决定于该时刻的电容电压值。
- 电容的储能与电容电流无关，当电容的瞬时电流为0，只要电压不为0，能量就不为0。
- w恒大于0，电容并不产生向外的能量，它是一个无源元件。
- 电容在功率为负时，输出能量为以前吸收的能量。即它能将吸收的能量储存起来，在一定的时刻又释放出去，故电容又称储能元件。电容也是非耗能元件。

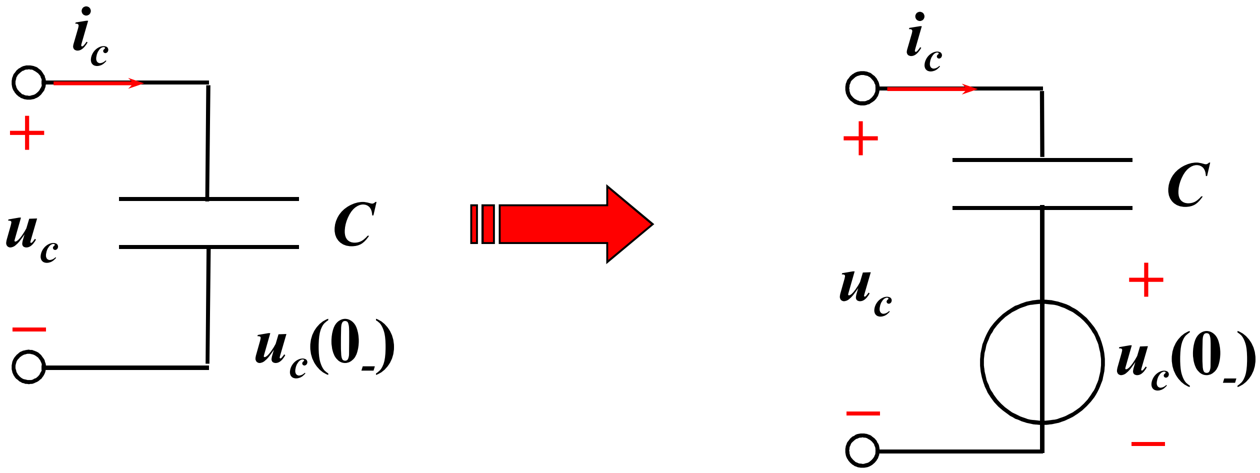
【练习】.计算电容电压





7.3.5 线性时不变电容元件的串联、并联与混联

非零初始电压电容元件的等效电路



$$u_C(t) = u_C(0_-) + \int_{0_-}^{t} \frac{1}{C} i dt$$

可用一个电压源和一个无初始值的电容串联代替。

7.3.5 线性时不变电容元件的串联、并联与混联

1、 电容串联 (Capacitor in Series)

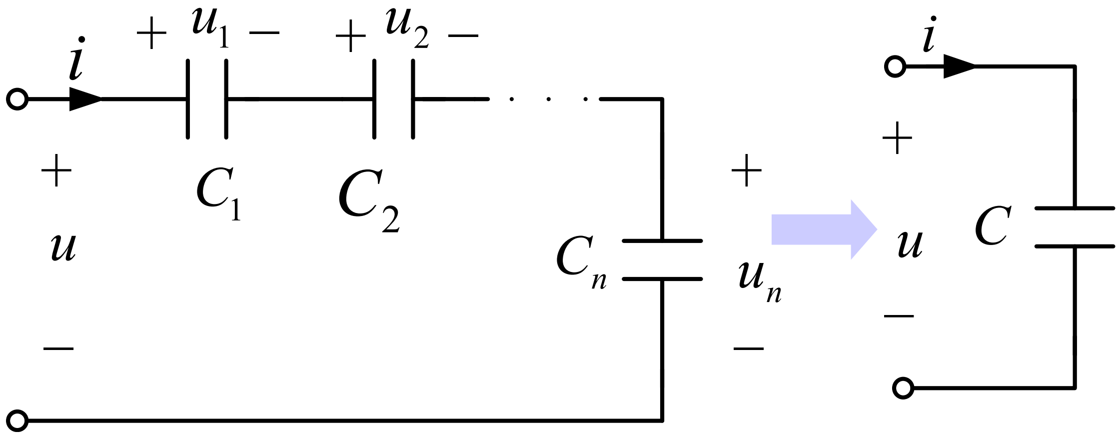
$$u_k(0_+) = u_k(0_-)$$

$$u_k = u_k(0_+) + \frac{1}{C_k}\int_{0_+}^{t} i\mathrm{d}t$$

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_k(0_+) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{C_k}\int_{0_+}^{t} i\mathrm{d}t\right)$$

$$= u(0_+) + \frac{1}{C}\int_{0_+}^{t} i\mathrm{d}t$$



$$u(0_+) = \sum_{k=1}^{n} u_k(0_+) = \sum_{k=1}^{n} u_k(0_-)$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

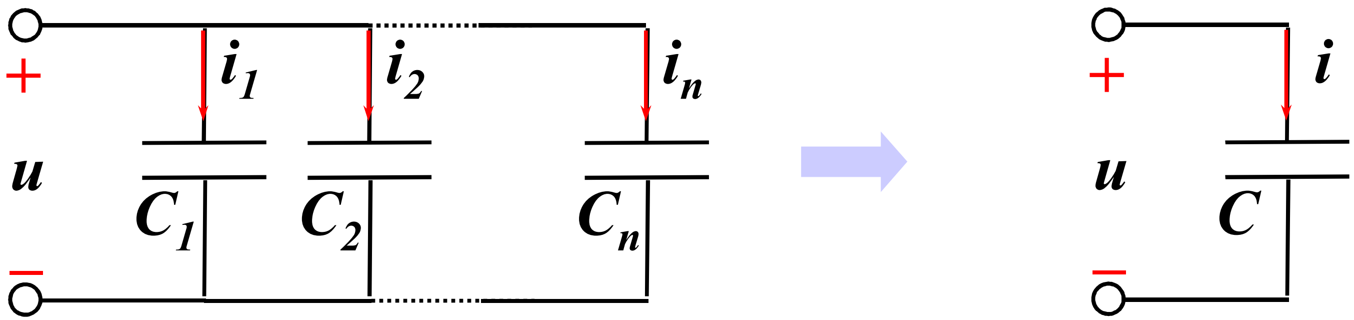
初始值为0的电容串联，各电容按电容量倒数正比分压。

若 $u_k(0_-) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$

$$u_k = \frac{1}{C_k}\int_{0_+}^{t} i\mathrm{d}t \qquad u = \frac{1}{C}\int_{0_+}^{t} i\mathrm{d}t$$

$$u_k = \frac{1/C_k}{1/C} u$$

2、 电容并联 (Capacitor in Parallel)



情况 1： 各电容初始电压均为零

根据KCL可以推出:

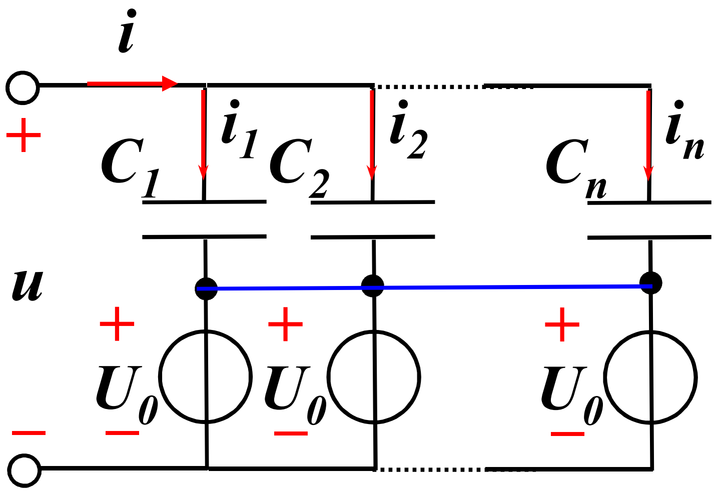
$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

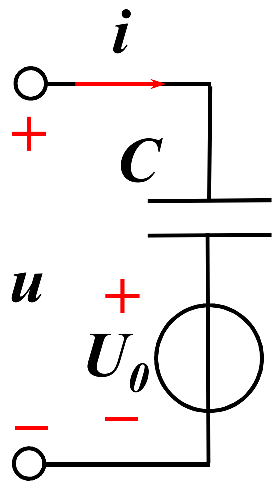
$$= C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} + \cdots + C_n \frac{du}{dt}$$

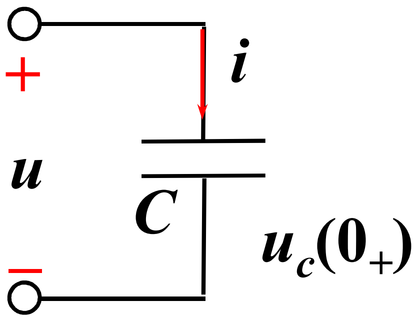
$$= C \frac{du}{dt} \qquad C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

2、 电容并联 (Capacitor in Parallel)

