大学物理

University Physics

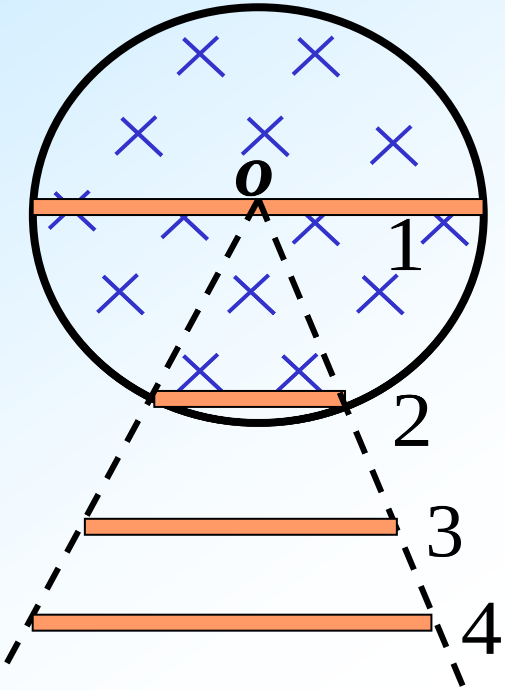
华 中 科 技 大 学 物 理 学 院

王宁

ningwang@hust.edu.cn

感应电场与感应电动势的计算

轴对称磁场均匀分布在半径为R的范围内，dB/dt=常量，而且大于零



1）比较各棒中的ε_i。

2）3，4连成通路I_i=？

3）棒中哪端电势高？

1）$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 = 0$

2）I_i=0

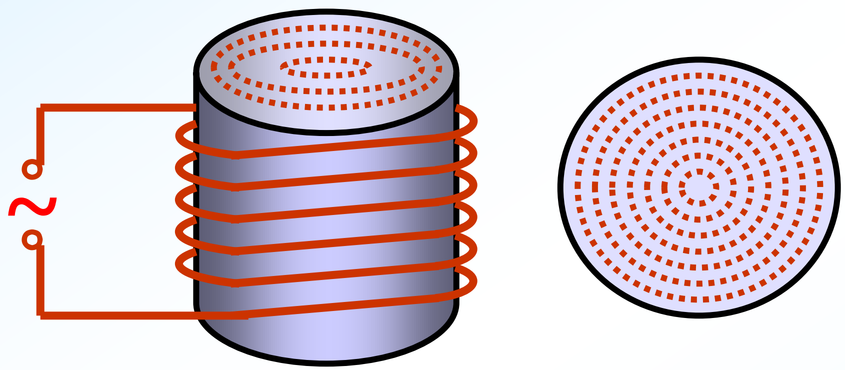
3）$V_{右} > V_{左}$

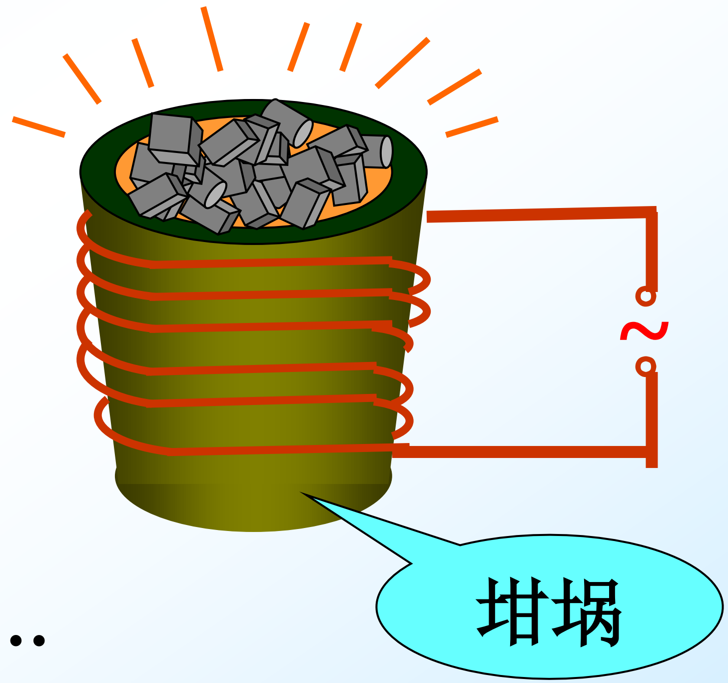
感应电场的应用

a). 涡电流----高频电磁感应炉

$$E_i = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

将导体块放置在感应电场E_i中，则在导体中将产生环形电流→涡电流。

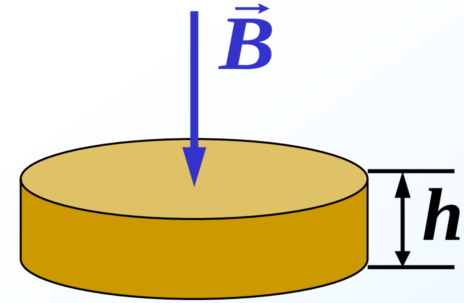




另外，金属探测器；探雷器...

注：一般来说，涡电流是有害的，它消耗电功率，降低设备能量利用效率。

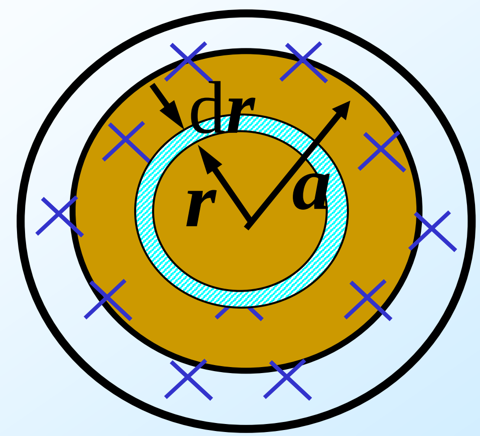
例. 将半径为a、厚为h、电导率为σ的金属圆盘, 同轴放置在轴对称匀强磁场 $\vec{B}$ 中, 且$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t > 0$。求圆盘上的电流强度及产生的热功率。



解: 取半径为r,厚度为dr的圆筒,其电动势

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\cdot\pi r^2) = -\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

其上电阻为: $R = \dfrac{2\pi r}{\sigma\cdot h\cdot \mathrm{d}r}$



电流为: $\mathrm{d}I_i = \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon_i}{R} = -\dfrac{r}{2}\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}r$

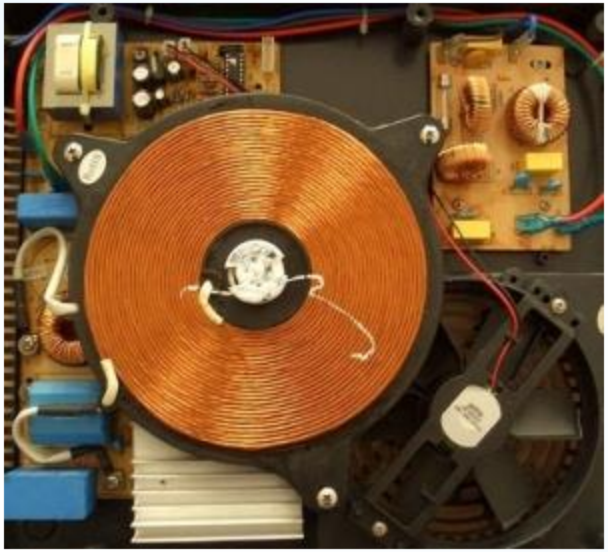
总电流: $I_i = \int \mathrm{d}I_i = -\dfrac{1}{4}a^2\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

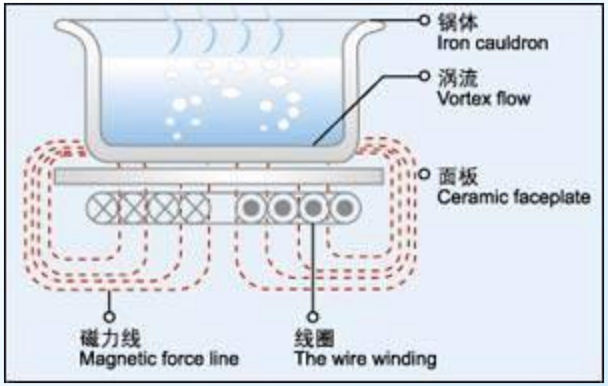
产生的热功率:

$$P = \int \mathrm{d}P = \int R(\mathrm{d}I_i)^2 = \frac{1}{8}\pi\sigma h a^4\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

电磁炉

铁锅



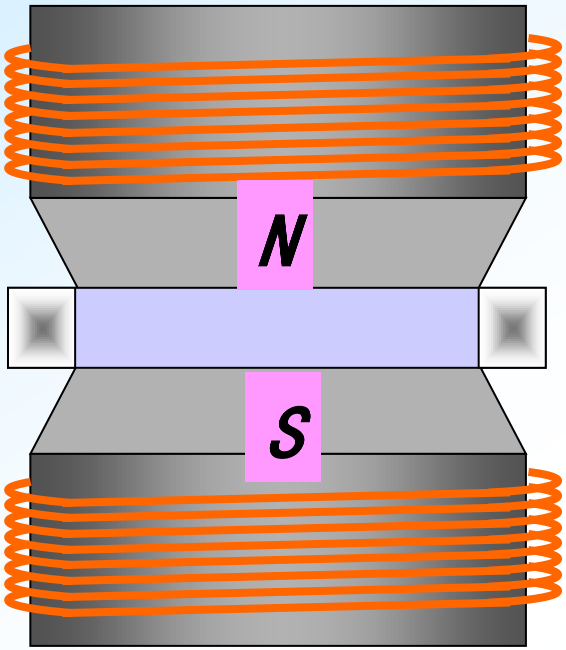

锅体
Iron cauldron
涡流
Vortex flow
面板
Ceramic faceplate
磁力线
Magnetic force line
线圈
The wire winding

