6.4 反常(广义)积分

常义积分 $\int_a^b f(x)dx$ $\begin{cases} \text{积分区间有限} \\ \text{被积函数有界} \end{cases}$

$\Big\downarrow$ 推广

反常积分

一、无穷区间的反常积分

二、无界函数的反常积分

I、两类反常积分的定义

1. 无穷积分

定义1 设函数 $f(x)$ 定义在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上，且在任何有限区间 $[a,u]$上可积. 如果存在极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx = J, \tag{1}$$

则称此极限J为函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$ 上的无穷限反常积分(简称无穷积分)，记作

$$J=\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

并称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 收敛.

如果极限(1)不存在, 称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

即: $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$$

易知，对任何$a < b$，$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$同敛态(同时收敛或同时发散)且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

类似地,可定义:

$f(x)$ **在** $(-\infty, b]$ **的无穷积分:**

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)dx.$$

$f(x)$ **在** $(-\infty, +\infty)$ **上的无穷积分，则定义为:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c 为任意取定的常数)

只要有一个极限不存在，就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散 .**

无穷限的反常积分也称为第一类反常积分.

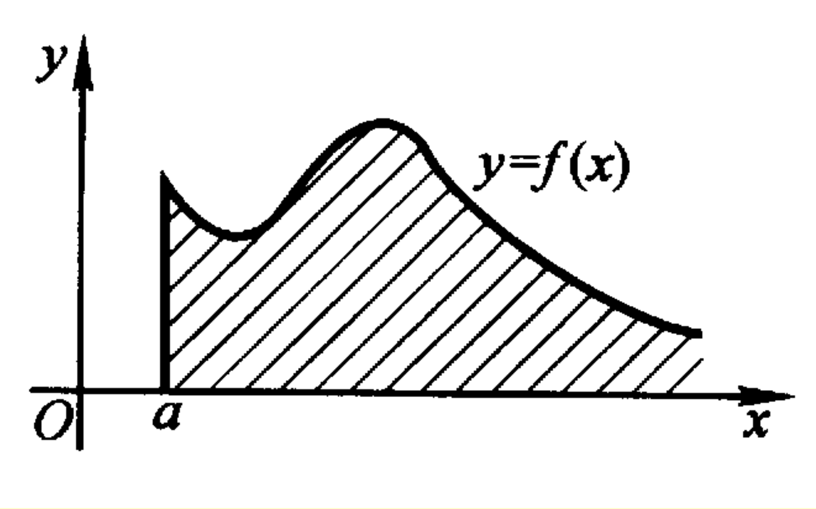
$\int_a^{+\infty} f(x)dx = J$ **收敛的几何意义是:**

若 $f(x)$ **在** $[a,+\infty)$ **上为非负连续函数,**

则曲线 $y = f(x)$ **与直线** $x = a$

以及x**轴之间那一块向右无限延伸的阴影区域的面积为J.**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx.$$



例2. 证明第一类 p 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ **当 $p>1$ 时收敛；$p\le 1$ 时发散，其中 $a>0$.**

证: 当 $p=1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{u\to+\infty}\int_a^{u}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{u\to+\infty}\ln\frac{u}{a}=+\infty\cdot$$

当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{u\to+\infty}\int_a^{u}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{u^{p-1}}-\frac{1}{a^{p-1}}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 广义积分收敛 , 其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p\le 1$ 时, 广义积分发散 .

例3. 讨论下列无穷积分的收敛性： $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$

解：任取实数 a, **讨论如下两个无穷积分：**

$$\int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{1+x^2} \text{ 和 } \int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

由于 $\lim\limits_{u\to-\infty}\int_{u}^{a}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{u\to-\infty}(\arctan a-\arctan u)=\arctan a+\frac{\pi}{2},$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\int_{a}^{u}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{u\to+\infty}(\arctan u-\arctan a)=\frac{\pi}{2}-\arctan a,$

因此这两个无穷积分都收敛.

