大学物理（一）

任课老师：蔡林
cailin@hust.edu.cn

回顾

● 静电场基本性质

高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$ 有源场

环路定理：$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ 无旋场

● 电势差和电势（电位）

1. 电势差、电势的定义：

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V_p = \int_p^{V=0} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

● 点电荷的电势

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$(V_\infty = 0)$$

2. 电势的计算

1）定义法

$$\boxed{V_p = \int_p^{V=0} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

$$A = q\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = q(V_a - V_b)$$

2) 叠加法

$$\boxed{V_P = \sum_i V_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$

$$\boxed{V_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

回顾

- 电势梯度 $\boxed{\vec{E} = -gradV}$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

电势梯度是电势的最大空间变化率

$$\boxed{\vec{E} = -(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k})V}$$

- 静电场中的导体

静电感应 → →

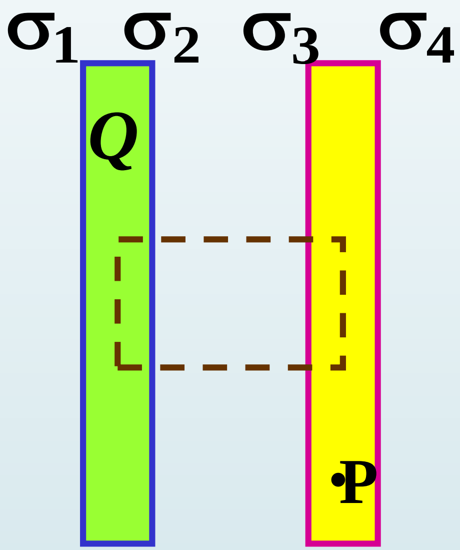
静电平衡条件 $\begin{cases} \text{导体内部} & \vec{E} = 0 \\ \text{外表面} & \vec{E} \perp \text{表面} \end{cases}$

静电平衡时导体内部没有净电荷

例：一金属平板，面积为S带电Q，在其旁放置第二块同面积的不带电金属板。求 (1)静电平衡时，电荷分布及电场分布。(2)若第二块板接地？忽略边缘效应。

注： 1)达静电平衡，导体内部无净电荷。

2)不考虑边缘效应，电荷是均匀分布。



解：(1)设四个面上电荷面度为 $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ \sigma_4$

则有： $\sigma_1+\sigma_2=\dfrac{Q}{S}$

$\sigma_3+\sigma_4=0$

如图取高斯柱面可得： $\oint\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=0 \qquad \sum q_i=0$

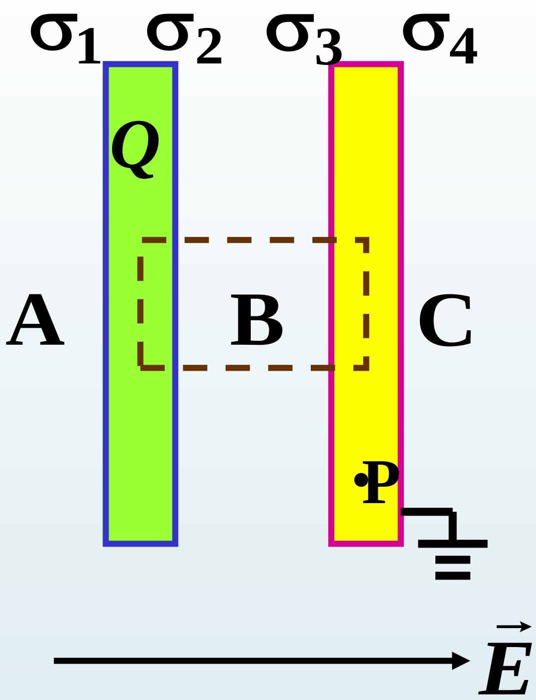
即： $\sigma_2+\sigma_3=0$

导体内任意一点P，其电场 $\vec{E}=0$

$$\therefore\ \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

联立求解

可得： $\sigma_1=\sigma_2=\dfrac{Q}{2S} \qquad \sigma_3=-\dfrac{Q}{2S} \qquad \sigma_4=\dfrac{Q}{2S}$



$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{Q}{2S} \qquad \sigma_3=-\frac{Q}{2S} \qquad \sigma_4=\frac{Q}{2S}$$

按场强叠加原理可求得：

$$E_A=-\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \qquad E_B=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \qquad E_C=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

(2)第二板接地

则 σ_4与大地构成一导体 $\sigma_4=0$

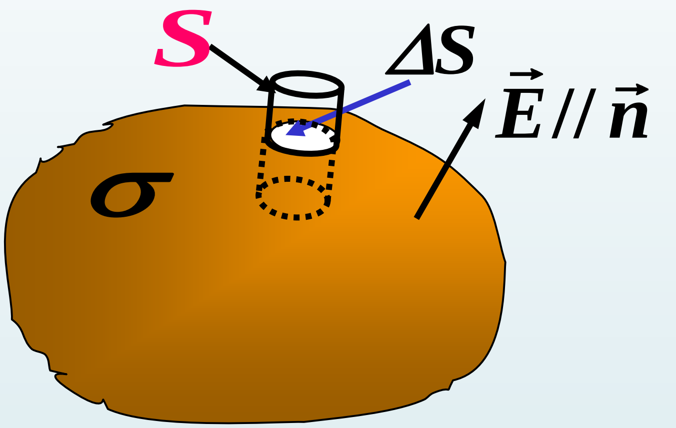
同理可得：
$$\begin{cases} \sigma_1+\sigma_2=\dfrac{Q}{S} \\ \sigma_2+\sigma_3=0 \\ \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0 \end{cases}$$

联立求解得： $\sigma_1=0 \qquad \sigma_2=\dfrac{Q}{S} \qquad \sigma_3=-\dfrac{Q}{S}$

$$E_A=E_C=0 \qquad E_B=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

（2）导体表面附近$\vec{E}$的大小与该处的面电荷密度σ成正比

证明：如图取高斯面S



根据高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

则有

$$E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta S$$

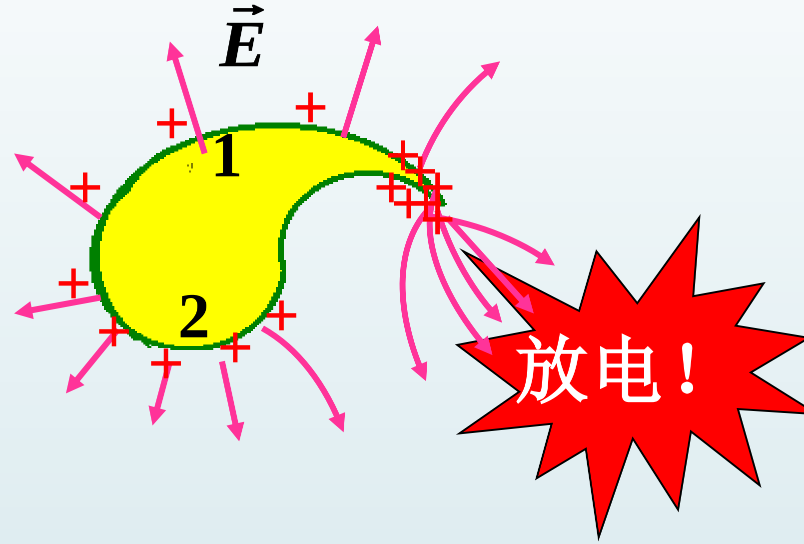
1º $\vec{E}$ 是导体表面电荷及外面电荷的合场强!