情况2： $u_{c1}(0_-) = u_{c2}(0_-) = \cdots = U_0 \neq 0$





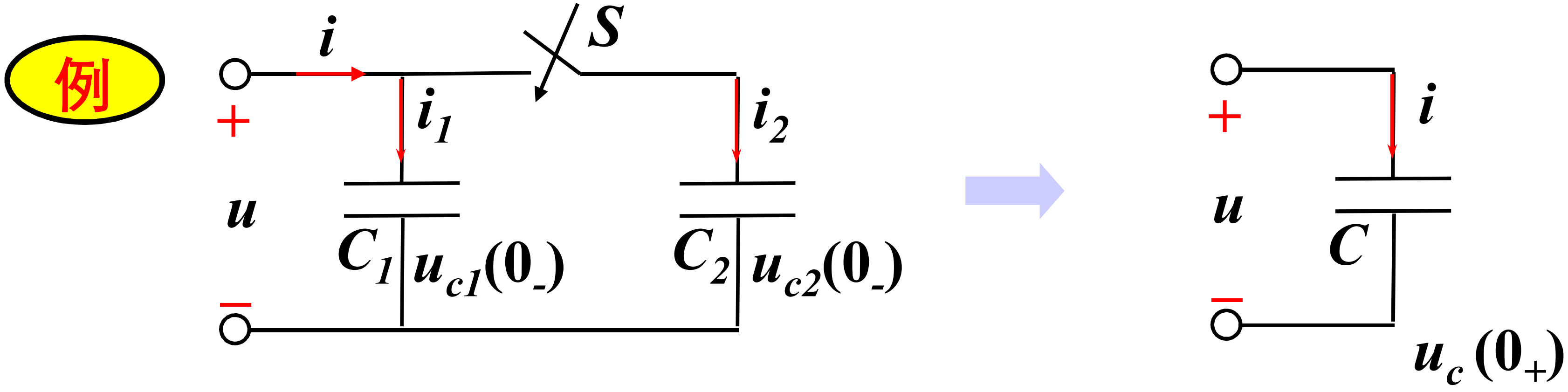


$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

2、 电容并联 (Capacitor in Parallel)

* 情况3：各初始电压不相等



求：开关 K 闭后的并联等效电路。

采用方法：电荷守恒

即：$q_C(0_-) = q_C(0_+)$

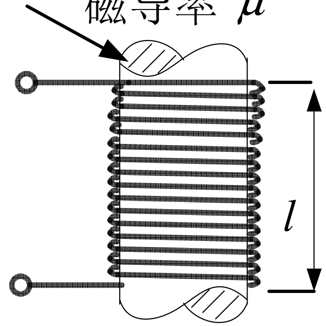
$$C_1u_{C1}(0_-) + C_2u_{C2}(0_-) = C_1u_C(0_+) + C_2u_C(0_+)$$

$$u_C(0_+) = \frac{C_1u_{C1}(0_-) + C_2u_{C2}(0_-)}{C_1 + C_2}$$

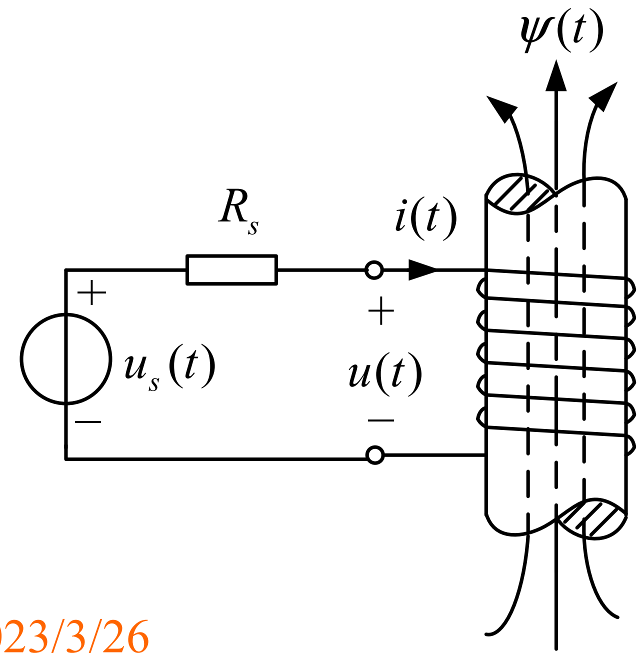
7.4 电感元件（inductor）

螺线管电感器

螺线环电感器

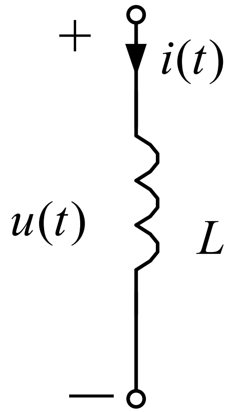


电感器结构



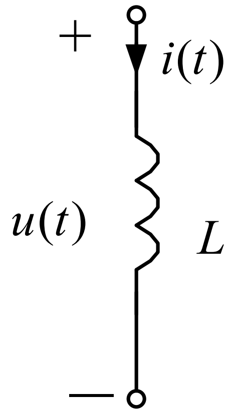
线性非时变电感

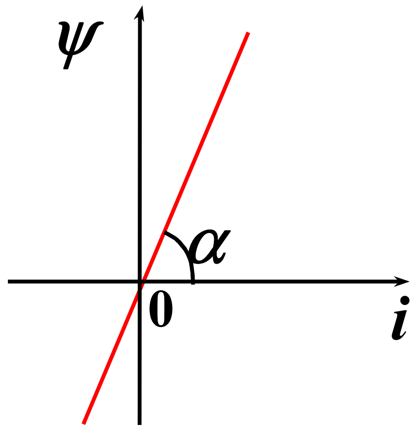
$$\psi(t) = Li(t)$$



7.4.1 电感元件的特性

线性非时变电感元件





韦安（ψ~i）特性

一. 特性方程

线性时不变电感元件的特性曲线性是一条过原点且不随时间变化的直线。

$$\psi = Li$$

ψ 为电感线圈的磁链

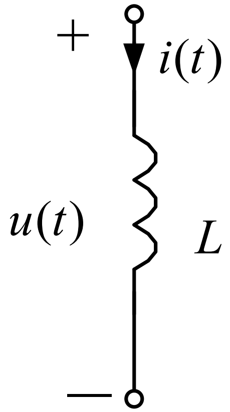
L 称为自感系数

L 的单位名称：亨（利）

符号：H (Henry）

7.4.2 电感的伏安关系：

$\psi = Li$



在电流、电压参考方向一致的条件下：

$$u = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \rightarrow \boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}}$$

或

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} u\mathrm{d}t + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u\mathrm{d}t$$

$$\rightarrow \boxed{i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)\mathrm{d}t} \rightarrow \boxed{i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u(t)\mathrm{d}t}$$

- 电感电压与电感电流的变化率成正比，表明仅当电流变动时才有电压，因此电感元件是一种动态元件。
- 在任意时刻t，电感电流不仅与该时刻电压有关，而且还与t以前的电流历史状况有关。因此电感元件是一种记忆元件。

7.4.3 电感的重要性质

$$\boxed{u(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}}$$

1 电感的直流稳态性质

$$i_L(t)=\text{常数}\rightarrow u_L(t)=0\rightarrow\text{短路}$$

电感在直流电路中相当于短路。

2、电感电流的连续性

$$i(t)=i(t_{0-})+\frac{1}{L}\int_{t_{0-}}^{t}u(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{u(t_0)\neq\infty} i(t_{0-})=i(t_{0+})$$

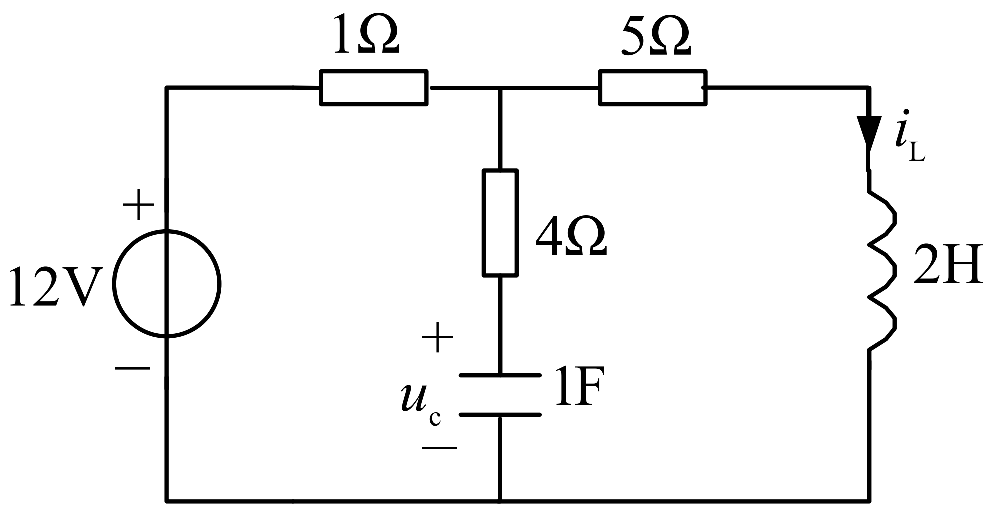
- 电感电压在t_0处为有限值，电感电流就在t_0处连续
- 电感电压在t_0处为无限大，电感电流就在t_0处不连续

