大学物理（上）

梁浴榕

电话：15527766880

email: liangyurong20@hust.edu.cn

上节回顾

角动量 $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$　　**力矩** $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$

角动量定理

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\mathrm{d}t$$

微分形式

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

积分形式

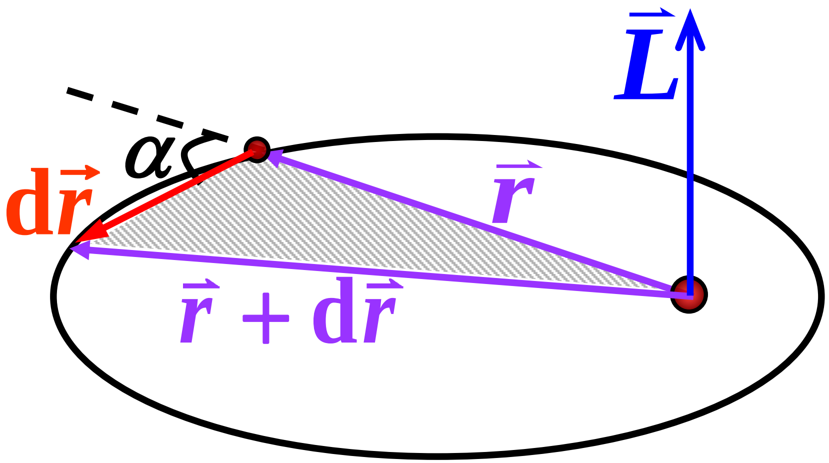
角动量守恒定律

当$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$时，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$，$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} =$ 常矢量

例、用角动量守恒定律推导行星运动的开普勒第二定律：行星对太阳的位置矢量在相等的时间内扫过相等的面积，即行星的矢径的面积速度为恒量。

解： 在很短的dt时间内，行星的矢径扫过的面积

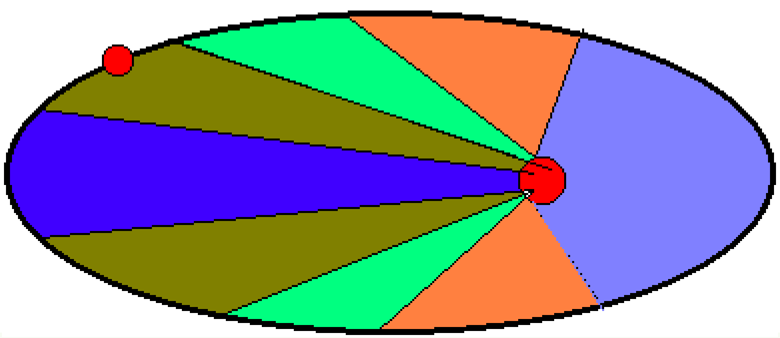
$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2} r \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \sin\alpha = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times \mathrm{d}\vec{r}\right|$$



$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|$$

行星对太阳中心的角动量守恒：

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = \text{恒矢量}$$

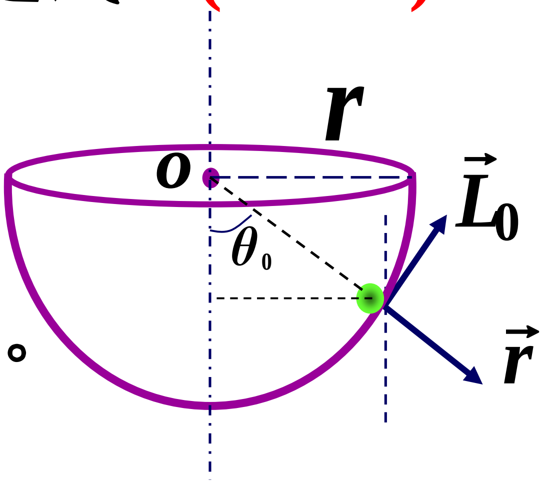


所以面积速度 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|$ 也是恒量。

开普勒第二定律得证。

行星绕太阳的运动是平面运动。

例、将一质点沿一半径为r的光滑半球形碗的内面水平地投射，碗保持静止。设v_0是质点恰好能达到碗口所需要的初速度。试求出v_0作为θ_0的函数的表达式。(2-T15)



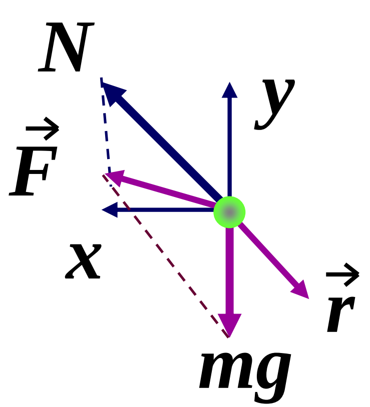
解：取球心o为参考点,并设开始时质点在板面内,且速度垂直向里。

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ 垂直黑板向内,故垂直于y轴。

所以沿y轴方向的力矩 $M_y=0$,

故角动量在y方向上的分量L_y守恒:

受力分析:



$$L_{0y} = L_y \qquad L_y = rmv_{末}$$

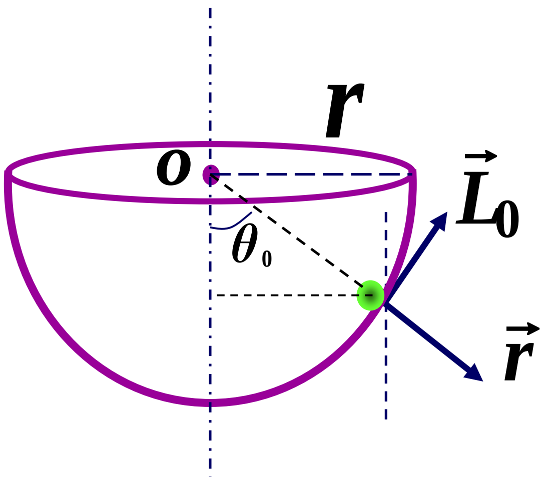
$$L_0 = rmv_0 \sin 90^{o} = rmv_0$$

$$L_{0y} = L_0 \sin\theta_0 = rmv_0 \sin\theta_0$$

则：$rmv_0 \sin\theta_0 = rmv_{末}$

$$rmv_0\sin\theta_0 = rmv_{末}$$

仅重力做功，机械能守恒：



$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{末}{}^2 + mgr\cos\theta_0$$

两式联立解得：

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gr}{\cos\theta_0}}$$

五、质点系的角动量定理和角动量守恒定律

质点系对定点的角动量： $\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i$

对时间求导： $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

由质点的角动量定理： $\boxed{\vec{M}_i=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}}$

一对内力矩矢量和：

$$\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}$$

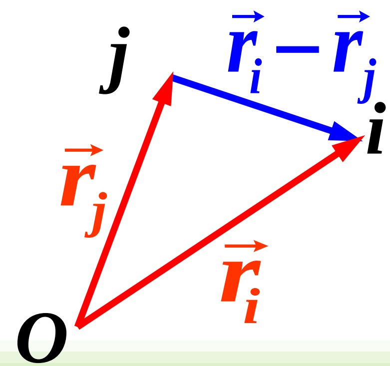
$$=(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{f}_{ij}$$