2º 上式并不给出σ的分布。σ的分布较复杂。

一般导体的电荷分布与其形状及附近的其它带电体有关。

（3）孤立导体表面上各处的面电荷密度σ与各处表面曲率半径R成反比

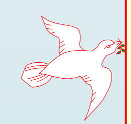
即：$\sigma \propto \dfrac{1}{R}$



如右图中1、2两处的面密度分别为σ_1、σ_2

则有 $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$

例



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

平坦处：R大 σ小， 则E 小；

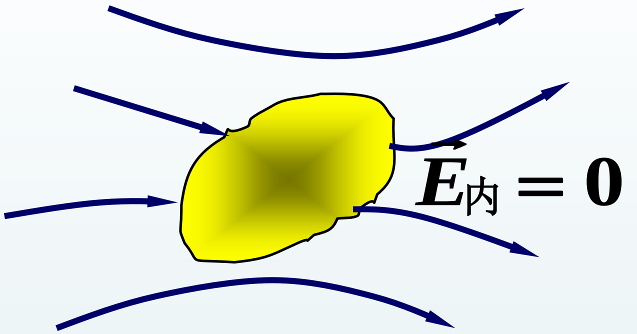
尖端处：R 很小，σ很大，则E 很强；→尖端放电

其应用很多

凹面处：曲率为负值， σ很小， 则E 很弱。

4. 静电屏蔽

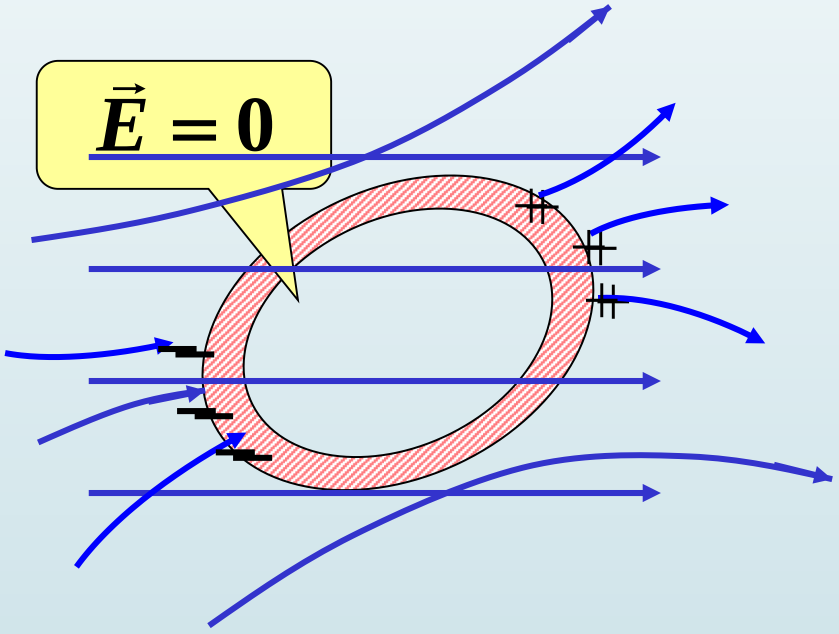
导体壳：（静电平衡时）



（1）腔内无带电体情况

内表面无电荷

腔内 $\vec{E} = 0$（无场区）



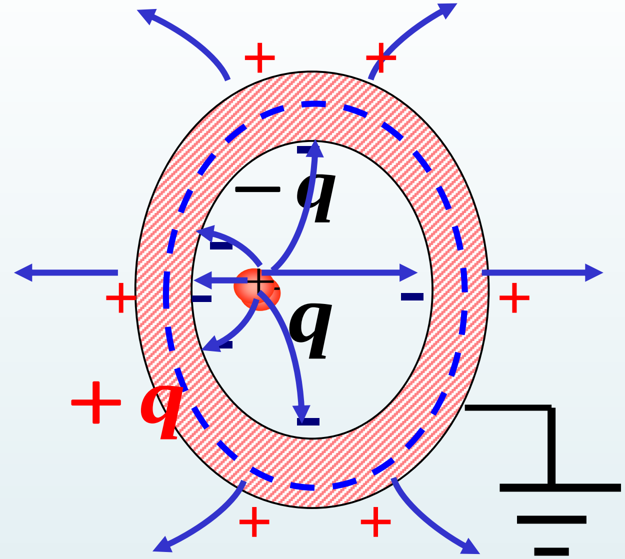
外部电场不影响内部

——静电屏蔽。

→ 屏蔽外场

（2）腔内有带电体情况

导体壳感应带电：



内表面电荷与腔内电荷等值异号

（用高斯定理可证明）

外表面电荷与腔内电荷等值同号

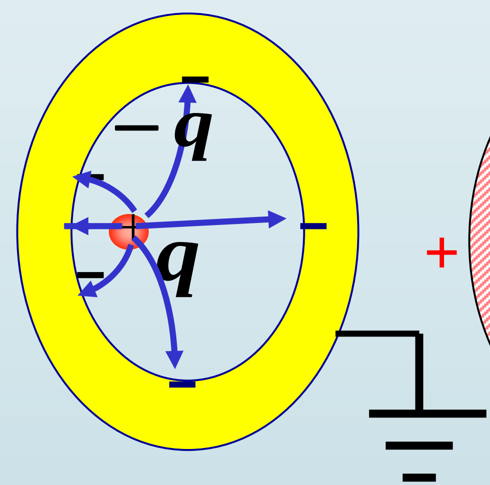
（若导体壳带电Q 则外表面上电荷为 $Q+q$ ）

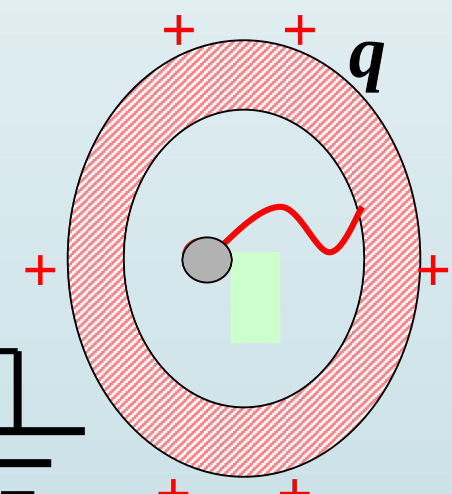
