

4、根轨迹法

闭环特征方程根在分析系统中的作用？

- 系统的稳定性
- 系统的动态响应性能

存在的问题：

三阶以上系统特征方程根很难解析求解

尤其是研究随参数变化根的变化趋势就更难

借助图解方法研究闭环系统特征根随参数变化的轨迹

根轨迹法：三大分析校正方法之一

特点： 当系统中某一参数变化时，系统闭环极点的变化趋势。

近似方法，不十分精确。

根轨迹法的基本概念——4.1

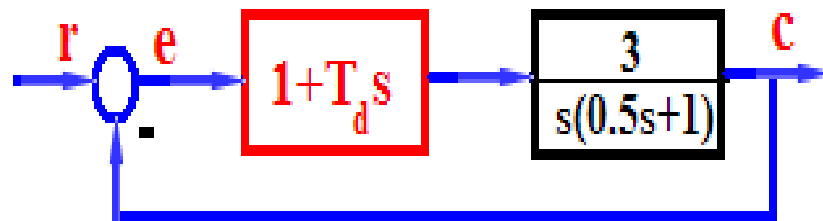
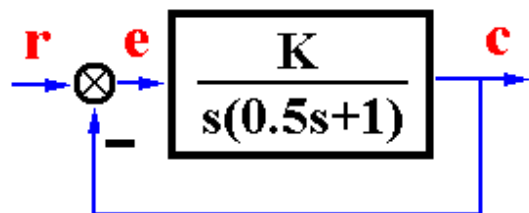
绘制根轨迹——4.2 , 4.3

利用根轨迹分析系统性能——4.4

4.1 根轨迹法的基本概念

- 什么是根轨迹
- 根轨迹方程

4.1 根轨迹法的基本概念



讨论系统闭环特征根随 K 或 T_d 变化所产生的轨迹

一、根轨迹的定义：

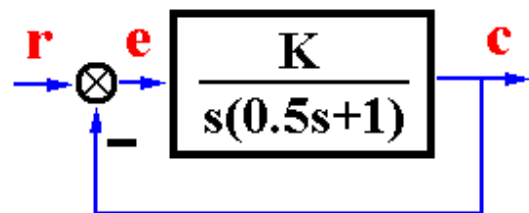
根轨迹：系统某一参数由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，闭环特征根在 s 平面相应变化所描绘出来的轨迹。

普通根轨迹：根轨迹增益 K^* 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，闭环特征根在 s 平面相应变化所描绘出来的轨迹。

参数根轨迹：除 K^* 之外的其他参数由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，闭环特征根在 s 平面相应变化所描绘出来的轨迹。

4.1 根轨迹法的基本概念

例1、分析如图系统的闭环极点随开环增益K变化的趋势。



解:
$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)} = \frac{K^* = 2K}{s(s+2)}$$

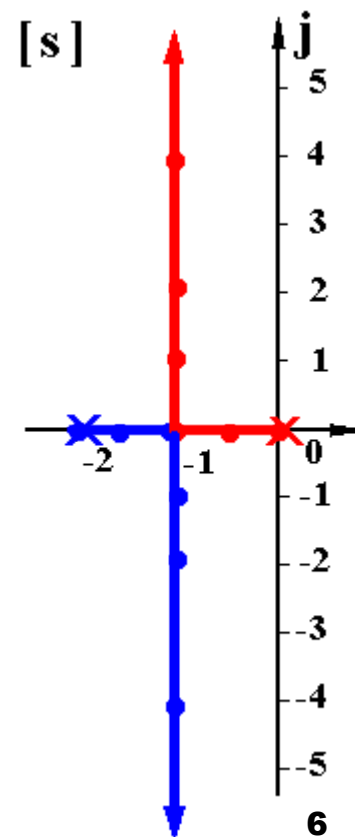
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} : \text{开环增益} \\ \mathbf{K^*} : \text{根轨迹增益} \end{array} \right.$

$$G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K^*}{s^2 + 2s + K^*}$$

$$D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K^*}$$

$K^*=2K$	λ_1	λ_2
0	0	-2
0.64	-0.4	-1.6
1	-1	-1
2	-1+j1	-1-j1
5	-1+j2	-1-j2
17	-1+j4	-1-j4
\vdots	\vdots	\vdots
∞	$-1+j\infty$	$-1-j\infty$

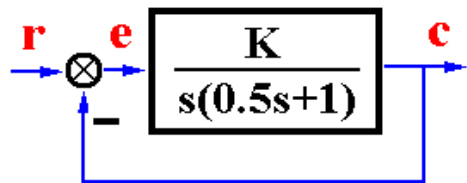


当开环增益K变化是闭环极点形成轨迹



4.1 根轨迹法的基本概念

二、根轨迹与系统性能



$$D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K^*}$$

$$K^* = 2K = 0 \xrightarrow{\quad} 1 \xrightarrow{\quad} \infty$$

动态性能

$$\zeta > 1$$

$$0 < \zeta < 1$$

$$\sigma_p = 0$$

$$K^* \uparrow \zeta \downarrow \sigma_p \uparrow$$

$$K^* \uparrow t_s \downarrow$$

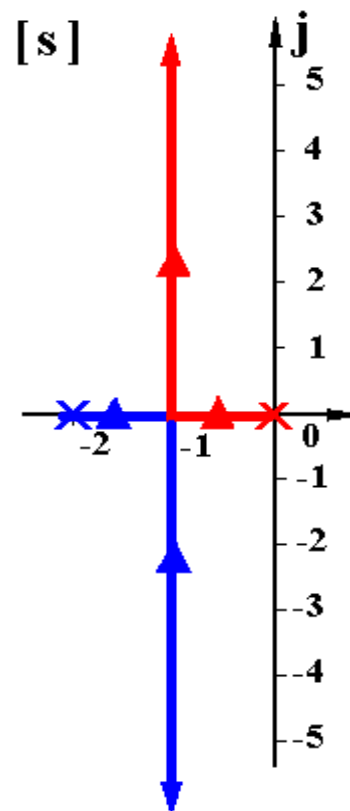
$$t_s = C$$

稳定性

稳定

稳态性能

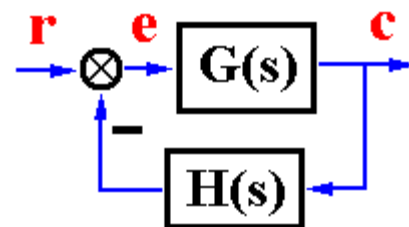
$$r(t) = At, K^* \uparrow e_{ss} = \frac{2A}{K^*} \downarrow$$



4.1 根轨迹法的基本概念

二、根轨迹方程

$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



闭环特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1 \quad \text{根轨迹方程}$$

闭环特征根

先讨论开环根轨迹增益**K***从0到 ∞ 变化产生的闭环特征根的轨迹的普通根轨迹。

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

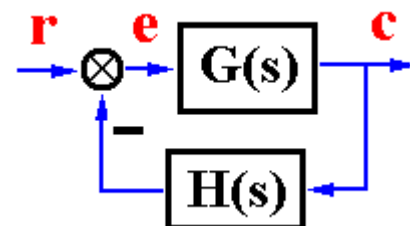
$$K = K^* (-1)^{m-n} \frac{\prod_{i=1}^m |z_i|}{\prod_{j=1}^n |p_j|}$$

K为开环放大系数
K*为开环根轨迹增益

4.1 根轨迹法的基本概念

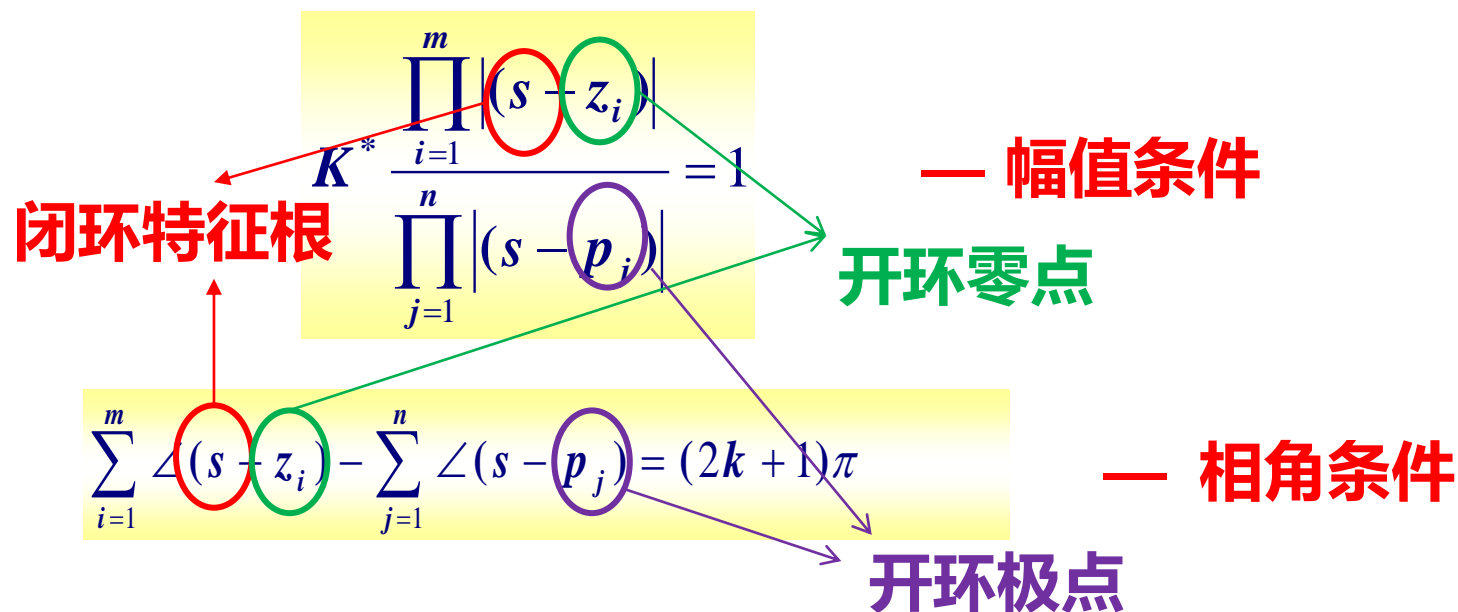
$$G(s)H(s) = -1$$

三、普通根轨迹的幅值条件和相角条件



$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* |s - z_1| \cdots |s - z_m|}{|s - p_1| |s - p_2| \cdots |s - p_n|} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$



4.1 根轨迹法的基本概念

例2 判定 s_i 是否为根轨迹上的点。

解、
$$G(s) = \frac{K^*}{(s+1)(s+5)}$$

幅值条件
$$K^* = |s+1| \cdot |s+5|$$

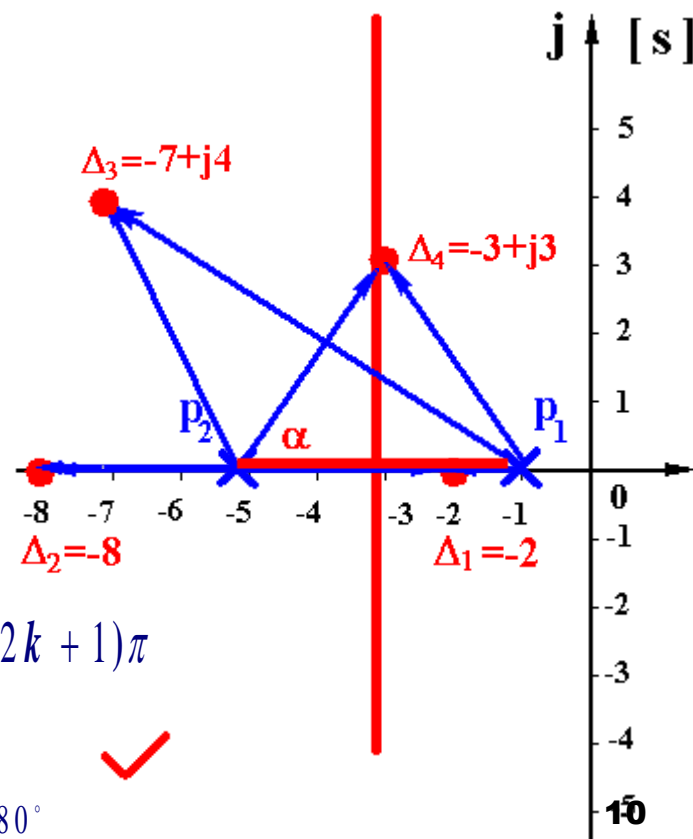
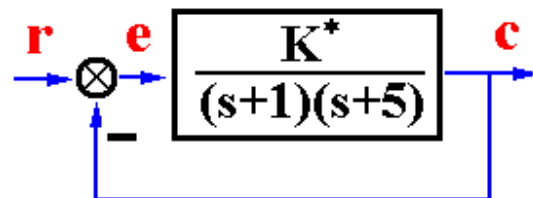
相角条件
$$-\angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) = (2k+1)\pi$$

$s = -2$ $K^* = |-2+1| \cdot |-2+5| = 3$ ✓
 $-\angle(-2+1) - \angle(-2+5) = -180^\circ - 0^\circ = -180^\circ$

$s = -8$ $K^* = |-8+1| \cdot |-8+5| = 21$ ✗
 $-\angle(-8+1) - \angle(-8+5) = -180^\circ - 180^\circ = -360^\circ$

$s = -7+j4$ $K^* = |-7+1+j4| \cdot |-7+5+j4| = 32.25$ ✗
 $-\angle(-7+1+j4) - \angle(-7+5+j4) = -262.9^\circ \neq (2k+1)\pi$

$s = -3+j3$ $K^* = |-3+1+j3| \cdot |-3+5+j3| = 13$ ✓
 $-\angle(-3+1+j3) - \angle(-3+5+j3) = -(180^\circ - 56.3^\circ) - 56.3^\circ = -180^\circ$



4.1 根轨迹法的基本概念

幅值条件

$$K^* \frac{\prod_{i=1}^m |(s - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s - p_j)|} = 1$$

相角条件

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$

- ✓ 对s平面上任意的点，总存在一个 K^* ，使其满足幅值条件，但该点不一定是根轨迹上的点。
- ✓ s平面上满足相角条件的点（必定满足幅值条件）一定在根轨迹上。

满足相角条件是s点位于根轨迹上的充分必要条件。

幅值条件用来确定根轨迹上某点对应的 K^* 值。

普通根轨迹又称为180°根轨迹。

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

$$K^* \frac{\prod_{i=1}^m |(s - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s - p_j)|} = 1$$

$$G(s)H(s) = -1$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$

- ◆ 根轨迹是闭环特征根随参数变化的**近似走势**
- ◆ 从**幅值条件**和**相角条件**得出绘制根轨迹的规则
- ◆ 绘制**普通根轨迹(180°根轨迹)**的基本规则有**7条**
- ◆ 7条规则可以确定根轨迹上的**关键点**
- ◆ 根轨迹上确定的点可以根据**幅值条件**求出对应的根轨迹增益

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

规则1 根轨迹的分支数，对称性和连续性：

$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad n \geq m$$

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 0$$
$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) + K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

根轨迹的分支数=开环极点数；

根轨迹连续且对称于实轴。

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

规则2 根轨迹的起点和终点：

当 $s = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$

$$K^* = \frac{|s - p_1| \cdots |s - p_n|}{|s - z_1| \cdots |s - z_m|} = 0$$

开环极点是根轨迹的起点

$$K^* = \frac{|s - p_1| \cdots |s - p_n|}{|s - z_1| \cdots |s - z_m|} = \frac{s^{n-m} \left| 1 - \frac{p_1}{s} \right| \cdots \left| 1 - \frac{p_n}{s} \right|}{\left| 1 - \frac{z_1}{s} \right| \cdots \left| 1 - \frac{z_m}{s} \right|} = \infty \quad \begin{cases} s = z_j, & j = 1, 2, \dots, m \\ s = \infty, & n - m \end{cases}$$

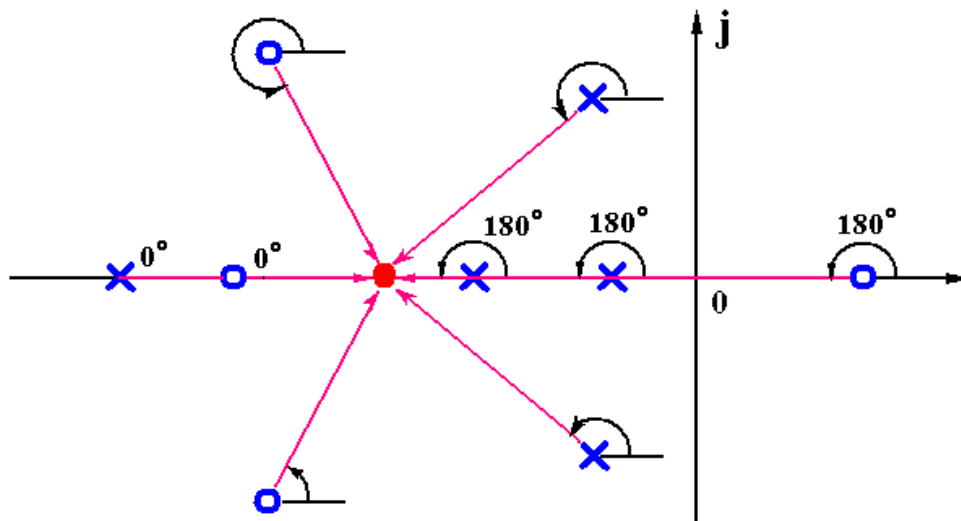
开环零点是根轨迹的终点，还有 (n-m)无穷零点

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点；如果开环零点个数少于开环极点个数，则有 n-m 条根轨迹终止于无穷远处。

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

规则3 实轴上的根轨迹：

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$



若**实轴**上某线段**右侧**的开环零、极点的个数之和为**奇数**，则该线段是实轴上的根轨迹。（根据相角条件）

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

规则4 渐近线:

当开环极点数 n 大于开环零点 m 时, 系统有 $n-m$ 条根轨迹终止于 s 平面的无穷远处;

