

Solution: The Namische /'namɪʃə/ Collection

Paper ID: P1.5 on May 31, 2025 – 31.05.2025 in Frankfurt Version 1.0 Revision 1

Archive-ID: 33513-9323 DOI: 10.5281/zenodo.15566005

Duy Nam Schlitz^{a*}

^a Department of ISAC for Competition, duynamschlitzresearch@gmail.com

* Corresponding Author

Abstract

These exercises deal with isometries in n -dimensional Euclidean space. They offer both theoretical and practical challenges related to the conservation of distances in maps in \mathbb{R}^n

Exercise: No.26-1, No.26-2, No.n26-1, No.n26-2, Total time: De: 2 h 0 min, En: 2 h 0 min, Es: 2 h 0 min, Fn: 2 h 0 min, Fr: 2 h 0 min, It: 2 h 0 min, Jp: 2 h 0 min, Kr: 2 h 0 min, Pt: 2 h 0 min, Ru: 2 h 0 min, Vn: 2 h 0 min, Zh: 2 h 0 min, Matnam

Version: 1.5.4-MDLS Release - with Markdown Compilation 1.3.2-Prerelease and LaTeX Syntax Checking 0.5Beta

Contents			
		4.2 FN 1 No.n26-2P1.5V1.0: Todistustehtävä: \mathbb{R}^n -avaruuden isometrioiden ominaisuus . . .	28 12
2	1 Einführung und Informationen: 2 h 0 min	5 Introduction et informations: 2 h 0 min	13 30
4	1.1 DE SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isometrien im n -dimensionalen euklidischen Raum	5.1 FR SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isométries dans l'espace euclidien de dimension n . . .	14 32
6	1.1.1 Aufgaben:	5.1.1 Exercices :	14
8	1.2 DE SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in \mathbb{R}^n	5.2 FR SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Tâche de preuve: caractérisation des applications isométriques dans \mathbb{R}^n	15 36
10	1.2.1 Zu zeigen:		
	1.2.2 Hinweis zur Vertiefung (optional): . .	6 Introduzione e Informazioni: 2 h 0 min	16
12	2 Introduction and Information: 2 h 0 min	6.1 IT 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrie nello spazio euclideo di dimensione n	17 38
14	2.1 EN SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isometries in n -dimensional Euclidean space	6.1.1 Esercizi:	17 40
16	2.1.1 Aufgaben:	6.2 IT 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema di dimostrazione: caratterizzazione delle isometrie in \mathbb{R}^n	18 42
	2.2 EN SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Proof task: Characterization of isometric mappings in \mathbb{R}^n		
18	3 Introducción e Información: 2 h 0 min	7 導入と情報: 2 h 0 min	19 44
20	3.1 ES 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrías en el espacio euclidiano de dimensión n	7.1 JP 1 No.n26-1P1.5V1.0: n 次元ユークリッド空間における等長変換	20 46
22	3.1.1 Ejercicios:	7.1.1 問題:	20
	3.2 ES 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema de demostración: caracterización de las isometrías en \mathbb{R}^n	7.2 JP 1 No.n26-2P1.5V1.0: 証明課題: \mathbb{R}^n における等長写像の特徴づけ	21 48
24	4 Johdanto ja Tiedot: 2 h 0 min	8 소개및정보: 2 h 0 min	22 50
26	4.1 FN 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometriat n -ulotteisessa euklidisessa avaruudessa	8.1 KR 1 No.n26-1P1.5V1.0: n 차원유클리드공간의등거리리변환	23 52
	4.1.1 Tehtävät:	8.1.1 과제:	23
		8.2 KR 1 No.n26-2P1.5V1.0: 증명문제: \mathbb{R}^n 에 서등거리사상의특징	24 54

56	9 Introdução e Informações: 2 h 0 min	25	15 Solución	41
58	9.1 PT 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrias no espaço euclidiano n -dimensional	26	15.1 ES 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrias en el espacio euclidiano de dimension n	102
	9.1.1 Exercícios:	26	15.1.1 Ejercicios:	104
60	9.2 PT 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema de demonstração: caracterização das isometrias em \mathbb{R}^n	27	15.1.2 Solución	41
			15.2 ES 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema de demostración: caracterización de las isometrias en \mathbb{R}^n	106
62	10 Введение и информация: 2 h 0 min	28	15.2.1 Solución	108
64	10.1 RU 1 No.n26-1P1.5V1.0: Изометрии в n -мерном евклидова пространстве	29		
	10.1.1 Задания:	29	16 Ratkaisu	43
66	10.2 RU 1 No.n26-2P1.5V1.0: Задача доказательства: характеристика изометрий в \mathbb{R}^n	30	16.1 FN 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometriat n -ulotteisessa euklidisessa avaruudessa	110
			16.1.1 Tehtävät:	112
			16.1.2 Ratkaisu	114
	11 Giới thiệu và Thông tin: 2 h 0 min	31	16.2 FN 1 No.n26-2P1.5V1.0: Todistustehtävä: \mathbb{R}^n -avaruuden isometrioiden ominaisuus	116
70	11.1 VN 1 No.n26-1P1.5V1.0: Biến đổi đồng nhất trong không gian Euclid n chiều	32	16.2.1 Ratkaisu	44
72	11.1.1 Bài tập:	32		
74	11.2 VN 1 No.n26-2P1.5V1.0: Bài toán chứng minh: đặc trưng của ánh xạ đồng nhất trong \mathbb{R}^n	33	17 Solution	45
			17.1 FR SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isométries dans l'espace euclidien de dimension n	118
76	12 介绍和信息: 2 h 0 min	34	17.1.1 Exercices :	120
78	12.1 ZH 1 No.n26-1P1.5V1.0: n 維歐氏空間中的等距	35	17.1.2 Solution	122
	12.1.1 題目:	35	17.2 FR SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Tâche de preuve: caractérisation des applications isométriques dans \mathbb{R}^n	124
80	12.2 ZH 1 No.n26-2P1.5V1.0: 證明題目: \mathbb{R}^n 中等距映射的特徵	36	17.2.1 Solution	126
82	13 Lösung	37	18 Soluzione	47
84	13.1 DE SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isometrien im n -dimensionalen euklidischen Raum	37	18.1 IT 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrie nello spazio euclideo di dimensione n	128
	13.1.1 Aufgaben:	37	18.1.1 Esercizi:	130
86	13.1.2 Lösung	37	18.1.2 Soluzione	132
88	13.2 DE SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in \mathbb{R}^n	38	18.2 IT 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema di dimostrazione: caratterizzazione delle isometrie in \mathbb{R}^n	134
90	13.2.1 Zu zeigen:	38	18.2.1 Soluzione	48
	13.2.2 Hinweis zur Vertiefung (optional):	38		
92	13.2.3 Lösung	38	19 解決策	49
			19.1 JP 1 No.n26-1P1.5V1.0: n 次元ユークリッド空間における等長変換	136
	14 Solution	39	19.1.1 問題:	138
94	14.1 EN SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isometries in n -dimensional Euclidean space	39	19.1.2 解決策	140
96	14.1.1 Aufgaben:	39	19.2 JP 1 No.n26-2P1.5V1.0: 証明課題: \mathbb{R}^n における等長写像の特徴づけ	142
98	14.1.2 Solution	39	19.2.1 解決策	50
	14.2 EN SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Proof task: Characterization of isometric mappings in \mathbb{R}^n	40		
100	14.2.1 Solution	40		

144	20 해결책	51
	20.1 KR 1 No.n26-1P1.5V1.0: n 차원유클리드공	
146	간의등거리변환	51
	20.1.1 과제:	51
148	20.1.2 해결책	51
	20.2 KR 1 No.n26-2P1.5V1.0: 증명문제: \mathbb{R}^n 에	
150	서등거리사상의특징	52
	20.2.1 해결책	52
152	21 Solução	53
	21.1 PT 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrias no es-	
154	paço euclidiano n -dimensional	53
	21.1.1 Exercícios:	53
156	21.1.2 Solução	53
	21.2 PT 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema de demon-	
158	stração: caracterização das isometrias em \mathbb{R}^n	54
	21.2.1 Solução	54
160	22 Решение	55
	22.1 RU 1 No.n26-1P1.5V1.0: Изометрии в n -	
162	мерном евклидова пространстве	55
	22.1.1 Задания:	55
164	22.1.2 Решение	55
	22.2 RU 1 No.n26-2P1.5V1.0: Задача	
166	доказательства: характеристика	
	изометрий в \mathbb{R}^n	56
168	22.2.1 Решение	56
	23 Giải pháp	57
170	23.1 VN 1 No.n26-1P1.5V1.0: Biến đổi đồng nhất	
	trong không gian Euclid n chiều	57
172	23.1.1 Bài tập:	57
	23.1.2 Giải pháp	57
174	23.2 VN 1 No.n26-2P1.5V1.0: Bài toán chứng	
	minh: đặc trưng của ánh xạ đồng nhất trong	
176	\mathbb{R}^n	58
	23.2.1 Giải pháp	58
178	24 解决方案	59
	24.1 ZH 1 No.n26-1P1.5V1.0: n 維歐氏空間中	
180	的等距	59
	24.1.1 題目:	59
182	24.1.2 解决方案	59
	24.2 ZH 1 No.n26-2P1.5V1.0: 證明題目: \mathbb{R}^n 中	
184	等距映射的特徵	60
	24.2.1 解决方案	60
186	<i>Categories: problem solving</i>	

1 Einführung und Informationen: 2 h 0 min

Die Verwendung von Hilfsmitteln wie Taschenrechnern, Formelsammlungen, Tabellenkalkulationen und digitalen Werkzeugen ist nur unter den ausdrücklich angegebenen Bedingungen gestattet. Zulässige Hilfsmittel müssen im Voraus für Prüfungen deklariert und von der Prüfungsaufsicht genehmigt werden. Jegliche nicht genehmigten Hilfsmittel sind verboten und können zur Disqualifikation führen. Während der Bearbeitung einer Aufgabe oder Prüfung ist es untersagt, zusätzliche Materialien oder externe Hilfe in Anspruch zu nehmen, es sei denn, dies ist ausdrücklich erlaubt. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten. Ab einem Nam-Score von 3 dürfen alle Teilnehmende alle möglichen Hilfsmittel nutzen.

Ein Verstoß gegen diese Vorschriften kann schwerwiegende Konsequenzen haben. Insbesondere bei offiziellen Prüfungen kann die Verwendung nicht genehmigter Hilfsmittel zum sofortigen Ausschluss von der Prüfung führen. Bei wiederholten oder besonders schwerwiegenden Fällen kann sogar ein dauerhaftes Prüfungsverbot verhängt werden. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten und die Integrität der Prüfungen gewahrt bleibt.

Dieses Blatt dient dem Zweck der Übung und kann unter bestimmten Bedingungen offiziell eingereicht werden. Gleichzeitig sollte es als inoffizielles Dokument betrachtet werden, da es ohne administrative Aufsicht erstellt wurde.

1. **Korrekte Kennzeichnung** - Das Dokument muss eindeutig als Übungsblatt gekennzeichnet sein.
2. **Vollständigkeit und Formatierung** - Es muss in einem anerkannten Format (z. B. PDF oder gedruckte Kopie) vorliegen und alle erforderlichen Inhalte enthalten.
3. **Fristgerechte Einreichung** - Die Einreichung muss innerhalb der festgelegten Fristen erfolgen.
4. **Genehmigung durch die zuständige Behörde** - Eine offizielle Anerkennung erfordert die Genehmigung der zuständigen Prüfungs- oder Verwaltungsstelle.
5. **Keine externe Hilfe** - Das Dokument muss ausschließlich von der betreffenden Person ohne externe Hilfe erstellt worden sein.
6. **Keine Garantie auf Bewertung** - Da das Blatt ohne administrative Aufsicht erstellt wurde, besteht keine Verpflichtung, es für eine offizielle Bewertung zu berücksichtigen.
7. **Keine Haftung** - Der Autor übernimmt keine Haftung für die Richtigkeit oder Vollständigkeit des Inhalts.
8. **Kein offizieller Status** - Das Dokument ist kein offizielles Dokument und hat nicht denselben rechtlichen Status wie ein offiziell ausgestelltes Dokument.
9. **Keine Garantie auf Anerkennung** - Die Einreichung dieses Dokuments garantiert keine Anerkennung oder offizielle Berücksichtigung durch eine Behörde oder Institution.
10. **Keine Garantie auf Vertraulichkeit** - Der Schutz persönlicher Daten und die Vertraulichkeit können nicht gewährleistet werden.
11. **Keine Garantie auf Sicherheit** - Die Sicherheit des Inhalts und der darin enthaltenen Daten ist nicht gewährleistet.
12. **Keine Garantie auf Authentizität** - Die Authentizität der Informationen oder Daten innerhalb des Dokuments kann nicht bestätigt werden.
13. **Keine Garantie auf Integrität** - Die Authentizität oder Integrität des enthaltenen Inhalts kann nicht sichergestellt werden.
14. **Keine Garantie auf Gültigkeit** - Das Dokument kann Inhalte enthalten, deren rechtliche oder technische Gültigkeit nicht bestätigt werden kann.
15. **Keine Garantie auf Zuverlässigkeit** - Die Genauigkeit, Vollständigkeit oder Zuverlässigkeit der Informationen kann nicht garantiert werden.

