第10章　正弦稳态分析

正弦稳态电路分析思路

Sinusoidal Steady-state Analysis

Q1: 电阻电路有哪些分析方法？

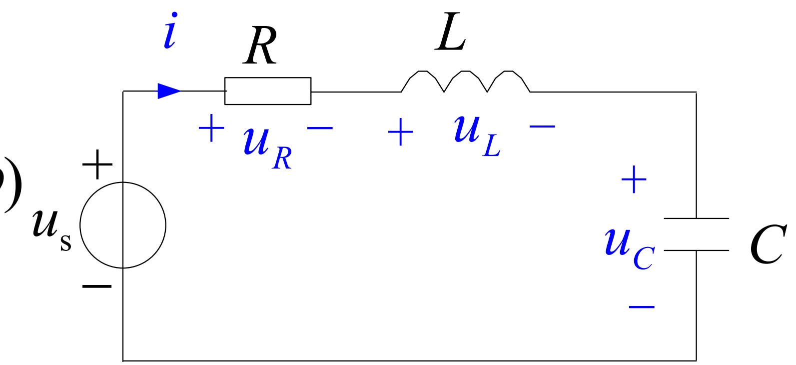
Q2: 动态电路的暂态过程如何分析？

Q3: 何谓正弦稳态电路、正弦稳态电路有何特点？

Q4: 正弦稳态电路的分析方法？

Q5: 上述分析方法的对高阶电路求解的可行性如何？

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=\sqrt{2}U_{\mathrm{s}}\cos(\omega t+\varphi)$$



$$u_{\mathrm{s}}=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$$

求特解！

特解的求取方法？

正弦稳态电路分析思路

Sinusoidal Steady-state Analysis

正弦量 → 相量（复数）

电路

→ 相量模型

↓

相量方程（复数方程）

↓

相量解

↓

正弦量

实现上述思路，要解决哪些关键问题？

1.正弦量与相量的对应

2. 正弦量运算的相量方法

3. 电路基本方程的相量形式

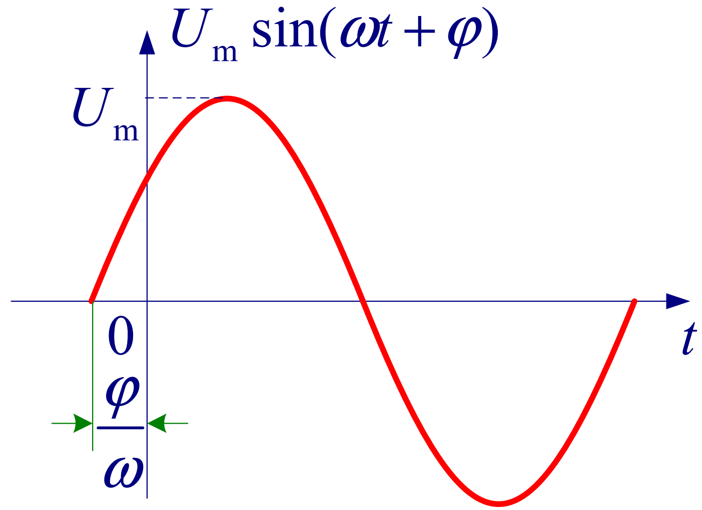
同频率的正弦量 ⟷ 恒定的复数

定义一种变换

10.2 正弦电量

10.2.1 正弦电量的三要素

$$u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi)$$



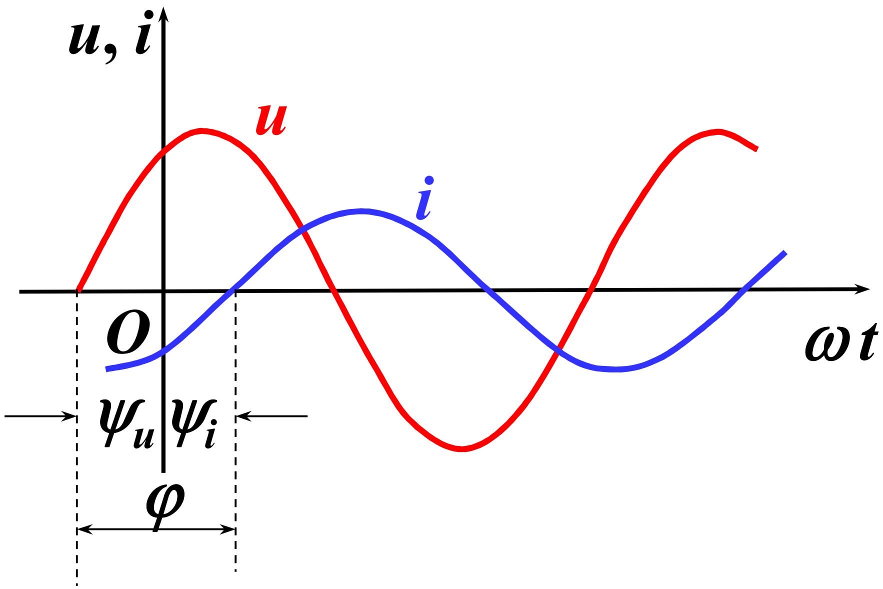
- **振幅 (amplitude) U_m** :最大值
- **角频率(angular frequency) ω**： 反映正弦量变化快慢
- **初相位(initial phase angle) φ**:反映了正弦量的计时起点

10.2.2 同频率正弦量相位关系

设$u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u),i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi_i)$

则相位差$\varphi=(\omega t+\varphi_u)-(\omega t+\varphi_i)=\varphi_u-\varphi_i$

- **φ>0， u超前i φ角，或i滞后 u φ角(u 比 i 先到达最大值)；**

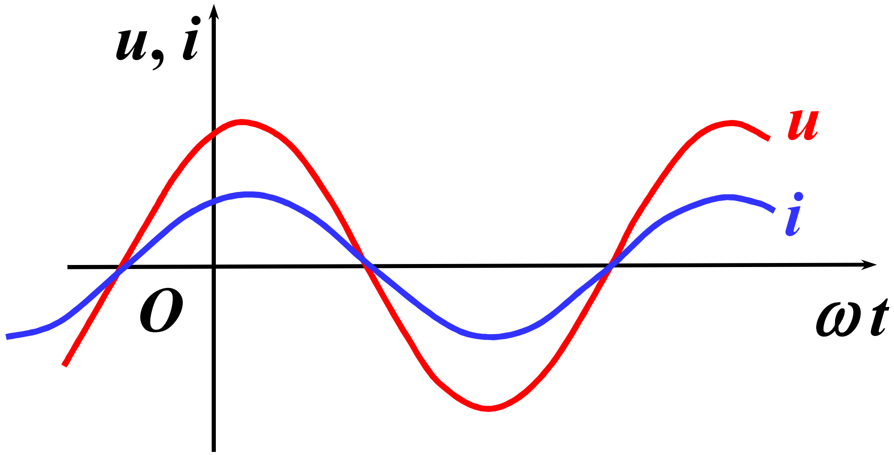


- **φ<0， u 滞后 i $|\varphi|$角，或 i超前u $|\varphi|$角(i 比 u 先到达最大值)。**

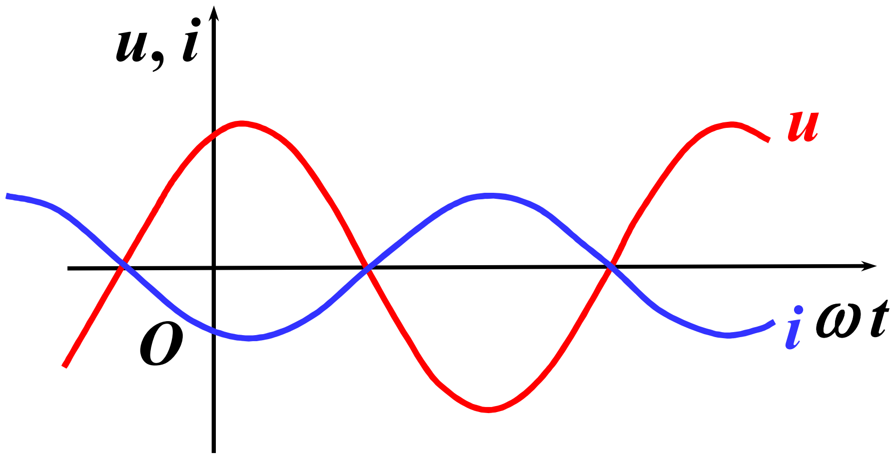
10.2.2　同频率正弦量相位关系

特例：

φ =0，　同相：

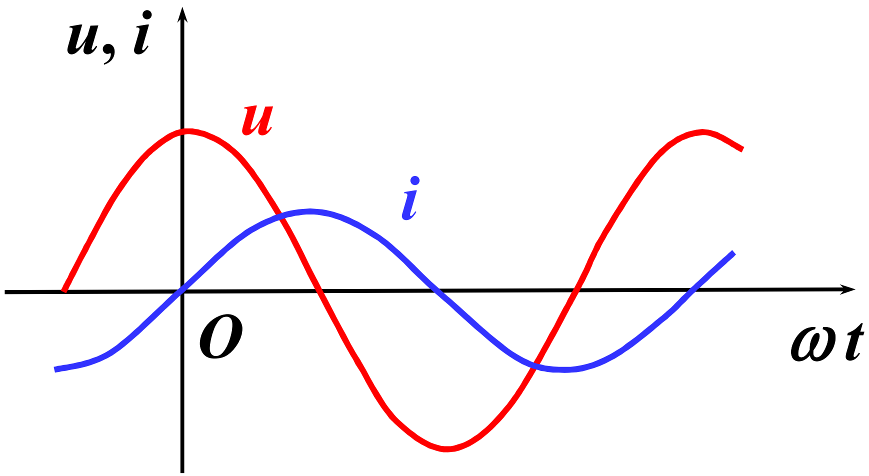


φ =π（180^{o}），反相：



10.2.2 同频率正弦量相位关系

规定：|φ|≤π（180°）。



$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$：u超前$i\dfrac{\pi}{2}$，不说u滞后$i\dfrac{3\pi}{2}$，

或者：i滞后$u\dfrac{\pi}{2}$，不说i超前$u\dfrac{3\pi}{2}$，

同样可比较两个电压或两个电流的相位差。

10.2.3 正弦电量的有效值（ Effective Value ）

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了确切的衡量其大小工程上采用有效值来表示。

1 周期量的有效值

周期性电流 i 流过电阻 R，在一周期 T 内吸收的电能：$W=\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t$

直流电流 I 流过 R 在时间 T 内吸收的电能：$W=I^2RT$

$$I^2RT=\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

2 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t)=I_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_\mathrm{m}^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t}=\frac{I_m}{T}\sqrt{\int_0^T\frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{2}}I_m$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I=\frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{i(t)=I_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)}$$

2 正弦电流、电压的有效值

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$\boxed{U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{\mathrm{m}} \qquad \text{或} \qquad U_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}U}$$

若一交流电压有效值为U=220V，则其最大值为U_{m}≈311V；

U=380V， U_{m}≈537V。

区分瞬时值、最大值、有效值的概念和符号。

工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。

测量中，电磁式交流电压、电流表读数均为有效值。

绝缘水平、耐压值指的是最大值。

为什么用正弦量？

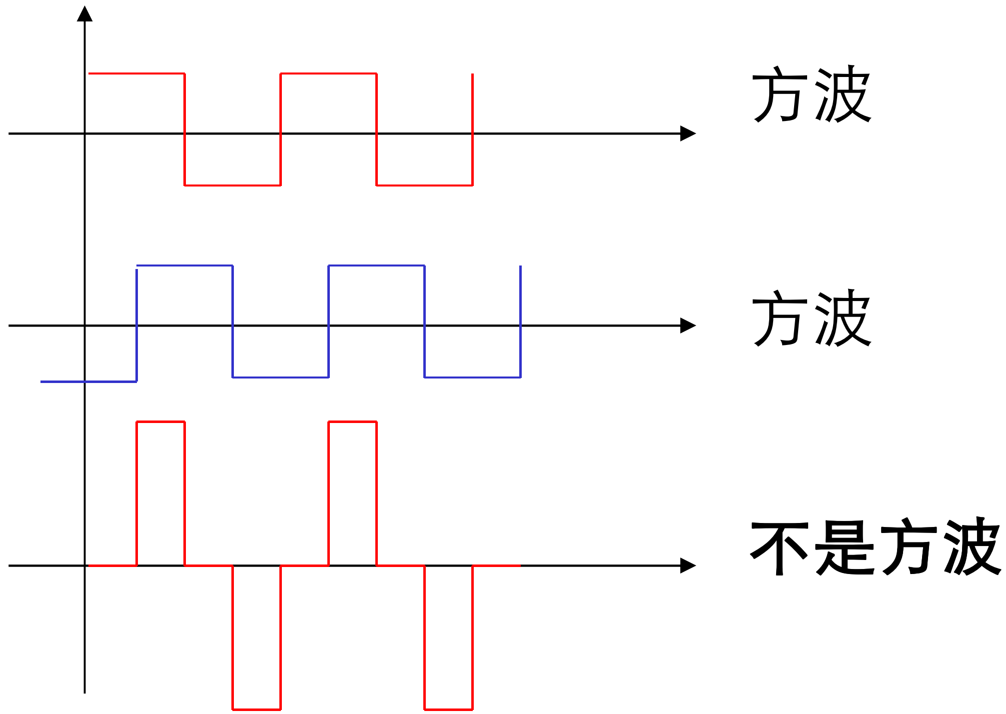
主要考虑以下几点：

1. 正弦量是最简单的周期量之一，同频正弦量在加、减、微分、积分运算后得到的仍为同频正弦量；

2. 应用广泛；

3. 非正弦量用傅立叶级数展开后得到一系列正弦函数。

例. 同频方波相加



10.3 相量法

两个正弦量 $i_1=\sqrt{2}\,I_1\sin(\omega t+\psi_1)$ $i_2=\sqrt{2}\,I_2\sin(\omega t+\psi_2)$

	i_1	i_2	$i_1+i_2\rightarrow i_3$
角频率：	ω	ω	ω
有效值：	I_1	I_2	I_3
初相位：	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3

