Solution: The enormous collection of the Namische /ˈnamɪʃə/ World

Paper ID: PALL

The Art of Sciences *on June 21, 2025 – 21.06.2025 in Frankfurt* Version 1.0 Revision 7

Archive-ID: 3891M-932 DOI: 11.NOT.AVAILABLE

Duy Nam Schlitz[a*]

[a] *Department of ISAC for Competition, duynamschlitzresearch@gmail.com*

[*] *Corresponding Author*

Abstract

This collection presents a diverse set of mathematical problems spanning various fields, including number theory, combinatorics, computational logic, and high-dimensional geometry. Designed for advanced learners, the exercises explore fundamental and complex concepts such as recursive polynomial structures, hypergraph theory, quantum field interference models, and formal computability through Turing machines. Additionally, the collection integrates practical applications like Fourier analysis, stochastic wave phenomena, and optimization techniques. Each problem offers an opportunity for theoretical inquiry and applied problem-solving, ensuring a comprehensive exploration of mathematical principles.
Exercise: Masterclass Exercise.2, No.1, No.10, No.14, No.15, No.16, No.17, No.23, No.24, No.25, No.26-1, No.26-2, No.27, No.4-1, No.4-2, No.4-3, No.4-4, No.5, No.6, No.7, No.8, No.9, Test.1, Test.2, Test.3, Total time: De: 546 h 25 min, En: 546 h 25 min, Es: 8 h 0 min, Fn: 8 h 0 min, Fr: 176 h 5 min, It: 8 h 0 min, Jp: 176 h 0 min, Kr: 101 h 0 min, Pt: 8 h 0 min, Ru: 8 h 0 min, Se: 6 h 0 min, Vn: 8 h 0 min, Zh: 49 h 0 min, Matnam Version: 1.5.4-MDLS Release - with Markdown Compilation 1.3.2-Prerelease and LaTeX Syntax Checking 0.5Beta

Contents

Categories: induction sum odd numbers natural numbers

1 Einführung und Informationen: 546 h 25 min

Die Verwendung von Hilfsmitteln wie Taschenrechnern, Formelsammlungen, Tabellenkalkulationen und digitalen Werkzeugen ist nur unter den ausdrücklich angegebenen Bedingungen gestattet. Zulässige Hilfsmittel müssen im Voraus für Prüfungen deklariert und von der Prüfungsaufsicht genehmigt werden. Jegliche nicht genehmigten Hilfsmittel sind verboten und können zur Disqualifikation führen. Während der Bearbeitung einer Aufgabe oder Prüfung ist es untersagt, zusätzliche Materialien oder externe Hilfe in Anspruch zu nehmen, es sei denn, dies ist ausdrücklich erlaubt. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten. Ab einen Nam-Score von 3 dürfen alle Teilnehmende alle möglichen Hilfsmittel nutzen.

Ein Verstoß gegen diese Vorschriften kann schwerwiegende Konsequenzen haben. Insbesondere bei offiziellen Prüfungen kann die Verwendung nicht genehmigter Hilfsmittel zum sofortigen Ausschluss von der Prüfung führen. Bei wiederholten oder besonders schwerwiegenden Fällen kann sogar ein dauerhaftes Prüfungsverbot verhängt werden. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten und die Integrität der Prüfungen gewahrt bleibt.

Dieses Blatt dient dem Zweck der Übung und kann unter bestimmten Bedingungen offiziell eingereicht werden. Gleichzeitig sollte es als inoffizielles Dokument betrachtet werden, da es ohne administrative Aufsicht erstellt wurde.

1. **Korrekte Kennzeichnung** - Das Dokument muss eindeutig als Übungsblatt gekennzeichnet sein.
2. **Vollständigkeit und Formatierung** - Es muss in einem anerkannten Format (z. B. PDF oder gedruckte Kopie) vorliegen und alle erforderlichen Inhalte enthalten.
3. **Fristgerechte Einreichung** - Die Einreichung muss innerhalb der festgelegten Fristen erfolgen.
4. **Genehmigung durch die zuständige Behörde** - Eine offizielle Anerkennung erfordert die Genehmigung der zuständigen Prüfungs- oder Verwaltungsstelle.
5. **Keine externe Hilfe** - Das Dokument muss ausschließlich von der betreffenden Person ohne externe Hilfe erstellt worden sein.
6. **Keine Garantie auf Bewertung** - Da das Blatt ohne administrative Aufsicht erstellt wurde, besteht keine Verpflichtung, es für eine offizielle Bewertung zu berücksichtigen.
7. **Keine Haftung** - Der Autor übernimmt keine Haftung für die Richtigkeit oder Vollständigkeit des Inhalts.
8. **Kein offizieller Status** - Das Dokument ist kein offizielles Dokument und hat nicht denselben rechtlichen Status wie ein offiziell ausgestelltes Dokument.
9. **Keine Garantie auf Anerkennung** - Die Einreichung dieses Dokuments garantiert keine Anerkennung oder offizielle Berücksichtigung durch eine Behörde oder Institution.
10. **Keine Garantie auf Vertraulichkeit** - Der Schutz persönlicher Daten und die Vertraulichkeit können nicht gewährleistet werden.
11. **Keine Garantie auf Sicherheit** - Die Sicherheit des Inhalts und der darin enthaltenen Daten ist nicht gewährleistet.
12. **Keine Garantie auf Authentizität** - Die Authentizität der Informationen oder Daten innerhalb des Dokuments kann nicht bestätigt werden.
13. **Keine Garantie auf Integrität** - Die Authentizität oder Integrität des enthaltenen Inhalts kann nicht sichergestellt werden.
14. **Keine Garantie auf Gültigkeit** - Das Dokument kann Inhalte enthalten, deren rechtliche oder technische Gültigkeit nicht bestätigt werden kann.
15. **Keine Garantie auf Zuverlässigkeit** - Die Genauigkeit, Vollständigkeit oder Zuverlässigkeit der Informationen kann nicht garantiert werden.