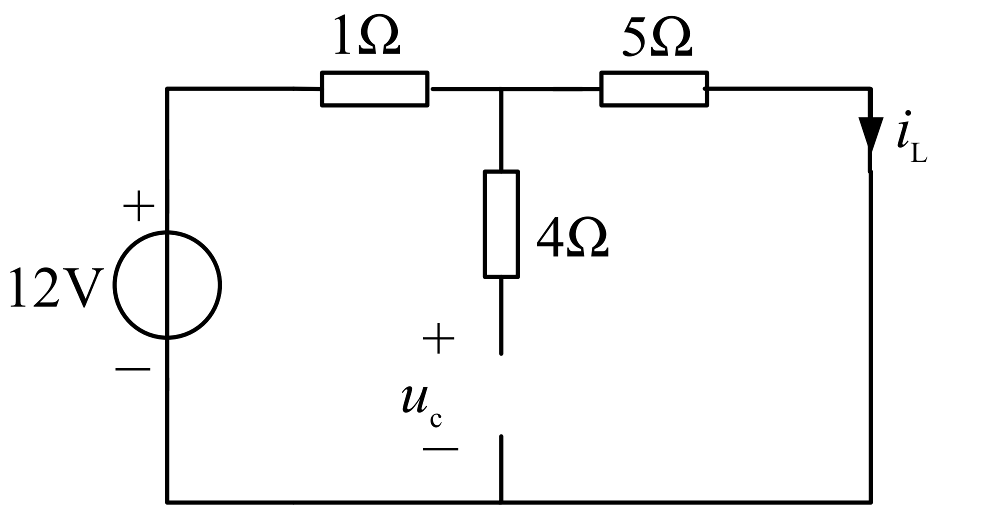
7.4.4储能

$$p(t)=u(t)i(t)\;=Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$w(t)=\int_{-\infty}^{t}p(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t}Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}Li^2(t)-\frac{1}{2}Li^2(-\infty)\qquad\boxed{w(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)}$$

【练习】. 计算u_C和i_L



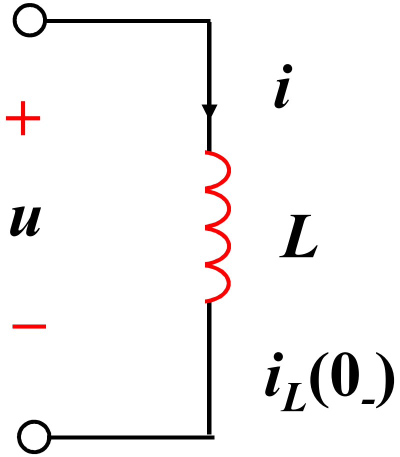


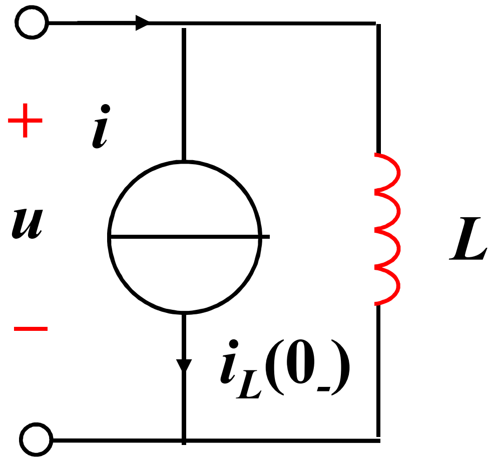
$$i_L = \frac{12}{1+5} = 2\text{A}$$

$$u_c = \frac{5}{1+5} \times 12 = 10\text{V}$$

7.4.5 电感的串联与并联

非零初始电流电感元件的等效电路



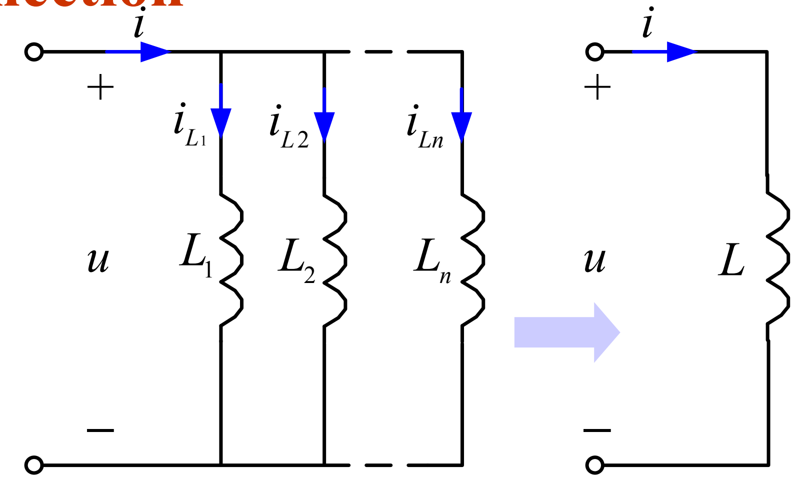


$$i_L(t) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{t} u\,dt$$

可用一个电流源和一个无初始值的电感并联代替。

7.4.5 电感的串联与并联

1. 电感的联接 — 并联 Parallel connection



$$i_k(0_+) = i_k(0_-) \quad i_k = i_k(0_+) + \frac{1}{L_k}\int_{0_+}^{t} u\mathrm{d}t$$

$$i = \sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n}\left[i_k(0_+) + \frac{1}{L_k}\int_{0_+}^{t} u\mathrm{d}t \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} i_k(0_+) + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L_k}\right)\int_{0_+}^{t} u\mathrm{d}t$$

$$= i(0_+) + \frac{1}{L}\int_{0_+}^{t} u\mathrm{d}t$$

$$i(0_+) = \sum_{k=1}^{n} i_k(0_+) = \sum_{k=1}^{n} i_k(0_-)$$

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L_k}$$

初始值为0的电感并联，各电感按电感量倒数正比分流。

$$i_k(0_-) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots\cdots,n)$$

$$i_k = \frac{1}{L_K}\int_{0_+}^{t} u\mathrm{d}t \quad (\mathrm{k} = 1,2,\cdots,n)$$

$$i = \frac{1}{L}\int_{0_+}^{t} u\mathrm{d}t$$

$$\boxed{i_k = \frac{1/L_k}{1/L}\, i}$$

7.4.5 电感的串联与并联

2. 电感的联接 —串联 Series connection

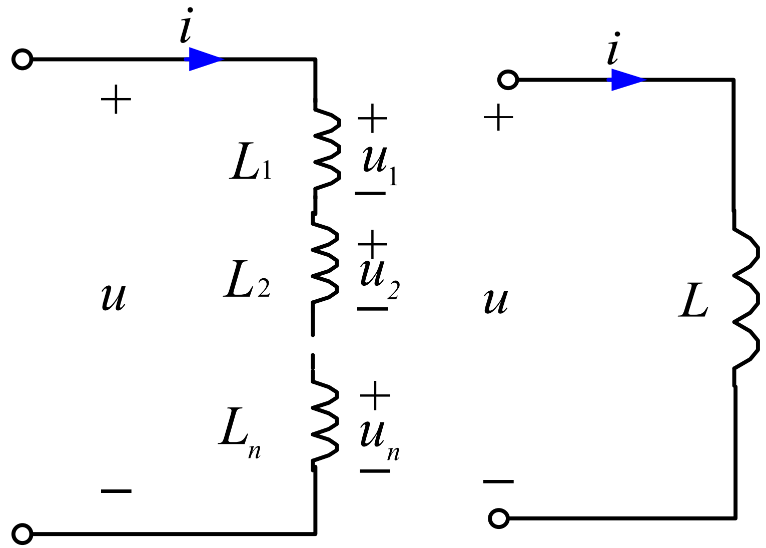
$i_k(0_-)$都相等时:

$$u=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}(L_k\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t})$$

$$=(\sum_{k=1}^{n}L_k)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{L=\sum_{k=1}^{n}L_k}$$

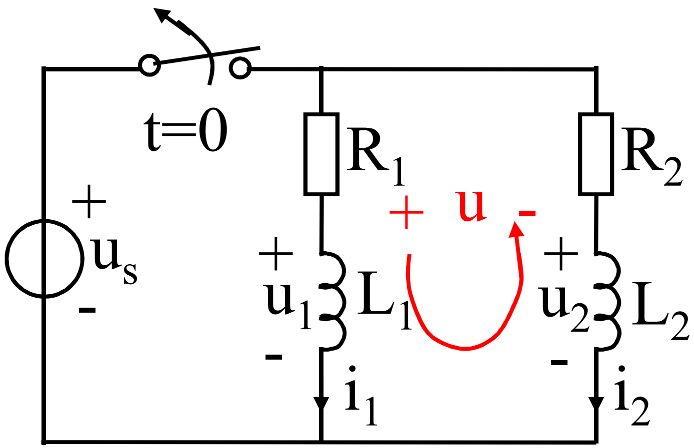
$$\boxed{i(0_+)=i_k(0_-)}$$



7.4.5 电感的串联与并联

2. 电感的联接 —串联 Series connection

*（自学）情况2：电流不相等电感的串联



$i_1(0-) \neq i_2(0-) \qquad i_1(0_+) = -\,i_2(0_+)$

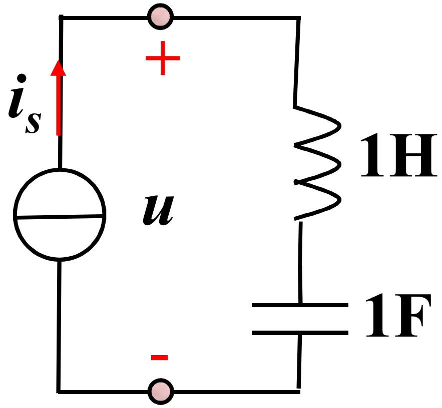
$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k(0_+) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(0_-)$$

