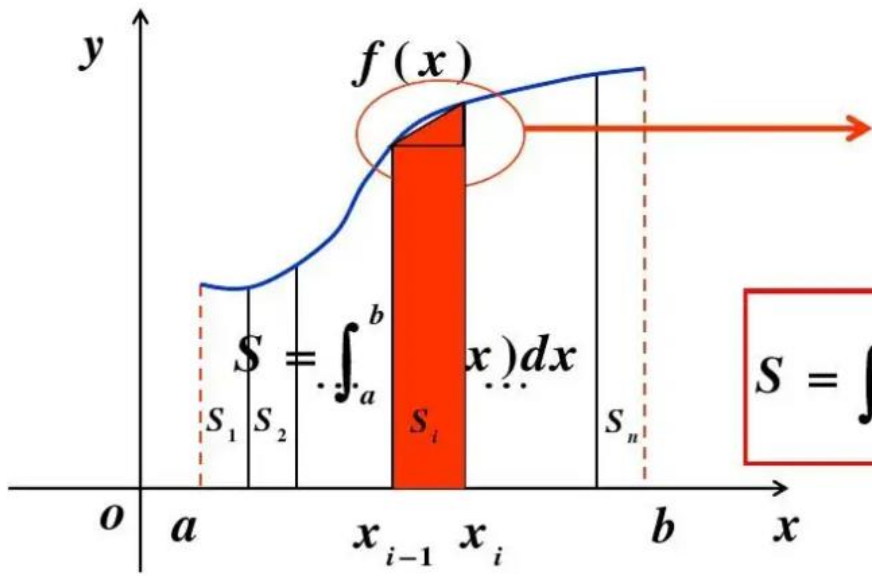
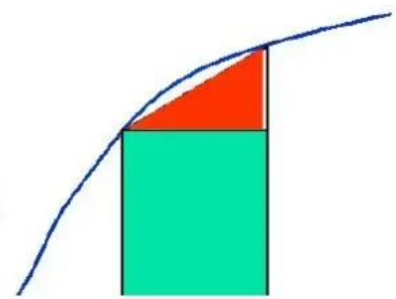
微积分学





$$S=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n} S_i$$

课堂名称：微积分学(一)上(电信2022)

课堂编号：JK680

1、扫码关注公众号：微助教服务号。

2、点击系统通知：“点击此处加入【微积分学(一)上(电信2022)】课堂”，填写学生资料加入课堂。

*如未成功收到系统通知，请点击公众号下方“学生” - “更多” - “加入课堂” --- “输入课堂编号”手动加入课堂


9:30
微助教服务号
快！最后2小时！请为微助教的创始人田媛老师投票！
关注"极目新闻"公众号——滑至底部找到"好老师"——转到荆楚好老师投票页面——搜索B04 或田媛（或点击"高等教育组"第二排就能看到田媛）——投票
9月8日 上午11:24
2022 寻访 荆楚好老师
祝贺所有获得"荆楚好老师"荣誉称号的老师们!
"一个人遇到好老师是人生的幸运，一个学校拥有好老师是学校的光荣，一个民族源源不断涌现出一批又一批好老师则是民
上午9:30
点击此处加入【微积分学(一)上(电信2022)】课堂
教师(T)
学生(S)
更多(M)


9:30
加入课堂
JK680
微积分学(一)上(电信2022)
金典聪
华中科技大学 • 数学与统计学院
本课堂要求实名学生资料
华中科技大学 · 数学与统计学院 计算数学
班级: 2021
学号: 2021010253
本课堂要求补充的信息
姓名 金典聪
性别 男
确认加入


9:31
微助教服务号
快！最后2小时！请为微助教的创始人田媛老师投票！
关注"极目新闻"公众号——滑至底部找到"好老师"——转到荆楚好老师投票页面——搜索B04 或田媛（或点击"高等教育组"第二排就能看到田媛）——投票
9月8日 上午11:24
2022寻访荆楚好老师
祝贺所有获得"荆
称号的老师们！
签到(C)
答题(Q)
讨论(D)
抢答(R)
更多(M)
教师(T)
学生(S)
更多(M)