Alles beruht auf Vertrauen und daher viel Spaß.

1.1 DE SH-1 No.1PALLV1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Zeit zur Bearbeitung: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Ein Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Einfach **Stichwörter**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.2 DE SKK-1 No.4-1PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.2.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n{-}1)$-Hyperfläche.

1.2.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können. Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.3 DE SKK-1/2 No.4-2PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Ein Original*
Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

1.3.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

1.3.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird. Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.4 DE SKK-1/3 No.4-3PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3

Zeit zur Bearbeitung: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.4.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$-Hyperfläche.

1.4.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können. Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.5 DE SKK-1/4 No.4-4PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

Zeit zur Bearbeitung: 10 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

1.5.1 Aufgabe

Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$. Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.6 DE SKT-1 No.5PALLV1.0: Abstände im n-dimensionalen Raum

Zeit zur Bearbeitung: 50 min *Nam-Score: 1.2* *Ein Original*

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der i-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:

$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

2. Stelle die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **($n-1$)-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f am 19.04.2025

1.7 DE SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensionale Flächendurchlauf-Prozesse und Erreichbarkeitsgraphen

Zeit zur Bearbeitung: 91 h 40 min *Nam-Score: 5* *Ein Original*

Gegeben sei eine Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $|P| = kn$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wobei die Punkte in allgemeiner Lage liegen (d.h. keine $n+1$ Punkte liegen in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene). Ein Drehdurchlaufprozess funktioniert wie folgt:

- Wähle einen Startpunkt $p_0 \in P$.
- Konstruiere eine $(n-1)$-Hyperfläche (eine "Drehfläche") durch diesen Punkt.
- Diese Hyperfläche wird kontinuierlich in festgelegter Weise (z.B. gemäß einer festen Orientierung im Raum) gedreht.
- Sobald ein weiterer Punkt $p_i \in P$ von der Fläche "berührt" wird (das heißt, sich auf der Fläche befindet), wird p_i zum neuen Ankerpunkt.
- Die Bewegung wird dort fortgesetzt.

1.7.1 Erweiterung

- Zwischen jeder Drehung wird die Orientierung der Fläche mit einer gegebenen Matrix aus $SO(n)$ verändert (d.h. jede Rotation ist durch einen Übergangsoperator festgelegt).
- Zwischenpunktsbeziehungen werden als gerichteter Graph $G = (V, E)$ gespeichert, wobei ein gerichteter Übergang $p_i \to p_j$ besteht, wenn p_j durch eine zulässige Drehung von p_i erreicht wurde.

1.7.2 Aufgaben

1. Beweise oder widerlege: Für bestimmte Punktkonfigurationen (z.B. reguläre Gitter, zufällige Punktwolken, Punkte auf Sphären oder simplizialen Flächen) ist der Erreichbarkeitsgraph stark zusammenhängend.
2. Finde einen allgemeinen Algorithmus, der für beliebiges n und Punktmenge P entscheidet, ob eine vollständige Erreichbarkeit aller Punkte durch den Prozess möglich ist.
3. Untersuche: Wie verändert sich die Erreichbarkeit bei Einführung von Übergangsverzögerungen oder zufälligen Störfaktoren in der Drehung?
4. Formuliere eine Optimierung: Finde einen minimalen Rotationspfad durch alle Punkte, der die Übergangsregeln beachtet.
5. Entwirf eine Visualisierung (in 2D, 3D oder nD-Projektionen), die den Prozess und Graphen dynamisch zeigt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Graphen, Hypergraphen, Flächendurchlauf-Prozesse, Erreichbarkeitsgraphen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.8 DE SH-3 No.7PALLV1.0: Analyse und Klassifikation von Wellensuperpositionen im gekrümmten Raum

Zeit zur Bearbeitung: 73 h 50 min *Nam-Score: 7.5* *Ein Original*

Ein gekrümmter Raum $\mathbb{R}^3$ mit einer glatten Metrik $g_{ij}(x, y, z)$, in dem sich eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ ausbreitet. Diese erfüllt die verallgemeinerte Wellengleichung:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|} \partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

mit $|g| = \det(g_{ij})$ und c als lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit. Aufgaben:

1. Löse (symbolisch oder numerisch) die Wellengleichung im Spezialfall einer sphärisch symmetrischen Metrik:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2$$

   mit geeigneten Randbedingungen (z. B. Dirichlet auf einer Kugeloberfläche $r = R$).

2. Zeige, dass sich die Lösung Ψ als Superposition von Eigenfunktionen der Laplace-Beltrami-Operatoren schreiben lässt, und berechne explizit die ersten nichttrivialen Moden.

3. Berechne das Gesamtenergiespektrum durch Integration über den Raum:

$$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] \sqrt{|g|} \, d^3x$$

4. Untersuche numerisch oder analytisch, wie sich die Energie über die Zeit verteilt –insbesondere bei Interferenz von zwei punktförmigen Quellen mit zeitlich phasenverschobener Emission.

5. Optional (Bonus): Modelliere und visualisiere den Effekt eines zeitabhängigen Metrikterms, etwa $g_{ij}(x, t)$, der eine Gravitationswelle simuliert. Untersuche, wie sich die Interferenzstruktur und Energieverteilung verändert.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Analyse, Klassifikation, Wellen, Raumkrümmung
UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 023cf134-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.9 DE SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastische Analyse von Wellenphänomenen mittels Fourier- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Zeit zur Bearbeitung: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *Ein Original*

Untersuchen Sie ein raumzeitlich abhängiges Wellenphänomen unter dem Einfluss eines stochastischen Rauschens. Die Wellenfunktion sei gegeben durch:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

wobei:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ eine deterministische Basiswelle ist,
- $N(x,t,\omega)$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwert 0 und stationärer Kovarianzfunktion ist.

