大学物理

University Physics

华 中 科 技 大 学 物 理 学 院

王 宁

ningwang@hust.edu.cn

回顾 第五节 机械波

一、机械波的传播条件：

1). 波源 ---产生振动的物体；

2). 弹性媒质 ---传播振动的介质。

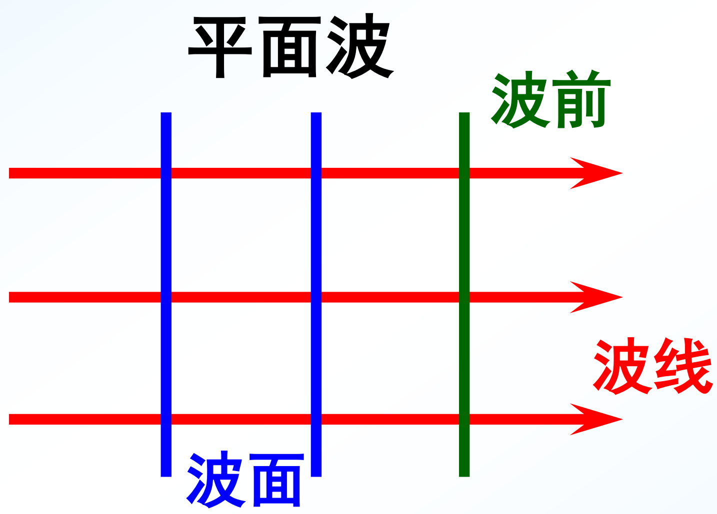
振动是波动的基础
波动是振动的传播

二、波动的描述：

一维简谐波的动力学方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

其中：$u^2=\dfrac{Y}{\rho}$



① 波速$\vec{u}$：取决于介质的性质（弹性和惯性）

② 波长λ

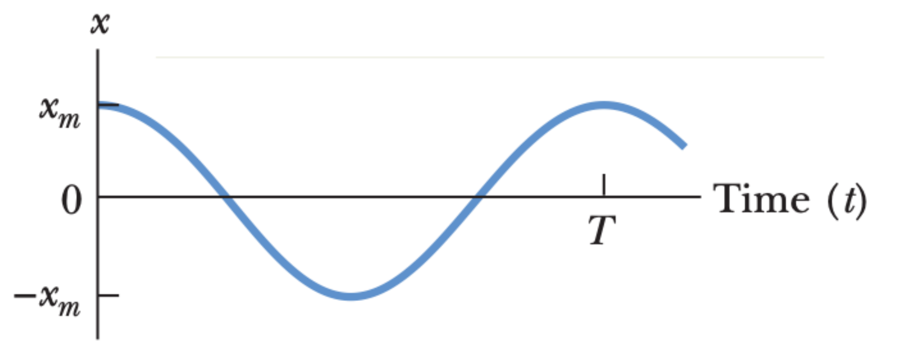
③ 周期T：$T_{振动}=T_{波动}$

④ 频率ν

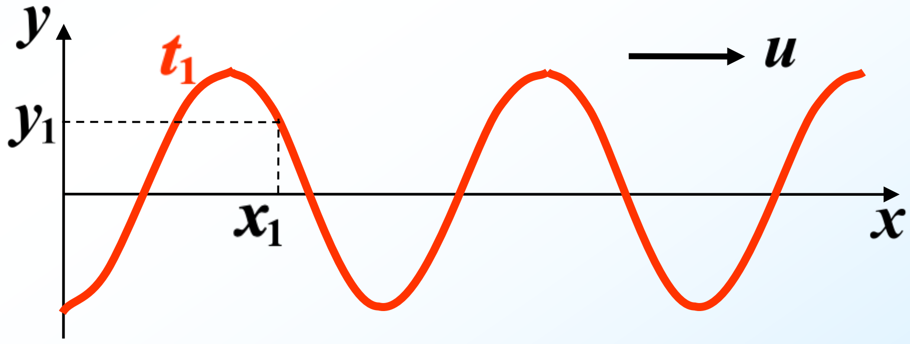
⑤ 波数k：$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

