大学物理（上）

梁浴榕

电话：15527766880

email: liangyurong20@hust.edu.cn

作业：2 —— T12-T16

请独立完成作业！

第4节　惯性力

一、加速平动参照系

惯性力： $\boxed{\vec{f}_i = -m\vec{a}_0}$　$\vec{F}_{合} = \vec{F} + \vec{f}_i = m\vec{a}'$

二、转动参考系　在匀速转动的非惯性系中

惯性离心力： $\boxed{\vec{f}_i = -mr\omega^2\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}}$

科里奥利力： $\boxed{\vec{f}_c = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}}$

第5节　冲量与动量定理

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{I} = \vec{F}\Delta t \qquad \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$$

动量定理: $\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} \qquad \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

第6节　质点系的动量定理及动量守恒定律

$$\left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i外}\mathrm{d}t\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{i2} - \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{i1}$$

质点系动量定理的积分形式

质点系的动量守恒定律

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \mathrm{d}t = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{i2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{i1} = \text{恒矢量}$$

作业1-2页：

1-T1:(1) $18y = x^2 + 8x - 137(\mathrm{m})$

(2) $\vec{r} = (3t+5)\vec{i} + (0.5t^2 + 3t - 4)\vec{j}(\mathrm{m})$

(3) $\Delta\vec{r} = 3\vec{i} + 4.5\vec{j}(\mathrm{m})$ (4) $\vec{v} = 3\vec{i} + (t+3)\vec{j}(\mathrm{m/s})$

(5) $\vec{a} = \vec{j}(\mathrm{m/s^2})$

1-T2: $\vec{v} = \frac{5}{3}t^3\vec{i} + 3t\vec{j}$ $\vec{r} = \frac{5}{12}t^4\vec{i} + \frac{3}{2}t^2\vec{j}$

运动方程： $x = \frac{5}{12}t^4$ $y = \frac{3}{2}t^2$ 轨迹方程：$y^2 = \frac{27}{5}x$

1-T3: $v = v_0 e^{-kx}$

1-T4: $v\big|_{0.5s} = 2\mathrm{m/s}$ $a\big|_{0.5s} = 8.25\mathrm{m/s^2}$

1-T5: $u = 70\mathrm{km/h}$ 方向北偏西75º

$$\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

一战期间，德国为轰炸法国首都巴黎曾专门制造了一座超远程的“巴黎大炮 ”。炮筒有34米长、1米粗，炮身重750吨，炮弹初速度达1.7公里/秒。当德军从110公里外用巨型火炮轰击巴黎时，如果不考虑科里奥利力的影响，则炮弹将偏离目标1.6公里。

思考题：为什么在北半球火车行驶时对右侧铁轨磨损得厉害些?

科里奥利力作业题

1. 当水通过水槽底部的孔泻出时，在孔的上方会形成漩涡，这是由于________力的作用导致的。在北半球，形成的漩涡是_______方向旋转的；在南半球，漩涡是_______方向旋转的。