$=0$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \vec{r}_i\times(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})$$

$$=\underbrace{\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i}_{\text{合外力矩 }\vec{M}}+\underbrace{\sum_i \vec{r}_i\times(\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})}_{\text{内力矩的矢量和}}$$

合外力矩 $\vec{M}$　　内力矩的矢量和



$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$ ——质点系的角动量定理

质点系对惯性系中某定点的角动量的时间变化率，等于作用在该质点系上所有外力对该定点的总力矩。

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}=$常矢量 。

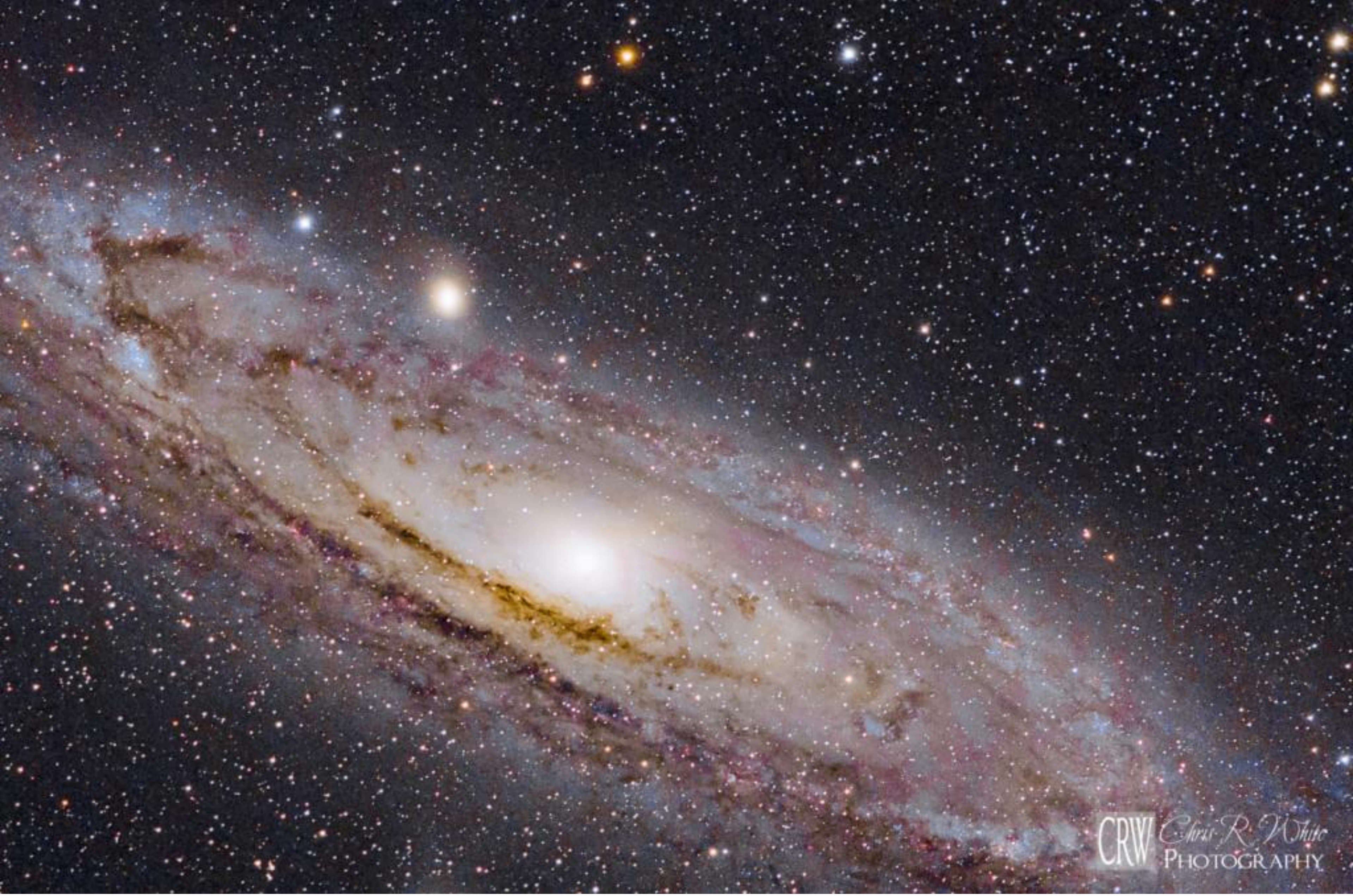
当质点系相对于惯性系中某定点所受的合外力矩为零时，该质点系相对于该定点的角动量将不随时间改变。