9:31
微助教
以下课堂包含开启的题目
微积分学(一)上(电信2022)(JK680)
1
共 0 道单题，1 个组卷


9:31
微助教
单题 (0)
组卷 (1)
已过滤
暂无数据


9:32
微助教
单题 (0)
组卷 (1)
已过滤
组卷
2022第一次线上作业-1
开启中
2022级第一次线上作业
已答
14天 03 : 45 : 58

一　课程安排

二　微积分学简介

三　学微积分的几点建议

四　实数集及其性质

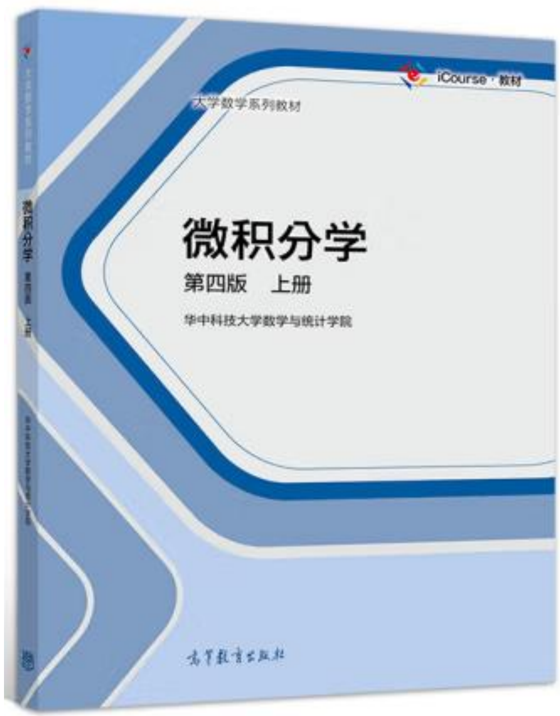
一　课程安排

1. 联系方式

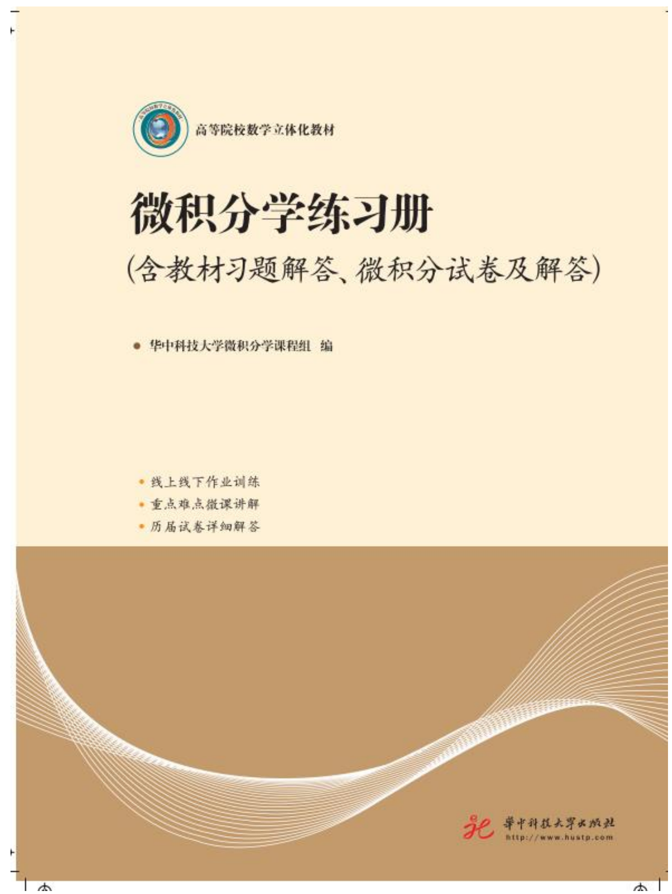
- 本人邮箱：1391779154@qq.com
- 助教：赵浬浬18531027355
  陈韬羽15905176276

2. 教材和参考书

➢ 教材：微积分学. 第四版. 华中科技大学数学与统计学院. 教材内附有丰富的微视频以供参考和学习(扫描二维码).