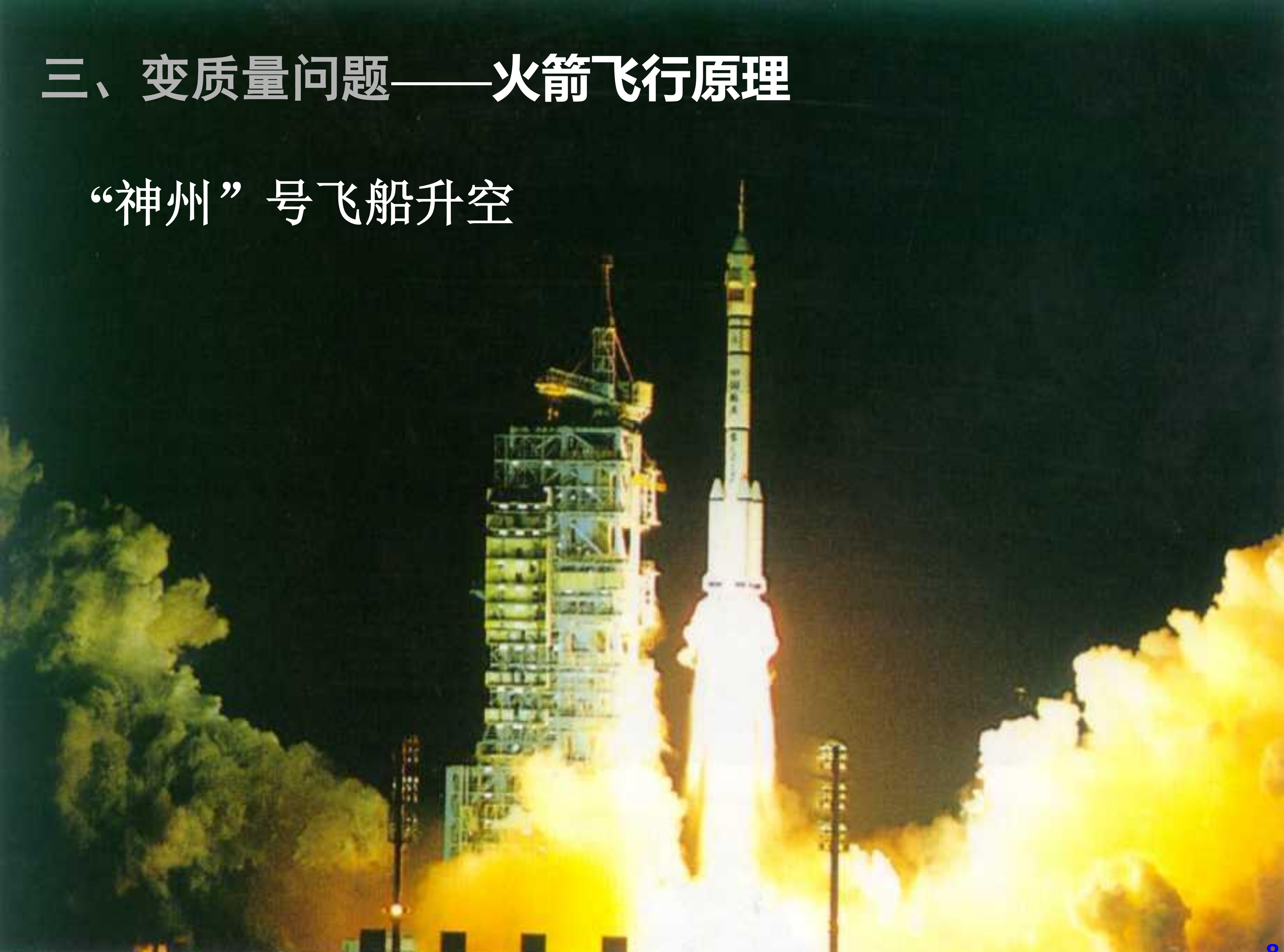
2. 汉口有平缓的江滩，而一江之隔的武昌却是江岸陡峭。这是千万年以来江水在________力的作用下不断冲刷_____的江岸所造成的。

3. 由于________力的作用，在北半球，自由下落的物体的落点会偏___；由于同样的原因，南半球自由下落的物体的落点会偏____。

4. 赤道附近温度较高，会产生对流，使赤道两侧较冷的空气向赤道流动而形成贸易风，即信风。由于______力的作用，北半球的贸易风总是_____风；而南半球的贸易风总是___风。

三、变质量问题——火箭飞行原理

“神州”号飞船升空



设t 时刻火箭质量为m，取为研究的质点系。

t 时刻动量：$\vec{p}_1 = m\vec{v}$

$t+\mathrm{d}t$ 时刻动量：$\vec{p}_2 = (m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + (-\mathrm{d}m)\vec{v}'$

系统受外力：$\vec{F}$　(此处dm<0) $(\vec{v}' = \vec{u} + \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v})$