Alles beruht auf Vertrauen und daher viel Spaß.

1.1 DE SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isometrien im n -dimensionalen euklidischen Raum

228

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Ein Original**

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

230

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

1.1.1 Aufgaben:

232

1. **Lineare Isometrien:** Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.

234

2. **Affine Isometrien:** Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.

236

3. **Erhaltung des Skalarprodukts:** Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f , die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

238

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **Konstruktion einer speziellen Isometrie:** Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

240

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Keisan, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad:** Höheres Mittel **Stichwörter:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** f6cee806-99ef-4ccd-8b9e-2625f669adb8 am 31.05.2025

242

1.2 DE SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in \mathbb{R}^n

244 **Zeit zur Bearbeitung:** 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Ein Original**

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d. h.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

246 *1.2.1 Zu zeigen:*

Jede Isometrie f in \mathbb{R}^n ist entweder eine affine Abbildung der Form $f(x) = Ax + b$, wobei A eine orthogonale Matrix ist,
248 oder sie lässt sich durch Verkettung solcher mit Spiegelungen oder Translationen darstellen.

1.2.2 Hinweis zur Vertiefung (optional):

250 Zeigen Sie, dass die Menge aller Isometrien in \mathbb{R}^n eine Gruppe unter Komposition bildet –die sogenannte **euklidische Gruppe** $E(n)$.

252 **Kategorie:** Shoemei, Kaiketsu und Toku, Keisan, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad:** Höheres Mittel **Stichwörter:**
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** fb35a6d7-5c2c-4a1b-9637-b43515e51775 am 31.05.2025

2 Introduction and Information: 2 h 0 min

The use of aids such as calculators, formula collections, spreadsheets, and digital tools is permitted only under the expressly stated conditions. Permitted aids must be declared in advance for exams and approved by the exam administrator. Any unauthorized aids are prohibited and may result in disqualification. While working on an assignment or exam, it is prohibited to obtain additional materials or external assistance unless expressly permitted. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions. With a Nam-Score of 3, all participants are allowed to use all possible aids.

Violation of these regulations can result in serious consequences. Especially in official assessments, the use of unauthorized aids can lead to immediate exclusion from the exam. In repeated or particularly serious cases, a permanent ban from the exam may even be imposed. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions and that the integrity of the assessments is maintained.

This sheet serves the purpose of the exercise and can be submitted officially but under certain conditions. At the same time, it should be considered an unofficial document, as it was processed without administrative supervision.

1. **Correct labeling** - The document must be clearly marked as an exercise sheet.
2. **Completeness and formatting** - It must be in a recognized format (e.g., PDF or printed copy) and contain all required content.
3. **Timely submission** - Submission must be made within the specified deadlines.
4. **Approval by the responsible authority** - Official recognition requires the approval of the relevant examining or administrative unit.
5. **No outside assistance** - The document must have been completed exclusively by the relevant individual without outside assistance.
6. **No guarantee of grade** - Since the sheet was created without administrative oversight, there is no obligation to consider it for official grading.
7. **No liability** - The author assumes no liability for the correctness or completeness of the content.
8. **No official status** - The document is not an official document and does not have the same legal status as an officially issued document.
9. **No guarantee of recognition** - Submission of this document does not guarantee recognition or official consideration by any authority or institution.
10. **No guarantee of confidentiality** - Protection of personal data and confidentiality cannot be guaranteed.
11. **No guarantee of security** - The security of the content and the data contained therein is not guaranteed.
12. **No guarantee of authenticity** - The authenticity of the information or data within the document cannot be confirmed.
13. **No guarantee of integrity** - The authenticity or integrity of the content contained therein cannot be assured.
14. **No guarantee of validity** - The document may contain content whose legal or technical validity cannot be confirmed.
15. **No guarantee of reliability** - The accuracy, completeness, or reliability of the information cannot be guaranteed.

Everything is based on trust and so, have fun.

2.1 EN SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isometries in n -dimensional Euclidean space

290 **Estimated time for solving:** 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **An Original**

292 Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

2.1.1 Aufgaben:

294 1. **Lineare Isometrien:** Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.

296 2. **Affine Isometrien:** Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.

298 3. **Erhaltung des Skalarprodukts:** Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f , die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

300 4. **Konstruktion einer speziellen Isometrie:** Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

302 **Category:** Shoemei, Kaiketsu and Toku, Keisan, Kōchiku and Sekkei **Difficulty:** Higher Medium **Tags:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 279441ee-c787-4429-9a05-1b35c79ef998 on 31.05.2025

2.2 EN SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Proof task: Characterization of isometric mappings in \mathbb{R}^n

304

Estimated time for solving: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **An Original**Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be an isometry, i.e.:

306

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

To show:

Every isometry f in \mathbb{R}^n is either an affine transformation of the form $f(x) = Ax + b$, where A is an orthogonal matrix, or can be written as a composition of such maps with reflections or translations.

308

Hint for further study (optional):

310

Show that the set of all isometries in \mathbb{R}^n forms a group under composition —the so-called *Euclidean group* $E(n)$.

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Keisan, Kōchiku and Sekkei **Difficulty:** Higher Medium **Tags:**

312

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1cef100f1 – **GUID:** 920ac3eb-4f5f-40ee-9485-9426674da59a on 31.05.2025

3 Introducción e Información: 2 h 0 min

El uso de ayudas como calculadoras, fórmulas, hojas de cálculo y herramientas digitales solo está permitido bajo las condiciones expresamente establecidas. Las ayudas permitidas deben declararse con antelación para los exámenes y ser aprobadas por el supervisor del examen. Cualquier ayuda no autorizada está prohibida y puede resultar en la descalificación. Durante la realización de una tarea o examen, se prohíbe el uso de materiales adicionales o asistencia externa, a menos que esté expresamente permitido. El cumplimiento de estas normas garantiza que todos los participantes trabajen en condiciones justas e iguales. A partir de una puntuación Nam de 3, todos los participantes pueden utilizar todas las ayudas posibles.

El incumplimiento de estas normas puede tener graves consecuencias. Especialmente en los exámenes oficiales, el uso de ayudas no autorizadas puede conllevar la expulsión inmediata del examen. En casos reiterados o especialmente graves, incluso se puede imponer la prohibición permanente del examen. El cumplimiento de estas normas garantiza que todos los participantes trabajen en condiciones justas e iguales y que se mantenga la integridad de los exámenes.

Esta hoja de trabajo cumple la finalidad del ejercicio y puede entregarse oficialmente bajo ciertas condiciones. Al mismo tiempo, debe considerarse un documento no oficial, ya que se creó sin supervisión administrativa.

1. **Etiquetado correcto:** El documento debe estar claramente identificado como una hoja de ejercicios.
2. **Integridad y formato:** Debe estar en un formato reconocido (por ejemplo, PDF o copia impresa) y contener todo el contenido requerido.
3. **Entrega puntual:** La entrega debe realizarse dentro de los plazos especificados.
4. **Aprobación de la autoridad competente:** El reconocimiento oficial requiere la aprobación del organismo examinador o administrativo pertinente.
5. **Sin asistencia externa:** El documento debe ser creado únicamente por la persona en cuestión, sin asistencia externa.
6. **Sin garantía de evaluación:** Dado que esta hoja se preparó sin supervisión administrativa, no hay obligación de considerarla para la evaluación oficial.
7. **Sin responsabilidad** - El autor no asume ninguna responsabilidad por la exactitud ni la integridad del contenido.
8. **Sin carácter oficial** - Este documento no es un documento oficial y no tiene la misma validez legal que un documento emitido oficialmente.
9. **Sin garantía de reconocimiento** - La presentación de este documento no garantiza su reconocimiento ni consideración oficial por parte de ninguna autoridad o institución.
10. **Sin garantía de confidencialidad** - No se puede garantizar la protección de los datos personales ni la confidencialidad.
11. **Sin garantía de seguridad** - No se garantiza la seguridad del contenido ni de los datos que contiene.
12. **Sin garantía de autenticidad** - No se puede confirmar la autenticidad de la información o los datos del documento.
13. **Sin garantía de integridad** - No se puede garantizar la autenticidad ni la integridad del contenido.
14. **Sin garantía de validez** - El documento puede contener contenido cuya validez legal o técnica no se puede confirmar.
15. **Sin garantía de fiabilidad** - No se puede garantizar la exactitud, integridad ni fiabilidad de la información.

Todo se basa en la confianza, así que diviértete.

3.1 ES 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrías en el espacio euclidiano de dimensión n

348

Tiempo estimado para resolver: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 Un Original

Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama una **isometría** si conserva la distancia euclidiana entre dos puntos, es decir, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, se cumple:

350

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

3.1.1 Ejercicios:

352

1. **Isometrías lineales:** Demuestre que toda isometría lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede representarse mediante una matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es decir, $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

354
2. **Isometrías afines:** Determine todas las isometrías $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que además sean **afines**, es decir, de la forma $f(x) = Ax + b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, y A es ortogonal.

356

3. **Conservación del producto escalar:** Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores unitarios. Demuestre que toda isometría f , que además es lineal, conserva el producto escalar, es decir:

358

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **Construcción de una isometría especial:** Dé un ejemplo de una isometría no lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que no sea una transformación lineal pero que conserve las distancias. Demuestre que f es realmente una isometría.

360

Categoría: Demostración, Resolución y Resolver, Cálculo, Construcción y Diseño **Dificultad:** Más Medio **Etiquetas:**
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 525848ab-3c75-46de-a638-918396abdd44 el 31.05.2025

362

3.2 ES I No.n26-2P1.5V1.0: Problema de demostración: caracterización de las isometrías en \mathbb{R}^n 364 **Tiempo estimado para resolver:** 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0 Un Original*Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una isometría, es decir:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

366 **A demostrar:**368 Toda isometría f en \mathbb{R}^n es una transformación afín de la forma $f(x) = Ax + b$, donde A es una matriz ortogonal, o puede escribirse como una composición de tales transformaciones con reflexiones o traslaciones.**Nota para profundizar (opcional):**370 Demuestre que el conjunto de todas las isometrías en \mathbb{R}^n forma un grupo bajo composición —el llamado *grupo euclídeo* $E(n)$.372 **Categoría:** Demostración, Resolución y Resolver, Cálculo, Construcción y Diseño **Dificultad:** Más Medio **Etiquetas:****UUID:** 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID:* 67c0b382-7dd2-4ed8-b626-75c7228017b5 el 31.05.2025

4 Johdanto ja Tiedot: 2 h 0 min

Apuvälineiden, kuten laskinten, kaavasarjojen, taulukkolaskentaohjelmien ja digitaalisten työkalujen, käyttö on sallittua vain nimenomaisesti ilmoitetuin ehdoin. Sallitut apuvälineet on ilmoitettava kokeisiin etukäteen ja niiden on oltava kokeen valvojan hyväksymiä. Kaikki luvattomat apuvälineet ovat kiellettyjä ja voivat johtaa hylkäämiseen. Tehtävän tai kokeen parissa työskentelyn aikana lisämateriaalien tai ulkopuolisen avun käyttö on kielletty, ellei sitä ole nimenomaisesti sallittu. Näiden sääntöjen noudattaminen varmistaa, että kaikki osallistujat työskentelevät oikeudenmukaisissa ja tasa-arvoisissa olosuhteissa. Alkaen Nam-pistemäärästä 3 kaikki osallistujat voivat käyttää kaikkia mahdollisia apuvälineitä.

