

第 7 章 常微分方程

7.1 基本概念

7.2 初等积分法


7.3 线性微分方程(自学)

7.4 常系数线性微分方程(自学)

7.5 微分方程组(自学)

7.1 基本概念

已知 $y' = f(x)$, 求 y — **积分问题**

 **推广**

已知含 y 及其若干阶导数的方程, 求 y
— **微分方程问题**

例1. 一曲线通过点(1,2),在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$, 求该曲线的方程.

解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 则有如下关系式:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x & \text{①} \\ y|_{x=1} = 2 & \text{②} \end{cases}$$

由 ① 得 $y = \int 2x dx = x^2 + C$ (C 为任意常数)

由 ② 得 $C = 1$, 因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

例2. 列车在平直路上以 20 m/s 的速度行驶, 制动时获得加速度 $a = -0.4 \text{ m/s}^2$, 求制动后列车的运动规律.

解: 设列车在制动后 t 秒行驶了 s 米, 即求 $s = s(t)$.

$$\text{已知} \quad \begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \\ s|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20 \end{cases}$$

由前一式两次积分, 可得 $s = -0.2 t^2 + C_1 t + C_2$

利用后两式可得 $C_1 = 20, C_2 = 0$

因此所求运动规律为 $s = -0.2 t^2 + 20 t$

说明: 利用这一规律可求出制动后多少时间列车才能停住, 以及制动后行驶了多少路程.

1. 常微分方程

定义1: 联系自变量、未知函数及未知函数导数（或微分）的关系式称为**微分方程**，未知函数为一元函数的微分方程称为**常微分方程**（简称**微分方程**）。

例1：下列关系式都是常微分方程

$$(1) \frac{dy}{dx} = 2x;$$

$$(2) xdy - ydx = 0;$$

$$(3) \frac{d^2x}{dt^2} + tx\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + x = 0; \quad (4) \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t;$$

2. 微分方程的阶

定义2: 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数或微分的阶数称为微分方程的阶数.

如: (1) $\frac{dy}{dx} = 2x$ (2) $xdy - ydx = 0$

是一阶微分方程;

(3) $\frac{d^2x}{dt^2} + tx\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + x = 0$ 是二阶微分方程;

(4) $\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$ 是四阶微分方程.

n 阶微分方程的一般形式为

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

这里 $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$ 是 $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的已知函数,

而且一定含有 $\frac{d^n y}{dx^n}$, y 是未知函数, x 是自变量.

3. 线性和非线性

定义3: 如果方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$

的左端为 y 及 $\frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的一次有理式,

则称其为 n 阶线性方程.

如 (1) $\frac{dy}{dx} = 2x$

(2) $xdy - ydx = 0$

(4) $\frac{d^4 x}{dt^4} + 5\frac{d^2 x}{dt^2} + 3x = \sin t$ 是线性微分方程.

不是线性方程的方程称为非线性方程

如 (3)
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + tx \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 + x = 0$$

是非线性微分方程.

n 阶线性微分方程的一般形式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) y = f(x) \quad (2)$$

这里 $a_1(x), \cdots, a_n(x), f(x)$ 是 x 的已知函数.

4. 微分方程的解

定义4 如果函数 $y = \varphi(x)$, $x \in I$, 满足条件 :

- (1) $y = \varphi(x)$ 在 I 上有直到 n 阶的导数;
- (2) 对 $\forall x \in I$ 有 : $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$,

则称 $y = \varphi(x)$ 为方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$

在 I 上的一个解.

例2 验证 $y = \sin x, y = \cos x$ 都是微分方程

$y'' + y = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个解.
= 线性

证明: 对 $y = \sin x$, 由于

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x$$

故对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$$

故 $y = \sin x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个解.

同理 $y = \cos x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个解.

显式解与隐式解

如果关系式 $\Psi(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = \varphi(x), x \in I$ 为方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$$

的解, 则称 $\Psi(x, y) = 0$ 是方程的一个**隐式解**.

相应定义4所定义的解为方程的一个**显式解**.

注: 显式解与隐式解统称为**微分方程的解**.

例如 对一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

有显式解:

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ 和 } y = -\sqrt{1-x^2}.$$

和隐式解:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

通解与特解

定义5 如果微分方程的解中含有任意常数,且所含的**相互独立的**任意常数的**个数**与微分方程的**阶数**相同,则称这样的解为该方程的**通解**.

例如: $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, c_1, c_2 为任意常数
是微分方程 $y'' + y = 0$ 的通解.

n 阶微分方程通解的一般形式为

$$y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n)$$

其中 c_1, \cdots, c_n 为相互独立的任意常数.

注2: $y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n)$ 是微分方程的

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$$

的通解, 并不表示 $y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n)$ 包含了该微分方程的所有解.

注3: 类似可定义方程的隐式通解,

如果微分方程的隐式解中含有任意常数, 且所含的相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 则称这样的解为该方程的**隐式通解**, 即由 $\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$ 所确定的解.

以后不区分显式通解和隐式通解, 统称为方程的**通解**.

定义6 如果微分方程的解不包含任意常数，则称它为一个**特解**.

例如 $y = \sin x, y = \cos x$ 都是方程 $y'' + y = 0$ 的特解.

