大学物理

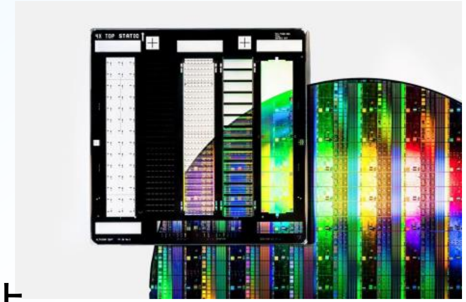
University Physics

华 中 科 技 大 学 物 理 学 院

王宁

ningwang@hust.edu.cn

生活中的衍射现象



ASML网站

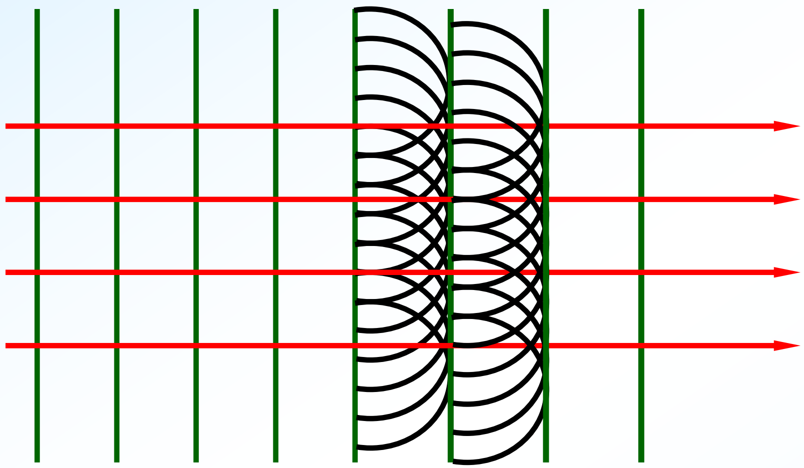
Optical microscope
光学显微镜

Transmission electron microscope
透射电子显微镜

什么限制了光刻机的最小分辨率？ 为什么电子显微镜的分辨率更高？

惠更斯原理 Huygens' Principle

光扰动同时到达的空间曲面被称为波面或波前，波前上的每一点都可以看成一个新的扰动中心，称为子波源或次波源，次波源向四周发出次波；下一时刻的波前是这些大量次波面的公切面，或称为包络面；次波中心与其次波面上的那个切点的连线方向给出了该处光传播方向。



惠更斯原理的不足：

没有回答光振幅的传播问题

没有回答光相位的传播问题

Christiaan Huygens
1629 – 1695

惠更斯的次波概念

继承

Augustin Fresnel
(1788-1827)

吸取

光波干涉概念

补充和发展

提出

次波相干叠加

惠更斯—菲涅耳原理

建立衍射理论框架

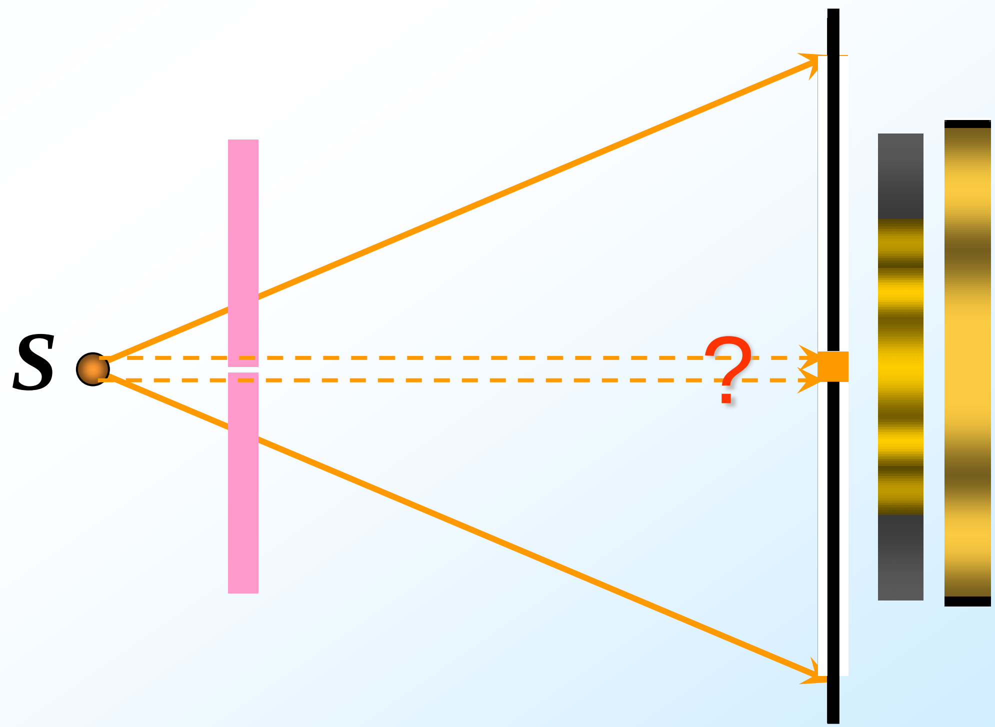
第5节　光波的衍射

一、光的衍射现象

波的衍射现象：波在传播过程中遇到障碍物，能够绕过障碍物的边缘而偏离直线传播的现象。

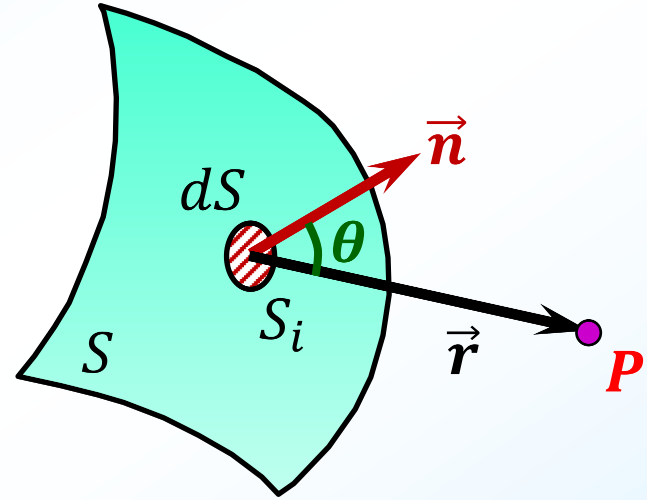
1．现象

光在传播过程中遇到尺寸比光的波长大得不多的障碍物时，光会传到障碍物的阴影区并形成明暗变化的光强分布的现象。



2 光波的惠更斯-菲涅耳原理

波阵面上各面积元所发出的球面子波在P点的相干叠加决定了P点的合振动。



衍射现象本质上是无数多个无限小子波的干涉效应。

dS在P点引起的振动：

各向异性

$$dE_P \propto A(S_i)\frac{f(\theta)}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{u}\right)dS$$

S_i点的振幅

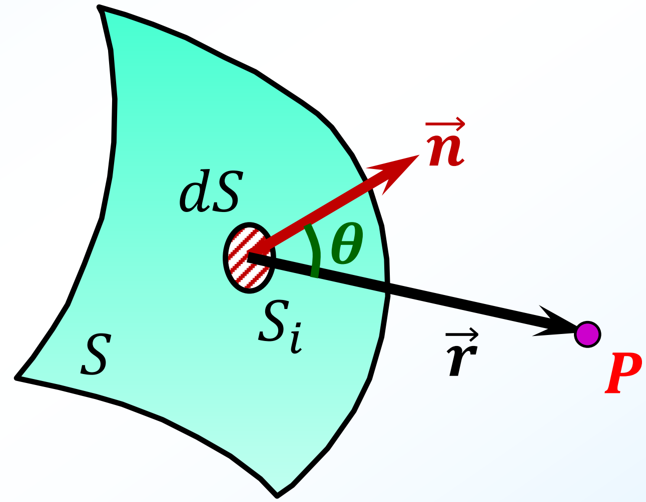
球面波

$f(\theta)$：随θ增大而减小，当$\theta \geq \pi/2$时，$f(\theta)=0$。

整个波阵面S在P点所产生的合振动：

$$E_P = \int_S dE_P$$

$$= c \iint_S A(S_i) \frac{f(\theta)}{r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{u}\right) dS$$

