A n阶方阵 $\Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$

证：① $|A| \neq 0$ 时，由 $A \cdot A^* = |A| \cdot I_n$，$|A^*| = |A|^{n-1}$ 显然

② $|A| = 0$ 时，下证 $|A^*| = 0$

若 $|A^*| \neq 0$，则 $(A^*)^{-1}$ 存在.

由 $A \cdot A^* = |A| \cdot I_n = 0$，故 $A = 0$，则 $A^* = 0$.

这与 $|A^*| \neq 0$ 矛盾，故 $|A^*| = 0$.

则 $|A^*| = |A|^{n-1} = 0$，成立

综上，$|A^*| = |A|^{n-1}$ 对 $\forall$ n阶方阵 A 成立.

1. 设 A 为 n 阶对称矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，证明：

(1) B^2 是对称矩阵；

(2) $AB-BA$ 是对称矩阵，$AB+BA$ 是反对称矩阵。

(1) 由B为n阶反对称矩阵. 知 $-B = B^T$

$(B^2)^T = (BB)^T = B^T \cdot B^T = (-B)(-B) = B^2$.

故 B^2 是对称矩阵

(2) $A^T = A$. $-B = B^T$

$(AB-BA)^T = B^T \cdot A^T - A^T \cdot B^T = -B \cdot A + A \cdot B = AB-BA$.

故得证 $AB-BA$ 是对称矩阵.

$(AB+BA)^T = B^T \cdot A^T + A^T \cdot B^T = -BA - AB = -(AB+BA)$

故得证 $AB+BA$ 是反对称矩阵

2. 判断下列矩阵是否可逆，如可逆，求其逆矩阵。

(1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，其中 a,b,c,d 满足 $ad-bc=1$；

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

(1). $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = 1 \neq 0$. 故矩阵可逆.

令 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \cancel{\begin{bmatrix} d & -d \\ -b & d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(2). 令 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $|B| = 1 \neq 0$. 故矩阵可逆

$B^{-1} = \frac{B^*}{|B|} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 设 $A^3=2I$，证明 $A+2I$ 可逆，并求 $(A+2I)^{-1}$。

$$A^3+8I=(A+2I)(A^2-2A+4I)=10I$$

$$(A+2I)\frac{(A^2-2A+4I)}{10}=I$$

$|A+2I|\neq 0$，可逆

$$(A+2I)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4I)$$

4. 设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$，求 B。

$AB=A+2B$

$\Rightarrow (A-2E)B=A-2E+2E$

$(A-2E)(B-E)=2E$

$A-2E=\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，且 $|A-2E|=-1\neq 0$，可逆.

$(A-2E)^*=\begin{bmatrix}-1&4&3\\-1&5&3\\1&-6&-4\end{bmatrix}$　　$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{|A-2E|}(A-2E)^*=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$

$B=(A-2E)^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{bmatrix}$

A+

3.16

1. 设矩阵 A、B 满足 $A^{*}BA=2BA-8I$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$A^{*}$ 是 A 的伴随矩阵，求 B。

$|A|=-2\neq 0$. A可逆.

$|A|A^{-1}BA=2BA-8I$.

$|A|A^{-1}B=2B-8A^{-1}$

$|A|B=2AB-8I$

$(2A+2I)B=8I$

$B=4I(A+I)^{-1}$.

$A+I=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

~~解~~证：$\because AB=A+B$

$\therefore AB-A-B+I=I.$

$(A-I)(B-I)=I$

$(A-I)$ 可逆，逆矩阵 $B-I$.

$\Rightarrow (B-I)\cdot(A-I)=I$

$BA-A-B+I=I.$

$BA=AB=A+B$，得证.