微积分学习辅导书与练习册的说明



- **参考书**：叶其孝，王耀东，唐兢(译). 托马斯微积分，第10版. 北京：高等教育出版社，2012.
- **线上课程**：中国大学Mooc—微积分学1(华中科技大学) https://www.icourse163.org/course/HUST-1003448002 (已开课)

3 本学期课程安排

- **内容**

  微积分学上册—从1.1节到7.2节（周次：4-17）

- **考试**

  （1）期中考试：时间是11月13日下午2:30-5:00

  范围：1-4章，至洛必达法则

  （2）期末考试：时间是12月28日

  范围：§1.1-§7.2（可降阶方程）

  最后一次课：12月23日

4 成绩评定

- 期中考试成绩 20%
- 期末考试成绩 60%
- 平时成绩 20%

(1) 线下作业10%，每周交一次，每周第一次课课间休息期间由各班学习委员收齐后交给助教

(2) 线上作业10%（使用“微助教”PC端线上答题）

(3) 随机抽查考勤，无故缺勤一次，平时成绩扣0.5分.确有特殊事情找辅导员开请教条

线上作业（微助教平台）

用微信扫描课程二维码，填写个人信息注册后进行答题。可用手机端注册，PC端答题。
务必保证个人基本信息准确，否则教师无法看到你的答题情况，影响平时成绩的评判。

- 题型：单选题、多选题、判断题
- 每周一次（时限要求：**布置后两周内完成**）
- 线上测试两次（分别在期中考试前、期末考试前），有时限要求

二　微积分学简介

微积分学是微分学与积分学的统称，早期微积分主要用于天文、力学、几何中的计算问题。

微积分的萌芽、发生与发展，经历了一个漫长的时期.

(1) 早在古希腊时期，欧多克索斯(Eudoxus，约公元前408—355)就提出了穷竭法.这是极限理论的先驱.它指出："一个量如减去大于其一半的量，再从余下的量中减去大于该余量一半的量，这样一直下去，总可使某一余下的量小于已知的任何量."(见《几何原本》卷X，1).这个定义使得古希腊数学家在所有论证中都不用"无穷小量"这个词，仅仅使用只需有限步可做到的穷竭法就够了.我国庄子(公元前355—275)《天下篇》中说："一尺之棰，日取其半，万世不竭"，也具有极限的思想.

真正成为积分学萌芽的当推阿基米德(公元前287—212)的工作.他在《抛物线求积法》中用穷竭法求出抛物线弓形的面积.其方法是：逐次作出与该弓形同底等高的三角形(如图Ⅰ-1)，然后将这些三角形面积加起来.阿基米德给出，第n步时，这些三角形面积之和为

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

(A为第一个三角形之面积).

图Ⅰ-1

(2) 从 16 世纪中叶开始，微积分正式进入了酝酿阶段. 这时陆续出版了阿基米德的一些著作. 研究行星运动的开普勒(Kepler,1571—1630)发展了阿基米德求面积和体积的方法. 他在 1615 年出版《新空间几何》，给出了 92 个阿基米德未讨论过的体积问题，并研究了酒桶的最佳比例. 开普勒在天文学研究中已得到公式：$\int_0^\theta \sin\theta d\theta = 1 - \cos\theta$. 1635 年卡瓦列里(Cavalieri,1598—1647)出版了《不可分量几何学》，影响巨大. 他将面积的不可分量比作织成一块布的线，体积的不可分量比作一册书的各页，当然不可分量的个数为无穷多，且没有厚薄和宽窄. 这已到达积分学的边缘，且卡瓦列里已发现公式 $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$，$n$ 为正整数.

17 世纪上半叶，微积分的奠基工作在紧锣密鼓地进行着. 最重要的先驱有法国的帕斯卡(Pascal,1623—1662)和费马(1601—1665)，英国的沃利斯(Wallis,1616—1703)和巴罗(Barrow,1630—1677).