——质点系的角动量守恒定律

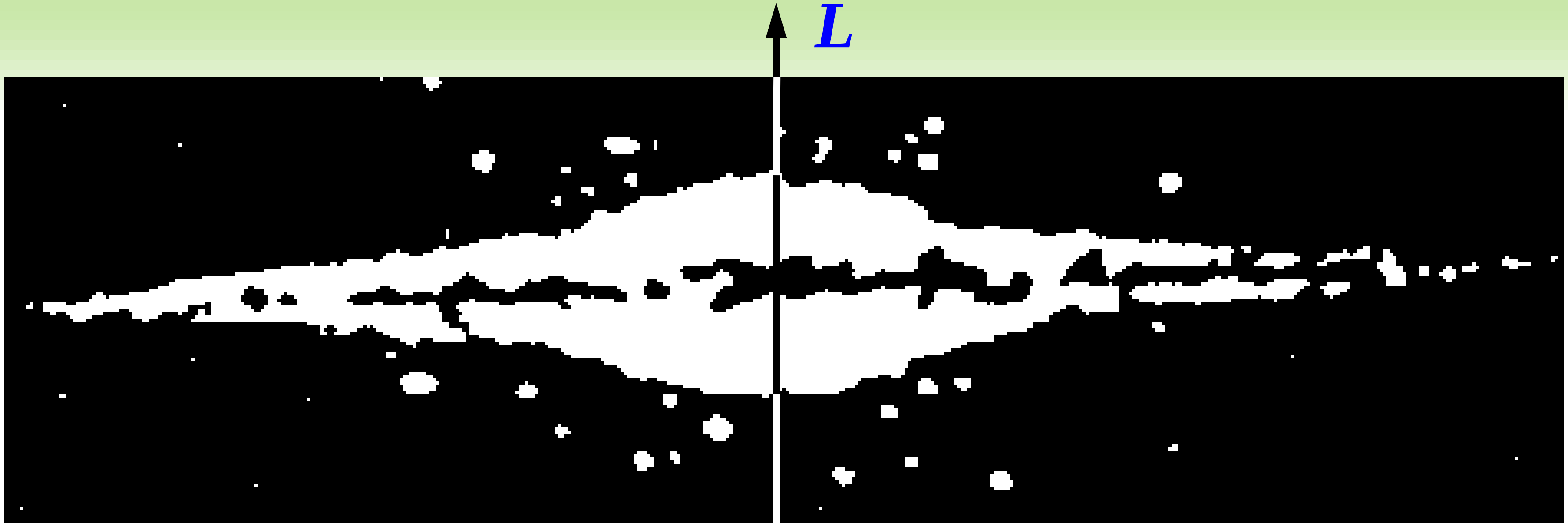
分量式成立： 若 $M_l=0$，则 $L_l=$常量

孤立或在有心力作用下的系统角动量守恒。

宇宙中的天体可以认为是孤立体系。它们具有旋转盘状结构，成因是角动量守恒。



盘状星系（仙女座星系，哈勃望远镜2015年）



球形原始气云，具有初始角动量L，孤立系统角动量守恒。球形原始气云最初很大，逐渐塌缩。

在垂直于L方向，如果r↓，由于粒子的角动量守恒，则粒子的旋转速度↑，惯性离心力↑，离心力与引力达到平衡，维持一定的半径。

但在与L平行的方向无此限制，粒子的速度可以更小，

所以形成了旋转盘状结构。

角动量守恒的应用

1. 解释自然现象。

行星运动。

2. 解释生活中的物理现象。

花样滑冰，芭蕾舞旋转，跳水，体操，跳远。

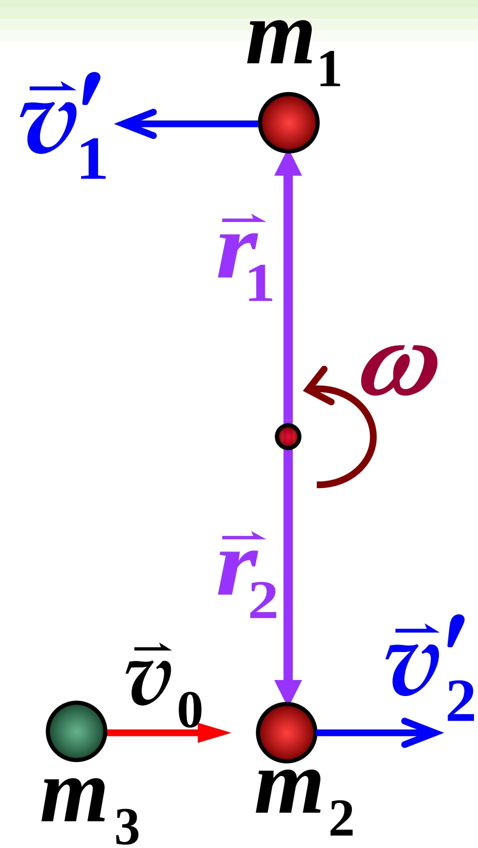
3. 科技中的重要应用。

陀螺仪，角动量方向不变，用于稳定航向或者导航。

4. 解题中的重要应用。

例：子弹水平速度射入静止细棒。

例、两小钢球固定在位于水平面内的长为 a 的轻质硬杆的两端，杆可绕其中心轴自由转动。杆原来静止。另一泥球以水平速度 $\vec{v}_0$ 垂直于杆的方向与 m_2 发生碰撞，碰后两者粘在一起。设 $m_1 = m_2 = m_3$，求碰撞后杆转动的角速度。

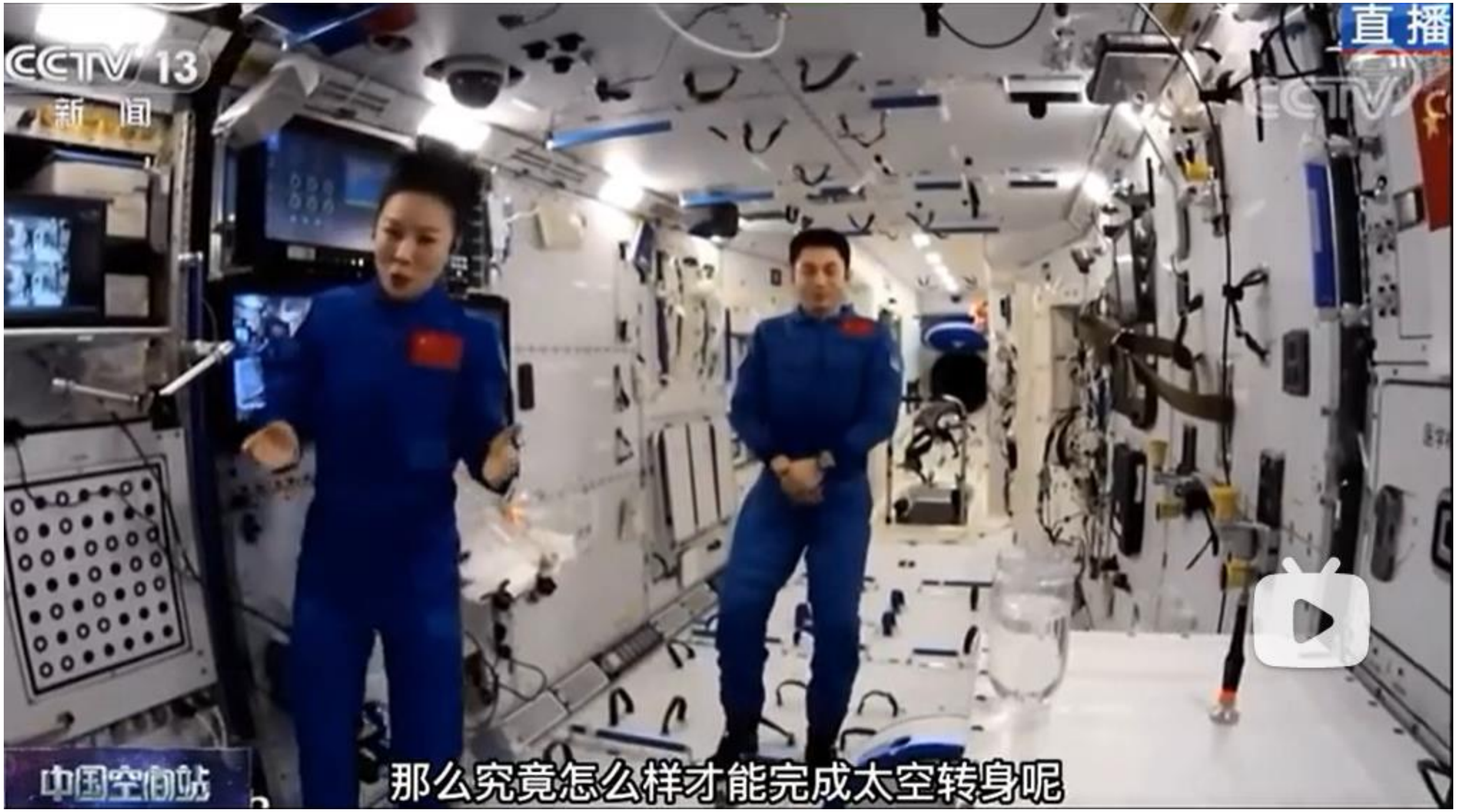


解：

$$m_3 v_0 r_2 = (m_3 + m_2) v_2' r_2 + m_1 v_1' r_1$$

角动量守恒的应用

太空转身

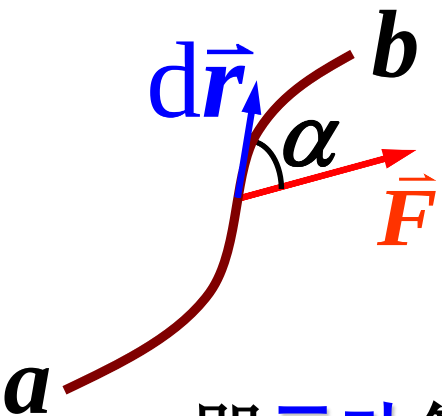


第8节　功　功率

Work & Power

一、功的定义：

力在位移方向上的分量与该位移大小的乘积。



设质点在力$\vec{F}$的作用下发生无限小位移 $\mathrm{d}\vec{r}$，则功（**元功**）为：

$$\mathrm{d}A = F\cos\alpha \cdot \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