这 $n-m$ 条根轨迹变化趋向的直线叫做根轨迹的渐近线, 因此, 渐近线也有 $n-m$ 条, 且它们交于实轴上的一点。

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

渐近线与实轴的交点坐标

$$\varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}, \quad K = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

渐近线与实轴的夹角

证明参照书上P97

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

例1 系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s(s+2)}$ 试绘制根轨迹。

解. 1) 先在s平面上标出开环零、极点。

$$n=2, m=0,$$

2个开环极点0和-2; 没有开环零点,

有2条根轨迹, 2条根轨迹都趋向无穷远

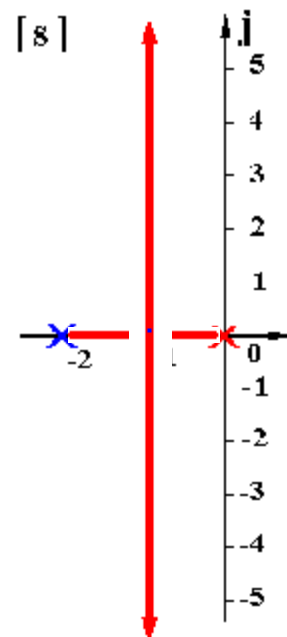
2) 实轴上的根轨迹:

$$[-2, 0]$$

3) 渐近线:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{-2 + 0}{2 - 0} = -1$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm 90^\circ$$



4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

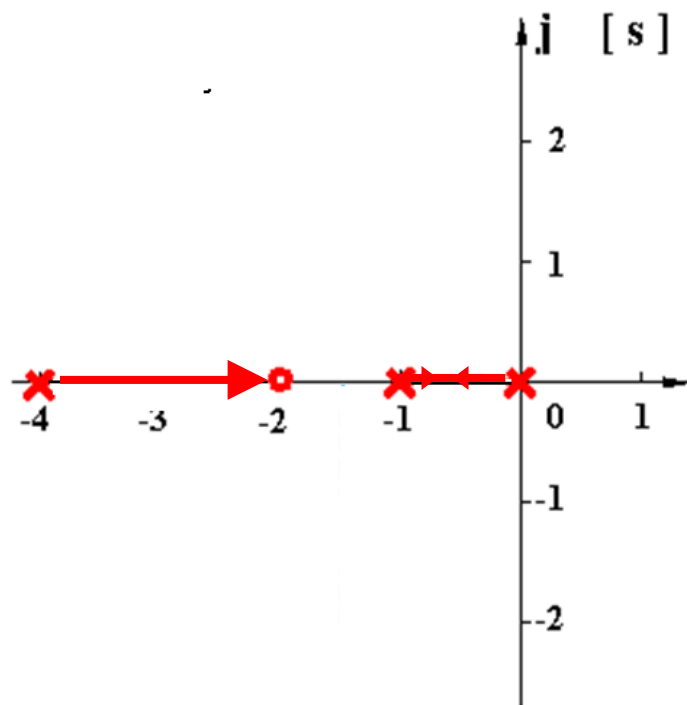
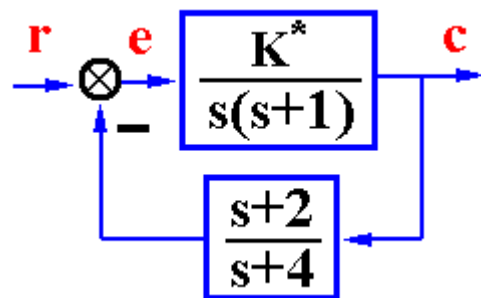
例2 系统结构图如图所示。

绘制当 $K^* = 0 \rightarrow \infty$ 时系统的根轨迹；

解.
$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \quad \begin{cases} K = K^*/2 \\ N = 1 \end{cases}$$

3条分支根轨迹，起点为开环极点
其中一条终止与-2零点，另外2条终止于无穷远

实轴上的根轨迹：[-4,-2], [-1,0]



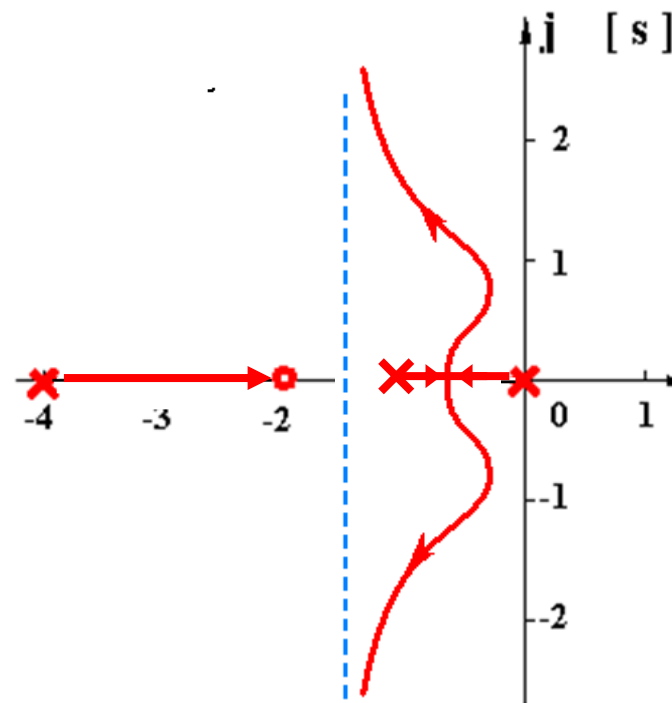
4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

渐近线: $\sigma_a = \frac{0 - 1 - 4 + 2}{3 - 1} = -\frac{3}{2}$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ$$

根轨迹是一近似的轨迹
但是是一些关键点,
比如什么时候由实数根变为共
轭复数根,

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$



4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

规则5 分离点 d:

当系统增益由零到无穷大变化时，两条根轨迹先在实轴上相向运动($0 \leq K^* < 1$)，相遇在点 $(-1, j0)$ ，我们称该点为根轨迹的分离点。

分离点对应重根。分离点一定在实轴根轨迹上。

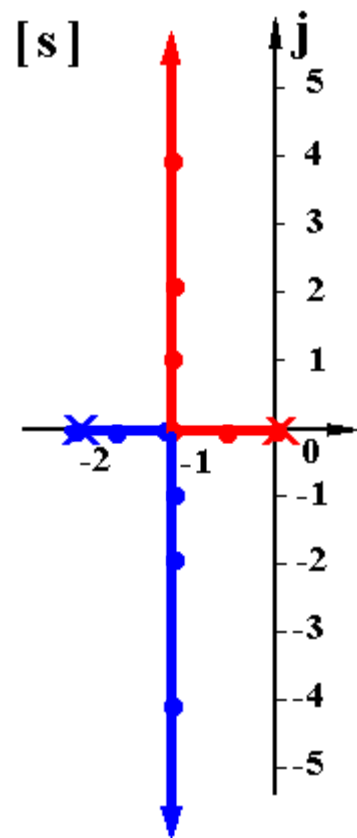
根据代数法则，重根对应

$$D(s) = 0 \quad \frac{dD(s)}{ds} = 0$$

可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$$

(无零点时右端为0)



分离角为 $(2k + 1)\pi / l$

其中 l 为分离点处根轨迹的分支数²⁰

证明:

$$1 + K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 0$$

$$D(s) = \prod_{j=1}^n (s - p_j) + K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

若d为分离点，那么d满足特征方程

$$\prod_{j=1}^n (d - p_j) = -K^* \prod_{i=1}^m (d - z_i) \quad (1)$$

分离点对应重根

$$\left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=d} = 0 \quad \left. \frac{d \prod_{j=1}^n (s - p_j)}{ds} \right|_{s=d} + \left. \frac{dK^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{ds} \right|_{s=d} = 0$$

$$\left. \frac{d \prod_{j=1}^n (s - p_j)}{ds} \right|_{s=d} = - \left. \frac{dK^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{ds} \right|_{s=d} \quad (2)$$

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

用 (2) 两边分别除以 (1) 两边

$$\frac{\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^n (s - p_j)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \bigg|_{s=d} = \frac{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)} \bigg|_{s=d} \quad (3)$$

$$\frac{\frac{d \ln \prod_{j=1}^n (s - p_j)}{ds}}{\bigg|_{s=d}} = \frac{\frac{d \ln \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{ds}}{\bigg|_{s=d}} \quad (4)$$

$$\ln \prod_{j=1}^n (s - p_j) = \sum_{j=1}^n \ln(s - p_j)$$

$$\ln \prod_{i=1}^m (s - z_i) = \sum_{i=1}^m \ln(s - z_i)$$

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

分别代入 (3)

$$\left. \frac{d \sum_{j=1}^n \ln(s - p_j)}{ds} \right|_{s=d} = \left. \frac{d \sum_{i=1}^m \ln(s - z_i)}{ds} \right|_{s=d} \quad (5)$$

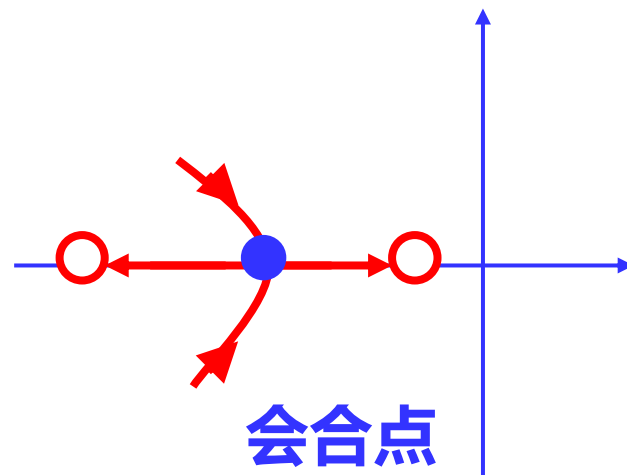
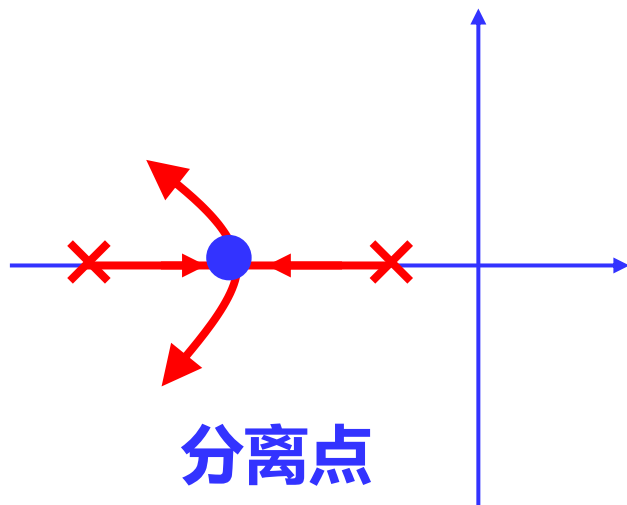
$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{(d - p_j)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(d - z_i)} \quad (6)$$

如果系统没有开环零点

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{(d - p_j)} = 0 \quad (7)$$

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

- 若根轨迹位于实轴上两个相邻的开环极点之间（其中一个可以是无限极点），则在这两个极点之间至少存在一个分离点；
- 若根轨迹位于实轴上两个相邻的开环零点之间（其中一个可以是无限零点），则在这两个零点之间也至少有一个分离点（会合点）。



4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

例3某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$

当 K^* 由0变到无穷大，证明复平面的根轨迹为圆弧。

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)} \quad \begin{cases} K = 2K^* \\ N = 1 \end{cases}$$

$$D(s) = s(s+1) + K^*(s+2) = s^2 + (1+K^*)s + 2K^*$$

$$s_{1,2} = \frac{-(1+K^*) \pm \sqrt{(1+K^*)^2 - 8K^*}}{2}$$

$$= \frac{-(1+K^*)}{2} \pm j \frac{\sqrt{8K^* - (1+K^*)^2}}{2} = \sigma \pm j\omega$$

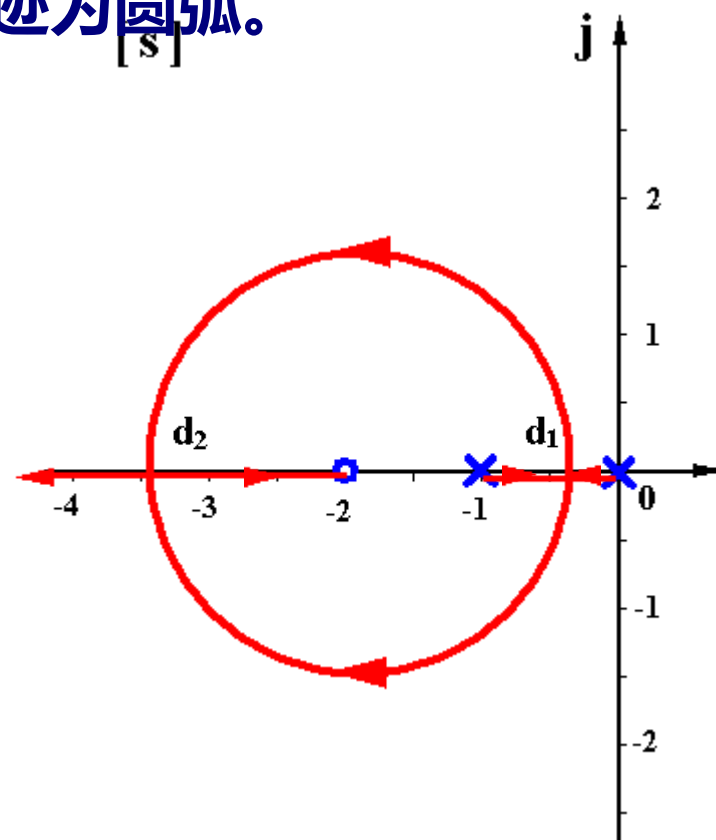
$$\sigma = \frac{-(1+K^*)}{2} \Rightarrow K^* = -2\sigma - 1$$

$$\omega^2 = \frac{8K^* - (1+K^*)^2}{4} = \frac{-8(2\sigma+1) - 4\sigma^2}{4} = -\sigma^2 - 4\sigma - 2$$

$$\sigma^2 + 4\sigma + 4 + \omega^2 = 2 \quad (\sigma + 2)^2 + \omega^2 = \sqrt{2}^2$$

$$\Delta = (1+K^*)^2 - 8K^* = K^{*2} - 6K^* + 1 = 0$$

$$\begin{cases} K_{d_1}^* = 0.1716 \\ K_{d_2}^* = 5.828 \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 = -0.586 \\ d_2 = -3.414 \end{cases}$$



还可以用相角条件证明

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$$

$$\angle(s+2) - \angle(s) - \angle(s+1) = (2k+1)\pi$$

$$\angle(s+2) - \angle(s+1) = (2k+1)\pi + \angle s$$

令 $\alpha = \angle(s+2) \quad \beta = \angle(s+1) \quad \gamma = \angle(s)$

$$\alpha - \beta = (2k+1)\pi + \gamma$$

对方程两边求正切

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \gamma$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \gamma$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega}{\sigma+2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega}{\sigma+1}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega}{\sigma}$$

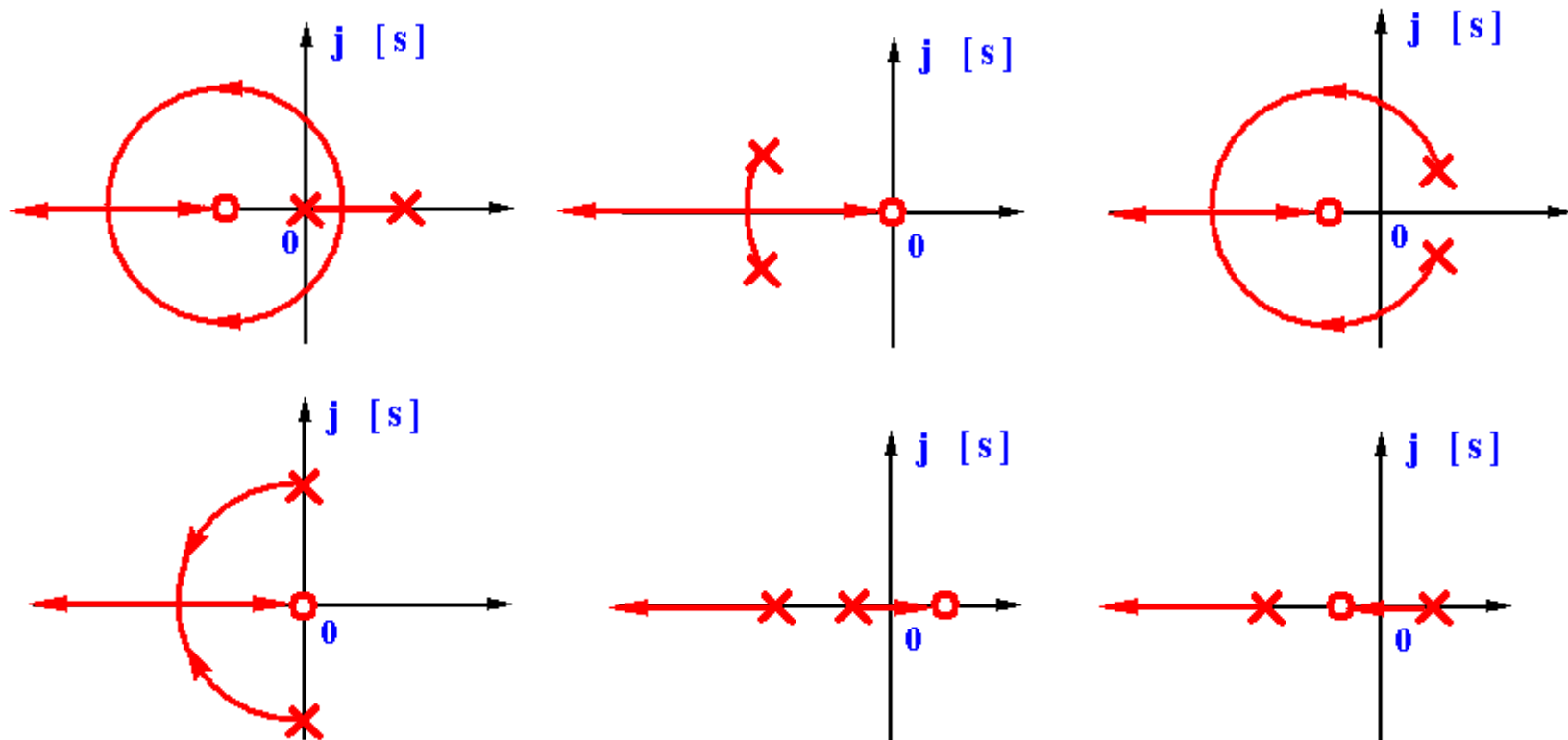
$$(\sigma+2)(\sigma+1) + \omega^2 = -\sigma$$

$$\sigma^2 + 4\sigma + \omega^2 + 2 = 0$$

$$(\sigma+2)^2 + \omega^2 = \sqrt{2}^2$$

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该**零点为圆心**的圆弧。



4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

例4 单位反馈系统的开环传递函数为
绘制根轨迹。

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

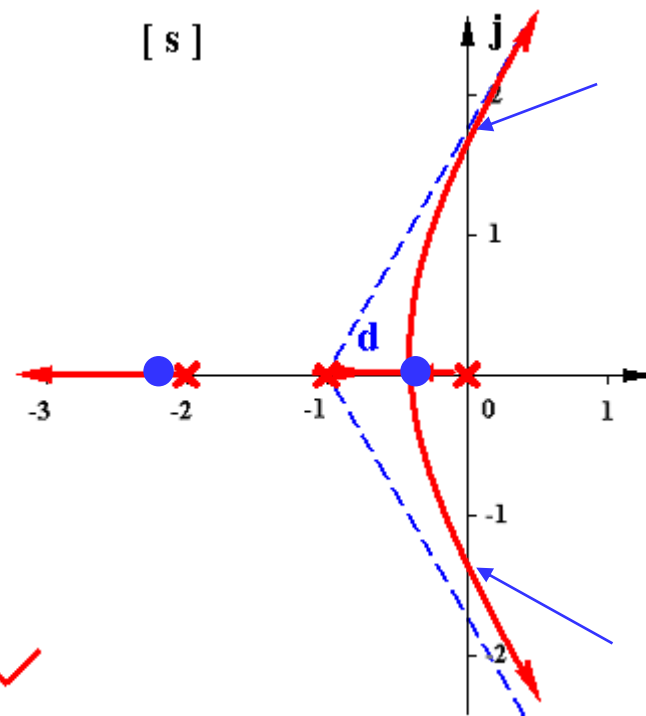
解 $G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)} \quad \begin{cases} K = K^*/2 \\ N = 1 \end{cases}$