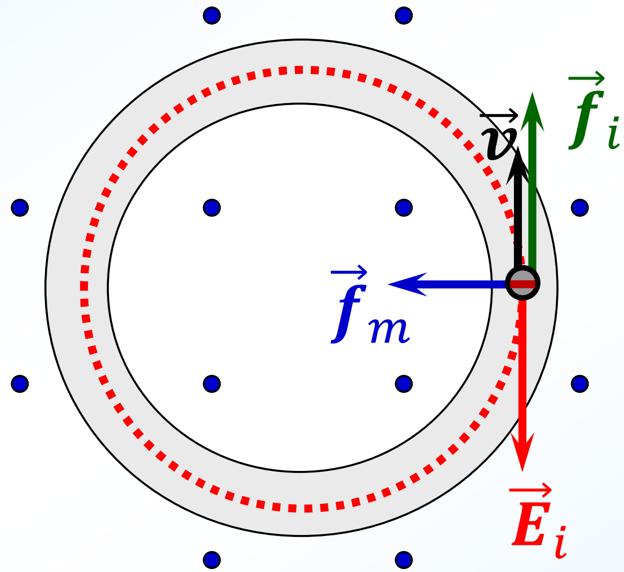
感应电场的应用

b). 物理学中的应用----电子感应加速器

原理： 用变化磁场所激发的感应电场来加速电子

在交流电前1/4周期，假定管中的感应电场是顺时针(俯视图)。





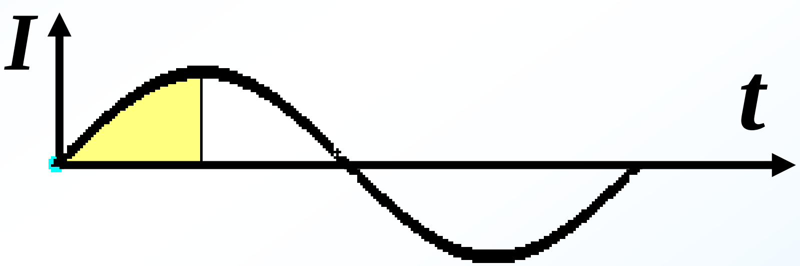
电子受力：

$$\vec{f}_i = -e\vec{E}_i$$

(切向加速)

$$\vec{f}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

(向心力)

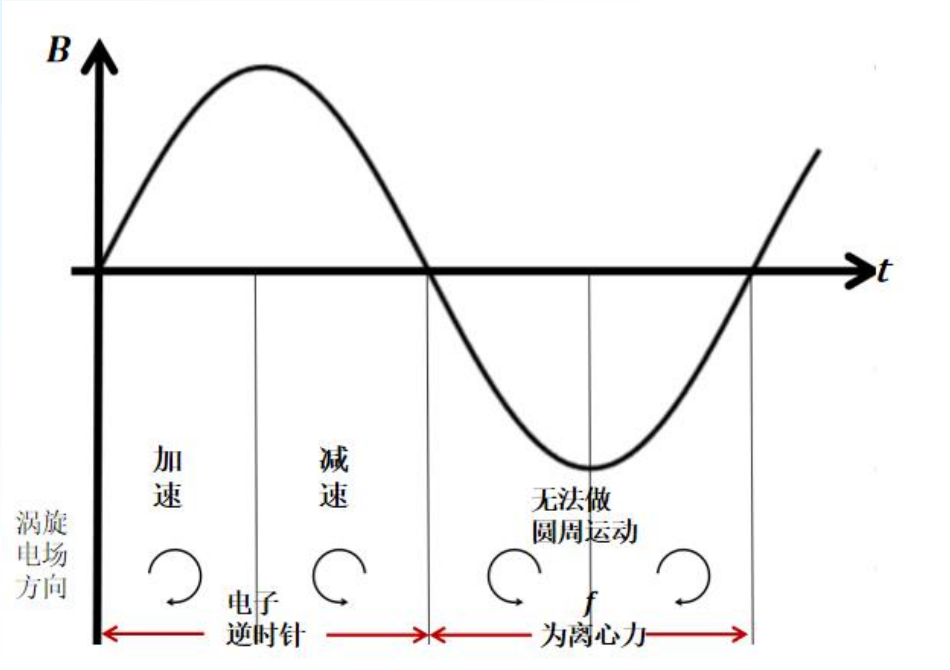


电子在管中沿逆时针加速运动

问题： 在剩余的2，3，4个1/4周期中，电子能继续加速运动吗？

感应电场的应用

b). 物理学中的应用---电子感应加速器



- 电子运动方向与磁场配合，使洛仑兹力提供向心力
- 电子运动方向与涡旋电场方向配合好，使电子不断加速
- 如图只有第一个1/4周期内被加速

电子感应加速器（*）

为使电子在加速过程中，绕固定圆轨道运动，以便打靶，对磁场径向分布有要求，即**使轨道上的B值恰好等于轨道包围的面积内B值的平均值之半**

电子被涡旋电场加速

电子轨道处磁场

洛仑兹力

$$evB_R = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow eRB_R = mv$$

$$\frac{d(mv)}{dt} = -eE_{旋}$$

$$\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$d(mv) = \frac{eR}{2} d\overline{B}$$

$$\oint_L E_{旋} dl = E_{旋} \cdot 2\pi R = -\pi R^2 \frac{d\overline{B}}{dt}$$

$$E_{旋} = -\frac{R}{2}\frac{d\overline{B}}{dt}$$

$$mv = \frac{eR}{2}\overline{B}$$

- 初始条件：***v*=0,*B*=0** 对上式求积分得

$$B_R = \frac{1}{2}\overline{B}$$

动生电动势与感生电动势小结

动生电动势

$$\varepsilon_i = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$：导线上任意选定的一小段

$\vec{v}$：以上这段导线的速度

$\vec{B}$：以上这段导线处的磁感应强度

$$\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

感生电动势

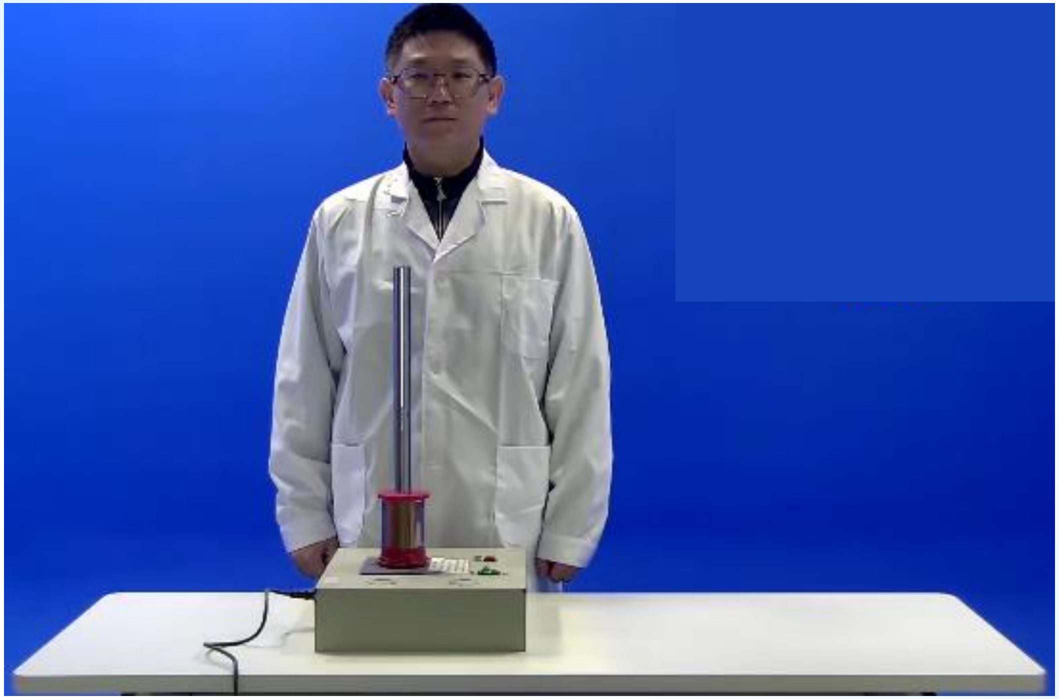
感应电场

$$\varepsilon_i = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint_L \boxed{\vec{E}_i} \cdot d\vec{l}$$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