Näiden sääntöjen rikkomisella voi olla vakavia seurauksia. Erityisesti virallisissa kokeissa luvattomien apuvälineiden käyttö voi johtaa välittömään kokeesta erottamiseen. Toistuvissa tai erityisen vakavissa tapauksissa voidaan jopa määrätä pysyvä kielto osallistua kokeeseen. Näiden sääntöjen noudattaminen varmistaa, että kaikki osallistujat työskentelevät oikeudenmukaisissa ja tasa-arvoisissa olosuhteissa ja että kokeiden rehellisyys säilyy.

Tämä laskentataulukko palvelee harjoituksen tarkoitusta ja se voidaan virallisesti palauttaa tietyin ehdoin. Samalla sitä tulisi pitää epävirallisena asiakirjana, koska se on luotu ilman hallinnollista valvontaa.

1. **Oikea merkintä** - Asiakirjan on oltava selvästi merkitty harjoitustehtäväksi.
2. **Täydellisyys ja muotoilu** - Sen on oltava tunnistetussa muodossa (esim. PDF tai tulostettu kopio) ja sen on sisällettävä kaikki vaadittu sisältö.
3. **Aikataulun mukainen lähetys** - Lähetys on tehtävä annettujen määräaikojen puitteissa.
4. **Toimivaltaisen viranomaisen hyväksyntä** - Virallinen tunnustaminen edellyttää asiaankuuluvan tutkinta- tai hallintolimen hyväksyntää.
5. **Ei ulkopuolista apua** - Asiakirjan on oltava yksinomaan kyseisen henkilön luoma ilman ulkopuolista apua.
6. **Ei arviointitakuuta** - Koska tämä lomake on laadittu ilman hallinnollista valvontaa, sitä ei ole pakko ottaa viralliseen arviointiin.
7. **Ei vastuuta** - Tekijä ei ota vastuuta sisällön oikeellisuudesta tai täydellisyydestä.
8. **Ei virallista asemaa** - Tämä asiakirja ei ole virallinen asiakirja, eikä sillä ole samaa oikeudellista asemaa kuin virallisesti myönnetyllä asiakirjalla.
9. **Ei tunnustustakuuta** - Tämän asiakirjan toimittaminen ei takaa minkään viranomaisen tai laitoksen tunnustusta tai virallista käsittelyä.
10. **Ei luottamuksellisuuden takeita** - Henkilötietojen ja luottamuksellisuuden suoja ei voida taata.
11. **Ei turvallisuustakeita** - Sisällön ja siinä olevien tietojen turvallisuutta ei voida taata.
12. **Ei aitouden takeita** - Asiakirjan tietojen aitoutta ei voida vahvistaa.
13. **Ei eheyden takeita** - Sisällön aitoutta tai eheyttä ei voida taata.
14. **Ei pätevyyden takeita** - Asiakirja saattaa sisältää sisältöä, jonka oikeudellista tai teknistä pätevyyttä ei voida vahvistaa.
15. **Luotettavuustakuuta ei ole** - Tietojen tarkkuutta, täydellisyyttä tai luotettavuutta ei voida taata.

Kaikki perustuu luottamukseen, joten pidä hauskaa.

408 4.1 FN 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometriat n -ulotteisessa euklidisessa avaruudessa

Ratkaisuun arvioitu aika: 1 h 0 min *Nam-Score:* 3.0 *Alkuperäinen*

410 Kuvauksesta $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sanotaan, että se on **isometria**, jos se säilyttää euklidisen etäisyyden kahden pisteen välillä, eli kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

412 4.1.1 Tehtävät:

1. **Lineaariset isometriat:** Osoita, että jokainen lineaarinen isometria $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ voidaan esittää ortogonaalisella matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, eli $T(x) = Ax$ ja $A^\top A = I$.
414
2. **Affiinit isometriat:** Määritä kaikki isometriat $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, jotka lisäksi ovat **affiineja**, eli muotoa $f(x) = Ax + b$, missä $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, ja A on ortogonaalinen.
416
3. **Skalaaritulon säilyminen:** Olkoot $u, v \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektoreita. Osoita, että jokainen isometria f , joka on myös lineaarinen, säilyttää skalaaritulon:
418

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **Esimerkki erityisestä isometriasta:** Anna esimerkki epälineaarisesta isometriasta $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, joka ei ole lineaarinen, mutta säilyttää etäisyydet. Osoita, että f on todellakin isometria.
420

Kategoria: Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Laskenta, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso:** Korkea Keskitaso **Tunnisteet:**
422

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID:* 2f62edea-11fe-4cd1-8f0c-5216db27cb0a päivämäärä 31.05.2025

4.2 FN I No.n26-2P1.5V1.0: Todistustehtävä: \mathbb{R}^n -avaruuden isometrioiden ominaisuus

424

Ratkaisuun arvioitu aika: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 Alkuperäinen

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isometria, eli:

426

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{kaikille } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Todistettava:

Jokainen isometria f avaruudessa \mathbb{R}^n on joko affiini muunnos muotoa $f(x) = Ax + b$, missä A on ortogonaalimatriisi, tai koostuu tällaisten muunnosten ja peilausten tai siirtojen yhdistelmästä.

428

Lisätehtävä (valinnainen):

Näytä, että kaikkien \mathbb{R}^n :n isometristen kuvausten joukko muodostaa ryhmän komposition suhteen —niin sanottu *Euklidinen ryhmä* $E(n)$.

430

432

Kategoria: Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Laskenta, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso:** Korkea Keskitaso **Tunnisteet:**

434

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 — **GUID:** 7e1b0a60-c236-4804-a837-dc31db3746a1 päivämäärä 31.05.2025

436

5 Introduction et informations: 2 h 0 min

L'utilisation d'aides telles que des calculatrices, des recueils de formules, des tableurs et des outils numériques n'est autorisée que dans les conditions expressément indiquées. Les aides autorisées doivent être déclarées à l'avance pour les examens et approuvées par l'administrateur de l'examen. Toute aide non autorisée est interdite et peut entraîner une disqualification. Lors de la réalisation d'un devoir ou d'un examen, il est interdit d'obtenir des matériaux supplémentaires ou une assistance externe, sauf autorisation expresse. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales. Avec un score Nam de 3, tous les participants sont autorisés à utiliser toutes les aides possibles.

La violation de ces règlements peut entraîner de graves conséquences. En particulier lors d'évaluations officielles, l'utilisation d'aides non autorisées peut entraîner une exclusion immédiate de l'examen. En cas de récidive ou de cas particulièrement graves, une interdiction permanente de l'examen peut même être imposée. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales et que l'intégrité des évaluations est maintenue.

Cette feuille sert à des fins d'exercice et peut être soumise officiellement mais sous certaines conditions. En même temps, elle doit être considérée comme un document non officiel, car elle a été traitée sans supervision administrative.

1. **Étiquetage correct** - Le document doit être clairement marqué comme une feuille d'exercice.
2. **Complétude et formatage** - Il doit être dans un format reconnu (par exemple, PDF ou copie imprimée) et contenir tout le contenu requis.
3. **Soumission dans les délais** - La soumission doit être effectuée dans les délais spécifiés.
4. **Approbation par l'autorité compétente** - La reconnaissance officielle nécessite l'approbation de l'unité d'examen ou administrative compétente.
5. **Aucune assistance extérieure** - Le document doit avoir été complété exclusivement par la personne concernée sans assistance extérieure.
6. **Aucune garantie de note** - Étant donné que la feuille a été créée sans supervision administrative, il n'y a aucune obligation de la considérer pour une évaluation officielle.
7. **Aucune responsabilité** - L'auteur n'assume aucune responsabilité quant à l'exactitude ou à l'exhaustivité du contenu.
8. **Aucun statut officiel** - Le document n'est pas un document officiel et n'a pas le même statut juridique qu'un document officiellement délivré.
9. **Aucune garantie de reconnaissance** - La soumission de ce document ne garantit pas sa reconnaissance ou sa prise en compte officielle par une autorité ou une institution.
10. **Aucune garantie de confidentialité** - La protection des données personnelles et la confidentialité ne peuvent pas être garanties.
11. **Aucune garantie de sécurité** - La sécurité du contenu et des données qu'il contient n'est pas garantie.
12. **Aucune garantie d'authenticité** - L'authenticité des informations ou des données contenues dans le document ne peut pas être confirmée.
13. **Aucune garantie d'intégrité** - L'authenticité ou l'intégrité du contenu qu'il contient ne peut pas être assurée.
14. **Aucune garantie de validité** - Le document peut contenir des contenus dont la validité juridique ou technique ne peut pas être confirmée.
15. **Aucune garantie de fiabilité** - L'exactitude, l'exhaustivité ou la fiabilité des informations ne peut pas être garantie.

Toute est basée sur la confiance et donc, amusez-vous bien.

5.1 FR SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isométries dans l'espace euclidien de dimension n

Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 Un Original

Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée une **isométrie** si elle conserve la distance euclidienne entre deux points, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

5.1.1 Exercices :

- 1. Isométries linéaires :** Montrez que toute isométrie linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ peut être représentée par une matrice orthogonale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, c'est-à-dire $T(x) = Ax$ avec $A^\top A = I$.
- 2. Isométries affines :** Déterminez toutes les isométries $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont également **affines**, donc de la forme $f(x) = Ax + b$, où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, et A est orthogonale.
- 3. Conservation du produit scalaire :** Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs unitaires. Montrez que toute isométrie f , qui est aussi linéaire, conserve le produit scalaire :

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

- 4. Construction d'une isométrie particulière :** Donnez un exemple d'une isométrie non linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui n'est pas une transformation linéaire mais qui conserve néanmoins les distances. Montrez que f est bien isométrique.

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Calcul, Construction et Conception **Difficulté:** Plus Moyen **Étiquettes:**
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 9e3d5cfc-ad12-41ae-a13b-228b0eafc565 le 31.05.2025

490 5.2 FR SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Tâche de preuve: caractérisation des applications isométriques dans \mathbb{R}^n

Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Un Original**

492 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie, c'est-à-dire :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

À montrer :

494 Toute isométrie f de \mathbb{R}^n est soit une application affine de la forme $f(x) = Ax + b$, où A est une matrice orthogonale, soit elle peut être obtenue par composition de telles applications avec des réflexions ou des translations.

496 **Remarque pour approfondir (facultatif) :**

Montrez que l'ensemble des isométries de \mathbb{R}^n forme un groupe pour la composition —le *groupe euclidien* $E(n)$.

498 **Catégorie:** Preuve, Résolution et Résoudre, Calcul, Construction et Conception **Difficulté:** Plus Moyen **Étiquettes:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1cef100f1 – **GUID:** f7477982-9df6-482c-bbeb-ca0acd6e7fc2 le 31.05.2025

6 Introduzione e Informazioni: 2 h 0 min

L'uso di strumenti come calcolatrici, formule, fogli di calcolo e strumenti digitali è consentito solo alle condizioni espressamente indicate. Gli strumenti consentiti devono essere dichiarati in anticipo per gli esami e approvati dal sorvegliante. Qualsiasi strumento non autorizzato è vietato e può comportare la squalifica. Durante lo svolgimento di un compito o di un esame, l'uso di materiali aggiuntivi o assistenza esterna è vietato, salvo espressa autorizzazione. Il rispetto di queste regole garantisce che tutti i partecipanti lavorino in condizioni eque e paritarie. A partire da un punteggio Nam di 3, tutti i partecipanti possono utilizzare tutti gli strumenti possibili.

Le violazioni di queste regole possono avere gravi conseguenze. In particolare negli esami ufficiali, l'uso di strumenti non autorizzati può portare all'esclusione immediata dall'esame. In casi ripetuti o particolarmente gravi, può essere persino imposta una sospensione definitiva dall'esame. Il rispetto di queste regole garantisce che tutti i partecipanti lavorino in condizioni eque e paritarie e che l'integrità degli esami sia preservata.

Questo foglio di lavoro serve allo scopo dell'esercitazione e può essere presentato ufficialmente a determinate condizioni. Allo stesso tempo, dovrebbe essere considerato un documento non ufficiale perché è stato creato senza supervisione amministrativa.