无论是波形图逐点相加，或用三角函数做都很繁。

因同频的正弦量相加仍得到同频的正弦量，所以，只要确定初相位和有效值就行了。于是想到复数，复数向量也包含一个模和一个幅角，因此，我们可以把正弦量与复数对应起来，以复数计算来代替正弦量的计算，使计算变得较简单。

10.3.1 正弦电量与相量的对应关系

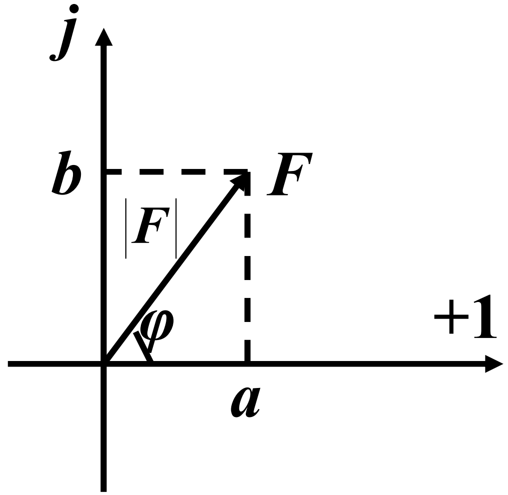
1、复数

复数表示形式:

① 代数形式（直角坐标形式）

在电路中用j来代替i

$$F = a + jb \qquad j = \sqrt{-1}$$



在复平面上用相量表示

② 极坐标形式 $F = |F|\angle\varphi$

③ 指数形式 $F = |F|e^{j\varphi}$

$$|F| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg(F) = \varphi = \arctan\frac{b}{a}$$

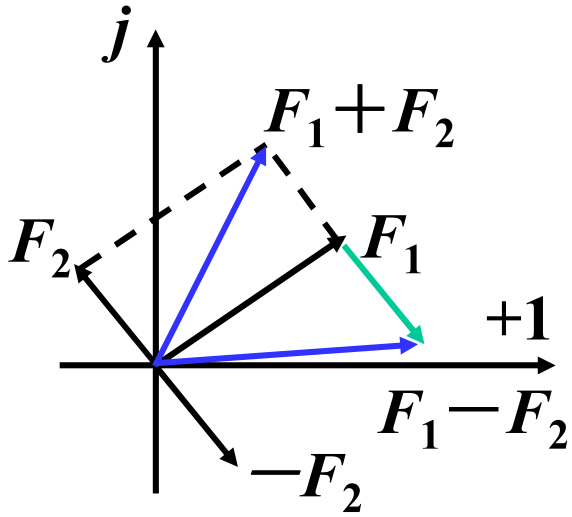
$$\cos\varphi = \frac{a}{|F|}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|F|}$$

2. 复数的运算：

$$F_1 = a_1 + jb_1 = |F_1| \angle \varphi_1$$

$$F_2 = a_2 + jb_2 = |F_2| \angle \varphi_2$$



（1）加法运算：

$$F_1 + F_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

（2）减法运算：

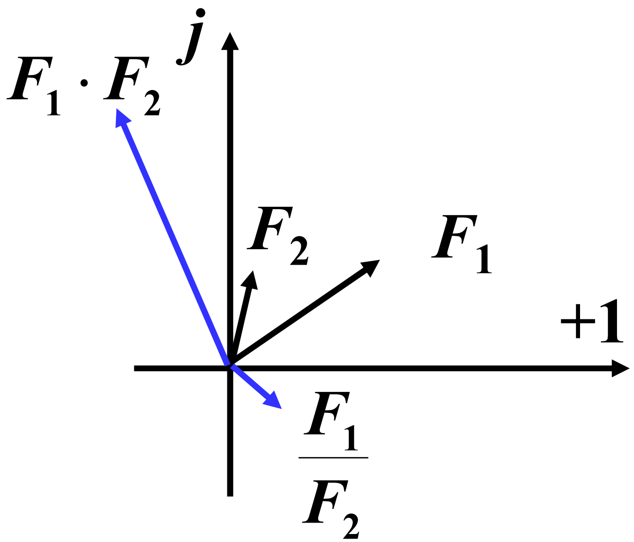
$$F_1 - F_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

（3）乘法运算：

$$F_1 \cdot F_2 = |F_1||F_2| \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

（4）除法运算：

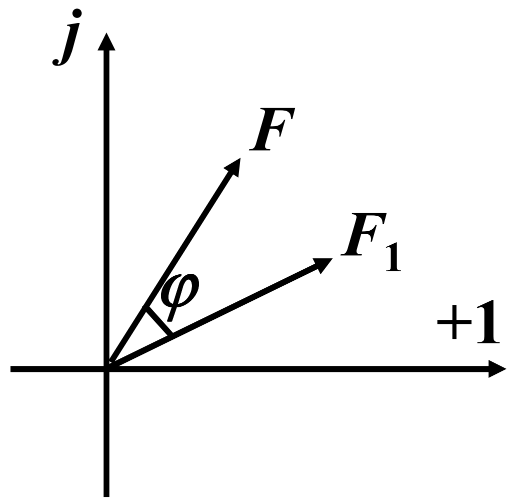
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1|}{|F_2|} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$



旋转因子： $e^{j\varphi}=1\angle\varphi$

任何一个复数乘以一个旋转因子，就旋转一个φ角

【例8-1 】 $F=F_1 e^{j\varphi}$



常用的旋转因子：

+j , –j , −1 都可以看成旋转因子

$e^{j\frac{\pi}{2}}=j$ (逆时针旋转90°)

$e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$ (顺时针旋转90°)

$e^{j(\pm\pi)}=\cos(\pm\pi)+j\sin(\pm\pi)=-1$ 反相，旋转180°

10.3.1 正弦电量与相量的对应关系

2 用相量表示正弦量

$$设u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)$$

复函数 $R(t)=\sqrt{2}Ue^{j(\omega t+\theta)}$

$$=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)+j\sqrt{2}U\sin(\omega t+\theta)$$

对*R*(*t*)取实部：

$$\boxed{\mathrm{Re}[R(t)]=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)=u(t)}$$

***R*(*t*) 可以写成** $R(t)=\sqrt{2}\underbrace{U\mathrm{e}^{j\theta}}_{\text{复常数}}\mathrm{e}^{j\omega t}=\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t}$

$$设：\dot{U}=Ue^{j\theta}$$

$\dot{U}$称为正弦量$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)$所对应的相量

$$\boxed{\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow\dot{U}=U\angle\theta}$$

10.3.1　正弦电量与相量的对应关系

2 用相量表示正弦量

如为正弦函数：在同一个电路中的正弦量形式要一致

$$\boxed{\sqrt{2}U\sin(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=U\angle\theta}$$

$$\boxed{\sqrt{2}I\sin(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{I}=I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=I\angle\theta}$$

有效值相量

如函数用最大值表示：

$$\boxed{U_m\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{U}_m=U_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=U_m\angle\theta}$$

$$\boxed{\sqrt{2}I_m\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{I}_m=I_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=I_m\angle\theta}$$

最大值相量

由相量还原正弦量时要注意是有效值还是最大值

10.3.2 正弦电量运算的相量方法

1 线性代数运算

$\boxed{\times k}$ $ku=\sqrt{2}kU\cos(\omega t+\theta)$ $\boxed{ku}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{k\dot{U}}$

$\boxed{\pm}$

$$u_1=\sqrt{2}U_1\cos(\omega t+\theta_1) \qquad \dot{U}_1=U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}=U_1\angle\theta_1$$

$$u_2=\sqrt{2}U_2\cos(\omega t+\theta_2) \qquad \dot{U}_2=U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}=U_2\angle\theta_2$$

$$u_1\pm u_2=\mathrm{Re}[\sqrt{2}U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta_1)}]\pm\mathrm{Re}[\sqrt{2}U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta_2)}]$$

$$=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\cdot(U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}\pm U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2})\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\cdot U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$\boxed{u=u_1\pm u_2}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{\dot{U}=\dot{U}_1\pm\dot{U}_2}$

10.3.2 正弦电量运算的相量方法

1 线性代数运算

【例】$u_1(t)=6\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)\ \text{V}$

$u_2(t)=4\sqrt{2}\sin(314t+60^\circ)\ \text{V}$

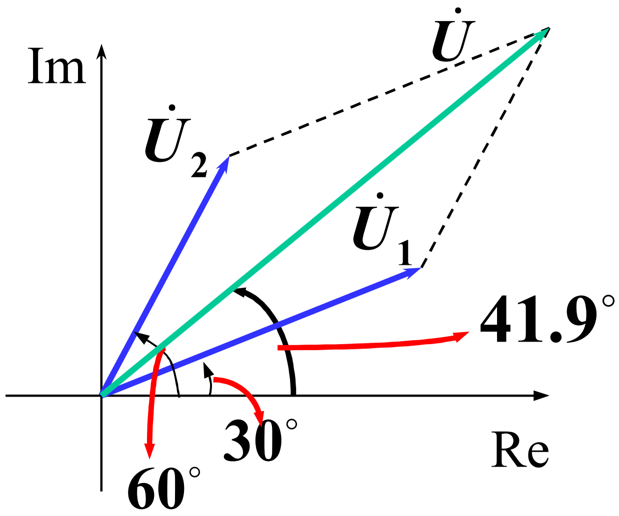
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1=6\angle 30^\circ\ \text{V} \\ \dot{U}_2=4\angle 60^\circ\ \text{V} \end{cases}$$

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=6\angle 30^\circ+4\angle 60^\circ=5.19+j3+2+j3.46$$

$$=7.19+j6.46=9.64\angle 41.9^\circ\ \text{V}$$

$$\therefore u(t)=u_1(t)+u_2(t)=9.64\sqrt{2}\sin(314t+41.9^\circ)\ \text{V}$$

同频正弦量的加、减运算也可以借助相量图进行。



10.3.2 正弦电量运算的相量方法

2 微分积分运算

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$$

$$u=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta) \qquad \dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

$$u_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)]$$

$$=\sqrt{2}U[-\sin(\omega t+\theta)]\omega$$

$$=\sqrt{2}U\omega\cos(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2}) \qquad \dot{U}_d=j\omega U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

$$\boxed{u_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}} \Longleftrightarrow \boxed{\dot{U}_{\mathrm{d}}=\mathrm{j}\omega\dot{U}}$$

$$\boxed{\int\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{u_i=\int u\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow \boxed{\dot{U}_i=\frac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega}}$$

Practice 哪些问题可以用相量法解决？

(1)确定特解。 $$2\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=100\sqrt{2}\sin(5t-30°)$$

设： $u_{Cp}=\sqrt{2}U_C\sin(\omega t+\theta)$ $\qquad \dot{U}_{Cp}=U_C\mathrm{e}^{j\theta}$

$$2\times(\mathrm{j}5)^2\dot{U}_{Cp}+5\times(\mathrm{j}5)\dot{U}_{Cp}+\dot{U}_{Cp}=100\mathrm{e}^{-\mathrm{j}30°}$$

$$\dot{U}_{Cp}=\frac{100\mathrm{e}^{\mathrm{j}-30°}}{2\times(\mathrm{j}5)^2+5\times(\mathrm{j}5)+1}=1.82\mathrm{e}^{\mathrm{j}177°}$$

$$\boxed{u_{Cp}=1.82\sqrt{2}\sin(\omega t+177°)}$$

(2) 同频率三角函数运算。

$$u=3\sqrt{2}\sin(10t+30°)+4\sqrt{2}\sin(10t+120°)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[2\sqrt{2}\cos(10t+120°)]$$

$$\dot{U}=3\angle 30°+4\angle 120°-(j10)\times(-2\angle 30°)=3\angle 30°+4\angle 120°+20\angle 120°$$

$$=a+jb=Ae^{j\theta}=A\angle\theta$$

$$u=\sqrt{2}A\sin(10t+\theta)$$ $$\cos(10t+120°)=-\sin(10t+30°)$$

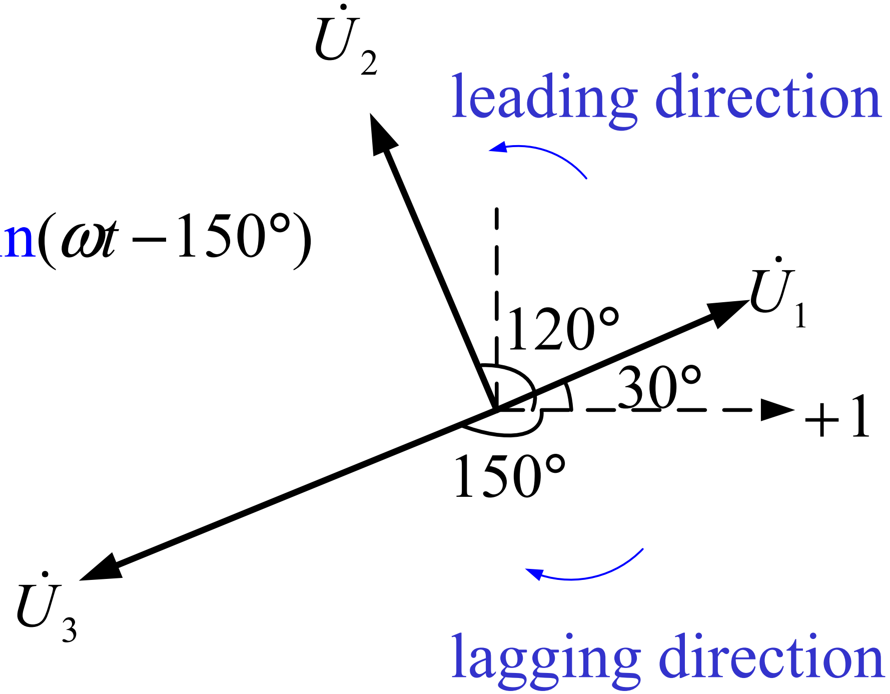
Practice 哪些问题可以用相量法解决？

(3) 比较同频率正弦信号的相位关系。

$$u_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°)$$

$$u_2 = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 120°)$$

$$u_3 = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 120°) \quad = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 150°)$$



$$\dot{U}_1 = 3\angle 30°$$

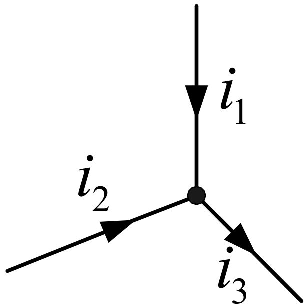
$$\dot{U}_2 = 4\angle 120°$$

$$\dot{U}_3 = 5\angle -150°$$

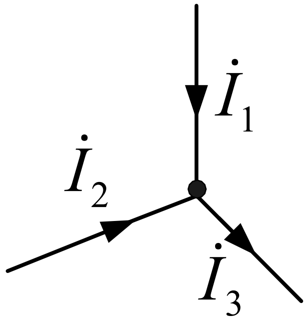
$\dot{U}_2$ leads $\dot{U}_1$ by 90° $\quad$ $\dot{U}_3$ leads $\dot{U}_2$ by 90° $\quad$ $\dot{U}_1$ and $\dot{U}_3$ are in oppsite phase