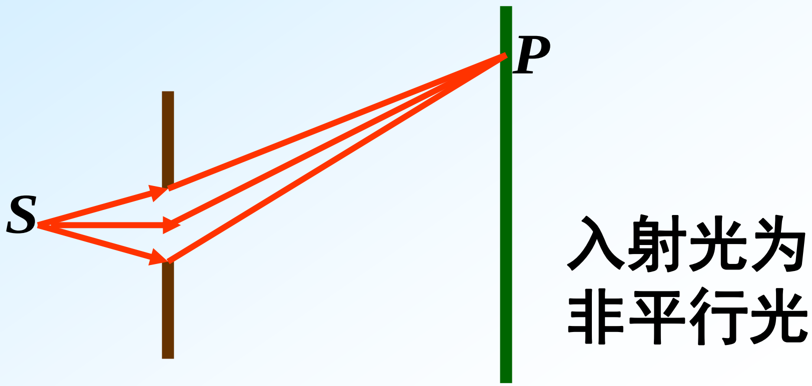


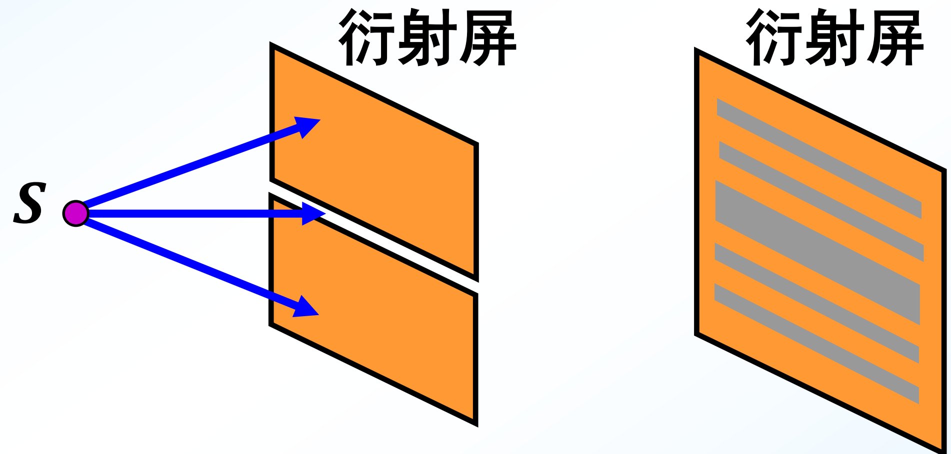
——菲涅耳衍射积分公式

通常情况此积分非常复杂。但若波阵面具有某些空间对称性，积分计算较为简单。

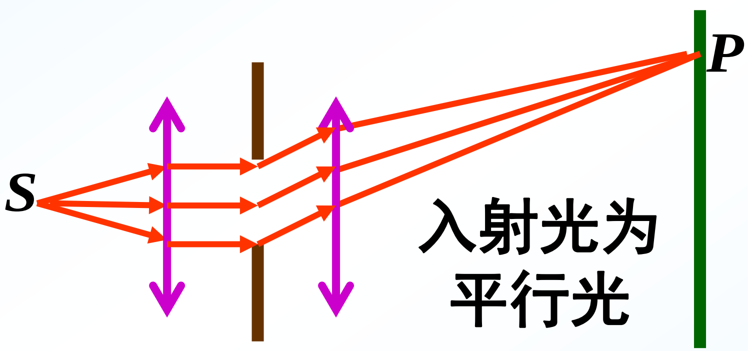
3 衍射的分类

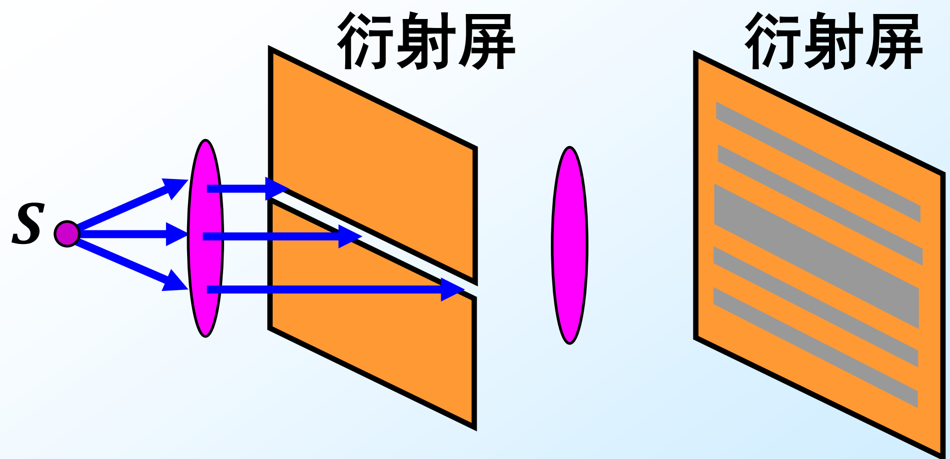
(1) 菲涅耳衍射：近场衍射





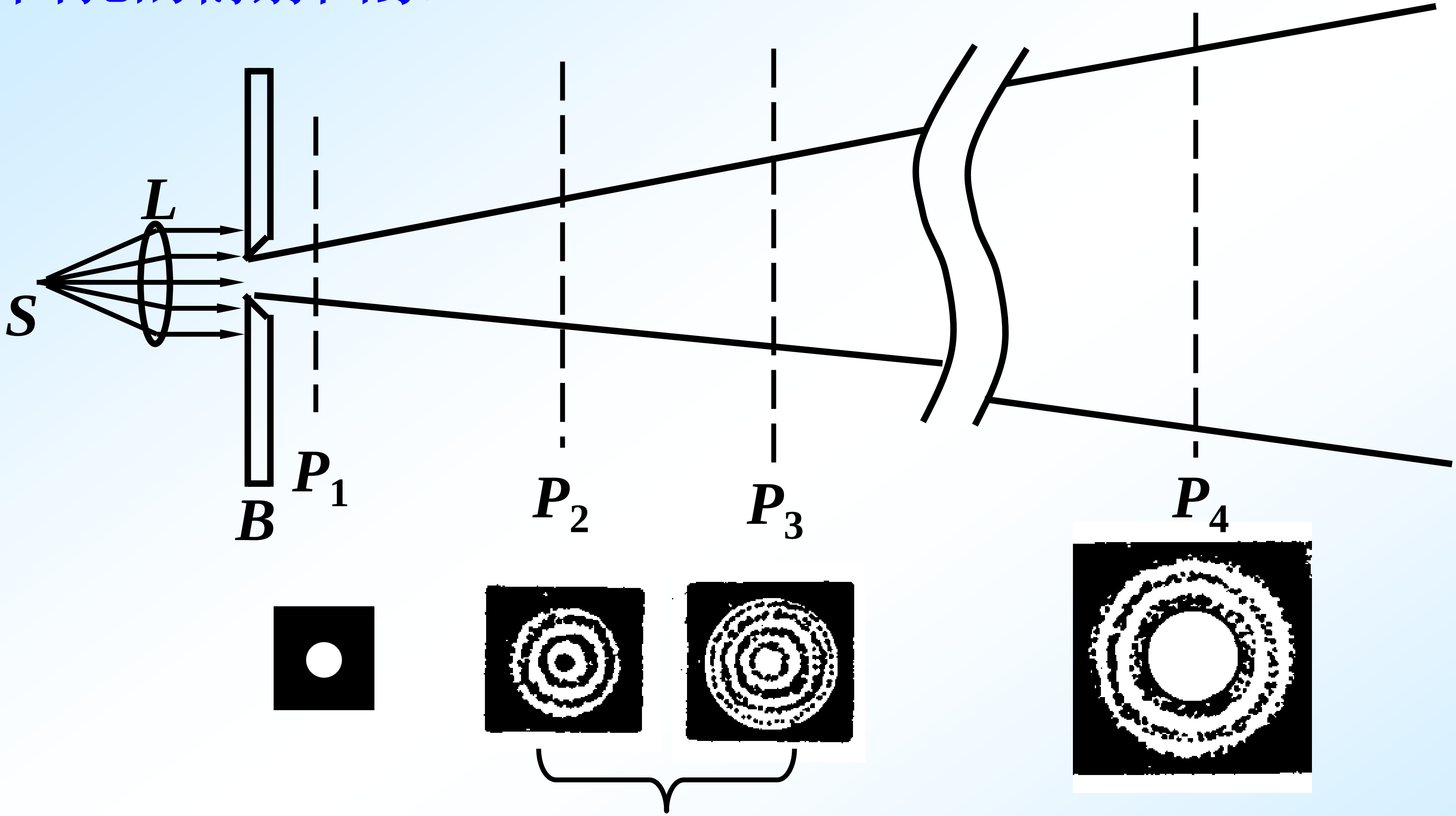
(2) 夫琅和费衍射：远场衍射





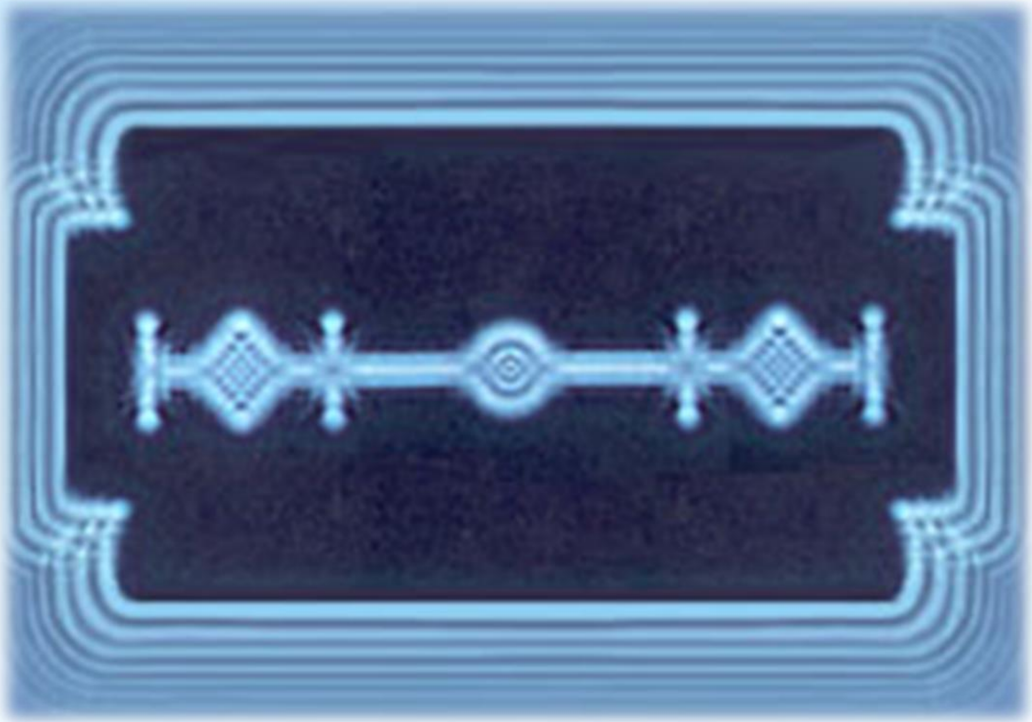
平行光=光源位置无限远 （利用透镜达到此要求）

圆孔的衍射图象：

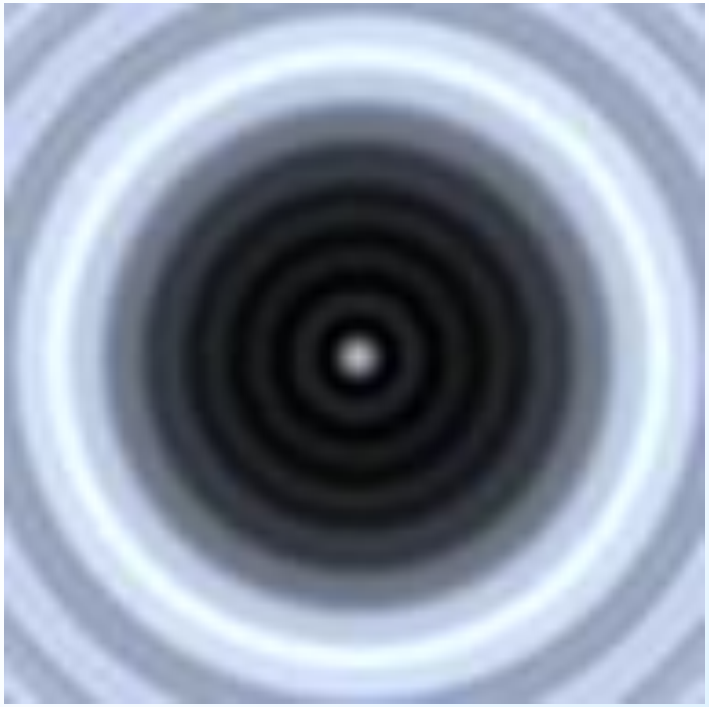


孔的投影　　菲涅耳衍射　　夫琅禾费衍射

菲涅尔衍射

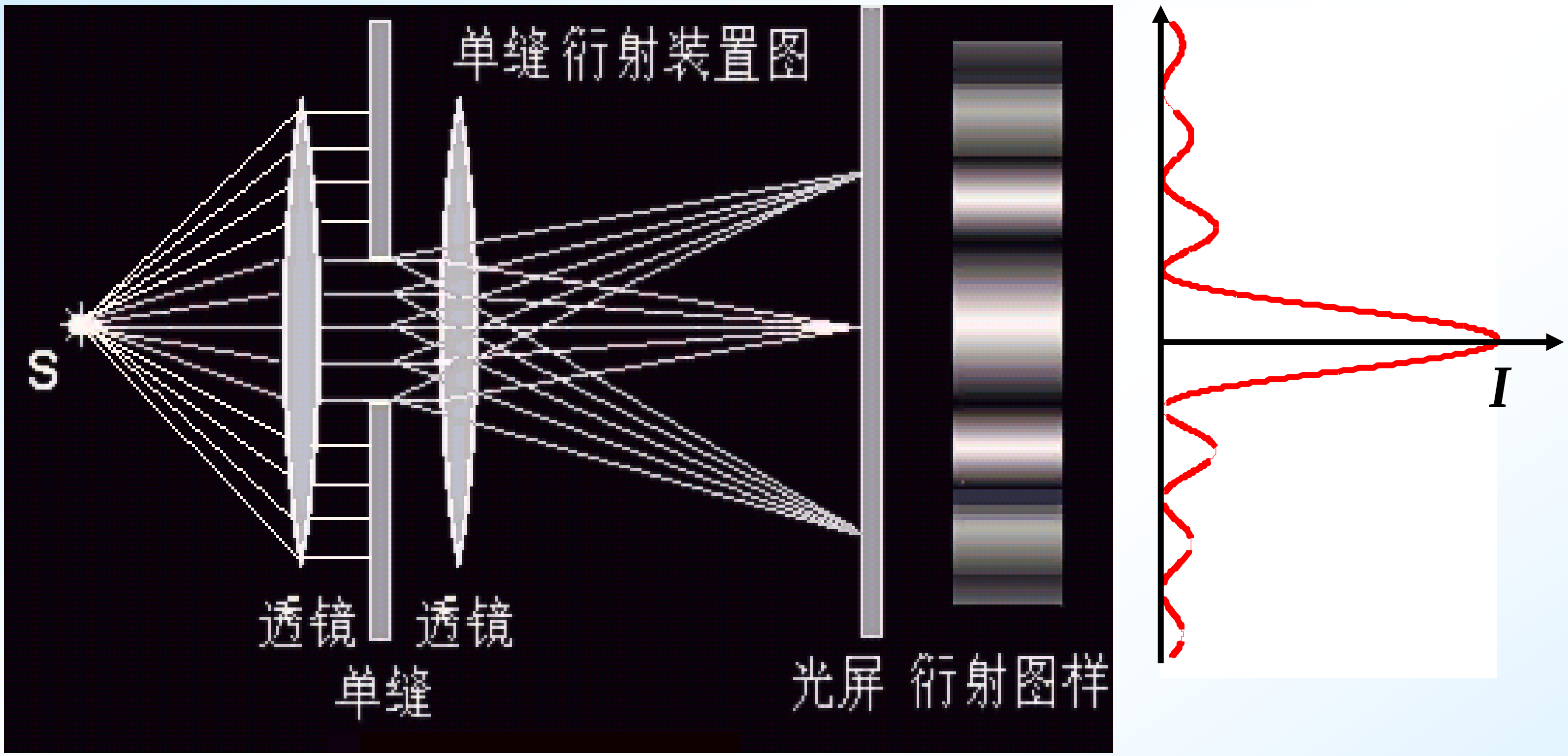


刀片边缘的衍射



圆屏衍射

二、单缝夫琅和费衍射



研究的问题：

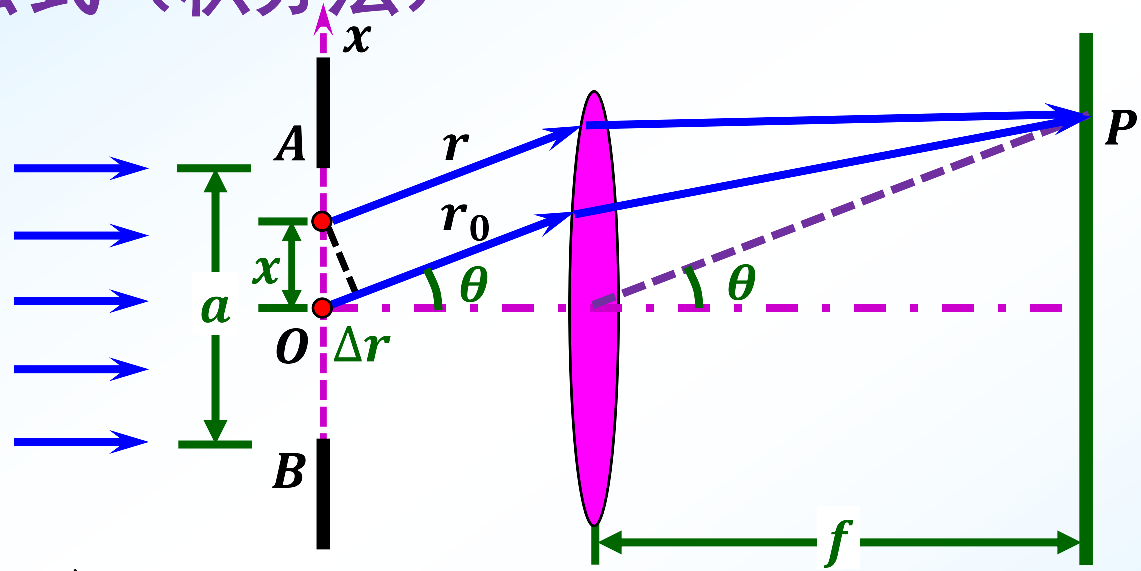
- 衍射花纹的位置分布
- 衍射花纹的强度分布

1. 单缝夫琅和费衍射光强公式（积分法）

把波阵面AB分为许多等宽的窄条，作为振幅相等的次级波源。

θ：衍射角

缝宽： $a \ll f$



$$E_P = c\iint_S A(S_i)\frac{f(\theta)}{r}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r\right)dS$$

$$= c\iint_S A(S_i)\frac{f(\theta)}{r_0}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r\right)dS$$

$$= c'\int_{-a/2}^{a/2}\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(r_0 - x\sin\theta)\right]dx$$

$$= \frac{c'\lambda}{2\pi\sin\theta}\sin\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(r_0 - x\sin\theta)\right]\Bigg|_{-a/2}^{a/2}$$

$$r = r_0 - x\sin\theta$$

$$dS = l\,dx$$

夫琅禾费衍射成像在无穷远：