Gegeben: Ein Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

und bekannter Rauschstärke σ^2 sowie Skalenparameter $\lambda > 0$.

1.9.1 Aufgaben

1. **Modellierung:** Formulieren Sie $N(x,t,\omega)$ als Gauß-Prozess mit obiger Kovarianzfunktion.
2. **Simulation:** Simulieren Sie mehrere Realisierungen von $\Psi(x,t,\omega)$ auf einem Gitter (x_i,t_j) für verschiedene Parameter σ^2 und k.
3. **Statistik:** Berechnen Sie Erwartungswert $E[\Psi(x,t)]$ und Varianz $Var[\Psi(x,t)]$ sowohl analytisch als auch aus den simulierten Daten.
4. **Spektralanalyse:** Führen Sie eine Fourier-Zerlegung von $\Psi(x,t,\omega)$ durch und berechnen Sie die spektrale Energiedichte.
5. **Extremwertstatistik:** Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Maxima im Intervall $[a,b]$ mithilfe von Maximum-Likelihood oder Bayesianischen Methoden.

(Bonus) **Rekonstruktion:** Trainieren Sie ein neuronales Netz, das aus verrauschten Beobachtungen $\Psi(x,t,\omega)$ die Basiswelle $\psi(x,t)$ rekonstruiert.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: NAM **Stichwörter**: Stochastik, Analyse, Wellenphänomene, Fourier-Transformation, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.10 DE SH-5 Test.1PALLV1.0: Zahlentheorie −Diophantische Gleichungen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *Ein Original*

Finde alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Diophantischen Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Erkläre deinen Lösungsweg und bestimme alle möglichen Werte für x und y, die diese Gleichung erfüllen. Diskutiere, wie man diese Art von Gleichung im Allgemeinen angehen kann.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Einfach **Stichwörter**: Zahlentheorie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763736 am 29.04.2025

1.11 DE SH-6 Test.2PALLV1.0: Kombinatorik –Anordnungen und Permutationen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Wie viele verschiedene Wege gibt es, 5 verschiedene Bücher auf 3 Regalen anzuordnen, wenn auf jedem Regal mindestens ein Buch platziert werden muss und die Regale keine unendliche Kapazität haben? Erkläre den Lösungsweg unter Verwendung der Prinzipien der Inklusion und Exklusion.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Kombinatorik

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561273 am 29.04.2025

1.12 DE SH-7 Test.3PALLV1.0: Geometrie −Kreisgeometrie und Tangenten

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $r = 10$. Ein Punkt P liegt außerhalb des Kreises und hat einen Abstand von $OP = 17$. Bestimmen Sie die Länge der Tangente von P an den Kreis und erläutern Sie die Berechnung mithilfe des Satzes des Pythagoras. Erklären Sie, warum die Länge der Tangente nur von der Differenz zwischen den Abständen zwischen Punkt und Mittelpunkt und dem Radius des Kreises abhängt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Geometrie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-198257198275 am 29.04.2025

1.13 DE SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta-Kombination durch Fouriertransformationen

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *Ein Original*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine glatte, rasch fallende Funktion (d. h. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), sodass für ihre Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx$$

folgende Identität gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Beweise mit Hilfe der Poissonschen Summenformel, dass die obige Gleichung unter geeigneten Bedingungen erfüllt ist.
2. Zeige, dass mit geeigneter Wahl von $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ für $\Re(s) > 1$, sich Aussagen über die analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion ableiten lassen.
3. Untersuche, wie die Beziehung in höhere Dimensionen erweitert werden kann (Fourier auf dem $\mathbb{R}^n$) und welche Rolle dabei die symmetrische Struktur in der Zeta-Analyse spielt.
4. Betrachte die Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

und zeige, dass sie sich als eine Art Fourierreihe der Zeta-Funktion interpretieren lässt. Leite eine Darstellung in Abhängigkeit von $\hat{f}$ her.

1.13.1 Hinweise

- Verwende die Poisson-Summenformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Nutze Eigenschaften der Mellin-Transformation für Teilaufgaben zu $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Beachte: Diese Aufgabe verlangt ein Verständnis für komplexe Analysis, Distributionentheorie, Fouriertransformation und spezielle Funktionen.

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Zeta-Kombination, Fouriertransformationen, Zeta-Funktion

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-239238527383 am 03.05.2025

1.14 DE SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximale Schnitte in k-uniformen Hypergraphen

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben sei ein k-uniformer Hypergraph $H = (V, E)$, d. h. jeder Hyperrand $e \in E$ verbindet genau k Knoten aus der Knotenmenge V. Definiere einen **Schnitt** als eine Partition von V in zwei disjunkte Teilmengen $V_1 \cup V_2 = V$, wobei ein Hyperrand **geschnitten** ist, wenn er Knoten aus beiden Teilen enthält. Zeige oder widerlege: Für jedes $k \geq 2$ existiert eine Partition von V in zwei Mengen, sodass mindestens $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ Hyperkanten geschnitten werden. **Zusatz**: Wie ändert sich die untere Schranke bei zufälliger Partition?

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-230587091872 am 03.05.2025

1.15 DE KTB-1 No.14PALLV1.0: Optimale Komplexität eines adaptiven Primalitätsverfahrens

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *Ein Original*

Problemstellung Ein adaptiver Primalitätstest ist ein Algorithmus, der bei der Prüfung einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ auf Primzahl-Eigenschaft schrittweise zwischen probabilistischen und deterministischen Verfahren entscheidet. Beispiele sind Miller-Rabin, Baillie-PSW oder AKS. Entwickle und analysiere ein adaptives Primalitätsverfahren mit folgender Eigenschaft:

- Der Algorithmus startet mit einem probabilistischen Test (z. B. Miller-Rabin).
- Falls dieser Test mehrfach „bestanden“wird, führt das System bei Grenzfällen einen deterministischen Subtest durch (z. B. Lucas, ECPP, oder reduzierte AKS-Stufe).
- Die Gesamtkomplexität des Verfahrens ist abhängig von der Größe von n sowie von der angenommenen Fehlerwahrscheinlichkeit ε.

