Aufgabensammlung zur Beweisen

Paper ID: P1.0de *on April 20, 2025 – 19.04.2025 in Frankfurt* Version 1.0 Revision 1

Archive-ID: 3891M-932 DOI: 10.5281/zenodo.15249602

Duy Nam Schlitz[a*]

[a] *Deparment and Affiliation, duynamschlitz@gmail.com*
[*] *Corresponding Author*

Abstract

Aufgaben zur Beweisen mit Induktion, Summen und ungeraden Zahlen.
Exercise: No.1, No.4-1, No.4-2, No.4-3, No.4-4, No.5

Contents

Categories: induction sum odd numbers natural numbers

1 Exercises and Informtion

The use of aids such as calculators, formula collections, spreadsheets, and digital tools is permitted only under the expressly stated conditions. Permitted aids must be declared in advance for exams and approved by the exam administrator. Any unauthorized aids are prohibited and may result in disqualification. While working on an assignment or exam, it is prohibited to obtain additional materials or external assistance unless expressly permitted. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions.

Violation of these regulations can result in serious consequences. Especially in official assessments, the use of unauthorized aids can lead to immediate exclusion from the exam. In repeated or particularly serious cases, a permanent ban from the exam may even be imposed. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions and that the integrity of the assessments is maintained.

This sheet serves the purpose of the exercise and can be submitted officially but under certain conditions. At the same time, it should be considered an unofficial document, as it was processed without administrative supervision.

1. **Correct labeling** –The document must be clearly marked as an exercise sheet.
2. **Completeness and formatting** –It must be in a recognized format (e.g., PDF or printed copy) and contain all required content.
3. **Timely submission** –Submission must be made within the specified deadlines.
4. **Approval by the responsible authority** –Official recognition requires the approval of the relevant examining or administrative unit.
5. **No outside assistance** –The document must have been completed exclusively by the relevant individual without outside assistance.
6. **No guarantee of grade** –Since the sheet was created without administrative oversight, there is no obligation to consider it for official grading.
7. **No liability** –The author assumes no liability for the correctness or completeness of the content.
8. **No official status** –The document is not an official document and does not have the same legal status as an officially issued document.
9. **No guarantee of recognition** –Submission of this document does not guarantee recognition or official consideration by any authority or institution.
10. **No guarantee of confidentiality** –Protection of personal data and confidentiality cannot be guaranteed.
11. **No guarantee of security** –The security of the content and the data contained therein is not guaranteed.
12. **No guarantee of authenticity** –The authenticity of the information or data within the document cannot be confirmed.
13. **No guarantee of integrity** –The authenticity or integrity of the content contained therein cannot be assured.
14. **No guarantee of validity** –The document may contain content whose legal or technical validity cannot be confirmed.
15. **No guarantee of reliability** –The accuracy, completeness, or reliability of the information cannot be guaranteed.

Everything is based on trust and so, have fun.

1.1 DE SH-1 No.1P1.0deV1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Time for Exercise: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

Category: Shoemei **Difficulty**: Einfach **Tags**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.2 DE SKK-1 No.4-1P1.0deV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Time for Exercise: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage), niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche ("Flügel") durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.2.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n-1)$-Hyperfläche.

1.2.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Hart **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.3 DE SKK-1/2 No.4-2P1.0deV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Time for Exercise: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

1.3.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

1.3.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.4 DE SKK-1/3 No.4-3P1.0deV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3

Time for Exercise: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche ("Flügel") durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.4.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$-Hyperfläche.

1.4.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.5 DE SKK-1/4 No.4-4P1.0deV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

Time for Exercise: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

1.5.1 Aufgabe

Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.6 DE SKT-1 No.5P1.0deV1.0: Abstände im n-dimensionalen Raum

Time for Exercise: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der i-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Stelle die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **($n-1$)-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Category: Shoemei **Difficulty**: Mittel **Tags**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f on 19.04.2025

1.7 DE SH-1 No.1P1.0deV1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Time for Exercise: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

1.7.1 Solution

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Aussage für n wahr.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Dann gilt:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Category: Shoemei **Difficulty**: Einfach **Tags**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.8 DE SKK-1 No.4-1P1.0deV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Time for Exercise: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage), niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche ("Flügel") durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.8.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n-1)$-Hyperfläche.

1.8.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

1.8.3 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Hart **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.9 DE SKK-1/2 No.4-2P1.0deV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Time for Exercise: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*
Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

1.9.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

1.9.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.
Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

1.9.3 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.
Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit
UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.10 DE SKK-1/3 No.4-3P1.0deV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3

Time for Exercise: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche (”Flügel”) durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.10.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$-Hyperfläche.

1.10.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

1.10.3 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.11 DE SKK-1/4 No.4-4P1.0deV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

Time for Exercise: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

1.11.1 Aufgabe

Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

1.11.2 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.12 DE SKT-1 No.5P1.0deV1.0: Abstände im n-dimensionalen Raum

Time for Exercise: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der i-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Stelle die Punkte $P_1, \dots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \dots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **($n-1$)-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

1.12.1 Solution

1. **Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben**

   Gegeben: Die Punkte $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ sind:
$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \qquad P_j = e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

   Unterschied zweier Punkte: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$

   Dieser Vektor hat:

   - an Stelle i: 1,
   - an Stelle j: -1,
   - sonst 0

   Norm:
$$\| P_i - P_j \|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

   $\rightarrow$ Alle Punkte haben den gleichen Abstand zueinander.

2. **Matrixdarstellung**
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Lineare Unabhängigkeit**

   Definition: Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$$

Beweis:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Standardbasis ist **linear unabhängig**.

4. **Volumen des regulären Simplex in** $\mathbb{R}^{n-1}$

Wir verschieben die Punkte so, dass sie im Ursprung liegen, und berechnen das Volumen mithilfe von Gram-Determinanten oder der Formel für das Volumen eines Simplex aus Vektoren:

Volumenformel für Simplex aus Vektoren

Für ein $(n-1)$-Simplex S mit Basisvektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

wobei G die **Gram-Matrix** ist:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Es ist bekannt, dass das Volumen eines regulären Simplex mit Kantenlänge ℓ in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist:

$$\text{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

Für $\ell = \sqrt{2}$:

$$\text{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

Das ist das Volumen eines Simplex mit n Eckpunkten und Kantenlänge $\sqrt{2}$.

5. **Punktetabelle**

Kondition	**Beschreibung**	**Punkte**
Norm Gleichung Aufstellen	Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben.	3
Matrix	Stelle die Punkte als Matrix dar.	1
Gleichung und Unabhängigkeit	Beweise die lineare Unabhängigkeit.	2
Volumenformel	Leite die Volumenformel für das Simplex her.	1
Beispiel	Führe eine Beispielrechnung durch.	2
Allgemeine Zusammenfassung	Fasse die Ergebnisse zusammen.	2

Table 1: Punktevergabe für die Lösung

Category: Shoemei **Difficulty**: Mittel **Tags**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f on 19.04.2025