实轴上的根轨迹: $[-\infty, -2], [-1, 0]$

渐近线: $\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$
 $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$

分离点: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0$

整理得: $3d^2 + 6d + 2 = 0 \quad \begin{cases} d_1 = -0.423 & \checkmark \\ d_2 = -1.577 & \times \end{cases}$



分离点表明有一对相等的实根, 对应的 K^* 为

$$K_d^* = |d||d+1||d+2|^{d=-0.423} = 0.385 \quad s_3 = -2.15$$

与虚轴交点: ?

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

规则6 与虚轴交点：

- 1) 系统临界稳定点
- 2) $s = j\omega$ 是根的点

上例

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + K^* = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$$

解法I：Routh 判据

s^3	1	2
s^2	3	K^*
s^1	$\frac{6-K^*}{3}$	
s^0	K^*	

系统稳定范围

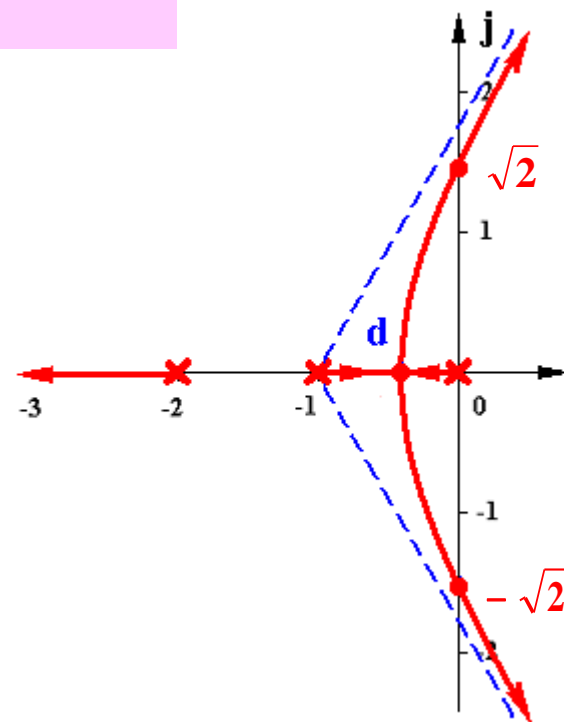
$$0 < K^* < 6$$

令

$$K^* = 6$$

$$3s^2 + K^* = 0$$

$$s = \pm \sqrt{2}j$$



为共轭虚根

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

- 1) 系统临界稳定点
- 2) 虚轴上的根是纯虚根 $s = j\omega$

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + K^* = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$$

解法II：

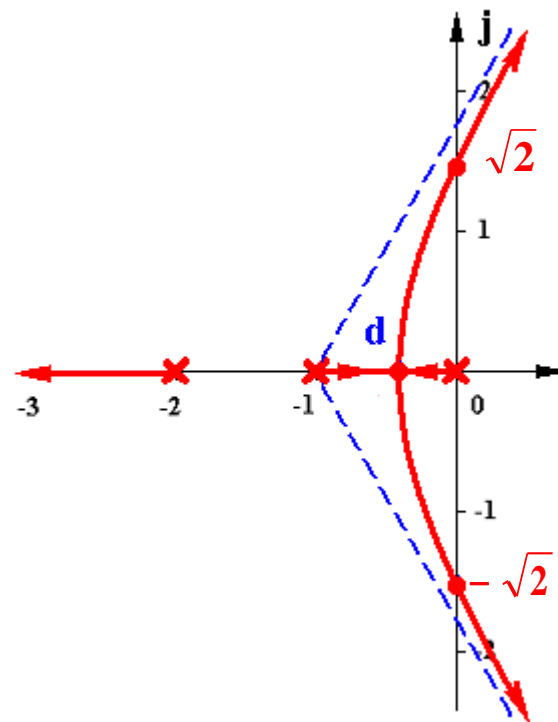
$$D(j\omega) = -j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K^* = 0$$

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = -3\omega^2 + K^* = 0$$

$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{2}$$

$$K^* = 6$$



4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

例5 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+1.5)(s+2+j)(s+2-j)}{s(s+2.5)(s+0.5+1.5j)(s+0.5-1.5j)}$$

绘制根轨迹。

解：n=4,m=3,4支根轨迹，其中一支

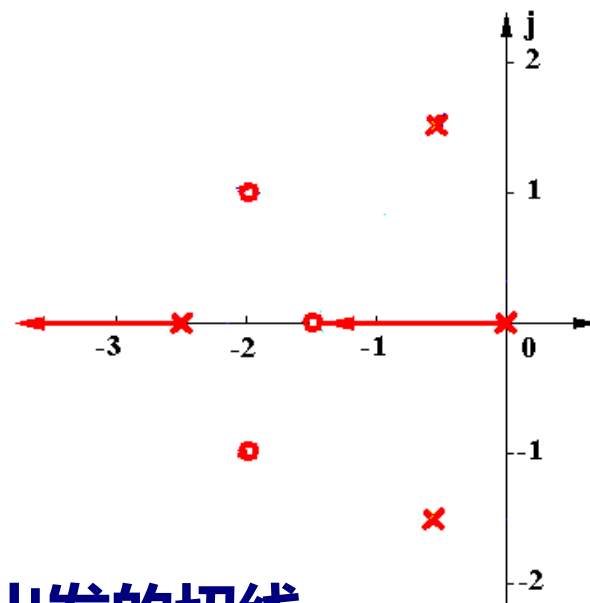
终止于无穷零点，渐近线：-180°

另外两支根轨迹起始于共轭极点，

终止于共轭零点。走势？

出射角（起始角）：根轨迹从开环复数极点出发的切线与正实轴间夹角称为出射角。用 θ_p 表示

入射角（终止角）：根轨迹进入开环复数零点的切线与正实轴间夹角称为入射角。用 θ_z 表示



4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

规则7 出射角 θ_p /入射角 θ_z (起始角/终止角)

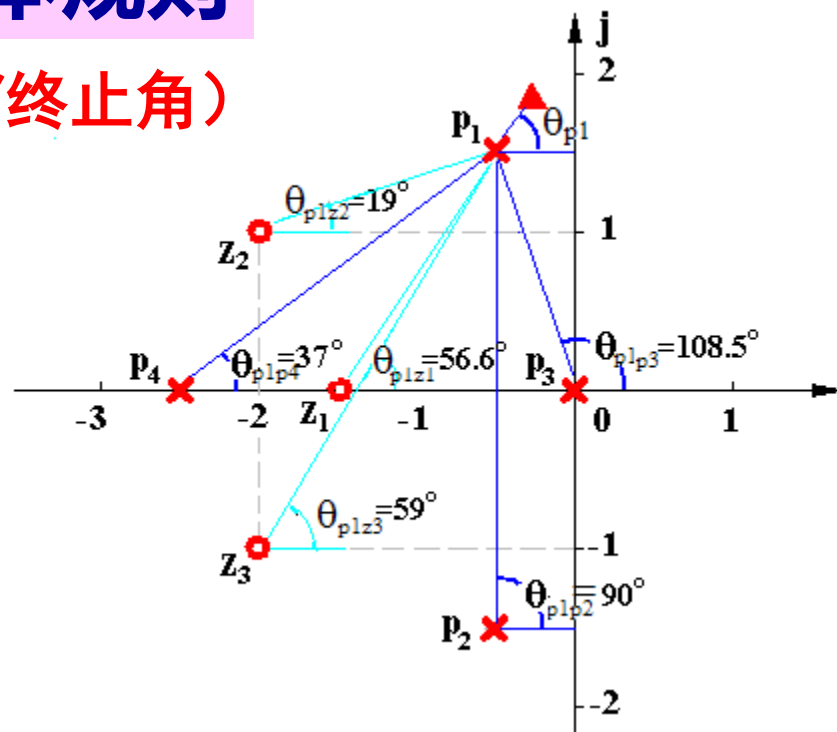
根据相角条件

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) - \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) = (2k + 1)\pi$$

$$\begin{aligned} & \angle(p_1 - p_1) + \angle(p_1 - p_2) + \angle(p_1 - p_3) + \angle(p_1 - p_4) \\ & - \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - z_2) - \angle(p_1 - z_3) \\ & = (2k + 1)180 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{p_1} &= (2k + 1)180^\circ + \angle(p_1 - z_1) + \angle(p_1 - z_2) + \angle(p_1 - z_3) \\ & - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3) - \angle(p_1 - p_4) \end{aligned}$$

$$\theta_{p_1} = 180^\circ + 56.5^\circ + 19^\circ + 59^\circ - [90^\circ + 108.5^\circ + 37^\circ] = 79^\circ$$



出射角 θ_p

$$\theta_{p_l} = (2k + 1)180^\circ + \sum_{i=1}^m \angle(p_l - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \angle(p_l - p_j)$$

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

出射角 θ_p

$$\theta_{pl} = (2k + 1)180^\circ + \sum_{i=1}^m \angle(p_l - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \angle(p_l - p_j)$$

根据关于实轴对称的原则

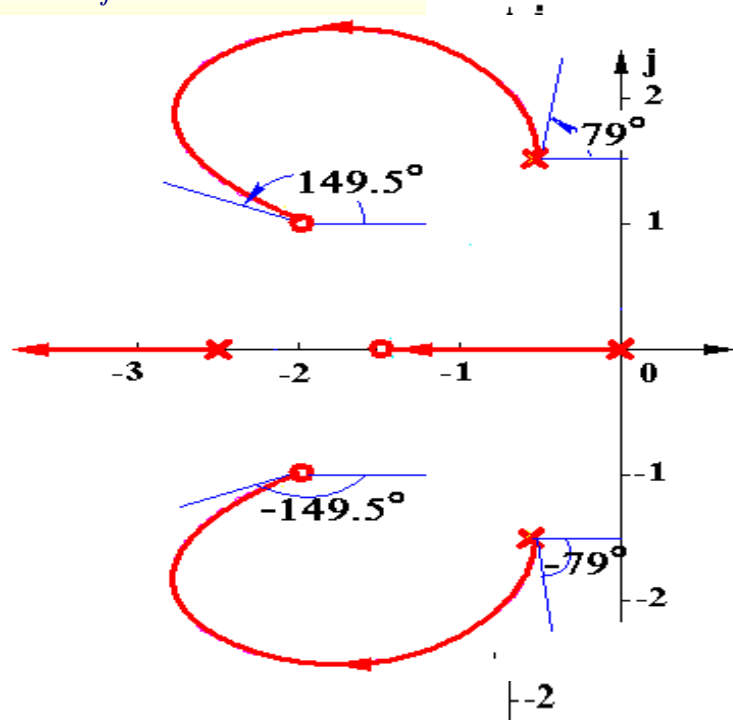
$$\theta_{p2} = -79^\circ$$

入射角 θ_z

$$\theta_{zl} = (2k + 1)180^\circ - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \angle(z_l - z_i) + \sum_{j=1}^n \angle(z_l - p_j)$$

$$\begin{aligned} \theta_{z1} &= (2k + 1)180^\circ - [117^\circ + 90^\circ] \\ &\quad + [199^\circ + 121^\circ + 153^\circ + 63.5^\circ] \\ &= 149.5^\circ \end{aligned}$$

$$\theta_{z2} = -149.5^\circ$$

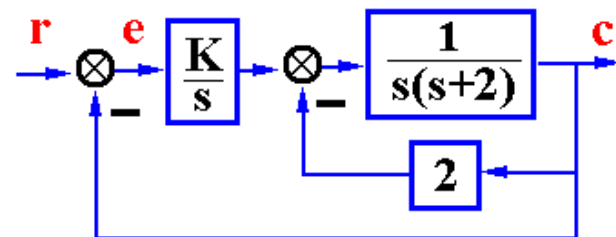


4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

例6 已知系统结构图，绘制根轨迹。

解.

$$G(s) = \frac{K}{s} \frac{1}{1 + \frac{2}{s(s+2)}} = \frac{K}{s[s^2 + 2s + 2]}$$



实轴上的根轨迹: $[-\infty, 0]$

渐近线: $\sigma_a = \frac{0-1-1}{3} = -\frac{2}{3}$

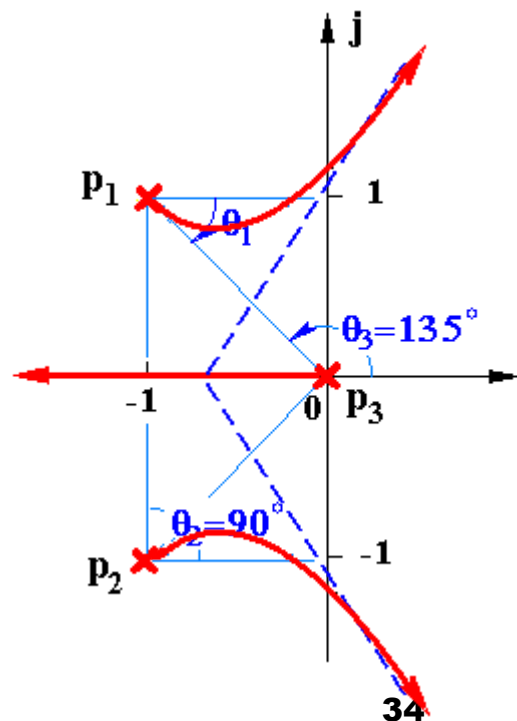
$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

出射角: $\theta_{p1} = 180^\circ - 90^\circ - 135^\circ = -45^\circ$

与虚轴交点: $D(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = -2\omega^2 + K = 0 \quad \omega = \pm\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \quad K = 4$$



绘制普通根轨迹 (180°) 法则小结

规则 1 根轨迹的分支数, 对称性和连续性

规则 2 根轨迹的起点和终点

规则 3 实轴上的根轨迹

规则 4 渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad \varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$

规则 5 分离点

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$$

没有零点时右边为0

分离角为

$$(2k + 1)\pi / l$$

规则 6 与虚轴交点

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = \operatorname{Im}[D(j\omega)] = 0$$

规则 7 出射角

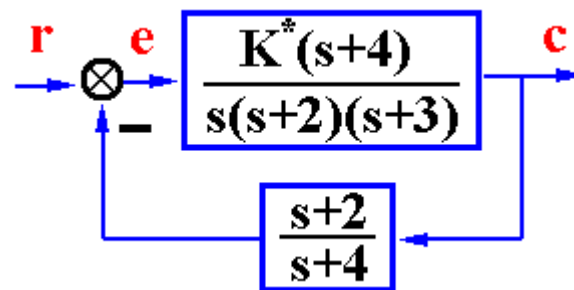
$$\theta_{pl} = (2k + 1)180^\circ + \sum_{i=1}^m \angle(p_l - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \angle(p_l - p_j)$$

入射角

$$\theta_{zl} = (2k + 1)180^\circ - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \angle(z_l - z_i) + \sum_{j=1}^n \angle(z_l - p_j)$$

4.2 绘制根普通轨迹的基本规则

例8 系统结构图如图所示,绘制当 $K^* = 0 \rightarrow \infty$ 时系统的根轨迹;



有零极点对消的时候，根轨迹如何画？

4.2 绘制普通根轨迹的基本规则

例7 已知 $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$ **绘根轨迹; 求稳定的K范围。**

解: $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s+2 \pm j2\sqrt{3})}$ $\begin{cases} K = K^*/16 \\ N = 1 \end{cases}$

实轴上的根轨迹: $(-\infty, -1], [0, 1]$

渐近线: $\sigma_a = (1 - 4 + 1)/3 = -2/3$ $\varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$

出射角:

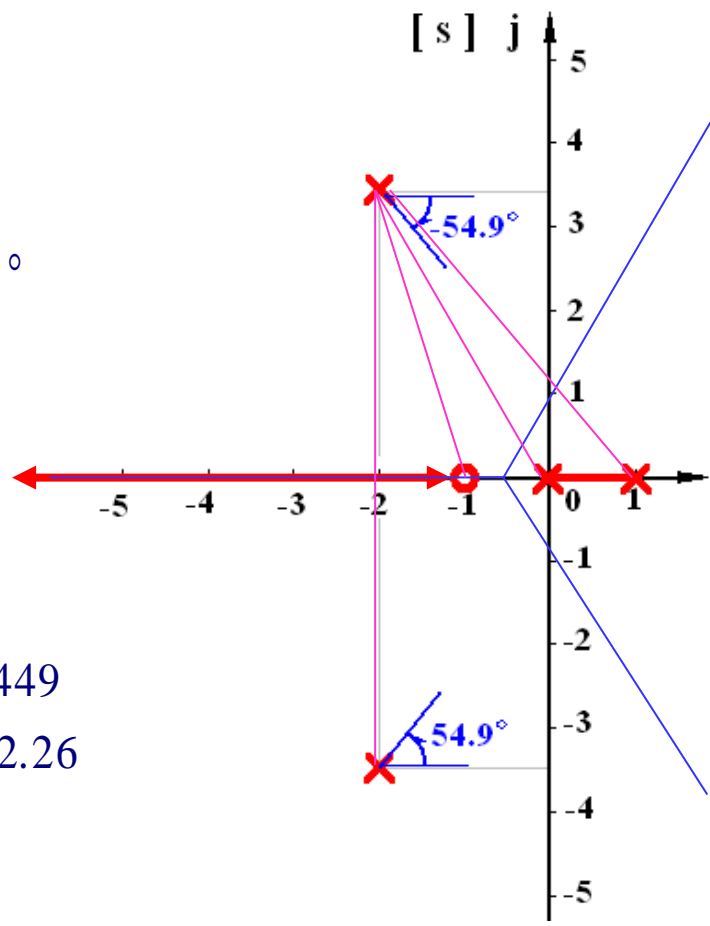
$$\theta_{p_1} = 180^\circ + 106.1^\circ - [+90^\circ + 120^\circ + 130.9^\circ] = -54.9^\circ$$

分离点: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d-1} + \frac{2(d+2)}{d^2+4d+16} = \frac{1}{d+1}$

$$3d^4 + 10d^3 + 21d^2 + 24d - 16 = 0$$

$$\begin{cases} d_1 = 0.449 \\ d_2 = -2.26 \end{cases}$$

$$K_{d_{1,2}}^* = \frac{|d||d-1||d^2+4d+16|}{|d+1|} \begin{cases} d=0.449 & \left\{ \begin{array}{l} 3.07 \\ 70.6 \end{array} \right. \end{cases}$$



4.2 绘制根普通轨迹的基本规则

$$G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0.449 \\ d_2 = -2.26 \end{cases} \quad K_{d_{1,2}}^* \stackrel{d=0.449}{=} \begin{cases} 3.07 \\ 70.6 \end{cases} \quad \begin{cases} K = K^*/16 \\ N = 1 \end{cases}$$

虚轴交点:

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K^* - 16)s + K^* = 0$$

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = \omega^4 - 12\omega^2 + K^* = 0$$

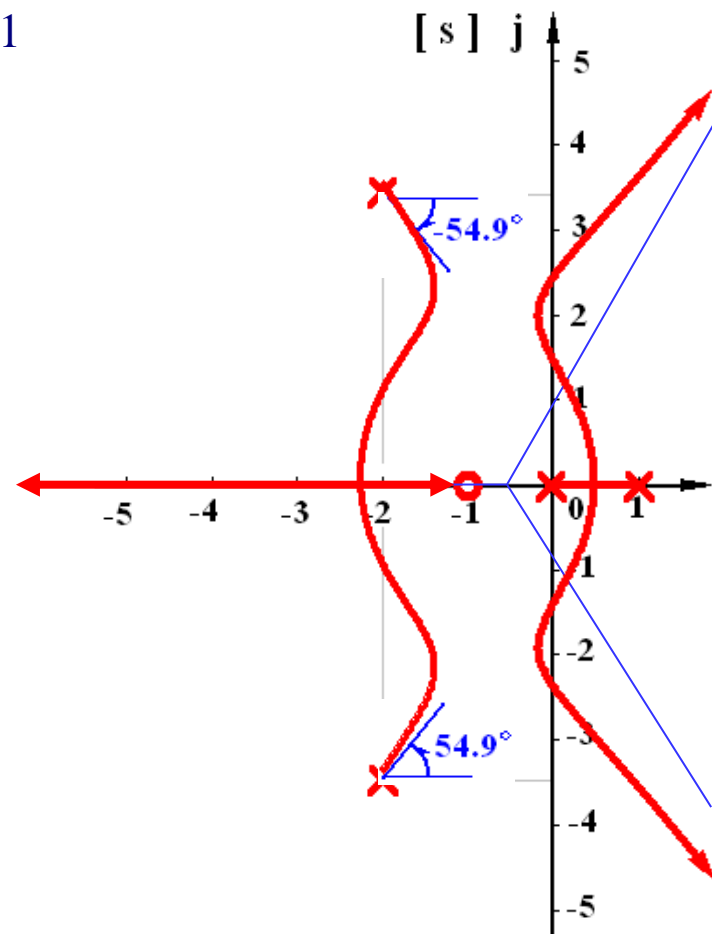
$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = -3\omega^3 + (K^* - 16)\omega = 0$$

$$K^* = 3\omega^2 + 16 \quad \omega^4 - 9\omega^2 + 16 = 0$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 1.56 \\ \omega_2 = 2.56 \end{cases} \quad \begin{cases} K_1^* = 19.7 \\ K_2^* = 35.7 \end{cases}$$

稳定的 K^* 范围: $19.7 < K^* < 35.7$

稳定的 K 范围: $1.234 < K = \frac{K^*}{16} < 2.23$



4.2 绘制根普通轨迹的基本规则

此系统有一个右半平面的开环极点

最小相位系统：所有的开环零极点都在左半平面

非最小相位系统：在右半平面有开环零点或开环极点

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

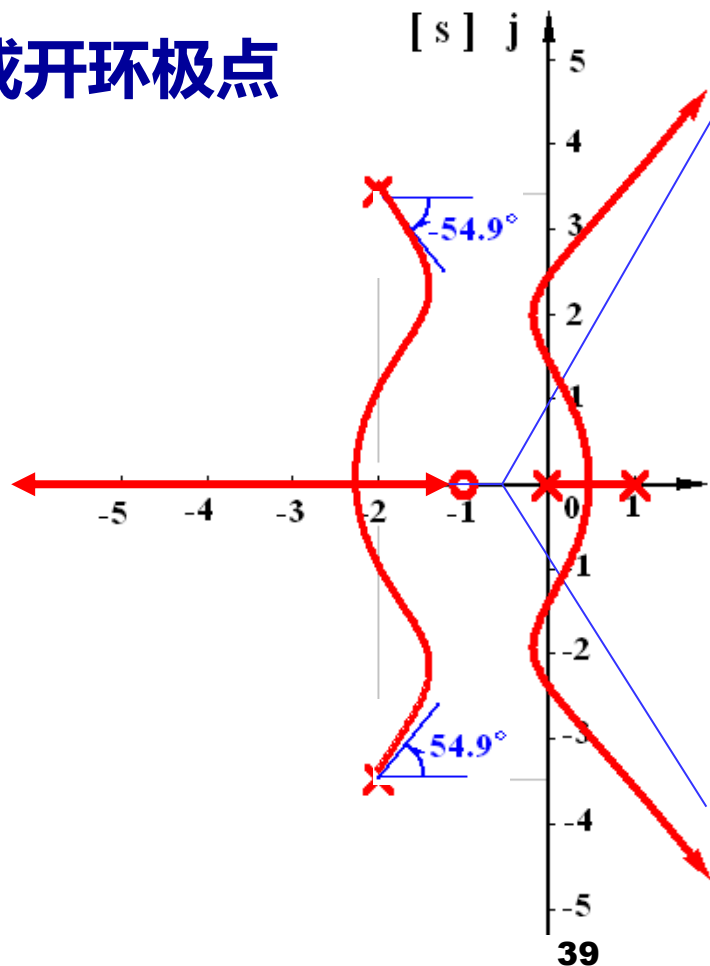
对于此例绘制根轨迹的法则没有变化。

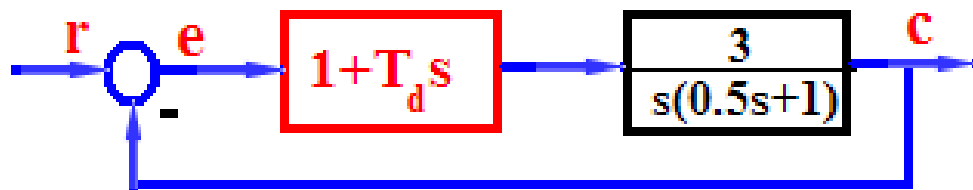
但是下例

$$G(s)H(s) = \frac{K(1-\tau s)}{s(1+Ts)} \quad (\tau > 0, T > 0)$$

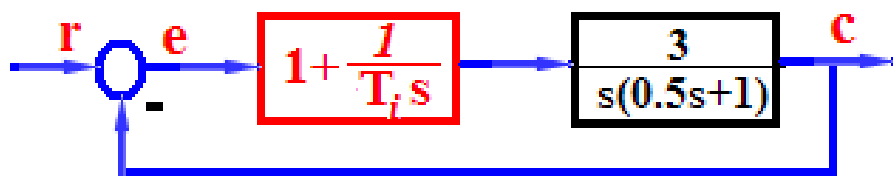
$$G(s)H(s) = -\frac{K(\tau s - 1)}{s(1+Ts)} \quad (\tau > 0, T > 0)$$

系统相当于变为**正反馈**





$$G(s)H(s) = \frac{3(T_d s + 1)}{s(0.5s + 1)}$$



$$G(s)H(s) = \frac{3(T_i s + 1)}{s^2(0.5s + 1)}$$

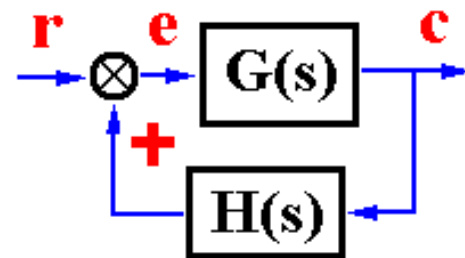
需要关注闭环特征根随 T_d 或 T_i 变化的轨迹



4.3 广义根轨迹

- ◆ 正反馈系统的根轨迹绘制
- ◆ 其他参数（非 K^* ）根轨迹绘制

4.3 广义根轨迹



一、正反馈时的根轨迹

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s) = 1$$

根轨迹方程

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = + 1$$

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* |s - z_1| \cdots |s - z_m|}{|s - p_1| |s - p_2| \cdots |s - p_n|} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = 1$$

—幅值条件

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = 2k\pi$$

— 相角条件

正反馈根轨迹又称零度根轨迹

4.3 广义根轨迹

绘制180度根轨迹的基本法则

规则 1 轨迹的支数对称性连续性

规则 2 根轨迹的起点和终点

规则 3 实轴上的根轨迹

根轨迹右侧开环零极点数为偶数

规则 4 渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad \varphi_a = \frac{2k\pi}{n - m}$$

规则 5 分离点

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$$

规则 6 与虚轴交点

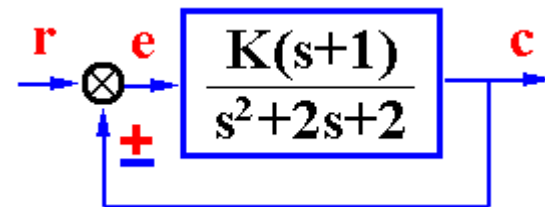
$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = \operatorname{Im}[D(j\omega)] = 0$$

规则 7 出射角/入射角

$$\theta_p = 2k\pi \pm \left[\sum_{i=1}^m \angle(s_l - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s_l - p_j) \right]$$

4.3 广义根轨迹

例8 系统结构图如图所示, $K^* = 0 \rightarrow \infty$, 变化, 试分别绘制 0° 、 180° 根轨迹。



解. $G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2+2s+2} = \frac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)}$ $\begin{cases} K_k = K/2 \\ N = 0 \end{cases}$

(1) 180° 根轨迹 (兰)

(2) 0° 根轨迹 (紫红)

实轴轨迹: $[-\infty, -1]$

$[-1, \infty]$

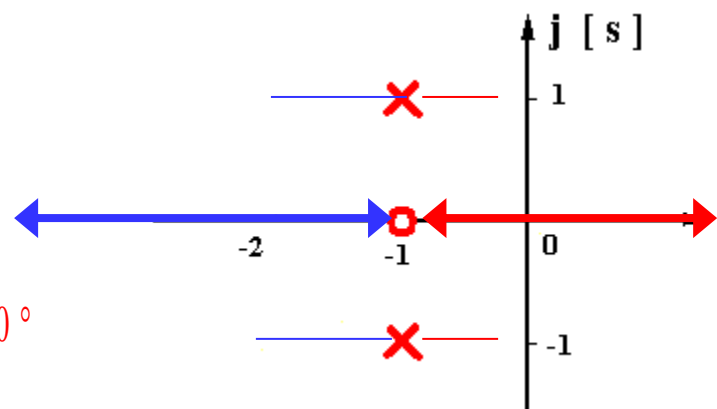
渐近线夹角: 180°

0°

出射角:

$$\theta = 180^\circ - 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\theta = 360^\circ - 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$



4.3 广义根轨迹

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + 2s + 2} = \frac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$\begin{cases} K_k = K/2 \\ N = 0 \end{cases}$$

分离点

$$\frac{1}{d+1+j} + \frac{1}{d+1-j} = \frac{2(d+1)}{d^2+2d+2} = \frac{1}{d+1}$$

$$d^2 + 2d = d(d+2) = 0$$

整理得：

$$d_1 = -2$$

$$d_2 = 0$$

$$K_{d_1} = \frac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|} \stackrel{d=-2}{=} 2 \quad K_{d_2} = \frac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|} \stackrel{d=0}{=} 2$$

与虚轴交点

$$D(s) = s^2 + (2+K)s + 2+K$$

$$2+K=0$$

$$\omega = 2+K$$

无解

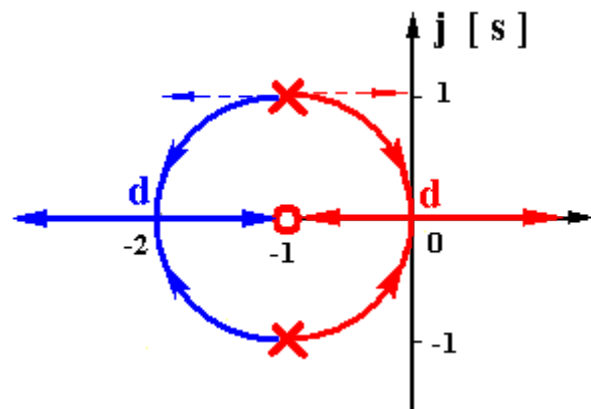
$$D(s) = s^2 + (2-K)s + 2-K$$

$$2-K=0$$

$$\omega = 2-K$$

$$K=2$$

$$\omega = 0$$



4.3 广义根轨迹

例9 系统开环传递函数, $G(s)H(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$

分别绘制 0° 、 180° 根轨迹。

解. (1) 绘制 180° 根轨迹

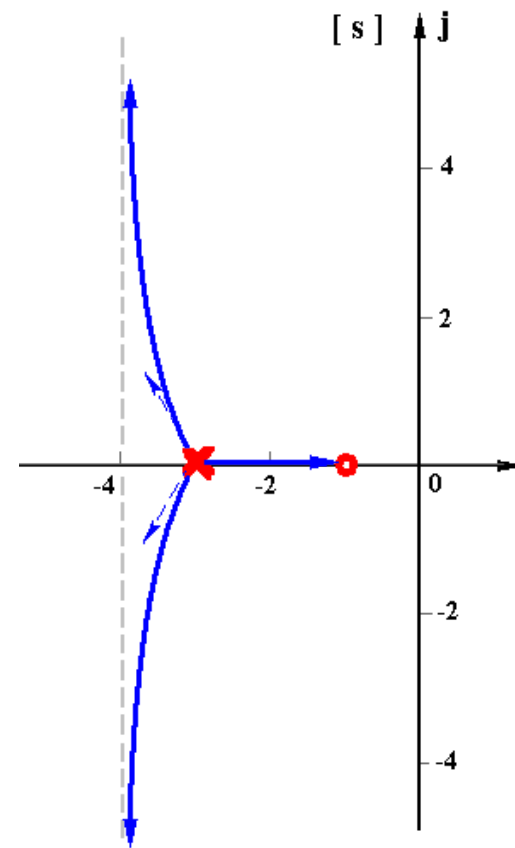
实轴上的根轨迹: $[-3, -1]$

渐近线: $\sigma_a = \frac{-3 \times 3 + 1}{2} = -4$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ$$

出射角: $180^\circ - 3\theta = (2k+1)\pi$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{2k\pi}{3} = 0^\circ, \pm 120^\circ$$