导体壳接地：

内部电场不影响外部

——静电屏蔽。

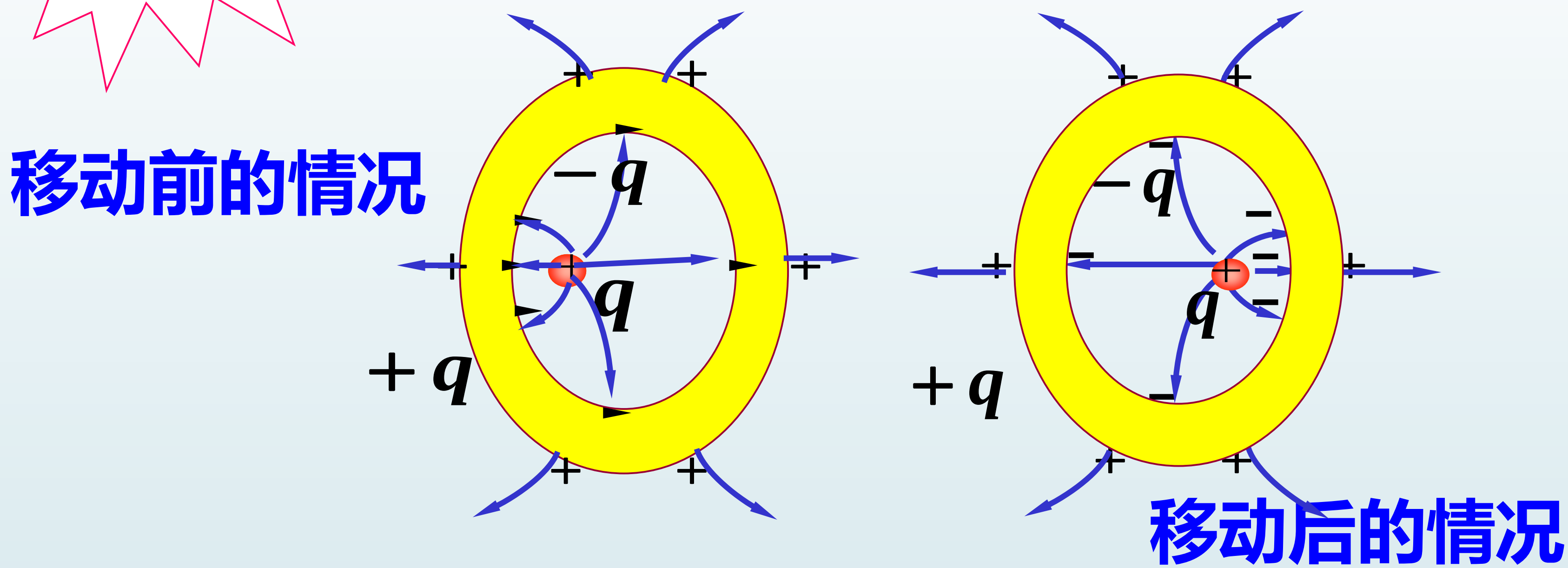
→屏蔽内场





讨论

腔内电荷q移动时：



内表面带电总量“$-q$”不变，

$\sigma_{内}$?改变，腔内电场分布情况改变。

外表面带电总量“$+q$”不变，

$\sigma_{外}$?不变，壳外电场分布不变。

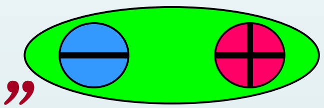
八、静电场中的电介质

电介质 ⟶ 绝缘体 $\begin{cases} \text{不导电} \\ \text{在外电场 } E_{内}\neq 0 \end{cases}$

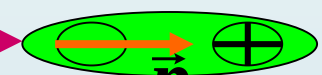
1.电介质的电结构

每个分子 $\begin{cases} \text{带负电的电子} \rightarrow \text{束缚电子} \\ \text{带正电的原子核} \end{cases}$ 分布在10^{-10}m范围

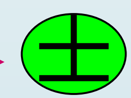
一般分子内正负电荷不集中在同一点上 $\begin{cases} \text{所有负电荷} \rightarrow \text{负“重心”} \\ \text{所有正电荷} \rightarrow \text{正“重心”} \end{cases}$



两类电介质：$\begin{cases} \text{“重心”不重合} \longrightarrow \\ \text{“重心”重合} \longrightarrow \end{cases}$