二 波动的描述

振动曲线：某一个质点在不同时刻的位移状况的曲线



波形曲线：某个时刻各个质点位移状况的曲线



问题：如何用数学方法去描述波的传播？

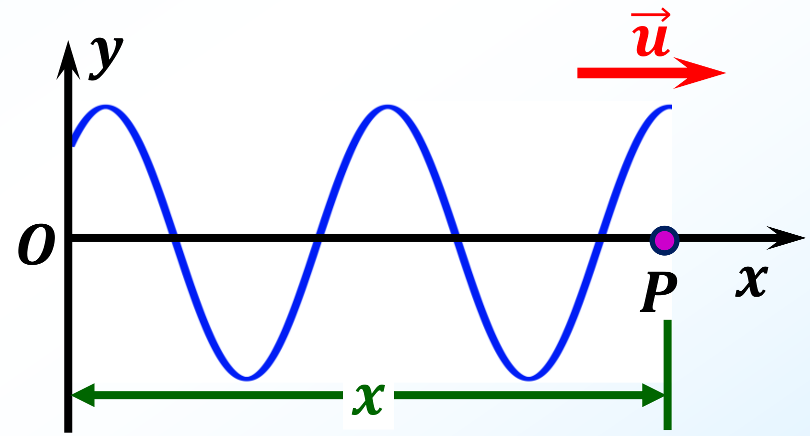
三 平面简谐波

平面简谐波

媒质中各质点都作谐振动并且向一个方向传播。

1. 波函数的概念

描述任意时刻，任意点的振动状态的函数，被称为波函数。



设一简谐波波源在原点O处，以速度u沿x轴方向传播。

波源的振动方程： $y = A\cos\omega t$

x轴上任意一点P： 重复O点运动，但落后于O点。

而O点的振动需要经过一定时间Δt才能传播到P点： $\Delta t = \dfrac{x}{u}$

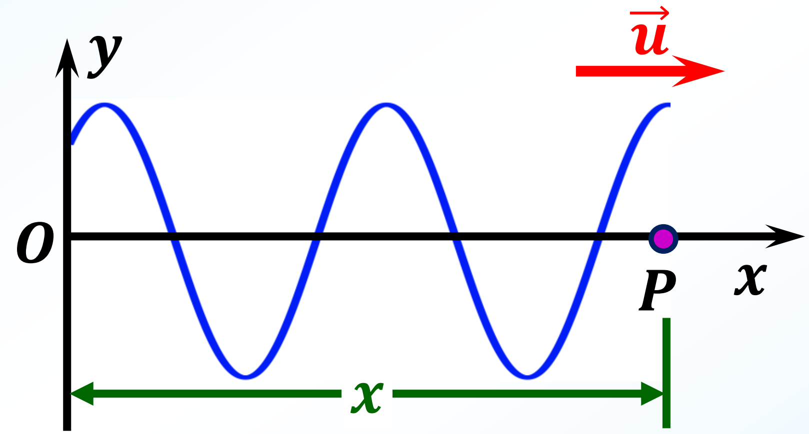
三 平面简谐波

P点在t时刻的振动状态

=

O点在$t-\frac{x}{u}$时刻的振动状态

∴ P点在t时刻的振动状态



$$y = A\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$ ----平面简谐波波函数

波函数反映的是任何时刻任何位置的运动状态。

波传播的是波源处质点的振动状态。 ----传播波源的相位

波速 = 相位传播的速度 = 相速

P点的相位总是落后于O点的相位。

三 平面简谐波

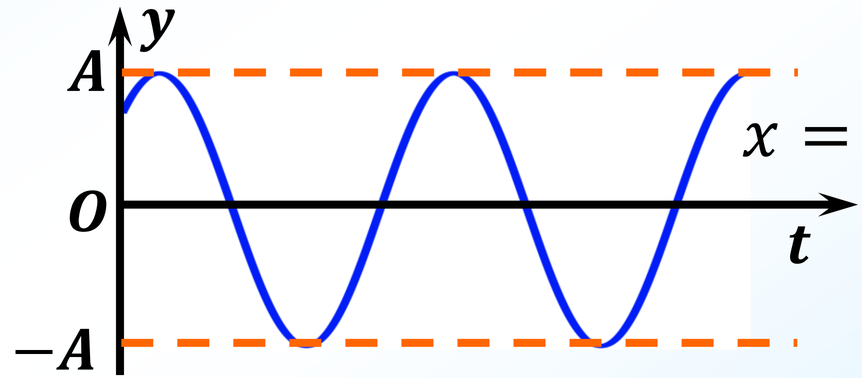
2. 波函数的意义

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

y是x和t的多元函数。

(1). x一定时： $x = x_1$

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x_1}{u}\right)$$



表示x_1处质点的振动方程。

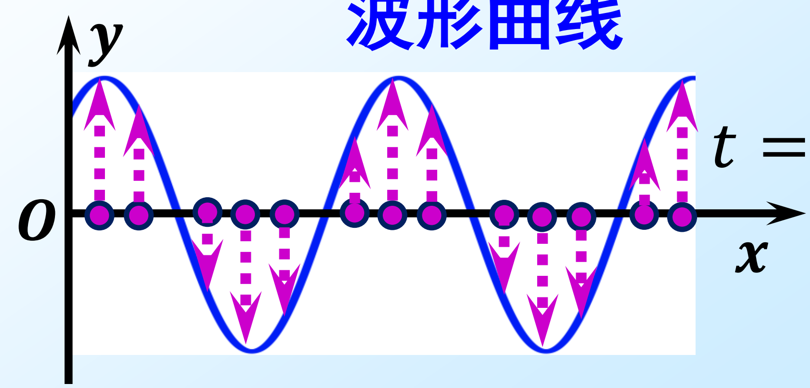
$-\dfrac{\omega x_1}{u}$ **x_1点的初相位，表示着该点的振动相位相对于振动源的相位的落后。**

(2). t一定时： $t = t_1$

$$y = A\cos\omega\left(t_1 - \frac{x}{u}\right)$$

表示t_1时刻的波形方程。

波形曲线



三 平面简谐波

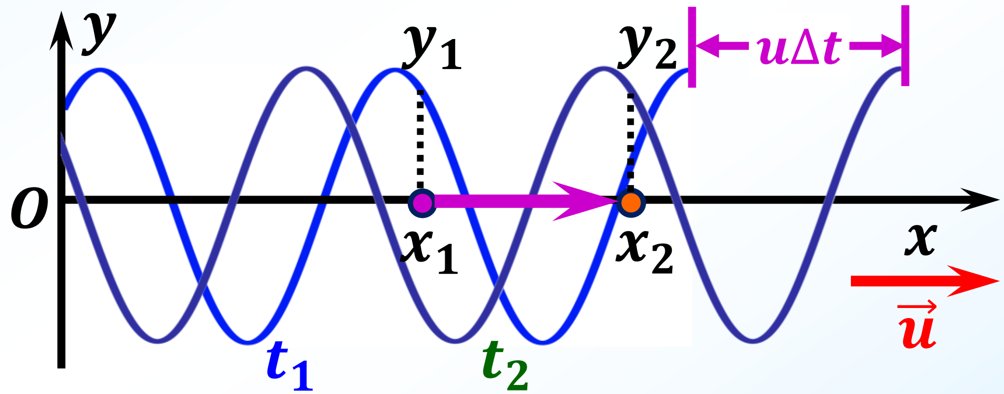
$$y_1 = A\cos\omega\left(t_1 - \frac{x_1}{u}\right)$$

$$\boxed{y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}$$

表示t_1时刻x_1处质点的**位移**。

当$t = t_1 + \Delta t = t_2$时，

考察$x_2 = x_1 + u\Delta t$处质点：



$$y_2 = A\cos\omega\left(t_2 - \frac{x_2}{u}\right)$$

$$= A\cos\omega\left(t_1 + \Delta t - \frac{x_1 + u\Delta t}{u}\right) = A\cos\omega\left(t_1 - \frac{x_1}{u}\right) = y_1$$

t_2时刻x_2处质点的位移恰好就是t_1时刻x_1处质点的位移。

经过Δt时间，整个波形向前移动了一段距离 $\Delta x = u\Delta t$

在介质中传播的**行波**　　波形传播的速度 = **相速**

三 平面简谐波

3. 讨论

(1). 平面简谐波的一般形式

通常情况下，$t=0$时，波源的初始相位 $\varphi \neq 0$

波源的振动方程： $y = A\cos(\omega t + \varphi)$

计入P点落后的相位： $\omega \Delta t = \omega \dfrac{x}{u}$

$$\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]}$$ ——波函数的一般形式

(2). 波函数的几种标准形式

$$\because \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad \lambda = uT = \frac{u}{\nu} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}$$

$$\therefore \quad \boxed{y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]} \qquad \boxed{y = A\cos[(\omega t - kx) + \varphi]}$$

三 平面简谐波

(3) 位相差与波程差的关系

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \varphi\right) - \left(\omega t - \frac{2\pi x_2}{\lambda} + \varphi\right)$$

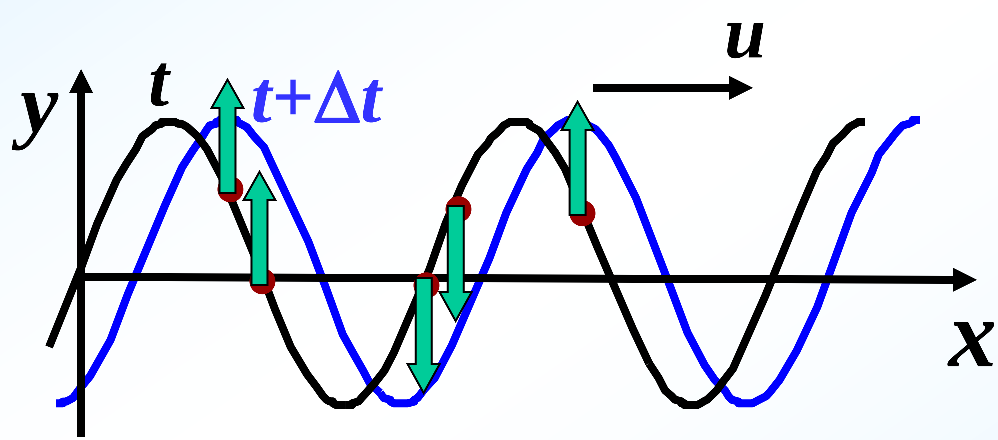
$$= \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = k\Delta x$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = k\Delta x}$$