4.3 广义根轨迹

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$$

(2) 绘制 0° 根轨迹

实轴轨迹: $[-\infty, -3], [-1, -\infty]$

渐近线: $\sigma_a = (-3 \times 3 + 1)/2 = -4$

$$\varphi_a = 2k\pi/2 = 0^\circ, 180^\circ$$

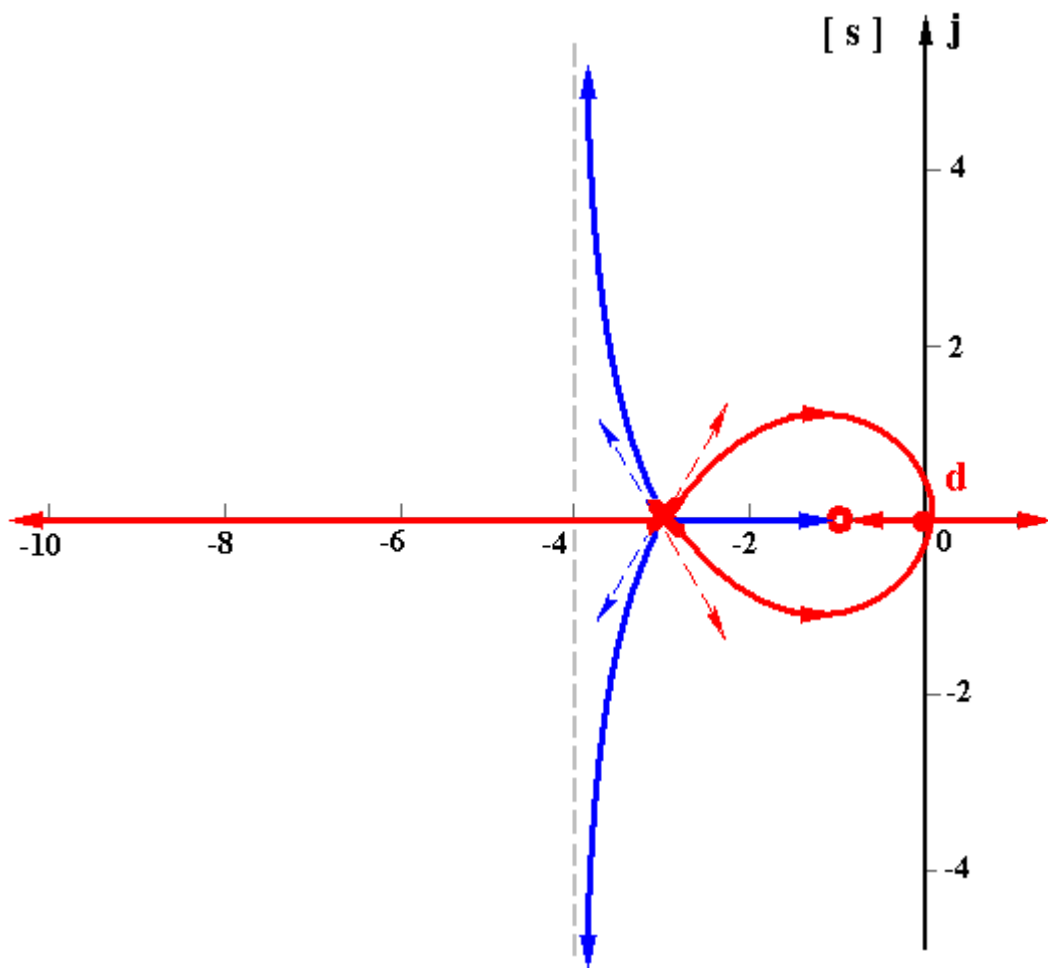
分离点: $\frac{3}{d+3} = \frac{1}{d+1}$

整理得: $3d + 3 = d + 3 \quad d = 0$

$$K_d^* = |d+3|^3 / |d+1| \stackrel{d=0}{=} 27$$

出射角: $180^\circ - 3\theta = 2k\pi$

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$



4.3 广义根轨迹

绘制 0° 根轨迹的几种情况:

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

- ◆ 要求绘制 $K=0 \rightarrow \infty$ 时最小相位系统的正反馈根轨迹
- ◆ 要求绘制 $K=-\infty \rightarrow 0$ 时最小相位系统的根轨迹
- ◆ 具有下列形式的非最小相位系统 $K=0 \rightarrow \infty$

$$G(s)H(s) = \frac{K(1 - \tau s)}{s(1 + Ts)} \quad (\tau > 0, T > 0)$$

$$G(s)H(s) = \frac{-K(\tau s - 1)}{s(1 + Ts)} \quad (\tau > 0, T > 0)$$

4.3 广义根轨迹

二、参数根轨迹 — 除 K^* 之外其他参数变化时系统的根轨迹

例10 单位反馈的系统开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$

$a=0 \rightarrow \infty$ 变化, 绘制根轨迹

解:

$$D(s) = s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}a = 0$$

$$\Rightarrow D(s) = \left(s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s \right) + \frac{1}{4}a = 0$$

构造 “等效开环传递函数”

$$D(s) = 1 + GH(s) = 1 + GH^*(s) = 0$$

$$GH(s) = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$GH^*(s) = a \frac{\prod_{i=1}^m (s - z'_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p'_j)}$$

$$1 + \frac{\frac{1}{4}a}{\left(s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s \right)} = 0$$

$$GH^*(s) = \frac{a/4}{s^3 + s^2 + s/4} = \frac{a/4}{s(s+0.5)^2}$$

等效根轨迹增益是 $a^* = \frac{a}{4}$

4.3 广义根轨迹

$$GH^*(s) = \frac{a/4}{s^3 + s^2 + s/4} = \frac{a/4}{s(s + 0.5)^2}$$

渐近线: $\sigma_a = -1/3$ $\varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$

分离点: $\frac{1}{d} + \frac{2}{d + 0.5} = 0 \Rightarrow d = -1/6$

$$a_d = 4|d||d + 0.5|^2 = 2/27$$

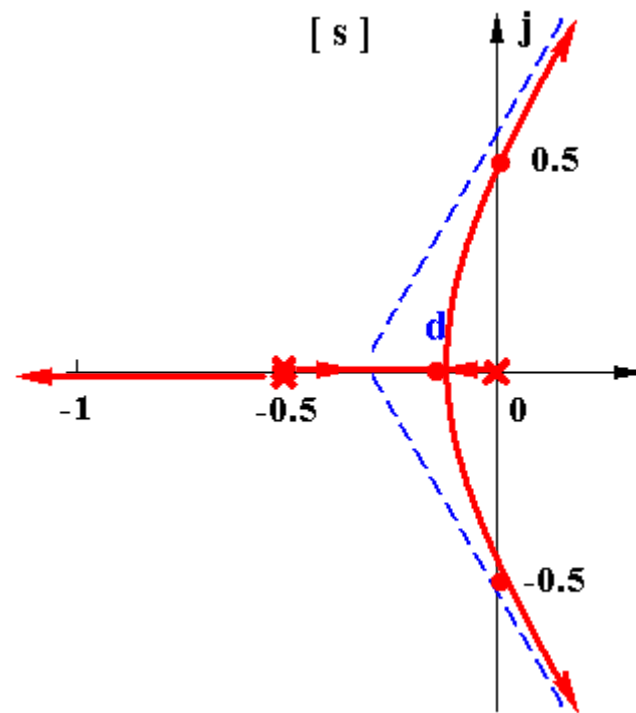
与虚轴交点: $D(s) = s^3 + s^2 + s/4 + a/4 = 0$

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + a/4 = 0$$

$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + \omega/4 = 0$$

$$\omega = 1/2$$

$$a = 1$$



4.3 广义根轨迹

绘制参数根轨迹的方法可归纳为下述两个步骤：

- (1) 先根据系统的特征方程 $1+GH(s)=0$ ，求出系统的等效开环传递函数 $GH^*(s)$ ，使 $GH^*(s)$ 与绘制普通根轨迹的开环传递函数有相同的形式，即

$$GH^*(s) = a \frac{\prod_{i=1}^m (s - z'_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p'_j)} \qquad 1 + GH^*(s) = 1 + GH(s)$$

(注：此处 a 为讨论的除 K^* 之外的其他可变参数)

- (2) 根据绘制普通根轨迹的七条基本规则和等效开环传递函数绘制出系统的参数根轨迹。

4.3 广义根轨迹

例11 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$

$T=0 \rightarrow \infty$, 绘制根轨迹。

解 $D(s) = Ts^3 + s^2 + 615s + 15990 = 0$

$$G^*(s) = \frac{Ts^3}{s^2 + 615s + 15990} = \frac{Ts^3}{(s+27.2)(s+587.7)}$$

变换后可能出现 $n' < m'$

产生 $m-n$ 条根轨迹来自于无穷远
分离点:

$$d = -1190 \quad T_d = 0.00055$$

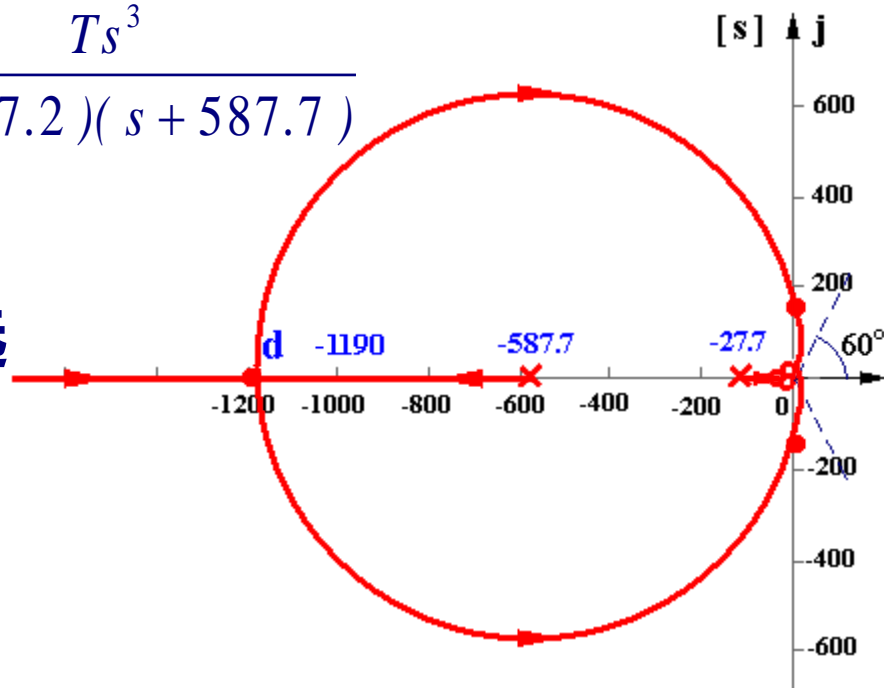
$$\omega = 126.45$$

虚轴交点:

$$T = 0.0358$$

入射角:

$$\theta = \pm 60^\circ, 180^\circ$$



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

- ◆ 利用根轨迹法分析估算系统性能(定量分析)
- ◆ 分析新增开环零极点对系统稳定性的影响（定性分析）
- ◆ 利用根轨迹进行系统设计

4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

利用根轨迹法分析系统性能的基本步骤

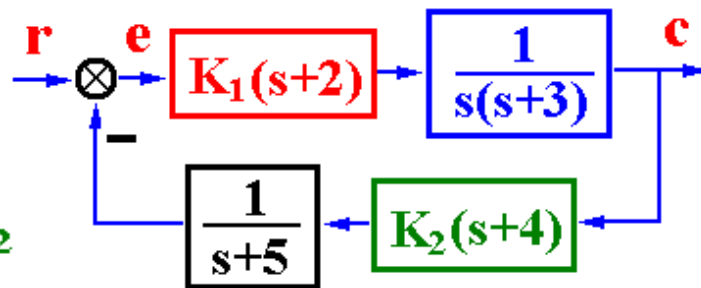
- (1) 绘制系统根轨迹;
- (2) 依题意确定闭环极点位置;
- (3) 确定闭环零点;
- (4) 保留主导极点, 利用零点极点法估算系统性能

4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

闭环零、极点与开环零、极点之间的关系

系统结构图如图所示，确定闭环零点

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 (s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)} \quad \begin{cases} K^* = K_1 K_2 \\ K = \frac{8}{15} K_1 K_2 \\ N = 1 \end{cases}$$



$$G_B(s) = \frac{\frac{K_1(s+2)}{s(s+3)}}{1 + \frac{K_1 K_2 (s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)}} = \frac{K_1(s+2)(s+5)}{s(s+3)(s+5) + K_1 K_2 (s+2)(s+4)}$$

闭环零点 = 前向通道零点 + 反馈通道极点

单位反馈时闭环零点就是开环零点

闭环极点与开环零点、开环极点及 K^* 均有关

4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

例13 已知系统结构图, $K^* = 0 \rightarrow \infty$, 绘制系统根轨迹并确定:

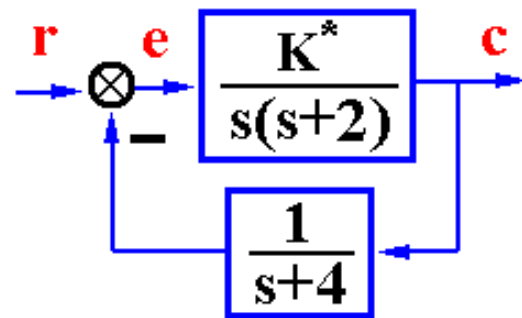
- (1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围;
- (2) 复极点对应 $\zeta=0.5$ ($\beta=60^\circ$) 时的 K 值及闭环极点位置;
- (3) 当 $\lambda_3=-5$ 时, $\lambda_{1,2}=?$ 相应 $K=?$
- (4) 当 $K^*=4$ 时, 求 $\lambda_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标 ($\sigma\%, t_s$)。

解:

$$GH(s) = \frac{K^*}{s(s+2)(s+4)} \quad \begin{cases} K = K^*/8 \\ N = 1 \end{cases}$$

绘制系统根轨迹

实轴上的根轨迹: $[-\infty, -4], [-2, 0]$



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

$$GH(s) = \frac{K^*}{s(s+2)(s+4)} \quad \begin{cases} K = K^*/8 \\ N = 1 \end{cases}$$

渐近线: $\sigma_a = (-2 - 4)/3 = -2$

$$\varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

分离点: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+4} = 0$

整理得: $d_1 = -0.845$; ✓ $d_2 = -3.155$ ✗

$$K_d^* = |d||d+2||d+4|^{d=-0.845} = 3.08$$

虚轴交点:

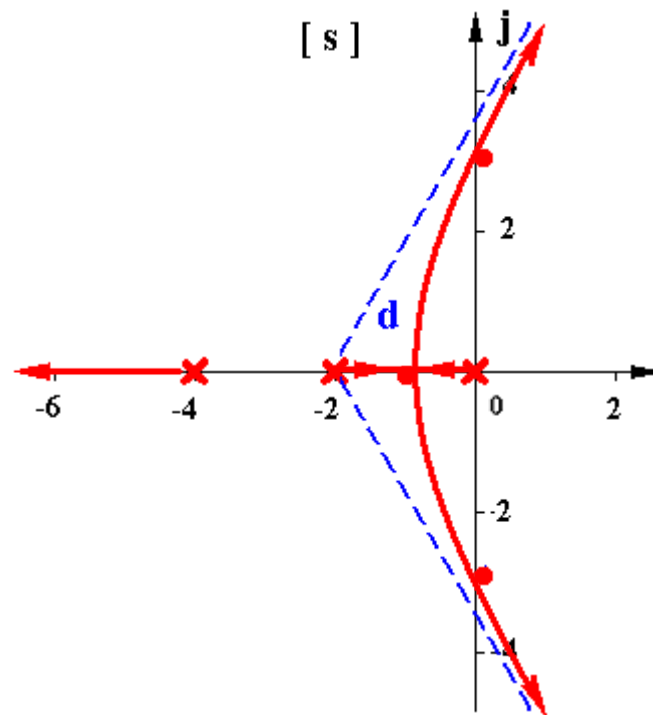
$$D(s) = s(s+2)(s+4) + K^* = s^3 + 6s^2 + 8s + K^* = 0$$

$$\text{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 8\omega = 0$$

$$\omega = \sqrt{8} = 2.828$$

$$\text{Re}[D(j\omega)] = -6\omega^2 + K^* = 0$$

$$K_\omega^* = 48$$



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

$$d_1 = -0.845; \quad K_d^* = 3.08 \quad K_\omega^* = 48 \quad \begin{cases} K = K^*/8 \\ N = 1 \end{cases}$$

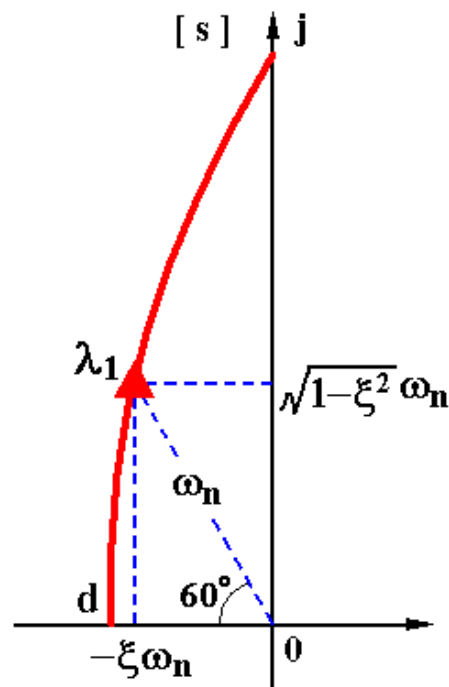
(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围

$$0 < \zeta < 1 \quad 3.08 < K^* < 48$$

$$\frac{3.08}{8} < K = \frac{K^*}{8} < \frac{48}{8} = 6$$

(2) 复极点对应 $\zeta=0.5$ ($\beta=60^\circ$) 时的 K 值及闭环极点位置

设 $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$



由根之和 $C = 0 - 2 - 4 = -6 = -2\zeta\omega_n + \lambda_3$

有: $\lambda_3 = -6 + 2\zeta\omega_n \stackrel{\zeta=0.5}{=} -6 + \omega_n$

$$GH(s) = \frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$$

4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad \lambda_3 = -6 + 2\zeta\omega_n \quad \zeta=0.5$$

$$D(s) = s(s+2)(s+4) + K^* = s^3 + 6s^2 + 8s + K^*$$

$$= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + 6 - \omega_n)$$

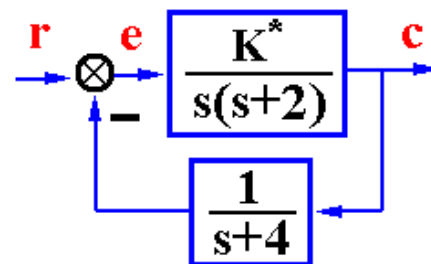
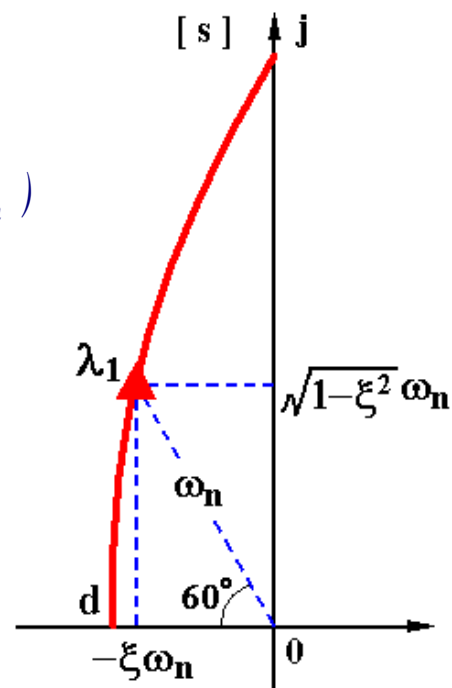
$$= s^3 + 6s^2 + 6\omega_n s + \omega_n^2(6 - \omega_n)$$