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$

注：上述结果与 a **无关，因此若取** $a=0$,

则可使计算过程更简洁些.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数， **引入记号**

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\qquad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛 – 莱公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

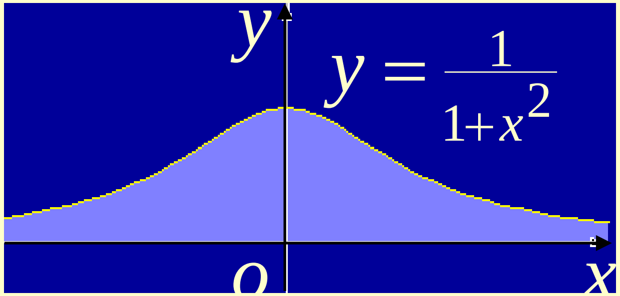
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)}$$

左端积分收敛才能直接用

例4. 计算广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

解: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\left[\arctan x\right]_{-\infty}^{+\infty}$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$



思考: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\cancel{=}0$ 对吗?

分析: $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{0}^{+\infty}=+\infty$ **原积分发散 !**

注意: 对广义积分, 只有在收敛的条件下才能使用

“偶倍奇零” 的性质, 否则会出现错误 .

性质：三大公式的统一表述

设$f(x)$在(a,b)内连续，$F'(x)=f(x)$，且

$-\infty \le a < b \le +\infty, -\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$，则

1.$N-L$公式：

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{\substack{x\to b^- \\ (+\infty)}} F(x) - \lim_{\substack{x\to a^+ \\ (-\infty)}} F(x)$$

2.换元公式：$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$(\lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = a, \lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b)$$

3.分部积分公式：$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

$$uv\Big|_a^b = \lim_{\substack{x\to b^- \\ (+\infty)}} u(x)v(x) - \lim_{\substack{x\to a^+ \\ (-\infty)}} u(x)v(x)$$

例6. 计算 $I=\int_0^{+\infty} xe^{-px}dx\ (p>0)$

解：$I=-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} xde^{-px}=-\frac{1}{p}xe^{-px}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-px}dx$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{px}}-\frac{1}{p^2}e^{-px}\Big|_0^{+\infty}$$

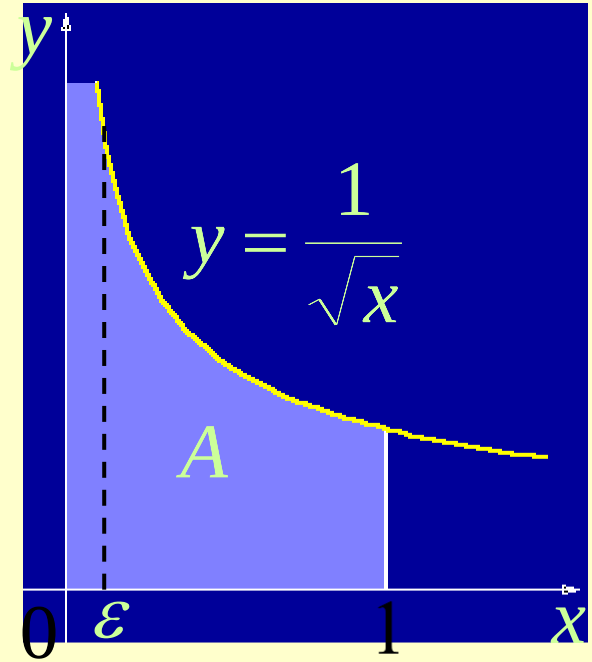
$$=-\frac{1}{p}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{pe^{px}}-\frac{1}{p^2}\lim_{x\to+\infty}(e^{-px}-1)$$

$$=\frac{1}{p^2}$$

2. 无界函数的反常积分

引例: 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

定义2. 设 $f(x),\ x\in(a,b]$, 而在点 a 的任何右邻域内无界, 取 $\varepsilon>0$, 若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在， 则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**反常积分**, 记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛； 如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

类似地 , 若 $f(x), x\in[a,b)$, 而在 b 的任何左邻域内无界, 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续，**而在点 c 的任何邻域内无界，则定义**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

无界函数的积分又称作第二类反常积分，无界点常称为瑕点(奇点)．当且仅当上式右端两个反常积分都收敛时，原积分才收敛

注：若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点，则本质上是常义积分，而不是反常积分.

例如， $$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x$$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则也有类似牛 – 莱公式的的计算表达式：

若 b 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 a 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 a , b 都为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

例7. 计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ (a > 0)$.

解: 显然瑕点为 a, 所以

$$原式 = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

例8. 讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

解: $$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0^-} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{1} = \infty$$

所以反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例9. 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\geq 1$ 时发散 .

证: 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^b = +\infty$

当 $q\neq 1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 该反常积分收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$;

当 $q\geq 1$ 时, 该反常积分发散 .

