2. 求极大线性无关组.

(1) $[1,3,6,2]^T$, $[2,1,2,-1]^T$, $[3,5,10,2]^T$, $[-2,1,2,3]^T$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(2) $[1,0,-2,1]^T$, $[3,1,0,-1]^T$, $[1,1,4,-3]^T$, $[3,0,10,3]^T$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(3) $[1,-2,-1,0,2]^T$, $[1,-2,-1,-3,3]^T$, $[2,-1,0,2,3]^T$, $[3,3,3,3,4]^T$, $[2,0,-2,-3,-5]^T$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$

解：(1) $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 10 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

取 α_1,α_2.

(2) $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

(3) $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$.

写成列向量组，只用行变换化成阶梯形，对每行元素中不为0的，取最前面一列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

写成列向量组，只用行变换化成阶梯形，对每行元素中不为0的，取最前面一列就可

3. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$

解：$A=\begin{pmatrix}1&3&2&2\\2&2&3&2\\3&1&1&2\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{行变换}}$ $\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&2&3&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\quad\ \ \alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4$

$r(A)=3$. 极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

令 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$. 则：$\begin{cases}k_1+3k_2+2k_3=2\\2k_2+3k_3=1\\k_3=0\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}k_1=\frac{1}{2}\\k_2=\frac{1}{2}\\k_3=0.\end{cases}$ $\therefore \alpha_4=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2.$

3. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\-3\\t\end{pmatrix}$ 线性相关，求 t.

解：由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&5\\1&3&-3\\0&-1&t\end{vmatrix}=0$.

则：$3t-5-3-t=0$. $t=4$.

㊟注：利用矩阵行变换化成阶梯形亦可.

4 (I) $\beta_1=(0,-1,1)^T$, $\beta_2=(a,2,1)^T$, $\beta_3=(b,1,0)^T$.

(II) $\alpha_1=(1,2,-3)^T$, $\alpha_2=(3,0,1)^T$, $\alpha_3=(9,6,-7)^T$

$\operatorname{rank}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，求 a,b.

解：对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，极大线性无关组为 α_1,α_2.

故 β_1,β_2,β_3 线性相关，且 β_3 可由 α_1,α_2 线性表出，即 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3$ 线性相关。

则：① β_1,β_2,β_3 线性相关：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a-b-2b=0. \Rightarrow a-3b=0.$$

② $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3$ 线性相关：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -9+2b-1=0 \Rightarrow b=5.$$

$a=15$

$b=5$.