10.3.3 基尔霍夫定律的相量形式

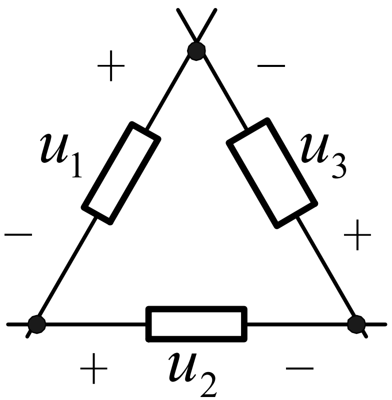
$$\sum i(t)=0 \Rightarrow \sum \dot{I}=0$$
$$\sum u(t)=0 \Rightarrow \sum \dot{U}=0$$



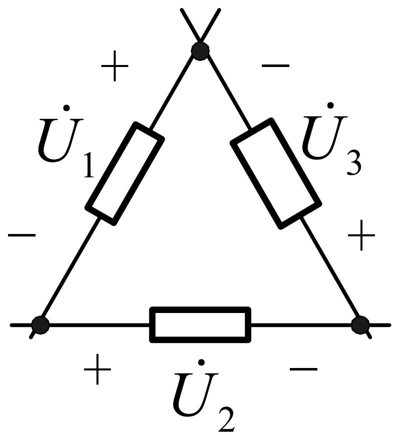
$$-i_1-i_2+i_3=0$$



$$-\dot{I}_1-\dot{I}_2+\dot{I}_3=0$$



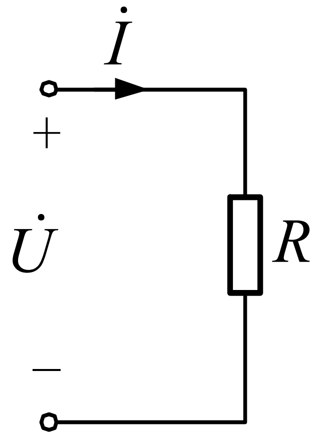
$$u_1+u_2+u_3=0$$

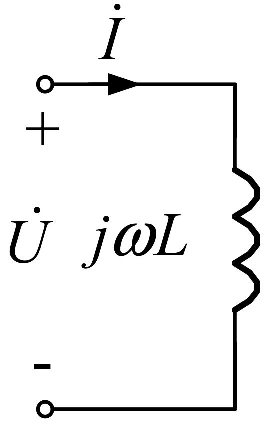


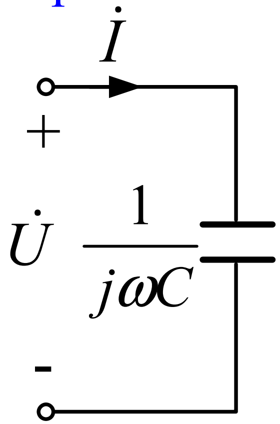
$$\dot{U}_1+\dot{U}_2+\dot{U}_3=0$$

10.3.4 电路的相量模型

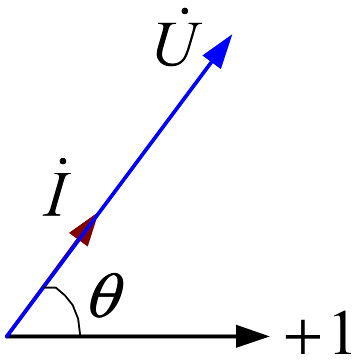
	1 电阻	2 电感	3 电容
时域	$u = Ri$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
相量形式	$\dot{U} = R\dot{I}$	$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$ 感抗inductive reactance	$\dot{U} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} = -\mathrm{j}X_C\dot{I}$ 容抗capacitive reactance

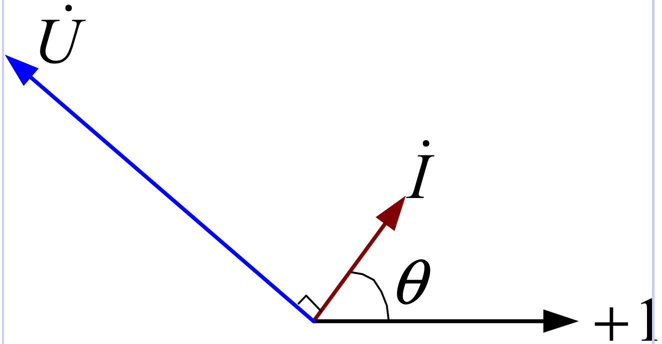


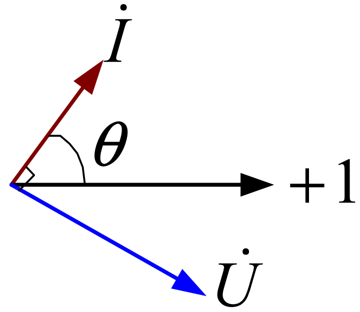




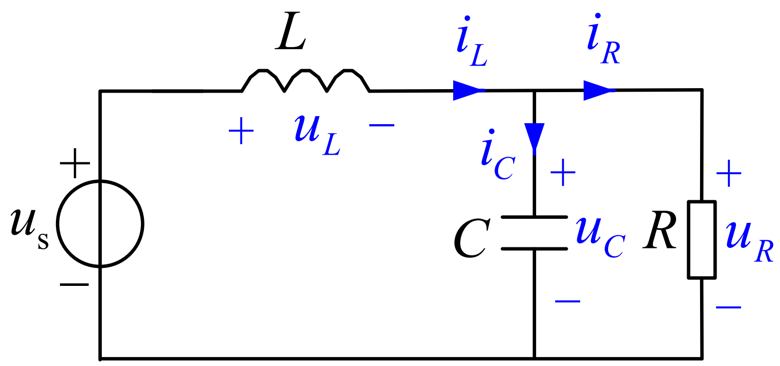
相量图





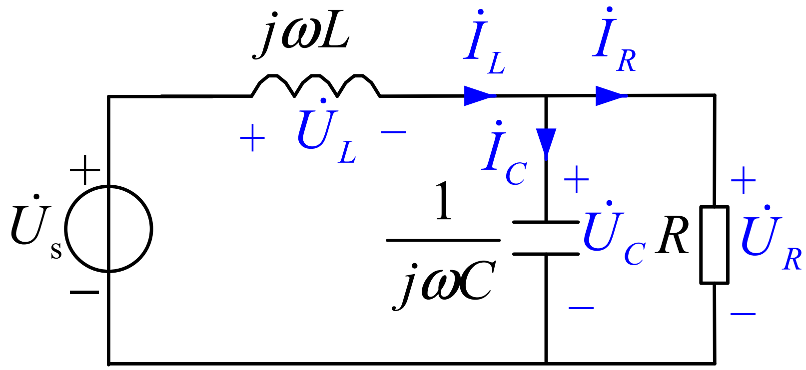


5. 电路的相量模型 (phasor model)与相量法



$$u_s = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

时域电路



$$\dot{U}_s = U\angle\varphi$$

相量模型

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_L = \boldsymbol{i}_C + \boldsymbol{i}_R \\ \boldsymbol{L}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_L}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{C}}\displaystyle\int \boldsymbol{i}_C \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}_\mathrm{S} \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{dt} + R\, i_R = u_s \end{cases}$$

时域列写微分方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{I}}_L = \dot{\boldsymbol{I}}_C + \dot{\boldsymbol{I}}_R \\ \boldsymbol{j\omega L}\dot{\boldsymbol{I}}_L + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{j}\boldsymbol{\omega C}}\dot{\boldsymbol{I}}_C = \dot{\boldsymbol{U}}_\mathrm{S} \\ j\omega L\dot{I}_L + R\dot{I}_R = \dot{U}_s \end{cases}$$

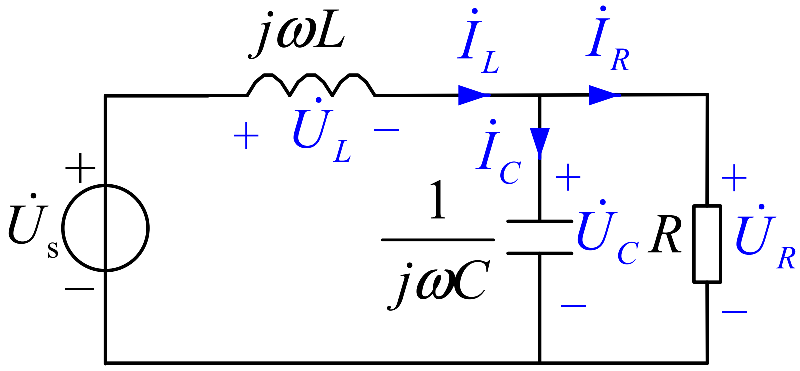
相量形式代数方程

相量模型：电压、电流用相量；元件用复数阻抗或导纳。

6 相量图

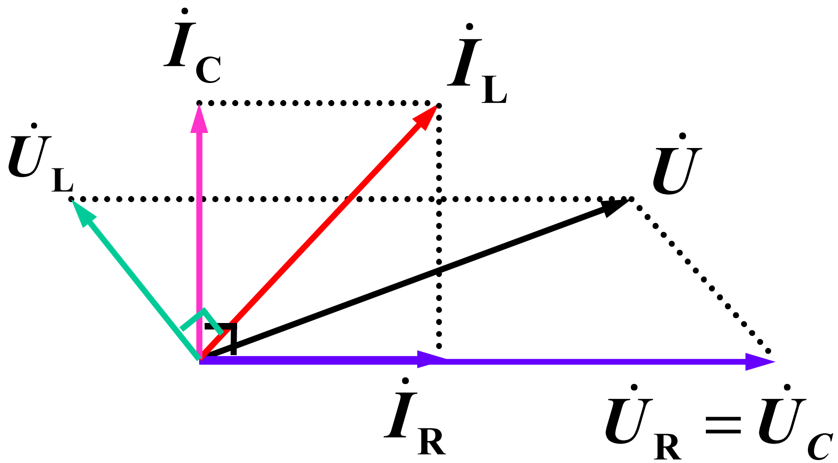
➢**同频率的正弦量**才能表示在同一个相量图中

➢选定一个**合适参考相量**(设初相位为零。)



$\dot{U}_s = U\angle\varphi$

选 $\dot{U}_R$为参考相量



10.4 阻抗和导纳 Impedance and Admittance

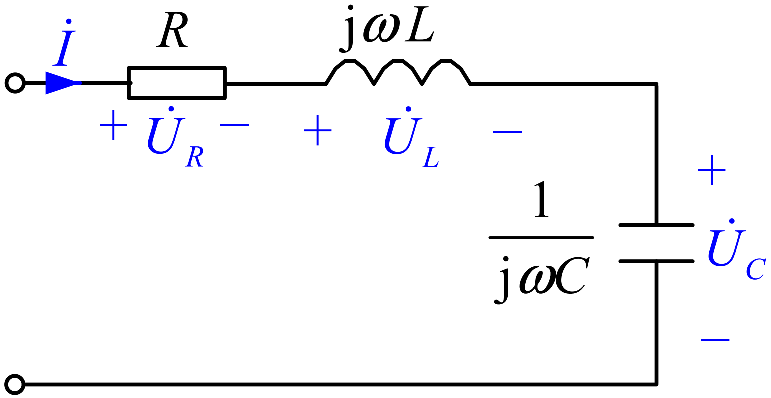
10.4.1 元件的阻抗和导纳

$$\begin{cases} \dot{U} = R\dot{I} \\ \dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I} \\ \dot{U} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dot{U} = Z\dot{I}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_R = R \\ Z_L = \mathrm{j}\omega L \\ Z_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_R = \dfrac{1}{R} \\ Y_L = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega L} \\ Y_C = \mathrm{j}\omega C \end{cases}$$