Aufgabe: Finde eine asymptotisch optimale Kombination solcher Verfahren (mit Beweis) und berechne die minimale erwartete Laufzeit für die Entscheidung „prim“vs. „nicht prim“unter Annahme realistischer Verteilungen zufällig gewählter Zahlen $n \in [1, N]$. **Ziel:**

- Analysiere das Modell der **Fehlerkontrollierten adaptiven Komplexität**.
- Entwickle eine Funktionsklasse $T(n, \varepsilon)$, die die Laufzeit (im Erwartungswert) des optimalen Verfahrens beschreibt.
- Vergleiche deine Lösung mit bekannten Verfahren wie Miller-Rabin (mehrfach), Baillie-PSW und deterministischem AKS.

Kategorie: Kaiketsu und Toku, Bunseki, Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Schwer **Stichwörter**:

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209843782653 am 11.05.2025

1.16 DE SHB-3 No.15PALLV1.0: Lösungsstruktur verallgemeinerter rekursiver Polynome

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben ist eine rekursive Definition:

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

mit Startwerten $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ und $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ Analysiere:

- Bedingungen für geschlossene Form
- Struktur der Nullstellen
- Zusammenhang mit klassischen Polynomen (z. B. Tschebyscheff-, Legendre-, Hermite-Polynome)

1.16.1 Lösungsstruktur (Allgemeine Schritte)

*1.16.2 1. **Analyse der Rekursion***

- Bestimme den Rekursionsgrad k
- Klassifiziere die Koeffizienten $a_i(x)$
  - Konstant? Linear? Allgemeines Polynom?

*1.16.3 2. **Charakteristisches Polynom***

- Führe eine Transformation analog zur linearen Rekursion ein:
  - Betrachte ggf. lineare Unabhängigkeit der Basis $P_0, \ldots, P_k$
- Finde Lösung über charakteristisches Polynom (bei konstanten a_i)

*1.16.4 3. **Darstellung über Matrixmethoden***

- Schreibe die Rekursion als Matrixsystem:

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

mit Vektor $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- Untersuche Eigenwerte und Eigenvektoren von $A(x)$

*1.16.5 4. **Vergleich mit bekannten Familien***

- Überprüfe, ob sich das Polynom in einer bekannten Klasse (orthogonal, symmetrisch etc.) einordnen lässt.

*1.16.6 5. **Nullstellenstruktur***

- Verwende numerische Verfahren zur Analyse der Nullstellen
- Untersuche Konvergenzverhalten (z. B. bei $n \to \infty$)

*1.16.7 6. **Symbolische Lösung (falls möglich)***

- Suche geschlossene Formen (z. B. durch Generating Functions, Umformung zu Differentialgleichungen)
- Finde explizite Darstellung über Basisfunktionen oder kombinatorische Strukturen

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Schwer **Stichwörter**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 02d58e48-ddcb-4401-869a-c8e8a463a653 am 11.05.2025

1.17 DE SHKS-1 No.16PALLV1.0: Turing-Maschine mit beschränktem Gedächtnis −Korrektheitsbeweis

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *Ein Original*

Gegeben sei eine Turing-Maschine M_b, deren Arbeitsband auf $O(\log n)$ Speicherzellen beschränkt ist. Zeige, dass M_b korrekt eine bestimmte Sprache L entscheidet, z. B.:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

oder eine andere spezifische Sprache, bei der Speicherbeschränkung relevant ist.

1.17.1 Additionale Information

- Definitionen von Turingmaschinen (TM) und beschränkter Speicher (z. B. logarithmischer Platz)
- Formale Modelle wie LBA (Linear Bounded Automata)
- Vergleich mit regulären oder kontextfreien Sprachen
- Boolesche Logik & Invariantenmethoden
- Standard-Logikbeweise (z. B. Induktion, Widerspruch)
- Skizzen auf Papier oder Notizzettel

1.17.2 Anforderungen

1.17.3 ***1. Formale Spezifikation***

- Definiere die beschränkte TM M_b formal:
  - $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Begrenzung: Arbeitsbandgröße $\leq c \cdot \log n$

1.17.4 ***2. Sprache L beschreiben***

- Beweise, dass $L \in \mathsf{L}$ (entscheidbar mit logarithmischem Platz)
- Beispiele:
  - Ausgewogene Anzahl von Symbolen (z. B. gleiche Anzahl a und b)
- Erkennung einfacher regulärer Muster mit Platzoptimierung

1.17.5 ***3. Konstruktion/Simulation***

- Beschreibe die Strategie der TM mit wenig Speicher:
  - Lesezeichen (Pointer-Technik)
- Zwei-Pass-Verfahren
  - Zähler in Binärdarstellung auf Arbeitsband

1.17.6 ***4. Korrektheit***

- Verwende Invarianz oder Simulation:
  - Bei jedem Schritt bleibt die Invariante erhalten (z. B. Zählgleichheit)
- Zeige: Wenn TM akzeptiert, dann $w \in L$; wenn $w \in L$, dann akzeptiert TM

1.17.7 5. Platzkomplexität nachweisen

- Analyse: Alle Arbeitsschritte benötigen nur $O(\log n)$ Speicherzellen
- Argumentiere, dass keine unzulässige Speicherung erfolgt

1.17.8 6. Abschluss

- Beende mit einem vollständigen Beweis (z. B. durch vollständige Induktion über die Länge von w)
- Zeige, dass der beschränkte Speicher **ausreicht und korrekt arbeitet**