$\vec{p}$ 有极分子

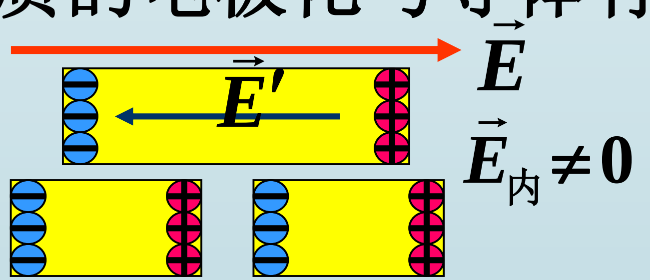


$\vec{p}=0$ 无极分子

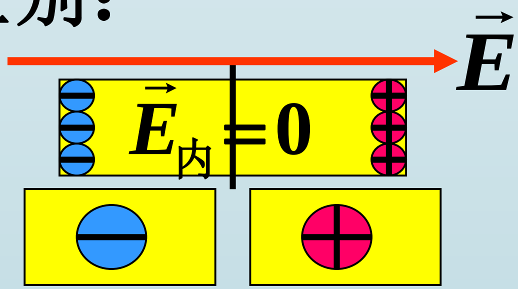
两种电介质放入外电场，其表面上都会出现电荷 ⟶ **电极化**

电介质的电极化与导体有本质的区别：

电介质：



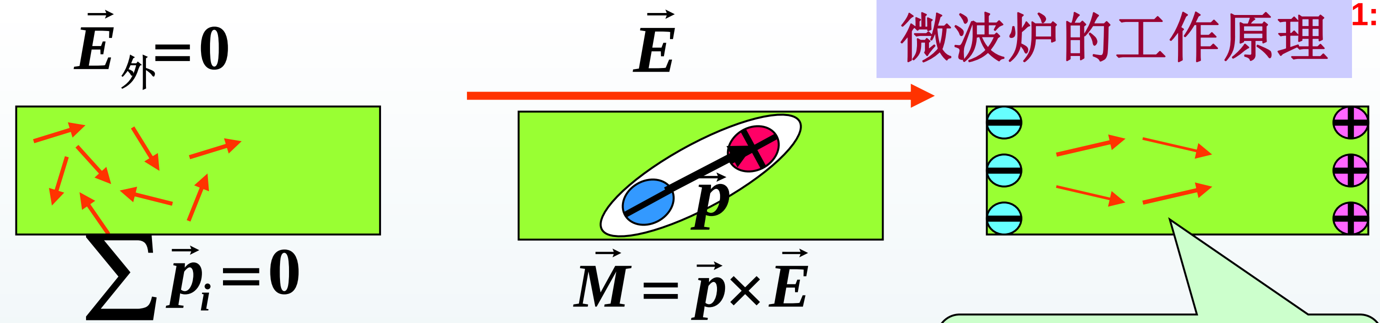
导体：



2.电极化现象

微波炉的工作原理 1:17

1）有极分子

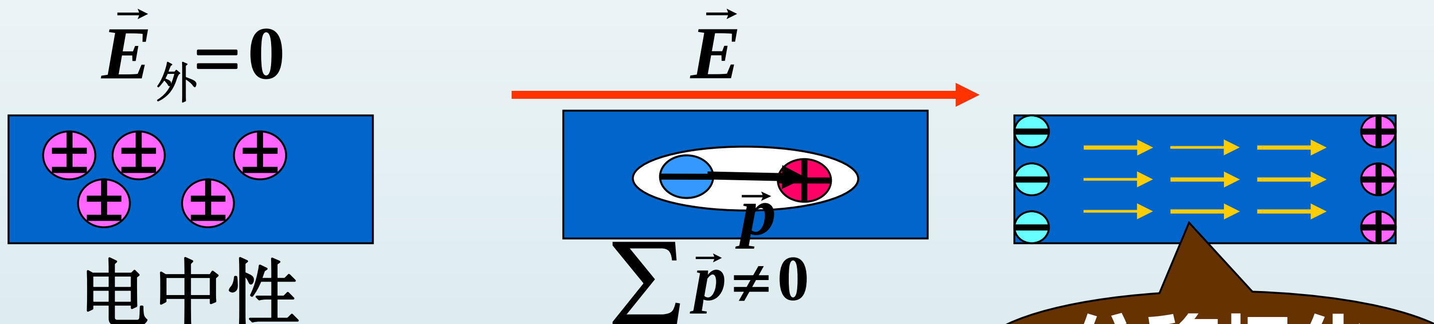


取向极化

可见：$\vec{E}_{外}$↑强， $\vec{p}$排列越整齐

端面上束缚电荷越多，电极化程度越高。

2）无极分子



位移极化

同样：$\vec{E}_{外}$↑强，$\vec{p}$→大端面上束缚电荷越多，

电极化程度越高。

说明：(1)取向极化→有极分子，位移极化→两种介质

(2)对均匀电介质体内无净电荷，束缚电荷只出现在表面上

(3)束缚电荷与自由电荷在激发电场方面，具有同等的地位

一般地，$\vec{E}_{外}$不同，则介质的极化程度不同。

3.电极化强度矢量 $\vec{P}$

1）$\vec{P}$ 的定义：$\vec{P}=\dfrac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$ **(单位体积内所有分子的电偶极矩之矢量和)**

单位：C/m²　　　显然：$\vec{E}_{外}=0$　　$\sum \vec{p}_i=0$　　$\vec{P}=0$

2）$\vec{P}$与$\vec{E}$成正比

实验指出：对各向同性的电介质有：$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}$

$\chi_e=\varepsilon_r-1$　　χ_e—电极化率　　$\varepsilon_r\rightarrow$相对介电常数

即：$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$　　$\vec{E}=\vec{E}_{外}+\vec{E}'$

3）电击穿—电介质的击穿

当$\vec{E}$足够强时，分子中正负电荷被拉开→自由电荷

绝缘体 → 导体 ⟶ 电介质击穿

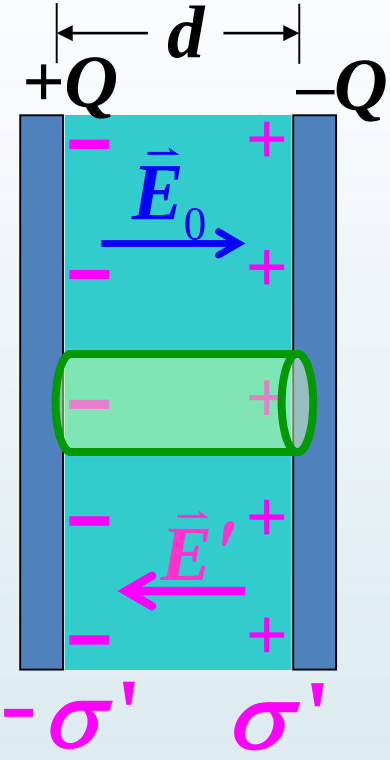
电介质所能承受不被击穿的最大电场强度 ➡ 击穿场强

例：尖端放电，空气电击穿 E=3 kv/mm

演示实验

1. 经典滚筒
2. 电荷曲率分布
3. 富兰克林轮
4. 避雷针尖端放电

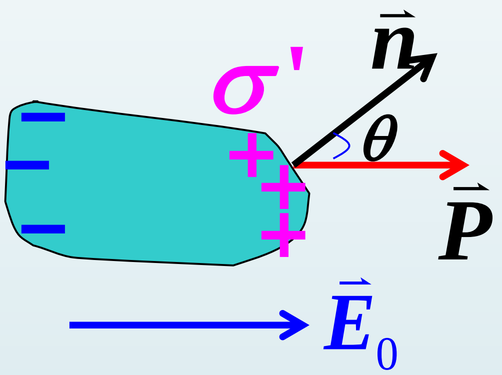
4. 极化强度与束缚电荷面密度的关系：



极化强度的大小：

$$P = \frac{\left|\sum \vec{p}_i\right|}{\Delta V} = \frac{\sigma' \Delta S d}{\Delta S d} = \sigma'$$

P与σ'的一般关系为：



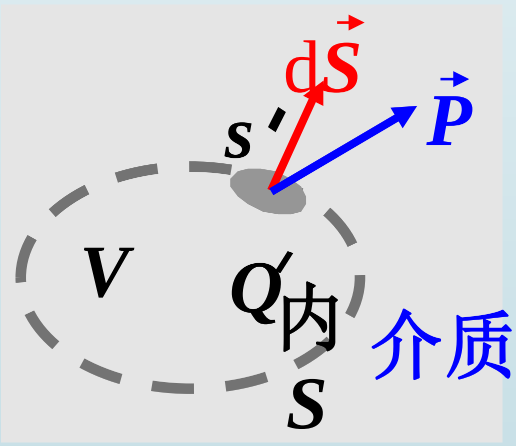
$$\sigma' = P_n = P\cos\theta = \vec{P}\cdot\vec{n}$$

$\vec{P}$与介质表面外法线的夹角

封闭面S内的束缚电荷：

$$Q'_{内} = -\oint \sigma' \mathrm{d}S$$

$$= -\oint \vec{P}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\oint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



