2.5 矩阵的初等变换与初等矩阵

概述

- 讨论定义在矩阵上的一种变换：初等变换.
- 引入初等矩阵，讨论初等变换与矩阵乘法的关系.
- 给出用初等变换求矩阵逆的方法.
- 建立矩阵的秩的概念, 并提出求秩的有效方法.

一、初等变换及其变换目标

- 线性方程组的求解与初等变换

例

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, & ① \\ \quad\;\; x_2 - 2x_3 = 0, & ② \\ \qquad\quad\;\; x_3 = -3, & ③ \end{cases}$$

- 上述方程组中变元均未被消去，但是可以用回代法求解.
- 非零系数呈阶梯形的方程组可用回代法求解.
- 任何一个方程组可以用同解步骤化为可用回代法求解的方程组.

一、初等变换及其变换目标

- 方程组的同解步骤及其在系数矩阵上的相应变换

以下三种变换将保持方程组的解不变：

（1）交换方程次序；

（2）以不等于 0 的数k 乘某个方程；

（3）一个方程加上另一个方程的k倍.

- 消去一些系数，使得方程组呈阶梯形，从而可以用回代法求解的方法称为Gauss消元法.
- 变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量并未参与运算.
- Gauss消元法完全可以转换为相应矩阵行的变换.

1．矩阵初等变换的定义

定义2 .10 p53　下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 对调两行（对调i, j两行，记作$r_i \leftrightarrow r_j$）；

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素；

（第 i 行乘 k，记作 $r_i \times k$）

(3) 把某一行所有元素的k倍加到另一行对应的元素上去（第j行的k倍加到第i行上记作$r_i + kr_j$）.

同理可定义矩阵的初等列变换(所用记号是把“r”换成“c”).

矩阵的初等列变换与初等行变换统称为初等变换.

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

$$r_i \leftrightarrow r_j \quad \text{逆变换} \quad r_i \leftrightarrow r_j;$$

$$r_i \times k \quad \text{逆变换} \quad r_i \times \left(\frac{1}{k}\right) \text{ 或 } r_i \div k;$$

$$r_i + kr_j \quad \text{逆变换} \quad r_i + (-k)r_j \text{ 或 } r_i - kr_j.$$

2．矩阵的行阶梯形与行标准形

- 矩阵的行阶梯形：具有下列特点的矩阵为行阶梯形：

1. 每一个元素都为零的零行在矩阵的下方.
2. 每一非零行的第一个非零的元素称为领头的非零元。
3. 任意两个相继的非零行中，下一行领头的非零元所在的列在上一行领头的非零元所在列的右边.

例： 下列矩阵为行阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **行标准形：**

  行阶梯形中，每一个非零行领头的非零元是数1，它所在的列其余元素是零的矩阵被称为行标准形。

- **例：** 下列矩阵是行标准形

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **例1** 判断下列矩阵中，哪些是行标准形，哪些是行阶梯形：

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- **定理2.3（p53）**任何$m\times n$阶矩阵都可以通过行初等变换化为行阶梯形和行标准形。
- **例题3** 用行初等变换将下列矩阵化为行阶梯形和行标准形。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

例题3 用行初等变换将下列矩阵化为行阶梯形和行标准形。

$$A=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&4&10\\1&1&2\\2&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&4&10\\0&2&1\\2&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&8\\0&2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_4]{r_2-3r_4}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&11\\0&0&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&3\\0&0&11\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-11r_3/3}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

例题3 用行初等变换将下列矩阵化为行阶梯形和行标准形。

$$A=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&4&10\\1&1&2\\2&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&4&10\\0&2&1\\2&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&8\\0&2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_4]{r_2-3r_4}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&11\\0&0&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&3\\0&0&11\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3/3}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{\substack{r_1-2r_3\\ r_2+r_3}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

例题3 用行初等变换将下列矩阵化为行阶梯形和行标准形。

$$B=\begin{bmatrix}1&2&-3&2\\2&4&1&2\\3&6&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&-3&2\\0&0&7&-2\\0&0&8&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-8r_2/7}\begin{bmatrix}1&2&-3&2\\0&0&7&-2\\0&0&0&-5/7\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2/7;\ -7r_3/5}\begin{bmatrix}1&2&-3&2\\0&0&1&-2/7\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+2r_3/7;\ r_1-2r_3;\ r_1+3r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

初等列变换

初等变换的标准形：

$$F=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$m\times n$ 矩阵 A 总可经过行和列初等变换化为标准形

标准形F由 m,n,r 三个数唯一确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

初等变换的结果审视：

- 初等变换后的矩阵和原矩阵不等.
- 行阶梯形不是惟一的，但是行标准形和标准型是惟一的.
- **Gauss-Jordan** 消元法可以将矩阵化为行标准型；仅用行初等变换不一定能将一个矩阵化为标准形F.
- 矩阵的阶梯形、行标准型和标准型的共性：
  - 非零行的数目 r 相等.
  - n阶方阵的$r = n$时，行标准型是单位矩阵.
  - 从阶梯形可以直接得到标准型.