帕斯卡在证明体积公式时，主要借助于略去高次项(即略去高阶无穷小). 他也注意到很小的弧和切线是可以相互代替的. 费马是 17 世纪的大数学家，成就广泛，数论中费马定理尤著称于世. 他在求极大极小值上的成功，为微积分开辟了道路.

(3) 牛顿(1642—1727)和莱布尼茨(1646—1716)在17世纪下半叶终于创立了微积分学.

莱布尼茨年轻时在莱比锡大学学习法律,后来投身外交界,在巴黎、伦敦结识了法国和英国的数学家.他的数学研究完全是在公余进行的.他和牛顿曾就微积分进行多次通信,但莱布尼茨完全是独立创立微积分理论的.牛顿从力学导致流数术,而莱布尼茨则从几何学上考察切线问题而得出微分法.他的第一篇论文

刊登于1684年的《教师期刊》上,这比牛顿公开发表早三年.这篇文章给一阶微分以明确的定义.他说横坐标 x 的微分 dx 是个任意量,而纵坐标 y 的微分 dy 则定义为它与 dx 之比等于纵坐标与次切距之比的那个量(在前述巴罗的微分三角形的图中,次切距是 TP,纵坐标是 MP,它们之比正是切线的斜率).

莱布尼茨和牛顿一样,掌握了微分法和积分法,并洞悉二者之间的联系.因而将他们两人并列为微积分的创始人是完全正确的.尽管牛顿的研究比莱布尼茨早10年,但论文的发表要晚3年.由于彼此都是独立发现的,曾经长期争论谁是最早的发明者并无意义.由于莱布尼茨的记号 dx 和 $\int$ 较为便利,所以现今的微积分似乎更接近莱布尼茨当年的形式.

(4) 微积分诞生以后，曾就它的基础是否稳固爆发过一场大的争论.

1734 年，贝克莱(Berkeley，1685—1753，爱尔兰的主教)出版了一本书:《分析学家:或一篇致不信神数学家的论文，其中审查一下近代分析学的对象、原则及论断是否比宗教的神秘、教旨有更清晰的陈述，或更明显的推理》. 书中他嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”.

确实，不管是费马的“E”，牛顿的“0”，还是莱布尼茨的 dx，都又是 0，又不是 0，呼之即来，挥之即去，说它是“鬼使神差”，似乎不算过分. 因此贝克莱主教以此攻击牛顿，荷兰哲学家尼文太(Nieuwentijt，1654—1718)也反对过莱布尼茨的高阶微分和略去无穷小量.

当然，也有很多人企图弥补这一缺陷. 麦克劳林(1698—1746)试图从瞬时速度的理解上加以解释，但成效不大. 泰勒(1685—1731)曾用差分去解释流数，却被说成“把车子放到了马的前面”. 路子比较对的是达朗贝尔(d'Alembert，1717—1783)，他将微积分的基础归结为极限，并认为极限是“一个变量趋近于一个固定量，趋近的程度小于任何给定的量”，不过他并未沿这条路走到底.

(5) 进入 19 世纪以后,分析学的不严密性到了非解决不可的地步. 那时还没有变量、极限的严格定义. 不知道什么是连续,因为有解析式的函数天然地被认为是连续的. 级数的收敛性,定积分的存在性都是含糊不清的. 阿贝尔

(1802—1829)在 1826 年说:"在高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的形式证明的. 人们到处发现从特殊跳到一般的不可靠的推理方法."

德国数学家魏尔斯特拉斯(1815—1897)在当中学数学教师时,将分析做到"算术化". 他反对"变量无限趋向于"之类的说法,认为变量无非是一个字母,用来表示某区间内的数. 这一想法导致了变量 x 在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$取值时,$f(x)$在$(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$取值这样的表示方法. 这样,在他手里,终于得到了现今广泛采用的 ε-δ 定义,完全摆脱了几何直观所带来的含糊观念.