5. 电介质中静电场的基本规律

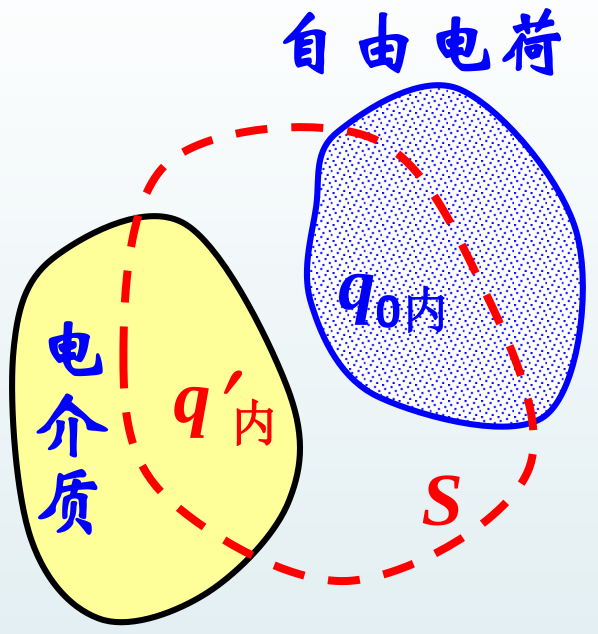
存在介质时，静电场的规律：

$$\vec{E}_0 \to \sigma' = \vec{P}\cdot\vec{n} \to \vec{E}' \to \vec{E} \to \vec{P} \to \cdots$$

给定自由电荷分布，如何求稳定后的电场分布和束缚电荷分布？

实际计算：引入一个包含束缚电荷效应的辅助量 $\vec{D}$，直接求 $\vec{D}$，再求 $\vec{E}$ 。

(1).电位移矢量$\vec{D}$，$\vec{D}$ 的高斯定理



$\vec{E}$ 的高斯定理：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \left(q_{0内} + q'_{内}\right)/\varepsilon_0$$

$\vec{E}$：总场强， q_0：自由电荷，

q'：束缚电荷

束缚电荷 $q'_{内} = -\oint \vec{P}\cdot d\vec{S}$，代入移项得

$$\oint \underline{(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})}\cdot d\vec{S} = q_{0内}$$

定义电位移矢量： $\vec{D} \equiv \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

$$\boxed{\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q_0}$$

有介质空间的高斯定理

通过任意封闭曲面的电位移矢量的通量，等于该封闭面所包围的自由电荷的代数和。

说明：

(1) $\vec{D}$的单位:C/m^2

(2) 电位移线（$\vec{D}$ 线）发自正自由电荷，止于负自由电荷。在闭合面上的通量只和闭合面内的自由电荷有关。

(3) 各向同性、线性介质 $\vec{D}$、$\vec{E}$、$\vec{P}$ 的关系

$$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

(2). 环路定理

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

束缚电荷$q_{束}$产生的电场与
自由电荷$q_{自}$产生的电场性质相同 → 保守力场

3. 归纳总结

(1) 有介质存在时，出现三个物理量 $\vec{E}$、$\vec{P}$、$\vec{D}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{P} &= \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\end{aligned}\right\} \quad \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

(2) 四个常数之间的关系 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e$

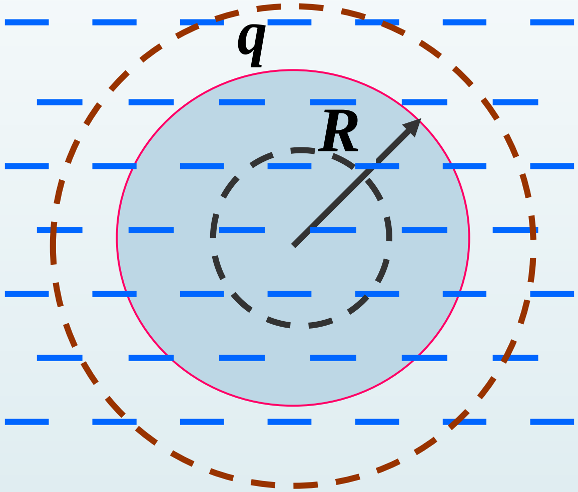
(3) 解题一般步骤:

由$q_{自}$ $\longrightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_{自} \longrightarrow \vec{D}$

$\longrightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon} \longrightarrow \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \longrightarrow \sigma'$

由$q_{自}$ → $\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_{自}$ → $\vec{D}$ → $\vec{E}=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon}$ → $\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$

例1. 一个带正电的金属球，半径为R，电量为q，浸在一个大油箱中，油的相对介电常数为ε_r。求E、$V(r)$、P。



分析: 电荷q及电介质呈球对称分布，则E、D也为球对称分布

解： 取半径为r的高斯同心球面

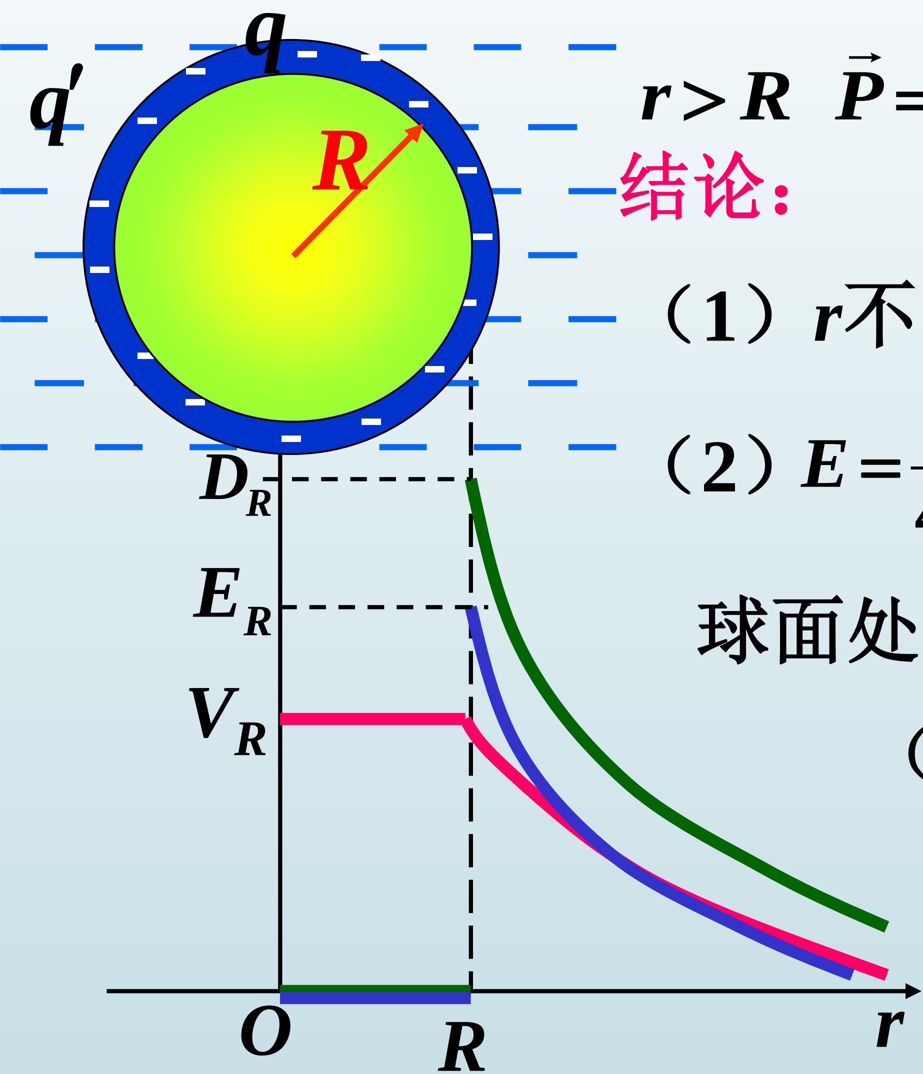
$r<R$　$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_i=0 \quad \therefore D=0$