Z—Impedance $\qquad$ Y—Admittance

10.4.2 1 RLC串联支路的阻抗



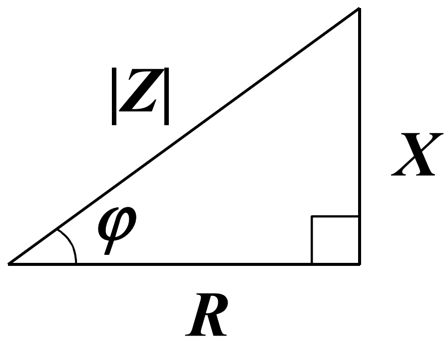
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

$$= R\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

$$= R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$= R + \mathrm{j}X$$



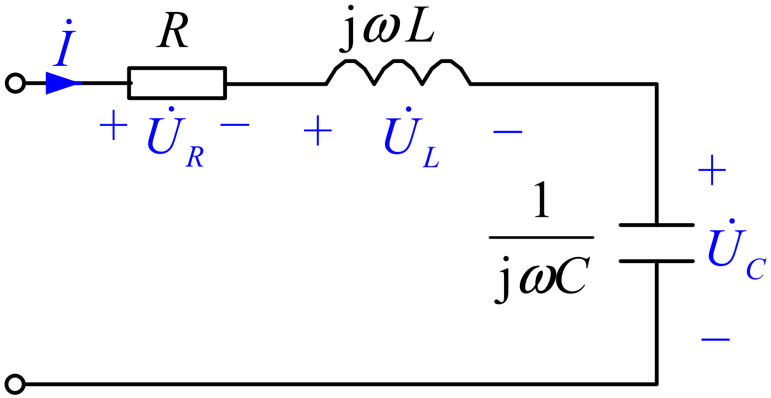
阻抗三角形

R—等效电租；X—等效电抗

单位：Ω

$$\begin{cases} |Z| = \dfrac{U}{I} & \textbf{阻抗模} \\ \varphi = \psi_u - \psi_i & \textbf{阻抗角} \end{cases}$$

10.4.2 1 RLC串联支路的阻抗

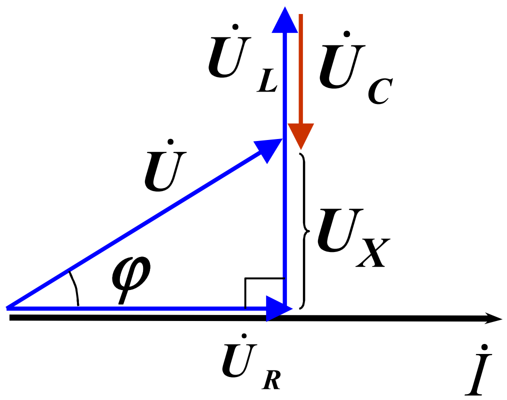


具体分析 *R*、*L*、*C* 串联电路：

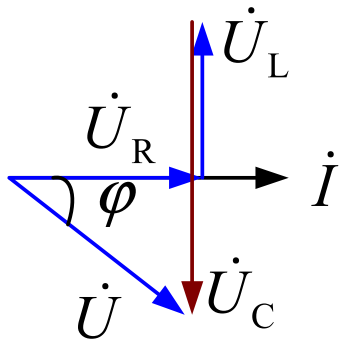
$$Z=R+\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C)=|Z|\angle\varphi$$

- $X>0$， $\varphi>0$，电路为感性，电压超前电流；
- $X<0$， $\varphi<0$，电路为容性，电压滞后电流；
- $X=0$， $\varphi=0$，电路为电阻性，电压与电流同相。

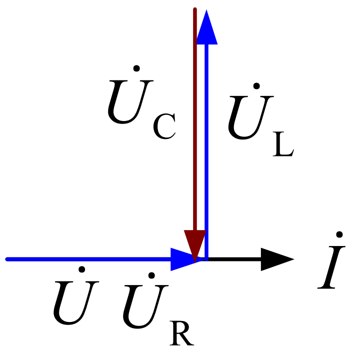
画相量图(位形图)：选电流为参考向量，$X>0$



感性

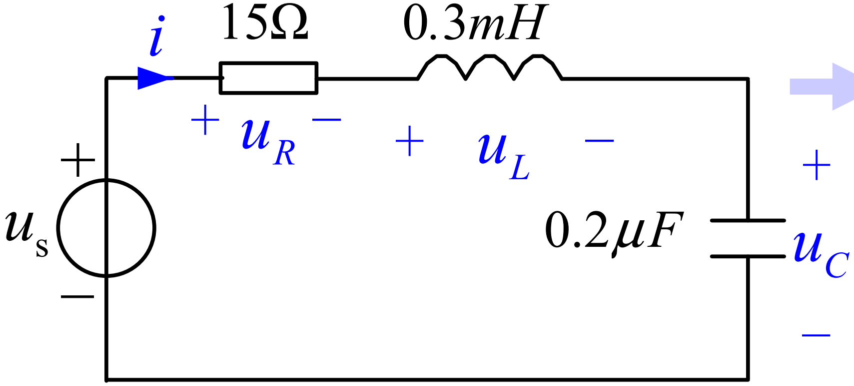


容性



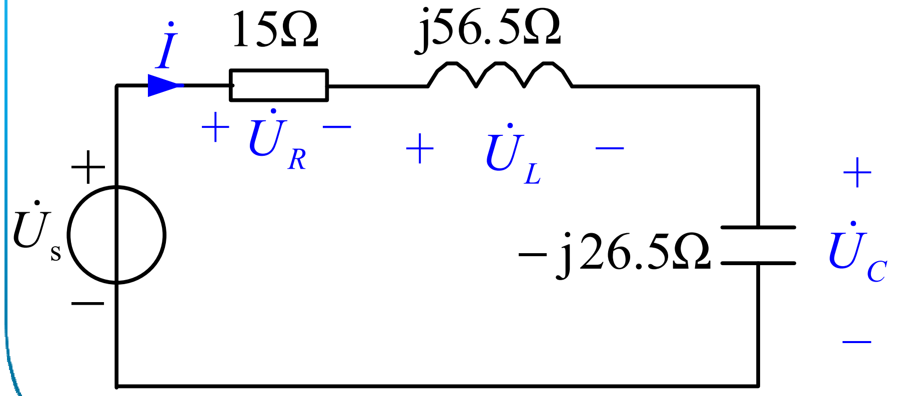
电阻性

例：已知$u_s=5\sqrt{2}\sin(\omega t+60^\circ)$，$f=3\times10^4\text{Hz}$。求$i$、$u_R$、$u_L$、$u_C$。



$$j\omega L = j2\pi\times3\times10^4\times0.3\times10^{-3}=j56.5\Omega$$

$$\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{2\pi\times3\times10^4\times0.2\times10^{-6}}=-j26.5\Omega$$



解：其相量模型为

$$Z=R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}=15+j56.5-j26.5=33.54\angle63.4^\circ\ \Omega$$

$$\dot I=\frac{\dot U}{Z}=\frac{5\angle60^\circ}{33.54\angle63.4^\circ}=0.149\angle-3.4^\circ\ \text{A}$$

$$\dot U_R=15\times\dot I=2.235\angle-3.4^\circ\ \text{V}$$

$$\dot U_L=j56.5\times\dot I=8.42\angle86.4^\circ\ \text{V}$$

$$\dot U_C=-j26.5\times\dot I=3.95\angle-93.4^\circ\ \text{V}$$

$$i=0.149\sqrt{2}\sin(\omega t-3.4^\circ)\text{A}$$

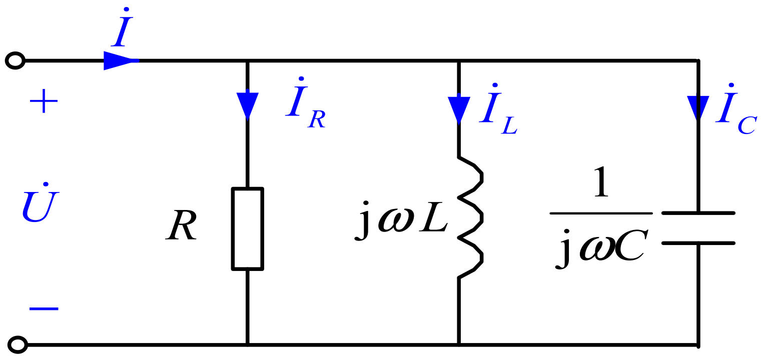
$$u_R=2.235\sqrt{2}\sin(\omega t-3.4^\circ)\ \text{V}$$

$$u_L=8.42\sqrt{2}\sin(\omega t+86.6^\circ)\ \text{V}$$

$$u_C=3.95\sqrt{2}\sin(\omega t-93.4^\circ)\ \text{V}$$

U_L=8.42>U=5，分电压大于总电压。

10.4.2 2 RLC并联支路的导纳



$$\text{导纳 } Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + jB = |Y| \angle \varphi'$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

$$= \frac{1}{R}\dot{U} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U}$$

$$= [G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})]\dot{U}$$

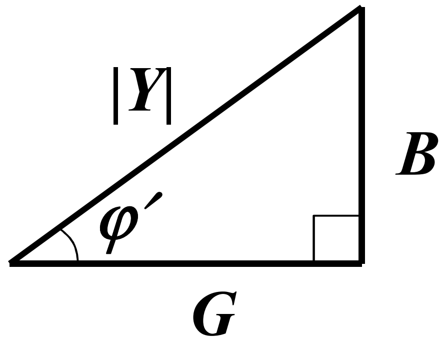
$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$= G + jB$$

$|Y| = \frac{I}{U}$ **导纳模**

$\varphi' = \psi_i - \psi_u$ **导纳角**

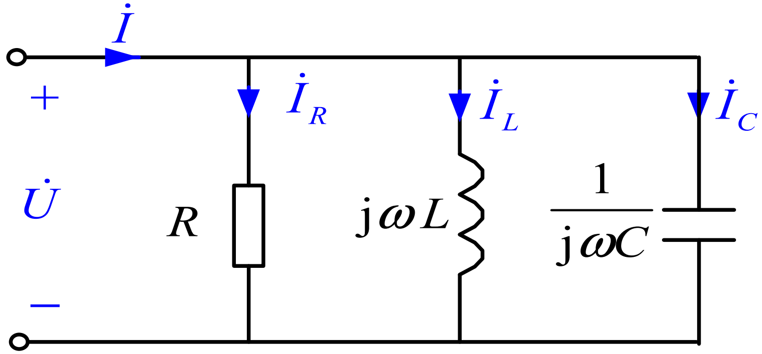
单位：S



导纳三角形

G—电导(导纳的实部)，B—电纳(导纳的虚部)

10.4.2 2 RLC并联支路的导纳

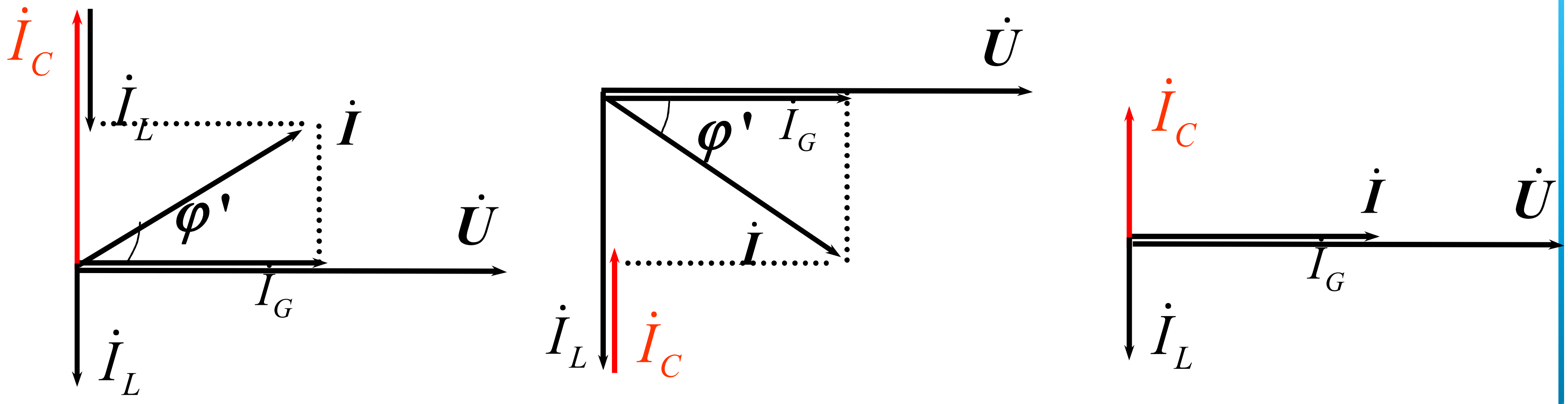


具体分析一下 *RLC* 并联电路：

$$Y=G+\mathrm{j}(\omega C-1/\omega L)=|Y|\angle\varphi'$$

- $B>0$， $\varphi'>0$，电路为容性，i超前u；
- $B<0$， $\varphi'<0$，电路为感性， u超前i；
- B=0， $\varphi'=0$，电路为电阻性，u与i同相。