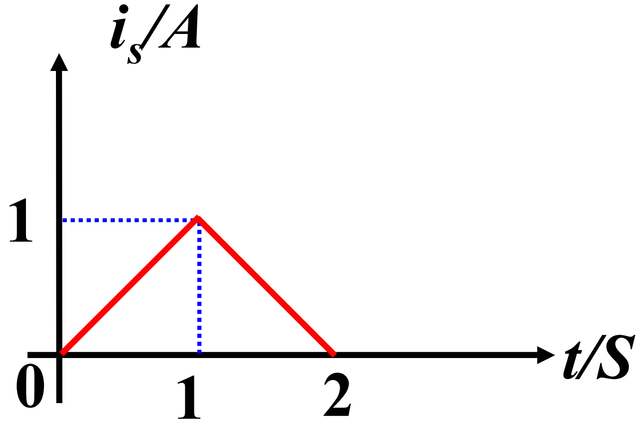
（n为回路包含电感元件的总数）

磁链守恒原理：在集中参数电路中，对包含电感元件的任一回路，若各非电感支路的电压都没有冲击电压产生，则在此回路上的电感的磁通链总量不能突变。

$$(L_1 + L_2)i_1(0_+) = L_1 i_1(0_-) - L_2 i_2(0_-) \qquad i_1(0_+) = \frac{L_1 i_1(0_-) - L_2 i_2(0_-)}{(L_1 + L_2)}$$

【课下练习求u】.





$$i_s = t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]-(t-2)[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]$$

$$=0-\delta(t-1)\ -(1-2)\delta(t-1)+0$$

=0

$$\frac{di_s}{dt} = \varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)+t[\delta(t)-\delta(t-1)]$$

$$-\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)-(t-2)[\delta(t-1)-\delta(t-2)] = \varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)$$

$$\int_{-\infty}^{t} i_s dt = \int_{-\infty}^{t}[t\varepsilon(t)-t\varepsilon(t-1)-(t-2)\varepsilon(t-1)+(t-2)\varepsilon(t-2)]dt$$

$$=(\int_0^t tdt)\varepsilon(t)-[\int_1^t (t-1)dt]\varepsilon(t-1)-[\int_1^t (t-2)dt]\varepsilon(t-1)+[\int_2^t (t-2)dt]\varepsilon(t-2)$$

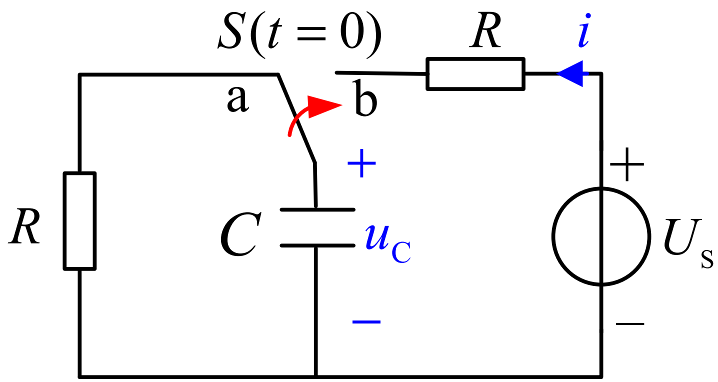
$$=\frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)-(\frac{1}{2}t^2-t)\Big|_1^t\varepsilon(t-1)-(\frac{1}{2}t^2-2t)\Big|_1^t\varepsilon(t-1)+\frac{1}{2}(t-2)^2\varepsilon(t-2)$$

$$=\frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)-(t-1)(t-2)\varepsilon(t-1)+\frac{1}{2}(t-2)^2\varepsilon(t-2)$$

$$u = u_L + u_C = \frac{di_s}{dt} + \int_{-\infty}^{t} i_s dt$$

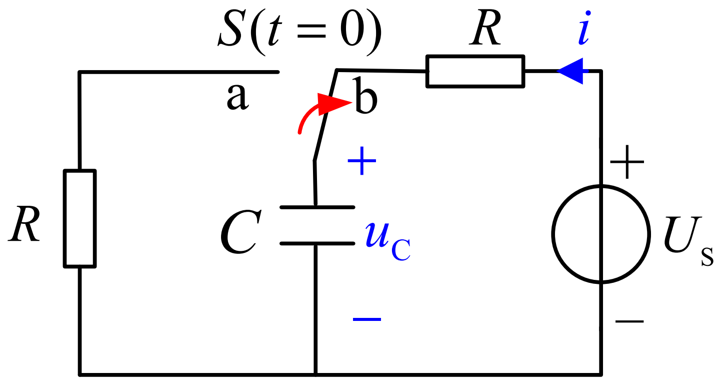
7.5 动态电路的暂态分析概述

1 暂态过程的概念：



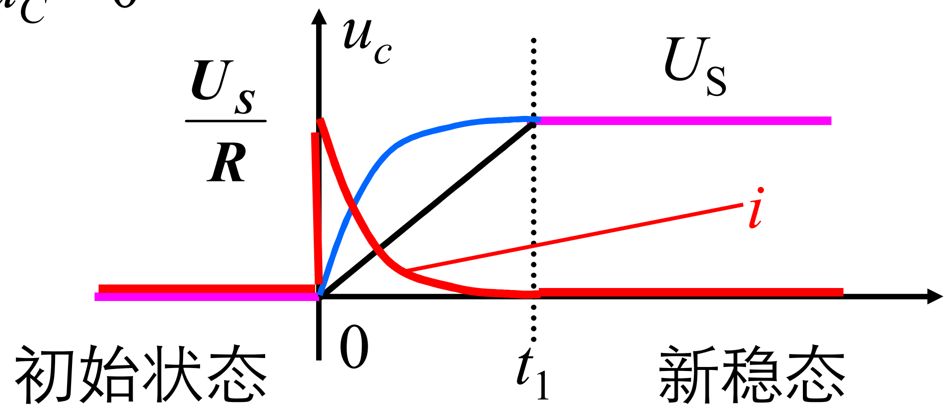
$t<0$时,

$i=0$, $u_C=0$



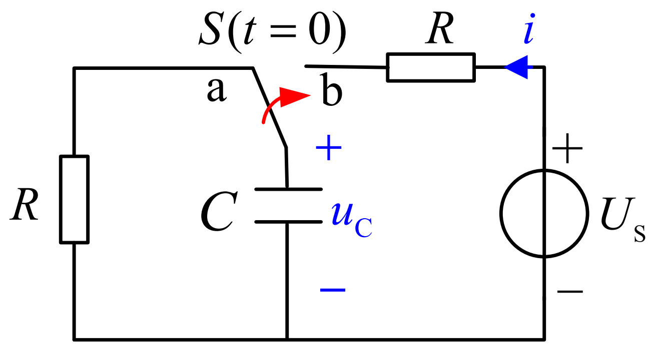
$t>0$ 后很长时间

$i=0$, $u_C=U_s$



过渡状态（暂态）

2 暂态过程产生的原因：



1、电路内部含有储能元件 L 、C

能量的储存和释放都需要一定的时间来完成

2、电路结构、状态发生变化

$$\underbrace{\text{支路接入或断开；参数变化}}_{\text{换路}}$$

电路中的 u、i在过渡过程期间，从“旧稳态”进入“新稳态”，此时u、i 都处于暂时的不稳定状态，

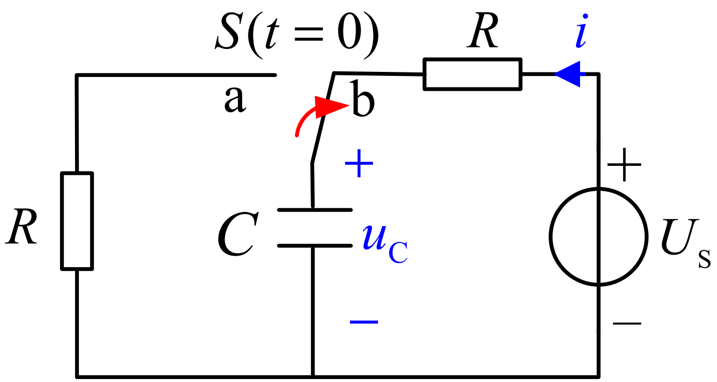
所以过渡过程又称为电路的暂态过程。

7.5.1 动态电路的微分方程 Differential equation

暂态过程分析：根据基尔霍夫定律，建立关于待求量（输出量）和电路中独立电源（输入量）的关系，称为输入输出方程；

方程为积分或者微分关系，则称为微分方程；

如果该方程为n阶微分方程，则称为n阶电路。



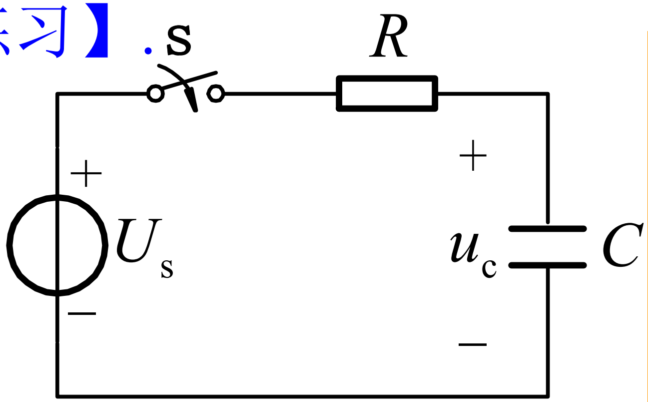
$$Ri + u_C = U_s \qquad (t > 0)$$

$$\because i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_S & (t > 0) \\ u_C(0_+) \end{cases}$$

