第4节　惯性力　　上节回顾

一、加速平动参照系

惯性力：$\boxed{\vec{f}_i = -m\vec{a}_0}$　$\vec{F}_{合} = \vec{F} + \vec{f}_i = m\vec{a}'$

二、转动参考系　在匀速转动的非惯性系中

惯性离心力：$\boxed{\vec{f}_i = -mr\omega^2\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{n}}$

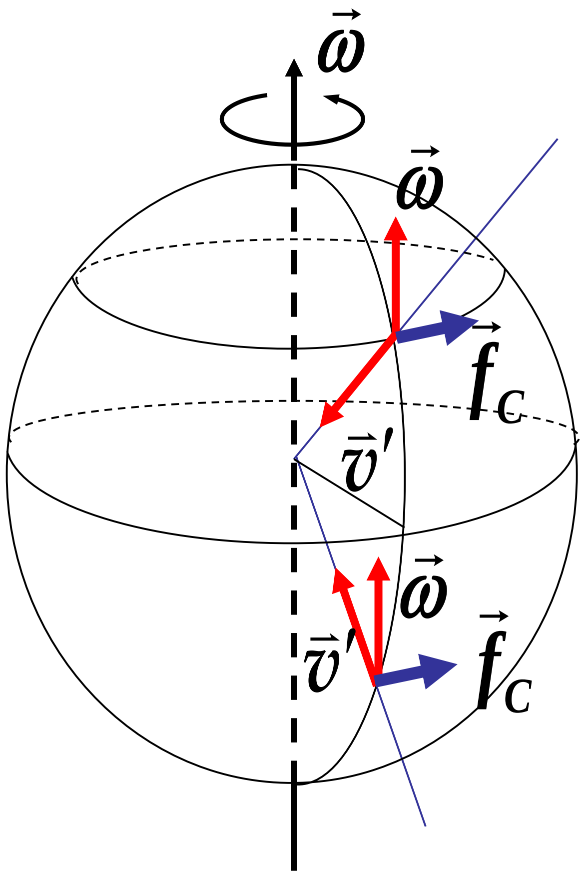
科里奥利力：$\boxed{\vec{f}_c = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}}$