例10. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$， 求 $I=\int_{-1}^{3}\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

解: $\because x=0$ 与 $x=2$ 为 $f(x)$ 的奇点, 故 I 为广义积分.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=\arctan f(x)+C$$

$$=\big[\arctan f(x)\big]\Big|_{-1}^{0^-}+\big[\arctan f(x)\big]\Big|_{0^+}^{2^-}+\big[\arctan f(x)\big]\Big|_{2^+}^{3}$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\Big[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\Big]+\Big[\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}\Big]=\arctan\frac{32}{27}-2\pi$$

内容小结

1.反常积分 $\left\{\begin{matrix}\text{积分区间无限} \\ \text{被积函数无界}\end{matrix}\right\}$ —— 常义积分的极限

2. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1\end{cases} \qquad (a>0)$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$

说明: (1) 有时通过换元，反常积分和常义积分可以互相转化.

例如，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t$ （令 $x = \sin t$）

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \quad (令\ t = x - \frac{1}{x})$$

(2) 当一题同时含两类反常积分时, 应划分积分区间, 分别讨论每一区间上的反常积分.

(3) 有时需考虑主值意义下的反常积分. 其定义为

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{v.p.}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (c\text{为瑕点}, a<c<b)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

注意: 主值意义下反常积分存在不等于一般意义下反常积分收敛 .

极限的求和运算：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)$存在, 不一定有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$或者$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$存在，

例题 试证 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$，并求其值.

解:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\,\mathrm{d}\,(x-\frac{1}{x})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0^+}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

II. 无穷积分的性质与收敛判别法

性质1(线性性质) 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ 都收敛,

k_1, k_2 为常数，则 $\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)dx + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)dx.$$

性质2（路径性质，可加性)

若 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, $a<b$,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散,

且有 $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$$

性质3（绝对收敛性） 若 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且有 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 亦必收敛，并有

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|dx.$$

例2 判别 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{x^6+1}}$ 的收敛性.

解 显然 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^6+1}}\right|\le\frac{1}{x^{6/5}}$. 又 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{6/5}}$ 收敛，

所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{x^6+1}}$ 收敛.

定理2 (比较判别法) 设定义在 $[a,+\infty)$上的两个**非负函数** f, g 在任何有限区间$[a, u]$上可积， 且存在 $G>a$, 满足：$0\le f(x)\le g(x), x\in[G,+\infty)$,

则当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 亦收敛;

当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 亦发散.

证明见教材P185

例3 判别 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$ 的收敛性.

解 显然 $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\le\frac{1}{x^{3/2}}$. 由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ 收敛, 因此

$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$ 收敛.

推论1 设非负函数 f 和 g 在任何 $[a,u]$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c.$$

(i) 若 $0<c<+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛性相同;

(ii) 若 $c=0$, 则由 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可得 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(iii) 若 $c=+\infty$, 则由 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散可得 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论2 设 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积.

(i) 若 $f(x)\le\frac{1}{x^p}\ (p>1)$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 若 $f(x)>\frac{1}{x^p}\ (p\le 1)$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

选用 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 作为比较对象

推论3 (比阶判别法)

设 $f(x)$ 定义于 $[a,+\infty)$ 的非负函数且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$.

则有:

(i)当 $p>1, 0\le\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(ii)当 $p\le 1, 0<\lambda\le+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

例4 **讨论下列无穷限积分的收敛性;**

1) $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$; **2)** $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} dx.$

解: 1) 由于对任何实数 α, **都有**

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot x^\alpha e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{e^x} = 0, \quad (p=2, \lambda=0)$$

故 $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$; **对任何实数** α **都是收敛的.**

2) 由于 $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} = 1, \quad (p=\frac{1}{2}, \lambda=1)$

故 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} dx.$ **发散.**

例5 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性 ($k>0$).

解 (i) $p>1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1+p}{2}}\cdot\frac{\ln^k x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^{\frac{p-1}{2}}}=0.$

因此由推论3知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) $p\le 1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\ln^k x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-p}\ln^k x=+\infty.$

因此同理知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

例6 判别无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \mathrm{d} x$ 的敛散性 .

解： 因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \frac{\arctan x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

故无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \mathrm{d} x$ 是发散的 .

例7 判别无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} \mathrm{d} x}{1+x^2}$ 的敛散性 .

解： 因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{1+x^2} = +\infty$,

故无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} \mathrm{d} x}{1+x^2}$ 是发散的 .