7.5.1 动态电路的微分方程 Differential equation

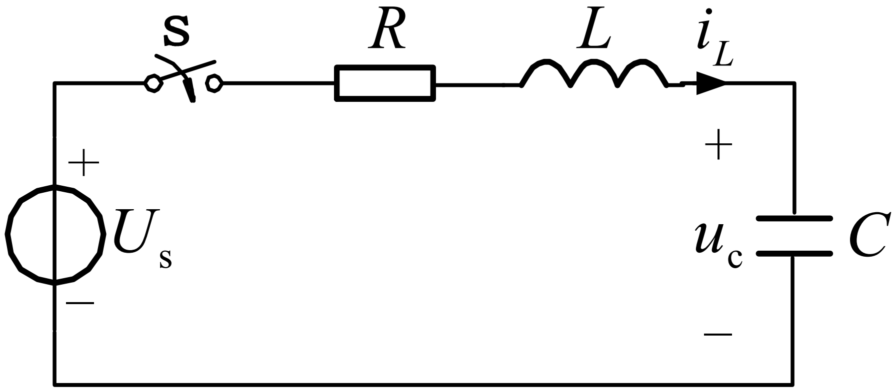
【练习】



$$Ri_C + u_C = U_s \qquad t>0$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_s \qquad t>0$$

- 不同的变量，相同的齐次微分方程！
- 微分方程的阶数＝电路的阶数！
- 电路的阶数＝独立动态元件个数



$$Ri_L + u_L + u_C = U_s \qquad t>0$$

$$Ri_L + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_L \mathrm{d}t = U_s \quad t>0$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = 0$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) + u_C = U_s \qquad t>0$$

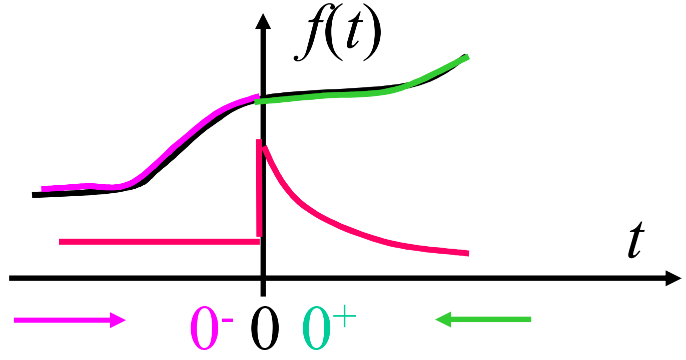
$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_s$$

7.5.3 初始值 (Initial condition)

电量原始值和初始值的概念

t = 0+与t = 0-的概念

换路在 t=0时刻进行



0^- 换路前一瞬间，原始值

0^+ 换路后一瞬间，初始值

$$f(0^-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t) \qquad f(0^+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$

初始值为 $t = 0^+$时u，i 及其各阶导数的值

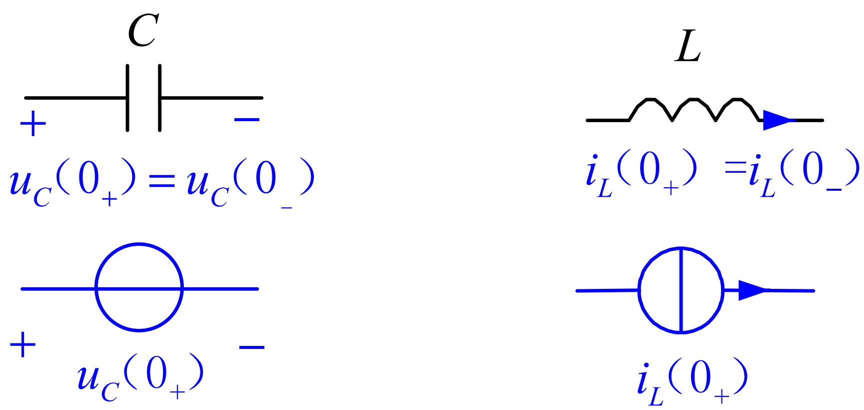
一阶：$f(0^+)$；二阶：$f(0^+)$，$f'(0^+)$；

N阶：$f(0^+)$，$f'(0^+)$ … $f^{(n-1)}(0^+)$。

7.5.4 换路规律：初始值的计算

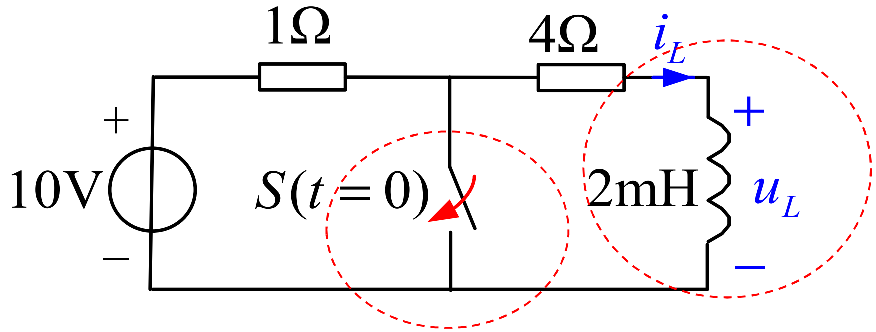
确定初始值的步骤

- 确定电路t=0 _ 时刻的$u_C(0_-)$和$i_L(0_-)$；
- 电容电压连续性：$u_C(0_+)=u_C(0_-)$；电感电流连续性：$i_L(0_+)=i_L(0_-)$.
- 画出0_+时刻等值电路：应用替代定理，电容用电压源代替，电感用电流源替代；