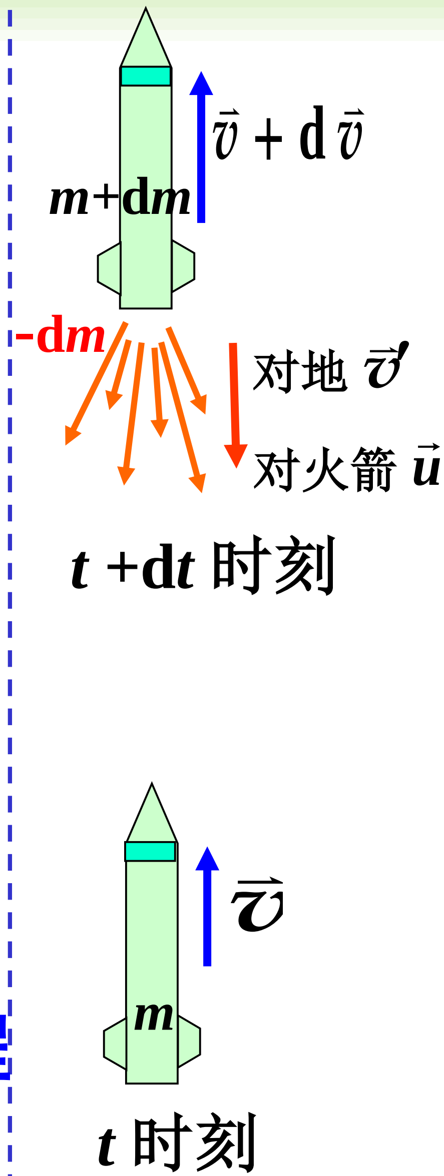
由动量定理：$\vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

$$= (m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + (-\mathrm{d}m)(\vec{u}+\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) - m\vec{v}$$

$$= m\,\mathrm{d}\vec{v} - \vec{u}\,\mathrm{d}m$$

火箭方程： $\vec{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \boxed{\vec{u}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$　**密歇尔斯基方程**

火箭发动机的推力



$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}-\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

火箭发动机的推力： $F_{推}=u\boxed{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$ 燃烧速率

如 $u=2.94\times10^{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=1.38\times10^{4}\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$，

$F_{推}=4.06\times10^{7}\ \mathrm{N}$ ⇨ **4000吨海轮所受的浮力！**

自由空间：$\vec{F}=0$ $\quad \mathrm{d}\vec{v}=\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{m}$

若喷出的气体相对火箭的速率u恒定，火箭初始质量m_0，初速度为v，燃料耗尽时火箭的质量为m，速度为v_0

选$\vec{v}$的方向为x轴正向，标量式为 $\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_{m_0}^{m}-u\frac{\mathrm{d}m}{m}$

$$v-v_0=-u\ln\frac{m}{m_0}\qquad v-v_0=u\ln\frac{m_0}{m}$$

质量比越大，火箭获得的速度越大。

$$v - v_0 = u \ln \frac{m_0}{m}$$

火箭最终速度

设火箭质量比 $N = \frac{m_0}{m}$，

火箭增加的速度为: $v_f - v_i = u \ln N$

提高速度的途径（达到第一宇宙速度7900 m/s）：

1、提高气体喷射速度u;

