3.5　向量空间

基于向量集合R^n，定义向量空间的概念，给出向量空间的基本性质。

一、向量空间的概念

定义3.8 设V为n维向量的集合（$V \subseteq R^n$），如果集合V非空，且集合V对于加法及乘数两种运算封闭，那么就称集合V为向量空间.

要点

1. 集合V对于加法及乘数两种运算封闭指

$$若\alpha \in V, \beta \in V, 则\ \alpha + \beta \in V;$$

$$若\alpha \in V, \lambda \in R, 则\ \lambda\alpha \in V.$$

特别地，向量空间V含有零元素$o \in V$.

2. 全体n维向量的集合R^n是一个向量空间；仅含零向量的集合$V = \{0\}$是一个向量空间。

例1 判别下列集合是否为向量空间.

$$V_1=\left\{x=(0,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$$

解 V_1是向量空间.

因为对于V_1的任意两个元素

$$\alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)^T,\ \beta=(0,b_2,\cdots,b_n)^T\in V_1,$$

有
$$\alpha+\beta=(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T\in V_1$$

$$\lambda\alpha=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^T\in V_1.$$

例2 判别下列集合是否为向量空间.

$$V_2 = \left\{ x = (1, x_2, \cdots, x_n)^T \,\middle|\, x_2, \cdots, x_n \in R \right\}$$

解 V_2不是向量空间.

因为若$\alpha = (1, a_2, \cdots, a_n)^T \in V_2$,

则$2\alpha = (2, 2a_2, \cdots, 2a_n)^T \notin V_2$.

例3 判别下列集合是否为向量空间.

$$V_1=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \middle| x_1+x_2+\cdots+x_n=0\right\},$$

$$V_2=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \middle| x_1+x_2+\cdots+x_n=1\right\}.$$

解 V_1是向量空间：$x,y\in V_1, k_1,k_2\in R$

$$\Rightarrow k_1x+k_2y\in V_1.$$

V_2不是向量空间.

因为若$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in V_2$,

则$2x=(2x_1,2x_2,\cdots,2x_n)^T: 2x_1+2x_2+\cdots+2x_n=2$, 故$2x\notin V_2$.

例4 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为两个已知的$n$维向量，集合

$$V=\{x=\lambda a+\mu b \mid \lambda,\mu\in R\}$$

试判断集合是否为向量空间.

解 V是一个向量空间.因为若$x_1=\lambda_1 a+\mu_1 b$

$x_2=\lambda_2 a+\mu_2 b$， 则有

$$x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)a+(\mu_1+\mu_2)b\in V,$$

$$kx_1=(k\lambda_1)a+(k\mu_1)b\in V.$$

这个向量空间称为由向量a,b所生成的向量空间.

一般地，由向量组$a_1,a_2,\cdots,a_m$所生成的向量空间为（称为生成子空间） $\alpha\in V:\alpha=A_{n\times m}x, x\in R^m$

$$V=\left\{\alpha=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m \,\middle|\, x_1,x_2,\cdots,x_m\in R\right\}$$

记为 $L\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=\left\{\alpha=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m \,\middle|\, x_1,x_2,\cdots,x_m\in R\right\}$

例5 设向量组$a_1,\cdots,a_m$与向量组$b_1,\cdots,b_s$等价，记

$$V_1=\left\{\alpha=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m \,\middle|\, x_1,x_2,\cdots,x_m\in R\right\}$$

$$V_2=\left\{\beta=y_1b_1+y_2b_2+\cdots+y_sb_s \,\middle|\, y_1,y_2,\cdots y_s\in R\right\}$$

试证：$V_1=V_2.$

$A_{n\times m}=B_{n\times s}C_{s\times m},\qquad V_1\subseteq V_2\qquad$ 同理可证 $V_2\subseteq V_1$

$$\alpha\in V_1:\alpha=Ax=B(Cx), x\in R^m\Rightarrow Cx\in R^s,\alpha\in V_2.$$

二、向量空间的基与维数

定义3. 10 设 V是向量空间，如果 r个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$，且满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) V中任一向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示.

那末，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$就称为向量空间$V$的一个基，$r$称为向量空间$V$的维数，记为 $dim(V)=r$，并称V为r维向量空间.

$$dim(R^n)=n$$

$$V=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \,\middle|\, x_1+x_2+\cdots+x_n=0\right\}\text{的基和维数？}$$

$$V=\left\{(-x_2-\cdots-x_n,x_2,\cdots,x_n)^T \,\middle|\, x_2,\cdots x_n\in R\right\}\subseteq R^n$$

二、向量空间的基与维数

$$V=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T \Big| x_1+x_2+\cdots+x_n=0\right\}$$的基和维数？

$$V=\left\{(-x_2-\cdots-x_n,x_2,\cdots,x_n)^T \Big| x_2,\cdots x_n\in R\right\}\subseteq R^n$$

$$(-x_2-\cdots-x_n,x_2,\cdots,x_n)^T=$$

$$\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_3\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}-x_n\\0\\0\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