- 由0_+电路求所需各变量的0_+值。

【例1】. $t=0$时闭合开关S，求 $u_L(0_+)$ ？



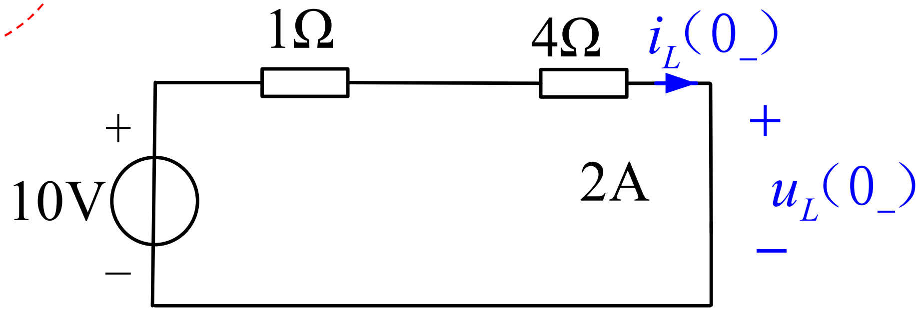
$\cancel{由u_L(0_-)=0}$

$\cancel{\Rightarrow u_L(0_+)=u_L(0_-)=0}$

解：

（1） 由0₋电路求 $i_L(0_-)$

$i_L(0_-)=10/(1+4)=2A$



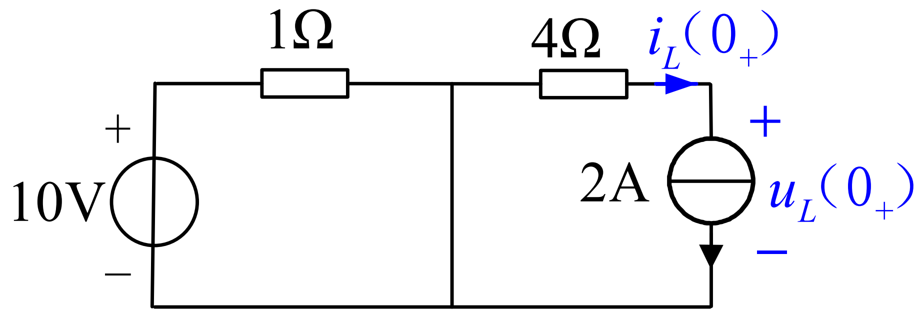
0_-等效电路

（2） 由电感电流的连续性得：

$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2A$

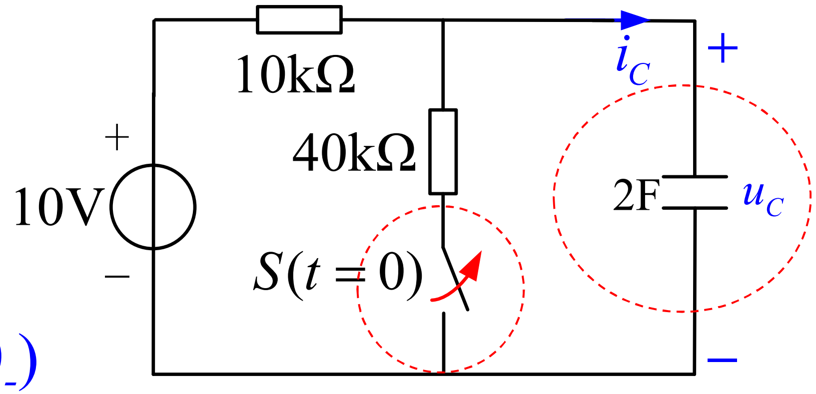
（3） $t=0_+$等效电路求$u_L(0_+)$：

$$u_L(0_+)=-2\times 4=-8\,V$$



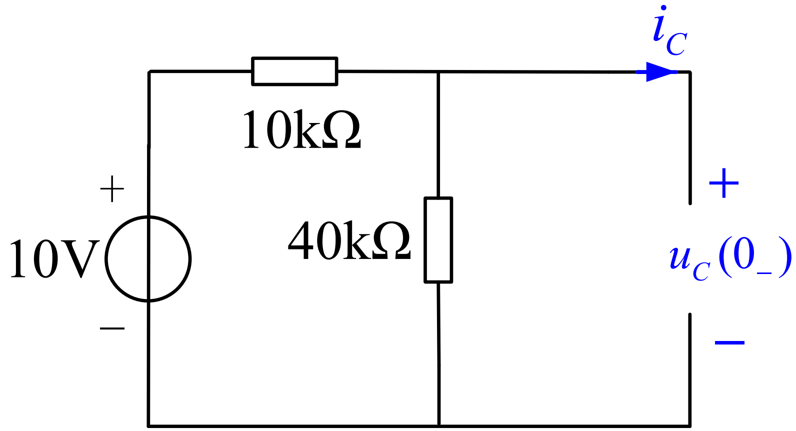
0_+等效电路

【例2】.求 $i_C(0_+)$?



(1) 由0_电路求 $u_C(0_-)$

$$u_C(0_-)=8\text{V}$$



0_-等效电路

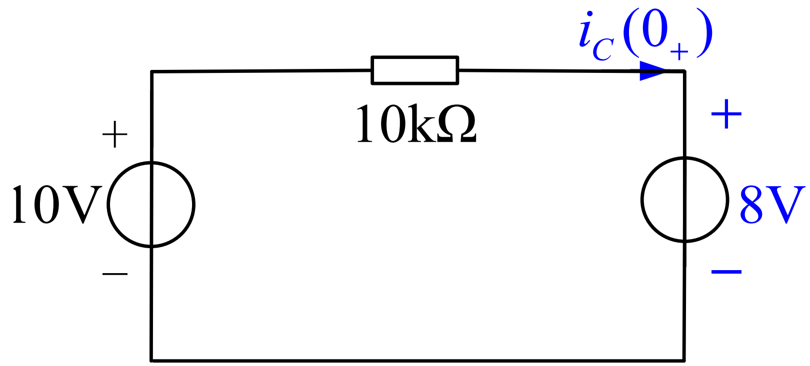
(2) 由电容电压的连续性得:

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=8\text{V}$$

(3) 由0_+等效电路求 $i_C(0_+)$

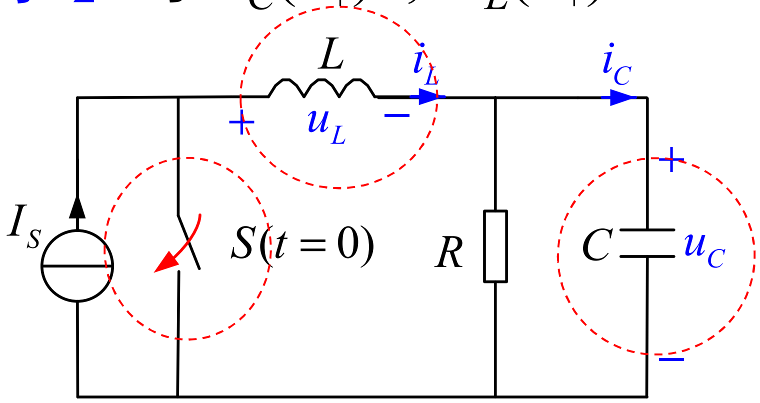
$$\boldsymbol{i_C(0^+)=\frac{10-8}{10}=0.2\text{mA}}$$

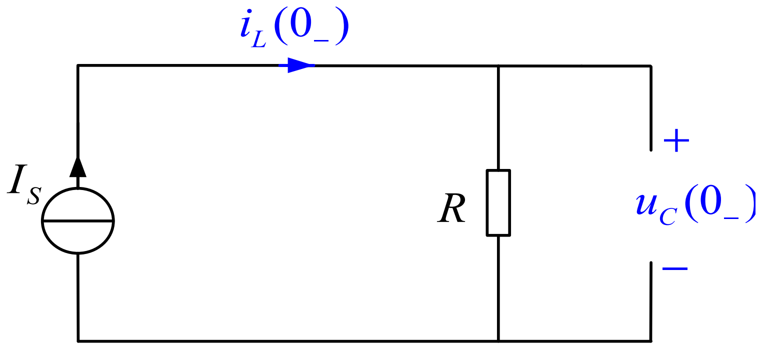
$$i_C(0_-)=0 \neq i_C(0_+)$$



0_+等效电路

【例3】.求 $i_C(0_+)$ ，$u_L(0_+)$ ？



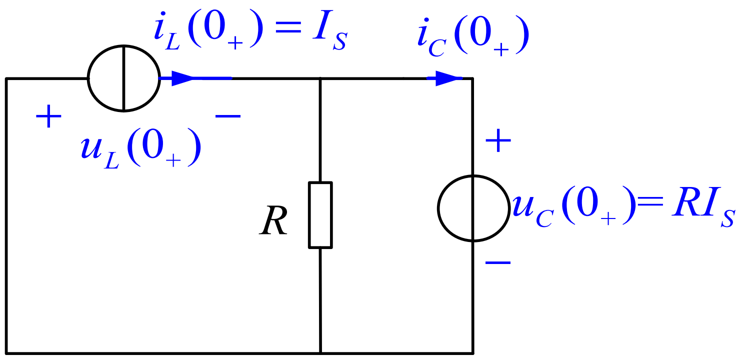


0_-等效电路

（1） 由电容电压和电感电流的连续性计算$i_L(0_+)$ 、$u_C(0_+)$：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_S \qquad u_C(0_+) = u_C(0_-) = RI_S$$

（2）0^+电路

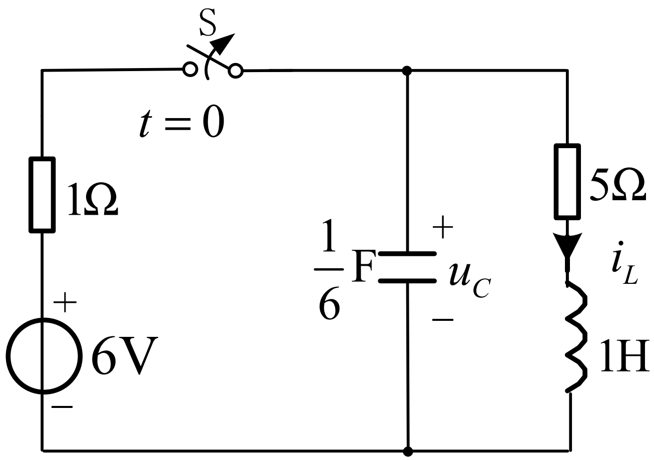


0_+等效电路

$$i_C(0_+) = I_s - \frac{RI_S}{R} = 0$$

$$u_L(0_+) = -RI_S$$

【例4】.开关S打开前电路处稳态，求$u_C(0+)$、$i_L(0+)$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0+}$。



解:

由电容电压和电感电流的连续性计算$i_L(0_+)$、$u_C(0_+)$：

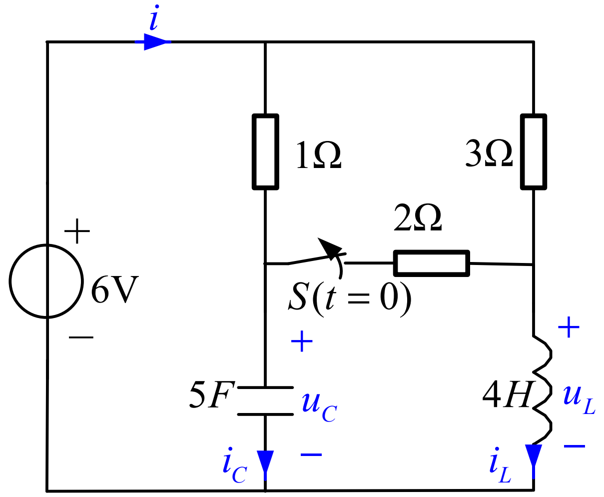
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=1\times 5=5$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{6}{6}=1$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0_+}=-\frac{i_C(0_+)}{C}=-\frac{i_L(0_+)}{C}=-6$$