幅度可取近似

$$r_0 - x\sin\theta \approx r_0$$

相位不取近似

$$E_P=\frac{c'\lambda}{2\pi\sin\theta}\left\{\sin\left[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\left(r_0-\frac{a}{2}\sin\theta\right)\right]-\sin\left[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\left(r_0+\frac{a}{2}\sin\theta\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{c'\lambda}{\pi\sin\theta}\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r_0\right)$$

合振动的振幅为：

$$E_\theta=\frac{c'\lambda}{\pi\sin\theta}\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)=E_0\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}=E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

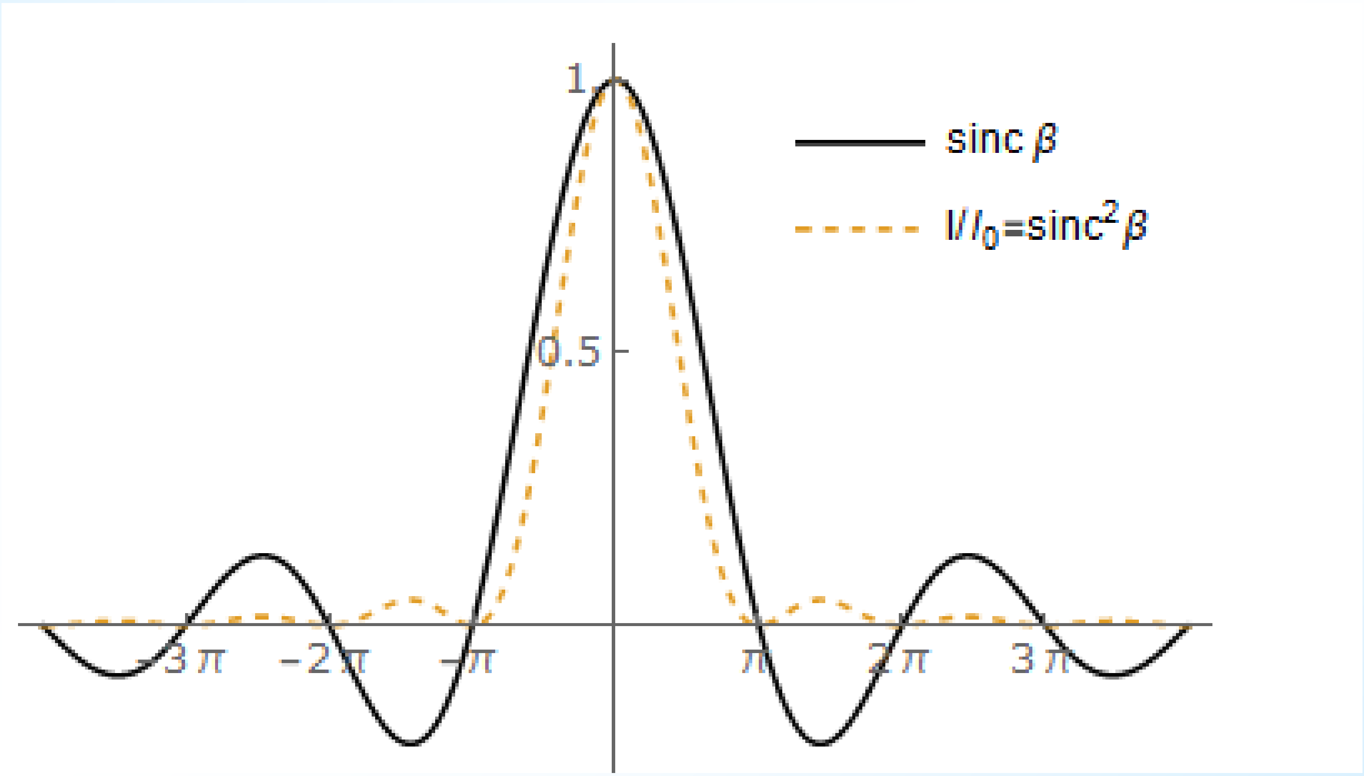
其中： $E_0=c'a$ $\quad\alpha=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$

电矢量振幅

***P*点的光强为：**

$$\boxed{I_\theta=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

$$\boxed{I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2} \qquad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$



2. 光强分布

1). 在屏上θ角相同处光强相同；

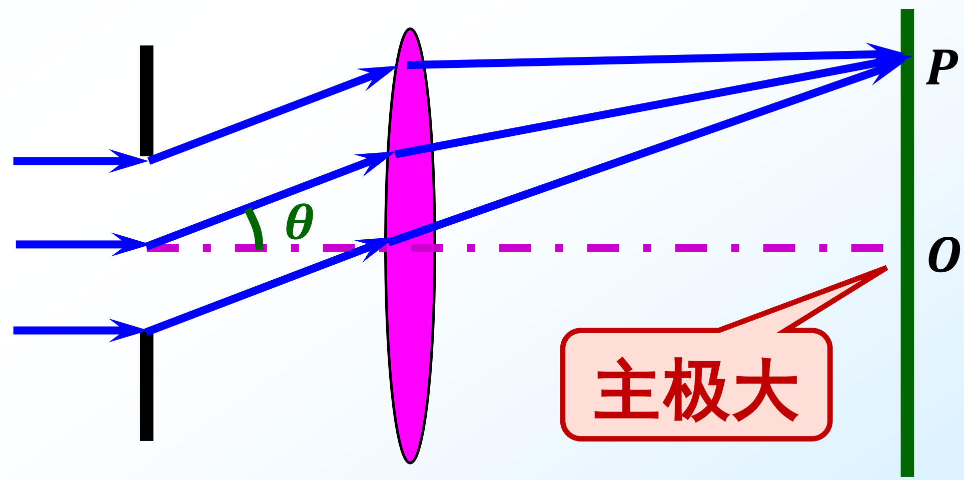
$$\boxed{I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2} \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