2、增大N受限制(N=6)，采用多级火箭，终速度为

$$v_f = u \ln N_1 + u \ln N_2 + u \ln N_3 + \cdots + u \ln N_n$$

$$= u \ln(N_1 N_2 \cdots N_n)$$

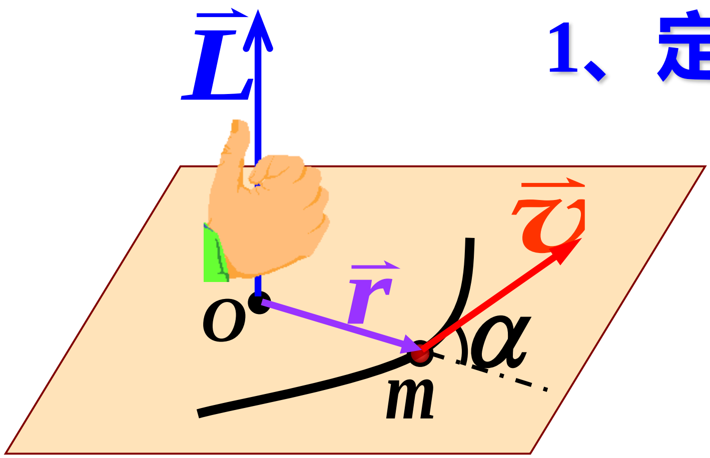
一个三级火箭，$N_1=N_2=N_3=5$，终速为

$$u = 2000\text{m/s}, v = u \ln N^3 = 10600\text{m/s}$$

第7节　角动量定理　角动量守恒定律

Angular Momentum Theorem & Conservation of Angular Momentum

一、质点的角动量　　描写质点**转动状态**的物理量。



1、定义：　质点对定点O的角动量：

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$　**矢量**

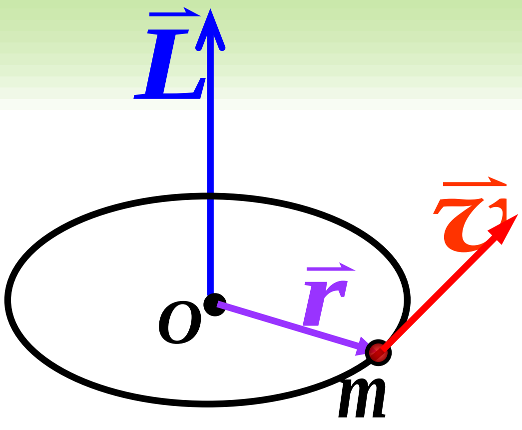
大小：　$L=rp\sin\alpha$

单位：　$kg\cdot m^2/s$ 或 $J\cdot s$

方向： 垂直于 $\vec{r}$和 $\vec{p}$所决定的平面，指向用右手螺旋法则确定。

说一个角动量时，必须指明是对哪个固定点而言的。

2、圆周运动质点对圆心的角动量：



$$L = rp = mrv = mr^2\omega$$

3、微观体系的角动量是量子化的：

微观体系的角动量其取值只能是普朗克常数的整数或半奇数倍。

$$\hbar = h/2\pi = 1.05\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$$

例如电子轨道角动量

$$L = \sqrt{l(l+1)}\ \hbar \qquad \begin{cases} l = 0,1,2,\cdots(n-1) \\ l:\text{角量子数} \end{cases}$$

但因宏观物体的角动量比$\hbar$大得多，所以宏观物体的角动量可以看作是连续变化的。

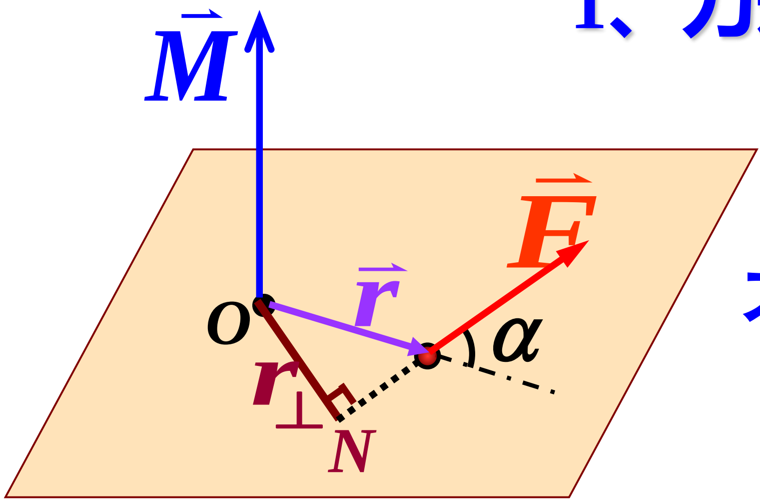
例1、一质量为m的质点沿着一条空间曲线运动，该曲线在直角坐标下的矢径为：

$$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$$

其中a、b、ω皆为常数，求该质点对原点的角动量。

答案： $\vec{L} = mab\omega\vec{k}$

二、角动量定理:



1、力矩: 力对定点O的力矩定义为:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$ 矢量

大小: $M = rF\sin\alpha = r_\perp F$

$r_\perp$称为**力臂**。

方向: 由右手螺旋法则确定。

单位: N·m 或 J

力矩与参考点O有关。

当力的作用线通过参考点时，力对该参考点的力矩为零。

2、质点的角动量定理：

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}\qquad\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

由角动量的定义求其对时间的导数：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{v}\times(m\vec{v})+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}$$

即： $$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

说明质点所受的**合外力**对**定点**的**力矩**等于质点对**同一定点**的**角动量对时间的变化率**。

质点的角动量定理的**微分形式：**

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点的角动量定理的**积分形式：**

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} \mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

在 t_1 到 t_2 时间内作用在质点上对某一定点的**合力矩对时间的积分**等于质点在这段时间内对同一定点的**角动量的增量。**

角动量定理只适用于惯性系。在非惯性系中，必须考虑惯性力的力矩。

三、质点的角动量守恒定律

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

当$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$时，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$，