三 平面简谐波

(4) 质点振动方向的确定

若已知某时刻的波形曲线，确定该时刻各质点的运动方向。

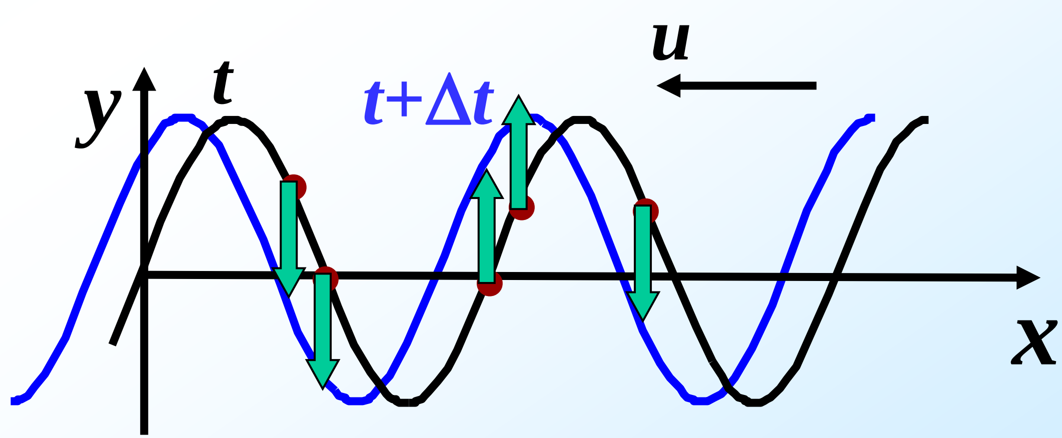


右行波

方法：

借助下一邻近时刻的波形曲线

沿波的传播方向平移波形。



左行波

例题

例1：已知$y=0.05\cos(100\pi t-5x)\ (m)$（SI制），计算$A$，$T$，$u$，$\lambda$?

解： $y=A\cos[(\omega t-kx)+\varphi]$

比较可得 $A=0.05\ m$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=100\pi \quad\Rightarrow\quad T=\frac{1}{50}=0.02\ s$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=5 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{2\pi}{5}=1.26\ m$$

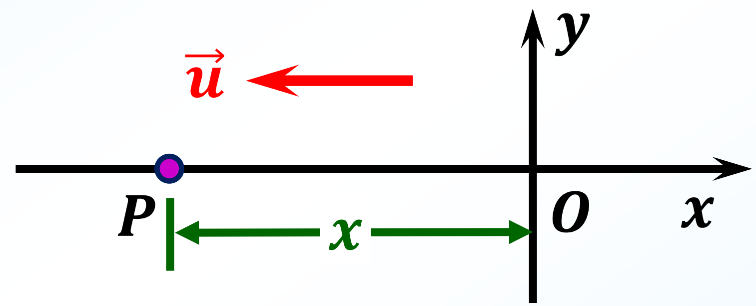
$$u=\frac{\lambda}{T}=63\ m/s$$

三 平面简谐波

(5). 沿x轴反向传播的平面简谐波的波函数

已知波源的振动方程：

$$y = A\cos\omega t$$



P点在t时刻的振动状态

=

O点在$t - \frac{-x}{u} = t + \frac{x}{u}$时刻的振动状态

沿x轴反向传播的波函数：$y = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{u}\right)$

$$y = A\cos\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right)$$

"$-$" 沿正方向

"$+$" 沿负方向

三 平面简谐波

(6) 由任意参考点的振动方程写波函数：

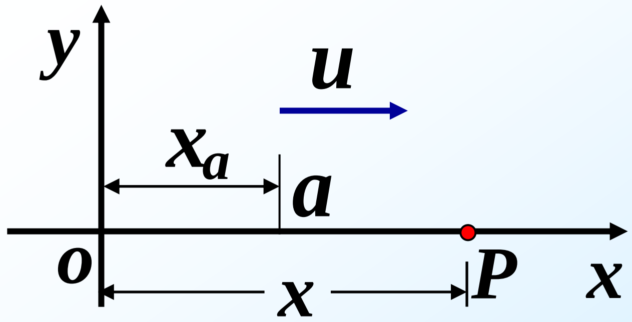
任意参考点均可作为**准波源**。

从振动时间角度看：

任意点比参考点晚振动，减去传播时间；
任意点比参考点早振动，加上传播时间。

$$y_a = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_a}{u}) + \varphi]$$



从振动位相角度看：

任意点比参考点晚振动，位相落后。

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

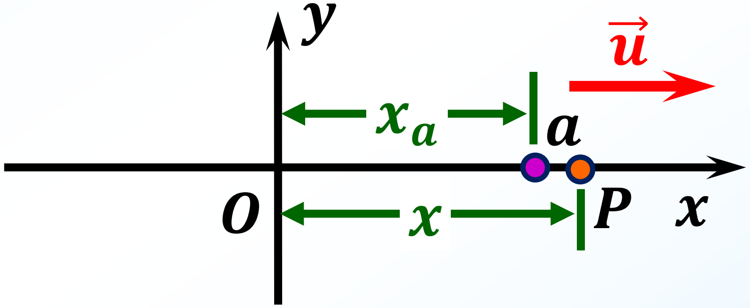
$$y = A\cos[\omega t - \frac{2\pi(x - x_a)}{\lambda} + \varphi]$$

左行波如何写?