1. **Etichettatura corretta** - Il documento deve essere chiaramente contrassegnato come foglio di lavoro per esercizi.
2. **Completezza e formattazione** - Deve essere in un formato riconosciuto (ad esempio, PDF o copia stampata) e contenere tutti i contenuti richiesti.
3. **Presentazione tempestiva** - La presentazione deve essere effettuata entro le scadenze specificate.
4. **Approvazione da parte dell'autorità competente** - Il riconoscimento ufficiale richiede l'approvazione dell'organismo esaminatore o amministrativo competente.
5. **Nessuna assistenza esterna** - Il documento deve essere creato esclusivamente dalla persona interessata, senza assistenza esterna.
6. **Nessuna garanzia di valutazione** - Poiché questo foglio è stato preparato senza supervisione amministrativa, non vi è alcun obbligo di considerarlo per la valutazione ufficiale.
7. **Nessuna responsabilità** - L'autore non si assume alcuna responsabilità per l'accuratezza o la completezza del contenuto.
8. **Nessuno status ufficiale** - Questo documento non è un documento ufficiale e non ha lo stesso status legale di un documento rilasciato ufficialmente.
9. **Nessuna garanzia di riconoscimento** - L'invio di questo documento non garantisce il riconoscimento o la considerazione ufficiale da parte di alcuna autorità o istituzione.
10. **Nessuna garanzia di riservatezza** - La protezione dei dati personali e la riservatezza non possono essere garantite.
11. **Nessuna garanzia di sicurezza** - La sicurezza del contenuto e dei dati in esso contenuti non è garantita.
12. **Nessuna garanzia di autenticità** - L'autenticità delle informazioni o dei dati contenuti nel documento non può essere confermata.
13. **Nessuna garanzia di integrità** - L'autenticità o l'integrità del contenuto non possono essere garantite.
14. **Nessuna garanzia di validità** - Il documento potrebbe contenere contenuti la cui validità legale o tecnica non può essere confermata.
15. **Nessuna garanzia di affidabilità** - L'accuratezza, la completezza o l'affidabilità delle informazioni non possono essere garantite.

Tutto si basa sulla fiducia, quindi buon divertimento.

6.1 IT I No.n26-1P1.5V1.0: Isometrie nello spazio euclideo di dimensione n 540 **Tempo stimato per la risoluzione:** 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Un Originale**542 Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice una **isometria** se conserva la distanza euclidea tra due punti, cioè per tutti $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

6.1.1 Esercizi:

544 1. **Isometrie lineari:** Mostra che ogni isometria lineare $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ può essere rappresentata da una matrice ortogonale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cioè $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.546 2. **Isometrie affini:** Determina tutte le isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che sono anche **affini**, cioè della forma $f(x) = Ax + b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A ortogonale.548 3. **Conservazione del prodotto scalare:** Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ due vettori unitari. Mostra che ogni isometria f lineare conserva il prodotto scalare:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

550 4. **Costruzione di un'isometria speciale:** Fornisci un esempio di un'isometria non lineare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che non è una trasformazione lineare ma che conserva comunque le distanze. Mostra che f è effettivamente isometrica.552 **Categoria:** Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Calcolo, Costruzione e Progettazione **Difficoltà:** Più Medio **Etichette:** **UUID:** 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 4d950882-f4cd-4549-b43a-547494aabfcb il 31.05.2025

6.2 IT 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema di dimostrazione: caratterizzazione delle isometrie in \mathbb{R}^n

554

Tempo stimato per la risoluzione: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Un Originale**Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'isometria, cioè:

556

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{per tutti } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Da dimostrare:

Ogni isometria f in \mathbb{R}^n è una trasformazione affine della forma $f(x) = Ax + b$, dove A è una matrice ortogonale, oppure può essere scritta come composizione di tali trasformazioni con riflessioni o traslazioni.

558

Suggerimento per approfondimento (opzionale):

560

Mostra che l'insieme di tutte le isometrie in \mathbb{R}^n forma un gruppo rispetto alla composizione —il cosiddetto *gruppo euclideo* $E(n)$.

562

Categoria: Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Calcolo, Costruzione e Progettazione **Difficoltà:** Più Medio **Etichette:****UUID:** 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 1a2cdc82-23b6-400a-8696-ac2ff5453644 il 31.05.2025

564

7 導入と情報: 2 h 0 min

電卓、数式集、スプレッドシート、デジタルツールなどの補助機器の使用は、明示的に規定された条件の下でのみ許可されます。許可された補助機器は、試験前に申告し、試験管理者の承認を得る必要があります。許可されていない補助機器の使用は禁止されており、失格となる場合があります。課題または試験に取り組む際は、明示的に許可されている場合を除き、追加資料や外部からの支援を受けることは禁止されています。これらの規則を遵守することで、すべての参加者が公平かつ平等な条件で試験に取り組むことができます。Nam スコアが3の場合、すべての参加者は利用可能なすべての補助機器を使用できます。

これらの規則に違反すると、重大な結果を招く可能性があります。特に公式評価において、許可されていない補助機器の使用は、試験からの即時除外につながる可能性があります。繰り返し使用された場合、または特に深刻な場合は、試験への永久的な参加禁止が科されることもあります。これらの規則を遵守することで、すべての参加者が公平かつ平等な条件で試験に取り組むことができ、評価の完全性が維持されます。

このシートは演習の目的を果たすものであり、一定の条件の下で公式に提出することができます。同時に、この文書は行政の監督なしに処理されたため、非公式文書とみなされるべきです。

1. **正しいラベル付け** - 文書には演習シートであることが明確に示されている必要があります。
2. **完全性と書式** - 文書は認められた形式（例:PDF または印刷物）で、必要な内容がすべて含まれている必要があります。
3. **期限内の提出** - 提出は指定された期限内に行う必要があります。
4. **責任機関による承認** - 公式認定には、関係する試験機関または行政機関の承認が必要です。
5. **外部からの支援なし** - 文書は、外部からの支援なしに、関係者のみによって作成されている必要があります。
6. **成績保証なし** - このシートは管理監督なしに作成されたため、公式の成績評価の対象としない義務があります。
7. **免責事項** - 著者は、内容の正確性または完全性について一切の責任を負いません。
8. **公式性なし** - この文書は公式文書ではなく、公式に発行された文書と同じ法的地位を有しません。
9. **承認保証なし** - この文書を提出しても、いかなる当局または機関による承認または公式な審査も保証されません。
10. **機密保持保証なし** - 個人情報の保護および機密保持は保証されません。
11. **セキュリティ保証なし** - 内容およびそこに含まれるデータのセキュリティは保証されません。
12. **真正性の保証なし** - 文書内の情報またはデータの真正性は確認できません。
13. **完全性の保証なし** - 文書に含まれるコンテンツの真正性または完全性は保証できません。
14. **妥当性の保証なし** - 文書には、法的または技術的な妥当性を確認できないコンテンツが含まれている可能性があります。
15. **信頼性の保証なし** - 情報の正確性、完全性、または信頼性は保証できません。

すべては信頼に基づいています。楽しんでください。

7.1 JP 1 No.n26-IP1.5V1.0: n 次元ユークリッド空間における等長変換

598

解決までの推定時間: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 オリジナル

写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して次を満たすとき、**等距写像 (Isometry)** と呼ばれます :

600

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

7.1.1 問題 :

1. **線形等距写像 :** 任意の線形等距写像 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が直交行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ によって表現されること、すなわち $T(x) = Ax$ かつ $A^\top A = I$ であることを示しなさい。

602

2. **アフィン等距写像 :** アフィンな形 $f(x) = Ax + b$ (ここで A は直交行列、 $b \in \mathbb{R}^n$) を持つすべての等距写像 f を求めなさい。

604

3. **内積の保存 :** $u, v \in \mathbb{R}^n$ を単位ベクトルとする。線形な等距写像 f が内積を保存すること、すなわち次を示しなさい :

606

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **特殊な等距写像の構成 :** 線形ではないが距離を保つ等距写像の例 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を与え、 f が等距写像であることを示しなさい。

608

カテゴリ: 証明, 解決と解く, 計算, 構築と設計 **難易度:** ハイミディアム **タグ:**

610

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1cef100f1 – **GUID:** ca1d8bd6-4f76-4817-afc5-69c371568c78 日付 31.05.2025

612 7.2 JP 1 No.n26-2P1.5V1.0: 証明課題: \mathbb{R}^n における等長写像の特徴づけ

解決までの推定時間: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **オリジナル**

614 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を等距離写像 (イソメトリー) とする。すなわち:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{任意の } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対して.}$$

示すべきこと:

616 任意の等距離写像 f は、直交行列 A とベクトル b によって $f(x) = Ax + b$ の形で表されるアフィン変換である
か、またはそのような写像と反射や並進の合成として表せる。

618 **補足 (任意):**

\mathbb{R}^n 上の全ての等距離写像は合成に関して群を成すことを示せ—すなわち、ユークリッド群 $E(n)$ 。

620 **カテゴリ:** 証明, 解決と解く, 計算, 構築と設計 **難易度:** ハイミディウム **タグ:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1cef100f1 – **GUID:** 0650ce4c-c61a-42f3-b6fb-b67d7e1cb72e 日付 31.05.2025

8 소개및정보: 2 h 0 min

계산기, 공식모음, 스프레드시트, 디지털도구와같은보조도구의사용은명시적으로명시된조건에서만허용됩니다. 허용되는보조도구는시험을위해사전에신고해야하며, 시험감독관의승인을받아야합니다. 허가받지않은보조기구사용은금지되며, 적발시실격처리될수있습니다. 과제나시험을치르는동안에는명시적으로허가되지않는한추가자료나외부도움을이용하는것이금지되어있습니다. 이러한규정을준수하면모든참가자가공정하고평등한조건에서작업할수있습니다. 남점수 3 점부터는모든참가자가가능한모든보조도구를사용할수있습니다.

이러한규정을위반하면심각한결과를초래할수있습니다. 특히공식시험에서허가받지않은보조도구를사용할경우시험에서즉시제외될수있습니다. 반복적으로발생하거나특히심각한경우에는시험응시가영구적으로금지될수도있습니다. 이러한규정을준수하면모든참가자가공정하고평등한조건에서시험에임하고시험의공정성이유지됩니다.

이시트는연습의목적달성하는데사용되며특정조건하에서공식적으로제출될수있습니다. 동시에이는행정감독없이작성되었기때문에비공식문서로간주되어야합니다.

1. **올바른라벨링** - 문서는연습지라는것을명확하게표시해야합니다.
2. **완전성및형식** - 인정된형식 (예: PDF 또는인쇄본) 이어야하며필요한모든내용이포함되어야합니다.
3. **제시기한** - 지정된기한내에제출해야합니다.
4. **관할기관의승인** - 공식인정을받으려면관할시험또는행정기관의승인이필요합니다.
5. **외부도움없음** - 해당문서는외부도움없이해당개인이단독으로작성해야합니다.
6. **등급보장없음** - 이논문은행정적감독없이작성되었으므로공식등급을고려할의무가없습니다.
7. **책임없음** - 저자는콘텐츠의정확성이나완전성에대해책임을지지않습니다.
8. **공식적인지위없음** - 해당문서는공식문서가아니며공식적으로발행된문서와동일한법적지위를갖지않습니다.
9. **인정보장없음** - 이문서를제출하더라도어떠한기관이나기관으로부터인정이나공식적인고려를보장하지않습니다.
10. **비밀유지보장불가** - 개인정보의보호및비밀유지는보장할수없습니다.
11. **보안보장없음** - 콘텐츠및콘텐츠에포함된데이터의보안은보장되지않습니다.
12. **진위성보장없음** - 문서내의정보나데이터의진위성을확인할수없습니다.
13. **무결성보장없음** - 콘텐츠의진위성이나무결성을보장할수없습니다.
14. **유효성보장없음** - 문서에는법적또는기술적유효성을확인할수없는콘텐츠가포함되어있을수있습니다.
15. **신뢰성보장없음** - 정보의정확성, 완전성또는신뢰성을보장할수없습니다.

모든것이신뢰에기반을두고있기때문에매우줄겁니다.