相同光强的点分布在平行于单缝的直线上

2). $\theta = 0 \quad \alpha = 0$

$$\left.\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right|_{\alpha\to 0} = 1$$

$$I_{\theta\to 0} = I_0 = I_{\max}$$



透镜的主光轴与屏的交点处有最大光强。

3). 暗纹条件

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

$$\sin\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = \pm k\pi \quad \alpha \neq 0$$

$$\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta = \pm k\pi \quad k \neq 0$$

$\therefore \quad a\sin\theta = \pm k\lambda \quad k = 1,2,\cdots$ ——衍射极小条件

$I_\theta = 0$ 此θ角处出现光强极小的暗条纹。

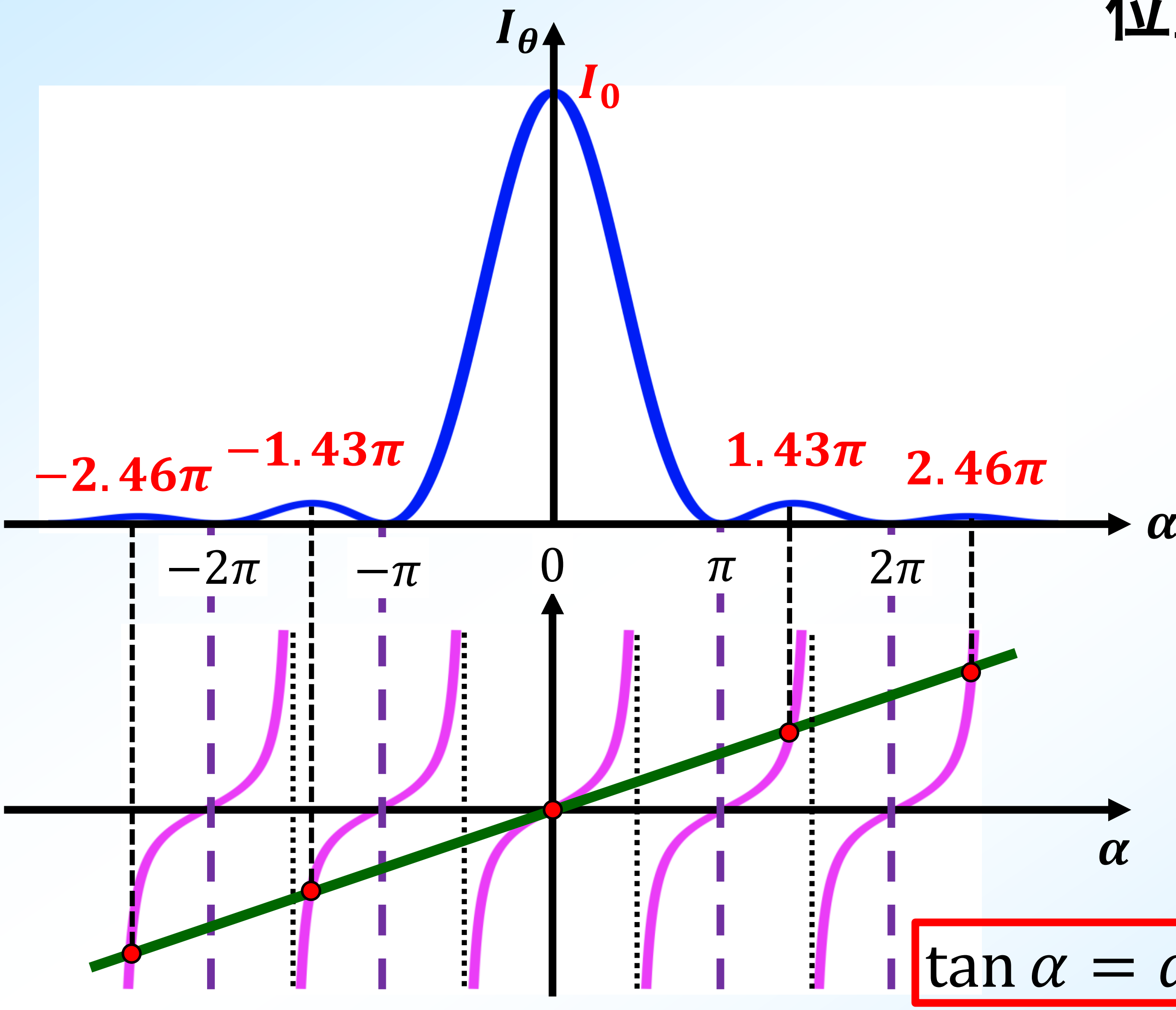
4). 明纹条件

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0 \longrightarrow \frac{2\sin\alpha\,(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)}{\alpha^3} = 0$$

$\therefore \quad \tan\alpha = \alpha$ 光强出现极大值

利用作图法得到光强极大值的位置

$$\boxed{I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2} \qquad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$



$$\boxed{\tan\alpha = \alpha}$$

光强极大值位置：

$$\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \cdots$$

位置可近似表示为：

$$\alpha \approx \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{a\sin\theta \approx \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}}$$

$$(k = 1,2,\cdots)$$

衍射次极大

注意：$k \neq 0$

主极大 $\boxed{a\sin\theta = 0}$ 次极大 $\boxed{a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}}$

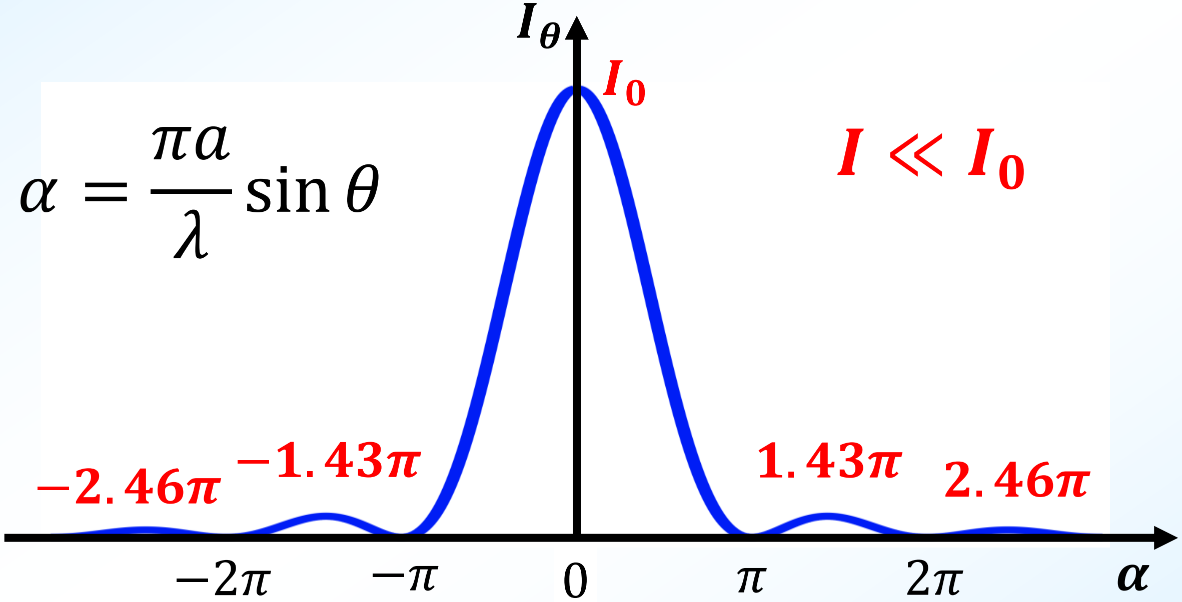
5). 光强

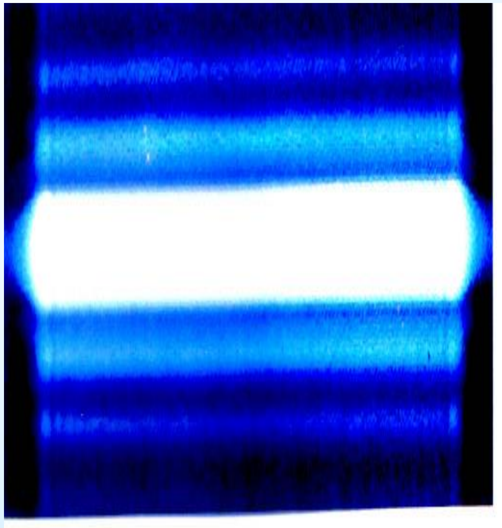
$$\boxed{I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