例题

例1：已知波沿x轴正方向传播，波速为u，$x = x_a$处质点的振动方程为：$y_a = A\cos(\omega t + \varphi)$，试写出波函数。

解： 考察a点右边的任意一点P，



P点振动状态相对于a点的振动状态落后：

$$\Delta t = \frac{x - x_a}{u}$$

据此写出波函数：$$\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x - x_a}{u}\right) + \varphi\right]}$$

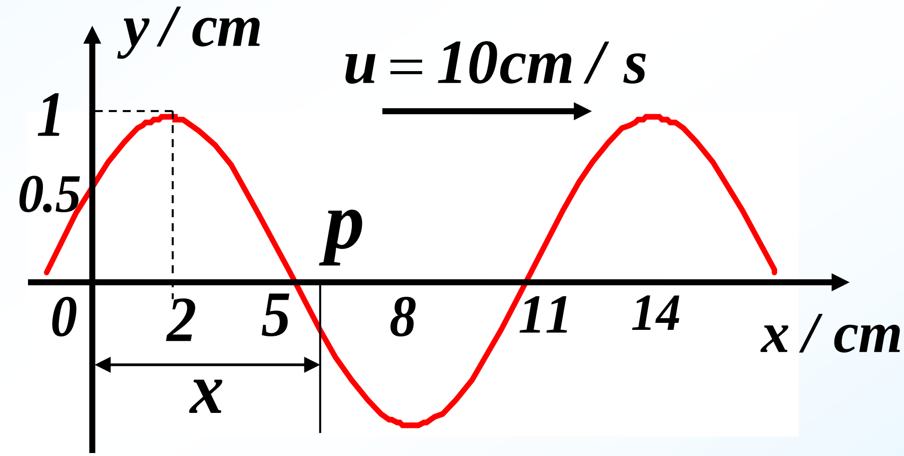
同理，若P点在a点的左边，P点的振动相对于a点提前

$$\Delta t = \frac{x_a - x}{u}$$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x_a - x}{u}\right) + \varphi\right] = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x - x_a}{u}\right) + \varphi\right]$$

例题

例2：已知$t=0$时刻的波形如图，（1）写出波函数。



解： **根据波形曲线：**

$$A=0.01\,m\quad \lambda=0.12\,m$$

$$u=0.1\,m/s$$

$$\therefore\quad T=\frac{\lambda}{u}=1.2\,s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{5\pi}{3}\,rad/s\quad k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{50\pi}{3}\,s^{-1}$$

写出波函数： $$y=0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}t-\frac{50\pi}{3}x+\varphi\right)\qquad \varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$\left.\begin{aligned}&x=0.02\\&y=0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ y=0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}t-\frac{50\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)\,m$$

例题

(2) 求$x_1 = 5cm$和$x_2 = 11cm$两处质点振动相位差。

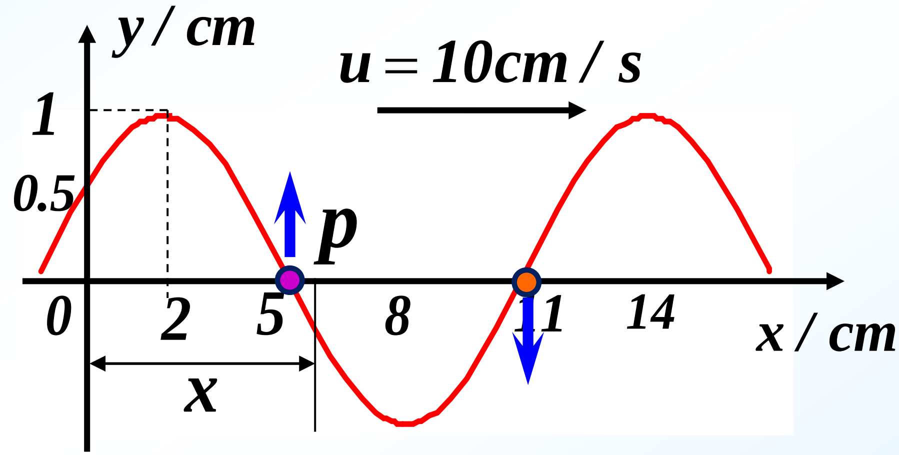
$$y = A\cos[(\omega t - kx) + \varphi]$$

x_1处的振动方程：

$$y_1 = A\cos[(\omega t - kx_1) + \varphi]$$

x_2处的振动方程：

$$y_2 = A\cos[(\omega t - kx_2) + \varphi]$$



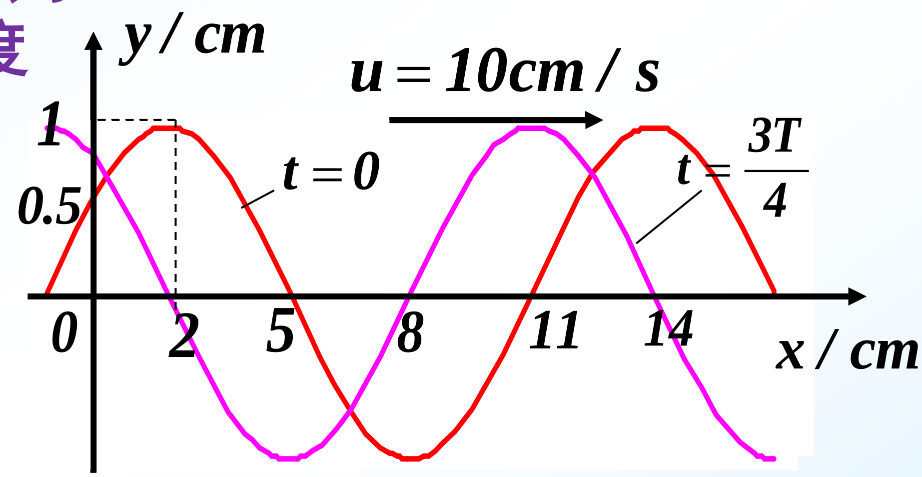
两质点振动的相位差： $\Delta\varphi = -k(x_2 - x_1) = -\dfrac{50\pi}{3} \times 0.06 = -\pi$

$$\Delta\varphi = -k\Delta x = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

例题

(3) 画出$t = 3T/4$时刻的波形曲线，此刻$x = 2cm$处质点的位移，速度，加速度

$$y = 0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}t - \frac{50\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$$



$t = 3T/4$时刻： $T = 1.2s \qquad t = 0.9s$

$$y = 0.01\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{50\pi}{3}x\right)$$

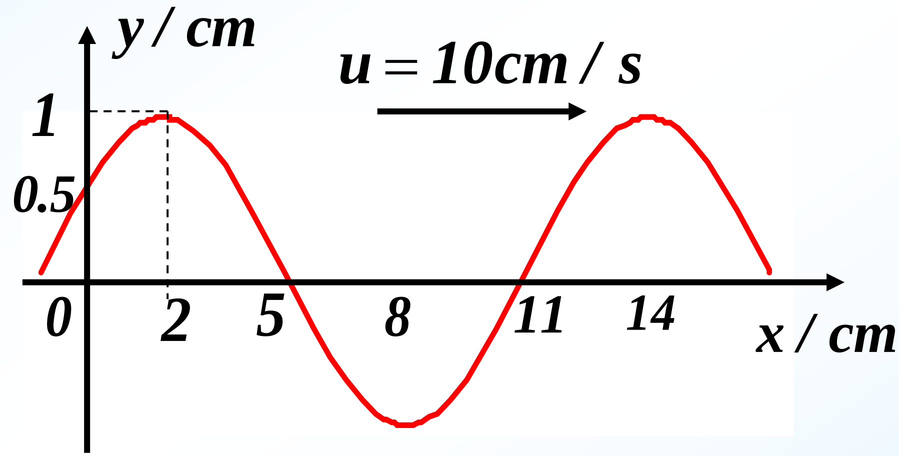
$x = 2cm$处质点振动方程： $y|_{x=0.02} = 0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right) \qquad y = 0$

$$v = \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=0.02} = -\frac{0.05\pi}{3}\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) \qquad v = \frac{0.05\pi}{3} = 0.052\ m/s$$

$$a = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x=0.02} = -\frac{0.25\pi^2}{9}\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right) \qquad a = 0$$

