2.4 矩阵的分块（Partitioned matrix）

- 矩阵的分块的意义
- 矩阵分块的加法、数乘和乘法
- 分块对角矩阵
- 分块矩阵的行列式

2.4　矩阵的分块

概述

- 将矩阵用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为的子块；以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.
- 在矩阵理论的研究中,矩阵的分块是处理高阶矩阵的一种最基本、最重要的计算方法与技巧.
- 矩阵分块的目标：
  - 使表示简化，能突出结构特点.
  - 使运算简化，能揭示计算过程对结果的影响.

重点：分块矩阵的计算.

难点：如何分块以达到目的.

一、矩阵的分块

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用**分块法**，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算.

将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

例 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$,

即 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} aI_2 & O \\ I_2 & B \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$ 其中 $$\boldsymbol{A_1}=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

分块使记法简单，突出矩阵的特点。

二、分块矩阵的运算

(1) 分块矩阵的加法：

设矩阵A与B的行数相同,列数相同,采用同样的分块法

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}为同型矩阵，则有

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 数乘分块矩阵

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$为数，那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

(3)分块矩阵的乘法：

设A为$m\times l$矩阵，B为$l\times n$矩阵，分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数，那末

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr}\end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}\quad(\boldsymbol{i}=1,\cdots,\boldsymbol{s};\ \boldsymbol{j}=1,\cdots,\boldsymbol{r}).$

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

归纳：

1. 如果矩阵的分法使计算有意义，则分块矩阵的加法，数乘矩阵、矩阵的乘法与矩阵相应运算的规律一样（对子块矩阵象数一样处理）。
2. 注意分块矩阵的转置规律。
3. 矩阵乘法列分块的几个重要结果

三、分块对角矩阵

(5) 设A为n阶矩阵, 若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵, 且非零子块都是方阵, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵,那末称 A为分块对角矩阵.

分块对角矩阵的性质

（1）
$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2B_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

分块对角矩阵的性质

（2）设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s \end{pmatrix}$,

若 $|A_i| \neq 0 (i = 1,2,\cdots,s)$,则 $|A| \neq 0$,并有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

(3) $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

四、分块矩阵的行列式

设下列矩阵为方阵

$$(1)\text{设 } A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix}=|A||D|.$$

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把A,B分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}I&O\\A_1&I\end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & I \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} I & O \\ A_1 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & I \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B_{11} & I \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

又 $$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

例2　设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

求 $A+B$,　ABA.

解 将 A, B 分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$ 其中

$$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$ 其中

$$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & 0 \\ 0 & A_2+B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

$$A_2+B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad A+B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & 0 \\ 0 & A_2+B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$$

$$ABA=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1B_1A_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_1A_1=\begin{pmatrix} a^3+a & 2a^2+1 \\ a^2 & a^3+a \end{pmatrix},$$

$$A_2B_2A_2=\begin{pmatrix} b^3+2b & 2b^2+1 \\ 3b^2 & b^3+2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore ABA = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1A_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^3+a & 2a^2+1 & 0 & 0 \\ a^2 & a^3+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3+2b & 2b^2+1 \\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3+2b \end{pmatrix}.$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解 $A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$, $\quad A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$; $\quad A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$,

$$A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right);\qquad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix};$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

本节内容要点：

在矩阵理论的研究中，矩阵的分块是一种最基本，最重要的计算技巧与方法.

分块矩阵之间的运算

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算性质类似

(1) 加法　同型矩阵，采用相同的分块法

(2) 数乘　数k乘矩阵A，需k乘A的每个子块

(3) 乘法

若A与B相乘，需A的列的划分与B的行划分相一致

(4) 转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

(5) 分块对角阵的行列式与逆阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & O & \\ & O & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & O & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$$

A可逆$\Leftrightarrow A_i$可逆$i=1,2,\cdots,s$且

$$A^{-1}=diag\left(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1}\right).$$

思考题

设 $A=\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$,其中$B$和$C$都是可逆方阵,

证明A可逆,并求A^{-1}.