主极大的光强： $I_0 = (c'a)^2$

光强正比于缝宽的平方

次极大的光强：$0.0472I_0, 0.0165I_0, \cdots$





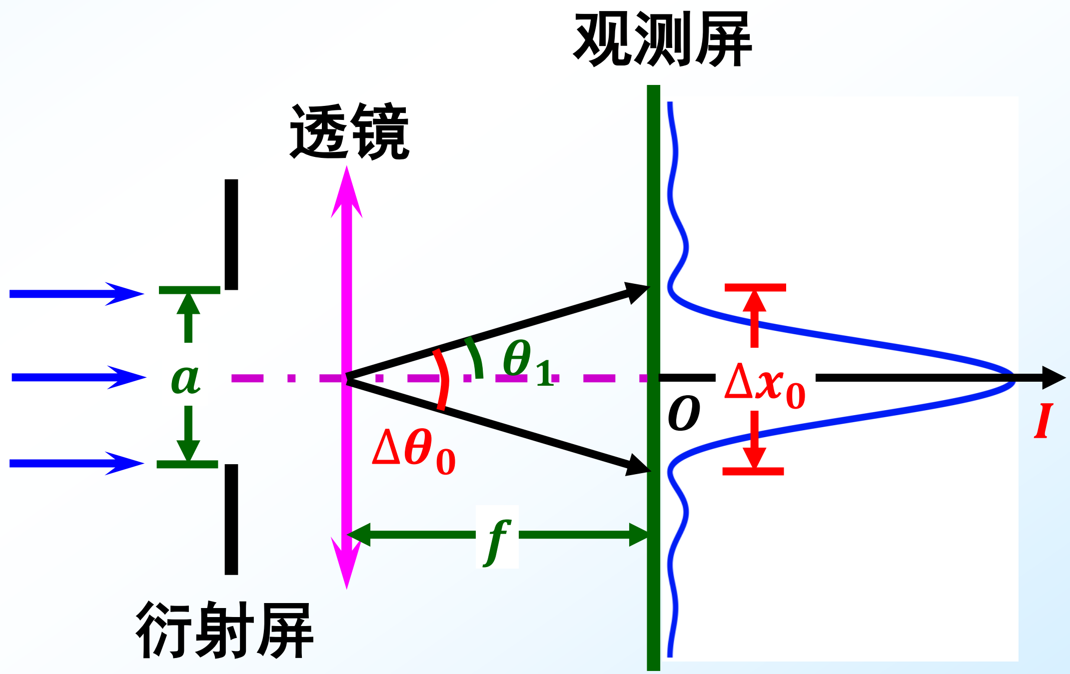
6). 条纹宽度

定义相邻暗纹的角距离为其间明纹的**角宽度**。

暗纹条件： $\boxed{a\sin\theta = \pm k\lambda}$

通常情况下：$a \gg \lambda$

$$\sin\theta \approx \theta$$



主极大明纹角宽度：

$$\Delta\theta_0 = 2\theta_1 = \frac{2\lambda}{a}$$

线宽度：

$$\Delta x_0 = 2f\tan\theta_1$$

$$= 2f\theta_1 = \frac{2f\lambda}{a}$$

7). 缝宽对衍射图样的影响

$a\downarrow, \Delta\theta\uparrow$

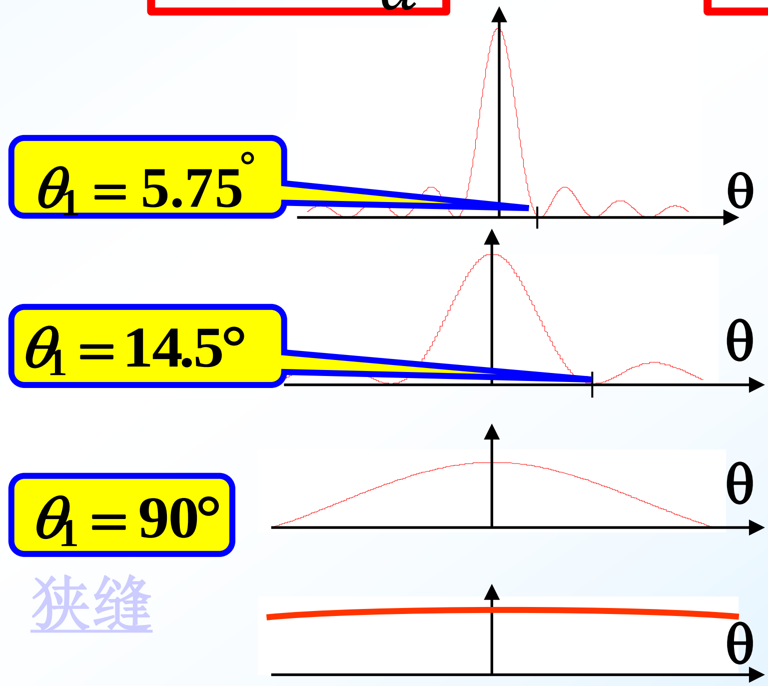
主极大 $\boxed{\Delta\theta_0 \approx \frac{2\lambda}{a}}$ 次极大 $\boxed{\Delta\theta_k \approx \frac{\lambda}{a}}$

$a = 10\lambda \quad \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{1}{10}$

$a = 5\lambda \quad \sin\theta_1 = \frac{1}{5}$

$a = \lambda \quad \sin\theta_1 = 1$

$a << \lambda$ 屏上强度均匀

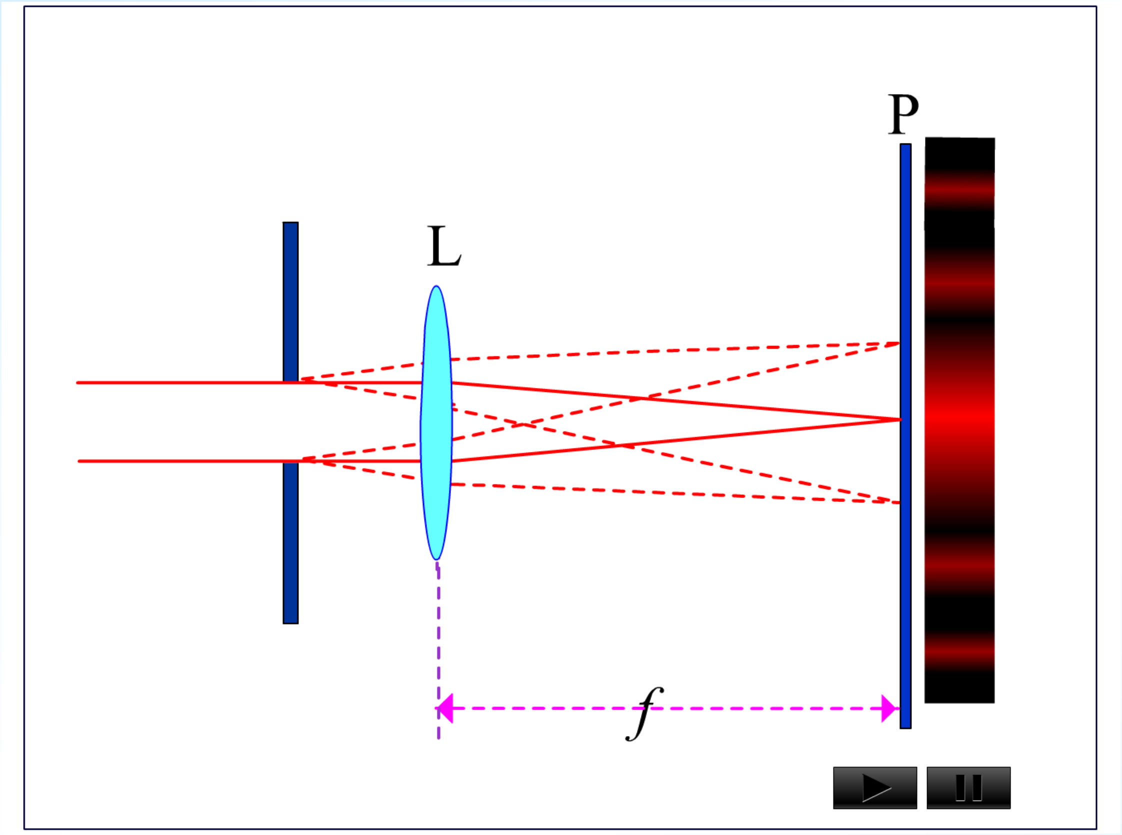


反之，若$a \gg \lambda$，$\Delta\theta \to 0, \Delta x \to 0$

只显现出单一的明条纹 ---单缝的几何光学像

几何光学是波动光学在$a \gg \lambda$时的极限情形。

缝宽变化对条纹的影响：



缝宽越小，条纹展得越开，衍射作用愈显著。

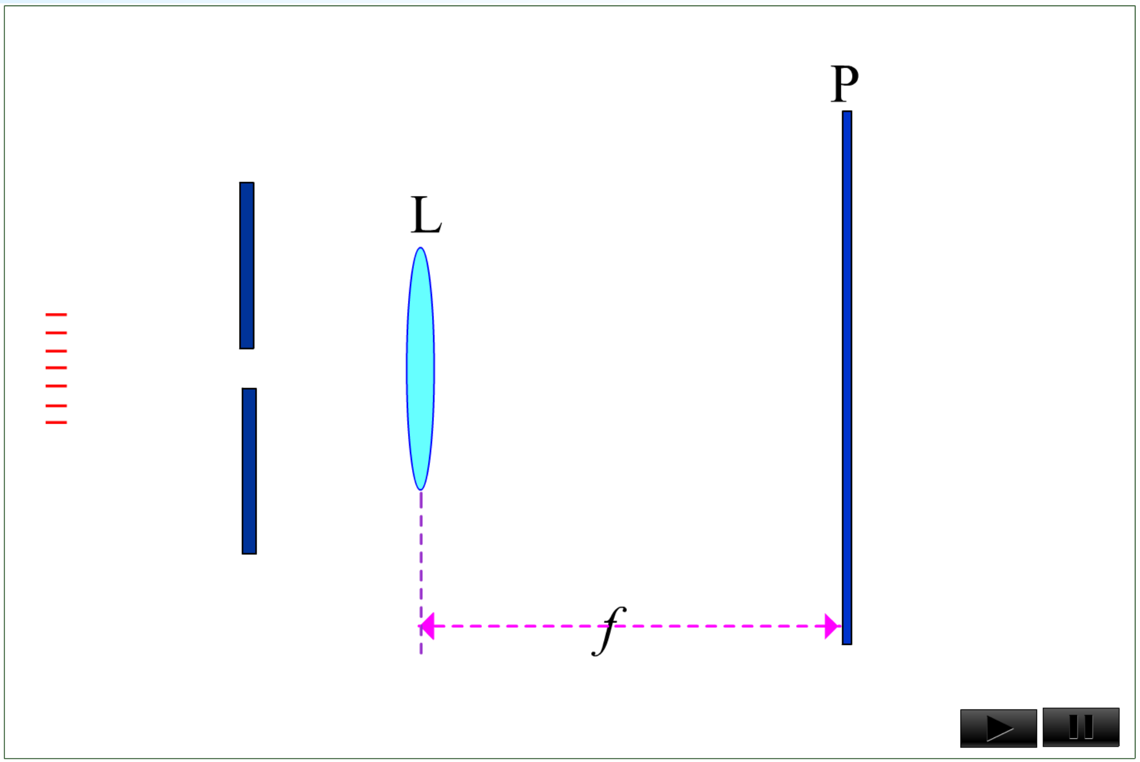
缝宽越大，条纹向中央明纹靠拢，衍射作用愈不显著。

8). 波长对衍射图样的影响

$$\Delta x_0 = 2f\tan\theta_1 \approx \frac{2f\lambda}{a}$$

波长越长，条纹宽度越宽，衍射效应越明显。

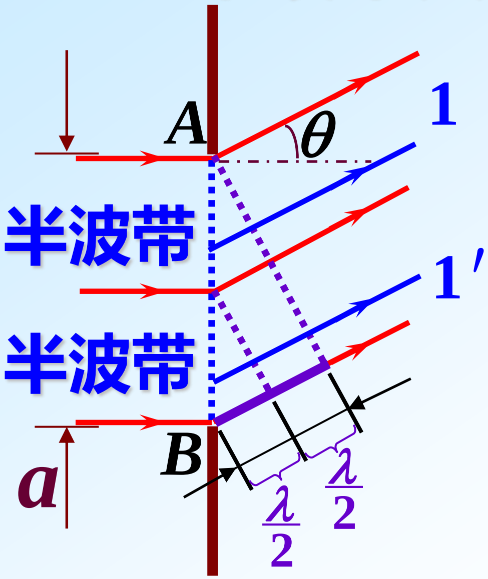
复色光（白光）入射：不同波长的光的明纹不完全重叠

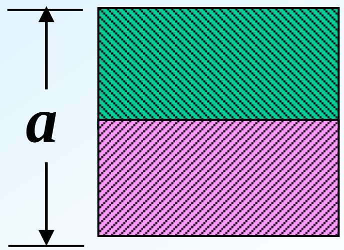


屏幕中央O为白色明纹，最靠近O的为紫色，最远的为红色。

3. 其它方法求光强公式

1）半波带法





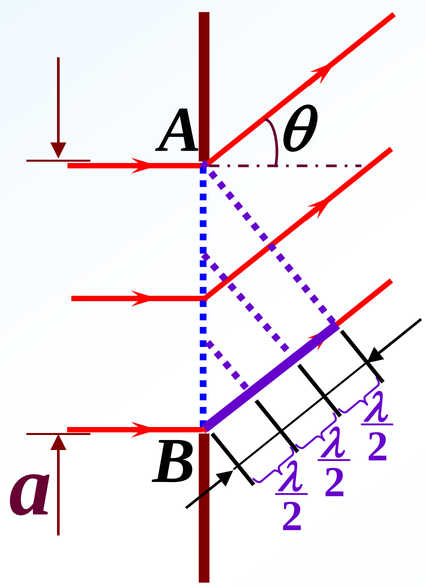
暗纹

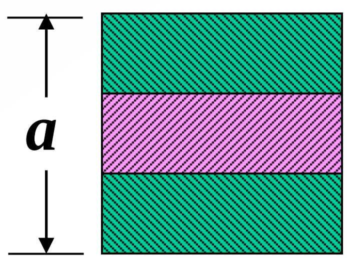
若 $k'=2$

$a\sin\theta=\lambda$

设：$\delta = a\sin\theta = \pm k'\dfrac{\lambda}{2}$

$k'=1,2,3\cdots$





明纹

若 $k'=3$

$a\sin\theta=\dfrac{3}{2}\lambda$

暗纹条件:

$$a\sin\theta = \pm k\lambda, k = 1, 2, 3 \ldots$$

明纹条件：

$$a\sin\theta = \pm\frac{(2k+1)\lambda}{2},$$

$$k = 1, 2, 3 \ldots$$

中央明纹： $a\sin\theta = 0$

例1、用半波带法说明，在单缝衍射图样中，离中心明条纹越远的明条纹亮度越小。

除中央明纹外，其它明纹的衍射方向对应着奇数个半波带，级数越大，单缝处的波面可分成的半波带数目越多，其中偶数个半波带的作用两两相消后，剩下的光振动未抵消的一个半波带的面积越小，由它决定的该明条纹的亮度就越小。