8.1 KR 1 No.n26-1P1.5V1.0: n 차원유클리드공간의등거리변환

650 **해결예상시간:** 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 원본

652 함수 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 가 두점사이의유클리드거리를보존하면 **등거리변환 (Isometry)** 라고합니다. 즉, 모든 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 에 대해다음을만족합니다:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

8.1.1 과제:

654 1. **선형등거리변환:** 모든선형등거리변환 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 은정사각형직교행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 로표현될수있음을보여라. 즉, $T(x) = Ax$, $A^\top A = I$ 이다.

656 2. **아핀등거리변환:** $f(x) = Ax + b$ 형식의모든등거리변환을구하라. 여기서 A 는직교행렬이고 $b \in \mathbb{R}^n$ 이다.

3. **내적보존:** 단위벡터 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 에대해선형등거리변환 f 는내적을보존함을증명하라:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

658 4. **비선형등거리변환의예시:** 선형이아닌거리보존함수 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 의예시를제시하고, 그것이등거리변환임을증명하라.

660 **카테고리:** 증명, 해결과풀기, 계산, 구축과설계 **난이도:** 상위중간 **태그:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 0970abf7-9d2f-412d-89c1-93c46798ae58 날짜 31.05.2025

8.2 KR 1 No.n26-2P1.5V1.0: 증명문제: \mathbb{R}^n 에서등거리사상의특징

662

해결예상시간: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 원본

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 를등거리변환이라하자. 즉,

664

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{모든 } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ 에 대해.}$$

증명할것:

모든등거리변환 f 는직교행렬 A 와벡터 b 를이용하여 $f(x) = Ax + b$ 꼴의아핀변환이거나, 그러한변환들과반사또는
평행이동의합성으로나타낼수있다.

666

심화학습을위한힌트 (선택사항):

668

\mathbb{R}^n 에서의모든등거리변환들의집합이합성에대해군을이룸을보여라—이를 유클리드군 $E(n)$ 라한다.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 계산, 구축과설계 **난이도:** 상위중간 **태그:**

670

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0cf-d3c1cef100f1 – **GUID:** a82cd709-3a5b-497f-81ec-b69f77755e82 날짜 31.05.2025

9 Introdução e Informações: 2 h 0 min

A utilização de recursos como calculadoras, conjuntos de fórmulas, folhas de cálculo e ferramentas digitais só é permitida nas condições expressamente estabelecidas. Os recursos permitidos devem ser declarados para os exames com antecedência e aprovados pelo supervisor do exame. Quaisquer recursos não autorizados são proibidos e podem resultar em desclassificação. Durante o trabalho numa tarefa ou exame, o uso de materiais adicionais ou assistência externa é proibido, a menos que expressamente permitido. O cumprimento destas normas garante que todos os participantes trabalham em condições justas e equitativas. A partir de uma pontuação Nam de 3, todos os participantes podem utilizar todas as características possíveis.

As violações destas normas podem ter consequências graves. Particularmente nos exames oficiais, a utilização de recursos não autorizados pode levar à exclusão imediata do exame. Em casos repetidos ou particularmente graves, pode mesmo ser imposta uma proibição permanente do exame. O cumprimento destas normas garante que todos os participantes trabalham em condições justas e equitativas e que a integridade dos exames é mantida.

Esta folha de trabalho serve o propósito do exercício e pode ser submetida oficialmente sob determinadas condições. Ao mesmo tempo, deve ser considerada um documento não oficial, pois foi criada sem supervisão administrativa.

1. **Rotulagem Adequada** - O documento deve ser claramente identificado como uma ficha de trabalho.
2. **Compleitude e Formatação** - Deve estar num formato reconhecido (por exemplo, PDF ou cópia impressa) e conter todo o conteúdo necessário.
3. **Envio no Prazo** - O envio deve ser feito dentro dos prazos especificados.
4. **Aprovação pela Autoridade Competente** - O reconhecimento oficial requer a aprovação do órgão examinador ou administrativo relevante.
5. **Sem Assistência Externa** - O documento deve ser criado exclusivamente pelo indivíduo em questão, sem assistência externa.
6. **Sem Garantia de Avaliação** - Uma vez que esta folha foi elaborada sem supervisão administrativa, não existe qualquer obrigação de a considerar para avaliação oficial.
7. **Sem Responsabilidade** - O autor não assume qualquer responsabilidade pela exatidão ou integridade do conteúdo.
8. **Sem Estatuto Oficial** - Este documento não é um documento oficial e não tem o mesmo estatuto legal que um documento emitido oficialmente.
9. **Sem Garantia de Reconhecimento** - O envio deste documento não garante o reconhecimento ou a consideração oficial por qualquer autoridade ou instituição.
10. **Sem Garantia de Confidencialidade** - A proteção de dados pessoais e a confidencialidade não podem ser garantidas.
11. **Sem Garantia de Segurança** - A segurança do conteúdo e dos dados nele contidos não é garantida.
12. **Sem Garantia de Autenticidade** - A autenticidade da informação ou dos dados contidos no documento não pode ser confirmada.
13. **Sem Garantia de Integridade** - A autenticidade ou integridade do conteúdo não pode ser assegurada.
14. **Sem Garantia de Validade** - O documento pode conter conteúdo cuja validade jurídica ou técnica não pode ser confirmada.
15. **Sem garantia de fiabilidade** - A exatidão, integridade ou fiabilidade da informação não podem ser garantidas.

Tudo se baseia na confiança, por isso divirta-se.

9.1 PT 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrias no espaço euclidiano n -dimensional

Tempo estimado para resolver: 1 h 0 min

Nam-Score: 3.0

Um Original

710

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de **isometria** se preserva a distância euclidiana entre dois pontos, ou seja, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$:

712

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

9.1.1 Exercícios:

1. **Isometrias lineares:** Mostre que toda isometria linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser representada por uma matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ou seja, $T(x) = Ax$ com $A^\top A = I$.

714

2. **Isometrias afins:** Determine todas as isometrias $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que são também **afins**, ou seja, da forma $f(x) = Ax + b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A ortogonal.

716

3. **Preservação do produto escalar:** Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ vetores unitários. Mostre que toda isometria linear f preserva o produto escalar:

718

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **Exemplo de isometria não linear:** Dê um exemplo de isometria não linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que não é linear mas preserva distâncias. Mostre que f é de fato uma isometria.

720

Categoria: Demonstração, Resolução e Resolver, Cálculo, Construção e Design

Dificuldade: Mais Médio

Etiquetas:

722

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – GUID: 9e309e43-0357-4e95-89ba-1f2829a3d2aa em 31.05.2025

724 9.2 PT I No.n26-2P1.5V1.0: Problema de demonstração: caracterização das isometrias em \mathbb{R}^n

Tempo estimado para resolver: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Um Original**

726 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria, ou seja:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstrar:

728 Toda isometria f em \mathbb{R}^n é uma transformação afim da forma $f(x) = Ax + b$, onde A é uma matriz ortogonal, ou pode ser expressa como uma composição dessas com reflexões ou translações.

730 **Dica para aprofundamento (opcional):**

Mostre que o conjunto de todas as isometrias de \mathbb{R}^n forma um grupo sob a composição —o chamado *grupo euclidiano* $E(n)$.

732 **Categoria:** Demonstração, Resolução e Resolver, Cálculo, Construção e Design **Dificuldade:** Mais Médio **Etiquetas:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1cef100f1 – **GUID:** 607af60e-daec-4629-9c96-18188b12c16b em 31.05.2025

10 Введение и информация: 2 h 0 min

Использование вспомогательных средств, таких как калькуляторы, наборы формул, электронные таблицы и цифровые инструменты, разрешено только при прямо указанных условиях. Разрешенные вспомогательные средства должны быть заявлены для экзаменов заранее и одобрены наблюдателем экзамена. Любые неразрешенные вспомогательные средства запрещены и могут привести к дисквалификации. Во время работы над заданием или экзаменом использование дополнительных материалов или внешней помощи запрещено, если это прямо не разрешено. Соблюдение этих правил гарантирует, что все участники работают в справедливых и равных условиях. Начиная с оценки Nam 3, все участники могут использовать все возможные вспомогательные средства.

Нарушение этих правил может иметь серьезные последствия. В частности, на официальных экзаменах использование неразрешенных вспомогательных средств может привести к немедленному исключению из экзамена. В повторных или особенно серьезных случаях может быть даже наложен постоянный запрет на экзамен. Соблюдение этих правил гарантирует, что все участники работают в справедливых и равных условиях и что сохраняется целостность экзаменов.

Этот рабочий лист служит цели упражнения и может быть официально представлен при определенных условиях. В то же время его следует считать неофициальным документом, поскольку он был создан без административного надзора.

1. **Правильная маркировка** - Документ должен быть четко обозначен как рабочий лист для упражнений.
2. **Полнота и форматирование** - Он должен быть в признанном формате (например, PDF или печатная копия) и содержать весь требуемый контент.
3. **Своевременная подача** - Подача должна быть сделана в указанные сроки.
4. **Одобрение компетентным органом** - Официальное признание требует одобрения соответствующего экзаменационного или административного органа.
5. **Отсутствие внешней помощи** - Документ должен быть создан исключительно заинтересованным лицом, без внешней помощи.
6. **Отсутствие гарантии оценки** - Поскольку этот лист был подготовлен без административного надзора, нет никаких обязательств рассматривать его для официальной оценки.
7. **Отсутствие ответственности** - Автор не несет ответственности за точность или полноту содержания.
8. **Отсутствие официального статуса** - Этот документ не является официальным документом и не имеет того же правового статуса, что и официально выпущенный документ.
9. **Отсутствие гарантии признания** - Представление этого документа не гарантирует признания или официального рассмотрения каким-либо органом или учреждением.
10. **Отсутствие гарантии конфиденциальности** - Защита персональных данных и конфиденциальность не могут быть гарантированы.
11. **Отсутствие гарантии безопасности** - Безопасность содержания и содержащихся в нем данных не гарантируется.
12. **Отсутствие гарантии подлинности** - Подлинность информации или данных в документе не может быть подтверждена.
13. **Отсутствие гарантии целостности** - Подлинность или целостность содержания не могут быть гарантированы.
14. **Нет гарантии действительности** - Документ может содержать контент, юридическая или техническая действительность которого не может быть подтверждена.
15. **Нет гарантии надежности** - Точность, полнота или надежность информации не могут быть гарантированы.

Все основано на доверии, так что получайте удовольствие.

10.1 RU 1 No.n26-1P1.5V1.0: Изометрии в n -мерном евклидова пространстве776 **Оценочное время решения:** 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Оригинал**

Отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **изометрией**, если оно сохраняет евклидово расстояние между двумя

778 точками, то есть для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

10.1.1 Задания:

780 1. **Линейные изометрии:** Докажите, что любая линейная изометрия $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ может быть представлена ортогональной матрицей A , то есть $T(x) = Ax$, $A^\top A = I$.

782 2. **Аффинные изометрии:** Найдите все изометрии вида $f(x) = Ax + b$, где A — ортогональная матрица, $b \in \mathbb{R}^n$.

784 3. **Сохранение скалярного произведения:** Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$ — единичные векторы. Докажите, что линейная изометрия f сохраняет скалярное произведение:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

786 4. **Пример нелинейной изометрии:** Приведите пример изометрии, которая не является линейным отображением, но сохраняет расстояния. Докажите, что f действительно изометрия.

788 **Категория:** Доказательство, Решение и Решать, Вычисление, Построение и Проектирование **Сложность:** Выше Средний **Теги:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 — **GUID:** 38fb42ac-41f8-4594-8e1b-6c235ecee651 на 31.05.2025

10.2 RU I No.n26-2P1.5V1.0: Задача доказательства: характеристика изометрий в \mathbb{R}^n

790

Оценочное время решения: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Оригинал*

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ —изометрия, то есть:

792

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Докажите:

Любая изометрия f в \mathbb{R}^n либо является аффинным преобразованием вида $f(x) = Ax + b$, где A —ортогональная матрица, либо может быть представлена как композиция таких преобразований с отражениями или параллельными переносами.

794

796

Дополнительное задание (по желанию):

Докажите, что множество всех изометрий \mathbb{R}^n образует группу относительно композиции —так называемую евклидову группу $E(n)$.