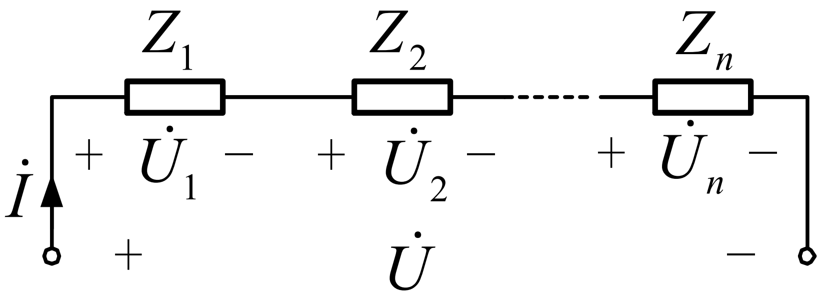
画相量图： 选电压为参考向量（容性：$\omega C>1/\omega L$，$\varphi'>0$）



容性　　感性　　电阻性

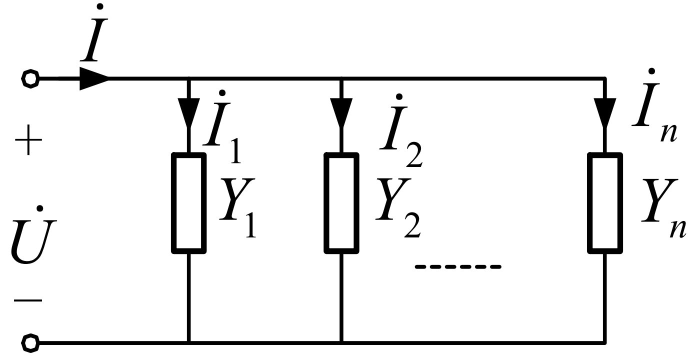
10.4 .3 阻抗的联结

1 阻抗的串联



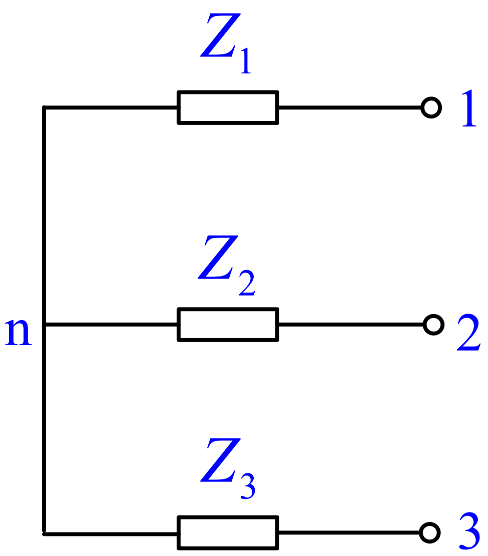
$$Z=\sum Z_k \qquad \dot{U}_k=\frac{Z_k}{\sum Z_k}\dot{U}$$

2 阻抗的并联



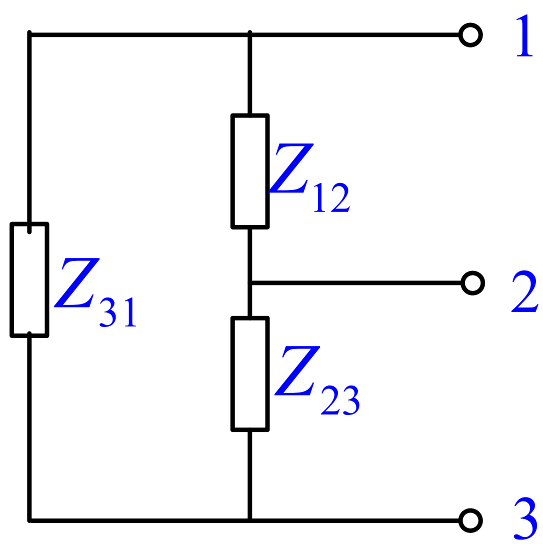
$$Y=\sum Y_k \qquad \dot{I}_k=\frac{Y_k}{\sum Y_k}\dot{I}$$

3 阻抗的星形和三角形联结

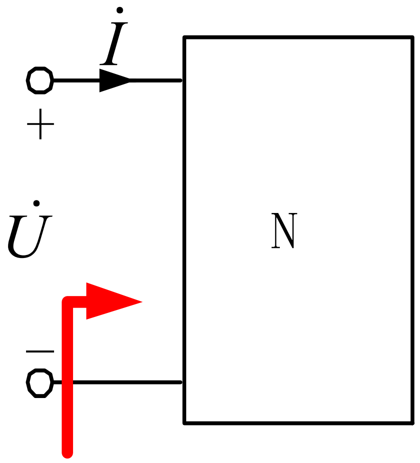


$$Y_{12}=\frac{Y_1Y_2}{Y_1+Y_2+Y_3}$$

$$Z_1=\frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12}+Z_{23}+Z_{31}}$$

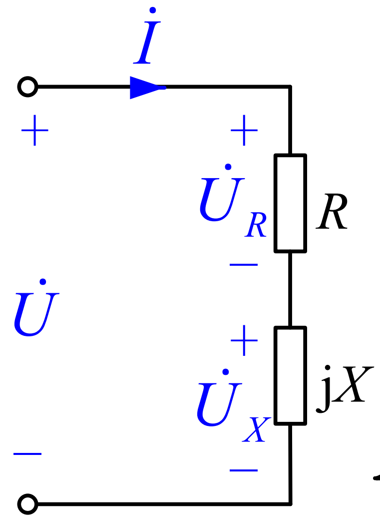


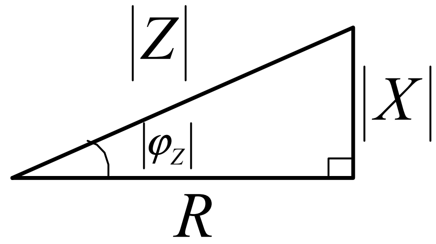
10.4.4 无源网络的等效模型

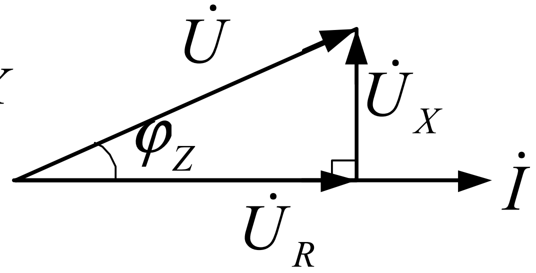


Z or Y

$$Z=\frac{\dot U}{\dot I}=\frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i}$$
$$=|Z|\angle\varphi_Z$$

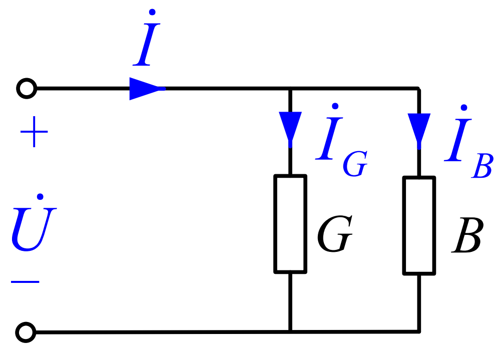


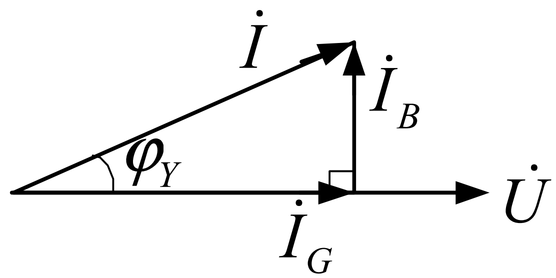




感性网络

$$Y=\frac{\dot I}{\dot U}=G+\mathrm{j}B$$
$$=|Y|\angle\varphi_Y$$





容性网络

10.4.4 无源网络的等效模型

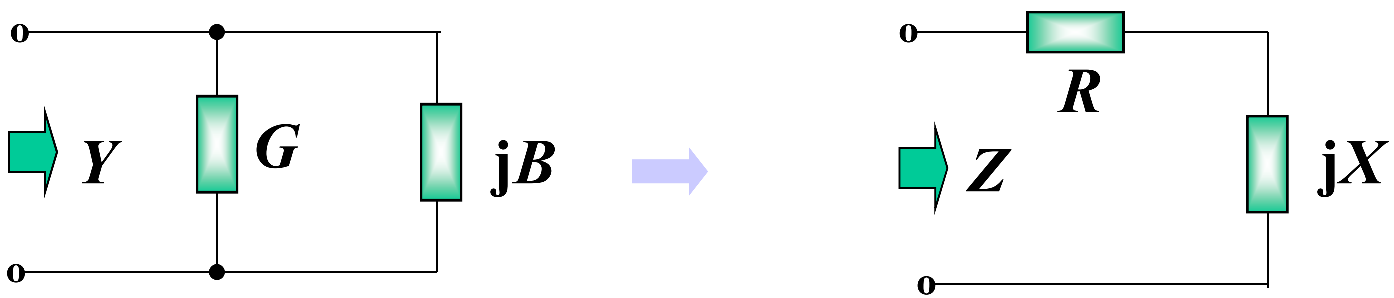
Y、*Z*之间等效变换：

已知：$Y = G + \mathrm{j}B = |Y| \angle \varphi', \quad Z = R + \mathrm{j}X = |Z| \angle \varphi$

$$\boxed{Y = \frac{1}{Z} \rightarrow \quad |Y| = \frac{1}{|Z|}, \varphi = -\varphi'}$$

$$\boxed{R = \frac{G}{G^2+B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2+B^2}} \Leftarrow Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G+\mathrm{j}B} = \frac{G-\mathrm{j}B}{G^2+B^2} = R + \mathrm{j}X$$

$$\boxed{G = \frac{R}{R^2+X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2+X^2}} \Leftarrow Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+\mathrm{j}X} = \frac{R-\mathrm{j}X}{R^2+X^2} = G + \mathrm{j}B$$



10.5 复杂正弦稳态电路分析

电阻电路与正弦电流电路相量法分析比较:

电阻电路:

$$\begin{cases} \text{KCL:} \quad \sum i = 0 \\ \text{KVL:} \quad \sum u = 0 \\ \text{元件约束关系:} \quad u = Ri \\ \qquad\qquad \text{或} \quad i = Gu \end{cases}$$

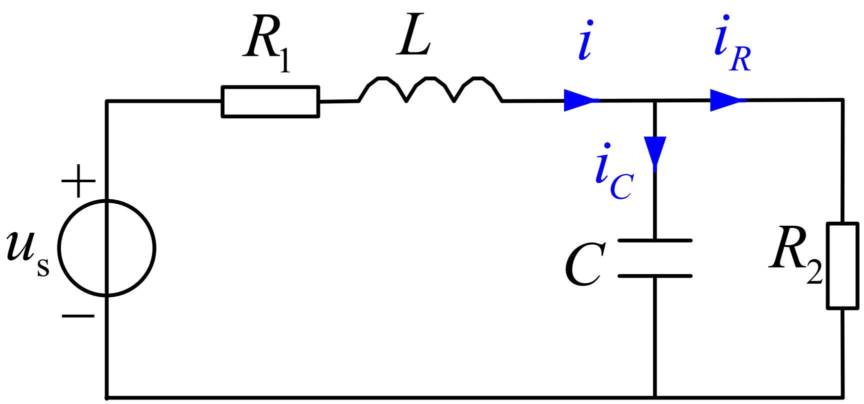
正弦电路相量分析:

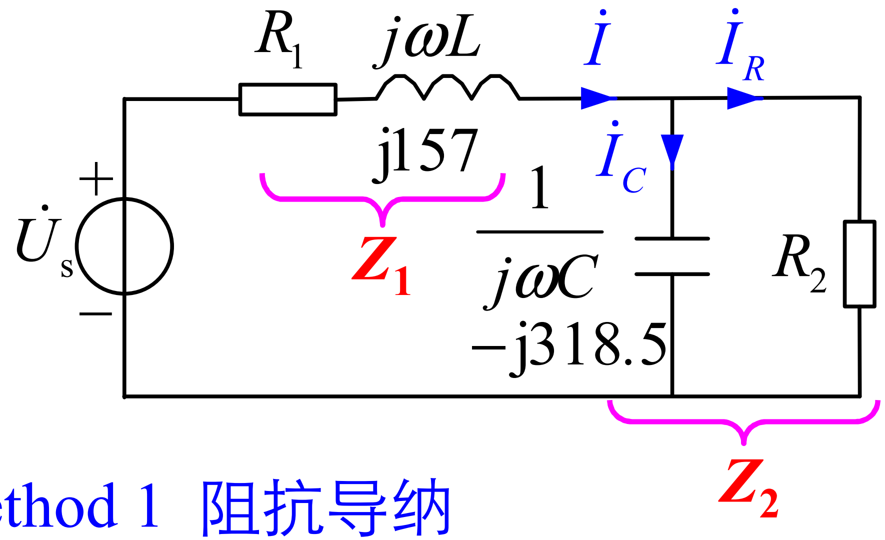
$$\begin{cases} \text{KCL:} \quad \sum \dot{I} = 0 \\ \text{KVL:} \quad \sum \dot{U} = 0 \\ \text{元件约束关系:} \quad \dot{U} = Z\dot{I} \\ \qquad\qquad \text{或} \quad \dot{I} = Y\dot{U} \end{cases}$$

可见，二者依据的电路定律是相似的。只要作出正弦稳态电路的相量模型，便可将电阻电路的分析方法应用于正弦稳态的相量分析中。

【例1】：已知$R_1=10\Omega$，$R_2=1000\Omega$，$L=500\text{mH}$，$C=10\mu\text{F}$，

$u_s=100\sqrt{2}\sin 314t\,\text{V}$。求：各支路电流。





解：画出电路的相量模型 Method 1 阻抗导纳

$$Z_1=R_1+j\omega L=10+j157\ \Omega$$

$$Z_2=R_2\,//\,\frac{1}{j\omega C}=\frac{1000\times(-j318.5)}{1000-j318.5}=92.20-j289.3\ \Omega$$