即**元功**等于质点所受的力和它的元位移的**点积**。

功为**标量**，它没有方向，但有正负：

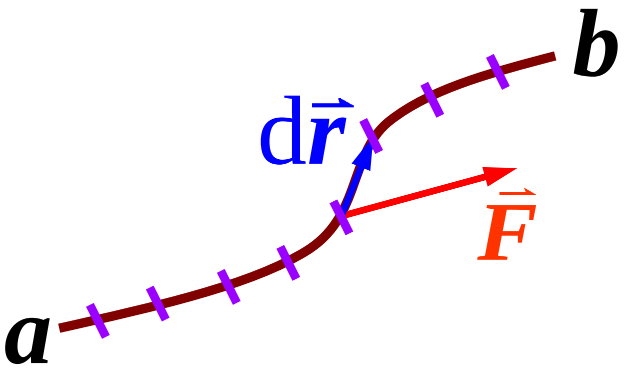
1、当 $0 \le \alpha < \pi/2$ 时，$\mathrm{d}A>0$，力对质点做正功；

2、当 $\pi/2 < \alpha \le \pi$ 时，$\mathrm{d}A<0$，力对质点做负功；

3、当 $\alpha = \pi/2$ 时，力对质点不做功。

二、变力的功：

等于力沿轨道的线积分，与过程有关。

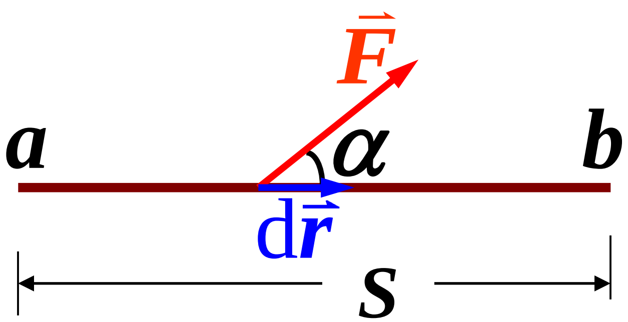


$$A_{ab} = \int_{L\,a}^{b} \mathrm{d}A = \int_{L\,a}^{b} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

功为过程量。

$\vec{r}$是与参考系有关的量，功的计算与参考系有关。

三、恒力沿直线做功：



$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\alpha$$

$$= FS\cos\alpha$$

四、几个力的功：

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\cdots)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots$$

五、功的单位： 焦耳（J），1J＝1N·m。

六、功率：为衡量力做功的快慢程度的物理量

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv\cos\alpha$$

功率愈大，做同样的功所花费的时间就愈少，做功的效率也愈高。

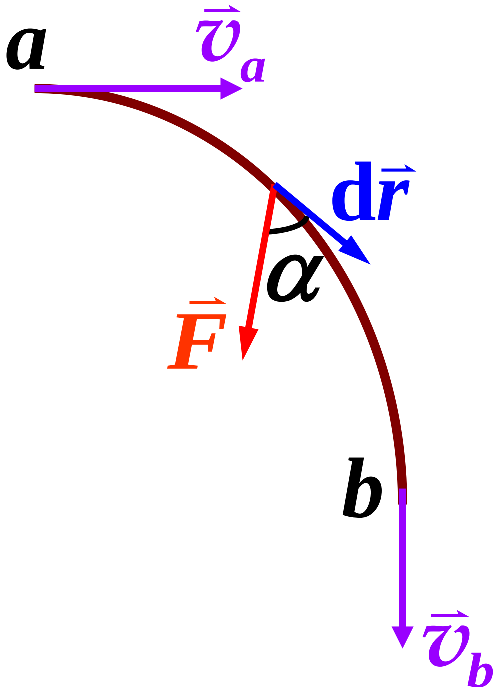
功率的单位为瓦特（1W＝1J/s）。

请自学课本例题！

第9节　动能　动能定理

Kinetic Energy & Kinetic Energy Theorem

设质点在合外力作用下由初始位置 a 经某一路径到达终了位置 b 。



合外力的元功为：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

切向运动方程：

$$F_{\mathrm{t}} = F\cos\alpha = ma_{\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}A = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = mv\mathrm{d}v$$

$$\boxed{\mathrm{d}A = mv\,\mathrm{d}v}$$

合外力做的总功为： $A_{ab} = \int_{v_a}^{v_b} mv\,\mathrm{d}v$

$$A_{ab} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

定义质点的**动能：** $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

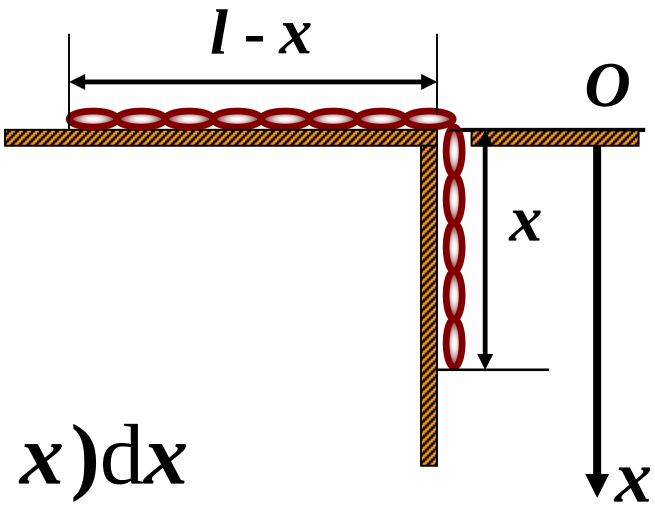
得质点的**动能定理：** $\boxed{A_{ab} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k}$

力的空间累积效应： 引起了质点动能的改变。

动能的单位与功的单位相同，为J。

动能定理适用于惯性系，非惯性系应考虑惯性力的功。

例1、一链条总长为l，质量为m。放在桌面上并使其下垂，下垂的长度为a，设链条与桌面的滑动摩擦系数为μ，令链条从静止开始运动，则：（1）到链条离开桌面的过程中，摩擦力对链条做了多少功？（2）链条离开桌面时的速率是多少？



解：建坐标系如图

$$f=\mu mg\frac{(l-x)}{l}$$

$$W_f=\int_a^l \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^l -\frac{\mu mg}{l}(l-x)\mathrm{d}x$$

$$=-\left[\frac{\mu mg}{l}(lx-\frac{1}{2}x^2)\right]_a^l=-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$$

$$W_f = -\frac{\mu mg(l-a)^2}{2l}$$

(2)对链条应用动能定理：

$$\sum W = W_P + W_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\because v_0 = 0 \qquad \therefore W_P + W_f = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_P = \int_a^l \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^l mg\frac{x}{l}\mathrm{d}x = \frac{mg(l^2 - a^2)}{2l}$$

$$\therefore \frac{mg(l^2 - a^2)}{2l} - \frac{\mu mg(l-a)^2}{2l} = \frac{1}{2}mv^2$$

