(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+3x_3+4x_4-x_5=0 \end{cases}$

解：$A=\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 2&3&1&1&-3 \\ 1&0&2&2&6 \\ 4&5&3&4&-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 0&1&-1&-1&-5 \\ 0&-1&1&1&5 \\ 0&1&-1&0&-5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 0&1&-1&-1&-5 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

$r(A)=3$，$n-r(A)=2$，故有2个自由变量，取为 x_3, x_5，方程组的解为 $\begin{cases} x_1=-2x_3-6x_5 \\ x_2=x_3+5x_5 \\ x_3=x_3 \\ x_4=0 \\ x_5=x_5 \end{cases}$

通解为 $X=x_3\begin{bmatrix} -2\\1\\1\\0\\0 \end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix} -6\\5\\0\\0\\1 \end{bmatrix}$ $(x_3, x_5\in R)$，基础解系为 $\left\{\begin{bmatrix} -2\\1\\1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6\\5\\0\\0\\1 \end{bmatrix}\right\}$

3. 求下列非齐次线性方程组的通解

(1) $\begin{cases} x_1+3x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2+x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+7x_3+2x_4=5 \\ 4x_1+2x_2+14x_3=6 \end{cases}$

解：$[A\vdots b]=\left[\begin{array}{cccc:c} 1&0&3&1&2 \\ 1&-3&0&1&-1 \\ 2&1&7&2&5 \\ 4&2&14&0&6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1&0&3&1&2 \\ 0&-3&-3&0&-3 \\ 0&1&1&0&1 \\ 0&2&2&-4&-2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1&0&3&1&2 \\ 0&-3&-3&0&-3 \\ 0&0&0&-4&-4 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right]$

$r(A\vdots b)=r(A)=3$，$n-r(A)=1$，故有1个自由变量，取为 x_3。

方程组的解为 $\begin{cases} x_1=1-3x_3 \\ x_2=1-x_3 \\ x_3=x_3 \\ x_4=1 \end{cases}$ 通解为 $X=x_3\begin{bmatrix} -3\\-1\\1\\0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1\\1\\0\\1 \end{bmatrix}$ $(x_3\in R)$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+2x_2+2x_3=2 \end{cases}$

解：$[A\vdots b]=\left[\begin{array}{cccc:c} 1&2&3&-1&1 \\ 3&2&1&-1&1 \\ 2&2&2&-1&1 \\ 5&2&2&0&2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1&2&3&-1&1 \\ 0&-4&-8&2&-2 \\ 0&-2&-4&1&-1 \\ 0&-8&-13&5&-3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1&2&3&-1&1 \\ 0&-4&-8&2&-2 \\ 0&0&3&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right]$

$r(A\vdots b)=r(A)=3$，$n-r(A)=1$，故有1个自由变量，取为 x_4

方程组的解为 $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{3}x_4+\frac{1}{3} \\ x_2=\frac{7}{6}x_4-\frac{1}{6} \\ x_3=-\frac{1}{3}x_4+\frac{1}{3} \\ x_4=x_4 \end{cases}$ 通解为 $X=x_4\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\\ \frac{7}{6}\\ -\frac{1}{3}\\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\\ 0 \end{bmatrix}$

$(x_4\in R)$

1. 设有线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=a-3 \\ x_1+ax_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+ax_3=-2 \end{cases}$，讨论 a 的取值，使

(1) 方程组有唯一解，并求解。

(2) 方程组无解。

(3) 方程组有无穷多解，并求解。

解：(1) $|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$

方程组有唯一解，即 $|A|\neq 0 \Rightarrow a\neq -2$ 且 $a\neq 1$

$[A\vdots b]=\left[\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1+a-a^2 & 2-a & 3a-5 \\ 0 & a+1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a+2 & -3 \end{array}\right]$

方程组的解为 $\begin{cases} x_1=\frac{a-1}{a+2} \\ x_2=-\frac{3}{a+2} \\ x_3=-\frac{3}{a+2} \end{cases}$