$$\vec{f}_C = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$$

3、科里奥利力的实例

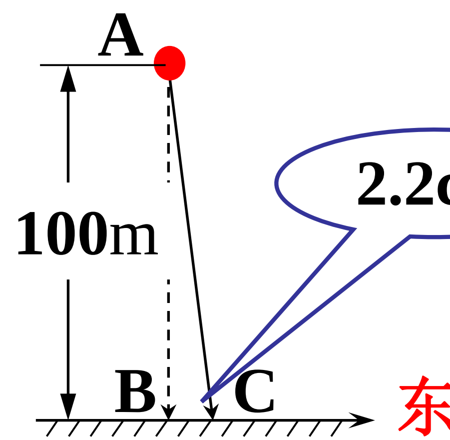
地球是匀速旋转的非惯性系。

1) 落体偏东



物体从高处自由下落，所受科里奥利力的方向不论在南北半球均向东，因此使落点偏东。

赤道上这一效应最大，两极没有此效应。



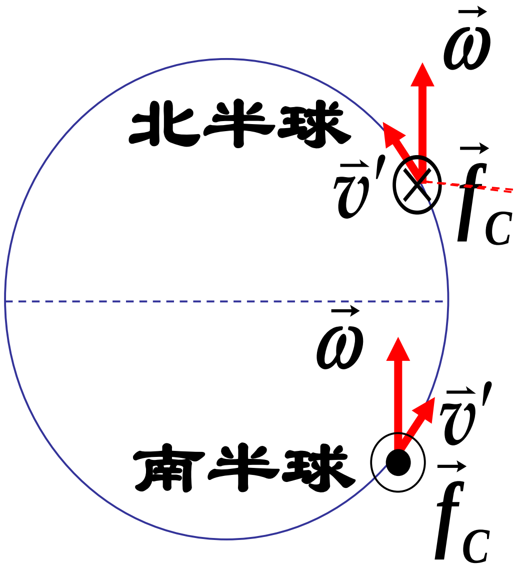
2) 河岸的冲刷

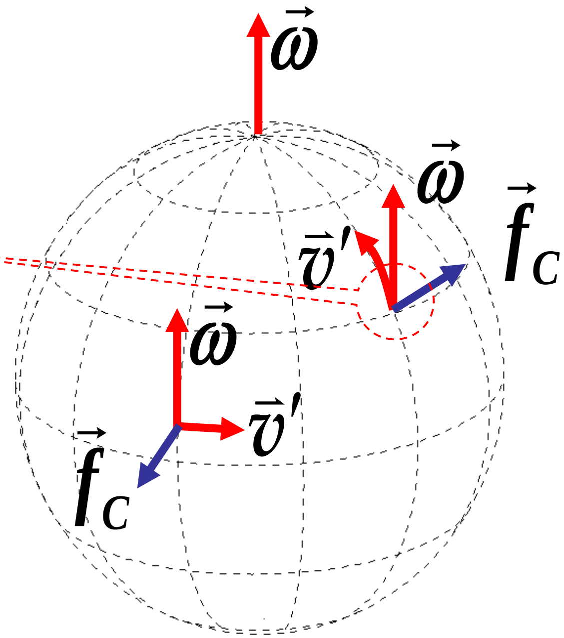
$$\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

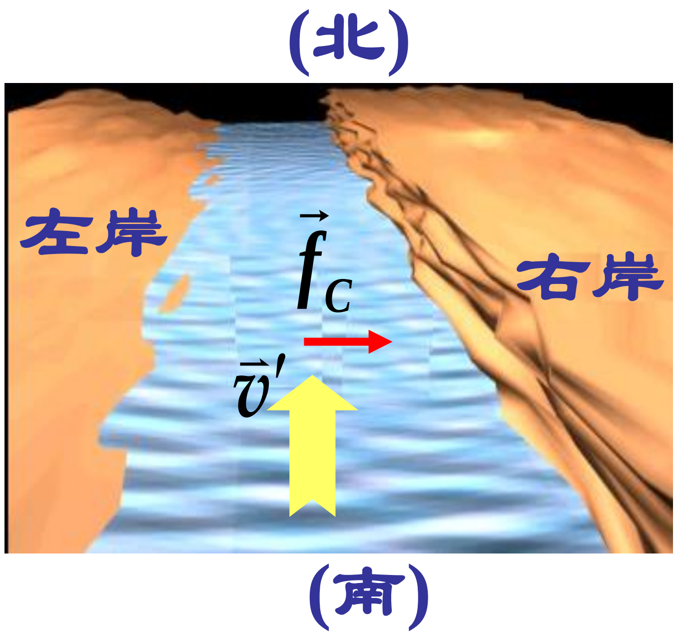
北半球河流右岸比较陡削，南半球则左岸比较陡峭。

汉口---- 左岸(平缓的江滩)

武昌---- 右岸(陡峭的江岸)