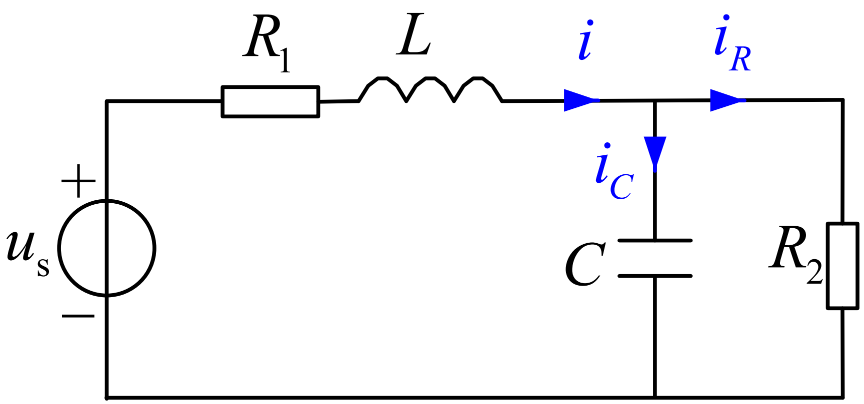
$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_s}{Z_1+Z_2}=\frac{100\angle 0^\circ}{167.2\angle -52.2^\circ}=0.6\angle 52.2^\circ\text{A}$$

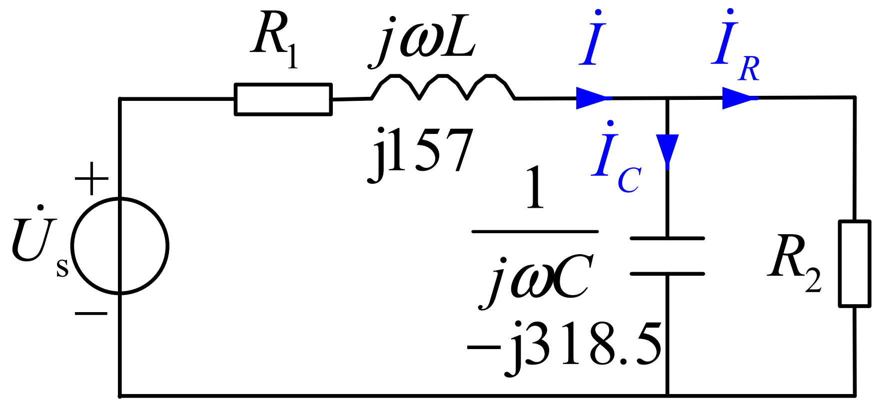
$$\dot{I}_R=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}\dot{I}=\frac{-j318.5}{1049\angle -17.67^\circ}\times 0.6\angle 52.2^\circ=0.182\angle -20.0^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C=0.57\angle 70^\circ\text{A}$$

【例1】：已知$R_1=10\Omega$，$R_2=1000\Omega$，$L=500\text{mH}$，$C=10\mu\text{F}$，

$u_s=100\sqrt{2}\sin 314t\text{V}$。求：各支路电流。





解：画出电路的相量模型 Method 2 结点法

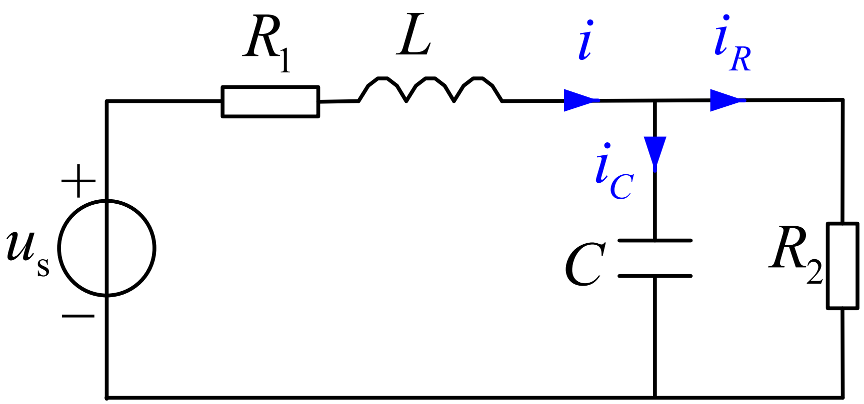
$$\left(\frac{1}{R_1+\mathrm{j}\omega L}+\frac{1}{R_2}+\mathrm{j}\omega C\right)\dot{U}_{n1}=\frac{\dot{U}_s}{R_1+\mathrm{j}\omega L} \qquad \dot{U}_{n1}=180\angle-20.0^\circ\text{V}$$

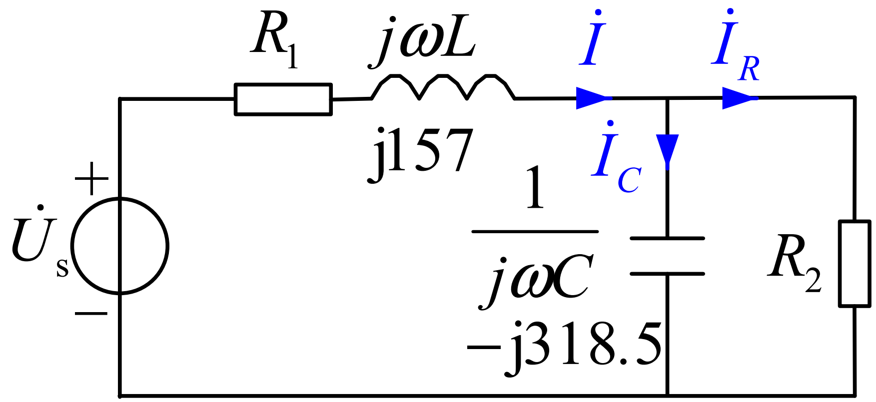
$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_{n1}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{180\angle-20.0^\circ}{-\mathrm{j}318.5}=0.57\angle 70^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_R=0.18\angle-20.0^\circ\text{A} \qquad \dot{I}=\frac{\dot{U}_s-\dot{U}_{n1}}{R_1+\mathrm{j}\omega L}=0.6\angle 52.2^\circ\text{A}$$

【例1】：已知$R_1=10\Omega$，$R_2=1000\Omega$， $L=500\mathrm{mH}$，$C=10\mu\mathrm{F}$，

$u_s=100\sqrt{2}\sin 314t\,\mathrm{V}$。求：各支路电流。





解：画出电路的相量模型 Method 3 网孔法

$$\left(R_1+\mathrm{j}\omega L-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\right)\dot I-\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot I_R=\dot U_s$$

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot I+\left(R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\dot I_R=0$$

$$\begin{cases}\dot I=0.6\angle 52.2^\circ\mathrm{A}\\ \dot I_R=0.18\angle -20.0^\circ\mathrm{A}\\ \dot I_C=0.570\angle 70.0^\circ\mathrm{A}\end{cases}$$

瞬时值表达式为：

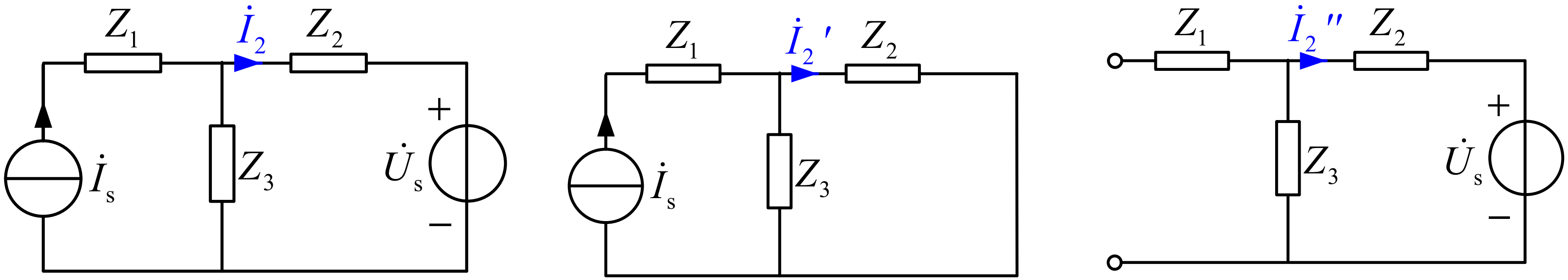
$$i=0.6\sqrt{2}\sin(314t+52.2^\circ)\,\mathrm{A}$$

$$i_R=0.18\sqrt{2}\sin(314t-20^\circ)\,\mathrm{A}$$

$$i_C=0.57\sqrt{2}\sin(314t+70^\circ)\,\mathrm{A}$$

【例2】已知：$\dot{U}_S = 100\angle 45^\circ\,\text{V}$，$\dot{I}_S = 4\angle 0^\circ\,\text{A}$，$Z_1 = Z_3 = 50\angle 30^\circ\,\Omega$，$Z_3 = 50\angle 30^\circ\,\Omega$.

用叠加定理计算电流$\dot{I}_2$



(1) $\dot{I}_S$单独作用：

$$\dot{I}_2{}' = \dot{I}_S \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$= 4\angle 0^\circ \times \frac{50\angle 30^\circ}{50\angle -30^\circ + 50\angle 30^\circ}$$

$$= \frac{200\angle 30^\circ}{50\sqrt{3}} = 2.31\angle 30^\circ\,\text{A}$$

(2) $\dot{U}_S$单独作用：

$$I_2{}'' = -\frac{\dot{U}_S}{Z_2 + Z_3}$$

$$= \frac{-100\angle 45^\circ}{50\sqrt{3}} = 1.155\angle -135^\circ\,\text{A}$$

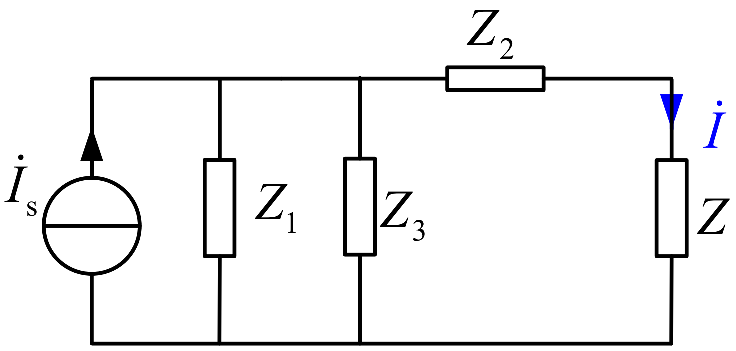
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2{}' + \dot{I}_2{}''$$

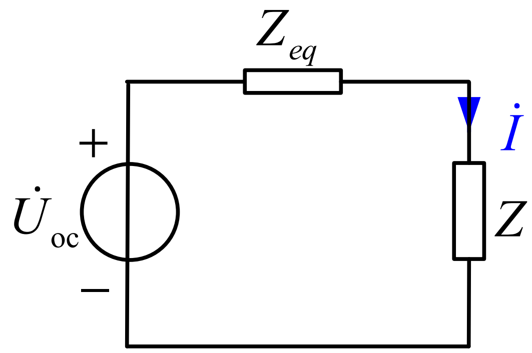
$$= 2.31\angle 30^\circ + 1.155\angle -135^\circ$$

$$= (2 + \text{j}1.155) + (-0.817 - \text{j}0.817)$$

$$= 1.23\angle -15.9^\circ\,\text{A}$$

【例3】已知： $\dot{I}_S = 4\angle 90^\circ$ A， $Z_1 = Z_2 = -\mathrm{j}30\ \Omega$, $Z_3 = 30\ \Omega$， $Z = 45\ \Omega$。求： $\dot{I}$.





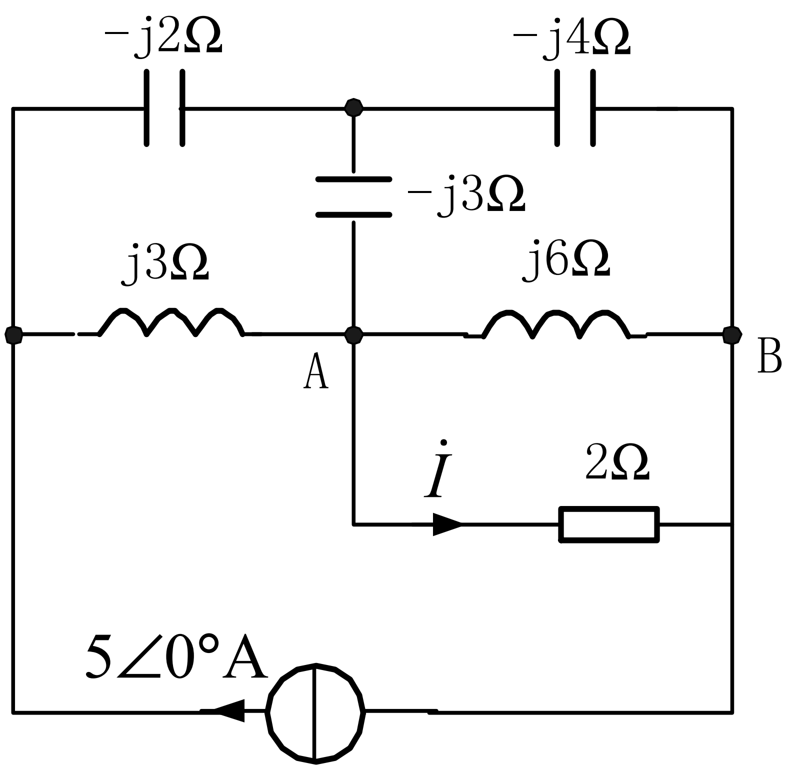
解：戴维南定理

$$\dot{U}_{oc} = \dot{I}_s (Z_1 // Z_3) = 84.855\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$Z_{eq} = Z_1 // Z_3 + Z_2 = 15 - \mathrm{j}45\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_{eq} + Z} = 1.13\angle 81.9^\circ \text{ A}$$

【例4】计算 $\dot{I}$.