Kategorie: Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 7cf1fbfd-0b70-48ef-9d18-bb5fc8419a55 am 11.05.2025

1.18 DE BUK-1 No.17PALLV1.0: Quantenfeldmodell einer Wellenpaketinterferenz

Zeit zur Bearbeitung: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *Ein Original*

Gegeben ist ein quantenfeldtheoretisches Modell zur Beschreibung der Interferenz zweier sich bewegender Wellenpakete im skalaren Feld. Entwickeln Sie ein vollständiges theoretisches und numerisches Modell, das die Konstruktion, Entwicklung und Interferenz der Wellenpakete innerhalb der Quantenfeldtheorie beschreibt und analysiert. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

1. **Theoretische Grundlagen**
   - Erläutern Sie die Quantisierung eines freien skalaren Feldes.
   - Leiten Sie den Feldoperator $\hat{\phi}(x,t)$ her.
   - Stellen Sie das Kommutatorverhalten von $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$ dar.
2. **Konstruktion der Wellenpaketzustände**
   - Definieren Sie zwei orthogonale Gausssche Impulsverteilungen $f_1(k)$, $f_2(k)$.
   - Leiten Sie den Zustand

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

her und normalisieren Sie ihn.

3. **Erwartungswert und Interferenz**
   - Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
   - Identifizieren Sie Kreuzterme und deren Beitrag zur Interferenz.
   - Visualisieren Sie das Interferenzmuster in Abhängigkeit von x, t, δ.
4. **Zeitentwicklung und Wellenpaketverbreitung**
   - Simulieren Sie die Ausbreitung der Wellenpakete in Raum und Zeit.
   - Analysieren Sie den Einfluss von Gruppen- und Phasengeschwindigkeit auf die Interferenzstruktur.
   - Diskutieren Sie auftretende Dispersionsphänomene.
5. **Erweiterung auf Feldoperatorprodukte**
   - Berechnen Sie die Zwei-Punkt-Funktion $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
   - Analysieren Sie deren Raum-Zeit-Struktur.
   - Diskutieren Sie Implikationen für mögliche Messungen.
6. **Experimentelle Interpretation und Modellvalidierung**
   - Vergleichen Sie Ihr Modell mit einem quantenoptischen Interferometer (z. B. Mach-Zehnder).
   - Diskutieren Sie Messoperatoren, Zustandskollaps und Interferenzsichtbarkeit.

7. **Reflexion, Komplexitätsanalyse und Modellgrenzen**
   - Schätzen Sie die algorithmische Komplexität Ihrer numerischen Verfahren.
   - Diskutieren Sie mögliche Erweiterungen (z. B. Spinorfelder, QED).
   - Reflektieren Sie über die Aussagekraft und Grenzen der Skalarfeldtheorie.

Die Ausarbeitung soll mathematisch fundiert, physikalisch interpretiert und durch numerische Simulationen ergänzt sein.

Kategorie: Bunseki, Keisan **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 5ed4f53b-aec7-472c-a733-c1b3b3cf6a18 am 11.05.2025

1.19 DE SHK-1 No.23PALLV1.0: Rekursivität und Fixpunktkombinatoren im untypisierten Lambda-Kalkül

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *Ein Original*

Gegeben sei der untypisierte Lambda-Kalkül mit vollständiger β-Reduktion. Die Church-Kodierungen für natürliche Zahlen, ”iszero”, ”pred” und ”mult” gelten als bekannt. Es sei der Fixpunktkombinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ gegeben sowie die Funktion:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Aufgabe: Beweisen Sie formal und vollständig, dass $Y\ F$ ein korrektes rekursives Verfahren zur Fakultätsberechnung gemäß Church-Kodierung darstellt. Im Detail sind folgende Punkte zu zeigen:

1. **Reduktion für festes Argument:** Führen Sie eine vollständige β-Reduktion des Terms $(Y\ F)\ 3$ durch. Geben Sie alle Reduktionsschritte bis zur finalen Church-Kodierung an.

2. **Korrektheitsbeweis durch Induktion:** Führen Sie einen strukturellen Induktionsbeweis über die Church-Zahlen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(Y\ F)\ n \rightarrow^{\cdot}_{\beta} \text{fac}_n$$

wobei fac_n die Church-Kodierung von $n!$ ist.

3. **Fixpunkteigenschaft:** Beweisen Sie formal, dass $Y\ F = F\ (Y\ F)$, und zeigen Sie, weshalb dieser Ausdruck die rekursive Berechnung ermöglicht.

4. **Vergleich mit dem Z-Kombinator:**

   - Definieren Sie den Z-Kombinator.
   - Vergleichen Sie die Reduktionslänge von $(Y\ F)\ 3$ und $(Z\ F)\ 3$.
   - Diskutieren Sie, in welchen Kontexten Z bevorzugt werden sollte.

Hinweis: Für alle Reduktionsschritte sind die Zwischenterme explizit anzugeben. Nutzen Sie keine Vereinfachung oder Sprünge ohne Begründung.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 8092f0bf-7bf5-4082-ab2c-92e9403967f0 am 17.05.2025

1.20 DE SHK-2 No.24PALLV1.0: Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in Zustandssummen und Vakuumenergien der Quantenfeldtheorie

Zeit zur Bearbeitung: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *Ein Original*

Untersuchen und beweisen Sie die Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in der quantenfeldtheoretischen Regularisierung und Thermodynamik, speziell im Kontext der Zustandssummen und Vakuumenergie.