对北半球其它流向的河流有相同的结论。

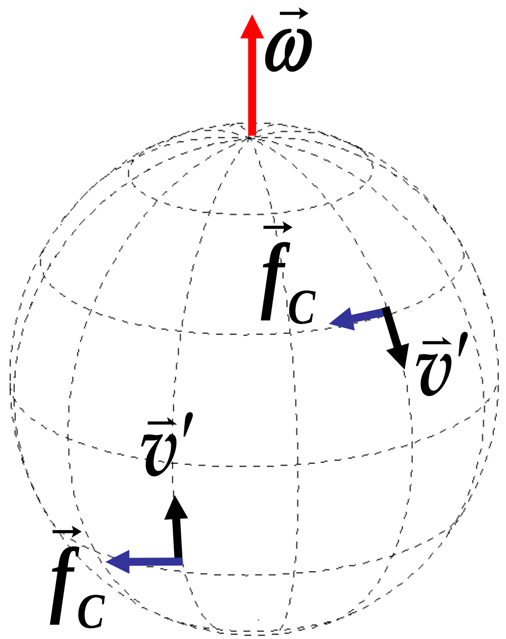
南半球的情况相反

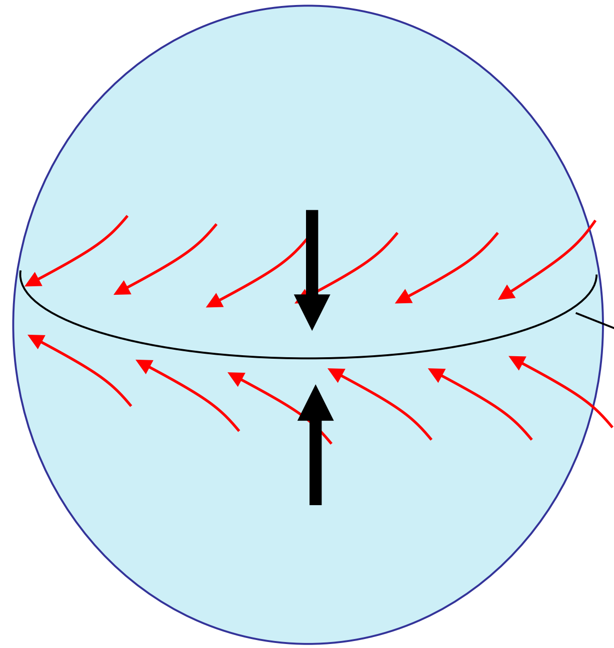
3) 信风的形成

$$\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

赤道附近日照强烈，空气受热上升，引起赤道两边的空气向赤道流动。

但受科里奥利力而偏离南北方向。



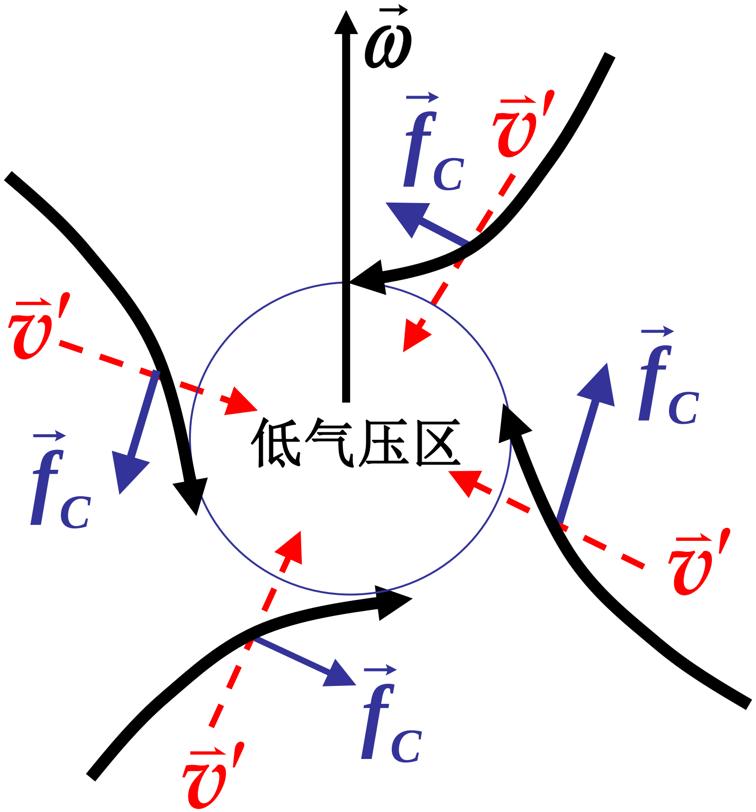


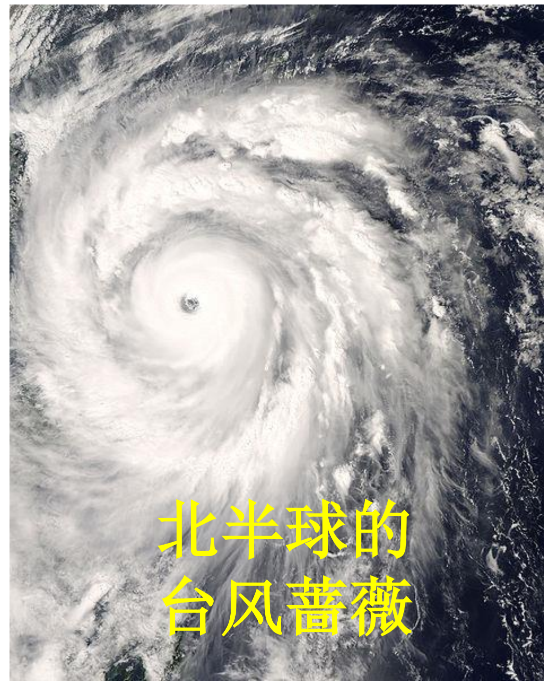
赤道附近的信风在北半球是东北方向，

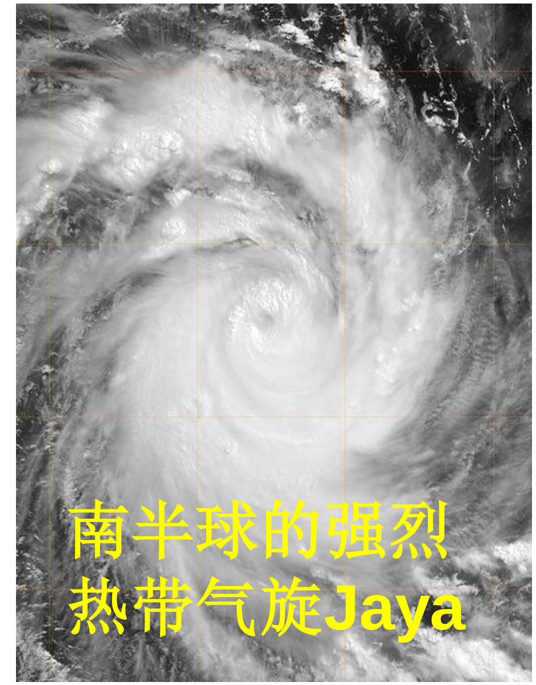
在南半球是东南方向。

4) 北半球的强热带风暴

$$\boxed{\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}}$$



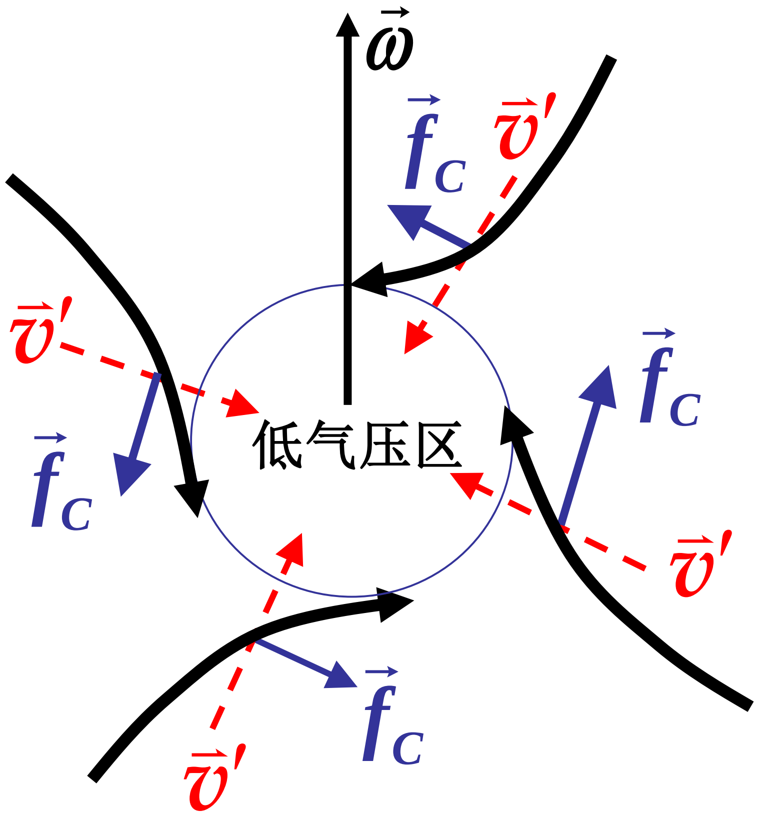


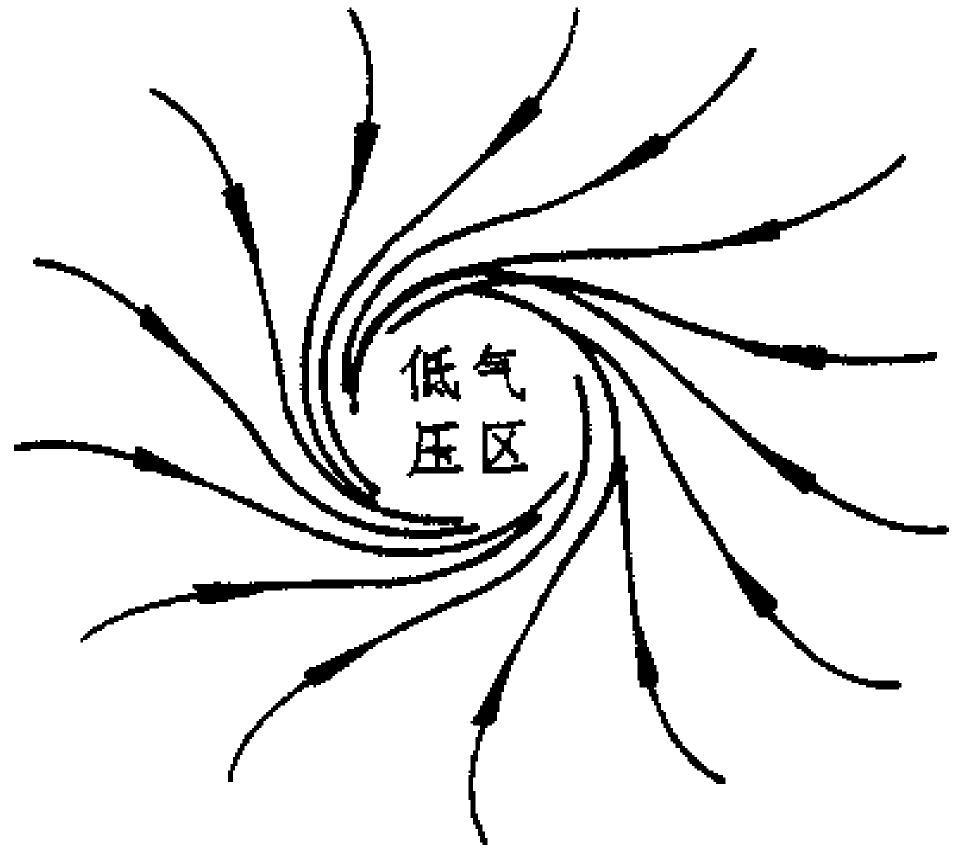