感应电场$\vec{E}_i$： 由磁场随时间变化产生的电场，无源，有旋。

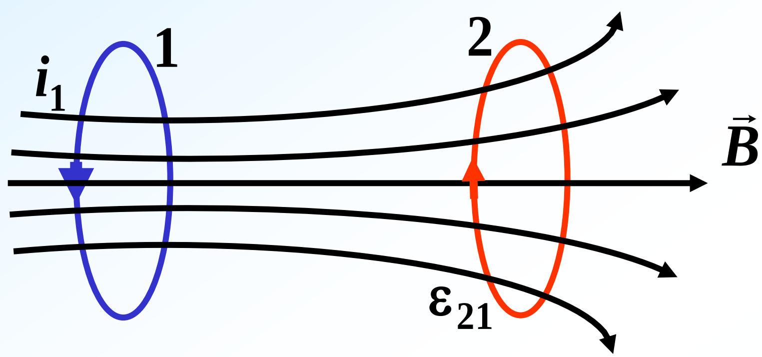
演示实验

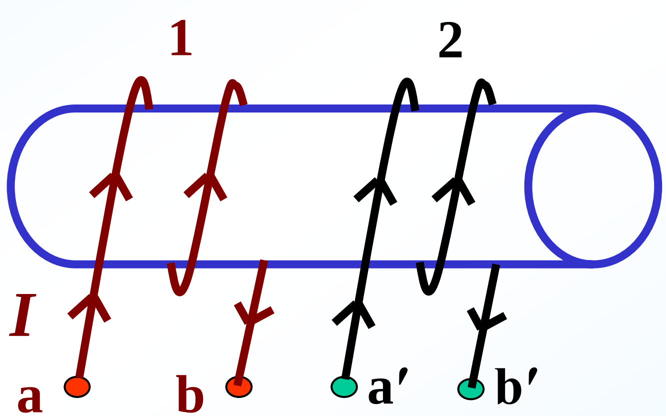


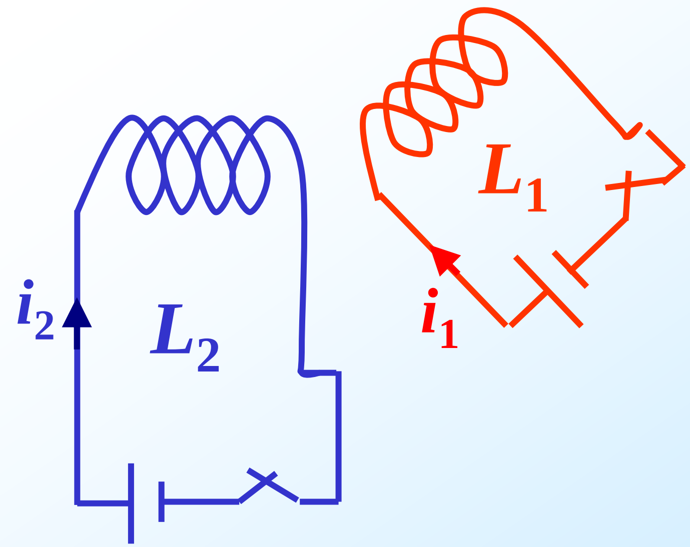
第三节 自感和互感

一 互感

一导体回路的电流变化，在另一回路中产生感应电动势 ----互感电动势。







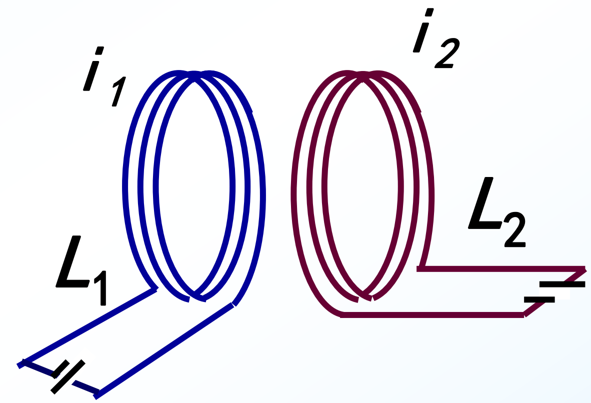
互感系数与磁通量

- 穿过线圈 2 的磁通量正比于 线圈1 中电流 I_1

$$\Psi_{12} = M_{12} I_1$$

- 穿过线圈 1 的磁通量正比于 线圈2中电流 I_2

$$\Psi_{21} = M_{21} I_2$$



比例系数（互感系数）为M_{21}和M_{12}，其值取决于线圈大小、匝数、几何形状、两线圈的相对位置、磁介质

可以证明

$$M_{21} = M_{12} = M$$

单位：亨利（H）$1\,\mathrm{H} = 1\,\dfrac{\mathrm{V}\times\mathrm{s}}{\mathrm{A}} = 1\,\Omega\times\mathrm{s}$

互感系数的大小反映了两个线圈磁场的相互影响程度。

互感系数的性质（*）

互感系数 $M_{21} = M_{12} = M$　$\Psi_{12} = M_{12} I_1$　$\Psi_{21} = M_{21} I_2$

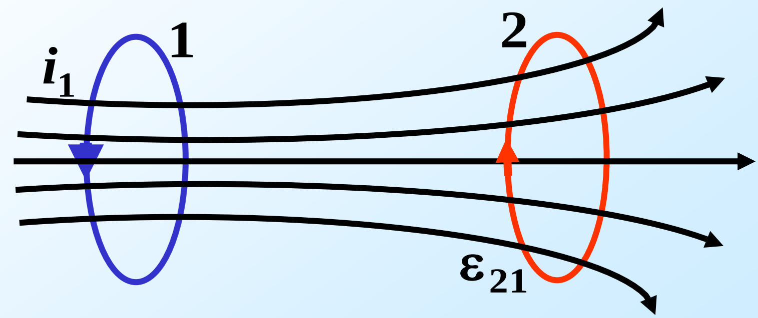
证明:以单匝线圈为例

线圈1激发的磁场通过2的通量

$$\psi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \oint_{L_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

$$\Rightarrow M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

$$\Rightarrow M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r_{21}}$$



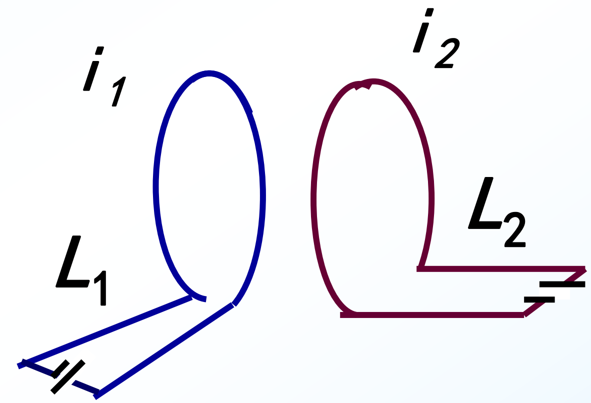
互感系数与互感电动势

- 线圈1电流变化在线圈2中产生的感应电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_1}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

- 线圈2电流变化在线圈1中产生的感应电动势为

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_2}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$



互感系数

$$\Psi_{12} = M_{12}I_1$$

$$\Psi_{21} = M_{21}I_2$$

$$M_{21} = M_{12} = M$$

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d(M_{21}I_1)}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} - \cancel{I_1\frac{dM_{21}}{dt}}$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d(M_{12}I_2)}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt} - \cancel{I_2\frac{dM_{12}}{dt}}$$

互感电动势的方向：楞次定律

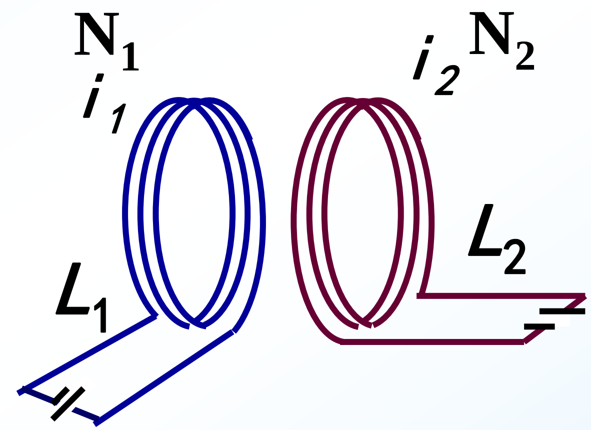
互感系数与互感电动势

- 线圈1电流变化在线圈2中产生的感应电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{dN_1\Psi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_1}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

- 线圈2电流变化在线圈1中产生的感应电动势为

$$\varepsilon_{21} = -\frac{dN_2\Psi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_2}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$



互感系数

$$\Psi_{12} = M_{12}I_1$$

$$\Psi_{21} = M_{21}I_2$$

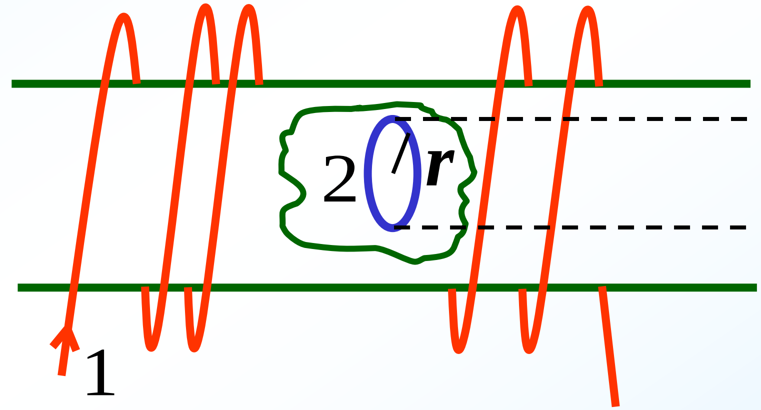
$$M_{21} = M_{12} = M$$

$$M = -\varepsilon_{12}\Big/\frac{dI_1}{dt} = -\varepsilon_{21}\Big/\frac{dI_2}{dt}$$

$$= \frac{N_2\psi_{12}}{I_1} = \frac{N_1\psi_{21}}{I_2}$$

物理意义：单位电流的磁场在另一线圈内产生的磁通。

例. 长直螺线管，单位长度上有n 匝线圈，另一半径为 r 的圆环放在螺线管内，环平面与管轴垂直。求它们之间的互感 M?