$r\geq R$　$\left.\begin{aligned}&\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=D\cdot 4\pi r^2\\ &\sum q_i=q\end{aligned}\right\}\ \vec{D}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}\begin{cases} r<R & E=0\\ r\geq R & \vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \qquad E<\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\end{cases}$$

$$V=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}\quad\begin{cases} r<R & V=(\overset{0}{\int_r^R}+\int_R^{\infty})\vec{E}\cdot d\vec{r}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R}\\ r\geq R & V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r}\end{cases}$$

$$\begin{cases} r<R & \vec{D}=0 & \vec{E}=0 & V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R} \\ r\geq R & \vec{D}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\vec{e}_r & \vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r} \end{cases}$$



$$r>R \quad \vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{E}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

结论:

（1）r不同处，极化程度不同

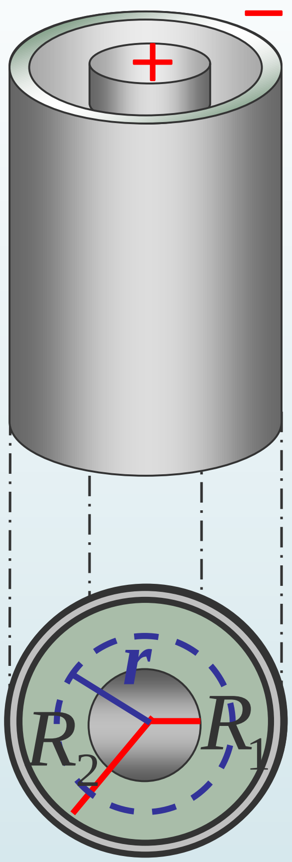
（2）$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}<\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 减弱：$\dfrac{1}{\varepsilon_r}$

球面处的介质油面上出现了束缚电荷q'.

（3）空间某点处的$\vec{E}$仅与该点的电介质有关，而该处的V与积分路径上所有电介质有关。

例2. 图中是由半径为R_1的长直圆柱导体和同轴的半径为R_2的薄导体圆筒组成，其间充以相对电容率为ε_r的电介质。设直导体和圆筒单位长度上的电荷分别为$+\lambda$和$-\lambda$。

求(1)电介质中的电场强度、电位移和极化强度；**(2)**电介质内外表面的极化电荷面密度。



解： **(1)** $(R_1 < r < R_2)$ $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \lambda l$

$$D 2\pi r l = \lambda l \qquad \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e}_r$$

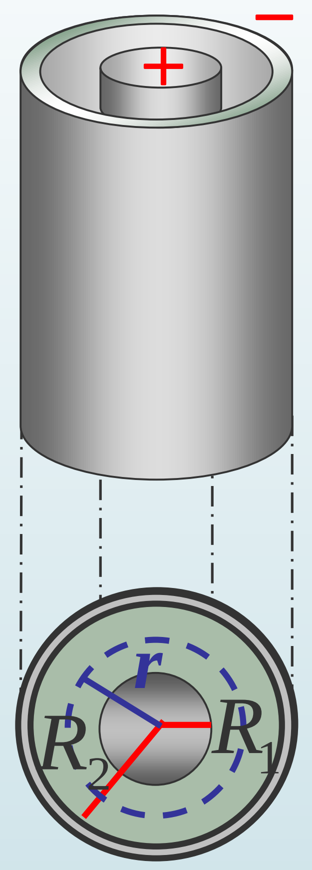
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}\vec{e}_r$$

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{2\pi \varepsilon_r r}\lambda \vec{e}_r$$

(2) 电介质内外表面的极化电荷面密度。

$$\boxed{\sigma' = P_n}$$

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{2\pi\varepsilon_r r}\lambda\vec{e}_r$$



内表面： $(r = R_1)$

$$\sigma' = P_n\Big|_{r=R_1} = -P\Big|_{r=R_1}$$

$$= -\frac{(\varepsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_1}$$

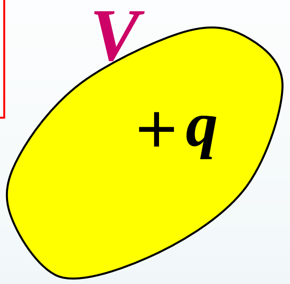
外表面： $(r = R_2)$

$$\sigma' = P_n\Big|_{r=R_2} = \frac{(\varepsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_2}$$

九、电容

1.孤立导体的电容

$$V=\int_{p}^{V=0}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$



若一孤立导体带电$+q$，

则该导体具有一定的电势V，且$q\uparrow$、$V\uparrow$

即有： $\dfrac{q}{V}=C$ C=比例系数 $\begin{cases}\text{与}q\text{、}V\text{无关}\\ \text{与导体的尺寸形状有关}\end{cases}$

C：称为孤立导体的**电容**。 单位：F(法拉)

物理意义：导体每升高一个单位的电势所需要的电量。

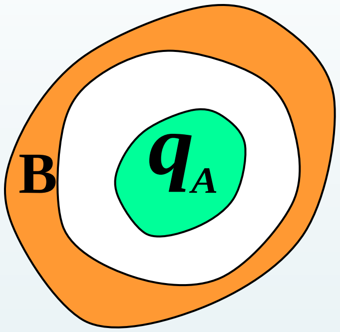
一般地，导体不同，C就不同。

例： 求一个带电导体球的电容。设球带电q .

$$\because V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \therefore C=\frac{q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$$