北半球的强热带风暴是在热带低气压中心附近形成的，当外面的高气压空气向低气压中心涌入时，由于科氏力的作用，气流的方向将偏向气流速度的右方，从高空看是沿逆时针方向旋转的涡旋。在南半球则是顺时针方向。

$$\boxed{\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}}$$

4) 北半球的强热带风暴





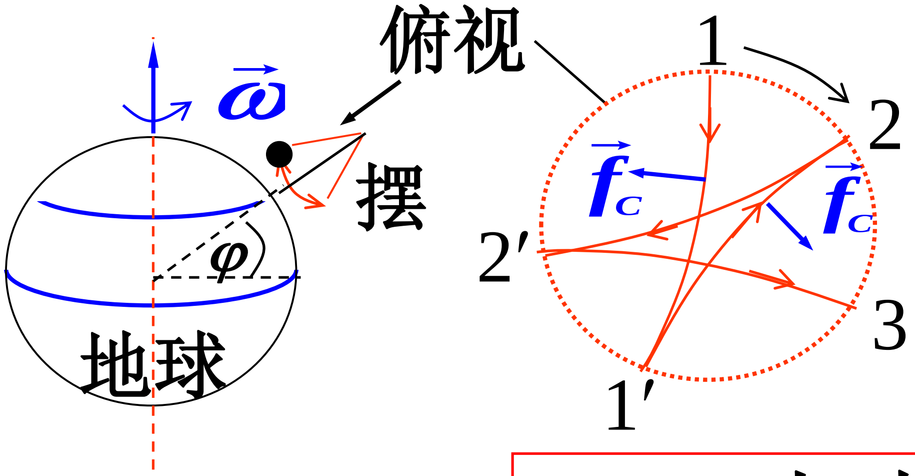
由于相同的原因，在北半球，水池放水时形成的涡旋，也是沿逆时针方向旋转的。若在南半球，则为顺时针方向。

2011-03-11
日本大地震
造成的
海面漩涡

南京遭遇暴雨袭击后，龙蟠路上一个排水口处形成一个巨大的漩涡(2011年7月18日)

5)傅科摆摆面的旋转

1851年傅科在巴黎（北半球）的一个大厅里悬挂摆长67米的摆。发现摆动平面每小时沿顺时针方向转过11°15’角度。



摆平面转动周期 $\boxed{T=\dfrac{24\text{小时}}{\text{Sin}\,\varphi}}$

傅科做的这个著名实验在历史上第一次验证了地球的自转。

第5节　冲量与动量定理

Impulse & Momentum Theorem

1. 冲量

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

冲量元 $\mathrm{d}\vec{I}$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\vec{p} = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t \equiv \vec{I}}$$

单位N·s

力在$t_1 \rightarrow t_2$时间段内对质点的冲量

(力的时间累积效应)

2. 动量定理　　适用于惯性系

$$\vec{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$ 积分形式

动量定理：冲量等于动量的增量。

$$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$$ 微分形式

$$\vec{I} = I_x\vec{i} + I_y\vec{j} + I_z\vec{k} = \int_{t_1}^{t_2}(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})\mathrm{d}t$$

