5.3实对称矩阵的相似对角化

5.3、实对称矩阵的相似对角化

实对称矩阵：$A = [a_{ij}]_{n\times n}$；$a_{ij} \in R$, $A^{T} = A$

性质1 **实对称矩阵的特征值为实数.**

证明 设复数λ为实对称矩阵A的特征值，复向量x为对应的特征向量，

即 $$Ax = \lambda x \text{ , } x \neq 0.$$

用$\overline{\lambda}$表示λ的共轭复数，$\overline{x}$表示x的共轭复向量，

则 $$A\overline{x} = \overline{A}\,\overline{x} = \overline{(Ax)} = \overline{(\lambda x)} = \overline{\lambda}\,\overline{x}.$$

$$Ax = \lambda x, A\overline{x} = \overline{\lambda}\,\overline{x}.$$

于是有 $\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \lambda x = \lambda \overline{x}^T x,$

及 $\overline{x}^T Ax = \left(\overline{x}^T A^T\right) x = \left(A\overline{x}\right)^T x = \left(\overline{\lambda}\,\overline{x}\right)^T x = \overline{\lambda}\,\overline{x}^T x.$

两式相减，得

$$\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\overline{x}^T x = 0.$$

但因为 $x \neq 0,$

所以 $\overline{x}^T x = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|^2 \neq 0, \Rightarrow \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) = 0,$

即 $\lambda = \overline{\lambda},$ 由此可得λ是实数.

性质1的意义

由于实对称矩阵A的特征值λ_i为实数,所以齐次线性方程组

$$(\lambda_i I - A)x = 0$$

是实系数方程组,由$\left|\lambda_i I - A\right| = 0$知必有实的基础解系,从而对应的特征向量可以取实向量.

性质2 设λ_1,λ_2是实对称矩阵A的两个特征值，p_1，p_2是对应的特征向量，若$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则p_1与p_2正交.

证明 $\lambda_1 p_1 = A p_1,\ \lambda_2 p_2 = A p_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2,$

$\because A$对称，$A = A^T$，

$$\therefore \lambda_1 p_1^T = (\lambda_1 p_1)^T = (A p_1)^T = p_1^T A^T = p_1^T A,$$

于是 $\lambda_1 p_1^T p_2 = p_1^T A p_2 = p_1^T (\lambda_2 p_2) = \lambda_2 p_1^T p_2,$

$$\Rightarrow \qquad (\lambda_1 - \lambda_2) p_1^T p_2 = 0.$$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \therefore p_1^T p_2 = 0.$ 即p_1与p_2正交.

性质3

设 A为 n阶对称矩阵,λ 是A的特征方程的 r 重根,则矩阵（$\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A}$）的秩 $\mathrm{r}(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})=n-r$,从而对应特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量.

性质4 设A为n阶实对称矩阵,则必有正交矩阵P,使 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中Λ是以A的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

证明 **设A的互不相等的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,它们的重数依次为$r_1,r_2,\cdots,r_s(r_1+r_2+\cdots+r_s=n)$.**

根据性质1（对称矩阵的特征值为实数）和性质3(如上)可得:

实对称矩阵可以正交对角化（定理6.6）

对应特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$, 恰有 r_i 个线性无关的实特征向量, 把它们正交化并单位化, 即得 r_i 个单位正交的特征向量. 由 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$ 知, 这样的特征向量共可得 n 个.

由性质2知**对应于不同特征值的特征向量正交**, 故这 n 个单位特征向量两两正交.

以它们为列向量构成正交矩阵 P, 则

$$P^{-1}AP=P^{-1}P\Lambda=\Lambda$$

其中对角矩阵Λ的对角元素含 r_1 个 $\lambda_1,\cdots,r_s$ 个 λ_s, 恰是A的n个特征值.

对称矩阵的正交对角化的方法

1　正交矩阵及其性质：　$P^TP = PP^T = I$

n阶方阵为正交矩阵的充要条件是：

（1）$P^{-1} = P^T$

（2）P的列（行）向量是标准正交的向量组。

2 用正交矩阵将对称矩阵化为对角矩阵的步骤：

1. 求A的特征值;
2. 由$(\lambda_i I - A)x = 0$，求出A的特征向量;
3. 将特征向量正交化;
4. 将特征向量单位化.

例　对下列各实对称矩阵，分别求出正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

$$(1)A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\quad (2)A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解　(1)第一步　求 A 的特征值

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

得　$\lambda_1=4, \lambda_2=1, \lambda_3=-2.$

第二步　由$(A-\lambda_i E)x=0$,求出A的特征向量

对 $\lambda_1=4$,由$(A-4E)x=0$,得

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_2+4x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

对 $\lambda_2=1$,由$(A-E)x=0$,得

$$\begin{cases} -x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ 2x_2+x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系　$\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

对 $\lambda_3=-2$,由$\left(A+2E\right)x=0$,得

$$\begin{cases} -4x_1+2x_2=0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 2x_2-2x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

第三步　　将特征向量正交化

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3是属于A的3个不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的特征向量,故它们必两两正交.

第四步　　将特征向量单位化

令　$\eta_i=\dfrac{\xi_i}{\left\|\xi_i\right\|},\quad i=1,2,3.$

得 $\eta_1=\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}.$

作 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\-1&-2&2\end{pmatrix},$

则 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

$$(2)\ A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(4-\lambda)^2,$$

得特征值　$\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=4.$

对 $\lambda_1=2$,由$(A-2E)x=0$,得基础解系　$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

对 $\lambda_2=\lambda_3=4$,由$(A-4E)x=0$,得基础解系

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ ξ_2与ξ_3恰好正交，

所以ξ_1, ξ_2, ξ_3两两正交.

再将ξ_1, ξ_2, ξ_3单位化，令$\eta_i = \dfrac{\xi_i}{\|\xi_i\|}(i = 1,2,3)$得

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

于是得正交阵

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

三、小结

1. 对称矩阵的性质：

(1) 特征值为实数；

(2) 属于不同特征值的特征向量正交；

(3) 特征值的重数和与之对应的线性无关的特征向量的个数相等；

(4) 必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值.

2. 利用正交矩阵将对称阵化为对角阵的步骤：

(1)求特征值；**(2)**求特征向量；**(3)**将特征向量正交化；**(4)**最后单位化.

思考题

设n阶实对称矩阵A满足$A^2 = A$,且A的秩为r,试求行列式$det(2\mathrm{I} - A)$的值.

思考题解答

解 由 $A^2=A$ 可得 A 的特征值为1或0, 又 A 是实对称阵, 且秩为 r, 故存在可逆阵 P, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\Lambda,$$

其中 E_r 是 r 阶单位阵.

从而 $\det(2E-A)=\det(2PP^{-1}-P\Lambda P^{-1})$

$$=\det(2E-\Lambda)=\det\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 2E_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$=2^{n-r}.$$