地球半径 $R=6.4\times10^{6}\text{m}$ $C=700\times10^{-6}\text{F}=700\ \mu\text{F}$

2. 电容器及其电容



$V_A - V_B \propto q_A$ ，且与附近其它的带电体无关。

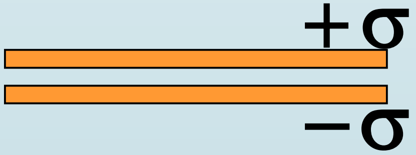
这种导体系统 ⟶ **电容器**

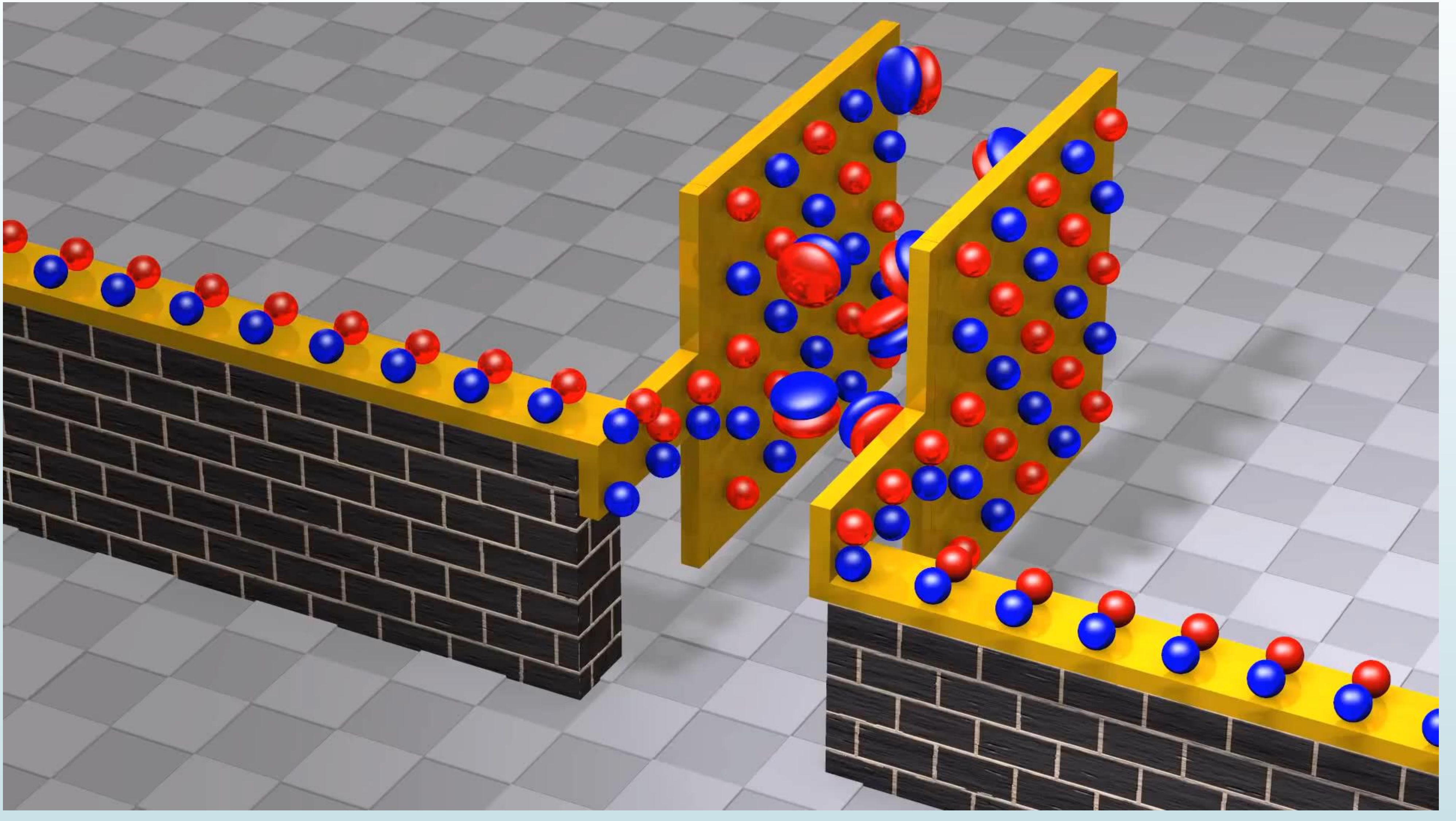
A、B称为电容器的极板。

其电容为：

$$C_{AB} = \frac{q}{V_A - V_B}$$

例如：一对靠得很近的平行平面导体板构成平行板电容器。

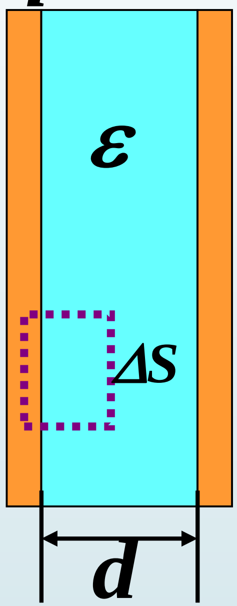




例: 求平行板电容器的电容C。

应用：键盘，触摸屏，...

设:平行金属板的面积为S，间距为d，充满介电常数为ε的电介质，左极板$+q$，右极板$-q$



分析：$C \rightarrow \Delta V \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow q_{自}$

解： 取底面积为ΔS的高斯柱面，如图所示

由高斯定理有

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{左} \vec{D}\cdot d\vec{S}}_{0} + \underbrace{\int_{侧} \vec{D}\cdot d\vec{S}}_{0} + \int_{右} \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot\Delta S$$

$$\sum q_{自} = \sigma\cdot\Delta S \longrightarrow D=\sigma \longrightarrow E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

两极间的电势差：$\Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\cdot d = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon}$

$$\therefore C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad C \propto \varepsilon、S、\frac{1}{d}$$

若要增大C：增大S、 减小d、 或选用ε_r大的电介质

求C的步骤： 由 $q_{自} \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow \Delta V \rightarrow C = \dfrac{q}{\Delta V}$

C与q无关，但为求出ΔV，可先假设极板带电。

注：

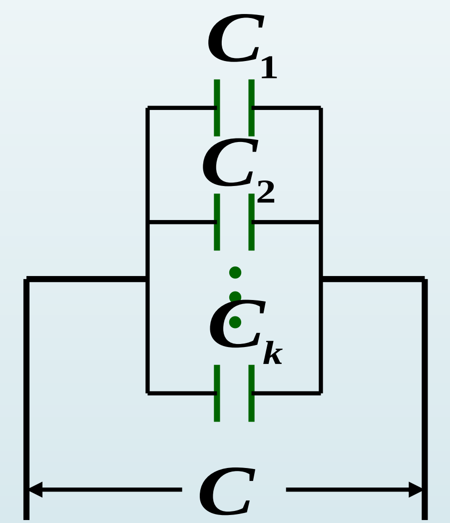
(1)衡量一个实际的电容器的性能主要指标 $\begin{cases} \text{C的大小} \\ \text{耐压能力} \end{cases}$