798

Категория: Доказательство, Решение и Решать, Вычисление, Построение и Проектирование **Сложность:** Выше Средний **Теги:**

800

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID:* d7b65282-5963-4d3d-91b2-7ea7b5180cd4 на 31.05.2025

802

11 Giới thiệu và Thông tin: 2 h 0 min

Việc sử dụng các công cụ hỗ trợ như máy tính, bộ công thức, bảng tính và công cụ kỹ thuật số chỉ được phép theo các điều kiện được nêu rõ. Các công cụ hỗ trợ được phép phải được khai báo trước cho kỳ thi và được giám thị kỳ thi chấp thuận. Bất kỳ công cụ hỗ trợ trái phép nào đều bị cấm và có thể dẫn đến việc bị loại. Trong khi làm bài tập hoặc kỳ thi, việc sử dụng các tài liệu bổ sung hoặc hỗ trợ bên ngoài đều bị cấm trừ khi được phép rõ ràng. Việc tuân thủ các quy định này đảm bảo rằng tất cả người tham gia đều làm việc trong các điều kiện công bằng và bình đẳng. Bắt đầu với điểm Nam là 3, tất cả người tham gia có thể sử dụng tất cả các công cụ hỗ trợ có thể.

Vì phạm các quy định này có thể dẫn đến hậu quả nghiêm trọng. Đặc biệt là trong các kỳ thi chính thức, việc sử dụng các công cụ hỗ trợ trái phép có thể dẫn đến việc bị loại ngay lập tức khỏi kỳ thi. Trong các trường hợp lặp lại hoặc đặc biệt nghiêm trọng, thậm chí có thể bị cấm thi vĩnh viễn. Việc tuân thủ các quy định này đảm bảo rằng tất cả người tham gia đều làm việc trong các điều kiện công bằng và bình đẳng và tính toàn vẹn của kỳ thi được duy trì.

Phiếu bài tập này phục vụ mục đích của bài tập và có thể được nộp chính thức trong một số điều kiện nhất định. Đồng thời, nó nên được coi là một tài liệu không chính thức vì nó được tạo ra mà không có sự giám sát của hành chính.

1. **Ghi nhãn đúng** - Tài liệu phải được đánh dấu rõ ràng là bài tập.
2. **Hoàn thiện và Định dạng** - Tài liệu phải ở định dạng được công nhận (ví dụ: PDF hoặc bản in) và chứa tất cả nội dung bắt buộc.
3. **Nộp đúng hạn** - Phải nộp trong thời hạn quy định.
4. **Phê duyệt của Cơ quan có thẩm quyền** - Sự công nhận chính thức đòi hỏi phải có sự chấp thuận của cơ quan kiểm tra hoặc hành chính có liên quan.
5. **Không có sự hỗ trợ bên ngoài** - Tài liệu phải do cá nhân có liên quan tạo ra, không có sự hỗ trợ bên ngoài.
6. **Không đảm bảo đánh giá** - Vì tờ giấy này được chuẩn bị mà không có sự giám sát của cơ quan hành chính nên không có nghĩa vụ phải xem xét để đánh giá chính thức.
7. **Không chịu trách nhiệm** - Tác giả không chịu trách nhiệm về tính chính xác hoặc tính đầy đủ của nội dung.
8. **Không có tư cách chính thức** - Tài liệu này không phải là tài liệu chính thức và không có tư cách pháp lý giống như tài liệu được cấp chính thức.
9. **Không đảm bảo công nhận** - Việc nộp tài liệu này không đảm bảo được bất kỳ cơ quan hoặc tổ chức nào công nhận hoặc xem xét chính thức.
10. **Không đảm bảo tính bảo mật** - Không thể đảm bảo việc bảo vệ dữ liệu cá nhân và tính bảo mật.
11. **Không đảm bảo an ninh** - Không đảm bảo tính bảo mật của nội dung và dữ liệu có trong đó.
12. **Không đảm bảo tính xác thực** - Không thể xác nhận tính xác thực của thông tin hoặc dữ liệu trong tài liệu.
13. **Không đảm bảo tính toàn vẹn** - Không thể đảm bảo tính xác thực hoặc tính toàn vẹn của nội dung.
14. **Không đảm bảo tính hợp lệ** - Tài liệu có thể chứa nội dung mà tính hợp lệ về mặt pháp lý hoặc kỹ thuật không thể xác nhận được.
15. **Không đảm bảo độ tin cậy** - Không thể đảm bảo tính chính xác, đầy đủ hoặc độ tin cậy của thông tin.

Mọi thứ đều dựa trên sự tin tưởng, vì vậy hãy vui vẻ.

11.1 VN I No.n26-1P1.5V1.0: Biến đổi đồng nhất trong không gian Euclid n chiều

838

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min *Nam-Score:* 3.0 *Một Bản Gốc*

Một ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là **đẳng cự** nếu nó bảo toàn khoảng cách Euclid giữa hai điểm, tức là với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$:

840

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

11.1.1 Bài tập:

1. **Đẳng cự tuyến tính:** Chứng minh rằng mọi ánh xạ đẳng cự tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ có thể biểu diễn bằng một ma trận
trực giao $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tức là $T(x) = Ax$, $A^\top A = I$.

842

2. **Đẳng cự affine:** Xác định tất cả ánh xạ đẳng cự f có dạng affine $f(x) = Ax + b$, trong đó A là ma trận trực giao, $b \in \mathbb{R}^n$.

844

3. **Bảo toàn tích vô hướng:** Với hai vector đơn vị $u, v \in \mathbb{R}^n$, chứng minh rằng ánh xạ tuyến tính đẳng cự f bảo toàn tích
vô hướng:

846

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **Ví dụ ánh xạ không tuyến tính:** Đưa ra một ví dụ về ánh xạ không tuyến tính nhưng vẫn bảo toàn khoảng cách. Chứng
minh rằng f là ánh xạ đẳng cự.

848

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Tính toán, Xây dựng và Thiết kế **Độ khó:** Trung Bình Cao **Thẻ:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** e98a587c-c2b7-4363-9eda-4d7453bb5809 vào 31.05.2025

850

11.2 VN I No.n26-2P1.5V1.0: Bài toán chứng minh: đặc trưng của ánh xạ đồng nhất trong \mathbb{R}^n

852

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min

Nam-Score: 3.0

Một Bản Gốc

Cho $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đẳng cấu, tức là:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

854

Cần chứng minh:

Mọi ánh xạ đẳng cấu f trên \mathbb{R}^n đều là ánh xạ affine dạng $f(x) = Ax + b$ với A là ma trận trực giao, hoặc có thể được biểu

856

diễn như một tổ hợp của các ánh xạ như vậy với các phép phản xạ hoặc tịnh tiến.

Gợi ý nâng cao (tùy chọn):

858

Chứng minh rằng tập hợp tất cả các ánh xạ đẳng cấu trên \mathbb{R}^n tạo thành một nhóm với phép hợp thành —gọi là *nhóm Euclid* $E(n)$.

860

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Tính toán, Xây dựng và Thiết kế **Độ khó:** Trung Bình Cao **Thẻ:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** bb34f908-3f65-4add-8596-5d9bb5e1b3bb vào 31.05.2025

12 介绍和信息: 2 h 0 min

僅在明確規定的條件下才允許使用計算器、公式集、電子表格和數位工具等輔助工具。考試時必須事先申報允許使用的輔助器材，並獲得考試監督員的批准。禁止任何未經授權的輔助，否則可能導致取消資格。在完成作業或考試時，除非明確允許，否則禁止使用額外的材料或外部協助。遵守這些規定可確保所有參與者在公平、平等的條件下運作。從 Nam 分數為 3 開始，所有參與者都可以使用所有可能的輔助工具。

違反這些規定可能會造成嚴重後果。特別是在正式考試中，使用未經授權的輔助工具可能會導致立即被取消考試資格。對於重複或特別嚴重的情況，甚至可能被處以永久禁止參加考試的處罰。遵守這些規定可確保所有參與者在公平、平等的條件下運作，並維護考試的完整性。

此表用於練習目的，在一定條件下可以正式提交。同時，由於它是在沒有行政監督的情況下創建的，因此應該被視為非官方文件。

1. **正確標記** - 該文件必須清楚標示為練習表。
2. **完整性和格式** - 它必須採用可識別的格式（例如 PDF 或列印副本）並包含所有必要的內容。
3. **及時提交** - 必須在指定的期限內提交。
4. **主管機關核准** - 官方認可需要主管審查或行政機構的批准。
5. **無外部幫助** - 該文件必須是由相關人員獨自創建的，無需外部幫助。
6. **不保證評分** - 由於論文是在沒有行政監督的情況下準備的，因此沒有義務考慮對其進行官方評分。
7. **無責任** - 作者對內容的準確性或完整性不承擔任何責任。
8. **無官方地位** - 該文件不是官方文件，不具有與正式頒發的文件相同的法律地位。
9. **不保證獲得認可** - 提交此文件並不保證獲得任何當局或機構的認可或官方考慮。
10. **不保證保密** - 無法保證個人資料的保護和保密性。
11. **不保證安全** - 不保證其中包含的內容和資料的安全性。
12. **不保證真實性** - 無法確認文件中資訊或資料的真實性。
13. **不保證完整性** - 無法保證所含內容的真實性或完整性。
14. **不保證有效性** - 文件可能包含無法確認其法律或技術有效性的內容。
15. **不保證可靠性** - 無法保證資訊的準確性、完整性或可靠性。

一切都基於信任，因此很有趣。

888

12.1 ZH I No.n26-IP1.5V1.0: n 維歐氏空間中的等距

解决的预计时间: 1 h 0 min

Nam-Score: 3.0

原创

890

若映射 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 保持兩點間的歐幾里得距離，則稱其為**等距映射 (Isometry)**，即對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

12.1.1 題目 :

892

1. **線性等距映射**：證明每個線性等距映射 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 可由正交矩陣 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示, 即 $T(x) = Ax$ 且 $A^\top A = I$ 。

2. **仿射等距映射**：找出所有形式為 $f(x) = Ax + b$ 的等距映射，其中 A 為正交矩陣， $b \in \mathbb{R}^n$ 。

894

3. **內積保持性**：設 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 為單位向量，證明線性等距映射 f 保持內積：

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **非線性等距映射的構造**：給出一個非線性但仍保距的等距映射例子，並證明該映射確實是等距的。

896

类别: 证明, 解决和解答, 计算, 构建和设计 **难度:** 更中等 **标签:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 70548499-05d5-4926-9c2d-70466c165b00 **日期** 31.05.2025

12.2 ZH I No.n26-2P1.5V1.0: 證明題目： \mathbb{R}^n 中等距映射的特徵

898

解决的预计时间: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 原创

設 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 為一個等距映射，也就是說：

900

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{對所有 } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

需證明：

任何等距映射 f 皆為一個仿射映射，其形式為 $f(x) = Ax + b$ ，其中 A 為正交矩陣，或可表示為此類映射與反射或平移的組合。

902

進階補充（可選）：

證明所有 \mathbb{R}^n 上的等距映射在合成下形成一個群，即所謂的 歐幾里得群 $E(n)$ 。

904

类别: 证明, 解决和解答, 计算, 构建和设计 难度: 更中等 标签:

906

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – GUID: 0854d323-52c5-479f-8685-324bccfc0093 日期 31.05.2025

908 13 Lösung

13.1 DE SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isometrien im n -dimensionalen euklidischen Raum910 **Zeit zur Bearbeitung:** 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0 Ein Original*912 Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

13.1.1 Aufgaben:

- 914 1. **Lineare Isometrien:** Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.
- 916 2. **Affine Isometrien:** Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.
- 918 3. **Erhaltung des Skalarprodukts:** Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f , die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

- 920 4. **Konstruktion einer speziellen Isometrie:** Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

922 13.1.2 Lösung

Solution for n26-1 in de

924 **Kategorie:** Shoemei, Kaiketsu und Toku, Keisan, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad:** Höheres Mittel **Stichwörter:**
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** f6cee806-99ef-4ccd-8b9e-2625f669adb8 am 31.05.2025

13.2 DE SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in \mathbb{R}^n

926

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Ein Original**Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d. h.:

928

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

13.2.1 Zu zeigen:

Jede Isometrie f in \mathbb{R}^n ist entweder eine affine Abbildung der Form $f(x) = Ax + b$, wobei A eine orthogonale Matrix ist, oder sie lässt sich durch Verkettung solcher mit Spiegelungen oder Translationen darstellen.

930

13.2.2 Hinweis zur Vertiefung (optional):

932

Zeigen Sie, dass die Menge aller Isometrien in \mathbb{R}^n eine Gruppe unter Komposition bildet –die sogenannte **euklidische Gruppe** $E(n)$.