例题

(4) 若图为$t = 0.2s$时刻的波形曲线，波函数会如何变化？



波函数可以改写为：

$$y = A\cos[\omega(t - t_0) - kx + \varphi]$$

$$= 0.01\cos\left[\frac{5\pi}{3}(t - 0.2) - \frac{50\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\therefore \quad y = 0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}t - \frac{50\pi}{3}x\right)\ m$$

三 平面简谐波

（7）波动方程

$$\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]}$$

分别对x和t两次求导：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right) + \varphi\right] \\[2em] \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\dfrac{\omega^2}{u^2}\cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right) + \varphi\right] \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

沿x方向传播的

平面波的波动方程

讨论：

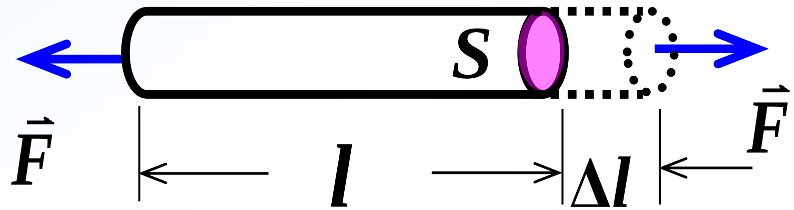
1). 描述经典波动过程的普遍方程。波动方程适用于任何平面波，平面简谐波表达式只是一个特解；

2). 波动方程的解并不限于行波。若任何物理量的运动规律满足上式，则可判断它是一波动过程，并且按平面波的形式传播。

四 波的能量

1. 物体的弹性

a 线变



胡克定律： 在弹性限度内，应力与应变成正比。

杨氏模量

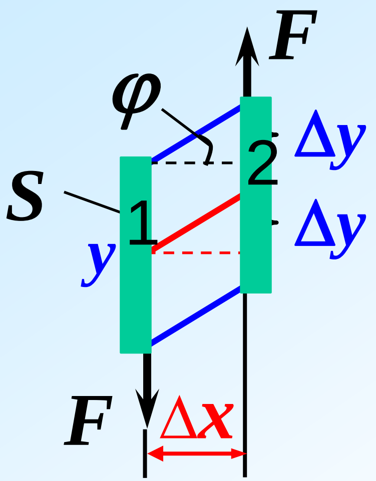
应力 应变

$$\frac{F}{S} = Y \frac{\Delta l}{l} \qquad F = \frac{YS}{l}\Delta l = k\Delta l$$