【练习】. 开关S打开前电路处稳态，t=0时刻开关打开，求

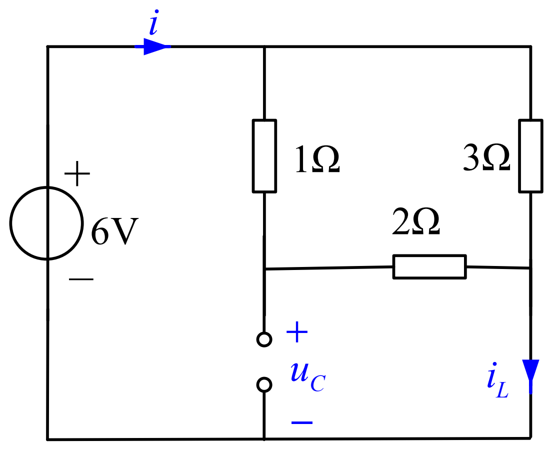
$u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$、$i_C(0_+)$、$u_L(0_+)$、$i(0_+)$、$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0+}$、$\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0+}$、$\left.\frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0+}$。



解：0-时刻等效电路

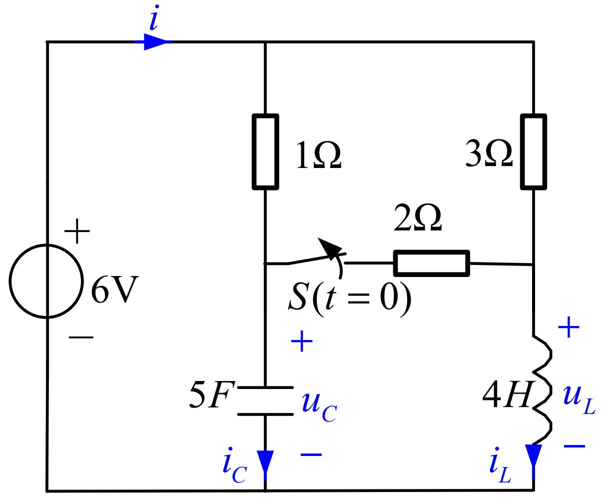
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=\frac{2}{1+2}\times 6=4\,\mathrm{V}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{6}{(1+2)//3}=4\,\mathrm{A}$$



【练习】. 开关S打开前电路处稳态，t=0时刻开关打开，求

$u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$、$i_C(0_+)$、$u_L(0_+)$、$i(0_+)$、$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0+}$、$\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0+}$、$\left.\frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0+}$。

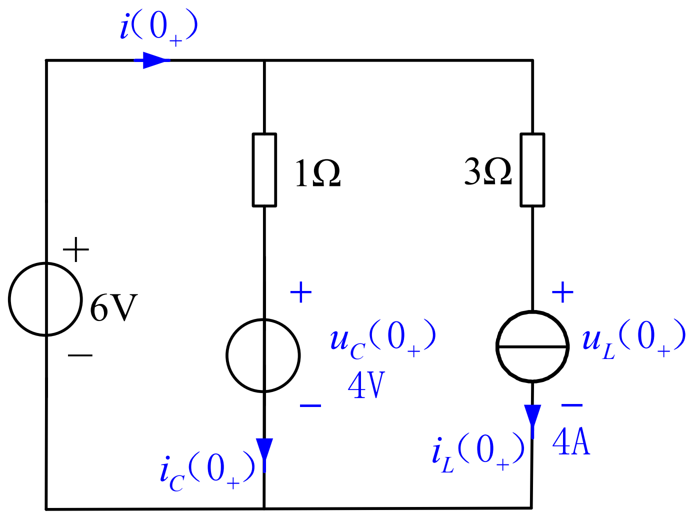


解：0-时刻等效电路

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=\frac{2}{1+2}\times 6=4\,\text{V}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{6}{(1+2)//3}=4\,\text{A}$$

0+时刻等效电路



$$i_C(0_+)=\frac{6-4}{1}=2\,\text{A} \qquad u_L(0_+)=6-3\times 4=-6\,\text{V}$$

$$i(0_+)=i_C(0_+)+i_L(0_+)=2+4=6\,\text{A}$$

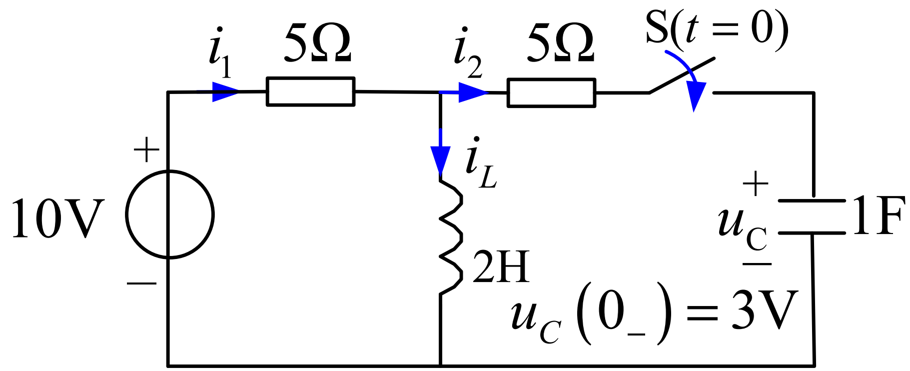
$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+}=\frac{1}{C}i_C(0_+)=0.4\,\text{V/s}$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+}=\frac{1}{L}u_L(0_+)=-1.5\,\text{A/s}$$

$$1\times i_C+u_C=6 \qquad \frac{di_C}{dt}+\frac{du_C}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{di_C}{dt}\right|_{0^+}=-0.4\,\text{A/s}$$

【练习】.计算 $u_C(0_+)$ $i_L(0_+)$ $i_1(0_+)$ $i_2(0_+)$ $u_C{}'(0_+)$ $i_L{}'(0_+)$ $i_1{}'(0_+)$ $i_2{}'(0_+)$ $u_C(\infty)$ $i_1(\infty)$ $i_2(\infty)$

原始状态original state，0-等效电路



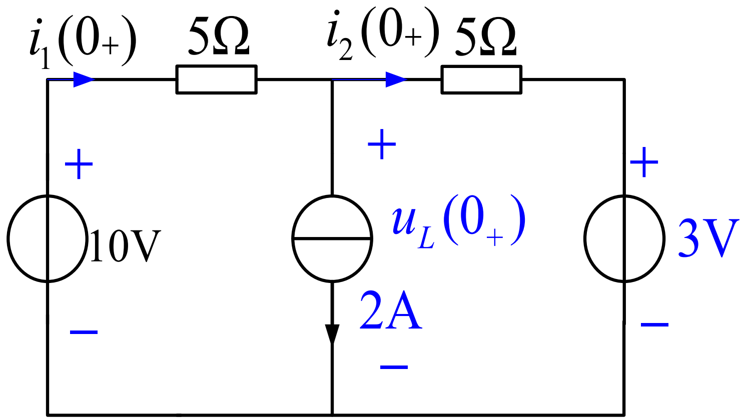
$i_L(0_-)=2\text{A}$ $\quad u_C(0_-)=3\text{V}$

初始状态initial state（连续性）

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\text{A}$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=3\text{V}$$

初始值initial value，0+等效电路



0_+等效电路

$$\begin{cases} i_1(0_+)=2+i_2(0_+) \\ 10-3=5i_1(0_+)+5i_2(0_+) \end{cases} \qquad i_1(0_+)=1.7\text{A} \qquad i_2(0_+)=-0.3\text{A}$$

$$u_C{}'(0_+)=\frac{i_C(0_+)}{C}=-0.3 \qquad i_L{}'(0_+)=\frac{u_L(0_+)}{L}=\frac{5\times(-0.3)+3}{2}=0.75$$

【练习】.计算 $u_C(0_+)$ $i_L(0_+)$ $i_1(0_+)$ $i_2(0_+)$ $u_C'(0_+)$ $i_L'(0_+)$

$i_1'(0_+)$ $i_2'(0_+)$ $u_C(\infty)$ $i_1(\infty)$ $i_2(\infty)$

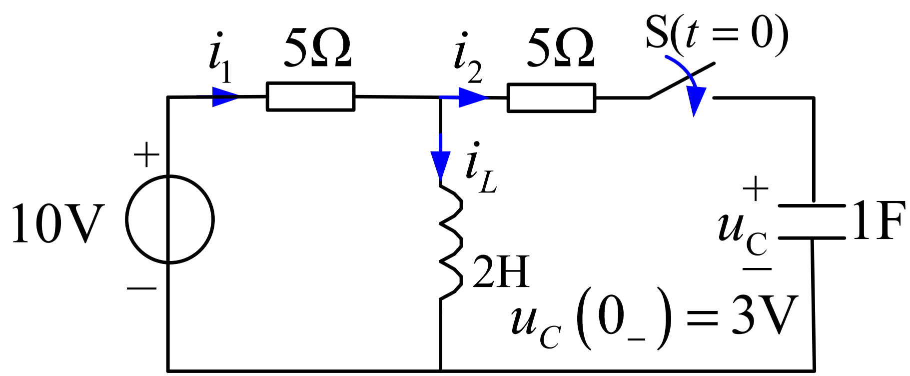
$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_L \\ 10 = 5i_1 + 5i_2 + u_C \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$10i_1 - 10 = 5i_L - u_C$$