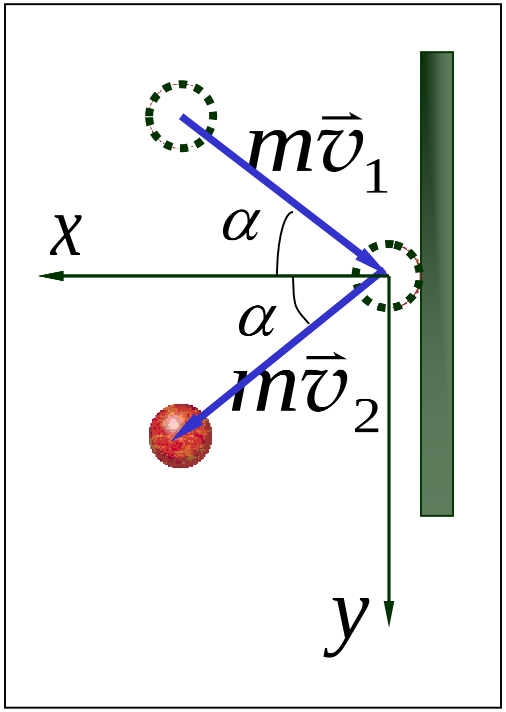
$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\mathrm{d}t = \Delta p_x \quad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\mathrm{d}t = \Delta p_y \quad I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\mathrm{d}t = \Delta p_z$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\vec{F}}\mathrm{d}t = \overline{\vec{F}}(t_2 - t_1)$$

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$ 平均冲力　$\Delta\vec{p} = \overline{\vec{F}}\Delta t$

例 一质量为0.05kg、速率为$10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的刚球，以与钢板法线呈45°角的方向撞击在钢板上，并以相同的速率和角度弹回来．设碰撞时间为0.05s．求在此时间内钢板所受到的平均冲力．

解 建立如图坐标系，以刚球为研究系统，由动量定理得



$$\overline{F}_x\Delta t = mv_{2x} - mv_{1x}$$
$$= mv\cos\alpha - (-mv\cos\alpha)$$
$$= 2mv\cos\alpha$$

$$\overline{F}_y\Delta t = mv_{2y} - mv_{1y}$$
$$= mv\sin\alpha - mv\sin\alpha = 0$$

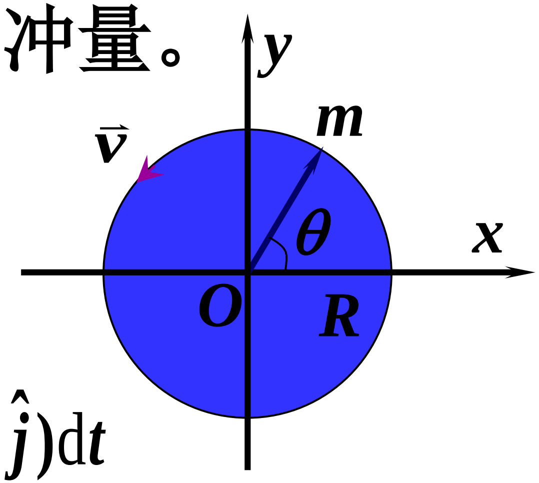
刚球所受的冲力：

$$\overline{F} = \overline{F}_x = \frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} = 14.1\mathrm{N}$$

钢板所受的冲力：

$$\boxed{\overline{F}' = -\overline{F} = -14.1\mathrm{N}}$$ 方向沿 x 轴反向

例. 如图所示, 在光滑平面上, 一质量为m的质点以角速ω沿半径为R的圆周作匀速圆周运动。试分别根据冲量的定义式和动量定理，求出在θ从0变到π/2的过程中外力的冲量。



解: 质点所受到的合外力为

$$\vec{F} = m\omega^2 R(-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j})$$

根据冲量的定义，有

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} m\omega^2 R(-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j})\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi/2} m\omega^2 R(-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= -m\omega R\int_0^{\pi/2}(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})\mathrm{d}\theta = \underline{-m\omega R(\hat{i} + \hat{j})}$$

按动量定理可得合力的冲量为:

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = m(-v\hat{i}) - mv\hat{j} = \underline{-m\omega R(\hat{i} + \hat{j})}$$

第6节　质点系的动量定理　动量守恒定律

Momentum Theorem for System of Particles & Conservation of Momentum

一、质点系的动量定理

质点系： 由有相互作用的若干个质点组成的系统。

内力： 系统内各质点间的相互作用力。

外力： 系统外质点对系统内质点的作用力。

对由 n 个质点组成的质点系的第 i 个质点：有

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i内} + \vec{F}_{i外} \qquad \vec{F}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i$$