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{常矢量}$$

当质点所受的**合外力对定点的力矩等于零**时，质点对该点的**角动量守恒**。

分量式： 若 $M_l = 0$，则 $L_l = $ 常量

角动量守恒定律是自然界又一条基本的普适定律。

四、有心力

质点所受的力的作用线始终通过某固定点，该力为**有心力**，该点称为**力心**。

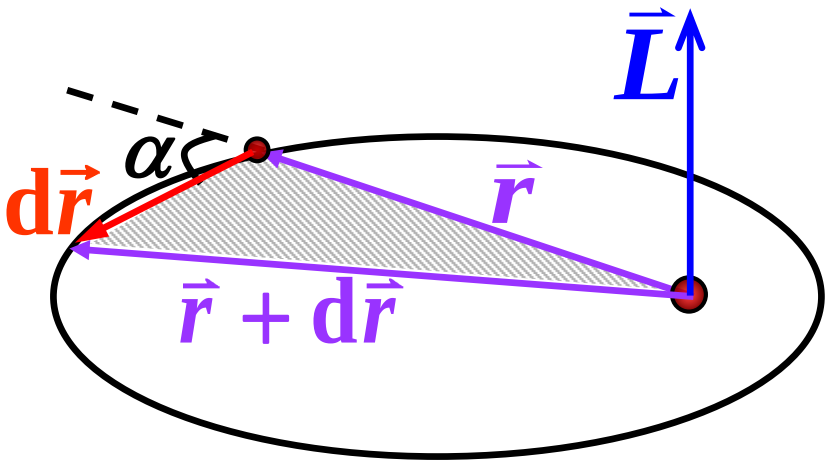
由于有心力对力心的力矩为零，**质点对该力心的角动量一定守恒。**

可用以研究质点绕固定点运动的情况，如行星、卫星的运动，电子绕原子核的运动等。

例2、用角动量守恒定律推导行星运动的开普勒第二定律: 行星对太阳的位置矢量在相等的时间内扫过相等的面积,即行星的矢径的面积速度为恒量。

解: 在很短的dt时间内，行星的矢径扫过的面积

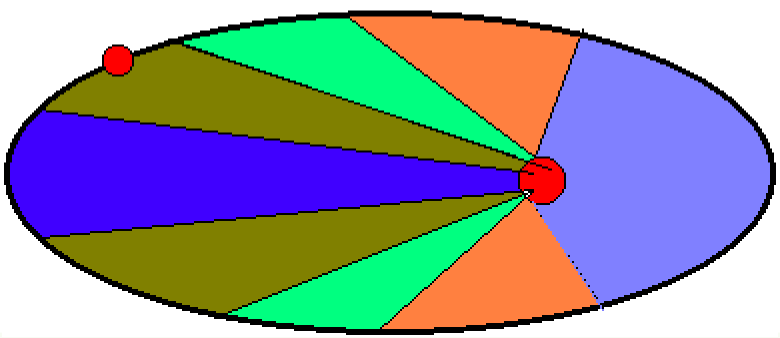
$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2} r \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \sin\alpha = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times \mathrm{d}\vec{r}\right|$$



$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|$$

行星对太阳中心的角动量守恒:

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} \ = \text{恒矢量}$$

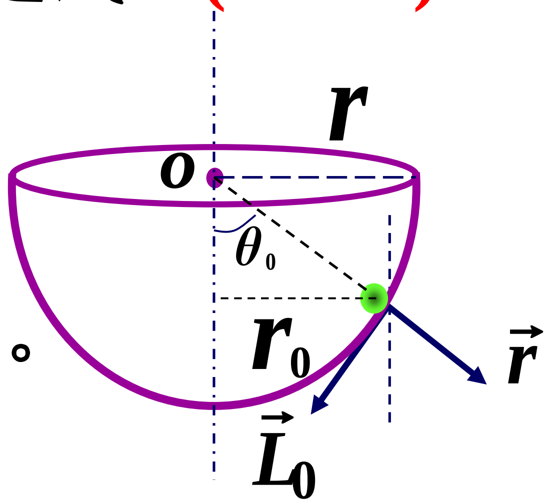


所以面积速度 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|$ 也是恒量。

开普勒第二定律得证。

行星绕太阳的运动是平面运动。

例3、将一质点沿一半径为r的光滑半球形碗的内面水平地投射,碗保持静止。设v_0是质点恰好能达到碗口所需要的初速度。试求出v_0作为θ_0的函数的表达式。(2-T15)