934

13.2.3 Lösung

Solution for n26-2 in de

936

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Keisan, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad:** Höheres Mittel **Stichwörter:****UUID:** 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** fb35a6d7-5c2c-4a1b-9637-b43515e51775 am 31.05.2025

938

14 Solution

14.1 EN SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isometries in n -dimensional Euclidean space

Estimated time for solving: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **An Original**

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

14.1.1 Aufgaben:

- Lineare Isometrien:** Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.
- Affine Isometrien:** Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.
- Erhaltung des Skalarprodukts:** Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f , die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

- Konstruktion einer speziellen Isometrie:** Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

14.1.2 Solution

Solution for n26-1 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Keisan, Kōchiku and Sekkei **Difficulty:** Higher Medium **Tags:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 279441ee-c787-4429-9a05-1b35c79ef998 on 31.05.2025

14.2 EN SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Proof task: Characterization of isometric mappings in \mathbb{R}^n

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score:* 3.0 *An Original*

958

Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be an isometry, i.e.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

To show:

960

Every isometry f in \mathbb{R}^n is either an affine transformation of the form $f(x) = Ax + b$, where A is an orthogonal matrix, or can be written as a composition of such maps with reflections or translations.

962

Hint for further study (optional):

Show that the set of all isometries in \mathbb{R}^n forms a group under composition —the so-called *Euclidean group* $E(n)$.

964

14.2.1 Solution

Solution for n26-2 in en

966

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Keisan, Kōchiku and Sekkei **Difficulty:** Higher Medium **Tags:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 920ac3eb-4f5f-40ee-9485-9426674da59a on 31.05.2025

968

15 Solución

15.1 ES 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrías en el espacio euclidiano de dimensión n

Tiempo estimado para resolver: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Un Original**

Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama una **isometría** si conserva la distancia euclidiana entre dos puntos, es decir, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

15.1.1 Ejercicios:

1. **Isometrías lineales:** Demuestre que toda isometría lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede representarse mediante una matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es decir, $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

2. **Isometrías afines:** Determine todas las isometrías $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que además sean **afines**, es decir, de la forma $f(x) = Ax + b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, y A es ortogonal.

3. **Conservación del producto escalar:** Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores unitarios. Demuestre que toda isometría f , que además es lineal, conserva el producto escalar, es decir:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **Construcción de una isometría especial:** Dé un ejemplo de una isometría no lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que no sea una transformación lineal pero que conserve las distancias. Demuestre que f es realmente una isometría.

15.1.2 Solución

Solution for n26-1 in es

Categoría: Demostración, Resolución y Resolver, Cálculo, Construcción y Diseño **Dificultad:** Más Medio **Etiquetas:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 525848ab-3c75-46de-a638-918396abdd44 el 31.05.2025

15.2 ES 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema de demostración: caracterización de las isometrías en \mathbb{R}^n

Tiempo estimado para resolver: 1 h 0 min

Nam-Score: 3.0

Un Original

988

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una isometría, es decir:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A demostrar:

990

Toda isometría f en \mathbb{R}^n es una transformación afín de la forma $f(x) = Ax + b$, donde A es una matriz ortogonal, o puede escribirse como una composición de tales transformaciones con reflexiones o traslaciones.

992

Nota para profundizar (opcional):

Demuestre que el conjunto de todas las isometrías en \mathbb{R}^n forma un grupo bajo composición —el llamado *grupo euclídeo* $E(n)$.

994

15.2.1 Solución

996

Solution for n26-2 in es

Categoría: Demostración, Resolución y Resolver, Cálculo, Construcción y Diseño

Dificultad: Más Medio

Etiquetas:

998

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 67c0b382-7dd2-4ed8-b626-75c7228017b5 el 31.05.2025

1000 16 Ratkaisu

16.1 FN I No.n26-1P1.5V1.0: Isometriat n -ulotteisessa euklidisessa avaruudessa1002 **Ratkaisuun arvioitu aika:** 1 h 0 min *Nam-Score:* 3.0 *Alkuperäinen*1004 Kuvauksesta $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sanotaan, että se on **isometria**, jos se säilyttää euklidisen etäisyyden kahden pisteen välillä, eli kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

16.1.1 Tehtävät:

- 1006 1. **Lineaariset isometriat:** Osoita, että jokainen lineaarinen isometria $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ voidaan esittää ortogonaalisella matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, eli $T(x) = Ax$ ja $A^\top A = I$.
- 1008 2. **Affiinit isometriat:** Määritä kaikki isometriat $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, jotka lisäksi ovat **affiineja**, eli muotoa $f(x) = Ax + b$, missä $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, ja A on ortogonaalinen.
- 1010 3. **Skalaaritulon säilyminen:** Olkoot $u, v \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektoreita. Osoita, että jokainen isometria f , joka on myös lineaarinen, säilyttää skalaaritulon:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

- 1012 4. **Esimerkki erityisestä isometriasta:** Anna esimerkki epälineaarista isometriasta $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, joka ei ole lineaarinen, mutta säilyttää etäisyydet. Osoita, että f on todellakin isometria.

1014 16.1.2 Ratkaisu

Solution for n26-1 in fn

1016 **Kategoria:** Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Laskenta, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso:** Korkea Keskitaso **Tunnisteet:**1018 **UUID:** 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 2f62edea-11fe-4cd1-8f0c-5216db27cb0a päivämäärä 31.05.2025

16.2 FN I No.n26-2P1.5V1.0: Todistustehtävä: \mathbb{R}^n -avaruuden isometrioiden ominaisuus

Ratkaisuun arvioitu aika: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 Alkuperäinen

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isometria, eli:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{kaikille } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Todistettava:

Jokainen isometria f avaruudessa \mathbb{R}^n on joko affiini muunnos muotoa $f(x) = Ax + b$, missä A on ortogonaalimatriisi, tai koostuu tällaisten muunnosten ja peilausten tai siirtojen yhdistelmästä.

Lisätehtävä (valinnainen):

Näytä, että kaikkien \mathbb{R}^n :n isometristen kuvausten joukko muodostaa ryhmän komposition suhteen —niin sanottu *Euklidinen ryhmä* $E(n)$.

16.2.1 Ratkaisu

Solution for n26-2 in fn

Kategoria: Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Laskenta, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso:** Korkea Keskitaso **Tunnisteet:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 — **GUID:** 7e1b0a60-c236-4804-a837-dc31db3746a1 päivämäärä 31.05.2025

1034 17 Solution

17.1 FR SHK-1 No.26-1P1.5V1.0: Isométries dans l'espace euclidien de dimension n

1036 Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 Un Original

1038 Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée une **isométrie** si elle conserve la distance euclidienne entre deux points, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

17.1.1 Exercices :

1040 1. **Isométries linéaires** : Montrez que toute isométrie linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ peut être représentée par une matrice orthogonale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, c'est-à-dire $T(x) = Ax$ avec $A^\top A = I$.1042 2. **Isométries affines** : Déterminez toutes les isométries $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont également **affines**, donc de la forme $f(x) = Ax + b$, où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, et A est orthogonale.1044 3. **Conservation du produit scalaire** : Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs unitaires. Montrez que toute isométrie f , qui est aussi linéaire, conserve le produit scalaire :

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

1046 4. **Construction d'une isométrie particulière** : Donnez un exemple d'une isométrie non linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui n'est pas une transformation linéaire mais qui conserve néanmoins les distances. Montrez que f est bien isométrique.

1048 17.1.2 Solution

Solution for n26-1 in fr

1050 **Catégorie:** Preuve, Résolution et Résoudre, Calcul, Construction et Conception **Difficulté:** Plus Moyen **Étiquettes:****UUID:** 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 9e3d5cfc-ad12-41ae-a13b-228b0eafc565 le 31.05.2025

17.2 FR SHK-1 No.26-2P1.5V1.0: Tâche de preuve: caractérisation des applications isométriques dans \mathbb{R}^n

1052

Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Un Original**

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie, c'est-à-dire :

1054

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

À montrer :

Toute isométrie f de \mathbb{R}^n est soit une application affine de la forme $f(x) = Ax + b$, où A est une matrice orthogonale, soit elle peut être obtenue par composition de telles applications avec des réflexions ou des translations.

1056

Remarque pour approfondir (facultatif) :

1058

Montrez que l'ensemble des isométries de \mathbb{R}^n forme un groupe pour la composition —le *groupe euclidien* $E(n)$.

17.2.1 Solution

1060

Solution for n26-2 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Calcul, Construction et Conception **Difficulté:** Plus Moyen **Étiquettes:**

1062

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** f7477982-9df6-482c-bbeb-ea0acd6e7fc2 le 31.05.2025

1064 18 Soluzione

1065 18.1 IT 1 No.n26-IP1.5V1.0: Isometrie nello spazio euclideo di dimensione n 1066 **Tempo stimato per la risoluzione:** 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Un Originale**1068 Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice una **isometria** se conserva la distanza euclidea tra due punti, cioè per tutti $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

18.1.1 Esercizi:

1070 1. **Isometrie lineari:** Mostra che ogni isometria lineare $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ può essere rappresentata da una matrice ortogonale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cioè $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.1072 2. **Isometrie affini:** Determina tutte le isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che sono anche **affini**, cioè della forma $f(x) = Ax + b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A ortogonale.1074 3. **Conservazione del prodotto scalare:** Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ due vettori unitari. Mostra che ogni isometria f lineare conserva il prodotto scalare:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

1076 4. **Costruzione di un'isometria speciale:** Fornisci un esempio di un'isometria non lineare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che non è una trasformazione lineare ma che conserva comunque le distanze. Mostra che f è effettivamente isometrica.

1078 18.1.2 Soluzione

Solution for n26-1 in it

1080 **Categoria:** Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Calcolo, Costruzione e Progettazione **Difficoltà:** Più Medio **Etichette:** **UUID:** 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 4d950882-f4cd-4549-b43a-547494aabfcb il 31.05.2025

18.2 IT 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema di dimostrazione: caratterizzazione delle isometrie in \mathbb{R}^n

1082

Tempo stimato per la risoluzione: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 Un Originale

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un’isometria, cioè:

1084

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{per tutti } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Da dimostrare:

Ogni isometria f in \mathbb{R}^n è una trasformazione affine della forma $f(x) = Ax + b$, dove A è una matrice ortogonale, oppure
può essere scritta come composizione di tali trasformazioni con riflessioni o traslazioni.

1086

Suggerimento per approfondimento (opzionale):

1088

Mostra che l’insieme di tutte le isometrie in \mathbb{R}^n forma un gruppo rispetto alla composizione —il cosiddetto *gruppo euclideo* $E(n)$.