1.20.1 Aufgabenstellung

Gegeben sei ein skalares Quantenfeld auf einer kompakten Raumzeit mit Periodizität β in der Zeitdimension (entsprechend einer Temperatur $T = 1/\beta$) und einer Raumdimension L. Die Eigenfrequenzen des Feldes lauten:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Zeigen Sie durch Anwendung der **Zeta-Regularisierung**, dass die thermodynamische Zustandssumme

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

mit Hilfe der analytischen Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion und der Gammafunktion regulär berechnet werden kann.

1.20.2 Teilaufgaben

1. **Herleitung der regulierten Vakuumenergie**

Leiten Sie den Ausdruck für die regulierte Vakuumenergie $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ unter Verwendung der **Zeta-Funktion** her. Zeigen Sie, dass:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{und} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

und bringen Sie den Ausdruck auf eine Form mit Gammafunktionen via Mellin-Transformation.

2. **Reduktion zu einer Epstein-Zeta-Funktion**

Zeigen Sie, dass die doppelte Summe über n und m als **Epstein-Zeta-Funktion** darstellbar ist. Analysieren Sie deren analytische Eigenschaften.

3. **Temperaturabhängigkeit und thermodynamische Funktionen**

Verwenden Sie den regulierten Ausdruck zur Ableitung der freien Energie $F(\beta)$, inneren Energie $U(\beta)$ und Entropie $S(\beta)$. Zeigen Sie, wie die Gammafunktion in der asymptotischen Entwicklung für hohe und niedrige Temperaturen erscheint.

4. **Vergleich mit Casimir-Energie**

Beweisen Sie, dass die Nulltemperatur-Grenze der Zustandssumme zur **Casimir-Energie** übergeht, und dass die Regularisierung exakt dieselbe Form liefert wie bei der klassischen Zeta-Casimir-Methode.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: NUM **Stichwörter**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: cc85e4ff-ce95-4192-9b9c-07372f6d7fdb am 24.05.2025

1.21 DE SHK-3 No.25PALLV1.0: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Zeit zur Bearbeitung: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Ein Original*

1.21.1 Aufgabe: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Gegeben sei ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion im Ortsraum:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Diese Funktion beschreibt ein stationäres, frei bewegliches Teilchen mit gaußscher Ortsverteilung.

1.21.2 ***Teilaufgaben***

1.21.3 Normierung der Wellenfunktion

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A so, dass die Wellenfunktion normiert ist, d. h.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

1.21.4 Fourier-Transformation in den Impulsraum

Berechnen Sie die Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ der Wellenfunktion mittels Fourier-Transformation gemäß:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Führen Sie die Integration vollständig durch und geben Sie die resultierende Funktion $\phi(p)$ in expliziter Form an.

1.21.5 Heisenbergsche Unschärferelation

Bestimmen Sie die Standardabweichungen σ_x und σ_p der Orts- bzw. Impulsverteilung:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

und zeigen Sie, dass das Produkt dieser Streuungen die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

1.21.6 Physikalische Interpretation der Grenzfälle

Diskutieren Sie qualitativ den physikalischen Grenzfall $a \to 0$. Was geschieht mit der Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ und wie ist dieser Grenzfall physikalisch zu interpretieren? Beziehen Sie sich dabei auf die Konzepte der Lokalisierung und Impulsunschärfe.

1.21.7 ***Hinweis:***

Diese Aufgabe eignet sich auch zur numerischen Auswertung und grafischen Darstellung in Python oder MATLAB. Optional kann die Fourier-Transformation auch symbolisch mit geeigneten Softwaretools (z. B. SymPy oder Mathematica) verifiziert werden.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 04e72fe3-a112-4eee-9352-964ca9fa0a13 am 24.05.2025

1.22 DE SHK-1 No.26-1PALLV1.0: Isometrien im n-dimensionalen euklidischen Raum

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Ein Original*

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

1.22.1 Aufgaben:

1. **Lineare Isometrien:**

Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.

2. **Affine Isometrien:**

Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.

3. **Erhaltung des Skalarprodukts:**

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f, die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Konstruktion einer speziellen Isometrie:**

Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Keisan, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Mittel **Stichwörter**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: f6cee806-99ef-4ccd-8b9e-2625f669adb8 am 31.05.2025

1.23 DE SHK-1 No.26-2PALLV1.0: Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in $\mathbb{R}^n$

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Ein Original*

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d. h.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1.23.1 Zu zeigen:

Jede Isometrie f in $\mathbb{R}^n$ ist entweder eine affine Abbildung der Form $f(x) = Ax + b$, wobei A eine orthogonale Matrix ist, oder sie lässt sich durch Verkettung solcher mit Spiegelungen oder Translationen darstellen.

1.23.2 Hinweis zur Vertiefung (optional):

Zeigen Sie, dass die Menge aller Isometrien in $\mathbb{R}^n$ eine Gruppe unter Komposition bildet –die sogenannte **euklidische Gruppe** $\mathrm{E}(n)$.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Keisan, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Mittel **Stichwörter**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: fb35a6d7-5c2c-4a1b-9637-b43515e51775 am 31.05.2025

1.24 DE 1 No.27PALLV1.0: Isometrien im n-dimensionalen euklidischen Raum und Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in $\mathbb{R}^n$

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Ein Original*

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

1.24.1 Aufgaben:

1. **Lineare Isometrien:**

Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.

2. **Affine Isometrien:**

Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.

3. **Erhaltung des Skalarprodukts:**

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f, die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Konstruktion einer speziellen Isometrie:**

Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

1.24.2 Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in $\mathbb{R}^n$

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d. h.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1.24.3 Zu zeigen:

Jede Isometrie f in $\mathbb{R}^n$ ist entweder eine affine Abbildung der Form $f(x) = Ax + b$, wobei A eine orthogonale Matrix ist, oder sie lässt sich durch Verkettung solcher mit Spiegelungen oder Translationen darstellen.

1.24.4 Hinweis zur Vertiefung (optional):

Zeigen Sie, dass die Menge aller Isometrien in $\mathbb{R}^n$ eine Gruppe unter Komposition bildet –die sogenannte **euklidische Gruppe** $\mathrm{E}(n)$.