得： $v = \sqrt{\frac{g}{l}}\left[(l^2 - a^2) - \mu(l-a)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

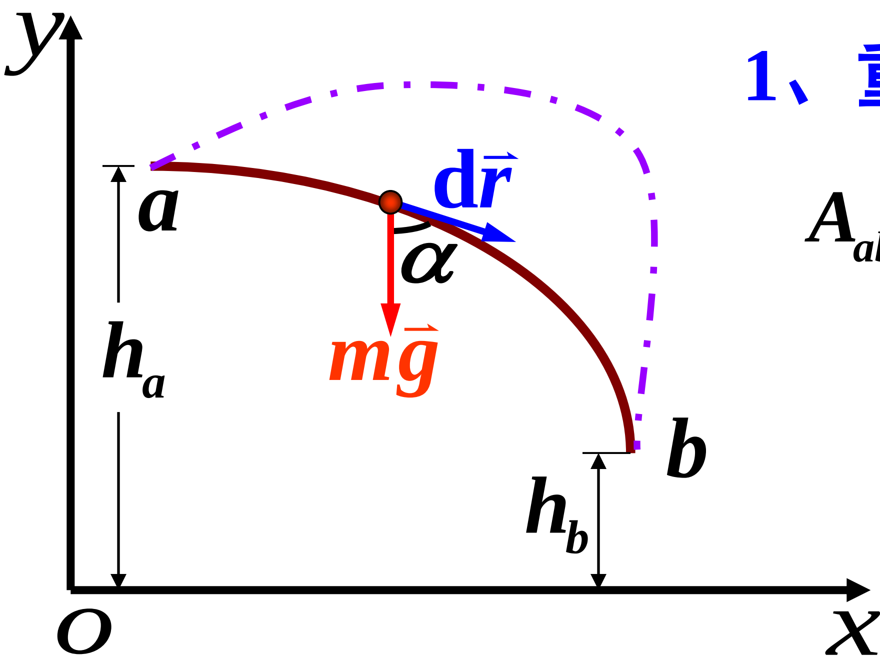
第10节　保守力　势能

Conservative Force & Potential Energy

按力做功的特点可把力分为**保守力**和**非保守力**。

一、几种常见的保守力的功

1、重力的功：



$$A_{ab}=\int_a^b m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b mg\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\alpha$$

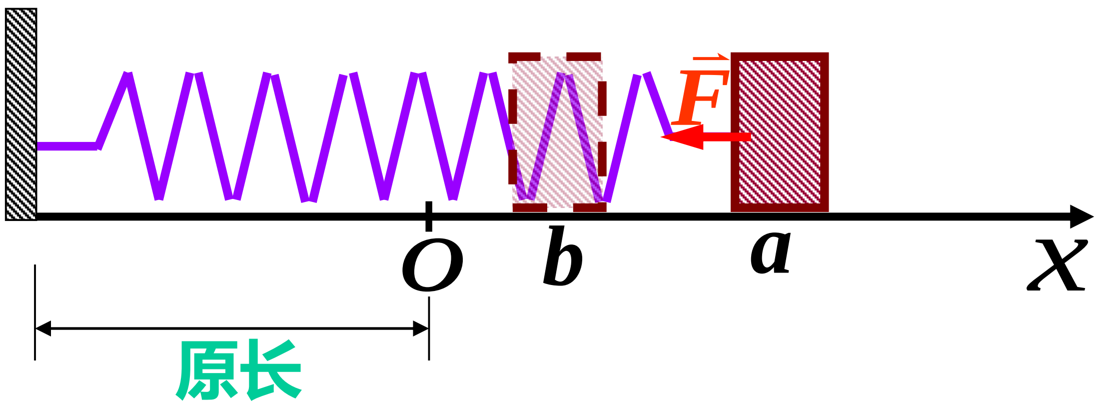
$$=\int_{h_a}^{h_b} -mg\mathrm{d}y$$

$$=-(mgh_b-mgh_a)$$

若改变质点经过的路径，但不改变始末位置，所得结果不变。

重力的功与路径无关！

2、弹力的功：



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

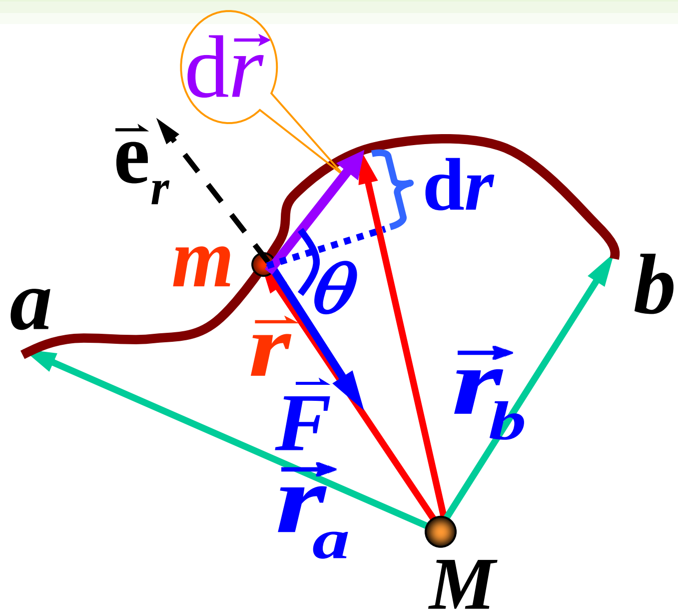
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i}$$

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} -kx\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

若质点由位置a到位置b是沿另外一种路径，则弹性力的功仍与上式相同。

弹力的功与路径无关！

3、万有引力的功：



$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

元功：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= -G\frac{Mm}{r^2}\underline{\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos(\pi-\theta)}$$

$$= -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$A_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = -\left[\left(-G\frac{Mm}{r_b}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_a}\right)\right]$$

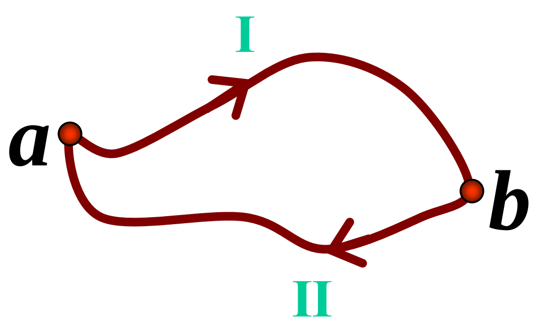
结果只取决于物体的始、末位置。

万有引力的功与路径无关！

重力、弹力、万有引力是保守力,做功与路径无关!