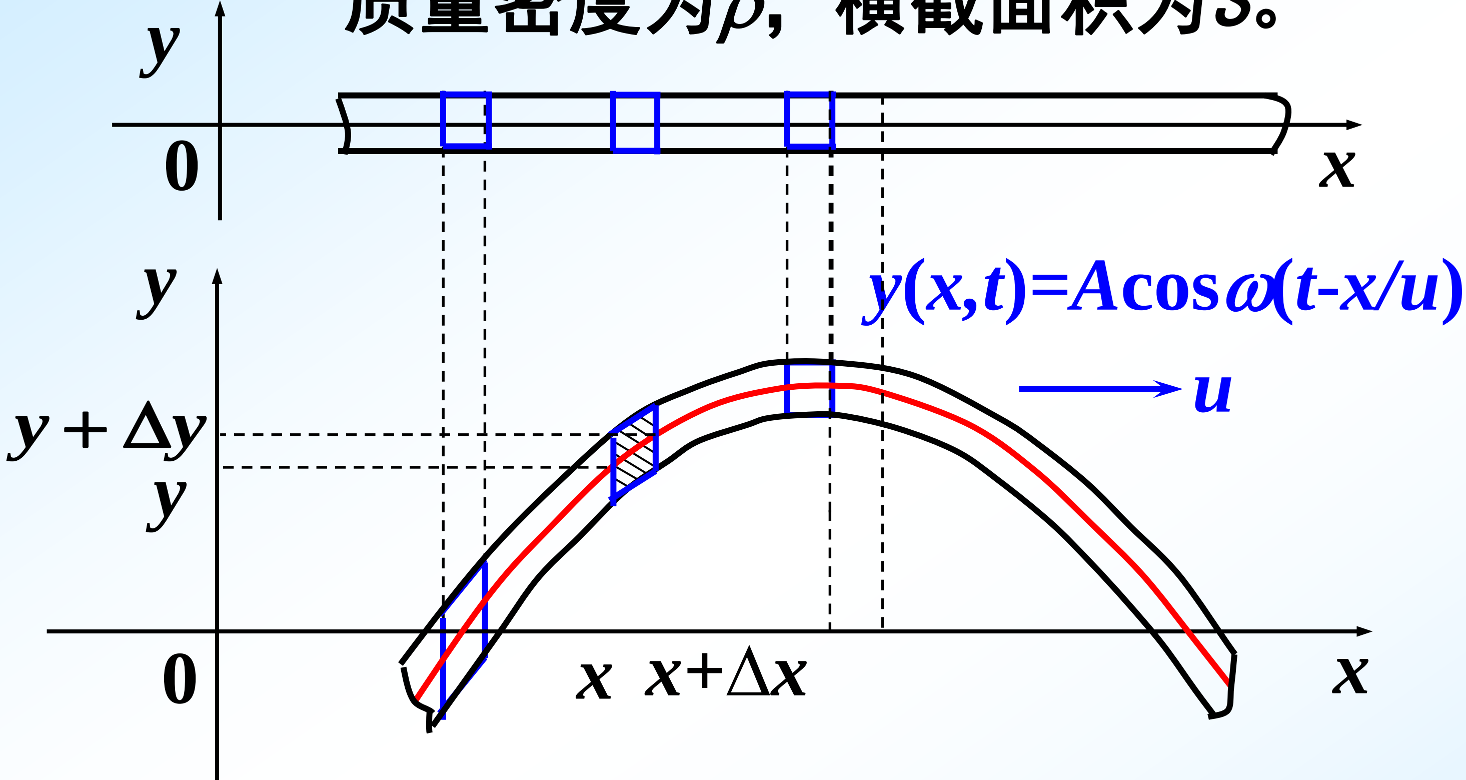
k 为弹性系数或倔强系数。

b) 剪切形变

质量密度为ρ，横截面积为S。



$\varphi = \Delta y / \Delta x$



任意长度为Δx的质元， $\Delta m = \rho S \Delta x$ 。

在弹性限度内，剪应力与剪应变成正比。

切变模量

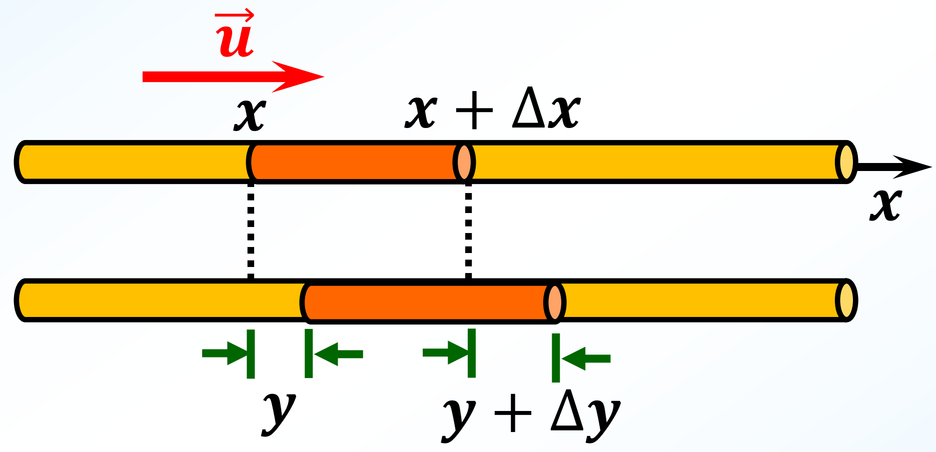
$$\frac{F}{S} = G\varphi = G\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

介质薄层1对Δx质元的作用力为：

$$F_1 = SG\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$

四 波的能量

2. 波动能量的传播



以纵波为例：设平面简谐波在密度为ρ的弹性细棒中传播。

$$y = A\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

考察平衡位置在$x\sim x+\Delta x$之间，体积为ΔV的质元的能量

根据胡克定律：

$$\frac{F}{S} = -Y\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Y：杨氏弹性模量

S：弹性细棒横截面积

$$F = -k\Delta y \qquad k = \frac{YS}{\Delta x}$$

四 波的能量

势能： $W_p = \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}\frac{YS}{\Delta x}(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}YS\Delta x\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$ $\Delta x \to 0$

$$= \frac{1}{2}Y\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}Y\Delta V\left(\frac{\omega}{u}\right)^2 A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

$$\boxed{u^2 = \frac{Y}{\rho}}$$

动能： $W_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}(\rho\Delta V)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

$$\boxed{W_k = W_p = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)}$$

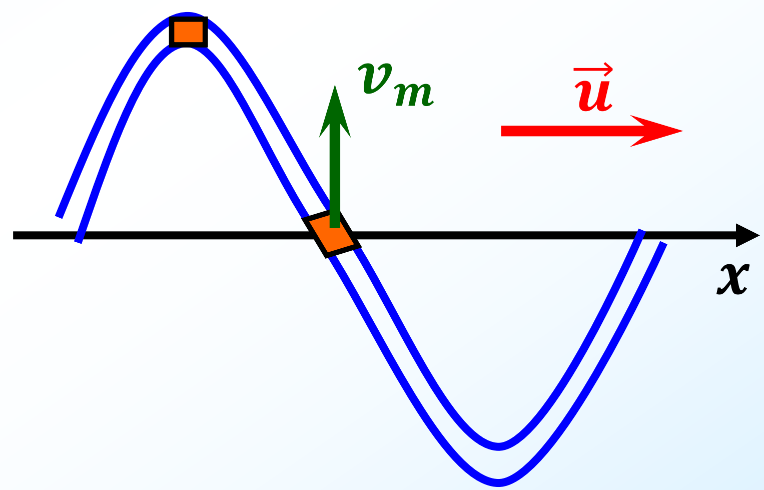
结论对横波仍然成立

四 波的能量

$$\boxed{W_k = W_p = \frac{1}{2}\rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}$$

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

1）. 波动动能与势能数值相同，相位相同。同时变大，同时减小。



W_k最大则W_p也最大，平衡位置；

W_k最小则W_p也最小，最大位移处。

与振动结论不同！

2）. 质元的总能量

$$W = W_k + W_p = \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

总能量W随t，x变化，不守恒！ ---能量传输

四 波的能量

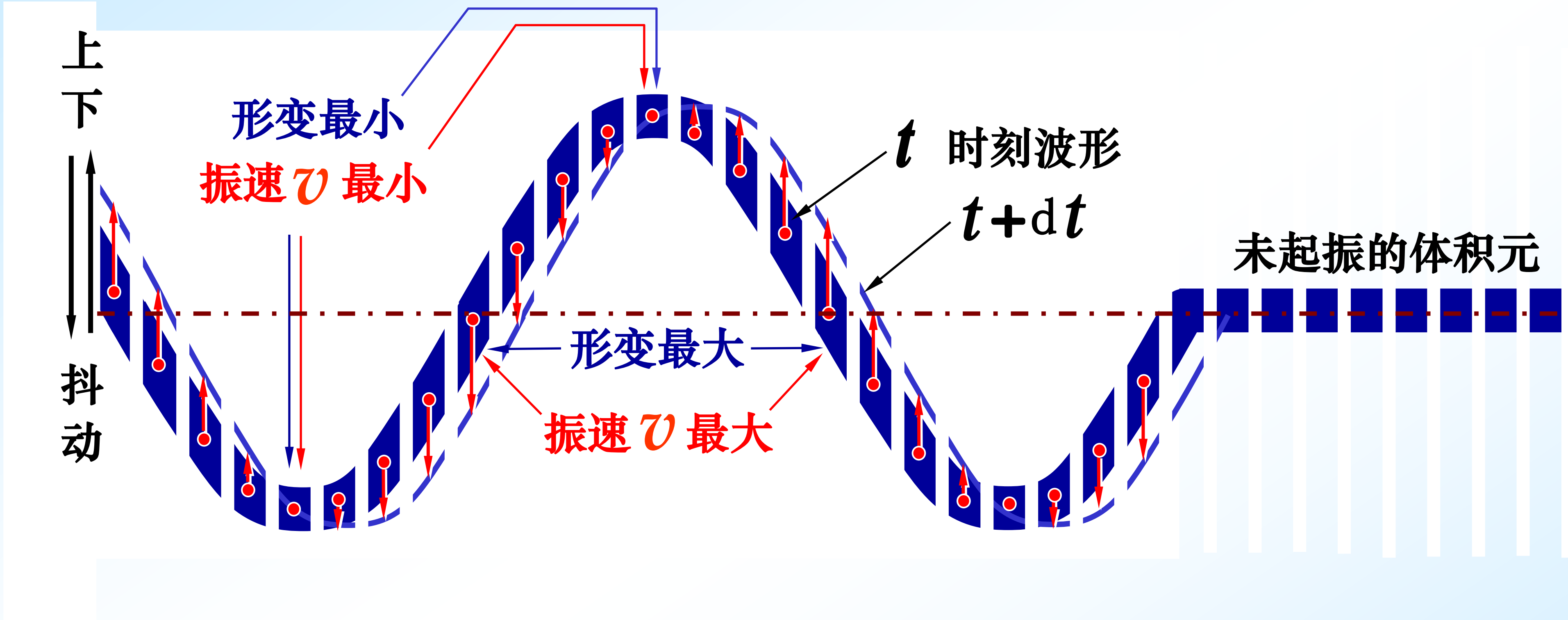
讨论：

①波动质元 $\Delta W_{\mathrm{k}} = \Delta W_{\mathrm{p}}$ ， $\Delta W_{\mathrm{k}} + \Delta W_{\mathrm{p}} \neq \mathrm{const}.$