常用电容：100μF25V、470pF60V

(2)在电路中，一个电容器的电容量或耐压能力不够时，

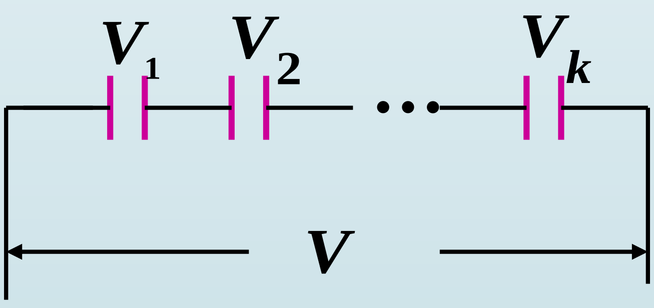
可采用多个电容连接：

如增大电容，可将多个电容并联：



$$\boxed{C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k}$$

若增强耐压，可将多个电容串联：



耐压强度：$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_K$

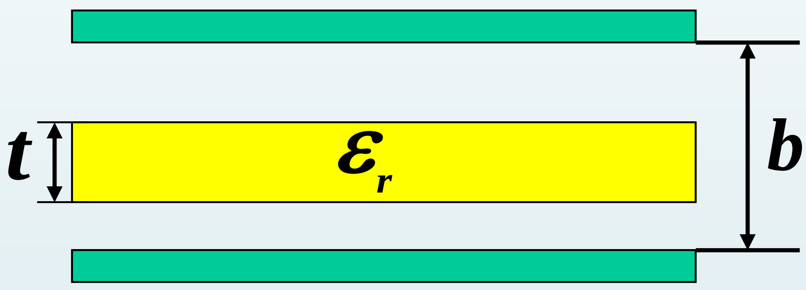
但是电容减小：$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_k}}$$

3. 电容器电容的计算

另解：看作三个电容器的串联.

例: 一平行板电容器，两极板间距为b、面积为S，其中置一厚度为t 的平板均匀电介质，其相对介电常数为ε_r，求该电容器的电容C。

应用：
油量计，
测ε_r，
…



解： 根据定义 $C=\dfrac{q}{\Delta V}$

设极板面密度为σ、$-\sigma$

由高斯定理可得：

空气隙中 $D=\sigma$ 则：$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$　　介质中 $D=\sigma$ 则：$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$

$$\Delta V=V_+-V_-=\int_+^-\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\left(\int_0^{t_1}+\int_{t_1}^{t_1+t}+\int_{t_1+t}^{b}\right)\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\left[\varepsilon_r b-\left(\varepsilon_r-1\right)t\right]$$

$$\therefore C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r b-\left(\varepsilon_r-1\right)t}=\frac{\varepsilon_0 S}{b-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t}>\frac{\varepsilon_0 S}{b}$$

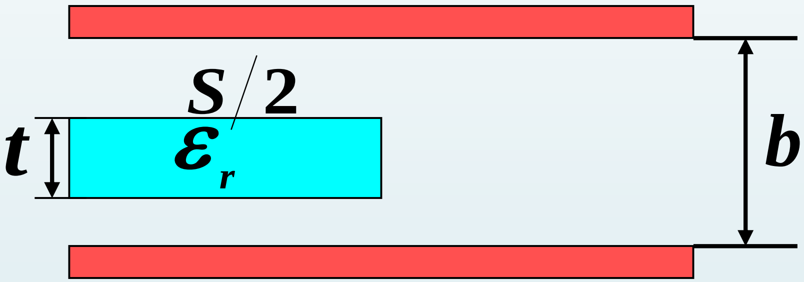
与t的位置无关

$t\uparrow$、$C\uparrow$

$t=b$　　$C=\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{b}$

例： 一平行板电容器，两极板间距为b、面积为S，在其间平行地插入一厚度为t，相对介电常数为ε_r，面积为$S/2$的均匀介质板。设极板带电Q，忽略边缘效应。

求 (1)该电容器的电容C，(2)两极板间的电势差ΔV。



$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{b-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t}$$

解： （1） 等效两电容的并联

左半部：$C_{左}=\dfrac{\varepsilon_0 S/2}{b-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t}$

右半部：$C_{右}=\dfrac{\varepsilon_0 S/2}{b}$

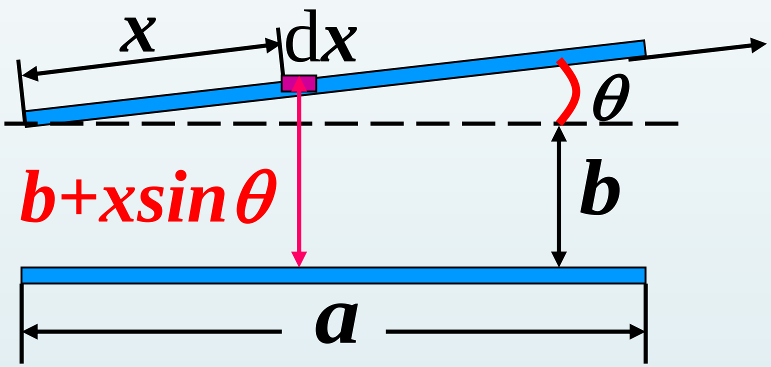
电容并联相加：$C=C_{左}+C_{右}=\dfrac{\varepsilon_0 S\left[2\varepsilon_r b-(\varepsilon_r-1)t\right]}{2b\left[\varepsilon_r b-(\varepsilon_r-1)t\right]}$

（2）$\Delta V=\dfrac{Q}{C}=\dfrac{2b\left[\varepsilon_r b-(\varepsilon_r-1)t\right]Q}{\varepsilon_0 S\left[2\varepsilon_r b-(\varepsilon_r-1)t\right]}$

问：

$Q_{左}\stackrel{?}{=}Q_{右}$

例：一电容器两极板都是边长为a的正方形金属平板，但两板不严格平行有一夹角θ。证明：当$\theta \ll \frac{b}{a}$时，该电容器的电容为：$C=\varepsilon_0 \frac{a^2}{b}(1-\frac{a\theta}{2b})$ (忽略边缘效应)



$$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

证明：整体不是平行板电容器

但在小块面积 $a\mathrm{d}x$ 上，可认为是平行板电容器,其电容为：

$$\mathrm{d}C=\frac{\varepsilon_0 a\mathrm{d}x}{b+x\sin\theta}$$

$$C=\int \mathrm{d}C=\int_0^a \frac{\varepsilon_0 a\mathrm{d}x}{b+x\sin\theta}=\frac{\varepsilon_0 a}{\sin\theta}\ln(1+\frac{a}{b}\sin\theta)$$

$$\because \theta \ll \frac{b}{a} \qquad \sin\theta \ll \frac{b}{a} \qquad \text{则：} \frac{a}{b}\sin\theta \ll 1$$

$$\ln(1+\frac{a}{b}\sin\theta)=\frac{a}{b}\sin\theta-\frac{1}{2}(\frac{a}{b}\sin\theta)^2+\cdots$$

$$\therefore\ C=\frac{\varepsilon_0 a^2}{b}(1-\frac{1}{2}\frac{a}{b}\sin\theta)=\frac{\varepsilon_0 a^2}{b}(1-\frac{a\theta}{2b}) \qquad \text{证毕}$$