1090

18.2.1 Soluzione

Solution for n26-2 in it

1092

Categoria: Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Calcolo, Costruzione e Progettazione **Difficoltà:** Più Medio **Etichette:**
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID:* 1a2cdc82-23b6-400a-8696-ac2ff5453644 il 31.05.2025

1094

19 解決策

19.1 JP 1 No.n26-1P1.5V1.0: n 次元ユークリッド空間における等長変換

解決までの推定時間: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 オリジナル

写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して次を満たすとき、**等距写像 (Isometry)** と呼ばれます：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

19.1.1 問題：

- 線形等距写像：**任意の線形等距写像 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が直交行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ によって表現されること、すなわち $T(x) = Ax$ かつ $A^\top A = I$ であることを示しなさい。
- アフィン等距写像：**アフィンな形 $f(x) = Ax + b$ （ここで A は直交行列、 $b \in \mathbb{R}^n$ ）を持つすべての等距写像 f を求めなさい。
- 内積の保存：** $u, v \in \mathbb{R}^n$ を単位ベクトルとする。線形な等距写像 f が内積を保存すること、すなわち次を示しなさい：

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

- 特殊な等距写像の構成：**線形ではないが距離を保つ等距写像の例 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を与え、 f が等距写像であることを示しなさい。

19.1.2 解決策

Solution for n26-1 in jp

カテゴリ： 証明, 解決と解く, 計算, 構築と設計 **難易度:** ハイミディアム **タグ:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** ca1d8bd6-4f76-4817-afc5-69c371568c78 日付 31.05.2025

19.2 JP 1 No.n26-2Pl.5Vl.0: 証明課題: \mathbb{R}^n における等長写像の特徴づけ

1112

解決までの推定時間: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 オリジナル

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を等距離写像 (イソメトリー) とする。すなわち:

1114

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{任意の } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対して.}$$

示すべきこと:

任意の等距離写像 f は、直交行列 A とベクトル b によって $f(x) = Ax + b$ の形で表されるアフィン変換である
か、またはそのような写像と反射や並進の合成として表せる。

1116

補足 (任意):

1118

\mathbb{R}^n 上の全ての等距離写像は合成に関して群を成すことを示せ—すなわち、ユークリッド群 $E(n)$ 。

19.2.1 解決策

1120

Solution for n26-2 in jp

カテゴリ: 証明, 解決と解く, 計算, 構築と設計 **難易度:** ハイミディアム **タグ:**

1122

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 0650ce4c-c61a-42f3-b6fb-b67d7e1cb72e 日付 31.05.2025

1124 20 해결책

20.1 KR I No.n26-1P1.5V1.0: n 차원유클리드공간의등거리변환1126 **해결예상시간:** 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 원본1128 함수 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 가 두점사이의유클리드거리를보존하면 **등거리변환 (Isometry)** 라고합니다. 즉, 모든 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 에 대해다음을만족합니다:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

20.1.1 과제:

1130 1. **선형등거리변환:** 모든선형등거리변환 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 은정사각형직교행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 로표현될수있음을보여라. 즉, $T(x) = Ax$, $A^\top A = I$ 이다.1132 2. **아핀등거리변환:** $f(x) = Ax + b$ 형식의모든등거리변환을구하라. 여기서 A 는직교행렬이고 $b \in \mathbb{R}^n$ 이다.3. **내적보존:** 단위벡터 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 에대해선형등거리변환 f 는내적을보존함을증명하라:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

1134 4. **비선형등거리변환의예시:** 선형이아닌거리보존함수 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 의예시를제시하고, 그것이등거리변환임을증명하라.

1136 20.1.2 해결책

Solution for n26-1 in kr

1138 **카테고리:** 증명, 해결과풀기, 계산, 구축과설계 **난이도:** 상위중간 **태그:****UUID:** 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1cef100f1 – **GUID:** 0970abf7-9d2f-412d-89c1-93c46798ae58 날짜 31.05.2025

20.2 KR I No.n26-2P1.5V1.0: 증명문제: \mathbb{R}^n 에서등거리사상의특징

1140

해결예상시간: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 원본

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 를등거리변환이라하자. 즉,

1142

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{모든 } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ 에 대해.}$$

증명할것:

모든등거리변환 f 는직교행렬 A 와벡터 b 를이용하여 $f(x) = Ax + b$ 꼴의아핀변환이거나, 그러한변환들과반사또는
평행이동의합성으로나타낼수있다.

1144

심화학습을위한힌트 (선택사항):

1146

\mathbb{R}^n 에서의모든등거리변환들의집합이합성에대해군을이룸을보여라—이를 유클리드군 $E(n)$ 라한다.

20.2.1 해결책

1148

Solution for n26-2 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 계산, 구축과설계 **난이도:** 상위중간 **태그:**

1150

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** a82cd709-3a5b-497f-81ec-b69f77755e82 날짜 31.05.2025

1152 21 Solução

21.1 PT 1 No.n26-1P1.5V1.0: Isometrias no espaço euclidiano n -dimensional

1154 **Tempo estimado para resolver:** 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Um Original**

1156 Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de **isometria** se preserva a distância euclidiana entre dois pontos, ou seja, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

21.1.1 Exercícios:

1158 1. **Isometrias lineares:** Mostre que toda isometria linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser representada por uma matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ou seja, $T(x) = Ax$ com $A^\top A = I$.

1160 2. **Isometrias afins:** Determine todas as isometrias $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que são também **afins**, ou seja, da forma $f(x) = Ax + b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A ortogonal.

1162 3. **Preservação do produto escalar:** Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ vetores unitários. Mostre que toda isometria linear f preserva o produto escalar:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

1164 4. **Exemplo de isometria não linear:** Dê um exemplo de isometria não linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que não é linear mas preserva distâncias. Mostre que f é de fato uma isometria.

1166 21.1.2 Solução

Solution for n26-1 in pt

1168 **Categoria:** Demonstração, Resolução e Resolver, Cálculo, Construção e Design **Dificuldade:** Mais Médio **Etiquetas:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 9e309e43-0357-4e95-89ba-1f2829a3d2aa em 31.05.2025

21.2 PT 1 No.n26-2P1.5V1.0: Problema de demonstração: caracterização das isometrias em \mathbb{R}^n

1170

Tempo estimado para resolver: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 Um Original

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria, ou seja:

1172

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstrar:

Toda isometria f em \mathbb{R}^n é uma transformação afim da forma $f(x) = Ax + b$, onde A é uma matriz ortogonal, ou pode ser expressa como uma composição dessas com reflexões ou translações.

1174

Dica para aprofundamento (opcional):

1176

Mostre que o conjunto de todas as isometrias de \mathbb{R}^n forma um grupo sob a composição —o chamado *grupo euclidiano* $E(n)$.

1178

21.2.1 Solução

Solution for n26-2 in pt

1180

Categoria: Demonstração, Resolução e Resolver, Cálculo, Construção e Design Dificuldade: Mais Médio Etiquetas:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – GUID: 607af60e-daec-4629-9c96-18188b12c16b em 31.05.2025

1182

22 Решение

1184 22.1 RU 1 No.n26-1P1.5V1.0: Изометрии в n -мерном евклидова пространстве**Оценочное время решения:** 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Оригинал**1186 Отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **изометрией**, если оно сохраняет евклидово расстояние между двумя точками, то есть для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

1188 22.1.1 Задания:

1190 1. **Линейные изометрии:** Докажите, что любая линейная изометрия $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ может быть представлена ортогональной матрицей A , то есть $T(x) = Ax$, $A^\top A = I$.2. **Аффинные изометрии:** Найдите все изометрии вида $f(x) = Ax + b$, где A — ортогональная матрица, $b \in \mathbb{R}^n$.1192 3. **Сохранение скалярного произведения:** Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$ — единичные векторы. Докажите, что линейная изометрия f сохраняет скалярное произведение:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

1194 4. **Пример нелинейной изометрии:** Приведите пример изометрии, которая не является линейным отображением, но сохраняет расстояния. Докажите, что f действительно изометрия.

1196 22.1.2 Решение

Solution for n26-1 in ru

1198 **Категория:** Доказательство, Решение и Решать, Вычисление, Построение и Проектирование **Сложность:** Выше Средний **Теги:**1200 **UUID:** 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 — **GUID:** 38fb42ac-41f8-4594-8e1b-6c235ecce651 на 31.05.2025

22.2 RU I No.n26-2P1.5V1.0: Задача доказательства: характеристика изометрий в \mathbb{R}^n

Оценочное время решения: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0 Оригинал*

1202

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ —изометрия, то есть:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Докажите:

1204

Любая изометрия f в \mathbb{R}^n либо является аффинным преобразованием вида $f(x) = Ax + b$, где A —ортогональная матрица, либо может быть представлена как композиция таких преобразований с отражениями или параллельными переносами.

1206

Дополнительное задание (по желанию):

1208

Докажите, что множество всех изометрий \mathbb{R}^n образует группу относительно композиции —так называемую *евклидову группу* $E(n)$.

1210

22.2.1 Решение

Solution for n26-2 in ru

1212

Категория: Доказательство, Решение и Решать, Вычисление, Построение и Проектирование **Сложность:** Выше Средний **Теги:**

1214

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1cef100f1 – *GUID:* d7b65282-5963-4d3d-91b2-7ea7b5180cd4 на 31.05.2025

1216

23

Giải pháp

23.1

VN I No.n26-1P1.5V1.0: Biến đổi đồng nhất trong không gian Euclid n chiều

1218

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min

Nam-Score: 3.0

Một Bản Gốc

Một ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là **đẳng cự** nếu nó bảo toàn khoảng cách Euclid giữa hai điểm, tức là với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

1220

23.1.1

Bài tập:

1. **Đẳng cự tuyến tính:** Chứng minh rằng mọi ánh xạ đẳng cự tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ có thể biểu diễn bằng một ma trận

1222

trực giao $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tức là $T(x) = Ax$, $A^T A = I$.

2. **Đẳng cự affine:** Xác định tất cả ánh xạ đẳng cự f có dạng affine $f(x) = Ax + b$, trong đó A là ma trận trực giao, $b \in \mathbb{R}^n$.

1224

3. **Bảo toàn tích vô hướng:** Với hai vector đơn vị $u, v \in \mathbb{R}^n$, chứng minh rằng ánh xạ tuyến tính đẳng cự f bảo toàn tích vô hướng:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

1226

4. **Ví dụ ánh xạ không tuyến tính:** Đưa ra một ví dụ về ánh xạ không tuyến tính nhưng vẫn bảo toàn khoảng cách. Chứng minh rằng f là ánh xạ đẳng cự.

1228

23.1.2

Giải pháp

Solution for n26-1 in vn

1230

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Tính toán, Xây dựng và Thiết kế

Độ khó: Trung Bình Cao

Thẻ:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** e98a587c-c2b7-4363-9eda-4d7453bb5809 vào 31.05.2025

23.2 VN I No.n26-2P1.5V1.0: Bài toán chứng minh: đặc trưng của ánh xạ đồng nhất trong \mathbb{R}^n

1232

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min **Nam-Score:** 3.0 **Một Bản Gốc**

Cho $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đẳng cấu, tức là:

1234

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Cần chứng minh:

Mọi ánh xạ đẳng cấu f trên \mathbb{R}^n đều là ánh xạ affine dạng $f(x) = Ax + b$ với A là ma trận trực giao, hoặc có thể được biểu diễn như một tổ hợp của các ánh xạ như vậy với các phép phản xạ hoặc tịnh tiến.

1236

Gợi ý nâng cao (tùy chọn):

1238

Chứng minh rằng tập hợp tất cả các ánh xạ đẳng cấu trên \mathbb{R}^n tạo thành một nhóm với phép hợp thành —gọi là *nhóm Euclid* $E(n)$.

1240

23.2.1 Giải pháp

Solution for n26-2 in vn

1242

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Tính toán, Xây dựng và Thiết kế **Độ khó:** Trung Bình Cao **Thẻ:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** bb34f908-3f65-4add-8596-5d9bb5e1b3bb vào 31.05.2025

1244

24 解决方案

24.1 ZH I No.n26-1P1.5V1.0: n 維歐氏空間中的等距

解决的预计时间: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 原创

若映射 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 保持兩點間的歐幾里得距離，則稱其為**等距映射 (Isometry)**，即對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

24.1.1 題目：

- 線性等距映射：**證明每個線性等距映射 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 可由正交矩陣 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示, 即 $T(x) = Ax$ 且 $A^\top A = I$ 。
- 仿射等距映射：**找出所有形式為 $f(x) = Ax + b$ 的等距映射，其中 A 為正交矩陣， $b \in \mathbb{R}^n$ 。
- 內積保持性：**設 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 為單位向量，證明線性等距映射 f 保持內積：
$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$
- 非線性等距映射的構造：**給出一個非線性但仍保距的等距映射例子，並證明該映射確實是等距的。

24.1.2 解决方案

Solution for n26-1 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 计算, 构建和设计 **难度:** 更中等 **标签:**

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – **GUID:** 70548499-05d5-4926-9c2d-70466c165b00 日期 31.05.2025

24.2 ZH I No.n26-2P1.5V1.0: 證明題目： \mathbb{R}^n 中等距映射的特徵

1258

解决的预计时间: 1 h 0 min Nam-Score: 3.0 原创

設 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 為一個等距映射，也就是說：

1260

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{對所有 } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

需證明：

任何等距映射 f 皆為一個仿射映射，其形式為 $f(x) = Ax + b$ ，其中 A 為正交矩陣，或可表示為此類映射與反射或平移的組合。

1262

進階補充（可選）：

證明所有 \mathbb{R}^n 上的等距映射在合成下形成一個群，即所謂的 歐幾里得群 $E(n)$ 。

1264

24.2.1 解決方案

1266

Solution for n26-2 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 计算, 构建和设计 难度: 更中等 标签:

1268

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – GUID: 0854d323-52c5-479f-8685-324bccfc0093 日期 31.05.2025