例 9 设 $p,q>0$. 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 首先注意被积函数是正的. 因为

$$\sin y\sim y \quad \text{且} \quad \ln(1+y)\sim y, \qquad \text{当 } y\to 0,$$

从而

$$\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\sim\frac{1}{x^p} \quad \text{且} \quad \ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)\sim\frac{1}{x^q}, \qquad \text{当 } x\to+\infty,$$

进而

$$\lim_{x\to+\infty}x^{p+q}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^p\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\lim_{x\to+\infty}x^q\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)=1.$$

所以根据 p 幂比较判别法知, 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)\mathrm{d}x$ 当 $p+q>1$ 时收敛, 当 $p+q\leqslant 1$ 时发散.

III. 瑕积分的性质与收敛判别法

瑕积分的性质与收敛判别,与无穷积分的性质与收敛判别相类似. 因此本节内容大都是罗列出一些基本结论, 并举例加以应用, 而不再进行重复论证.

一、 瑕积分的性质

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx$$

假设 $x = a$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点.

两种广义积分之间存在着密切的联系:

设 $\int_a^b f(x)dx$ 中 $x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 作变换

$$y = \frac{1}{x-a}$$

则有 $\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(a+\frac{1}{y})}{y^2}dy$

性质1 **若** $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ **和** $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ **都收敛,** k_1, k_2 **为常数,**

则 $\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx$ **也收敛,且**

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)dx + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)dx.$$

性质1 **若** $\int_a^{b} f_1(x)dx$ **和** $\int_a^{b} f_2(x)dx$ **都收敛,** k_1, k_2 **为常数,**

则 $\int_a^{b}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx$ **也收敛,且**

$$\int_a^{b}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^{b} f_1(x)dx + k_2\int_a^{b} f_2(x)dx.$$

性质2 若 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积， $a<b$,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散，

且有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$

性质2 若 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点， $c\in(a,b)$,

则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^c f(x)dx$ 同时收敛或同时发散，

且有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

性质3 若 $f(x)$ **在任何有限区间** $[a,u]$ **上可积，且有** $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ **收敛，则** $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ **亦必收敛，并有**

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|dx.$$

性质3 若 $f(x)$ **在任何有限区间** $[u,b]$ **上可积，且有** $\int_a^{b}|f(x)|dx$ **收敛，则** $\int_a^{b}f(x)dx$ **亦必收敛，并有**

$$\left|\int_a^{b}f(x)dx\right|\le\int_a^{b}|f(x)|dx.$$

绝对收敛的瑕积分，它自身也一定收敛.
但是它的逆命题一般不成立.

二 比较判别法

定理2(比较判别法) 设 $x=a$ 同为两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的瑕点,且在任何区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积,且满足

$$0\le f(x)\le g(x), x\in U_{+}^{0}(a),$$

则当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(或者,当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散时, $\int_a^b g(x)dx$ 必发散).

推论1 设 $f(x)$ 定义于 $(a,b]$(a为瑕点)，且在任区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积，则有:

(i) 当 $0\le f(x)\le\dfrac{1}{(x-a)^p}$ 且 $p<1$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii) 当 $f(x)\ge\dfrac{1}{(x-a)^p}$ 且 $p\ge1$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

推论2 若 $f(x)\ge0,\ g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$. 则有:

(i) 当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛态;

(ii) 当 $c=0$ 时，由 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛可推知 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛;

(iii) 当 $c=+\infty$ 时，由 $\int_a^b g(x)dx$ 发散可推知 $\int_a^b f(x)dx$ 也发散.

比阶判别法　选用 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 作为比较对象

推论3 设 $f(x)$ 是定义于 $(a,b]$(a为瑕点) 的非负函数且在任何区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-a)^q f(x)=\lambda$.