解：由互感的定义可知

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}$$

此处Ψ_{21}很难计算，但Ψ_{12}容易得出，因为螺线管内的磁场是均匀的。

设螺线管外导线通有电流i_1，则有 $B_1 = \mu_0 n i_1$

穿过圆环的磁通量为：$\Psi_{12} = B_1 \pi r^2 = \mu_0 n i_1 \pi r^2$

$$\therefore \quad M = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \mu_0 n \pi r^2$$

注：

a). 原则上可假定任一线圈通电流，计算其产生的磁场在另一线圈中的磁通量。

$$\Psi \to M = \frac{\Psi}{i}$$

但很多实际问题中M很难算出。计算各种电路的互感已经称为工业的一部分。

b). 互感在电工和无线电技术中应用广泛。

例如：变压器, 互感器，……

但很多实际问题中互感也很有害，需要被克服。

例如：电路或电器之间由于互感而互相干扰，影响工作。可以利用磁屏蔽来解决。

$\Psi_{12} = M i_1 \qquad \Psi_{21} = M i_2$

互感：小结

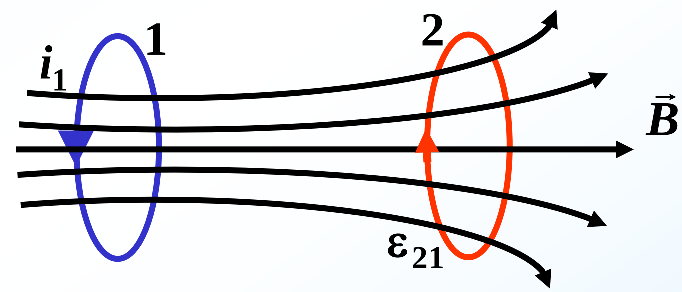
互感电动势 大小

$$\boxed{\varepsilon_M = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - i\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}}$$

当 M = 常数时

$$\varepsilon_M = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \begin{cases} \varepsilon_{12} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_{21} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

方向



（1）定义式

（2）楞次定律

互感的计算(互感的定义式)

根据 $\varepsilon_M = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 或 $\begin{cases} \Psi_{12} = M i_1 \\ \Psi_{21} = M i_2 \end{cases}$

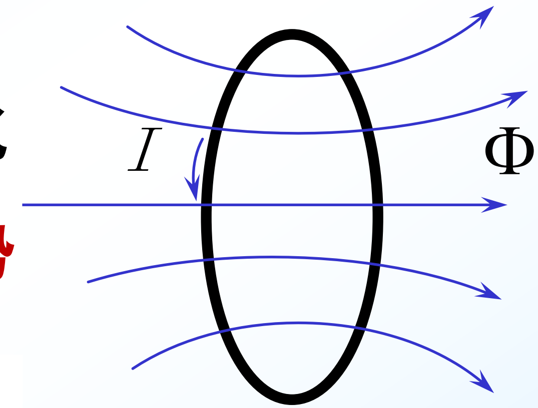
$$\Rightarrow \begin{cases} M = \Psi_{12}/i_1 = \Psi_{21}/i_2 \quad \text{(普适)} \\ M = \left|\dfrac{\varepsilon_{12}}{\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t}\right| = \left|\dfrac{\varepsilon_{21}}{\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t}\right| \end{cases}$$

互感系数的物理意义

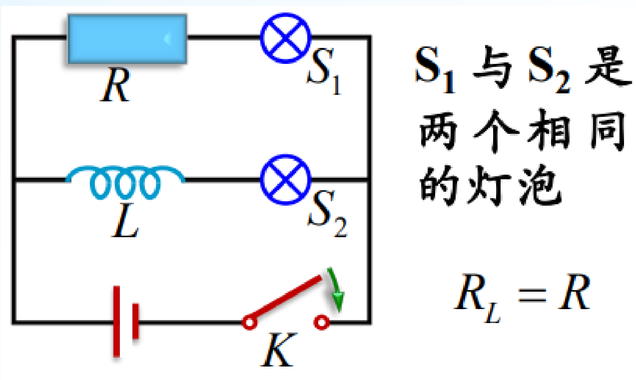
自感现象

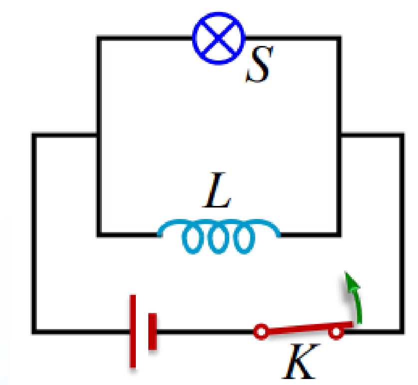
二 自感

回路自身电流i的变化 ⟹ B变化 ⟹ Ψ变化



磁通量Ψ的变化产生感应电动势——自感电动势





S合:灯泡1先亮 灯泡2后亮

S断:灯泡突然亮一下

■接通K或切断K，由于电流变化导致磁场变化

$$B \propto I(t) \Rightarrow \Psi \propto I(t)$$

自感系数与磁通量

$$\boxed{\Psi = L I}$$

$$\Psi \propto I(t)$$

比例系数？

- 比例系数为L，称为自感系数

  单位：亨利（H）　　$1\mathrm{H}=\dfrac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}}$

- 自感系数在数值上等于回路中通过单位电流时，通过自身回路所包围面积的磁通量。L反映线圈产生磁通的能力

- L只与线圈大小、几何形状、匝数、以及磁介质性质有关（与电流无关）。

自感系数与自感电动势

线圈自身电流的变化在线圈内产生的感应电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$$

- 若回路几何形状、尺寸不变，周围介质的磁导率不变

$$\frac{dL}{dt} = 0 \qquad \boxed{\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}}$$

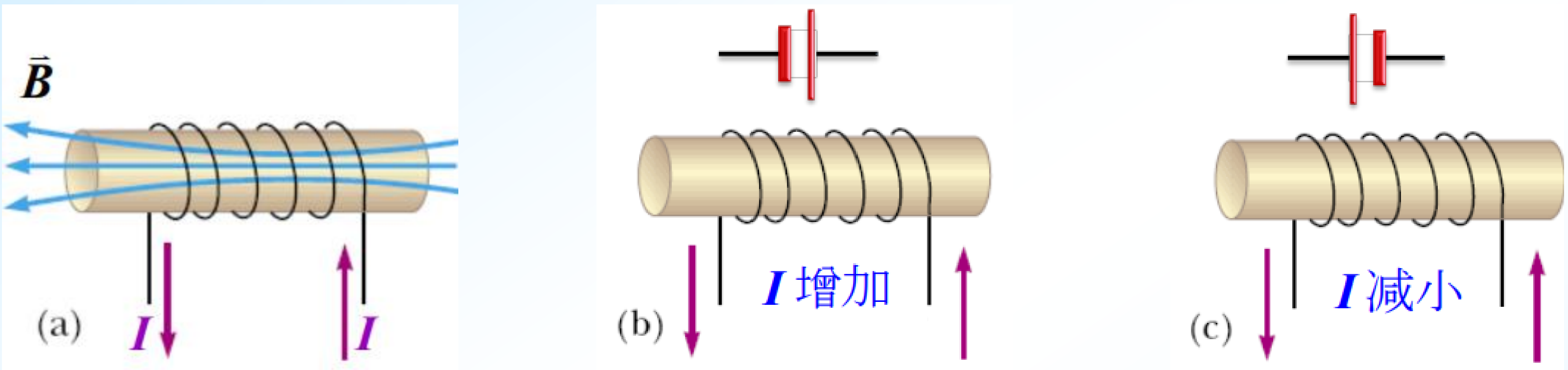
- 自感系数的物理意义：单位电流变化引起感应电动势的大小。反映线圈产生自感电动势的能力。

$$\begin{cases} L = \Psi / I & \text{（普适）} \\ L = \left| -\dfrac{\varepsilon_L}{dI/dt} \right| & \text{（仅}L\text{ 为常量时）} \end{cases}$$

自感电动势的方向：自感中的楞次定律

$$\varepsilon=-\frac{d\Psi}{dt}=-L\frac{dI}{dt}$$

ε_L的方向：反抗回路中电流的改变



电流**增加**时，自感电动势与原电流**方向相反**；

电流**减小**时，自感电动势与原电流**方向相同**。

$\varepsilon_L \propto L$

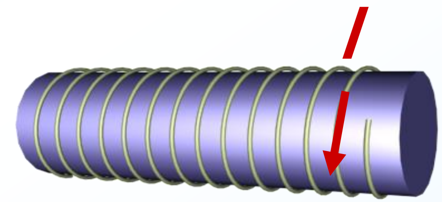
- L大，ε_L大 ⟹ 阻碍电流变化的阻力大
- L小，ε_L小 ⟹ 阻碍电流变化的阻力小