每个质元都与周围媒质交换能量。

②振动系统： $E_{\mathrm{k}} \neq E_{\mathrm{p}}$ ， $E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \mathrm{const}.$

系统与外界无能量交换。



上
下
抖
动
形变最小
振速 v 最小
t 时刻波形
$t+dt$
未起振的体积元
形变最大
振速 v 最大

四 波的能量

3. 能量密度

$$\boxed{W=\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)}$$

1). 能量密度

介质中单位体积中的波动能量：

$$w=\frac{W}{\Delta V}=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

为时间和位置的函数。

其周期：$T'=\frac{T}{2}$

平均能量密度：

$$\bar{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\,dt=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\propto\ \omega^2,A^2$$

平面简谐波在各处的平均能量密度都相等。

四 波的能量

4. 关于波动能量的讨论

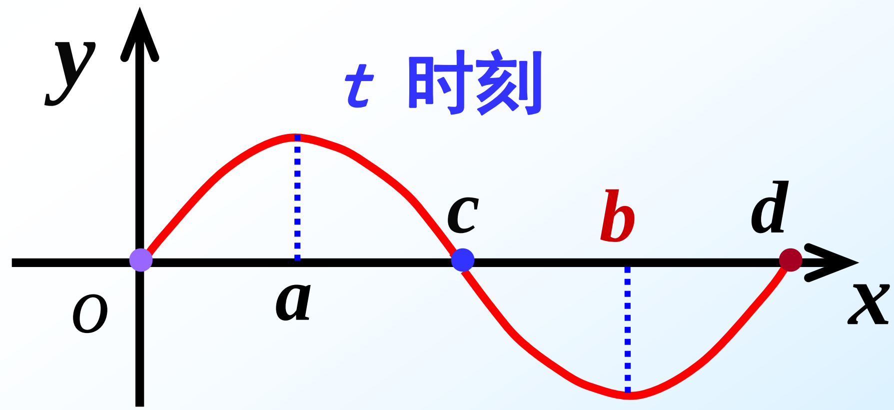
1). 能量表达式

$$\boxed{W_k = W_p = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)}$$

平衡位置处质元：

振动位相为：

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, or -\frac{\pi}{2}$$



动能最大、势能最大、总能量最大！

最大位移处质元： 振动位相为： $\varphi = 0, or\ \pi$

动能为零、势能为零、总能量为零！

四 波的能量

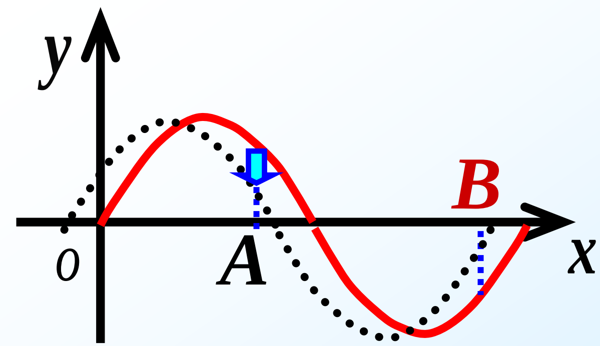
例1. 一平面简谐波在t 时刻的波形曲线如图，若此时A处媒质质元的振动动能在增大，则:

~~A、~~ A处媒质质元的弹性势能在减小;

B、波沿x轴负向传播;

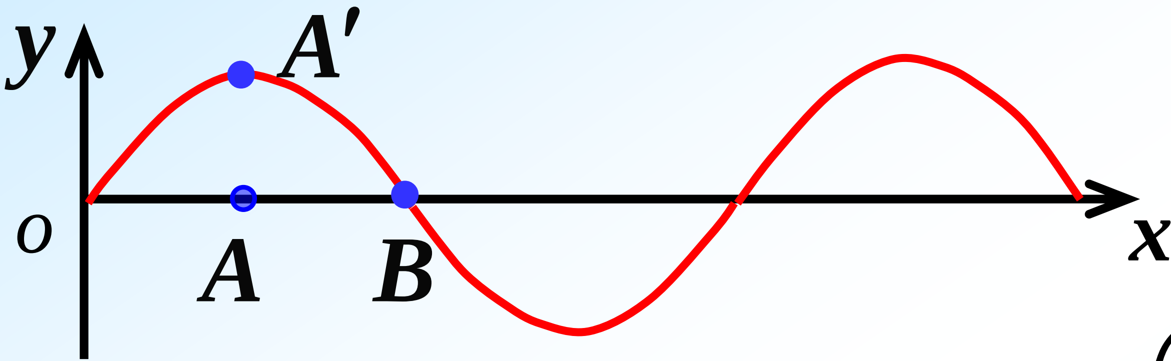
~~C、~~ B处质元的振动动能在减小;