可在通解 $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ 中分别取

$$c_1 = 1, c_2 = 0, \text{得到: } y = \sin x,$$

$$c_1 = 0, c_2 = 1, \text{得到: } y = \cos x.$$

注: 当任意常数一旦确定之后，通解就变成了特解; 反之,不是所有的特解都能由通解产生

定解条件

为了从通解中得到合乎要求的特解,必须根据实际问题给微分方程附加一定的条件,称为**定解条件**.

求满足定解条件的求解问题称为**定解问题**.

常见的定解条件是**初始条件**, n 阶微分方程的初始条件是指如下的 n 个条件:

$$\text{当 } x = x_0 \text{ 时, } y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}$$

这里 $x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数.

当定解条件是初始条件时,相应的定解问题称为**初值问题**.

注1: n 阶微分方程的初始条件有时也可写为

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy(x_0)}{dx} = y_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{(n-1)}y(x_0)}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}$$

注2: 求 n 阶微分方程： $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$, 满足条件

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy(x_0)}{dx} = y_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{(n-1)}y(x_0)}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}$$

的解的初值问题也称 *Cauchy*问题, 通常记为

$$\begin{cases} F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \frac{dy(x_0)}{dx} = y_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{(n-1)}y(x_0)}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

初值问题 = 微分方程+初始条件

$$\text{例1. } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 2 \end{cases}$$

$$\text{通解: } y = x^2 + C$$

$$\text{特解: } y = x^2 + 1$$

$$\text{例2. } \begin{cases} \frac{d^2s}{dt^2} = -0.4 \\ s|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20 \end{cases}$$

$$s = -0.2t^2 + C_1t + C_2$$

$$s = -0.2t^2 + 20t$$

例3. 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ (C_1, C_2 为常数)
是微分方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的解, 并求满足初始条件

$x|_{t=0} = A, \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0$ 的特解.

解:
$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= -C_1 k^2 \cos kt - C_2 k^2 \sin kt \\ &= -k^2 (C_1 \sin kt + C_2 \cos kt) = -k^2 x\end{aligned}$$

这说明 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是方程的解.

C_1, C_2 是两个独立的任意常数, 故它是方程的通解.

利用初始条件易得: $C_1 = A, C_2 = 0$, 故所求特解为

$$x = A \cos kt$$

例4. 已知曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分, 求所满足的微分方程.

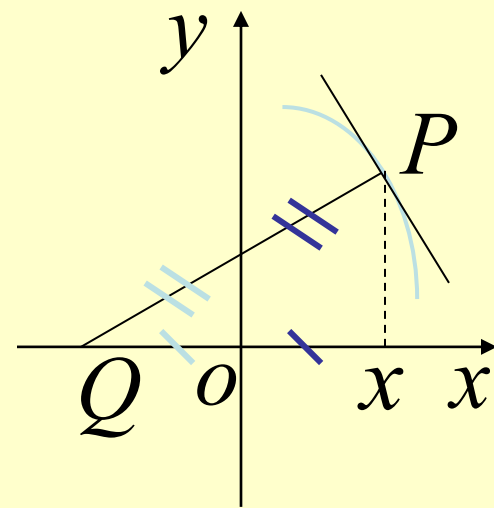
解: 如图所示, 点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

令 $Y = 0$, 得 Q 点的横坐标

$$X = x + yy'$$

$$\therefore x + yy' = -x, \quad \text{即 } yy' + 2x = 0$$



例 设 C 是任意常数, 求以 $y = 1/(Cx^2 + 1)$ 为通解的一阶微分方程.

解 等式 $(Cx^2 + 1)y = 1$ 两边对 x 进行求导, 得

$$2Cxy + (Cx^2 + 1)y' = 0.$$

将 $Cx^2 + 1 = 1/y$ 代入上式得

$$xy^{-1}y' + 2(1 - y) = 0.$$

此即所求的微分方程.

积分曲线

一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

的解 $y = \varphi(x)$ 所表示 xy 平面上的一条曲线,

称为微分方程的**积分曲线**.

而其通解 $y = \varphi(x, c)$ 对应 xy 平面上的一族曲线,
称这族曲线为积分曲线族.

小结:

微分方程; 微分方程的阶; 微分方程的解;

通解; 特解; 初始条件; 初值问题; 积分曲线;

思考题

函数 $y = 3e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 4y = 0$ 的什么解？

思考题解答

$$\because y' = 6e^{2x}, \quad y'' = 12e^{2x},$$

$$y'' - 4y = 12e^{2x} - 4 \cdot 3e^{2x} = 0,$$

$\because y = 3e^{2x}$ 中不含任意常数,

故为微分方程的特解.

练习题

一、填空题：

1、 $xy''' + 2y'' + x^2y = 0$ 是_____阶微分方程；

2、 $L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{c} = 0$ 是_____阶微分方程；

3、 $\frac{d\rho}{d\theta} + \rho = \sin^2 \theta$ 是_____阶微分方程；

4、一个二阶微分方程的通解应含有_____个任意常数。

二、确定函数关系式 $y = c_1 \sin(x - c_2)$ 所含的参数, 使其满足初始条件 $y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 0$ 。

三、设曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q ,
且线段 PQ 被 y 轴平分, 试写出该曲线所满足的微分方程.

四、已知函数 $y = ae^x - be^{-x} + x - 1$, 其中 a, b 为任意常数, 试求函数所满足的微分方程 .

练习题答案

一、 1、 3; 2、 2; 3、 1; 4、 2.

二、 $C_1 = 1, C_2 = \frac{\pi}{2}$.

三、 $yy' + 2x = 0$.

四、 $y'' - y = 1 - x$.