以上内容截取自华东师范大学数学系《数学分析》第四版上册

三　学微积分的几点建议

Q： 大学微积分与高中数学的差别是什么？如何从高中数学跨越到大学数学？

A： 高中数学中涉及到少许微积分的内容，其主要目的是用，比如利用导数判断函数的单调性等. 微积分更注重逻辑、注重知识点的来龙去脉，也注重应用. 从高中数学到微积分，最关键的是理解概念，弄清概念之间的关系，有意识的训练逻辑思维能力.

(1) 重基础、抓主干、构建知识体系

学习过程中着重理解定义、概念，去粗取精，构建知识体系。切忌死记定理和公式，在理解的基础上去运用和创新。

(2) 敢于质疑、独立思考、积极探索

知其然，更要知其所以然。书本和老师也会犯错，要敢于质疑，大胆提出自己的想法(新的理论往往从质疑开始)。养成独立思考的习惯，思考定义的合理性、定理条件的合理性、定理的（非）适用范围。遇到难题，积极探索,乐于与老师和同学讨论。

(3) 学无止境、持之以恒

一心向着目标前进的人，全世界都会给他(她)让路。

例题

例1. 证明$\sqrt{2}$ 是无理数.

证明: 采用反证法. 设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 那么它可以表示成 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, 其中 $p,q\in\mathbb{N}^+$, 且 p, q 互质. 则

$$p^2=2q^2. \qquad (1)$$

这表明 p^2 是偶数, 从而 p 是偶数. 故设 $p=2k,\ k\in\mathbb{N}^+$, 代入式(1) 得 $q^2=2k^2$. 所以 q 为偶数, 这与 p, q 互质矛盾.

记号: $\mathbb{N}$: 全体自然数(包含0)构成的集合

$\mathbb{N}^+$: 全体正整数构成的集合

$\mathbf{R}$: 全体实数构成的集合

例2. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 如果对任何的 $\varepsilon > 0$, 有 $a < b + \varepsilon$. 证明: $a \leq b$.

证明: (反证法) 假设结论不成立, 即 $a > b$. 令 $\varepsilon_0 = a - b$.
则有 $\varepsilon_0 > 0$, 且 $a = b + \varepsilon_0$, 这与题设矛盾.

注: (1) 上例证明中 ε_0 还可以取 $(a-b)/3$, $(a-b)/2$ 等. 若上例题设改为任何的 $\varepsilon > 0$, 有 $a \leq b + \varepsilon$, 则结论仍然成立.
(2) 反证法和数学归纳法是微积分学常用的论证方法.

四 实数集及其性质

1 集合与实数

一般地，具有某种特定性质的对象的总体称为集合或集，其中的对象称为元素．例如，全体实数构成的集合为实数集，所有直角三角形构成一个集合. 通常用大写字母 A, B, M, N 等表示集合，用小写字母 a, b, c, x, y, z 等表示集合的元素.

集合的表示方式:

(1) 列举式．1到10中能被3整除的数构成的集合为 $\{3, 6, 9\}$.

(2) 命题式．整数集构可表示为 $\{x \mid \sin(\pi x) = 0\}$.

习惯上，我们将集合A 表示为 $A = \{x \mid x$ 满足 $P\}$, 其中 P 是关于 x 的某个命题．上式的意义是 $x \in A$ 的充要条件是 x 满足命题 P .

给定集合 A,B，若当 $x\in A$ 时必有 $x\in B$，则称 A 为 B 的子集，记作 $A\subset B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则说集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$. 若 A 不包含任何元素，则称 A 为空集，记作 $A=\emptyset$. 约定空集是任何集合的子集. 令

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\},$$

分别称 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 为 A 和 B 的并与交.

- 有理数：有限十进小数或无限十进循环小数，可表示成 $\dfrac{p}{q}$，其中 p,q 为整数且 q 不为0.
- 无理数：无限十进不循环小数.

有理数和无理数统称为实数，用 $\mathbf{R}$ 表示，即

$$\mathbf{R}=\{x : x \text{ 为实数 }\}.$$

此外，用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{Z}$表示整数集.

➢ 区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$.