待定系数

$$\begin{cases} 6\omega_n = 8 \\ \omega_n^2(6 - \omega_n) = K^* \end{cases}$$

解根： $\begin{cases} \omega_n = 4/3 \\ K^* = 8.3 \end{cases}$

$$\begin{cases} K = K^*/8 = 1.0375 \\ \lambda_{1,2} = -0.667 \pm j1.1547 \\ \lambda_3 = -6 + \omega_n = -4.667 \end{cases}$$



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

(3) 当 $\lambda_3 = -5$ 时, $\lambda_{1,2} = ?$ 相应 $K = ?$

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + K^*$$

$$= (s + 5)(s^2 + s + 3)$$

$$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j1.6583$$

$$K^* = 15$$

$$K = K^* / 8 = 15 / 8 = 1.875$$

(4) 当 $K^* = 4$ 时, 求 $\lambda_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标

($\sigma\%$, t_s)

令

$$K^* = |\lambda_3| |\lambda_3 + 2| |\lambda_3 + 4| = 4$$

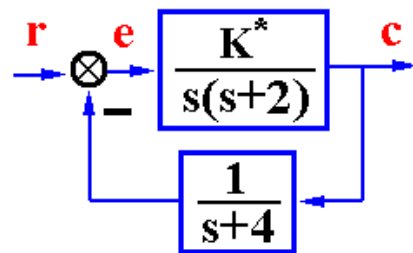
$$\lambda_3 = -4.383$$

试根

$$\frac{D(s)}{s + 4.383} = \frac{s^3 + 6s^2 + 8s + K^*}{s + 4.383}$$

$$= s^2 + 1.617s + 0.9127$$

解根: $\begin{cases} \lambda_{1,2} = -0.808 \pm j0.509 \\ \lambda_3 = -4.383 \end{cases}$

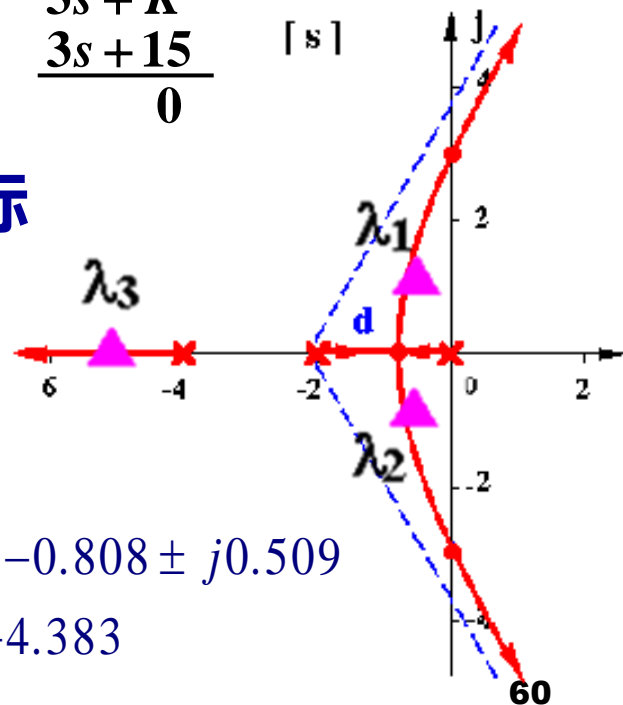


$$s + 5 \sqrt{\frac{s^2 + s + 3}{s^3 + 6s^2 + 8s + K^*}}$$

$$\frac{s^2 + 8s}{s^2 + 5s}$$

$$\frac{3s + K^*}{3s + 15}$$

$$K^* = 15 \Leftarrow \frac{3s + 15}{0}$$



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

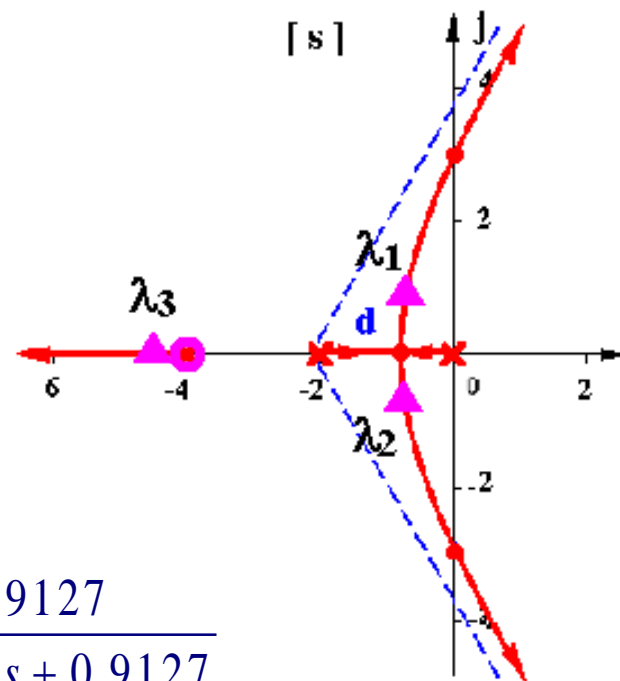
(4) 当 $K^*=4$ 时, 求 $\lambda_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标
($\sigma\%, t_s$)

视 $\lambda_{1,2}$ 为主导极点

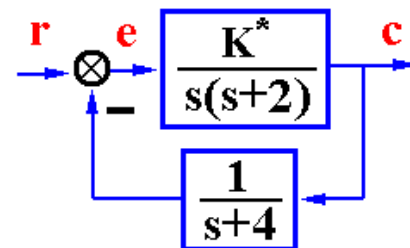
$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -0.808 \pm j0.509 \\ \lambda_3 = -4.383 \\ z = -4 \end{cases}$$

$$G_B(s) = \frac{\frac{K^*}{s(s+2)}}{1 + \frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}} = \frac{K^*(s+4)}{s(s+2)(s+4) + K^*}$$

$$= \frac{4(s+4)}{(s+4.383)[s^2 + 1.617s + 0.9127]} = \frac{4 \times 0.9127}{s^2 + 1.617s + 0.9127}$$



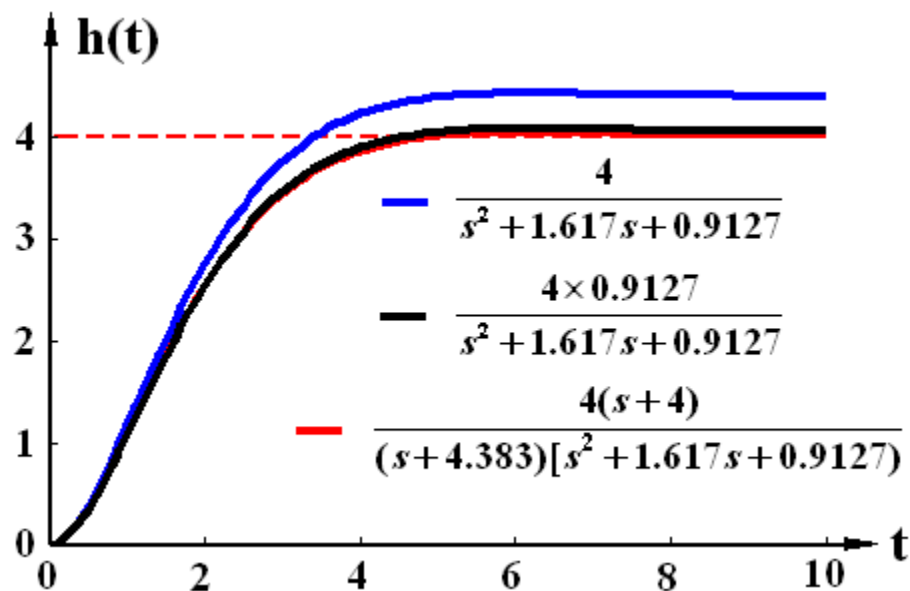
$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{0.9127} = 0.955 \\ \zeta = 1.617 / (2 \times 0.955) = 0.8463 \end{cases}$$



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

$$\begin{aligned} K^* &= 4 \\ &= \frac{K^* (s + 4)}{(s + 4.383)(s + 0.808 \pm j0.509)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma \% = e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.689 \% \\ t_s = 3/\xi \omega_n = 3/0.808 = 3.71s \end{cases}$$



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

◆ 由根轨迹在 s 平面上的分布情况分析系统的动态性和稳定性。

有3种情况：实根、共轭复数根和不稳定根。可为分析和设计系统的稳定性提供选择合适参数的依据。

◆ 根据对系统的要求，分析系统的瞬态响应指标。

对于低阶系统，容易在根轨迹上确定对应参数的闭环极点；

三阶以上的高阶系统，通常用简单的作图法（如作等阻尼比线等），求出系统的主导极点（如果存在），将高阶系统近似成由主导极点（通常是一对共轭复数极点）构成的二阶系统。

满足主导极点条件时，分析误差很小。

若不满足主导极点的条件，须进一步考虑相关闭环零、极点对系统瞬态响应性能指标的影响。

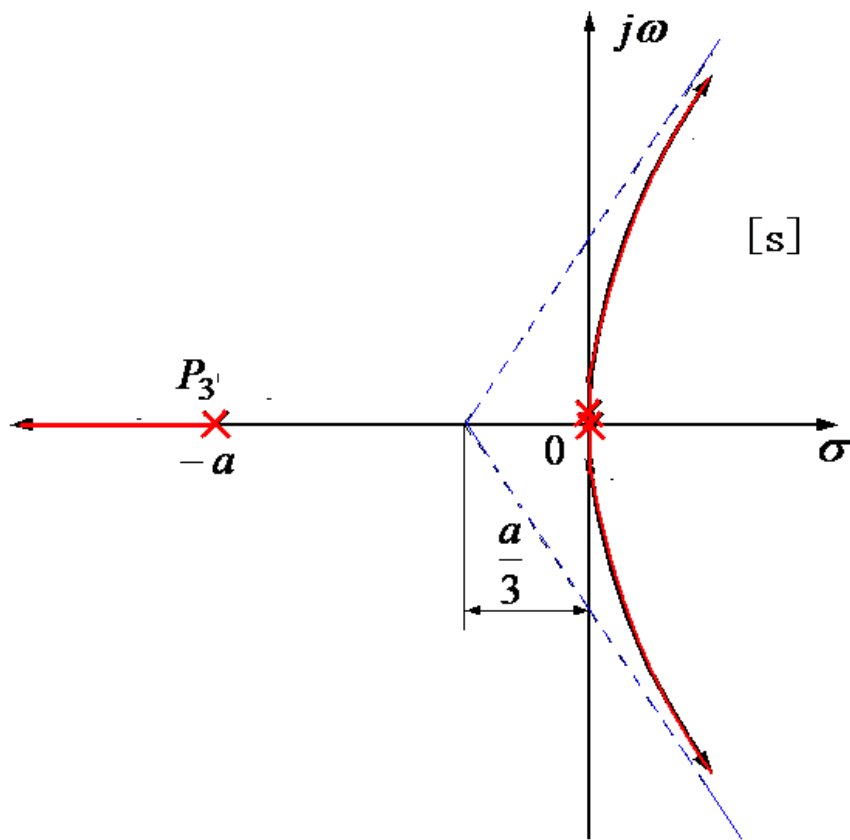
4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

例14 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s^2(s+a)}, \quad a > 0$$

- 1) 试用根轨迹法分析系统的稳定性。
- 2) 如果给该系统增加一个开环零点，试分析附加开环零点对根轨迹的影响。

解 (1) 原系统的根轨迹如图所示。
由于根轨迹的两条分支全部位于s平面的右半部，故该系统无论 K^* 为何值系统都是不稳定的。



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

(2)若给原系统增加一个负开环实零点 $z=-b$ ($b > 0$) , 则开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+b)}{s^2(s+a)}$$

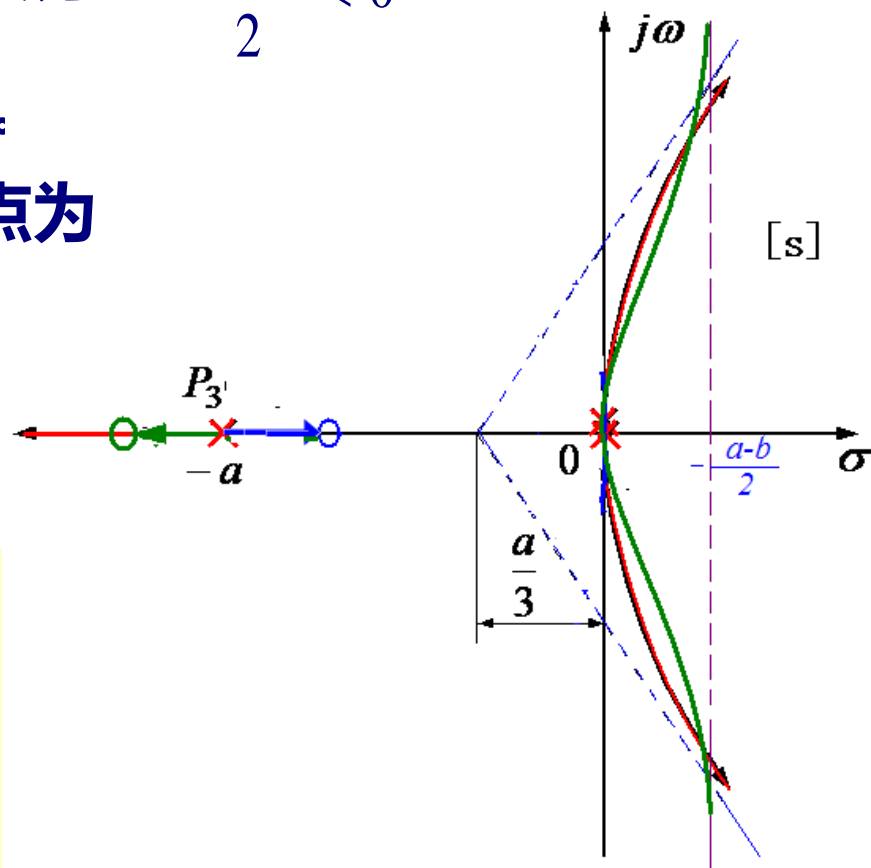
当 $b < a$ 根轨迹渐近线与实轴的交点为 $-\frac{a-b}{2} < 0$

系统无论 K^* 为何值系统都是稳定的。

当 $b > a$ 根轨迹渐近线与实轴的交点为 $-\frac{a-b}{2} > 0$

系统无论 K^* 为何值系统都是不稳定的

说明：开环零点对根轨迹有“向左”的拉力，零点越靠近虚轴拉力越大，可以改善系统的稳定性



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

例15 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s^2 + 2s + 2)(s + a)}, \quad a > 0$$