$$\Downarrow$$

$$i_1'(0_+) = 0.5i_L'(0_+) - 0.1u_C'(0_+) = 0.405$$

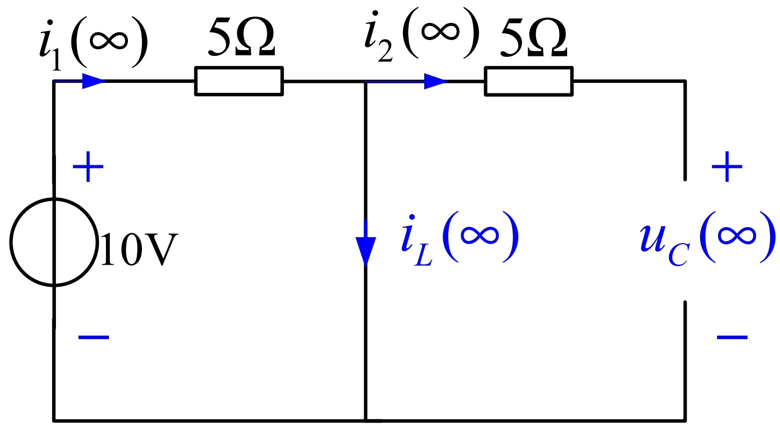


稳态值 Steady-state value：

$$i_L(\infty) = \frac{10}{5} = 2\text{A}$$

$$i_1(\infty) = i_L(\infty) = 2\text{A}$$

$$i_2(\infty) = 0 \qquad u_C(\infty) = 0$$



∞等效电路

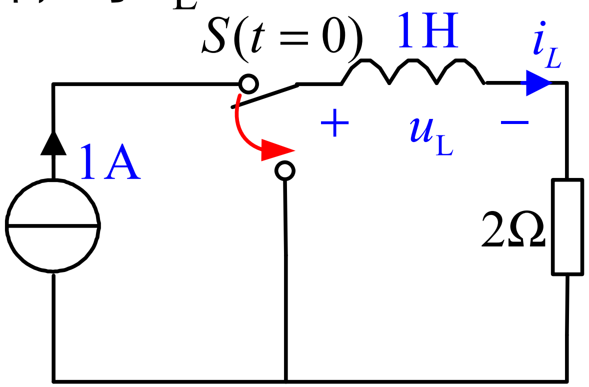
7.5.5 暂态过程计算

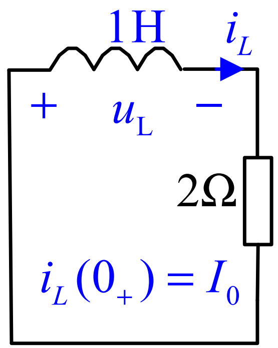
微分方程 （Differential equation）

初始值 （Initial value ）

→ 方程解 （solution）

【例5】．t=0时， 开关S换路，求i_L





1 建立微分方程

$$u_L + Ri_L = 0 \quad t > 0$$

$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \quad t \geq 0$$

2 求解初始值

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$

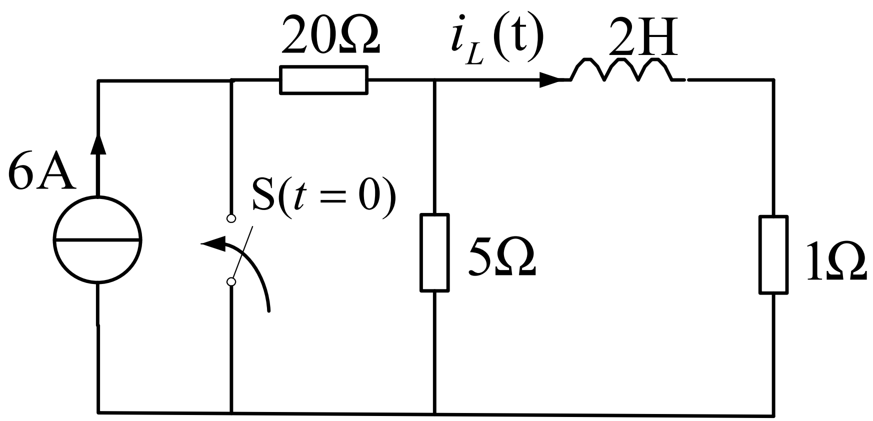
3 求解微分方程

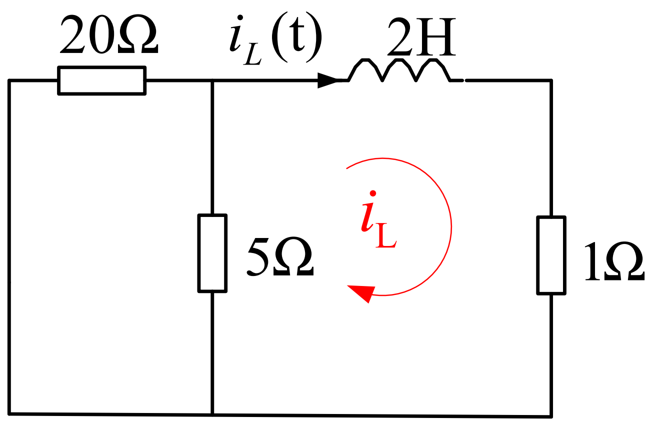
$$s + 2 = 0 \quad \Rightarrow s = -2$$

$$i_L = Ke^{st} = Ke^{-2t}\text{A} = e^{-2t}\text{ A} \quad (t \geq 0)$$

$$u_L = -2i_L = -2e^{-2t}\text{ V} \quad (t > 0)$$

【练习】. t=0时， 开关S闭合，求i_L





解： 1 建立微分方程

$$u_L + 1\times i_L + (5//20)\times i_L = 0$$

$$2\frac{di_L}{dt} + 1\times i_L + (5//20)\times i_L = 0$$

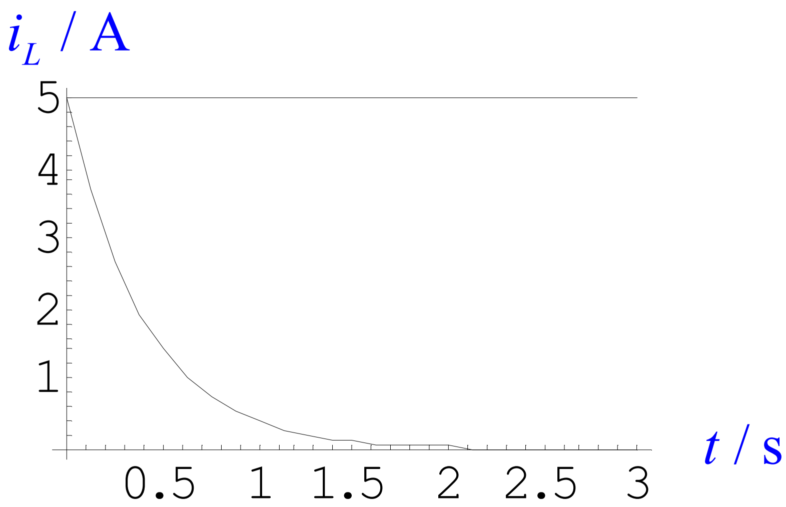
$$2\frac{di_L}{dt} + 5i_L = 0 \qquad (t>0)$$

2 求解初始值

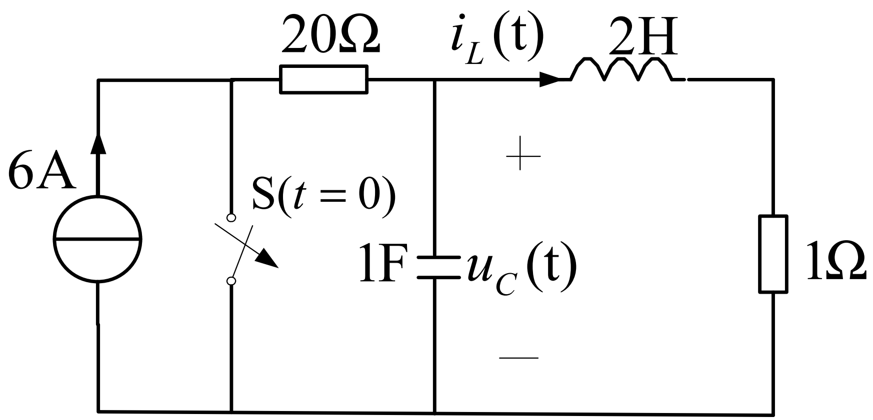
$$i_L(0_-) = \frac{5}{1+5}\times 6 = 5\text{A} \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 5\text{A}$$

3 求解微分方程

$$s = -\frac{5}{2} \qquad i_L(t) = 5e^{-\frac{5}{2}t} \ \text{A} \quad t>0$$



【例6】．t=0时， 开关S打开，求i_L



解： 1 建立微分方程

$$\begin{cases} \text{KVL:}\ \ 2\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=u_C \\ \text{KCL:}\ \ 6=i_L+\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=6 \Rightarrow s_{1,2}=\frac{-1\pm \mathrm{j}\sqrt{7}}{4}$$

2 求解初始值

$i_L(0_-)=0$ $u_C(0_-)=0$

$\boxed{i_L(0_+)=0}$ $u_C(0_+)=0$ $u_L(0_+)=0$ $\boxed{i_L'(0_+)=0}$

3 求解微分方程

$$i_L(t)=i_{Lp}(t)+i_{Lh}(t)=6+Ae^{-\frac{1}{4}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t+\theta\right)$$

由初始条件确定待定常数: $\theta=-20.7°$ $A=-6.41$

计划学时：5学时；课后学习15学时

作业：

7-2 /奇异函数

7-15/ 电容的特性

7-26/ 电感的特性

7-35、7-36 /微分方程，初态、终态

（7-36第6问答案错误，正确的系数为：-8.49，0.49）