$\therefore$ L——对电路“**电磁惯性**”的度量

自感系数的计算

例1：计算一长直螺线管的自感。设其截面积为S，长为l，单位长度上的匝数为n，管中充有磁导率为μ的磁介质。

解：设螺线管通有电流I，则管内磁场为：



$$B = \mu n I$$

$$V = lS$$

管内全磁通为：

$$\Psi = N\Phi = NBS = nl \cdot \mu n I \cdot S = n^2 \mu I V$$

$$\therefore \quad L = \frac{\Psi}{I} = n^2 \mu V$$

可知：$L \propto n^2, \mu, V$

提高线圈自感的途径：
- 磁芯用高磁导率材料
- 增大绕线密度
- 增大线圈体积

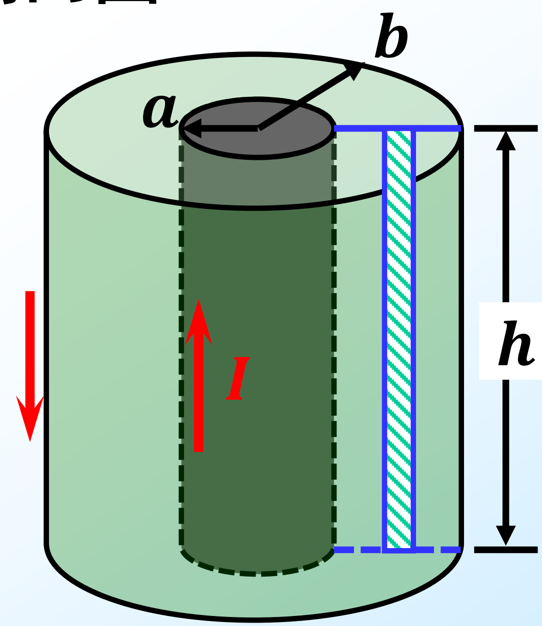
注意：不仅线圈有自感，任何电路都有自感。

自感系数的计算

例2：设电缆由两个共轴导体长薄圆筒组成，半径分别为a和b，其间介质磁导率为μ。求单位长度的一段电缆的自感系数。

解： 设电流I在电缆中的流动方向如图所示，则两圆筒间的磁场为：

$$B=\frac{\mu I}{2\pi r}\quad a<r<b$$



长为h的电缆中，通过面元hdr的磁通量为：

$$d\Psi=Bhdr=\frac{\mu I}{2\pi r}hdr$$

总的磁通量为：

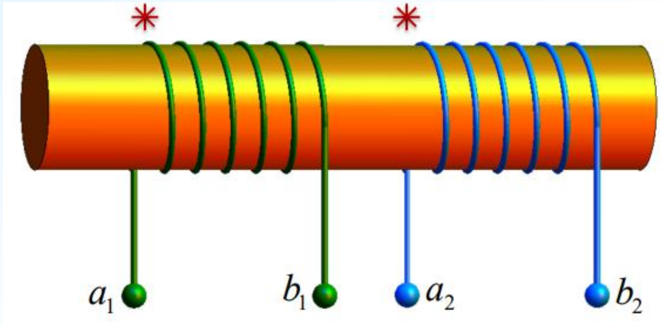
$$\Psi=\int d\Psi=\int_a^b\frac{\mu I}{2\pi r}h\,dr=\frac{\mu Ih}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

单位长度的电感为：$L=\frac{\Psi}{Ih}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

自感分布在整个线路上
——分布自感

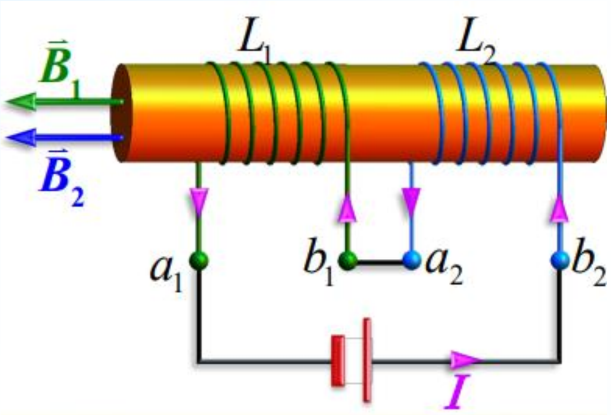
两个线圈串联的自感系数

两个线圈的自感分别L_1为L_2，它们之间的互感为M。



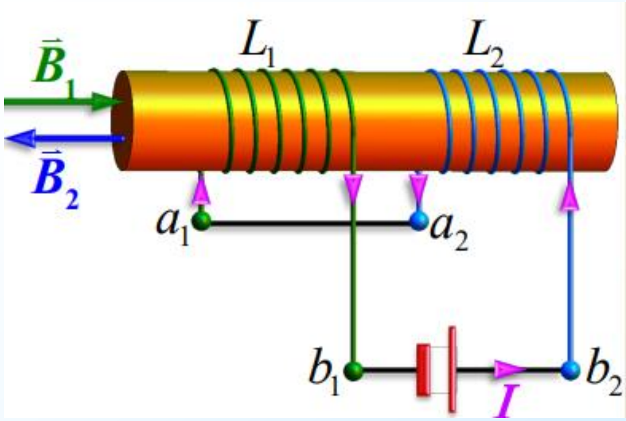
$$\begin{cases} \varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt} \\ \varepsilon_M = -M\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

顺接（磁场增强）



$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

反接（磁场减弱）

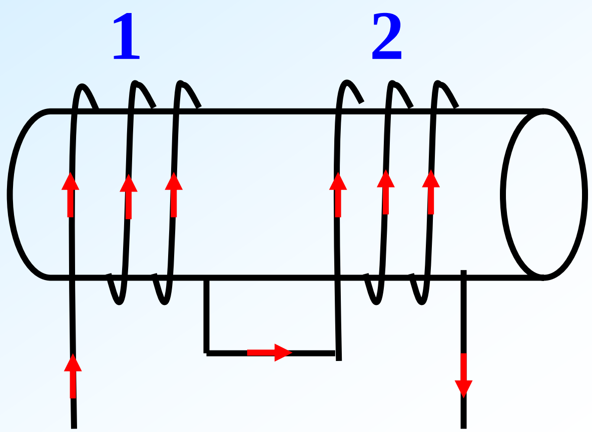


$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

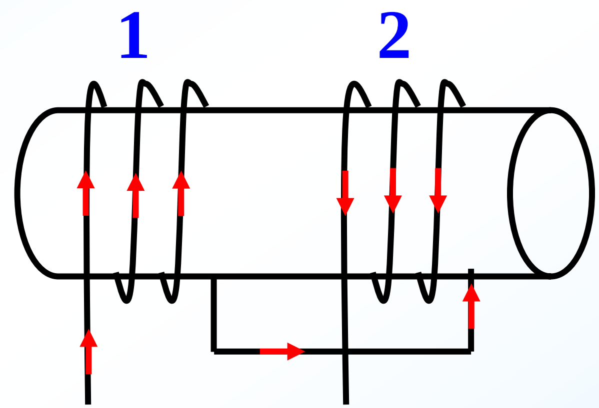
两个线圈串联的自感系数

两个线圈的自感分别L_1为L_2，它们之间的互感为M。

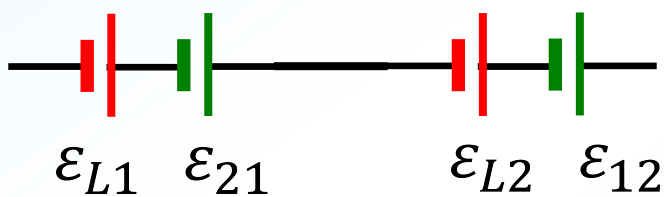
顺串

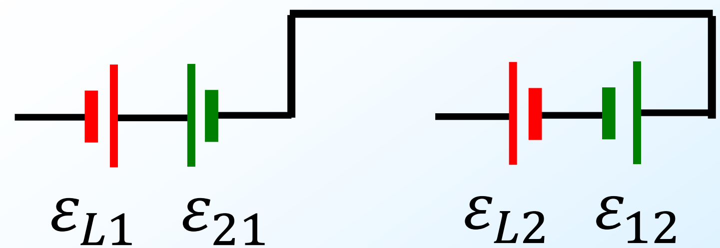


反串



等效电路





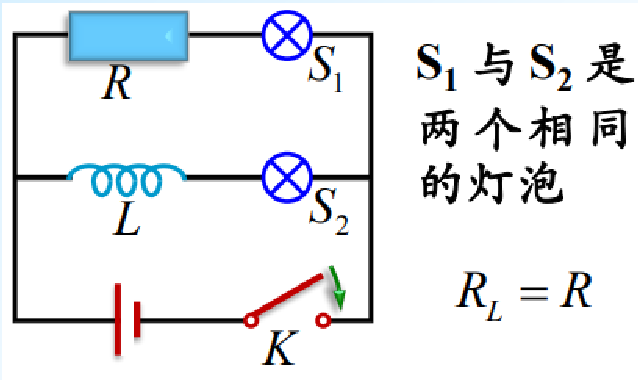
$$\varepsilon = -L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} - L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt}$$

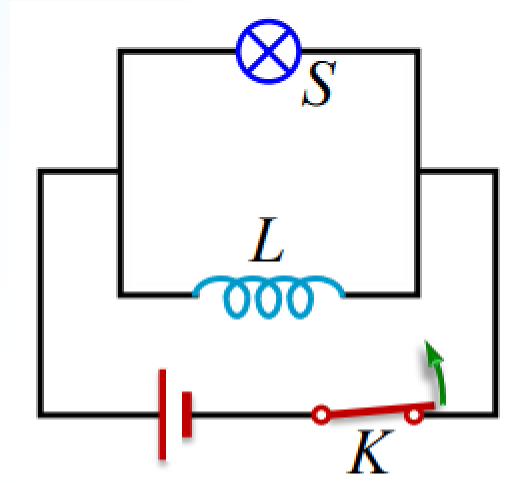
$$\varepsilon = -L_1\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} - L_2\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt}$$