一切有心力都是保守力，有保守力作用的场称为保守力场。

4、保守力做功与路径无关的数学表达式



当质点在保守力的作用下沿闭合路径绕行一周：

$$\int_{a\,\mathrm{I}}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{a\,\mathrm{II}}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\int_{b\,\mathrm{II}}^{a}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

保守力所做的功为： $$\int_{a\,\mathrm{I}}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{b\,\mathrm{II}}^{a}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$$

即： $$\boxed{\oint\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0}$$

保守力沿任一闭合路径的功为零，即保守力的环流等于零。

二、势能

存在一个由质点的位置决定的函数 —— **势能函数**

它说明质点在保守力场中每一位置都储存着一种能量——**势能**。

定义**保守力所做的功等于势能增量的负值：**

$$\boxed{A_{ab} = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p}$$

为**势能差**的定义。

要确定质点在任一给定位置的势能值，应选某一参考位置，规定质点在参考位置时的势能为零，以它作为**势能零点**，则任意位置的势能就确定了。

如选位置b 为势能零点，即 $E_{pb}=0$ ，则：

$$E_{pa} = A_{ab} = \int_a^{零} \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r}$$

讨论:

1、势能是标量，为状态函数。

2、势能的单位与功的单位相同，也是焦耳（J）。

3、只要有保守力，就可引入相应的势能。非保守力不能引入势能。

4、势能仅有相对意义，所以必须指出零势能参考点。**两点间的势能差是绝对的。**

5、势能是属于具有保守力相互作用的质点系统的。

6、常用的几种势能函数：

1）重力势能：

选地面为重力势能零值面，则质点在任一距地面高度h 处的重力势能为：

$$\boxed{E_p = mgh}$$

2）弹性势能：

选弹簧无形变时的长度（x=0）处弹性势能为零，弹簧具有任一伸长x 时的弹性势能为：

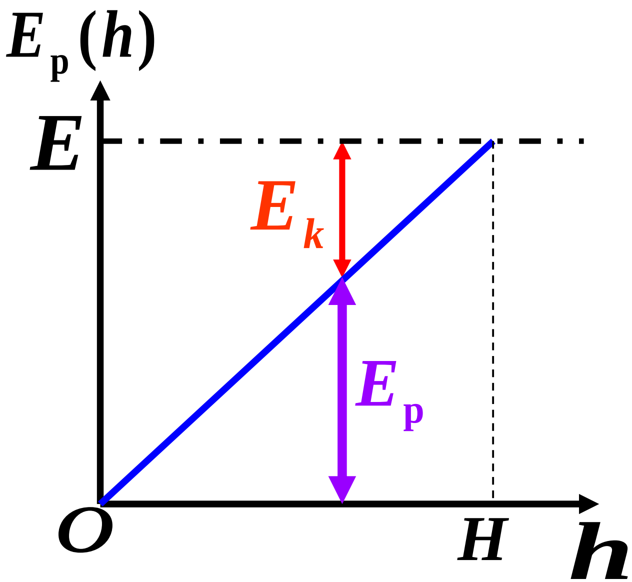
$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

3）万有引力势能：

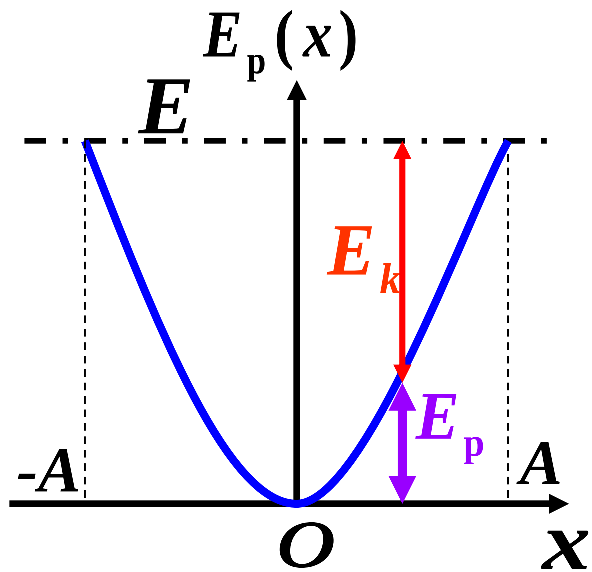
选距引力中心无限远处势能为零，质点距引力中心任一距离r 时的万有引力势能为：

$$\boxed{E_p = -G\frac{Mm}{r}}$$

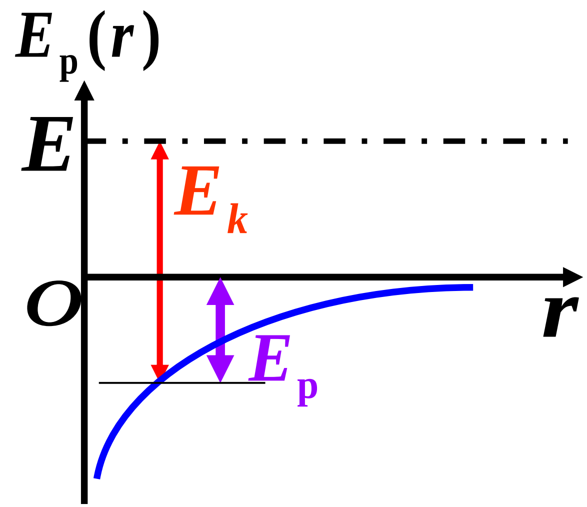
三、势能曲线：势能随位置变化的曲线。



重力势能曲线



弹性势能曲线



万有引力势能曲线

由势能曲线可以确定质点的运动范围、能量的转换关系。

四、由势能函数求保守力

$$\boxed{A_{ab} = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_{p}}$$

根据势能公式，有 $-\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \mathrm{d}A_{ab} = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = F_l\mathrm{d}l$

$$\therefore F_l = -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}l}$$

保守力沿某一给定的l方向的分量等于此保守力相应的势能函数沿l方向的空间变化率的负值。

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\vec{k}\right)$$

直角坐标系中由势能求保守力的一般公式。

例1. 速度大小为v_0=20m/s的风作用于面积为S=25m^{2}的船帆上, 作用力$F = aS\rho(v_0 - v)^2/2$, 其中a为无量纲的常数, ρ为空气密度, v为船速。

(1)求风的功率最大时的条件;

(2) a=l, v=15m/s,ρ =1.2kg/m,求t=60s内风力所做的功。

解: (1) $P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv = aS\rho(v_0 - v)^2 v/2$

令 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} = 0$

即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}[aS\rho(v_0 - v)^2 v/2] = 0$

$\therefore (v - v_0)(3v - v_0) = 0$

则$v = \dfrac{v_0}{3}$时, P最大。

例1. 速度大小为v_0=20m/s的风作用于面积为S=25m^{2}的船帆上, 作用力$F = aS\rho(v_0 - v)^2/2$, 其中a为无量纲的常数, ρ为空气密度, v为船速。

(1)求风的功率最大时的条件;

(2) a=l, v=15m/s, ρ =1.2kg/m,求t=60s内风力所做的功。

解: (2) $P = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$

$$A = \int_{t_0}^{t} P\mathrm{d}t = \int_0^{\Delta t} \frac{aS\rho(v_0 - v)^2 v}{2}\mathrm{d}t = \frac{aS\rho(v_0 - v)^2 v}{2}\Delta t$$

$$= \frac{1\times 25\times 1.2\times (20-15)^2\times 15}{2}\times 60 = 3.38\times 10^5 (J)$$