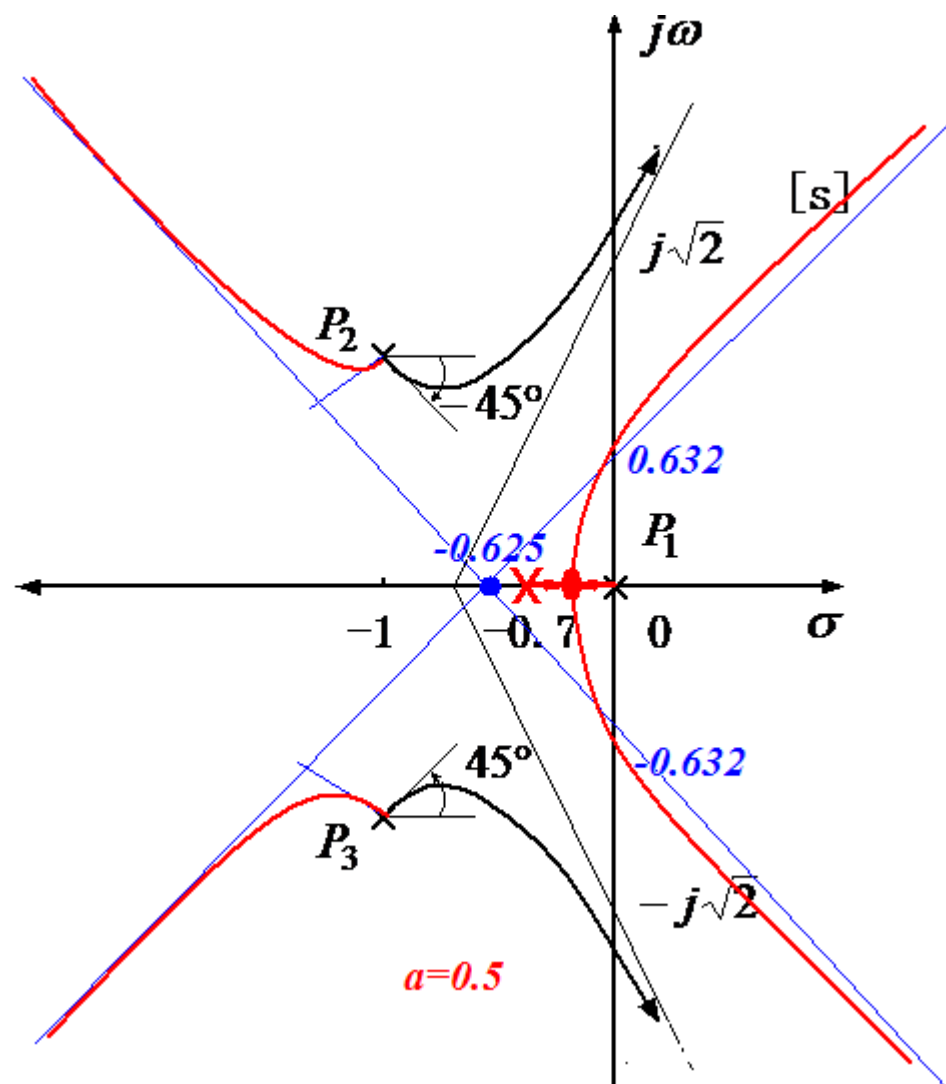
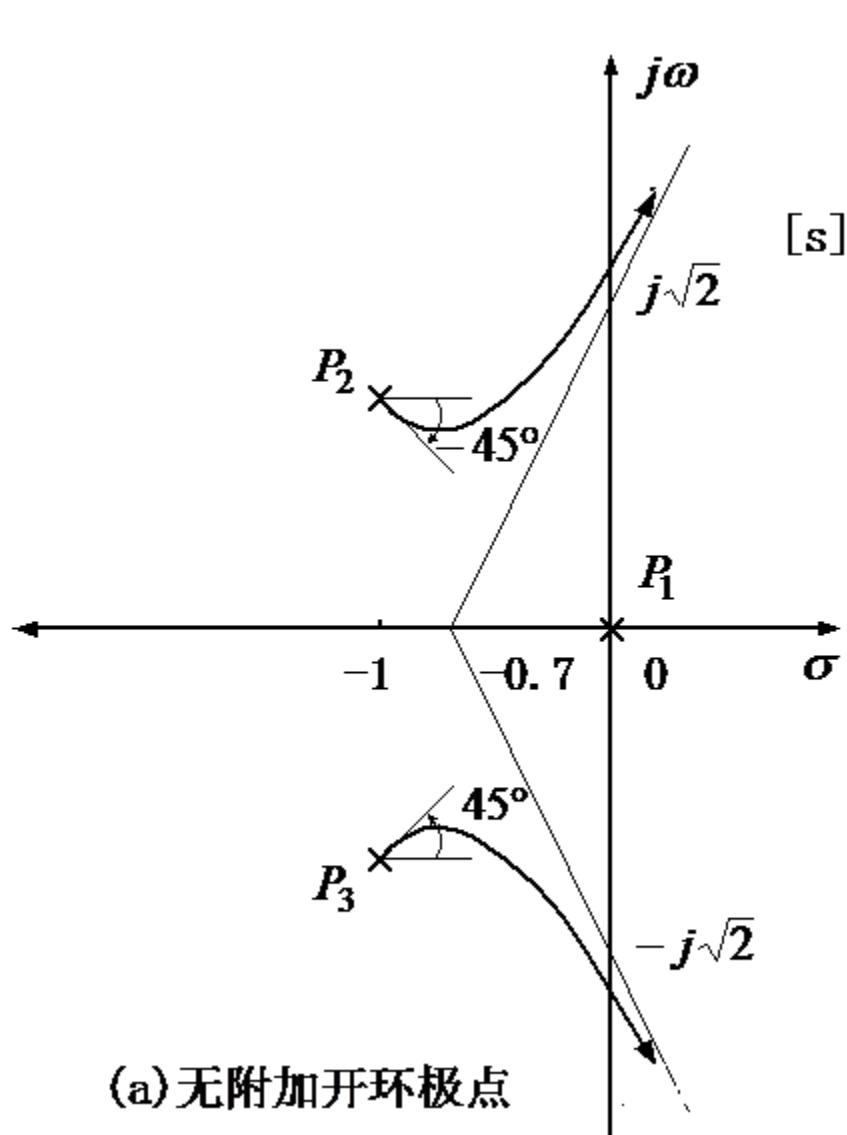
其中 $p_4 = -a$ 为附加开环极点，试分别绘制原系统（无附加开环极点）和 $a=0.5$ 、 $a=2$ 和 $a=6$ 时系统的根轨迹图。

解： 根据系统的开环传递函数和绘制根轨迹的基本规则，将无附加开环极点的原系统和不同附加开环极点（不同 a 值）所对应的根轨迹的有关数据的计算结果列入下表中

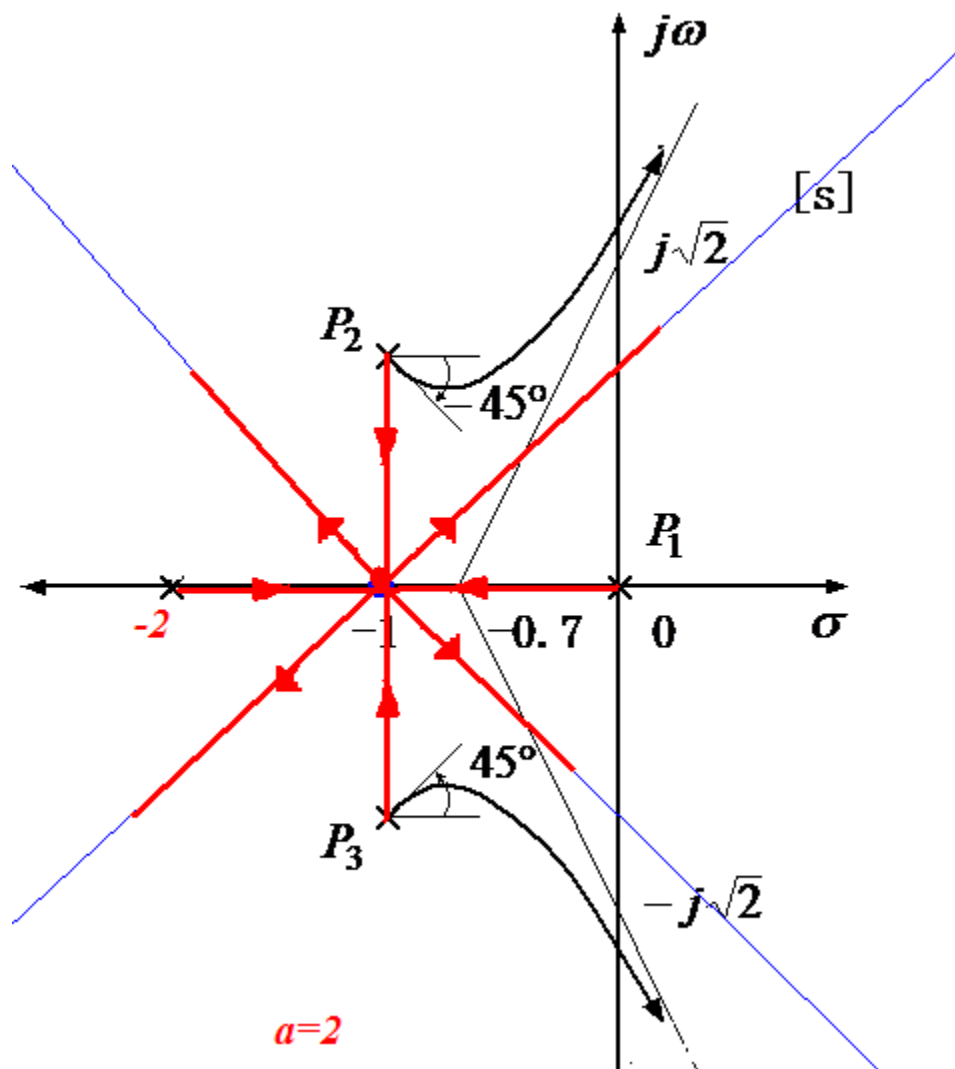
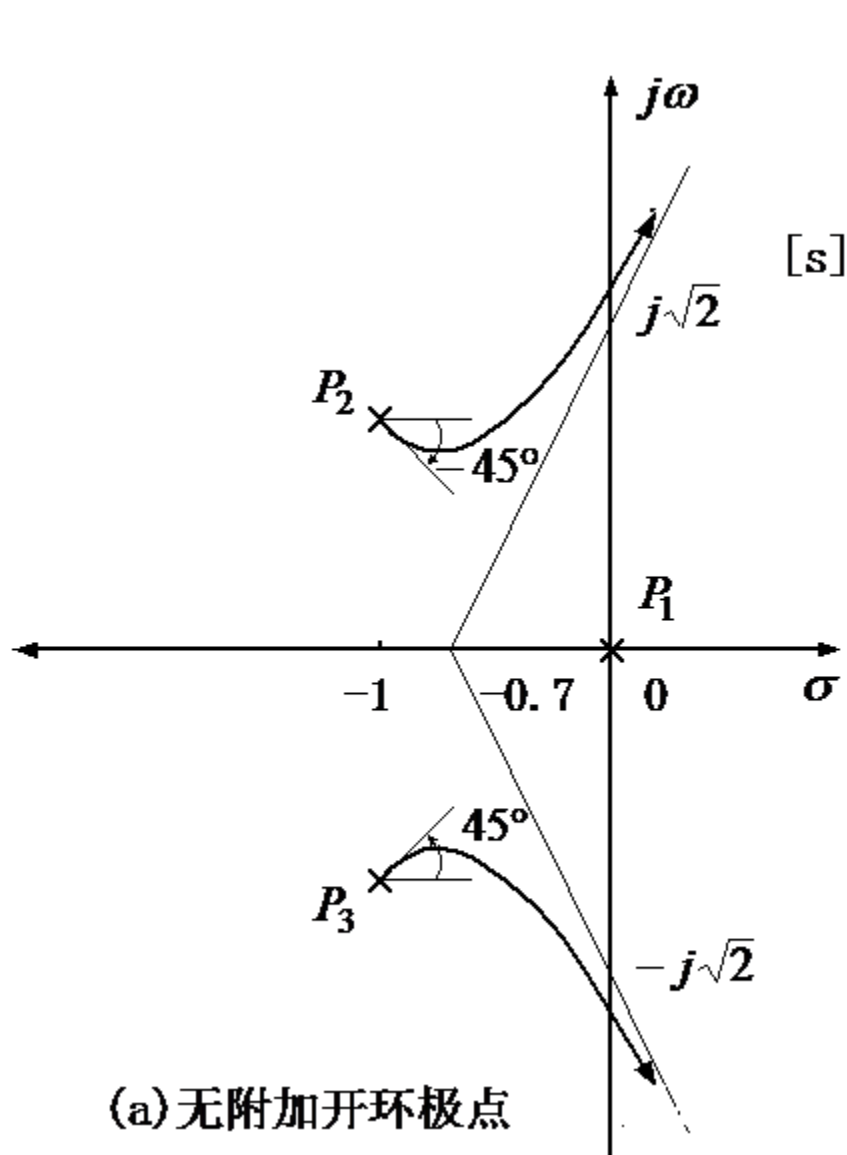
4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

	无附加极点	$a=0.5$	$a=2$	$a=6$
渐近线	交点: $\sigma_a = -0.7$ 夹角: $\pm 60, 180$	交点: $\sigma_a = -0.625$ 夹角: $\pm 45, \pm 135$	交点: $\sigma_a = -1$ 夹角: $\pm 45, \pm 135$	交点: $\sigma_a = -2$ 夹角: $\pm 45, \pm 135$
根轨迹与实轴的交点	无	$d = -0.255$	$d = -1$	$d = -4.62$
实轴上的根轨迹	$0 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow -0.5$	$0 \rightarrow -2$	$0 \rightarrow -6$
出射角	$\theta_{p_2} = -45^\circ$ $\theta_{p_3} = +45^\circ$	$\theta_{p_2} = -161.6^\circ$ $\theta_{p_3} = +161.6^\circ$	$\theta_{p_2} = -90^\circ$ $\theta_{p_3} = +90^\circ$	$\theta_{p_2} = -56.3^\circ$ $\theta_{p_3} = +56.3^\circ$
根轨迹与虚轴的交点	$\omega_c = \pm\sqrt{2}$ $K^* = 4$ $K = K^* / 2 = 2$	$\omega_c = \pm 0.632$ $K^* = 2.6$ $K = K^* / 2a = 2.6$	$\omega_c = \pm 1$ $K^* = 5$ $K = K^* / 2a = 1.25$	$\omega_c = \pm 1.22$ $K^* = 18.75$ $K = K^* / 2a = 1.5625$

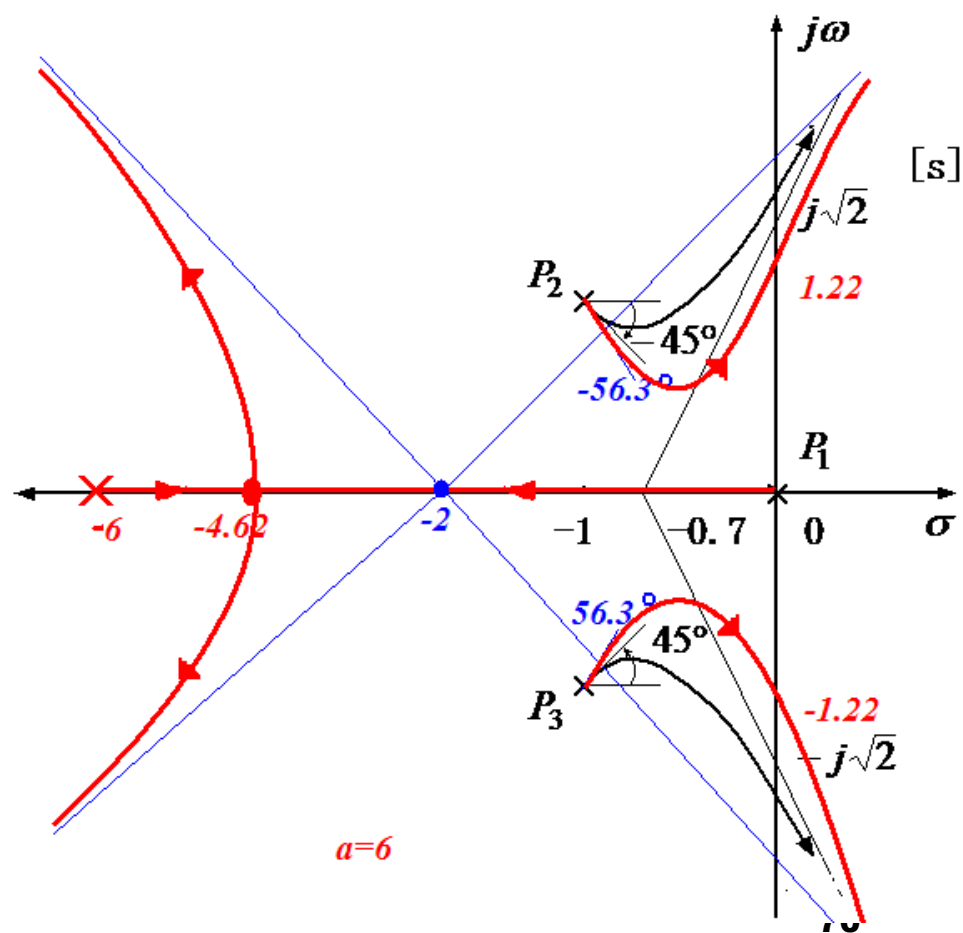
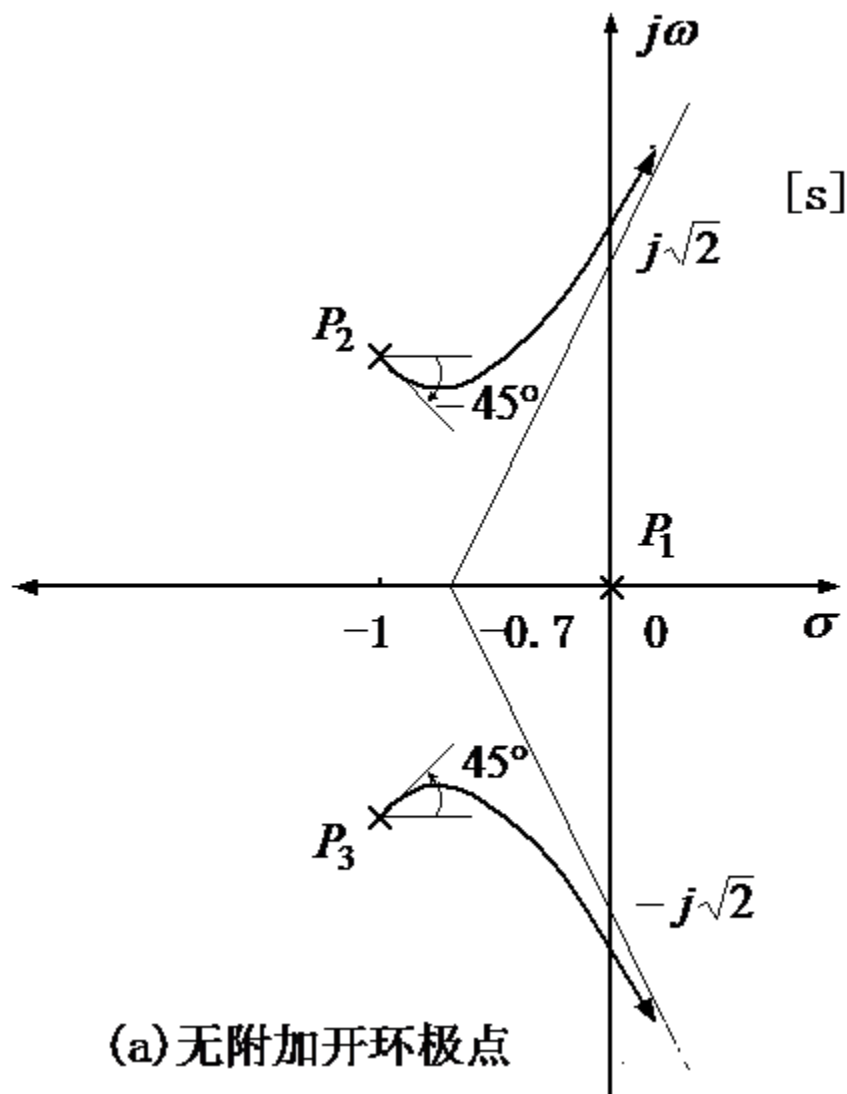
4.4 利用根轨迹法进行分析和设计