$$\boxed{L = L_1 + L_2 + 2M}$$

$$\boxed{L = L_1 + L_2 - 2M}$$

第4节 RL暂态电路



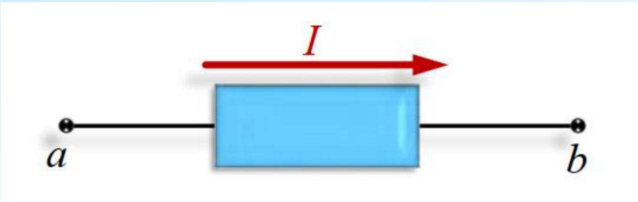


S合：灯泡1先亮 灯泡2后亮　　S断：灯泡突然亮一下

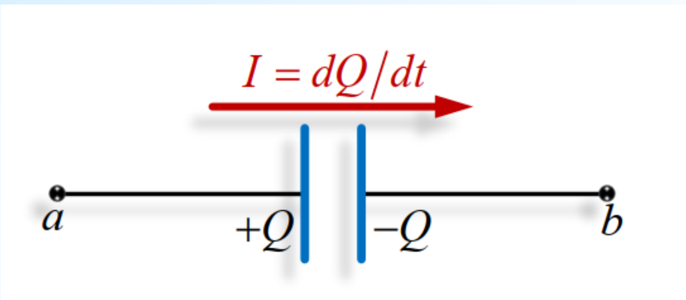
由一自感线圈L，电阻R和电源ε组成的电路。

开关从b拨到a时，电路中电流不是突变而是渐变——暂态过程（自感电动势的作用）

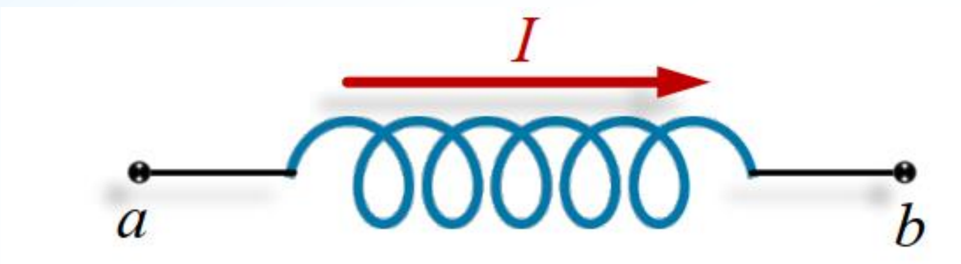
RL暂态电路



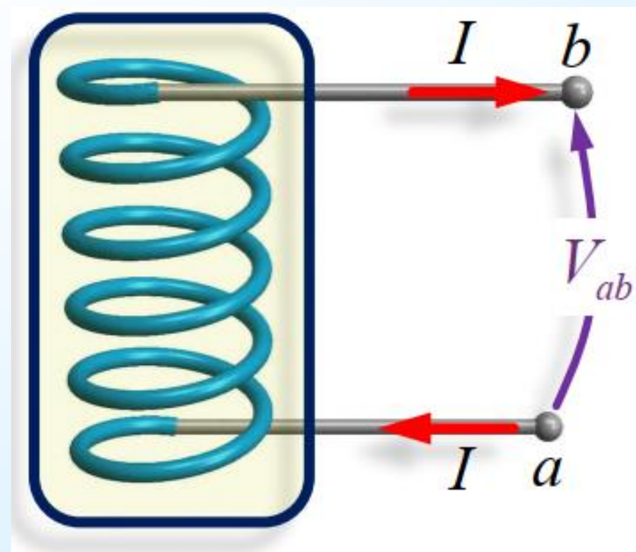
$$V_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = IR$$



$$V_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{Q}{C}$$



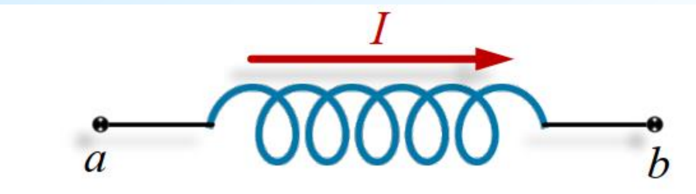
$$V_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = L\frac{dI}{dt}$$



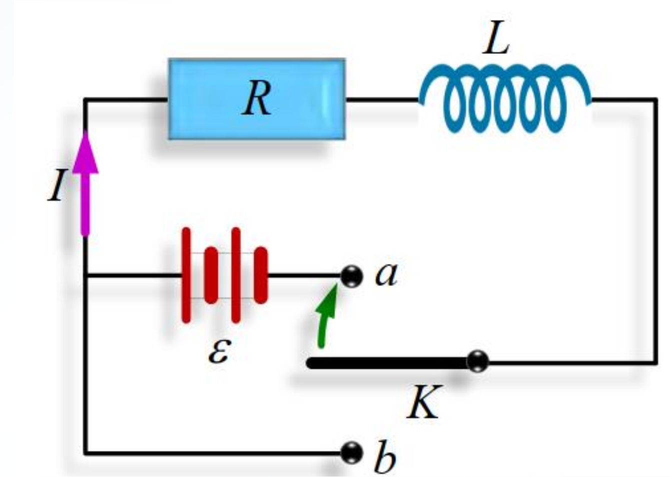
RL回路

● 电流增强（线圈充磁）

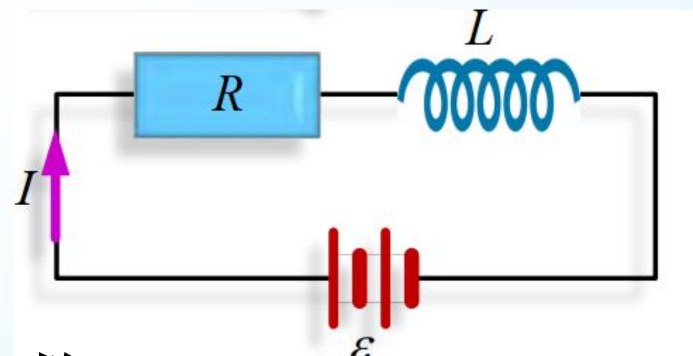
$k\rightarrow a$，$i\nearrow I$，L上产生ε_L



$$V_{ab}=\varphi_a-\varphi_b=L\frac{dI}{dt}$$



$$\varepsilon-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=iR\ \rightarrow\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\varepsilon$$



积分可得： $i=\dfrac{\varepsilon}{R}+\mathrm{C}e^{-Rt/L}$ C为积分常数。

由初始条件：$t=0$，$i=0$，则 $\mathrm{C}=-\varepsilon/R$，

$$\boxed{i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L})}$$

RL回路的特征时间

$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)}$$

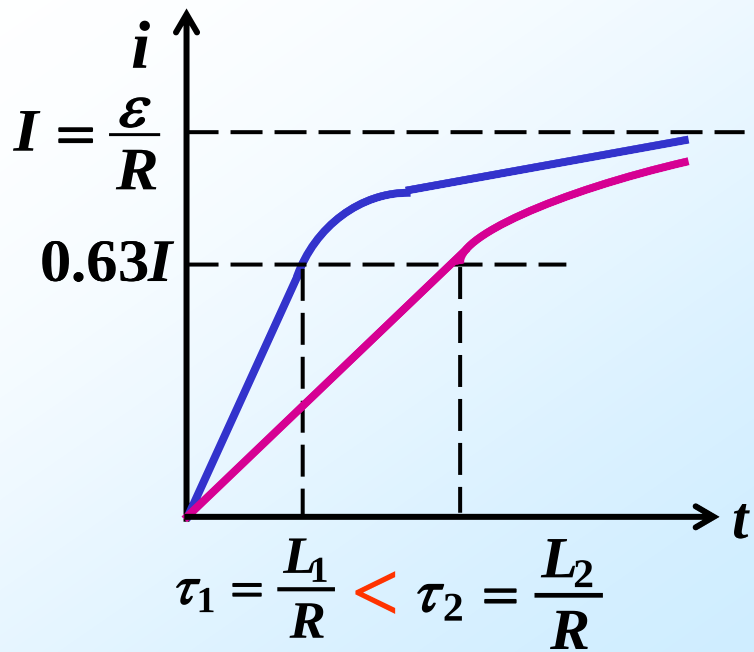
$$\tau \triangleq \frac{L}{R} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

1° $t \to \infty$，$i = \dfrac{\varepsilon}{R} = I$

2° $t = L/R$ $\quad i = \dfrac{\varepsilon}{R}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) = 0.63I$

τ大, L大, i 增长慢,
ε_L 阻力大, **电磁惯性大;**

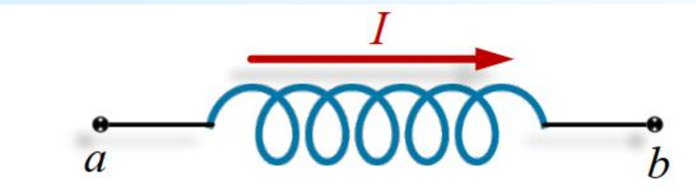
τ小, L小, i 增长快
ε_L 阻力小, **电磁惯性小。**



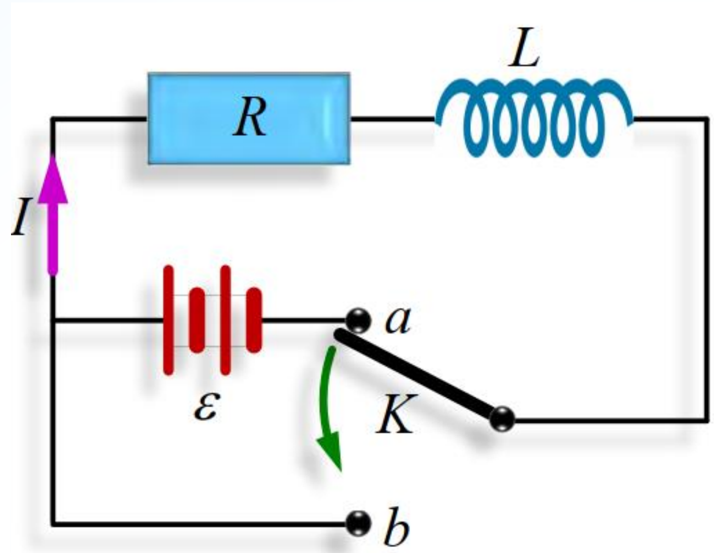
RL回路

- 电流衰减（线圈放磁）

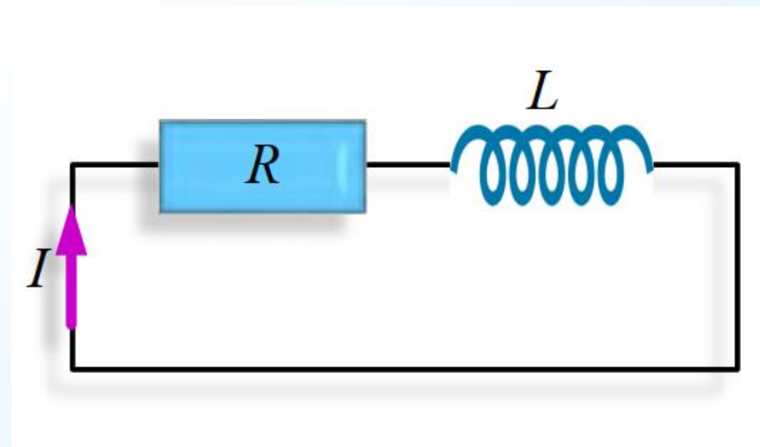
$i \rightarrow I$ 后，$k \rightarrow b$



$$V_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = L\frac{dI}{dt}$$



$$\left.\begin{aligned} \because \varepsilon_L &= -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_L &= iR \end{aligned}\right\} -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR$$