对质点系所有的质点有

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\vec{p}_i \qquad 即 \qquad \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_{i内} + \vec{F}_{i外}) \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\vec{p}_i$$

=0

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i}$$

质点系动量定理的微分形式

在t_1到t_2这段时间内：

$$\left(\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\mathrm{d}t\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i1}$$

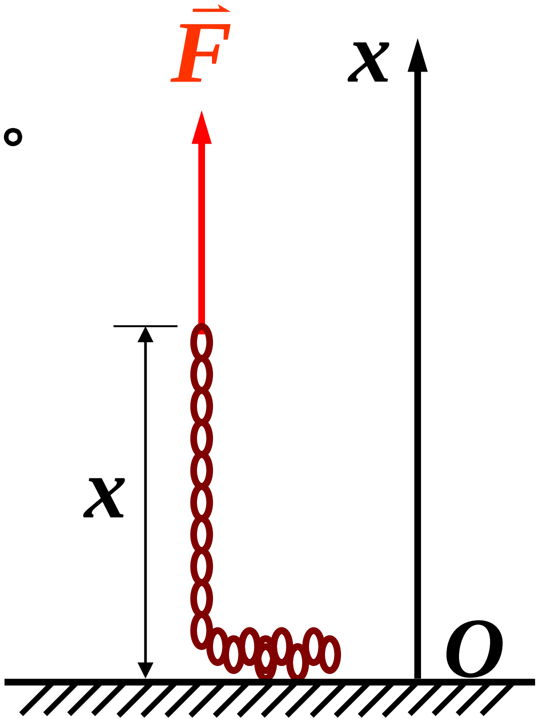
质点系动量定理的积分形式

系统的动量定理表明，一个系统的**总动量**的变化仅决定于系统所受的外力，而**与系统的内力无关**。

因此，在有些问题中，可以通过选择研究对象把一些比较复杂或未知的相互作用力化为内力来处理，从而使问题简化。

例1、一长为*l*、密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为λ，将其卷成一堆放在地面上。若手握链条的一端，以匀加速度*a*将其上提，当绳端提离地面高度为*x*时，*x*<*l*，求手的提力。

解：以地面为原点，向上为*x*轴正方向。



动量定理

设*t* 时刻，链条运动端距原点高度为*x*，其速率为v，以整个链条为研究对象，该系统*t* 时刻总动量为：

$$p = \lambda x v$$

系统受力：拉力$\vec{F}$沿x轴正向；重力$\lambda x \vec{g}$沿x轴负方向

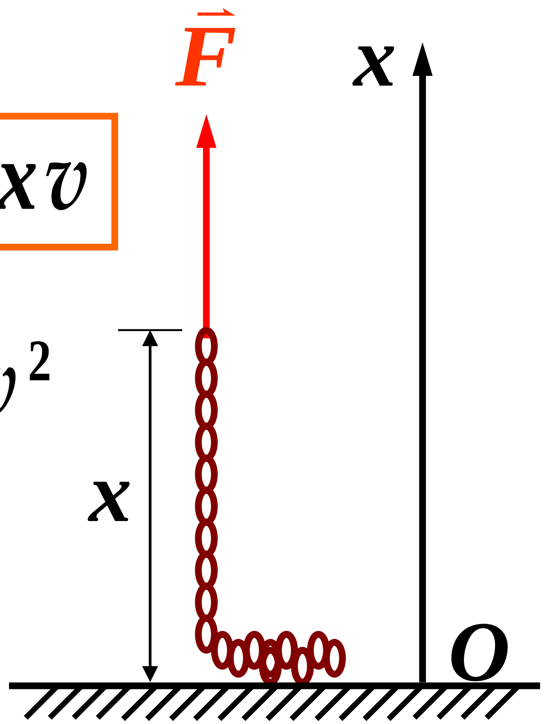
地面上的链条受支持力和重力（平衡）。

例1、一长为l、密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为λ，将其卷成一堆放在地面上。若手握链条的一端，以匀加速度a将其上提，当绳端提离地面高度为x时，$x<l$，求手的提力。

据质点系动量定理：

$$(F - x\lambda g)\mathrm{d}t = \mathrm{d}p$$

$$\boxed{p = \lambda x v}$$



即：

$$F - x\lambda g = \lambda \frac{\mathrm{d}(xv)}{\mathrm{d}t} = \lambda x a + \lambda v^2$$

又因匀加速提起： $v^2 = 2ax$

所以 $F = 3\lambda x a + x\lambda g$

二、质点系的动量守恒定律

$$\boxed{\left(\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\mathrm{d}t\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i1}}$$