二、向量空间的基与维数

$$V=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T \middle| x_1+x_2+\cdots+x_n=0\right\}$$的基和维数？

$$V=\left\{(-x_2-\cdots-x_n,x_2,\cdots,x_n)^T \middle| x_2,\cdots x_n\in R\right\}$$

$$(-x_2-\cdots-x_n,x_2,\cdots,x_n)^T=$$

$$=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$秩\begin{pmatrix}-1&-1&\cdots&-1\\1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times(n-1)}=n-1$$

$$\Rightarrow \dim V=n-1$$

定义分析

（1）只含有零向量的向量空间称为0维向量空间，因此它没有基.

（2）若把向量空间V看作向量组，那末V的基就是向量组的最大无关组, V的维数就是向量组的秩.

（3）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基，则$V$可表示为

$$V=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_r\in R\}$$

定理3.8 设向量空间V的维数是r，则V中任意r个线性无关的向量组都是V的基。

- **例** R^3空间的标准基：$\{e_1，e_2，e_3\}$

三、向量空间中向量的坐标

- **定义** 设向量空间V的维数是r，$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$是$V$的一组基，则$V$中任意一个向量$\beta$都可以惟一的表示成为基的线性组合，组合系数被称为向量在这组基下的坐标。
- **例** 分别求空间R^3的向量β在标准基$\{e_1, e_2, e_3\}$和基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$下的坐标，其中

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = I\beta = e_1 + 2e_2 + 3e_3; \qquad \beta = AX \Rightarrow X = A^{-1}\beta$$

四、基变换与坐标变换

- 向量空间的基不是唯一的，因此，需要讨论空间中两组基之间的关系和同一个向量在两组基下坐标之间的关系。

1. 基变换公式

设r维空间V两组基：

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$$

$$\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r\}$$

则

$$(\beta_1\beta_2\ldots\beta_r)=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r)C_{r\times r}$$

过渡矩阵

C 可逆：记 $B_{n\times r}=A_{n\times r}C_{r\times r}$

$$\Rightarrow r=R(B)\le R(C)\le r.$$

2 坐标变换公式

已知

- 空间中两组基：$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$，$\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r\}$

满足:
$$(\beta_1\beta_2\ldots\beta_r)=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r)C_{r\times r}$$

$$\alpha=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r)X,\ \alpha=(\beta_1\beta_2\ldots\beta_r)Y$$

- 讨论**X**和**Y**的关系(定理3.9):

$$\boldsymbol{X=CY} \text{ 或 } \boldsymbol{Y=C^{-1}X}$$

$$\alpha=AX=BY=ACY\Rightarrow X=CY.$$

$$B=AC\Rightarrow C=A^{-1}B,C^{-1}=B^{-1}A.$$

例题（p96，eg20）

- 设中两组基：$\left\{ \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\left\{ \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

1. 求从基$\{\alpha_i\}$到基$\{\beta_i\}$的过渡矩阵 C；
2. 求向量$\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3$在基$\{\beta_i\}$下的坐标。

$$B = AC \Rightarrow C^{-1} = B^{-1}A \qquad Y = C^{-1}X = C^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

例6 设矩阵

$$A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

验证a_1,a_2,a_3,是R^3的一个基，并把b_1,b_2用这个基线性表示.

解 要证a_1,a_2,a_3是R^3的一个基，只要证a_1,a_2,a_3线性无关，即只要证$A\sim E$.

设 $$b_1=x_{11}a_1+x_{21}a_2+x_{31}a_3,$$
$$b_2=x_{12}a_1+x_{22}a_2+x_{32}a_3,$$

即

$$(b_1,b_2)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix},$$

记作$B=AX$.

对矩阵$(A \vdots B)$施行初等行变换，若A能变为E，则a_1, a_2, a_3为R^3的一个基，且当A变为E时，B变为$X = A^{-1}B$.

$$(A \vdots B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ \sim \\ r_3 + r_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 + r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \div 3}{\overset{r_2 \div (-3)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 \div (-3) \\ \sim \\ r_3 \div 3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_1 - r_3 \\ \sim \\ r_3 - r_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$(A\ \ B)\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3} & 1\\ -1 & \frac{2}{3}\end{matrix}\end{pmatrix}$$

因有$A\sim E$，故a_1,a_2,a_3为R^3的一个基，且

$$\left(b_1,b_2\right)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3} & 1\\ -1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

四、小结

1．向量空间的概念：

向量的集合**对加法及数乘两种运算封闭**；

2．由向量组生成的向量空间；

3．向量空间的基和维数：

求向量空间基和维数的方法；

4．基变换与坐标变换：过渡矩阵.