二、初等变换与初等矩阵

- 讨论初等变换和矩阵乘法的关系：

希望借助于初等矩阵用矩阵的乘法来表示初等变换

1　初等矩阵

- **定义2.12（p56）**　对单位矩阵I施行一次初等变换所得到的矩阵被称为初等矩阵。
- **初等矩阵的类型：**

三种初等变换对应着三种初等方阵

$$
\begin{cases}
1.\text{对调两行或两列：} R_{ij}，\ C_{ij} \\
2.\text{以数 } k \neq 0 \text{ 乘某行或某列：} R_{i(k)}, C_{i(k)} \\
3.\text{以数 } k \text{ 乘某行（列）加到另一行（列）上：} R_{i+j(k)}，\ C_{i+j(k)}.
\end{cases}
$$

例1：讨论下列初等矩阵是使用什么初等变换得到的

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\5&0&0&1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- 交换I 的第一行和第二行
  或者
- 交换I 的第一列和第二列

- I 的第1行乘以5加到第4行
  或者
- I 的第4列乘以5加到第1列

- 用4乘I 的第2行
  或者
- 用4乘I 的第2列

对调矩阵的两行或两列

对调 I 中第 i, j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等方阵

$$
\begin{array}{c}
R_{ij} = \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
R_{ij} = \left(\begin{array}{c}
e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_m
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
$$

以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数$k \neq 0$乘单位矩阵I的第i行$(r_i \times k)$，得初等矩阵$R_{i(k)}$.

$$R_{i(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \textbf{第 } \boldsymbol{i} \textbf{ 行} \qquad R_{i(k)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ ke_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \end{array} i\text{行}$$

以数$k \neq 0$乘第j行(列)加到第i行(列)上

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 $(r_i + kr_j)$

[或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 $(c_j + kc_i)$,

$$
R_{i+j(k)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
R_{i+j(k)} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i + ke_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
$$

2 初等矩阵之间的关系

相应于行、列各3种初等变换，共有6类初等矩阵，不同的有4类：

$$R_{ij}=C_{ij};\quad R_{i(k)}=C_{i(k)};\quad R_{i+j(k)}{}^{T}=C_{i+j(k)}$$

3 初等变换的性质：

初等矩阵都是可逆矩阵，它们的逆矩阵仍然是初等矩阵。

4 初等矩阵的应用

定理2.4 设$\boldsymbol{A}$是一个$\boldsymbol{m\times n}$ 矩阵，对$\boldsymbol{A}$施行一次初等行变换，相当于在$\boldsymbol{A}$的左边乘以相应的$\boldsymbol{m}$阶初等矩阵；对$\boldsymbol{A}$施行一次初等列变换，相当于在$\boldsymbol{A}$的右边乘以相应的$\boldsymbol{n}$阶初等矩阵.

4 初等矩阵的应用

定理2.4 设A是一个$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

$$e_iA=A_i$$

$$A=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\end{array}\qquad R_{ij}=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_j\\ \vdots\\ e_i\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\end{array}\qquad R_{ij}A=\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_j\\ \vdots\\ e_i\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}e_1A\\ \vdots\\ e_jA\\ \vdots\\ e_iA\\ \vdots\\ e_mA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}$$

4 初等矩阵的应用

定理2.4 设A是一个$m \times n$ 矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

$$e_i A = A_i$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \qquad R_{i(k)} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ ke_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \qquad R_{i(k)} A = \begin{pmatrix} e_1 A \\ \vdots \\ ke_i A \\ \vdots \\ e_m A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

4 初等矩阵的应用

定理2.4 设A是一个$m\times n$ 矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

$$e_i A = A_i$$

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\qquad R_{i+j(k)}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i+ke_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\qquad R_{i+j(k)}A=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+kA_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

5 已有的初等变换结果在初等矩阵下的表示形式:

（1）对矩阵A，存在一系列初等矩阵p_1，p_2，…，p_t， 使得 $p_t \dots p_2 p_1 A=R$，其中R是行阶梯形矩阵。

（2）对矩阵A，存在可逆矩阵P和Q使得

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \text{ 或 } A=P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q$$

（3）讨论可逆矩阵的特别情形: p.60,定理2 .6

可逆矩阵仅用行变换可以化为单位矩阵

6、初等变换求矩阵的逆

- 利用初等变换求逆阵的方法分析

当$|A| \neq 0$时，依次施行行初等行变换 $P_1, P_2, \cdots, P_t$，把 A 变成 I，即$P_t P_{t-1} \cdots P_2 P_1 A = I$，则

$A^{-1} = P_t P_{t-1} \cdots P_2 P_1$. $\Rightarrow A^{-1}(A \ \ I) = (I \ \ A^{-1})$

即对 $n \times 2n$ 矩阵 $(A \ \ I)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 I 时，原来的 I 就变成 A^{-1}.

$$(A \ \ I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (I \ \ A^{-1})$$

6、初等变换求矩阵的逆

- 利用初等变换求逆阵的方法分析

当$|A| \neq 0$时，依次施行行初等行变换 $P_1, P_2, \cdots, P_t$,

把 A 变成 I，即$P_t P_{t-1} \cdots P_2 P_1 A = I$，则

$$A^{-1} = P_t P_{t-1} \cdots P_2 P_1. \quad \Rightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$$

利用初等行变换求逆矩阵的方法，还可用于求矩阵$A^{-1}B$． $A^{-1}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \end{pmatrix}$$

6、初等变换求矩阵的逆

- 利用初等变换求逆阵的方法分析

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} I \\ BA^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} I \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

- **例1**

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,求 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$(A\quad I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_4]{\substack{r_1-4r_4\\r_2-3r_4}}\begin{pmatrix}1&2&3&0&1&0&0&-4\\0&1&2&0&0&1&0&-3\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-3r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0&-3&2\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

三、矩阵的等价

定义2 .13 如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B, 就称矩阵 A 与 B 等价, 记为 $A \Leftrightarrow B$.

等价关系的性质：

(1) 自反性 $A \Leftrightarrow A$;

(2) 对称性 若 $A \Leftrightarrow B$,则 $B \Leftrightarrow A$;

(3) 传递性 若 $A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C$,则 $A \Leftrightarrow C$.

具有上述三条性质的关系称为等价关系.

定理2.5： $m \times n$ 矩阵A等价于B，当且仅当存在可逆矩阵P、Q，使得$PAQ = B$.

所有与矩阵 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类，标准形 F 是这个等价类中最简单的矩阵.