(2) 当 $a=-2$ 时，$[A\vdots b]=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$

方程组无解

(3) 当 $a=1$ 时，$[A\vdots b]=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$r(A\vdots b)=r(A)=1 \quad n-r(A)=2$

方程组有无穷多解

$X=x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(x_2, x_3 \in R)$

2. 设有线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=b \end{cases}$，讨论 a、b 取值，使得线性方程组有解或无解，并在有解时求出全部的解。

解：$[A\vdots b]=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & a+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & b \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right]$

当 $b\neq -2$ 时，方程组无解.

当 $b=-2$，$a=-8$ 时：$r(A\vdots b)=r(A)=2$，$n-r(A)=2$，故方程组有2个自由变量，取为 x_3, x_4.

方程组的解为 $\begin{cases} x_1=4x_3-x_4-1 \\ x_2=-2x_3-2x_4+1 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases}$ 通解为 $X=x_3\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(x_3, x_4 \in R)$

当 $b=-2$，$a\neq -8$ 时：$r(A\vdots b)=r(A)=3$，$n-r(A)=1$，故有1个自由变量，取为 x_4.

方程组的解为 $\begin{cases} x_1=-x_4-1 \\ x_2=1-2x_4 \\ x_3=0 \\ x_4=x_4 \end{cases}$ 通解为 $X=x_4\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(x_4 \in R)$

3. 设n阶方阵A的列向量组为$\{A_1, A_2, \cdots A_n\}$，它的极大线性无关组为$\{A_1, A_2 \cdots A_{n-1}\}$，

又$A_n = -A_1 - A_2 - \cdots - A_{n-1}$，求$Ax=0$的通解。

解：由题意，$r(A)=n-1$

由$A_n = -A_1 - A_2 - \cdots - A_{n-1}$，则$A(1, \cdots 1)^T = (A_1, A_2 \cdots A_n)(1, 1, \cdots 1)^T = 0$。

∴ 方程通解为 $x = k(1, 1, \cdots, 1)^T$，$k \in R$。

4. 设β为非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，又$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$Ax=b$的导出组

$Ax=0$的基础解系。证：$\beta, \alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta, \cdots \alpha_r+\beta$为$Ax=b$的$r+1$个线性无关的解。

证：①先证$\beta, \alpha_1+\beta, \cdots \alpha_r+\beta$为方程的解。

$A\beta = b$，$A\alpha_i = 0$ $(i=1,2,\cdots,r)$。

则 $A(\alpha_i+\beta) = b$，$i=1,2,\cdots,r$。

② 再证线性无关。

$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r, \beta$ 线性无关显然

设$\beta, \alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta, \cdots \alpha_r+\beta$线性相关，则存在不全为0

的数$k_0, k_1, \cdots k_r$，s.t.

$k_0\beta + k_1(\alpha_1+\beta) + k_2(\alpha_2+\beta) \cdots + k_r(\alpha_r+\beta) = 0$。

$\sum_{i=0}^{r} k_i \beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$

∴ $k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$

则$\beta, \alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta, \cdots, \alpha_r+\beta$线性无关。

综上得证。

假设$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r, \beta$线性相关，

则存在$t_0, t_1, \cdots t_r$不全为0，满足

$t_0\beta + t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_r\alpha_r = 0$

左 两边同时作用A，

$t_0 A\beta + t_1 A\alpha_1 + t_2 A\alpha_2 + \cdots + t_r A\alpha_r = 0$。

$t_0 b = 0$。∴ $t_0 = 0$。

则 $t_1 = t_2 \cdots = t_r = 0$

$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r, \beta$ 线性无关显然。

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$，求$AB=0$的矩阵$B$，$r(B)=2$。

解：B的列向量为$Ax=0$的解。令$Ax=0$，则 $x_1+x_2+2x_3=0$；故 $x = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

∴ 取 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$