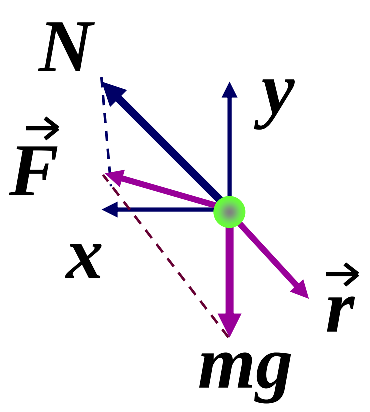
解:取球心o为参考点,并设开始时质点在板面内,且速度垂直向外。

$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ 垂直黑板向内,故垂直于y轴。

所以沿y轴方向的力矩 $M_y=0$,

故角动量在y方向上的分量L_y守恒:

受力分析:



$$L_{0y}=L_y$$

$$L_0=rmv_0\sin90^\circ=rmv_0$$

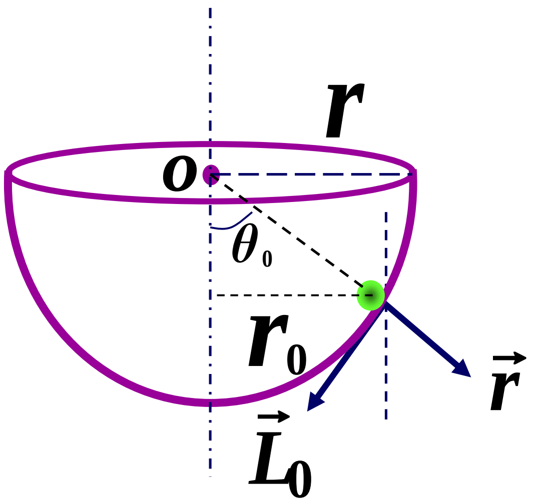
$$L_{0y}=L_0\sin\theta_0=rmv_0\sin\theta_0$$

则: $rmv_0\sin\theta_0=rmv_f$

$$rmv_0 \sin\theta_0 = rmv_f$$

仅重力做功，机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f{}^2 + mgr\cos\theta_0$$



两式联立解得:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gr}{\cos\theta_0}}$$

五、质点系的角动量定理和角动量守恒定律

质点系对定点的角动量： $\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i$

对时间求导： $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

由质点的角动量定理： $\boxed{\vec{M}_i=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \vec{r}_i\times(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})$$

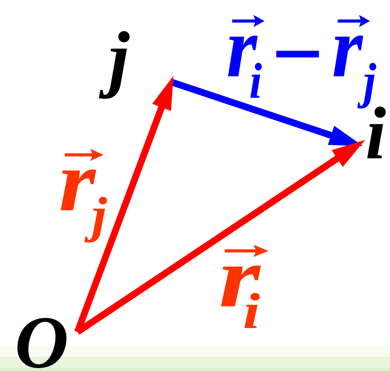
$$=\underbrace{\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i}_{\text{合外力矩 }\vec{M}}+\underbrace{\sum_i \vec{r}_i\times(\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})}_{\text{内力矩的矢量和}}$$