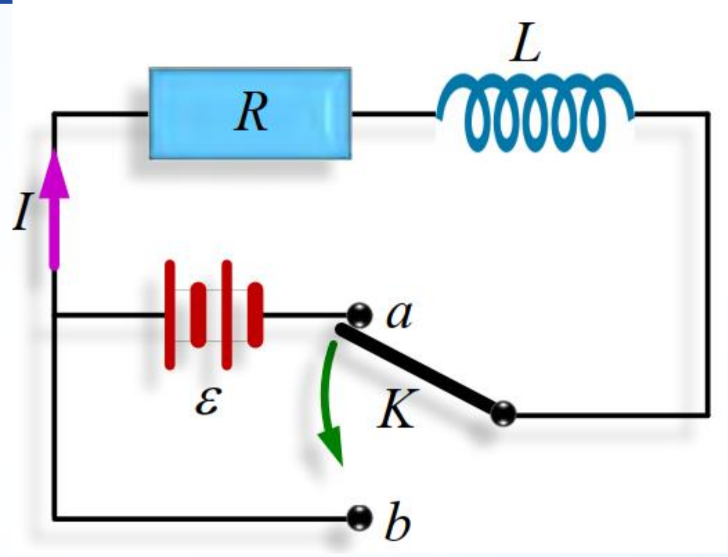
积分可得：$i = Ce^{-Rt/L}$

初始条件：$t=0$，$i=I$，$C=I=\varepsilon/R$

$$\boxed{\therefore \quad i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L}}$$

RL回路的特征时间

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L}$$



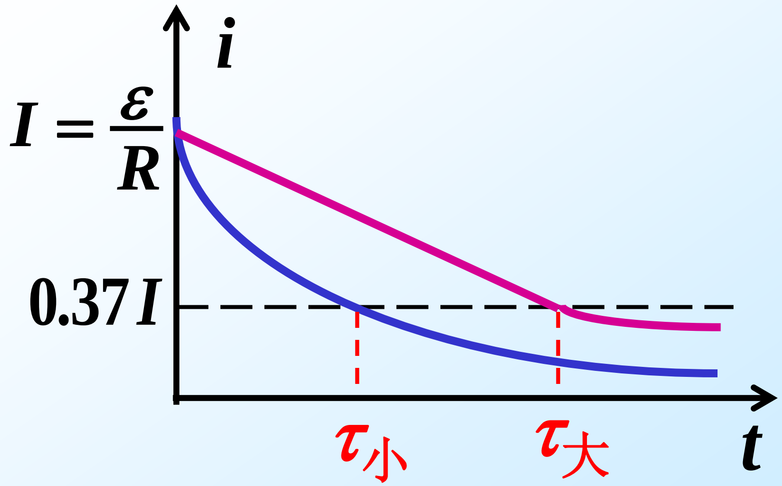
去掉电源，电流仍按指数递减，

递减快慢仍由$\tau = L/R$表征。

$t = \tau$时，$i = 0.37I$

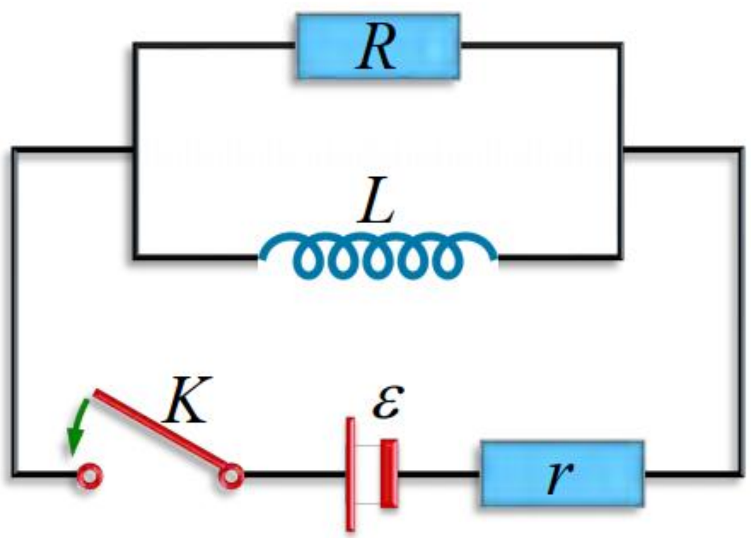
τ大，i衰减慢；

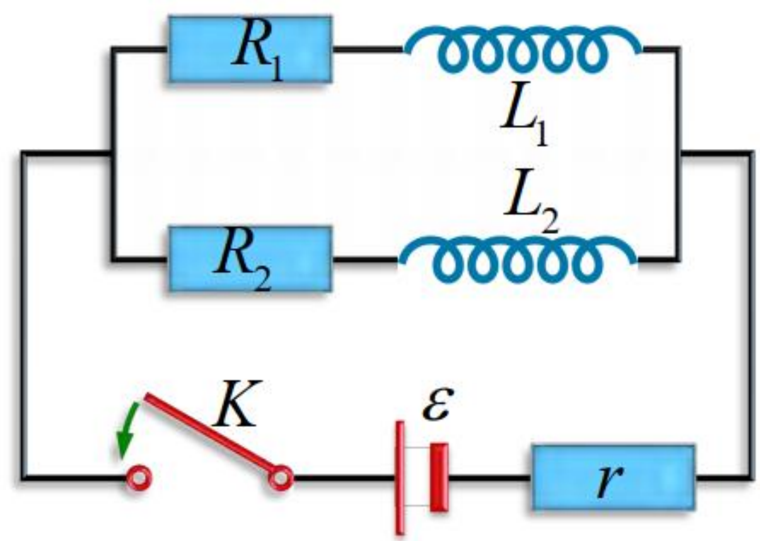
τ小，i衰减快。



RL回路的暂态过程（*）

“*RL*”电路的暂态过程：由于电感线圈对电流的阻碍作用，使电流的增减需要一个过程。



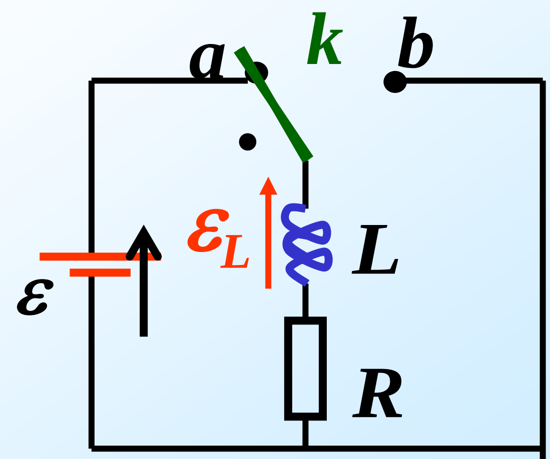


结论：

1° *RL*电路在阶跃电压的作用下，电流不能突变，
$\tau = L/R$ 标志滞后时间。

L 有平稳电流作用

2° 自感在电工及无线电技术中应用很广泛，
但在大自感电路里也是有害的。



RL回路中的能量转换

- 电流衰减（线圈放磁）

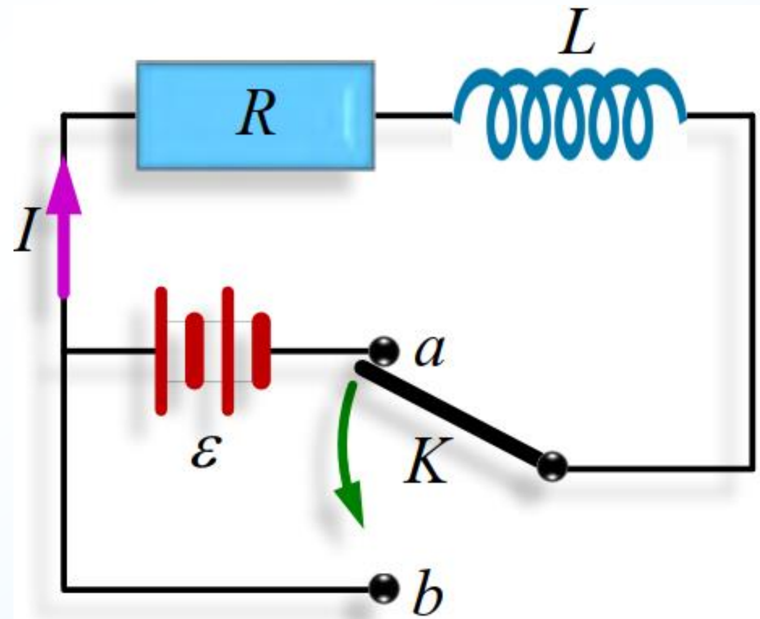
$$\therefore \quad i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L}$$