~~D、~~ 各点的波的能量都不随时间变化。



四 波的能量

2). 能量来源



波动动能来源于质元的运动：

$$w_k \propto \left(\boxed{\frac{\partial y}{\partial t}}\right)^2$$

质元振动速度

波动势能来源于介质的相对形变：

$$w_p \propto \left(\boxed{\frac{\partial y}{\partial x}}\right)^2$$

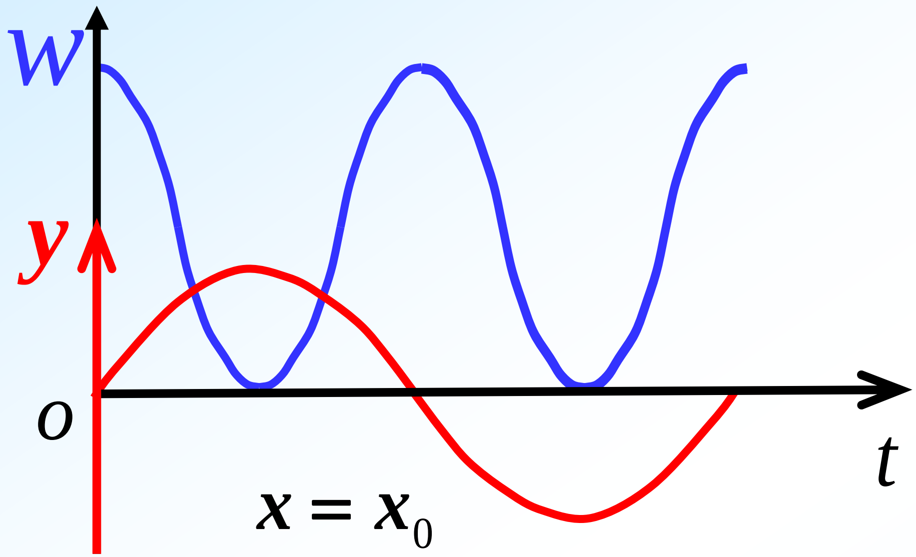
波形曲线斜率

平衡位置处质元：　动能最大、势能最大。

最大位移处质元：　动能为零、势能为零。

四 波的能量

3). 波是能量传播的一种形式



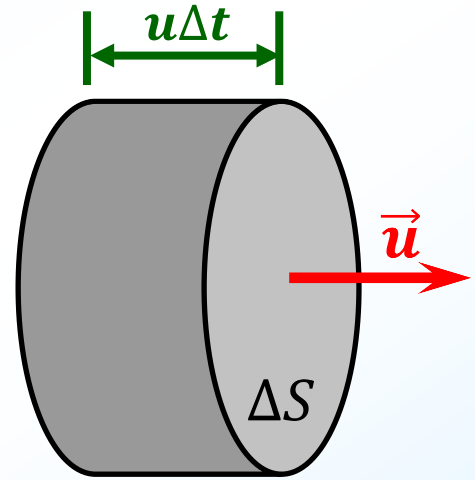
体元ΔV中能量密度从0到$\rho\omega^2A^2$，表明外部能量的输入，当ΔV中能量密度从$\rho\omega^2A^2$减小到0，表明向外输出能量。周而复始。

即介质并不积累能量。能量随着波动的行进，从介质的这一部分传到另一部分。波动是能量传播的一种形式；波动的能量沿波速方向传播。

四 波的能量

5. 能流密度

1）. 能流P **单位时间内垂直通过某截面的能量**



Δt时间内垂直通过某截面ΔS的能量

$$\Delta W = u\Delta t \cdot \Delta S \cdot w$$

w为截面所在位置的能量密度

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = wu\Delta S$$

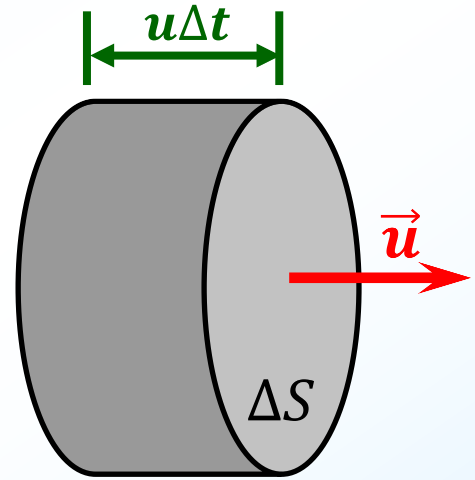
$$= u\Delta S\rho\omega^2 A^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

即能流随时间周期性变化。单位：瓦特（W）

四 波的能量

5. 能流密度

2）平均能流 在一个周期内能流的平均值。



$$\langle P\rangle=\langle w\rangle u\Delta S=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u\Delta S$$

若波速与截面不垂直

$$\langle P\rangle=\langle w\rangle\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\Delta\vec{\boldsymbol{S}}=\langle w\rangle u\Delta S\cos\theta$$

3）. 能流密度$\vec{i}$ 单位时间内通过垂直于波传播方向单位面积的能量

$$i=\frac{P}{\Delta S}=wu=\left[\rho\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]u$$

四 波的能量

4). 平均能流密度I　又称波的强度

$$I = \langle i \rangle = \frac{\langle P \rangle}{\Delta S} = \langle w \rangle u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u \propto \omega^2, A^2$$

矢量表示： $\vec{I} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \vec{u}$　与波速方向相同。

声音的强度

人听觉的频率为： $\omega = 20 \sim 2 \times 10^4\,\mathrm{Hz}$

人听觉的声强为： $I = 10^{-12} \sim 1\ \mathrm{W/m^2}$

定义标准声强： $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$

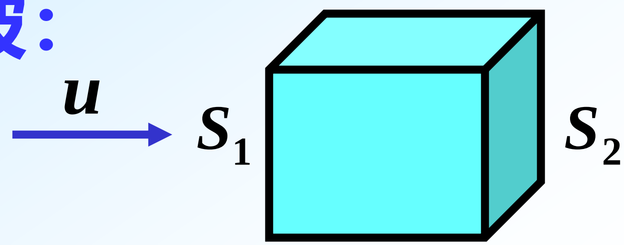
声强级别： $L = 10\lg\frac{I}{I_0}\ \ (\mathrm{dB})$

人听觉的范围是：　0~130 dB

无吸收的理想介质： $\boxed{\overline{P} = u\Delta S\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u\Delta S}$

穿过各波面 （S_1, S_2 …） 的平均能流应相等。

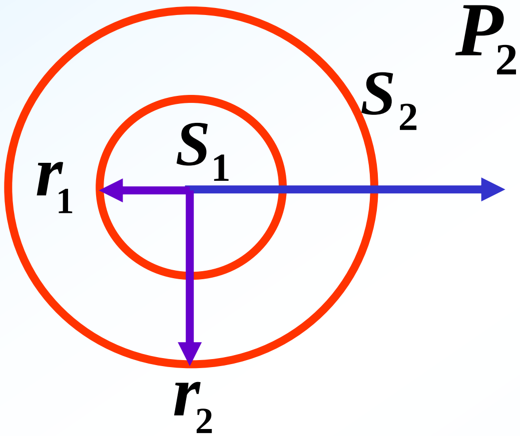
对平面波：



$$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_2} = 1 = \frac{A_1^2}{A_2^2}\frac{S_1}{S_2}$$

$$\boxed{A_1 = A_2}$$

对球面波 ： $\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}\frac{S_1}{S_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = 1$ $\quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$



$$\boxed{A_1 \neq A_2}$$

如果距波源单位距离的振幅为A，则距波源r处的振幅为 A/r

球面简谐波的波函数： $y = \frac{A}{r}\cos\omega(t - \frac{r}{u})$

四 波的能量

几种声音的声强级和响度

声源	声强级 (dB)	响度
听觉	0	
风吹树叶	20	轻
通常谈话	60	正常
机器房	80	响
大瀑布	90	很响
铆钉机	100	震耳
摇滚乐	120	
炮声	120	
喷气机起飞	150	
聚焦超声波	210	

11-T17.假设在一根弦线上传播的简谐波为$y=A\cos(kx-\omega t)$，式中$k=\omega/u$称为波数。（1）写出弦线中的能量密度与能流密度的表示式；（2）写出平均能量密度与平均能流密度（波强）的表示式。

解: （1）弦上质元的平均动能为

$$\Delta W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2(kx-\omega t)$$

平均动能等于平均势能，能量密度为

$$w = \frac{\Delta W_k + \Delta W_p}{\Delta V} = \rho\omega^2A^2\sin^2(kx-\omega t)$$

能流密度为 $i = wu = \rho u\omega^2A^2\sin^2(kx-\omega t)$

（2）平均能量密度为 $\bar{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

平均能流密度为 $I = \bar{w}u = \frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2$

作业： Chap.11 —T17、T18、T19

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 通过学习通提交作业。
4. 作业缺交三分之一及以上者按规定不能参加考试。