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计



4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

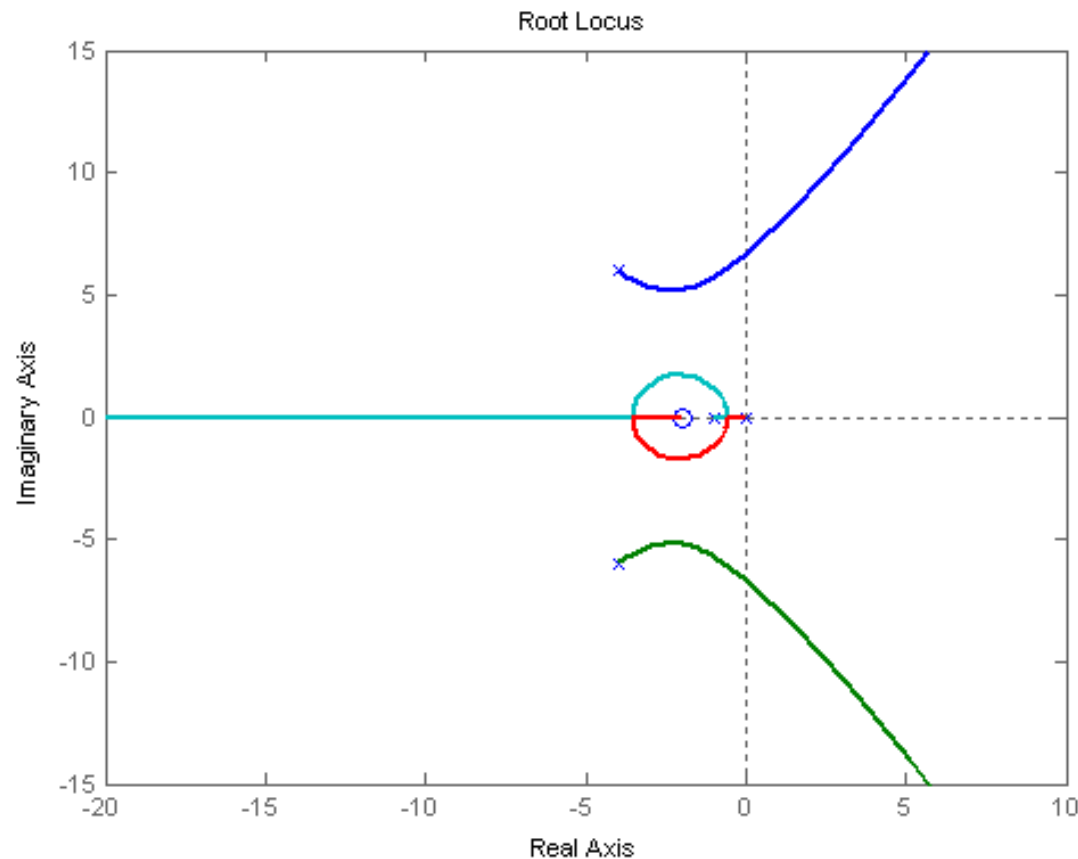


4.4 利用根轨迹法进行分析和设计

由四个根轨迹图可以看出，附加开环极点的大小不同（即不同的 a 值）对根轨迹的形状会产生很大的影响，即开环极点（同样也包括开环零点）在 S 平面上位置的微小变化，有可能引起根轨迹形状的重大变化，这一点务必给予足够的重视。正是这种根轨迹形状的变化为系统的分析和设计提供了多种选择的可能。

$$\frac{(s+2)}{s(s+1)(s^2 + 8s + 52)}$$

$$\frac{s+2}{s(s+1)(s^2+8s+52)}$$

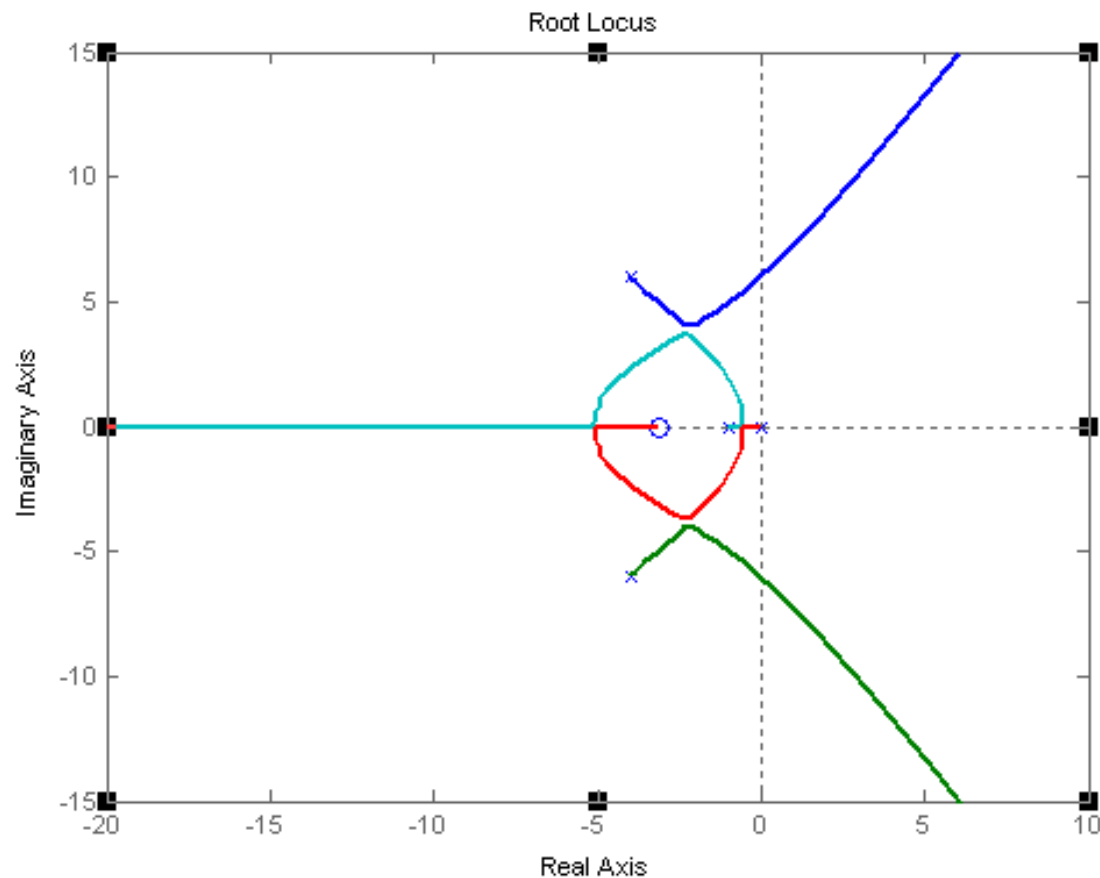


$$s+3.1$$

$$s(s+1)(s^2+8s+52)$$

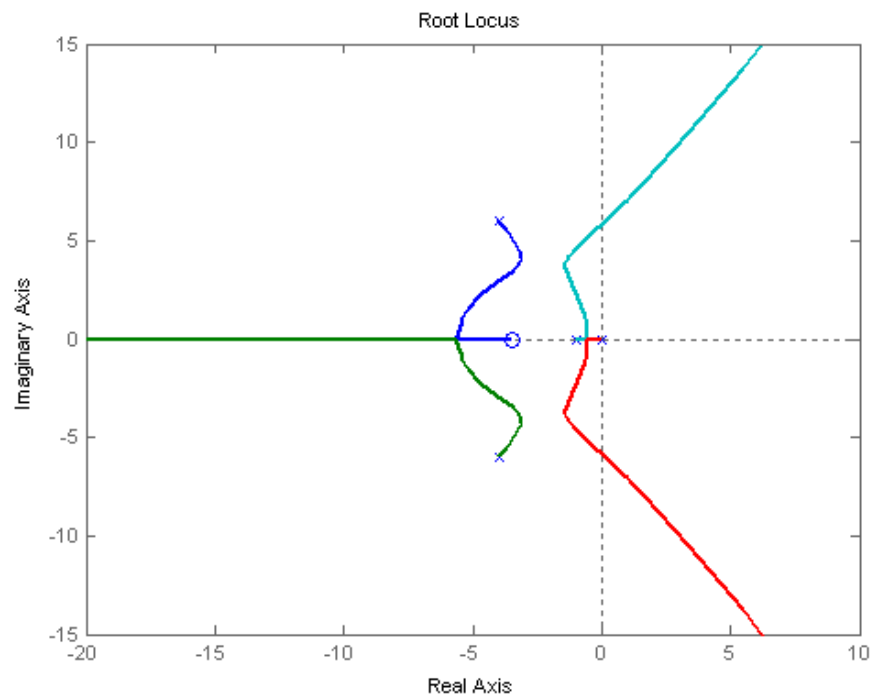
$$(s+3.1)$$

$$s(s+1)(s^2+8s+52)$$



$$\frac{s+3.5}{s(s+1)(s^2+8s+52)}$$

$$\frac{(s+3.5)}{s(s+1)(s^2+8s+52)}$$

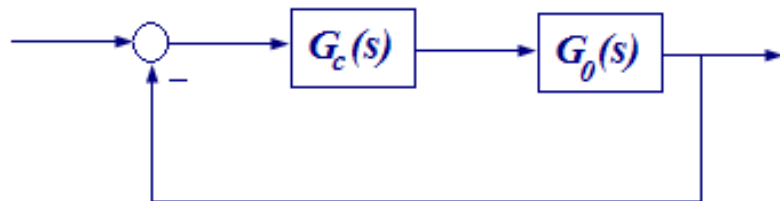


4.4 利用根轨迹法进行系统分析和设计

例16 设有系统如图所示，它具有一个不稳定的控制对象。
试应用根轨迹法，设计一个比例微分控制器(即确定 K_p 值和 T_d 值)，使得闭环系统的阻尼比 ζ 为0.7，且无阻尼自然频率 ω_n 为0.5弧度 / 秒。其中

$$G_0(s) = \frac{1}{10000(s^2 - 1.1772)}$$

$$G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$$



解：首先写出开环传递函数

$$G_K(s) = \frac{K_p(1 + T_d s)}{10000(s^2 - 1.1772)}$$

2个开环极点 $p_1 = -1.085, p_2 = 1.085$

1个开环零点 $z = -\frac{1}{T_d}$

4.4 利用根轨迹法进行系统分析和设计

开环极点 $p_1 = -1.085, p_2 = 1.085$

开环零点 $z = -\frac{1}{T_d}$

$$G_K(s) = \frac{K_p(1 + T_d s)}{10000(s^2 - 1.1772)}$$

然后根据要求写出闭环特征根

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 0.7s + 0.25$$

满足要求的闭环特征根为

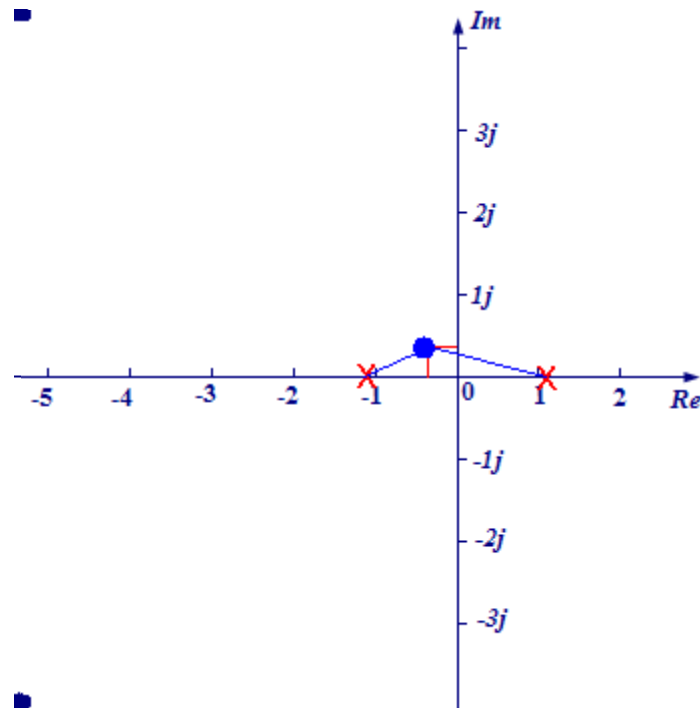
$$s_{1,2} = -0.35 \pm 0.357j$$

这个闭环特征根到开环零极点应该满足相角条件

以第二象限根为例

$$\angle(s_1 - p_1) + \angle(s_1 - p_2) - \angle(s_1 - z) = (2k + 1)180^\circ$$

$$\angle(s_1 - z) = 166^\circ + 25.9^\circ - 180^\circ = 11.9^\circ$$



4.4 利用根轨迹法进行系统分析和设计

开环零点 $z = -\frac{1}{T_d}$

$$G_K(s) = \frac{K_p(1 + T_d s)}{10000(s^2 - 1.1772)}$$

开环极点 $p_1 = -1.085, p_2 = 1.085$

闭环特征根 $s_{1,2} = -0.35 \pm 0.357j$

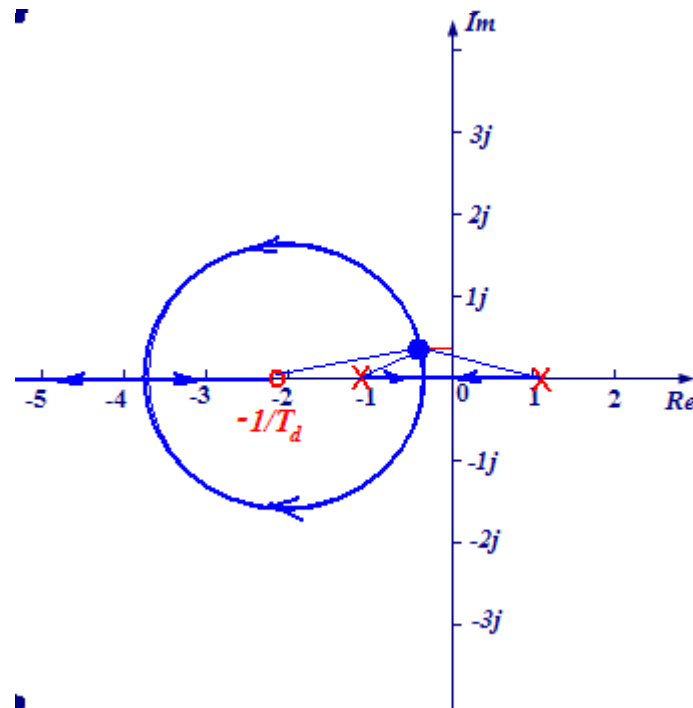
$$\angle(s_1 - z) = 166^\circ + 25.9^\circ - 180^\circ = 11.9^\circ$$

$$\angle(s_1 - z) = \arctg\left(\frac{0.357}{-0.35 - z}\right) = 11.9^\circ$$

$$z = -2.05 \quad T_d = 0.488$$

可以画出根轨迹图

最后确定 K_p 值 $\left| \frac{K_p(1 + T_d s)}{10000(s^2 - 1.1772)} \right| = 1 \quad K_p = 14240$



总结

根轨迹法的基本概念

闭环零点、根轨迹方程

绘制根轨迹的基本规则

7条规则

广义根轨迹

参数根轨迹——构造等效开环传递函数

0度根轨迹——三条规则与普通根轨迹不同

利用根轨迹分析系统性能

动态性能分析——确定闭环零极点，根据时域分析法

开环零极点对稳定性的影响

根轨迹法的基本概念

⑩ **根轨迹：** 系统某一参数由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，系统闭环极点在 s 平面相应变化所描绘出来的轨迹

参数为根轨迹增益的称为普通根轨迹或 180° 根轨迹
其他参数称为参数根轨迹

⑩ **闭环极点** 与开环零点、开环极点及 K^* 均有关

⑩ **闭环零点** = 前向通道零点 + 反馈通道极点

⑩ **根轨迹方程**
$$\begin{cases} \text{幅值条件: } |G(s)H(s)| = \frac{K^* |s-z_1| \cdots |s-z_m|}{|s-p_1| \cdots |s-p_n|} = 1 \\ \text{相角条件: } \angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle s-z_i - \sum_{j=1}^n \angle s-p_j = (2k+1)\pi \end{cases}$$

⑩ **根轨迹增益**
$$K = \frac{K^* \prod_{i=1}^m |-z_i|}{\prod_{j=1}^n |-p_j|}$$

绘制根轨迹法则小结(180° 和0°)

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数, 对称性和连续性

法则 3 实轴上的根轨迹 奇 (偶)

法则 4 渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n - m} \quad \varphi_a = \frac{2k\pi}{n - m}$$

法则 5 分离点

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} \quad \text{没有零点时右边为0}$$

法则 6 与虚轴交点

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = \operatorname{Im}[D(j\omega)] = 0$$

法则 7 出射角/入射角

$$\theta_p = \underbrace{(2k+1)\pi}_{2k\pi} + \left[\sum_{i=1}^m \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \angle(p_i - p_j) \right]$$
$$\theta_z = \underbrace{(2k+1)\pi}_{2k\pi} \mp \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \angle(z_l - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z_l - p_j) \right]$$

Matlab

rlocus(num,den)

绘制根轨迹

sgrid

绘出等阻尼比和自然振荡频率的栅格线

[k,p]=rlocfind(num,den)

在根轨迹上给出鼠标点的k和对应的闭环特征根

作业

4-1 1) 4)

4-2 1)

4-5

4-6

4-7 1)

4-10

4-11

4-14

4-15



玻尔

玻恩

海森伯

泡利

康普顿

薛定谔

狄拉克

埃伦费斯特

布喇格

德拜

朗之万

爱因斯坦

洛伦兹

居里夫人

普朗克