第11节　功能原理　机械能守恒定律

Work-Kinetic Energy Theorem & Conservation of Mechanical Energy

一、质点系的动能定理

对质点系中的第i个质点，质点的动能定理：

$$A_{i外} + A_{i内} = E_{k_{ib}} - E_{k_{ia}}$$

$$\sum_i A_{i外} + \sum_i A_{i内} = \sum_i E_{k_{ib}} - \sum_i E_{k_{ia}}$$

$\neq 0$

质点系的动能定理：$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{k_b} - E_{k_a}}$

内力能改变系统的总动能，但不能改变系统的总动量。

动能定理适用于惯性系，非惯性系应考虑惯性力的功。

二、功能原理：

$$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{k_b} - E_{k_a}}$$

$$A_{外} + \left(A_{保守力} + A_{非保守力}\right) = E_{k_b} - E_{k_a}$$

因为： $A_{保守力} = -(E_{p_b} - E_{p_a})$

$$A_{外} + A_{非保守力} = (E_k + E_p)_b - (E_k + E_p)_a$$

动能与势能之和 $E = E_k + E_p$ 称为**机械能**。

$$\boxed{A_{外} + A_{非保守内力} = E_b - E_a = \Delta E}$$

——**功能原理**

质点系在运动过程中，其机械能的增量等于外力的功和非保守内力的功的总和。

功能原理适用于惯性系，非惯性系应考虑惯性力的功。

$$A_{外} + A_{非保守内力} = E_b - E_a = \Delta E$$

三、机械能守恒定律：

若 $A_{外} + A_{非保守内力} = 0$，　则有：$E_b - E_a = 0$

即：$E = E_k + E_p =$ 恒量

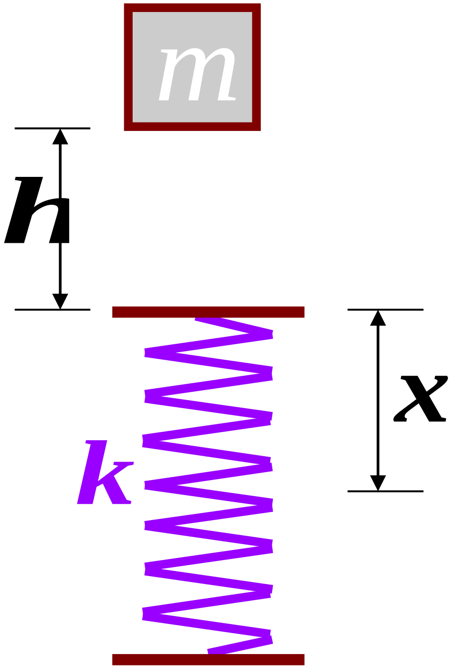
当**只有保守内力做功**时，质点系的总机械能保持恒定。

——**质点系的机械能守恒定律**

更普遍地，孤立系统能量守恒。

例1、如图，物体从静止落向弹簧，求物体可能获得的最大动能。

解： 设物体落到弹簧上时，弹簧被压缩x 。**取物体、弹簧、地球为系统，** 系统不受外力，而内力为重力和弹簧的弹力，故系统**机械能守恒**。



$$mgh = -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + E_k$$

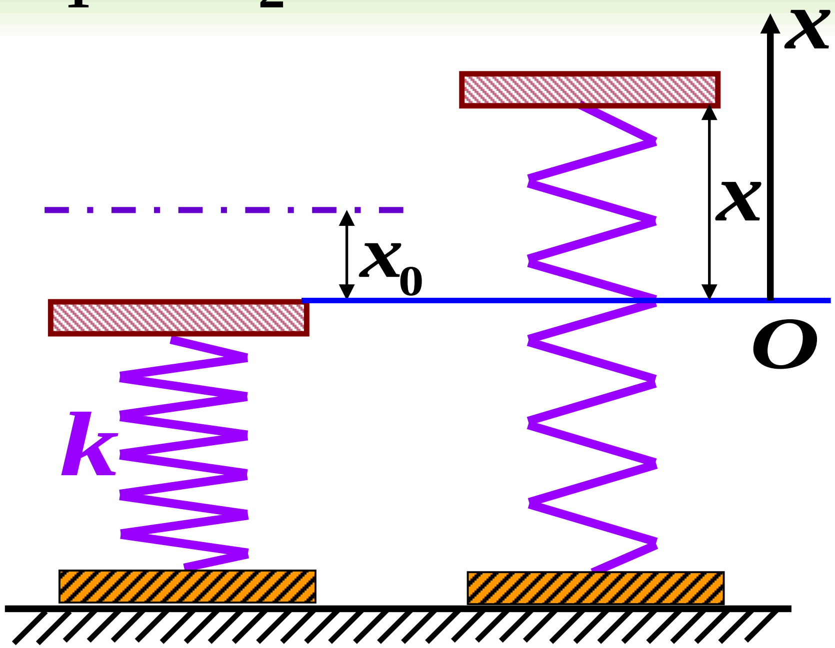
$$E_k = -\frac{1}{2}kx^2 + mg(x+h)$$

求极值：令：$\dfrac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}x} = 0 \longrightarrow x = \dfrac{mg}{k}$

$$E_{k_{\max}} = mgh + \frac{m^2 g^2}{2k}$$

例2、一根弹簧将质量分别为 m_1 和 m_2 的上下两水平板连接，下板放在地面上。

(1) 如以上板在弹簧上的平衡位置为重力势能和弹性势能零点，写出上板、弹簧以及地球这个系统的总势能。



解： 取坐标如图。

系统的**弹性势能：** $E_{pe}=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2-\frac{1}{2}kx_0{}^2$

系统的重力势能： $E_{pg}=m_1gx$

总势能： $E_p=E_{pe}+E_{pg}=\frac{1}{2}kx^2-kxx_0+m_1gx$

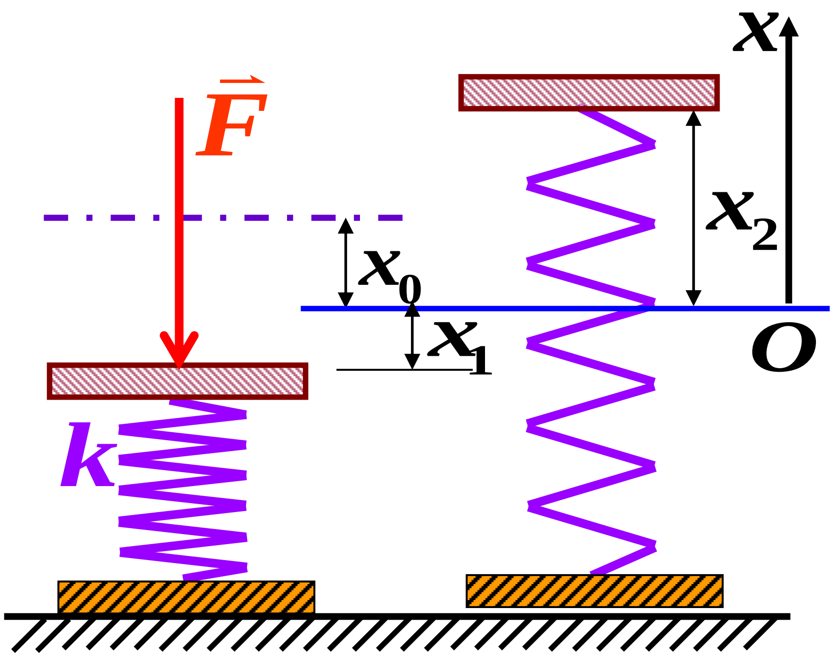
$kx_0=m_1g$ 故：$E_p=\frac{1}{2}kx^2$

（2）对上板加多大的向下压力，才能因突然撤去它，使上板向上跳而把下板拉起来?