(1) $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

(2) $[a,b]=\{x\mid a\le x\le b\}$

(3) $[a,b)=\{x\mid a\le x<b\}$

(4) $(a,b]=\{x\mid a<x\le b\}$

(5) $[a,+\infty)=\{x\mid x\ge a\}$

(6) $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$

(7) $(-\infty,b]=\{x\mid x\le b\}$

(8) $(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$

(9) $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$

这里，$+\infty$ 与 $-\infty$ 是两个记号，不是数，分别读作正无穷大与负无穷大. 对任何实数 x，约定$-\infty<x<+\infty$. 区间(2)称为闭区间，区间(1),(6),(8),(9)称为开区间. 称区间(1)–(4)为有限区间，称区间(5)–(9)为无限区间.

邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$.

- 点 x_0 的 δ 邻域: $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
  有时简记为 $U(x_0)$
- 点 x_0 的去心 δ 邻域: $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

或记作 $U^\circ(x_0, \delta)$

- 点 x_0 的 δ 右邻域: $U_+(x_0, \delta) = [x_0, x_0 + \delta)$
- 点 x_0 的去心 δ 右邻域: $U_+^\circ(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$
- 点 x_0 的 δ 左邻域: $U_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0]$
- 点 x_0 的去心 δ 左邻域 $U_-^\circ(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$

2 实数集基本性质

（1）实数集对四则运算封闭：

$$\forall\ a,b\in\mathbf{R},\text{有}\,a+b\in\mathbf{R},\ a-b\in\mathbf{R},\ a\cdot b\in\mathbf{R}.$$

$$\forall\ a,b\in\mathbf{R},\ \text{且}\ b\neq 0,\ \text{有}\ a/b\in\mathbf{R}.$$

记号. “$\forall$” 表示“对任何的，对任意的”

“$\exists$” 表示“存在”或“存在一个”

“s.t.” 表示“使得”或“满足”

（2）有序性： $\forall\ a,b\in\mathbf{R}$, 必有下列情形之一成立

$$a<b\,,\,a>b\,,\,a=b\,.$$

(3) 实数大小关系具有传递性：若 $a>b$ ，$b>c$ 则 $a>c$.

(4) 实数具有稠密性：即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，又有无理数.

(5) 实数具有完备性（连续性）：实数与数轴一一对应.

3 绝对值与不等式

3.1 绝对值

- 设 $a \in \mathbf{R}$, 称 $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 为 a 的绝对值.

几何上, $|a|$ 表示实数轴上点 a 到原点的距离.

- 性质

(1) $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \iff a = 0$;

(2) $-|a| \leq a \leq |a|$; (3) $|x| \leq a (a \geq 0) \iff -a \leq x \leq a$;

(4) $|x| < a (a > 0) \iff -a < x < a$;

(5) $|ab| = |a||b|$, $|a/b| = |a|/|b|$, $(b \neq 0)$.

由性质 (3) 和 (4) 推出

$$(a-r, a+r) = \{x \mid |x-a| < r\},$$
$$[a-r, a+r] = \{x \mid |x-a| \leq r\}.$$

常用于解含绝对值的不等式

3.2 常用不等式

➢ 绝对值不等式

$$||a|-|b|| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$$

证明：易知 $|a+b| \le |a|+|b|$，由此可得 $|a-b| \le |a|+|-b|$.

利用上式得 $|a|=|a-b+b| \le |a-b|+|b|$，即

$|a|-|b| \le |a-b|$， 轮换 $a\,,b$, 则 $|b|-|a| \le |a-b|$,从而

$$-|a-b| \le |a|-|b| \le |a-b|,$$

$$\longrightarrow \quad ||a|-|b|| \le |a-b|.$$

在将上式中 b 替换成 $-b$ ，则有 $||a|-|b|| \le |a+b|$.

- 贝努利不等式：设 $a > -1$, n 为自然数, 则

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

- 均值不等式：设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为 n 个正数, 则

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

$\sum$ 表示连续求和, $\prod$ 表示连续求积

调和平均数≤几何平均数≤算术平均数

推论：$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $(a, b \geq 0)$

- Cauchy (柯西) 不等式：

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2),$$

等号在 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 成比例时成立.