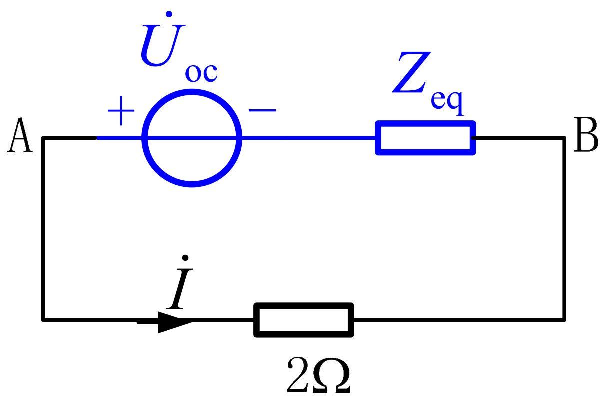


戴维南定理

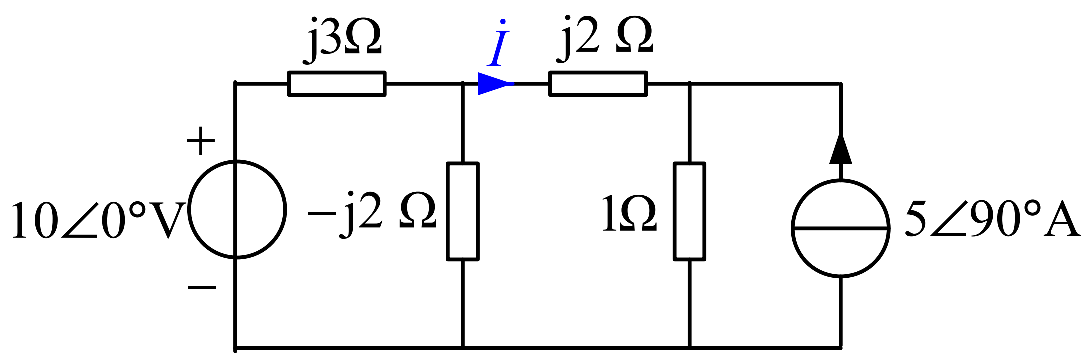
$$\dot{U}_{oc}=\left(\frac{-j6}{-j6+j9}\times 5\angle 0^\circ\right)\times j6$$

$$Z_{eq}=[(-j2+j3)//(-j3)-j4]//(j6)$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_{oc}}{2+Z_{eq}}$$



【课下练习】计算 $\dot{I}$.



戴维南定理

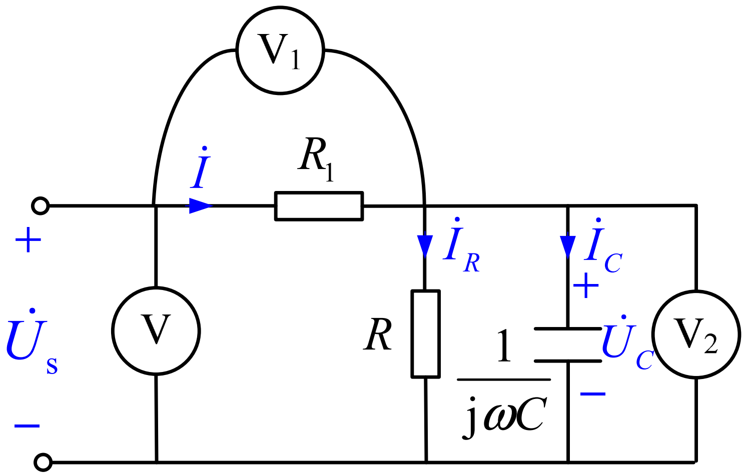
$$\dot{U}_{oc}=\frac{-j2}{j3-j2}\times 10\angle 0^{\circ}-5\angle 90^{\circ}=-20-j5$$

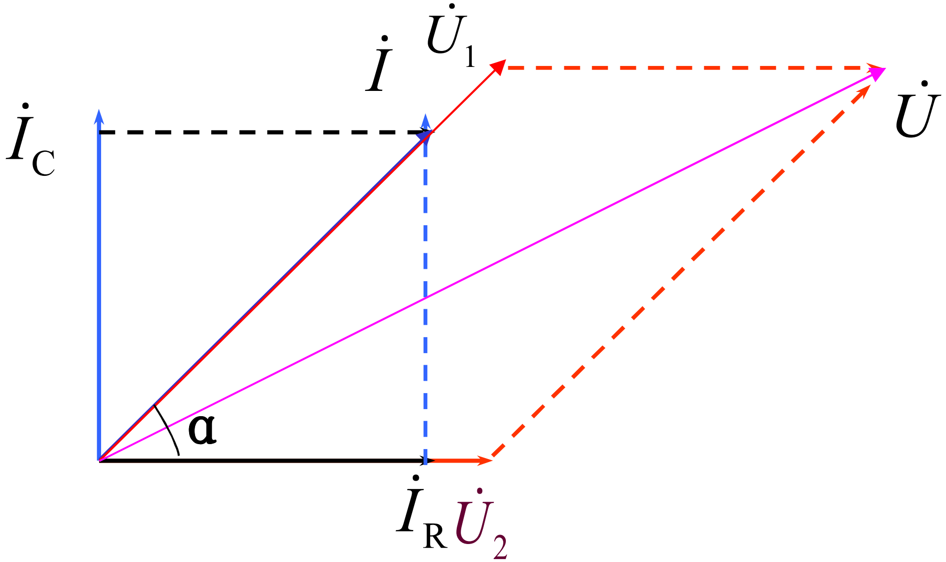
$$Z_{eq}=j3//(-j2)+1=-j6+1$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_{oc}}{Z_{eq}+j2}=\frac{-20-j5}{-j6+1+j2}=\frac{-20-j5}{-j4+1}=\frac{-5(4+j)}{-j(4-j)}=-j5\text{A}$$

10.6　相量图及位形相量图

【例1】：f=50Hz，R_1=20欧。V、V_1、V_2的读数为100V，60V，50V求R和C。



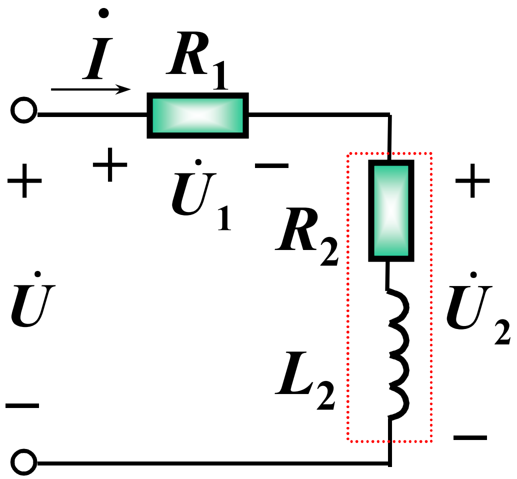


$$U^2=U_1^2+U_2^2-2U_1U_2\cos(180°-\alpha) \Rightarrow \alpha=49.46°$$

$$I=\frac{U_1}{R_1}=\frac{60}{20}=3\text{A} \Rightarrow I_R=3\cos 49.46°=1.95\text{A} \quad I_C=3\sin 49.46°=2.28\text{A}$$

$$R=\frac{U_2}{I_R}=25.64 \qquad X_C=\frac{U_2}{I_C}=21.93\Omega$$

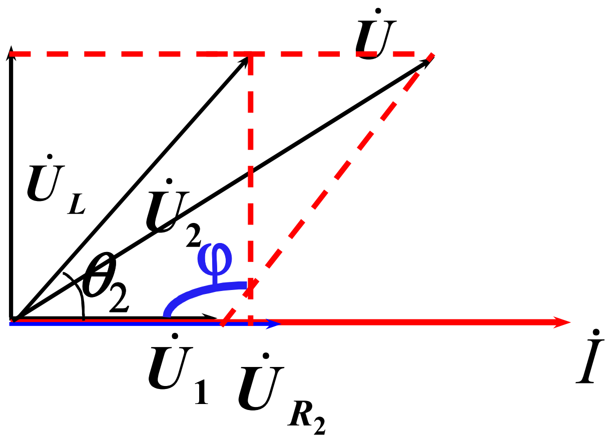
$$=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC} \Rightarrow C=145\mu F$$



【例2】已知：U=115V，U_1=55.4V，U_2=80V，R_1=32Ω，f=50Hz

求： 线圈的电阻R_2和电感L_2。

解：画相量图进行定性分析。



$$I = U_1 / R_1 = 55.4/32 = 1.73\text{A}$$

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -0.4237 \quad \therefore \varphi = 115.1^\circ$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \varphi = 64.9^\circ$$

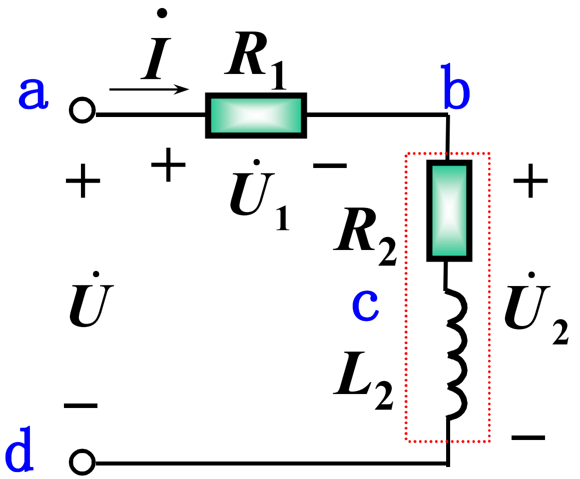
$$U_{L2} = U_2\sin\theta_2 = 80\times\sin 64.9^\circ = 72.45V$$

$$U_{R2} = U_2\cos\theta_2 = 80\times\cos 64.9^\circ = 33.9V$$

$$R_2 = U_{R2}/I = 33.9/1.73 = 19.6\Omega$$

$$\omega L = U_{L2}/I = 72.45/1.73 = 41.88\Omega$$

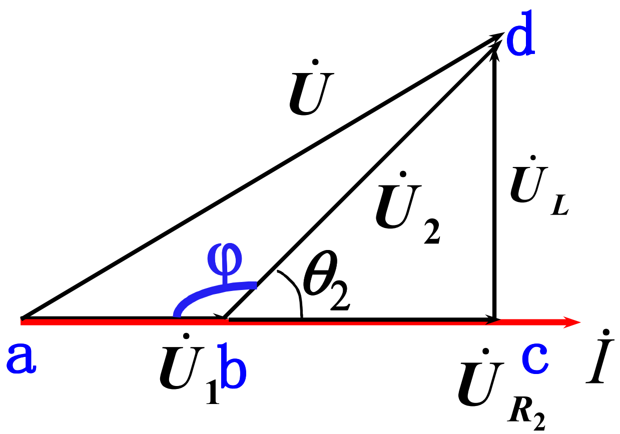
$$L = 41.88/314 = 0.133\,H$$



【例2】已知：U=115V，U_1=55.4V，U_2=80V，R_1=32Ω，f=50Hz

求：线圈的电阻R_2和电感L_2。

解：画位形相量图进行定性分析。



$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -0.4237 \quad \therefore \varphi = 115.1^\circ$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \varphi = 64.9^\circ$$

$$I = U_1 / R_1 = 55.4/32 = 1.73\text{A}$$

$$U_{L2} = U_2\sin\theta_2 = 80\times\sin 64.9^\circ = 72.45V$$

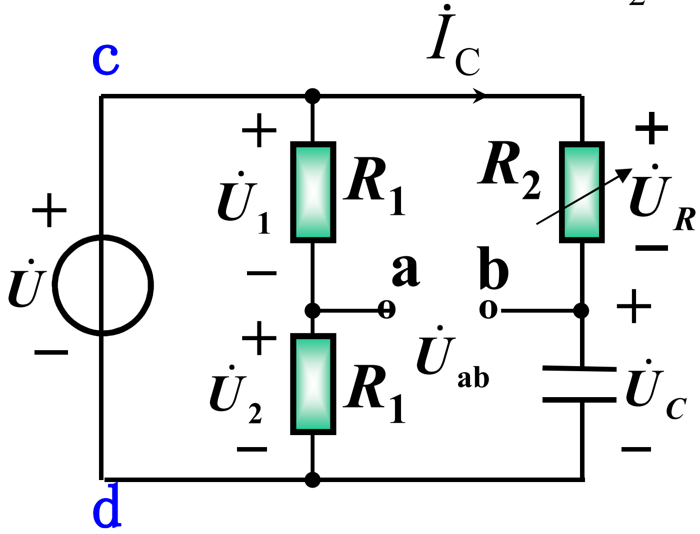
$$U_{R2} = U_2\cos\theta_2 = 80\times\cos 64.9^\circ = 33.9V$$