例2 、波长为λ的单色光垂直入射在缝宽$a=4\lambda$的单缝上，对应于衍射角 $\theta=30^0$，单缝处的波面可划分为____4____个半波带。

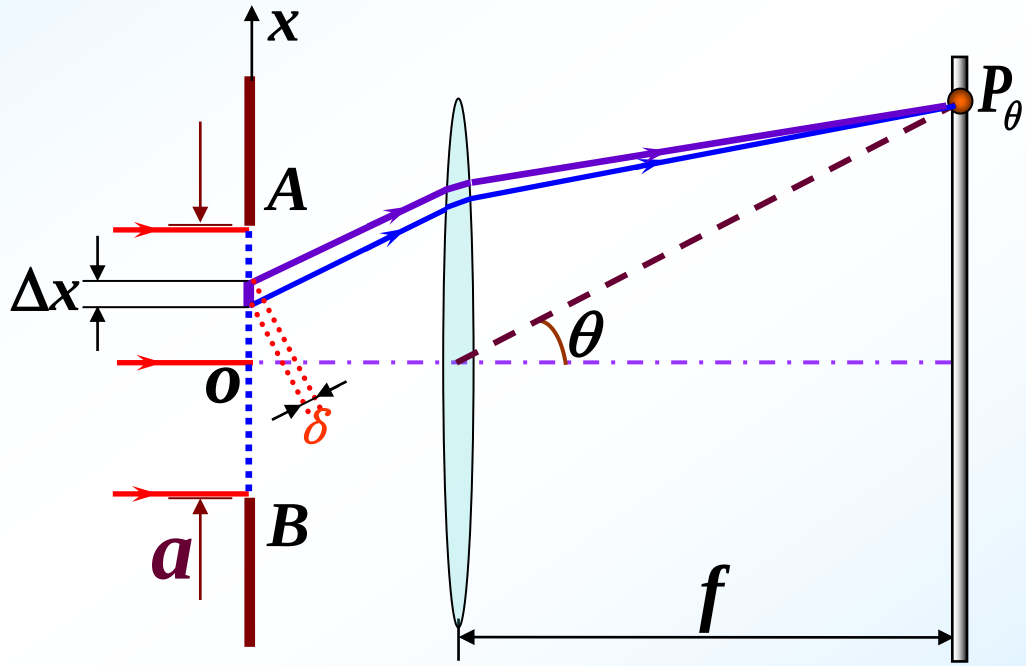
2）振幅矢量法

将单缝处波面分成N个窄条：

$$\Delta x = a/N$$

$(N$很大$)$

每个窄条发的子波在P点振幅近似相等，设为ΔE_0



相邻窄条：$\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x\sin\theta = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{a\sin\theta}{N}$

P处的合振幅E_P就是各窄条子波的振幅矢量和的模。

回顾

同方向N个同频率简谐振动的合成

设它们的振幅相等，初相位依次差一个恒量：

$$x_1 = A_1\cos\omega t$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \delta)$$

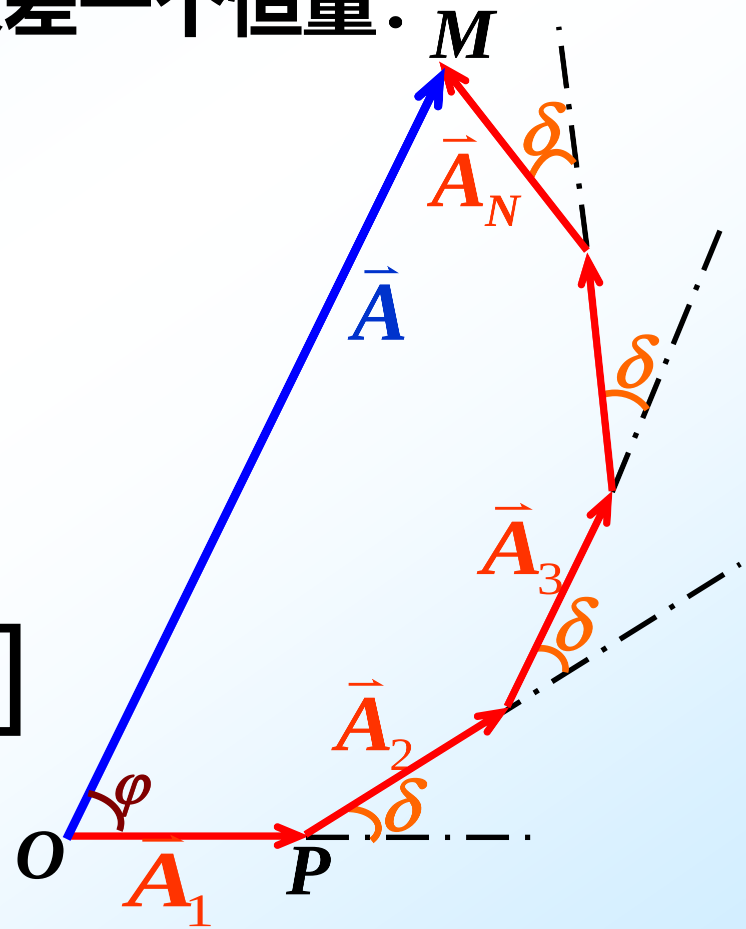
$$x_3 = A_3\cos(\omega t + 2\delta)$$

$$\vdots$$

$$x_N = A_N\cos[\omega t + (N-1)\delta]$$

合振动为简谐振动。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

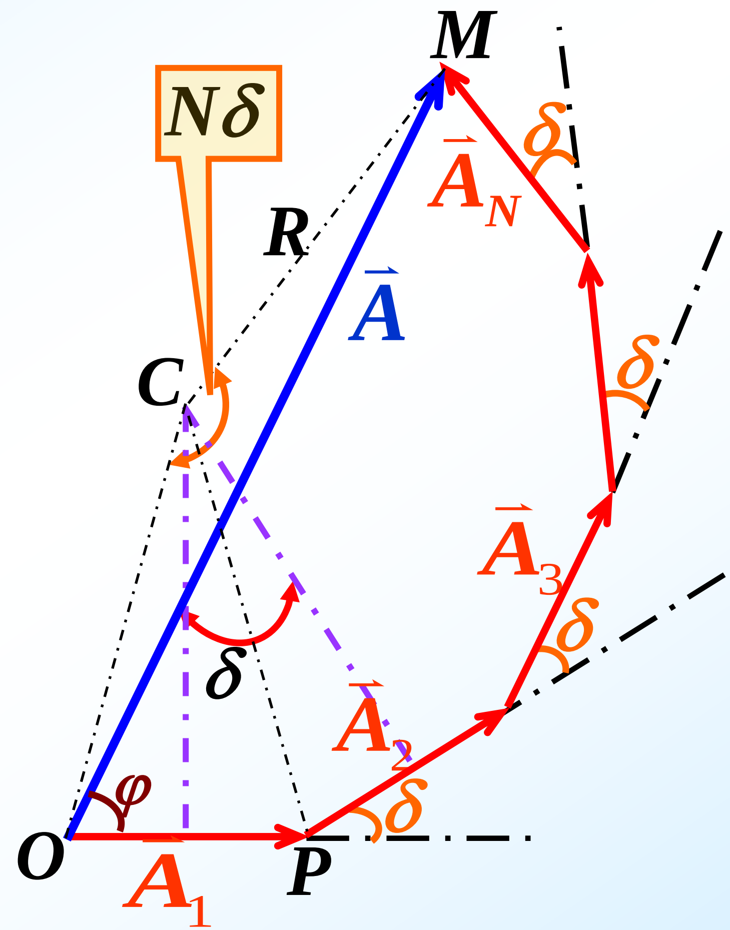


在ΔOCM中：$A = 2R\sin(\frac{N\delta}{2})$

在ΔOCP中：$A_1 = 2R\sin(\frac{\delta}{2})$

$$A = A_1 \frac{\sin(\frac{N\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})}$$

$$\varphi = \angle COP - \angle COM = \frac{N-1}{2}\delta$$



合振动的表达式

$$\boxed{x = A_1 \frac{\sin(\frac{N\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})} \cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta)}$$

①光波频率极高，振动非常快，感受到的是光强。

$$\boxed{E_p = E_0 \frac{\sin(\frac{N\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})}\cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta)}$$

② p点合振幅E_p 是各子波振幅矢量和的模。各窄条子波的振幅 $A_1=\Delta E_0$，

相邻窄条位相差为 $\delta = \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{a\sin\theta}{N} = \frac{2\alpha}{N}$

$$E_p = \Delta E_0 \frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}} = \Delta E_0 \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{N}} \approx N\Delta E_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$I \propto E_p^2,\quad I_0 \propto E_0^2$$

可推出光强公式 $\boxed{I = I_0 (\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2}$

4. 讨论

1. 平行光斜入射问题

单缝上下沿光线光程差为：

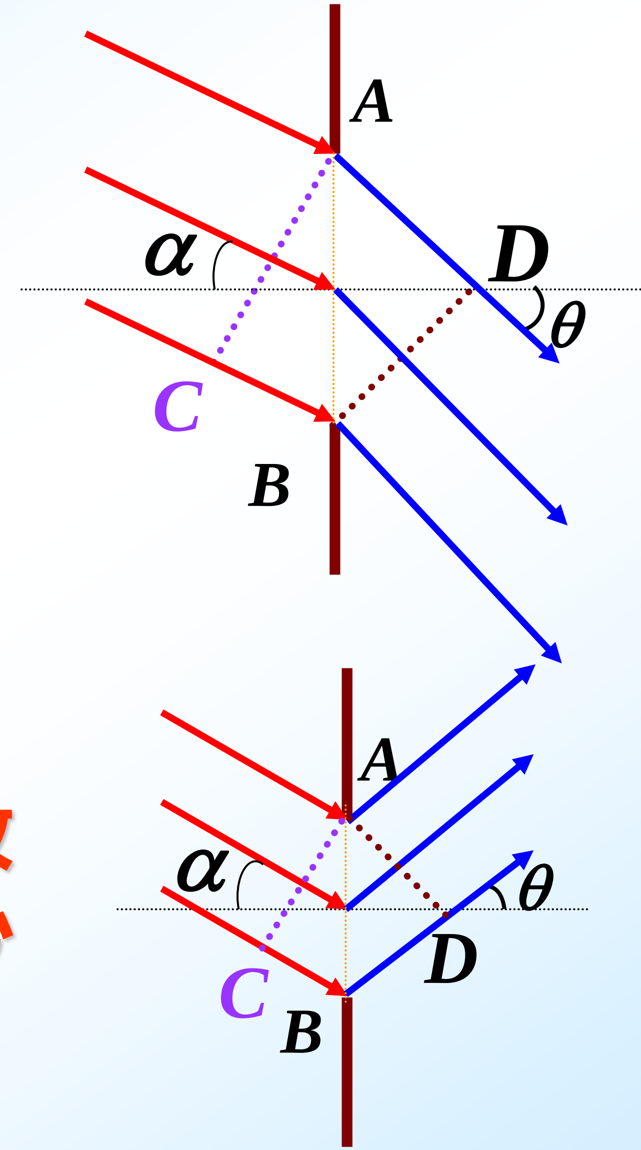
$$\delta = AD - BC = a(\sin\theta - \sin\alpha)$$

$$\delta' = a(\sin\theta + \sin\alpha)$$

$$a(\sin\theta \pm \sin\alpha) = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{暗纹中心} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹中心} \end{cases}$$