Kategorie: Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Mittel **Stichwörter**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 08879f5a-f8bf-4e5f-b091-6799cb57a756 am 07.06.2025

1.25 DE 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Optimale Steuerung eines diffusen Prozesses

Zeit zur Bearbeitung: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Ein Original*

1.25.1 Aufgabenstellung

Diese Übung untersucht die Anwendung fortgeschrittener Konzepte der Analysis und Variationsrechnung auf ein Optimalsteuerungsproblem, das starke Parallelen zu Bereichen wie der Quantensteuerung und verschiedenen Ingenieurdisziplinen aufweist.

1.25.2 Problemstellung

Betrachte ein eindimensionales System, dessen „Zustand“ $y(x,t)$ (z. B. Temperaturverteilung oder Konzentration einer diffundierenden Substanz) sich über einen räumlichen Bereich $\Omega = [0,L]$ und die Zeit $t \in [0,T]$ entwickelt. Die Entwicklung wird durch eine vereinfachte, diffusionähnliche partielle Differentialgleichung (PDE) mit einem zeitabhängigen Steuerparameter $u(t)$ beschrieben:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

mit **Randbedingungen**:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, für $t \in (0,T]$

und einer **Anfangsbedingung**:

- $y(x,0) = y_0(x)$, für $x \in [0,L]$

Dabei ist $\alpha > 0$ die Diffusionskonstante, und $g(x)$ eine vorgegebene räumliche Funktion, die den Einfluss der Steuerung beschreibt. Es wird angenommen, dass $y_0(x)$ und $g(x)$ hinreichend glatt sind. Ziel ist es, eine **optimale Steuerung** $u(t) \in U_{\text{ad}}$ zu finden, wobei

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\max}\}$$

die Menge der zulässigen Steuerungen ist. Das **Kostenfunktional** ist definiert als:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

wobei $y_{\text{desired}}(x)$ der gewünschte Zielzustand zur Zeit T ist und $\lambda > 0$ ein Regularisierungsparameter, der den Steuerungsaufwand bestraft.

1.25.3 Teil 1: Grundlegende Analyse des Systems

1.25.4 1. Existenz und Eindeutigkeit des Zustands

Erkläre konzeptionell, warum für eine gegebene Steuerung $u(t)$ sowie Anfangs- und Randbedingungen eine eindeutige Lösung $y(x,t)$ der PDE zu erwarten ist. Beziehe dich auf die notwendigen Eigenschaften (z. B. Beschränktheit, Stetigkeit) und auf die geeigneten Funktionalräume für schwache Lösungen (z. B. Sobolev-Räume wie $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, etc.).

1.25.5 2. Einfluss der Steuerungsbeschränkungen

Diskutiere, wie die Beschränkung $0 \le u(t) \le U_{\max}$ im Definitionsbereich U_{ad} die Natur des Optimierungsproblems beeinflusst. Vergleiche mit dem unbeschränkten Fall $U_{\text{ad}} = C([0,T])$. Erkläre die Rolle der Konvexität und wie beschränkte Optimierungsprobleme zu anderen Optimalitätsbedingungen führen.

1.25.6 Teil 2: Variationsanalyse und Optimalitätsbedingungen

1.25.7 1. Gateaux-Differenzierbarkeit des Kostenfunktionals

Unter der Annahme, dass $J(u)$ differenzierbar ist, leite die **Gateaux-Ableitung** von $J(u)$ an der Stelle $u_0(t)$ in Richtung $h(t)$ her. **Hinweis:** Sei $y_h(x,t)$ die Lösung der PDE, wenn die Steuerung $u_0(t) + \varepsilon h(t)$ ist. Berechne:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

1.25.8 2. Rolle des Adjungierten Systems

Erkläre allgemein die Funktion des adjungierten Zustands bei PDE-optimierungsproblemen. Wie vereinfacht dieser die Berechnung des Gradienten des Kostenfunktionals? Beschreibe seine Beziehung zur „Sensitivität“der Kosten bezüglich des Zustands $y(x,t)$.

1.25.9 3. Erste notwendige Optimalitätsbedingung

Formuliere die **erste notwendige Optimalitätsbedingung** (Variationsungleichung), die eine optimale Steuerung u

1.25.9 Teil 3: Fortgeschrittene Themen und Grenzverhalten

1.25.10 1. Verhalten der optimalen Steuerung bei Regularisierung

Diskutiere, was mit dem Regularisierungsterm

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

passiert, wenn $\lambda \to 0^+$ geht. Welche Auswirkungen hat dies auf das Verhalten der optimalen Steuerung u_λ

1.25.10 2. Epsilon-Delta-Rigorosität

Angenommen, $u^{\cdot}(t)$ ist als optimal bekannt. Erkläre, wie die **Epsilon-Delta-Definition eines Grenzwerts** angewandt wird, um rigoros zu beweisen, dass $y(x,T)$ im L^2-Norm-Sinn „beliebig nah“an $y_{\text{desired}}(x)$ liegt. Erläutere die Rollen von:

- ε: wie nah der Endzustand am Zielzustand sein soll
- δ: wie nah die Steuerung oder die Endzeit (z. B. $|u - u^{\cdot}| < \delta$) sein muss, um diese Näherung sicherzustellen

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki, Kōchiku und Sekkei, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 8a843c6f-19e2-4f6e-b3f9-a10295abe3a5 am 21.06.2025

The use of aids such as calculators, formula collections, spreadsheets, and digital tools is permitted only under the expressly stated conditions. Permitted aids must be declared in advance for exams and approved by the exam administrator. Any unauthorized aids are prohibited and may result in disqualification. While working on an assignment or exam, it is prohibited to obtain additional materials or external assistance unless expressly permitted. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions. With a Nam-Score of 3, all participants are allowed to use all possible aids.