初态（加力时）：$E_{k1}=0,\quad E_{p1}=\dfrac{1}{2}kx_1^2$

末态（撤力、弹簧伸长最大）：$E_{k2}=0,\quad E_{p2}=\dfrac{1}{2}kx_2^2$

机械能守恒：$\dfrac{1}{2}kx_1^2=\dfrac{1}{2}kx_2^2$



下板恰好提起时：

$$k(x_2-x_0)=m_2g$$

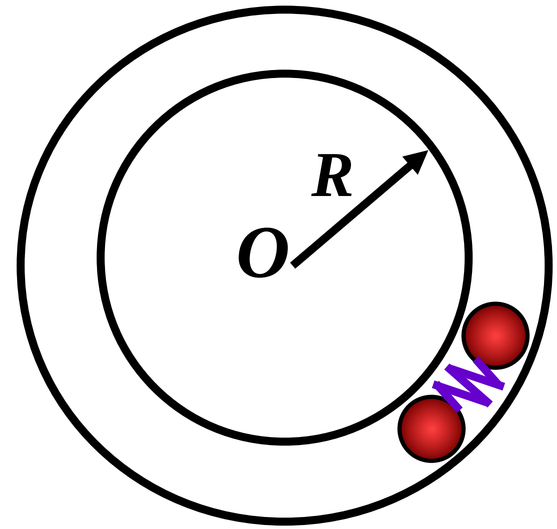
因为：$kx_1=F$，$kx_0=m_1g$

解得：$F=(m_1+m_2)g$

即当 $F\geq(m_1+m_2)g$ 时，下板就能被提起。

例3.在一个较大无摩擦的平均半径为R的水平圆槽内，放有两个小球。质量分别为m和M。两球可在圆槽内自由滑动。现将一不计长度的压缩的轻弹簧置于两球之间，如图：

(1)将弹簧压缩释放后，两球沿相反方向被射出，而弹簧本身仍留在原处不动。问小球将在槽内何处发生碰撞？



解： (1) 设两小球被射出后的角速度分别为ω_m和ω_M，

小球射出后，两小球对槽心O点的角动量守恒，有：

$$mR^2\omega_m = MR^2\omega_M \qquad \frac{\omega_m}{\omega_M} = \frac{M}{m}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_M}=\frac{M}{m}=\frac{\omega_m t}{\omega_M t}=\frac{\theta_m}{\theta_M}$$

又：$\theta_m+\theta_M=2\pi$

解得：$\theta_m=\dfrac{M}{m+M}2\pi$　　$\theta_M=\dfrac{m}{m+M}2\pi$

(2)设压缩弹簧具有弹性势能E_0，问小球射出后，经多少时间发生碰撞?

系统仅弹簧的弹力做功，机械能守恒，得：

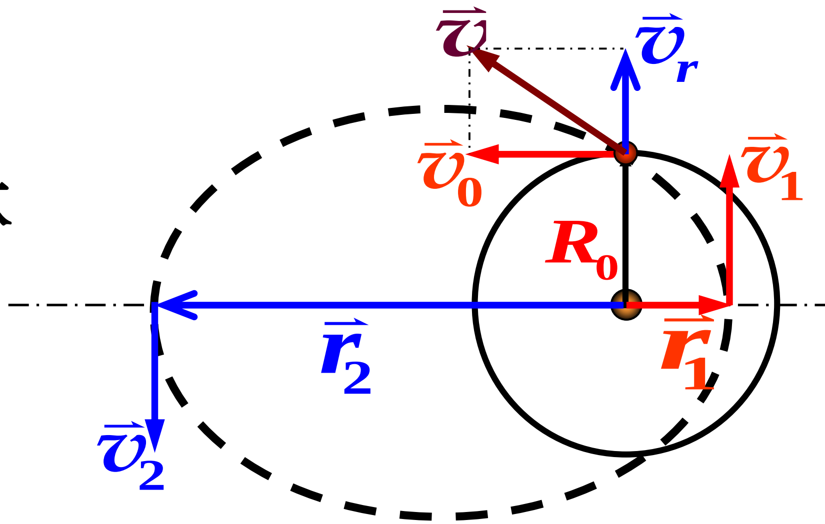
$$\frac{1}{2}m(R\omega_m)^2+\frac{1}{2}M(R\omega_M)^2=E_0$$

$$\omega_M=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mE_0}{M(m+M)}}$$

$$t=\frac{\theta_M}{\omega_M}=\frac{2\pi mR}{m+M}\sqrt{\frac{M(m+M)}{2mE_0}}$$

例4、一飞船环绕某星体作圆轨道运动，半径R_0，速率为v_0。突然点燃一火箭，其冲力使飞船增加了向外的径向速度分量v_r（设$v_r < v_0$），因此飞船轨道变椭圆形。求飞船与星体的最远与最近距离。（习题2—60)

解: $$G\frac{Mm}{R_0^2}=m\frac{v_0^2}{R_0}\cdots\cdots(1)$$



飞船在火箭点燃前或后对星体的**角动量守恒**。

对近星体点或远星体点有:

$$m\,v_0R_0=m\,v\,r\quad(2)$$

飞船在椭圆轨道上运动**机械能守恒**。

$$\frac{1}{2}m(v_0^2+v_r^2)-G\frac{Mm}{R_0}=\frac{1}{2}m\,v^2-G\frac{Mm}{r}\cdots\cdots(3)$$

$$v_0^2R_0^2\left(\frac{1}{r}\right)^2-2v_0^2R_0\left(\frac{1}{r}\right)+(v_0^2-v_r^2)=0$$

$\dfrac{1}{r}$ 的两根即为所求

第2章 牛顿运动定律总结

1. 三个定律

牛顿三定律，特别是：

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$$

2. 质点的动量： $\vec{p}=m\vec{v}$

动量定理： $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$

质点系的动量： $\vec{p}=\sum\vec{p}_i$

质点系动量定理： $\int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{F}_{i外}\mathrm{d}t=(\sum\vec{p}_i)_2-(\sum\vec{p}_i)_1$

质点系动量守恒定律： 当$\sum\vec{F}_i=0$时，$\sum\vec{p}_i=$恒矢量

3. 质点的角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p} \qquad \vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

角动量定理：
$$\begin{cases} \vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1 \end{cases}$$

角动量守恒定律： 当$\vec{M}=0$时，$\vec{L}=$恒矢量

4. 质点的动能定理

$$A_{ab}=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=E_{kb}-E_{ka}=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

5. 保守力的功 $A_{ab} = -(E_{pb} - E_{pa})$

典型保守力对应的势能函数，势能零点。

6. 质点系的功能原理

$$A_{外} + A_{非保守内力} = E_b - E_a = \Delta E$$

7. 机械能守恒定律

当$A_{外} + A_{非保内} = 0$时，$E = E_k + E_p =$ 恒量