α与θ在法线同侧时取“+”

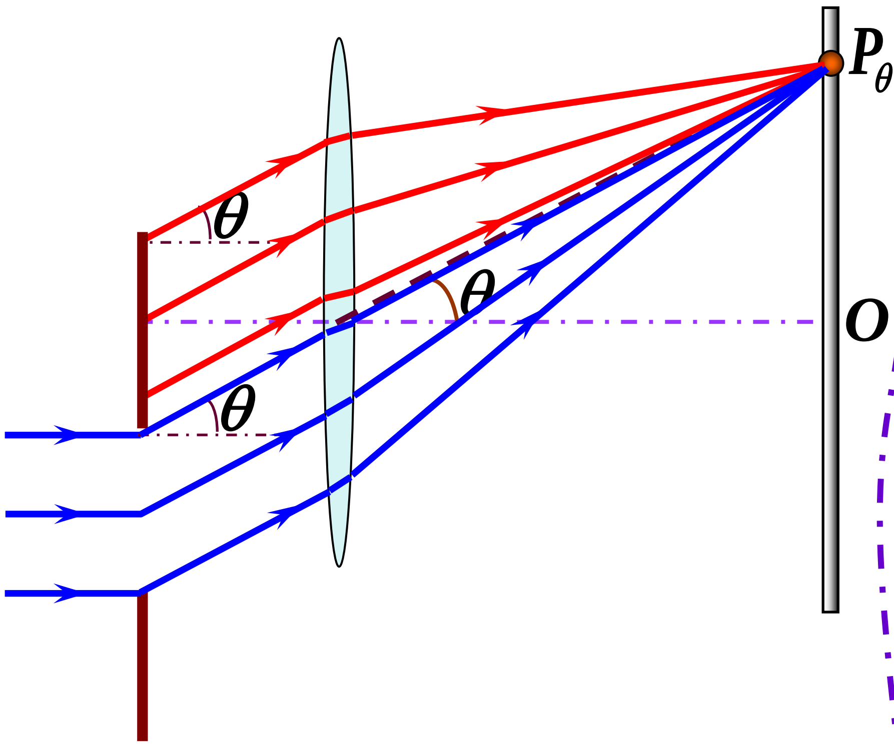
在法线异侧时取“—”

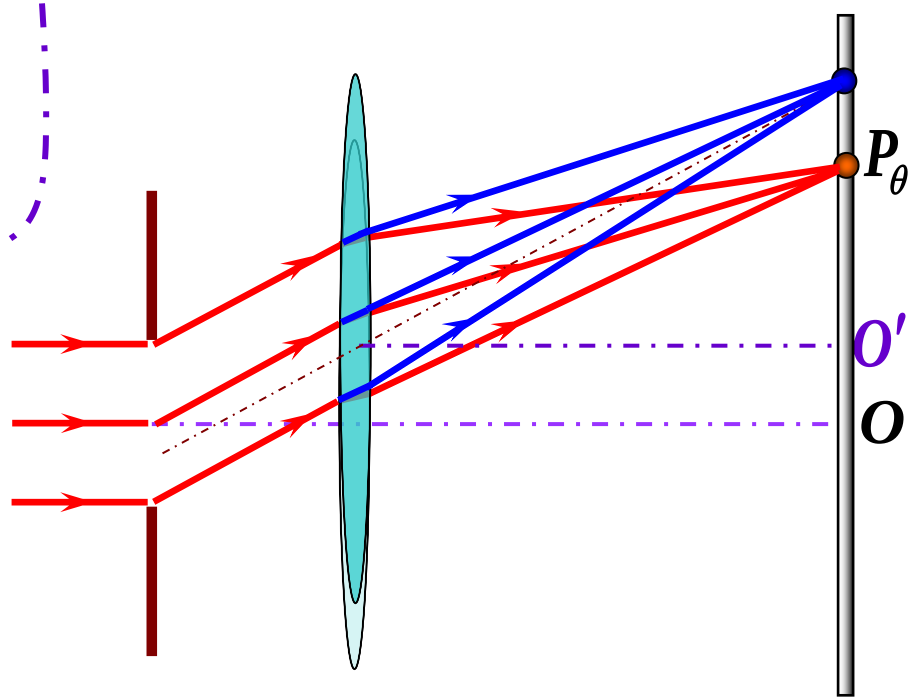


中央明纹：$\sin\theta = \sin\alpha$ 条纹向下方平移（间距不变）

2. 单缝位置上下移动时，屏上条纹如何变化？

3. 若将L上下平移，条纹又如何变？



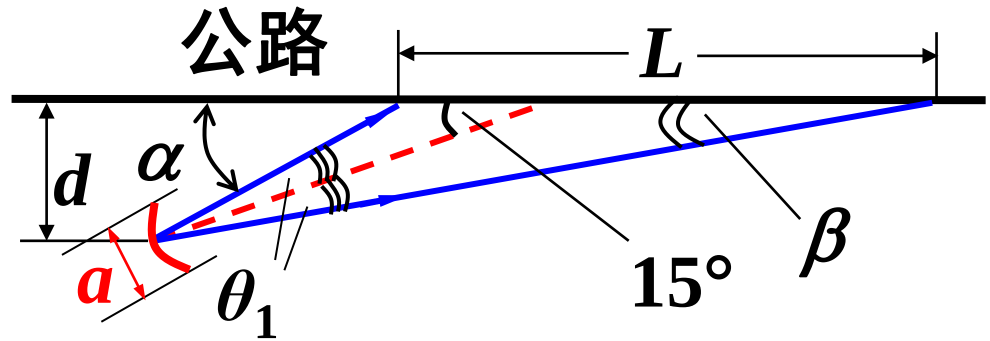


单缝衍射图样，不随缝的上下移动而变化。

沿L的移动方向作等距离的平移。

例3、如图所示：

一波长为λ = 30mm的雷达在距离路边为d =15m处，雷达射束与公路成15°角，天线宽度a = 0.20m。求雷达监视范围内公路的长度L。



解：将雷达波束看成是单缝衍射的 0 级明纹

由 $a\cdot\sin\theta_1=\lambda$

有 $\sin\theta_1=\dfrac{\lambda}{a}=\dfrac{30\,\text{mm}}{0.2\,\text{m}}=0.15\rightarrow\theta_1\approx 8.63^\circ$

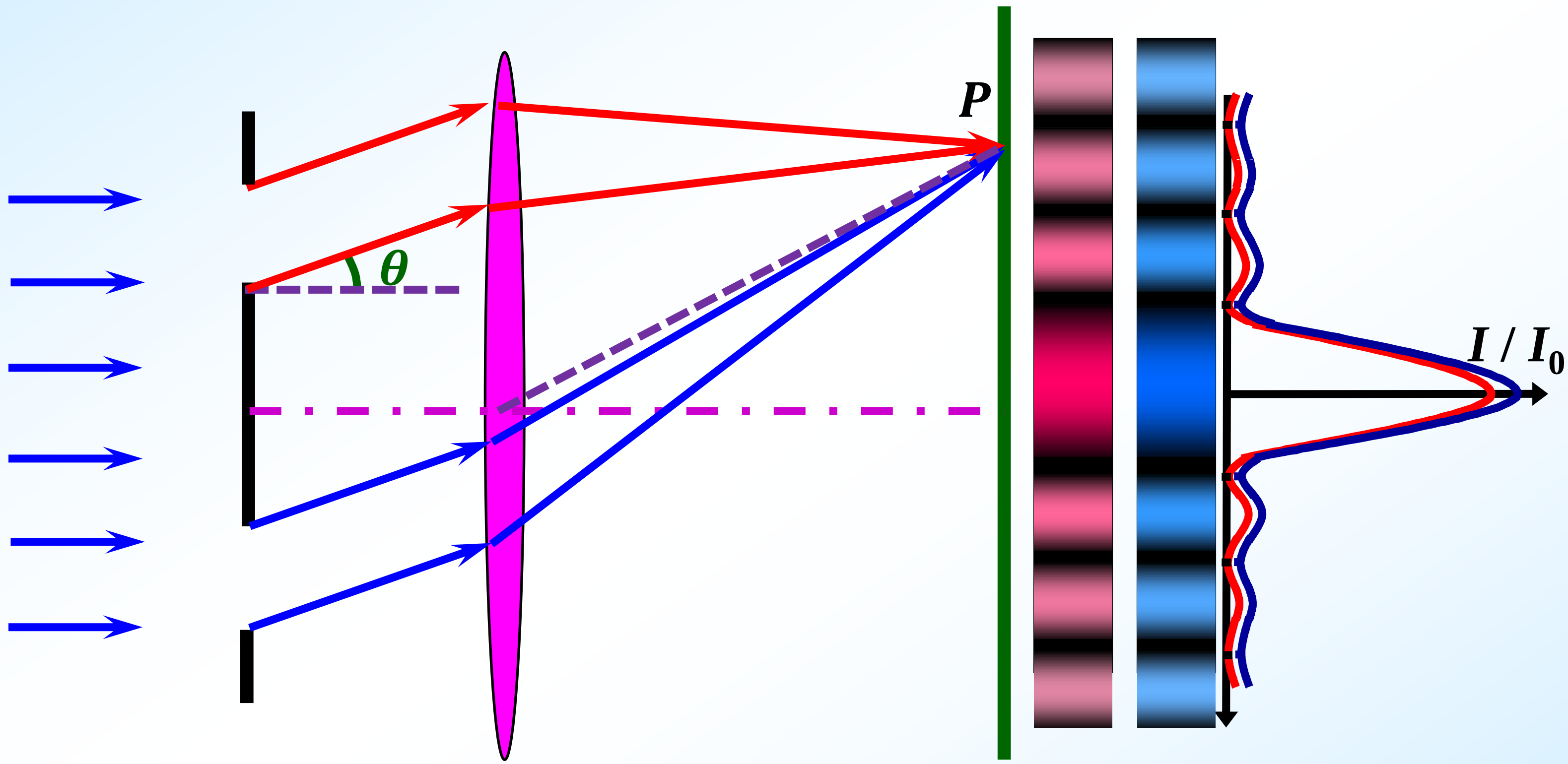
如图 $\alpha=15^\circ+\theta_1=23.63^\circ$，$\beta=15^\circ-\theta_1=6.37^\circ$