一对内力矩矢量和：

$$\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}$$

$$=(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{f}_{ij}$$

$=0$



$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$ ——**质点系的角动量定理**

质点系对惯性系中某定点的角动量的时间变化率，等于作用在该质点系上所有外力对该定点的总力矩。

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}=$常矢量 。

当质点系相对于惯性系中某定点所受的合外力矩为零时，该质点系相对于该定点的角动量将不随时间改变。

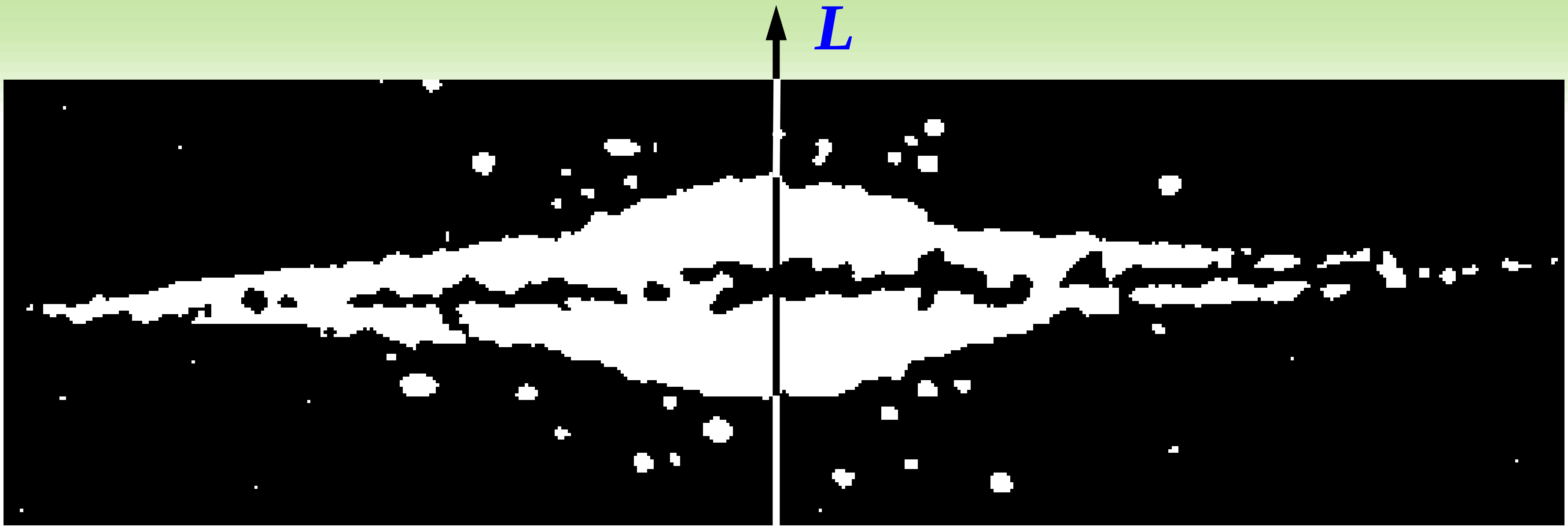
—**质点系的角动量守恒定律**

分量式成立： 若 $M_l=0$，则 $L_l=$常量

孤立或在有心力作用下的系统角动量守恒。

宇宙中的天体可以认为是孤立体系。它们具有旋转盘状结构，成因是角动量守恒。

盘 状 星 系

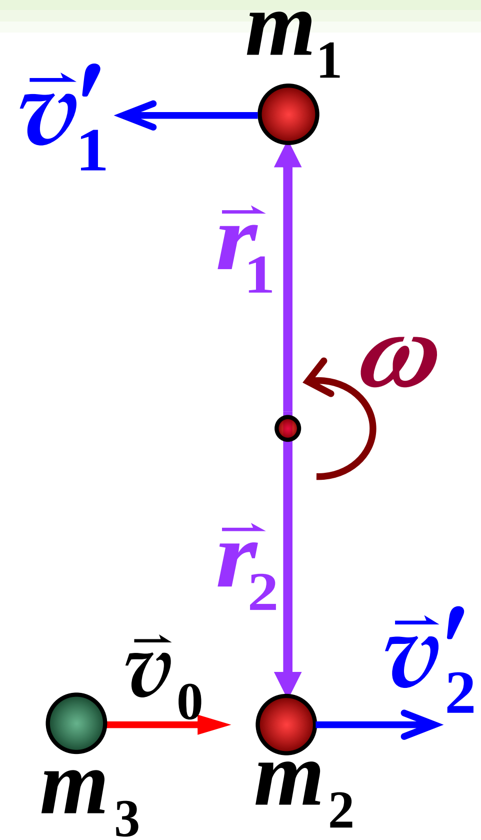


球形原始气云具有初始角动量*L*。

在垂直于*L*方向，角动量守恒，粒子的旋转速度↑，惯性离心力↑，离心力与引力达到平衡，维持一定的半径。

但在与*L*平行的方向无此限制，所以形成了旋转盘状结构。

例4、两小钢球固定在位于水平面内的长为a的轻质硬杆的两端，杆可绕其中心轴自由转动。杆原来静止。另一泥球以水平速度$\vec{v}_0$垂直于杆的方向与m_2发生碰撞，碰后两者粘在一起。设 $m_1 = m_2 = m_3$，求碰撞后杆转动的角速度。



解：

$$m_3 v_0 r_2 = (m_3 + m_2) v_2' r_2 + m_1 v_1' r_1$$