1. 下列向量集合中哪一些是向量空间，说明理由。

(1) $V_1=\{\boldsymbol{\alpha}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$；

(2) $V_2=\{\boldsymbol{\alpha}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$；

(3) $V_3=\{\boldsymbol{\alpha}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \mid x_i$ 为整数$\}$；

(4) $V_4=\{\boldsymbol{\alpha}=[x_1,x_2,x_3]^T \mid x_1=5x_2\}$。

(1) 令 $\alpha_1=[a_1,a_2\cdots a_n]^T$

$\beta=[b_1,b_2\cdots b_n]^T$

$\alpha_1+\beta=[(a_1+b_1),(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)]^T\in V$

$k\alpha_1=[ka_1,ka_2\cdots ka_n]^T\in V$

$\therefore V_1$ 是向量空间

(2). $\alpha_1=[a_1,a_2,\cdots a_n]^T$

$k\alpha_1=[ka_1,ka_2\cdots ka_n]^T$

$k(a_1+a_2+\cdots+a_n)=k\neq 1$

$\therefore V_2$ 不是向量空间

(3). 取 $\alpha_1=[1,1\cdots 1]^T$

$\frac{1}{2}\alpha_1=[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}]^T\notin V_3$

$\therefore V_3$ 不是向量空间

(4). $\alpha_1=[a_1,a_2,a_3]^T$

$\beta=[b_1,b_2,b_3]^T$

$\alpha_1+\beta=[(a_1+b_1),(a_2+b_2),(a_3+b_3)]^T$

$a_2+b_2=5(a_1+b_1)$

$k\alpha_1=[ka_1,ka_2,ka_3]^T$

$ka_1=5ka_2$

$\therefore V_4$ 是向量空间

2. 设 $\mathbf{R}^3$ 中两组基分别为：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]^T,\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,-1]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,1]^T;$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,1]^T,\boldsymbol{\beta}_2=[2,3,4]^T,\boldsymbol{\beta}_3=[3,4,3]^T。$$

求从基 $\underbrace{\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}}_{A}$ 到基 $\underbrace{\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}}_{B}$ 的过渡矩阵 $\mathbf{C}$。

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}C$$

$$B=AC$$

$$\therefore C=A^{-1}B$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&3\\0&-1&-1&1&1&1\\0&-2&0&0&2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&-1&-1&-1\\0&1&0&0&-1&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&3&4\\0&1&1&-1&-1&-1\\0&1&0&0&-1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&3&4\\0&0&1&-1&0&-1\\0&1&0&0&-1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{array}\right]$$

$$\therefore C=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$

3. 设三维向量 ξ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下坐标为 $[1,2,1]^T$，求 ξ 关于基 $\{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2\}$ 的坐标 y。

$$[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore C=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=CY$$

$$Y=C^{-1}X$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&-1&2\\0&1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&-2&1\\0&1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right]\quad\therefore y=\left[\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right]^T$$

4. 设 $\mathbf{R}^3$ 中两组基分别为 $\{\alpha_1=[1,1,0]^T,\alpha_2=[0,1,1]^T,\alpha_3=[0,0,1]^T\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$。已知从基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 到基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 的过渡矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\-2&0&3\\4&-1&-6\end{bmatrix}$，求基向量 β_1,β_2,β_3。

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-2\\-2&0&3\\4&-1&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\2&-1&-3\end{bmatrix}$$

$$\therefore \beta_1=[1,-1,2]^T$$

$$\beta_2=[1,1,-1]^T$$

$$\beta_3=[-2,1,-3]^T$$

A^{+}