电流衰减过程中的焦耳热为

$$Q = \int R i^2 \mathrm{d}t = \int R(I^2 e^{-2\frac{R}{L}t})\mathrm{d}t$$

$$= RI^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} L I^2$$



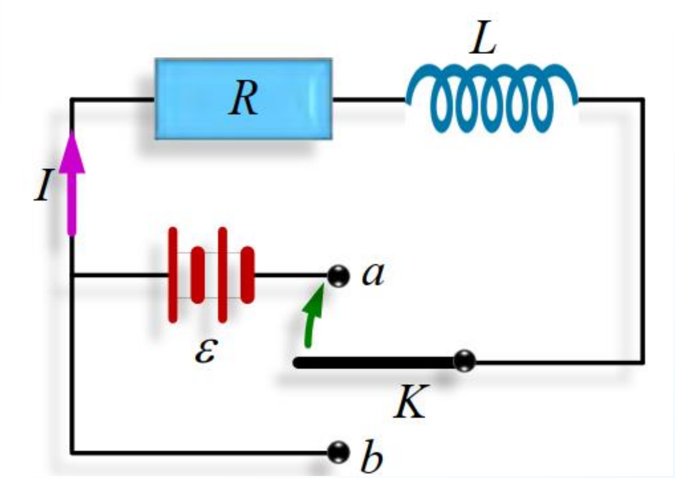
■ 电感线圈是一个储能（磁能）元件

■ 电阻上产生的焦耳热来源于线圈中中存储的电能

电感储能：$W = \frac{1}{2} L I^2$

RL回路中的能量转换

● 电流增强（线圈充磁）



电源做功的功率

$$I\varepsilon = I^2R + LI\frac{dI}{dt} = I^2R + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

$$L\frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon$$

电源提供的能量，
一部分转化为焦耳热，
一部分克服线圈的自感电动势做功。

电流 I 从 $0 \rightarrow I_0$ 的过程中，外界抵抗自感电动势做功

$$A = \int_0^{I_0} d\left(\frac{1}{2}LI^2\right) = \frac{1}{2}LI_0^2$$

以磁能形式储存在线圈中，
当撤去电源后又通过电阻以
焦耳热的形式损耗掉了。

磁能与磁能密度

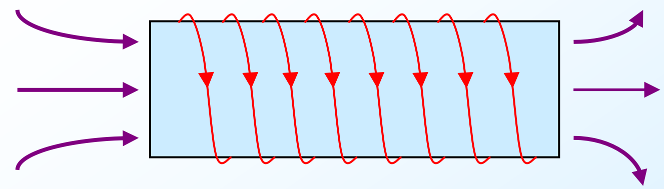
通有电流 I 的自感线圈中储能

$$\boxed{A = W = \frac{1}{2}LI^2}$$

类比电能存在电场中, 磁能也储存在磁场中；那么,

W_m→磁场（B、H）, 如何联系?

以长直螺线管为例:



已知，长直螺线管的n、l、S、I。

已求得长直螺线管的自感和内部磁场:

$$L = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 V \qquad B = \mu_0 n I$$

n--单位长度线圈匝数

μ—填充介质磁导率

V—螺线管体积

则其中存储的磁能为:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 V \cdot I^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}V$$

磁能与磁能密度

通有电流 I,体积为V 的长直螺线管储存的磁能为：$\boxed{W_m=\dfrac{B^2}{2\mu_0}V}$

长直螺线管管内为均匀磁场!

$$\boxed{W_m=\frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow L=\frac{2W_m}{I^2}}$$

由磁能求自感

∴ 单位体积储存的磁场能量为：

$$\boxed{w_m=\frac{W_m}{V}=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$$

——**磁场能量密度**

其中 $\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$ ——磁场强度

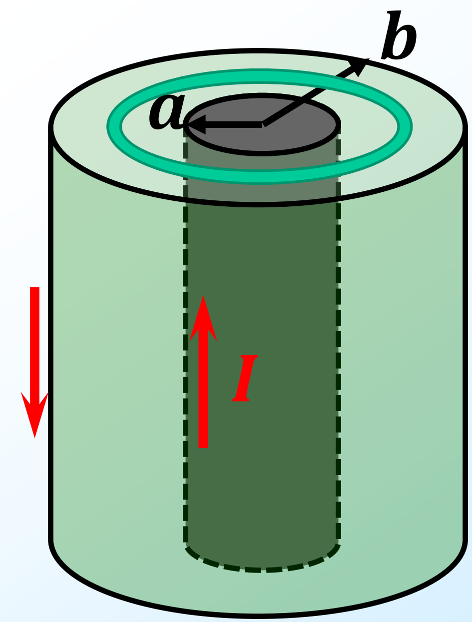
以上结论对任意形式的磁场都成立!

一般地，非均匀场：

$$W_m=\int w_m\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V$$

例1：同轴电缆通有电流I，其共轴的两圆柱面半径分别为a和b，其间充满磁导率为μ的磁介质，求单位长度的磁场能量W_m和电感L。

解：设电缆内电流方向如图所示，则两圆柱面间的磁场为：



$$B=\frac{\mu I}{2\pi r}$$

单位长度的磁场能量为：

$$W_m=\int_V \frac{B^2}{2\mu}dV \quad =\int_a^b \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mu I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r dr$$

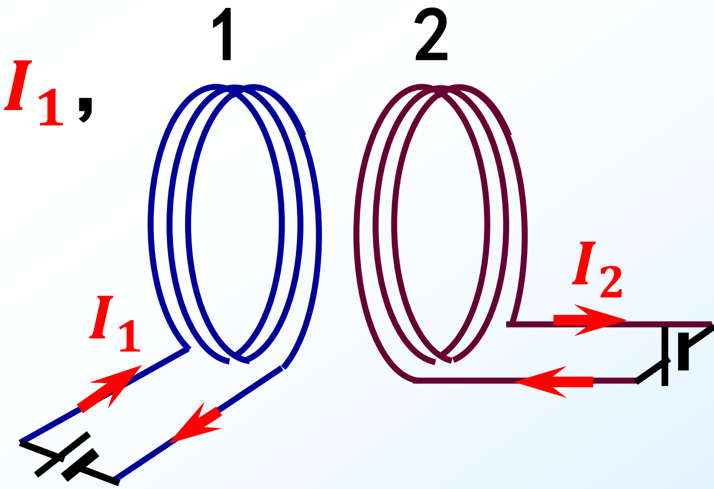
$$=\frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

单位长度的电感为： $L=\dfrac{2W_m}{I^2}=\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

例2：通过计算回路的磁场能量，证明两电流回路的互感系数相同。

解： 假定两个回路开始处在断开状态。

先接通回路1的电源，其电流从$0 \to I_1$，此过程中电源力做功，储存在回路1磁场的能量为：



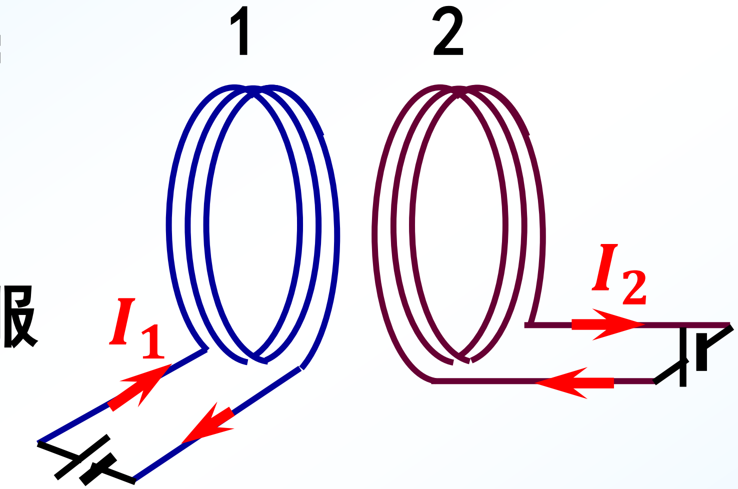
$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

再接通回路2的电源，其电流从$0 \to I_2$，

在回路2的磁场中储存的能量为：

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

但在此过程中回路1中产生了互感电动势：



$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{di_2}{dt}$$

为了保持电流I_1不变，回路1的电源要克服此电动势做功：

$$A = -\int \varepsilon_{21}\, dq \quad = \int_0^{I_2} M_{21}\frac{di_2}{\cancel{dt}} I_1 \cancel{dt} \quad = M_{21} I_1 I_2$$

两回路的电流分别达到I_1和I_2时，整个系统的磁能为：

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

反之，若先接通回路2的电源，最终整个系统的磁能为：

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

$$\therefore M_{21} = M_{21} = M$$

本章小节

1. 法拉第电磁感应定律： $\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

2. 动生电动势 $\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

3. 感生电动势 $\varepsilon_i = \int_-^+ \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

   对闭合回路： $\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

4. 自感、互感的意义，

   自感系数L、互感系数M的计算。

5. 磁场能量和磁场能量密度的概念及计算

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$$

思考有得

第九章和第十章，我们学习了各种“方向”的判定，请对静磁场与电磁感应章节有关方向的判定的内容进行总结，下周二之前提交（选做，优秀者加1.5分）。

作业： **Chap.8(page 47-49) —T8、T9、T10、T11、T12**

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 通过学习通提交作业。
4. 作业缺交三分之一及以上者按规定不能参加考试。