当 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\mathrm{d}t=0$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i2}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i1}=$ 恒矢量

即 $\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i2}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i1}=$ 恒矢量

说明当质点系不受外力，或虽受外力，但外力的矢量和为零时，系统的总动量保持不变（守恒）。

注意：

1、系统总动量守恒，但每个质点的动量可能变化。

2、在碰撞、打击、爆炸等相互作用时间极短的过程中，外力比系统的内力小得多，**往往可忽略外力。**

3、动量守恒可在某一方向上成立。

如当 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=0$ 时 $\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{ix}=$ 恒矢量

4、定律中的速度应是对同一惯性系的速度，动量和应是同一时刻的动量之和。

5、动量守恒定律在**微观**、**高速**领域仍适用。是自然界最基本的普适定律之一。

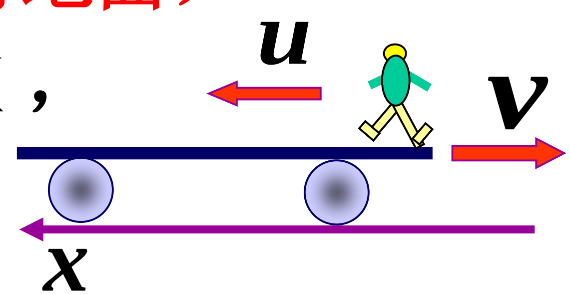
6、动量守恒定律只适用于惯性系。

例. 水平光滑冰面上有一小车, 长度为L, 质量为M。车的一端有一质量为m的人, 人和车原来均静止。若人从车的一端走到另一端,

求: 人和车各移动的距离。

解: 设人速为u, 车速为v。（相对地面）

系统在水平方向上动量守恒，



$$Mv + mu = 0 \quad \therefore v = -\frac{m}{M}u$$

$$\int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}t = -\frac{m}{M}\int_{t_0}^{t} u\mathrm{d}t$$

$$\therefore \Delta x_{车地} = -\frac{m}{M}\Delta x_{人地}$$

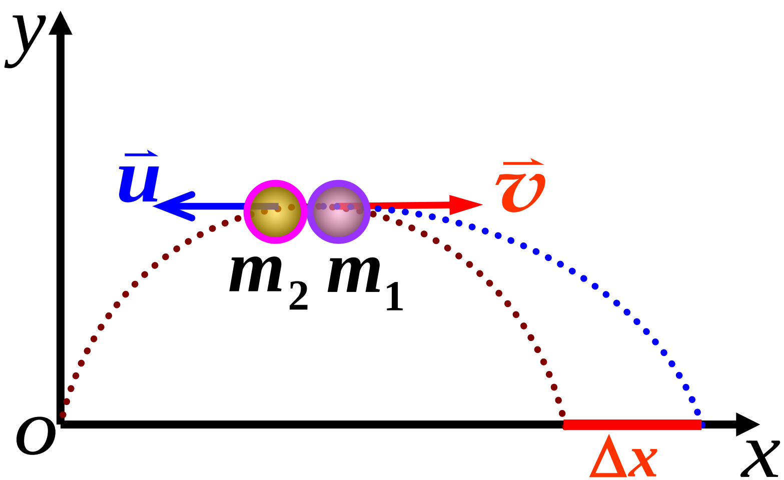
$$\Delta x_{人地} = \Delta x_{人车} + \Delta x_{车地}$$

$$\Delta x_{人车} = L$$

$$\Delta x_{人地} = \frac{ML}{M+m}$$

$$\Delta x_{车地} = \frac{mL}{M+m}$$

例2、一人质量m_1，手拿m_2的物体，自地面以倾角θ，初速v_0斜向前跳。最高点时以相当人的速率u将物体水平抛出。问人向前跳增加的距离。P_{65}:2 - 28



人、物体分离前后，只受重力作用，沿水平方向动量守恒。

解: 人和物体分离前沿水平方向的速度为:

$$v_{0x}=v_0\cos\theta$$

分离时，设物体对地的水平速度为$\vec{v}'$。人为动系。

速度变换式:

$$\vec{v}'=\vec{u}+\vec{v} \qquad v'=-u+v$$

$$(m_1+m_2)v_0\cos\theta=m_1v+m_2(v-u)$$

$$v=v_0\cos\theta+\boxed{\frac{m_2}{(m_1+m_2)}u}\ \Delta u$$

$$\Delta x=\Delta u\cdot v_0\sin\theta/g$$