所以 $L=d(\text{ctg}\,\beta-\text{ctg}\,\alpha)$

$$=15(\text{ctg}\,6.37^0-\text{ctg}\,23.63^0)\approx 100\,\text{m}$$

三 双缝夫琅和费衍射

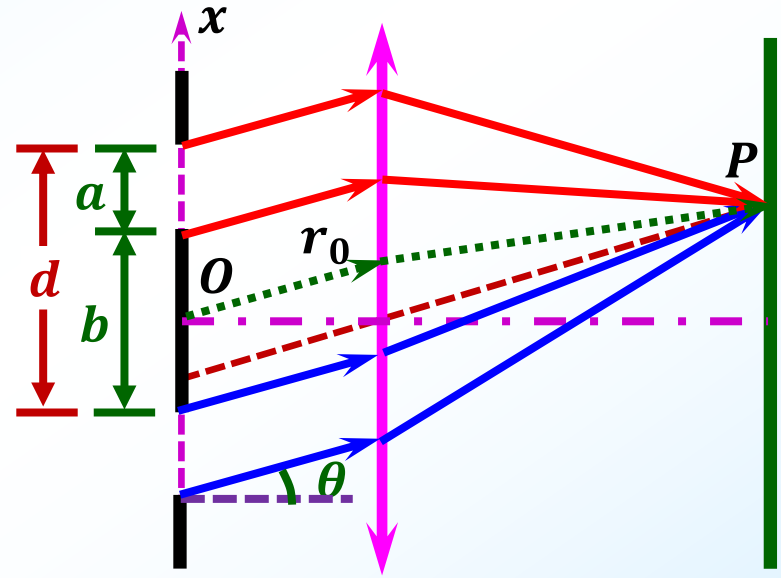
讨论有两条狭缝同时存在时，屏上衍射图样的变化。



问题：移动单个狭缝位置时，衍射条纹是否发生变化？

1. 双缝衍射的强度分布

根据菲涅耳衍射积分公式：



$$E_P = c'\int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}+a} \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(r_0 - x\sin\theta)\right] dx$$

$$+c'\int_{-\frac{b}{2}-a}^{-\frac{b}{2}} \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(r_0 - x\sin\theta)\right] dx$$

$$= \mathbf{2}E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\boldsymbol{\cos\beta}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r_0\right)$$

$$\begin{cases} E_0 = c'a \\ \alpha = \dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \\ \beta = \dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta \end{cases}$$

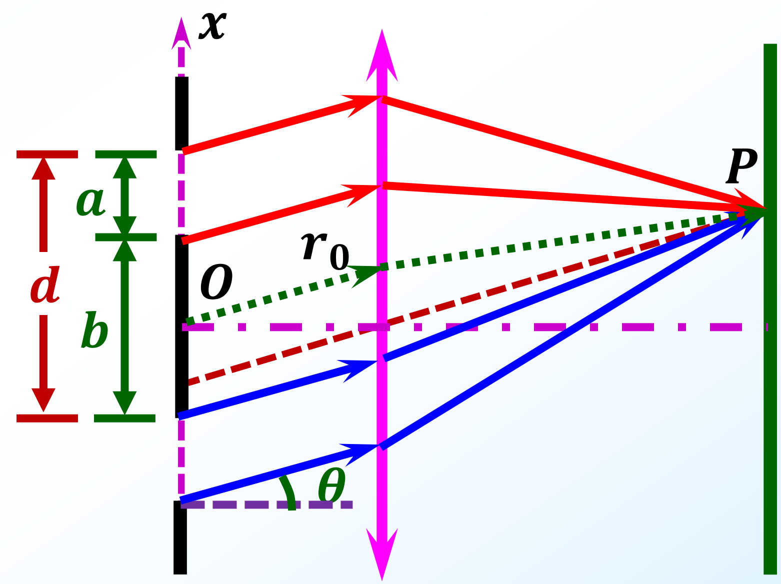
***P*点的合振幅：** $E_\theta = \mathbf{2}E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\boldsymbol{\cos\beta}$

***P*点的合光强：** $I_\theta = \mathbf{4}I_{1\theta}\cos^2\beta$

只有任意一狭缝存在时，P点处电场振幅为：

$$E_{1\theta} = E_{10}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad E_{2\theta} = E_{20}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

两狭缝衍射图样完全相同。



两狭缝发出的光是相干光，
且存在相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta \ = 2\beta$$

P点的合光强：

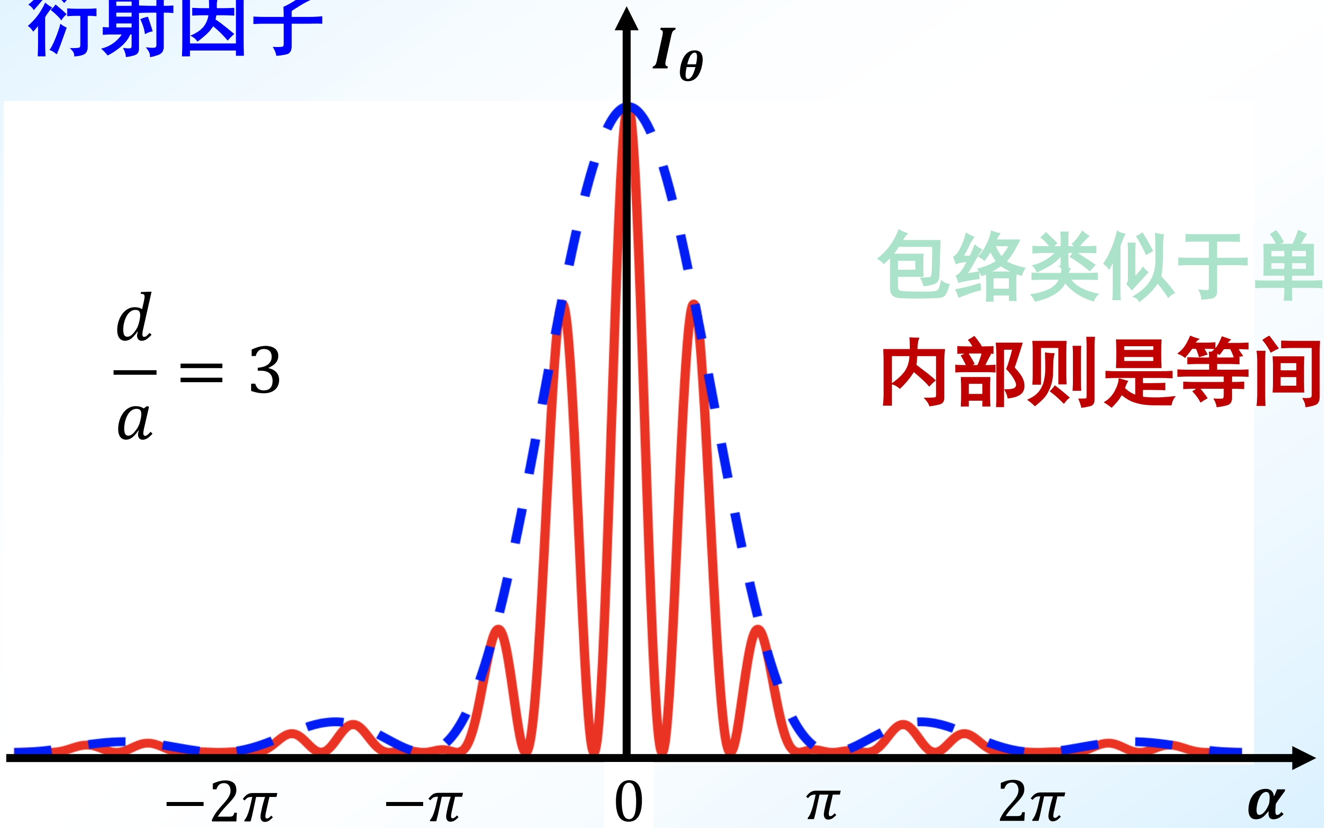
$$I_\theta = 4I_{1\theta}\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 4I_{1\theta}\cos^2\beta$$

双缝干涉因子

2. 双缝衍射的图样

$$I_\theta = I_0 \underbrace{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}_{\text{衍射因子}} \cos^2\beta$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \\ \beta = \dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta \end{cases}$$



包络类似于单缝衍射条纹

内部则是等间距干涉条纹

3. 双缝衍射光强的分布规律

1). $\theta = 0 \Longrightarrow \alpha, \beta = 0$

$$\boxed{I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2\beta}$$

$$I = I_0 = 4(c'a)^2$$

透镜主光轴与屏的交点处的光强极大 ---中央极大

2). 光强极小的位置

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 0 \Longrightarrow \alpha = \pm k\pi \quad (k = 1,2,\cdots) \quad a\sin\theta = \pm k\lambda \\ \cos\beta = 0 \Longrightarrow \beta = \pm(2k'+1)\dfrac{\pi}{2} \quad (k' = 0,1,2,\cdots) \quad d\sin\theta' = \pm(2k'+1)\dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

比较θ与θ':

$$\left.\begin{array}{ll} k = 1 & \sin\theta = \lambda/a \\ k' = 0 & \sin\theta' = \lambda/(2d) \end{array}\right\} \quad a < 2d \quad \therefore \ \theta' < \theta$$

干涉因子确定极小的间距要小

屏上呈现的条纹位置是由干涉因子确定的!(缝间距与d有关)

3). 相邻两个极小之间有极大

其位置满足：$\cos^2\beta = 1$

$$\boxed{I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2\beta}$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

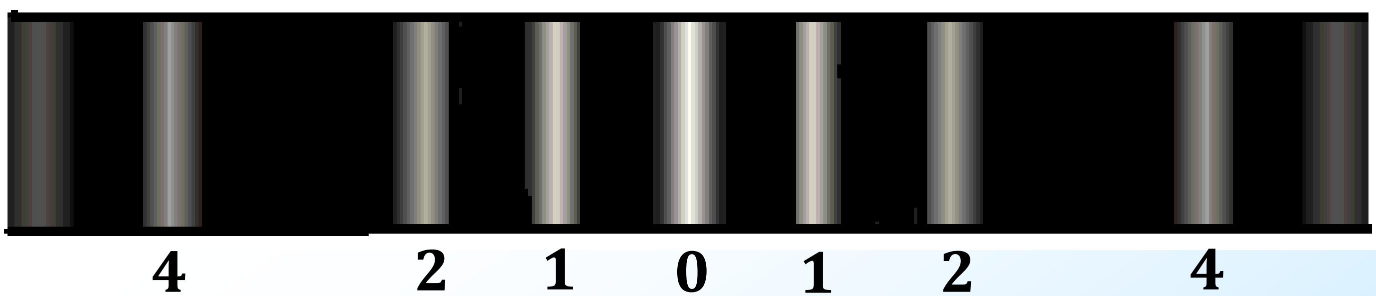
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta = \pm k\pi \Rightarrow d\sin\theta = \pm k\lambda \ (k = 0,1,2,\cdots)$$

注意：若某*θ*角同时满足：

$d\sin\theta = \pm k'\lambda$ ----干涉极大　$a\sin\theta = \pm k\lambda$ ----衍射极小

此时，*k'*级极大被抑制掉， ----缺级(屏上不出现)

$k' = \frac{d}{a}k$ **为整数时，就会出现缺级。**



缺级现象在多缝衍射中普遍存在

作业： Chap.13 —T15、T16、T17、T18

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 通过学习通提交作业。
4. 作业缺交三分之一及以上者按规定不能参加考试。