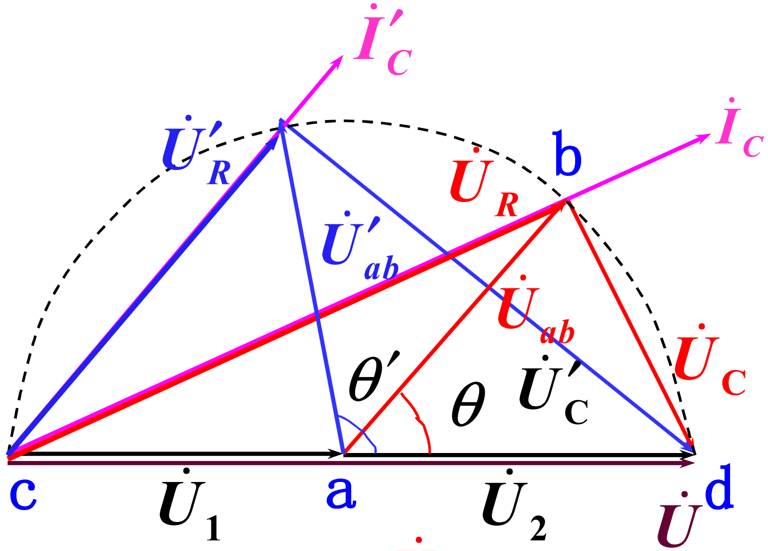
$$R_2 = U_{R2}/I = 33.9/1.73 = 19.6\Omega$$

$$\omega L = U_{L2}/I = 72.45/1.73 = 41.88\Omega$$

$$L = 41.88/314 = 0.133\,H$$

【例3】 移相桥电路。当R_2由$0\rightarrow\infty$时，$\dot{U}_{ab}$如何变化？





解： 用相量图分析

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2\,,\quad \dot{U}_1=\dot{U}_2=\frac{\dot{U}}{2}$$

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_C$$

$$\dot{U}_{ab}=\dot{U}_R-\dot{U}_1$$

由相量图可知，当R_2改变，$U_{ab}=\dfrac{1}{2}U$不变，相位改变；

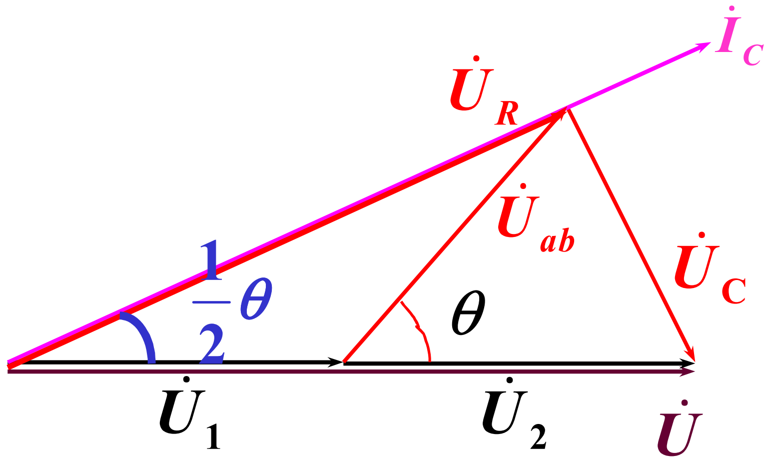
当R_2=0，θ=180°；当$R_2\rightarrow\infty$，θ=0°。

θ为移相角，范围为180°~ 0° 。

给定R_2求移相角

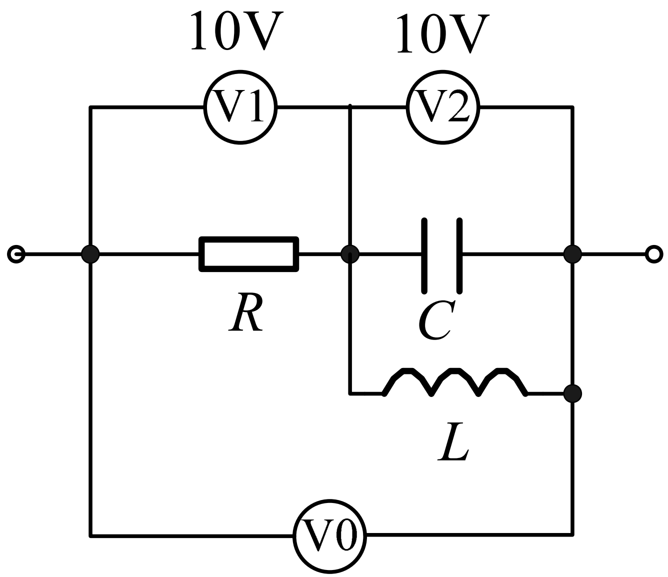
$$\tan(\frac{1}{2}\theta) = \frac{U_C}{U_R}$$

$$= \frac{I_C \dfrac{1}{\omega C}}{I_C R_2} = \frac{1}{R_2 \omega C}$$



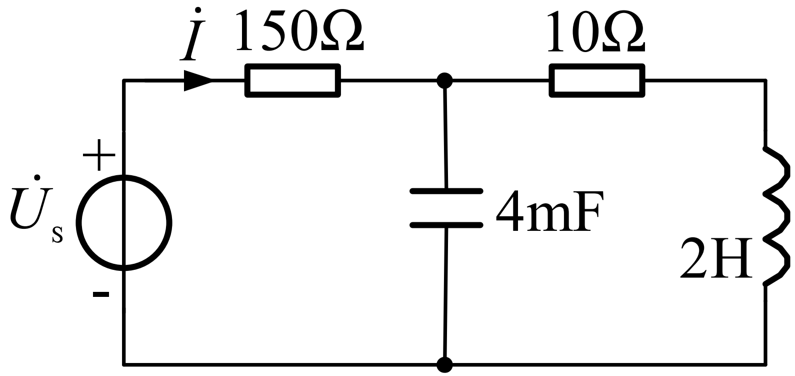
由此可求出给定电阻变化范围下的移相范围

【练习1 】. 计算电压表的读数V_0.



$$V_o = 10\sqrt{2}\text{V}$$

【练习2】.电压源和电流 $\dot{I}$ 同相位，试确定电源的频率。



$$Y = \frac{1}{10 + \mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C$$

导纳的虚部B=0时，电压源和电流 $\dot{I}$ 同相位

$$\frac{-\mathrm{j}\omega L}{10^2 + (\omega L)^2} + \mathrm{j}\omega C = 0$$

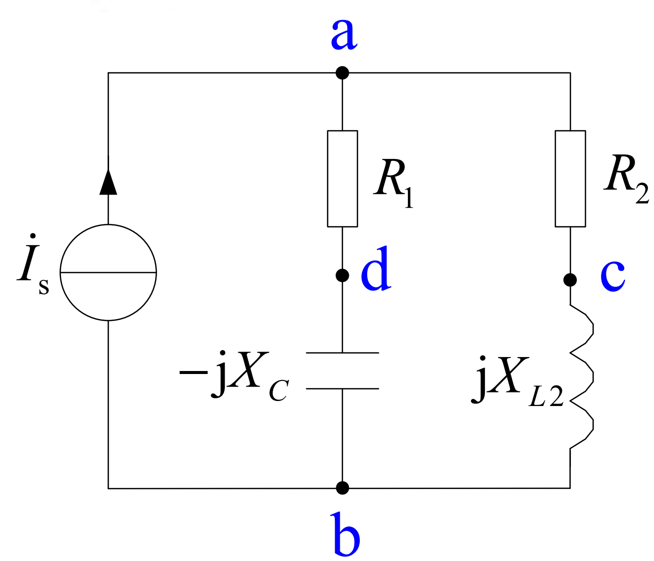
$$\frac{L}{10^2 + (\omega L)^2} = C \rightarrow \omega = 10 rad / s$$

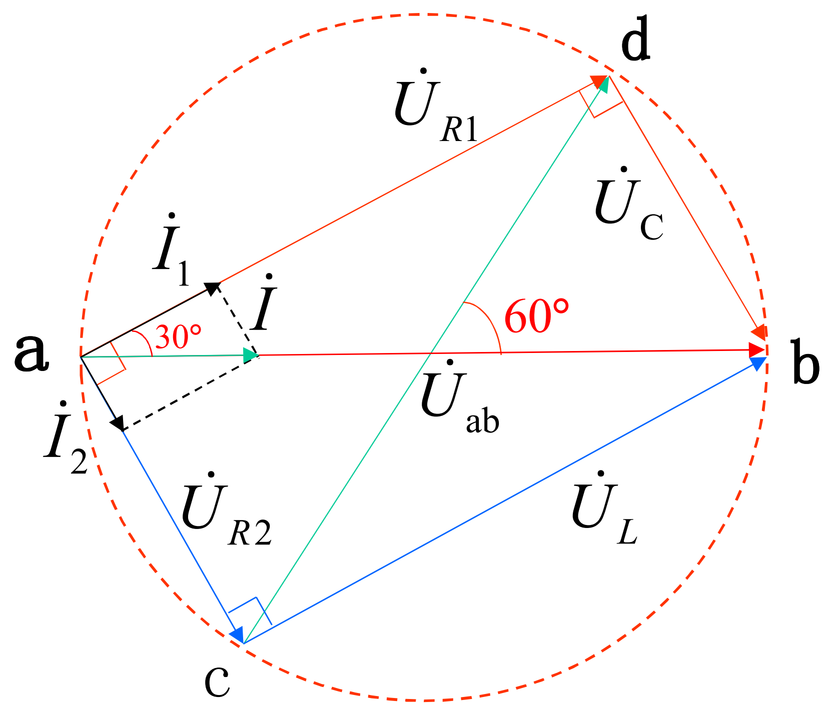
计划学时：6学时；课后学习18学时

作业：

10-13，10-34 / 阻抗与导纳
10-41/正弦稳态分析
10-51/ 相量图分析
10-53 /综合应用

10-51 题 10-51 图所示电路中，$R_1=R_2$，$I_s=10$ A，$U_{cb}=5\sqrt{3}$ V，且 $U_{ab}=U_{cd}$，$\dot{U}_{ab}$与 $\dot{U}_{cd}$的相位差为 60°。确定 R_1、R_2、X_L 及 X_C 的值。





解：设U_{ab}为参考相量

四边形对角互补，四点共圆，U_{ab}为直径

$U_{ab}=U_{cd}$，U_{cd}也为直径

$$\frac{U_{ad}}{U_{ac}}=\frac{R_1I_1}{R_2I_2}=\frac{I_1}{I_2}=\sqrt{3}$$ I与U_{ab}相位角相等

由$U_{cb}=5\sqrt{3}$V可以得出：$U_{R1}=5\sqrt{3}$V　$U_C=5$V

$U_{R2}=5$V　$U_L=5\sqrt{3}$V

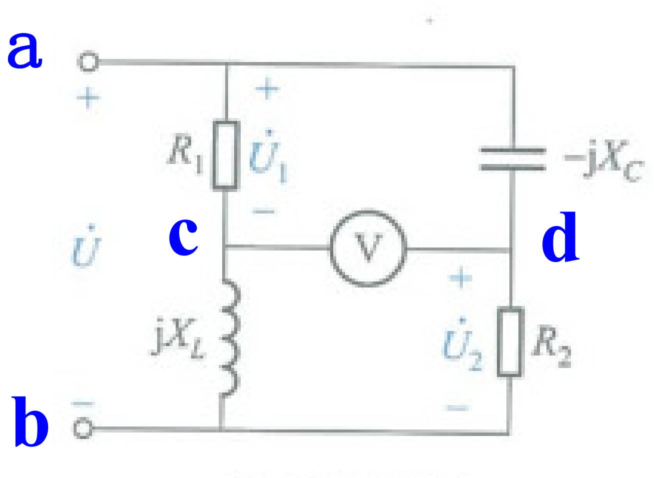
$I_s=10$A可以得出：$I_1=5\sqrt{3}$A　$I_2=5$A

$$R_1=R_2=\frac{U_{R1}}{I_1}=\frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=1\Omega$$

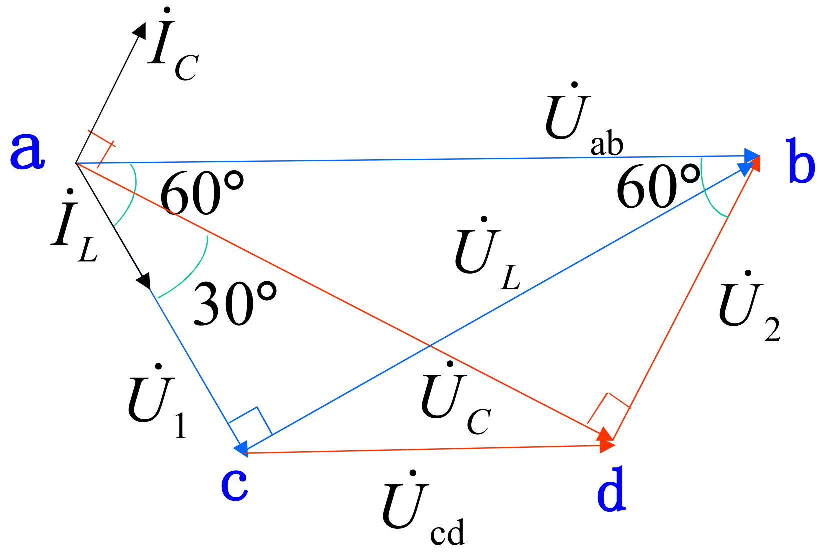
$$X_C=\frac{U_C}{I_1}=\frac{5}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Omega$$

$$X_L=\frac{U_L}{I_2}=\frac{5\sqrt{3}}{5}=\sqrt{3}\Omega$$

11-25　图示电路中，端口电压U的有效值为100V，U_1、U_2的有效值均为50V，求电压表的读数。



题 11-25 图



解：设端口电压U为参考相量　$\dot{U}=100\angle 0°\text{V}$

$U_1 = 50\text{V}$可以得出：　$U_L = 50\sqrt{3}\text{V}$

$$U_{cd}^2 = U_1^2 + U_L^2 - 2U_1 \times U_L \cos 30°$$
$$= 50^2 + (50\sqrt{3})^2 - 2\times 50\times 50\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$U_{cd} = 50\text{V}$$