则有:(i)当 $q<1, 0\le\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii)当 $q\ge1, 0<\lambda\le+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

例1 讨论下列瑕积分的收敛性:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx$; **2)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx.$

解: 1) 瑕点为 $x=0$. **又**

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4}}\cdot\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}}=\lim_{x\to 0^+}(4x^{\frac{1}{4}})=0,$$

$(p=\frac{3}{4},\lambda=0)$ **故** $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx$ **收敛.**

2) 瑕点为 $x=1$. **又**

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln x}=1,$$

$(p=1,\lambda=1)$ **故** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx$ **发散.**

例2 判别瑕积分 $\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3-1}\ln x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 瑕点为 $x=1$,

$$\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3-1}}\frac{1}{\ln x}=\frac{\sin x}{(x-1)^{1/3}(x^2+x+1)^{1/3}\ln(1+x-1)}.$$

由于 $\frac{\sin x}{(x^2+x+1)^{1/3}}\to\frac{\sin 1}{\sqrt[3]{3}}\neq 0\quad(x\to 1)$, 而

$$\frac{1}{(x-1)^{1/3}\ln(1+x-1)}\sim\frac{1}{(x-1)^{1/3}(x-1)}=\frac{1}{(x-1)^{4/3}},$$

因此由 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{4/3}}$ 发散知 $\int_1^2\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3-1}\ln x}\mathrm{d}x$ 发散.

例3 判定$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$的敛散性.

解 当$s<1$时$\mathrm{x}=0$是瑕点，故分别考虑积分$\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$与$\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$的敛散性，当且仅当两积分都收敛时原积分收敛. 因

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-s}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}=1$$

故当且仅当$1-s<1$，即$s>0$时$\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$收敛.因

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}=0,$$

故积分$\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$恒收敛. 因此原积分在$s>0$时收敛，在$s\le 0$时发散.

例4 研究积分$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x$的敛散性.

解 因$x=0,1$都可能为瑕点(奇点)，故应该分别考虑积分

$\int_0^c x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x$ 的 敛散性，

其中$c\in(0,1)$.因

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}=1,$$

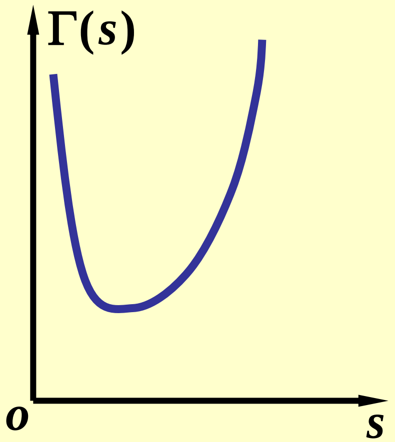
故当且仅当$1-\alpha<1$即$\alpha>0$时$\int_0^c x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x$收

敛.同理，当且仅当$\beta>0$时$\int_c^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x$收敛.

因此原积分当且仅当$\alpha,\beta>0$时收敛.

三、Euler积分 (含参变量 的广义积分)

1. Γ函数: $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (s>0)$



2. B－函数:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \quad (\alpha>0,\ \ \beta>0)$$

$$\boxed{\text{转换公式:}\ B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$$

Γ- 函数的几个重要性质: $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \ (s>0)$

1．递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ (s>0).$

$$\Gamma(n+1)=n! \quad (n\text{为自然数})$$

2．当 $s\to+0$ 时，$\Gamma(s)\to+\infty.$

3. 余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}\ (0<s<1).$

取 $s=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\Gamma(\dfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

4．在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ 中，作代换 $x=u^2$,

有 $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}u^{2s-1}e^{-u^2}du.$

(4) $\Gamma(s)$的其他形式

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

令 $x=u^2$, 得

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2s-1}\,\mathrm{d}u \quad (s>0)$$

再令 $2s-1=t$, 即 $s=\dfrac{1+t}{2}$, 得应用中常见的积分

$$\boxed{\int_0^{+\infty} u^t e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right) \quad (t>-1)}$$

这表明左端的积分可用 Γ 函数来计算. 例如,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例1 求$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x$.

解 对两积分同时作代换$t=x^4$，则有$x=t^{\frac{1}{4}}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}$,

故 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{16}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{16\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$. （余元公式）

例2 求$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^{1/3}}}\mathrm{d}x$.

解 作代换$t=x^{1/3}$,则由转换公式和递推公式得

$I=\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}3t^2\,\mathrm{d}t=3\mathrm{B}(3,\frac{1}{2})=\frac{3\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{3\cdot 2!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{16}{5}$.

例3 求$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x.$

解 令$1+x^4=\frac{1}{t}$，则$\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)$.于是

$$I=\int_1^0 t\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma(1)}=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(余元公式)

例4 求$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

解 令$t=\sin 2t$，则$x=\arcsin\sqrt{t}$.故

$$I=\int_0^1 t^2(1-t)\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t(1-t)}}=\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(4)}=\frac{\pi}{32}.$$

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\Gamma(n+1)=n!,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$