Violation of these regulations can result in serious consequences. Especially in official assessments, the use of unauthorized aids can lead to immediate exclusion from the exam. In repeated or particularly serious cases, a permanent ban from the exam may even be imposed. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions and that the integrity of the assessments is maintained.

This sheet serves the purpose of the exercise and can be submitted officially but under certain conditions. At the same time, it should be considered an unofficial document, as it was processed without administrative supervision.

1. **Correct labeling** - The document must be clearly marked as an exercise sheet.
2. **Completeness and formatting** - It must be in a recognized format (e.g., PDF or printed copy) and contain all required content.
3. **Timely submission** - Submission must be made within the specified deadlines.
4. **Approval by the responsible authority** - Official recognition requires the approval of the relevant examining or administrative unit.
5. **No outside assistance** - The document must have been completed exclusively by the relevant individual without outside assistance.
6. **No guarantee of grade** - Since the sheet was created without administrative oversight, there is no obligation to consider it for official grading.
7. **No liability** - The author assumes no liability for the correctness or completeness of the content.
8. **No official status** - The document is not an official document and does not have the same legal status as an officially issued document.
9. **No guarantee of recognition** - Submission of this document does not guarantee recognition or official consideration by any authority or institution.
10. **No guarantee of confidentiality** - Protection of personal data and confidentiality cannot be guaranteed.
11. **No guarantee of security** - The security of the content and the data contained therein is not guaranteed.
12. **No guarantee of authenticity** - The authenticity of the information or data within the document cannot be confirmed.
13. **No guarantee of integrity** - The authenticity or integrity of the content contained therein cannot be assured.
14. **No guarantee of validity** - The document may contain content whose legal or technical validity cannot be confirmed.
15. **No guarantee of reliability** - The accuracy, completeness, or reliability of the information cannot be guaranteed.

Everything is based on trust and so, have fun.

2.1 EN SH-1 No.1PALLV1.0: Proof that $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Estimated time for solving: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prove that for every natural number n the sum of the first n odd numbers is equal to n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
- Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary n, then it is also true for $n + 1$.

Category: Shoemei **Difficulty**: Easy **Tags**: induction, sum, odd numbers, natural numbers
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 429b0f2a5-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.2 EN SKK-1 No.4-1PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1

Estimated time for solving: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

The points are distributed in space such that:

- no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

A **windmill process** starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

2.2.1 Transition rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

2.2.2 Goal

Prove that all points in P are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points. Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Hard **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.3 EN SKK-1/2 No.4-2PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- $2n$ random points in general position in $\mathbb{R}^n$,
- point sets A and B with $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

2.3.1 New rule

each point from P may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

2.3.2 Goal

Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space. Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.4 EN SKK-1/3 No.4-3PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3

Estimated time for solving: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

Additionally, n and k are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

A windmill process starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

2.4.1 Transition Rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

2.4.2 Goal

Prove that in this construction all points in P are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points. Requirements for proving: Prove the task up to n‘5.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac32df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.5 EN SKK-1/4 No.4-4PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4

Estimated time for solving: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given: Three points A_1, A_2, A_3 form an equilateral windmill in $\mathbb{R}^2$, where the center M of the equilateral triangle is also given. A point P lies outside the windmill.

2.5.1 Task

Determine the reflection of point P on the line passing through two windmill points (e.g., A_1 and A_2). Then calculate the distance between P and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center M and is orthogonal to the vector $\vec{MP}$. **Hint**: Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in $\mathbb{R}^2$. Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hypersurface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.6 *EN SKT-1 No.5PALLV1.0: Distances in the n-dimensional space*

Estimated time for solving: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Given n points $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point P_i represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the i-th position)

1. Prove that the**points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:

$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

2. Represent the points $P_1, \ldots, P_n$ as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
3. **Additionally prove**: The points $P_1, \ldots, P_n$ are**linearly independent** and form an**$(n-1)$-dimensional simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Compute the volume of the regular simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: induction, geometry, space, real numbers
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

2.7 EN SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensional surface traversal processes and reachability graphs

Estimated time for solving: 91 h 40 min *Nam-Score: 5* *An Original*

Given a point set $P \subset \mathbb{R}^n$ with $|P| = kn$ for some $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, where the points are in general position (i.e., no $n+1$ points lie in an $(n-1)$-dimensional hyperplane). A rotation traversal process works as follows:

- Choose a starting point $p_0 \in P$.
- Construct an $(n-1)$-hypersurface (a ”surface of revolution”) through this point.
- This hypersurface is continuously rotated in a fixed manner (e.g., according to a fixed orientation in space).
- As soon as another point $p_i \in P$ is ”touched” by the surface (i.e., is located on the surface), p_i becomes the new anchor point.
- The movement continues from there.

2.7.1 Extension

- Between each rotation, the orientation of the surface is changed using a given matrix of $SO(n)$ (i.e., each rotation is specified by a transition operator).
- Interpoint relationships are stored as a directed graph $G = (V, E)$, where a directed transition $p_i \to p_j$ exists if p_j was reached by a feasible rotation of p_i.

2.7.2 Exercises

1. Prove or disprove: For certain point configurations (e.g., regular grids, random point clouds, points on spheres, or simplicial surfaces), the reachability graph is strongly connected.
2. Find a general algorithm that, for any n and point set P, decides whether complete reachability of all points is possible through the process.
3. Investigate: How does reachability change when transition delays or random perturbations are introduced into the rotation?
4. Formulate an optimization: Find a minimal rotation path through all points that respects the transition rules.
5. Design a visualization (in 2D, 3D, or nD projections) that dynamically shows the process and graph.

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Graphs, Hypergraphs, Surface traversal processes, Reachability graphs
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 19999942-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.8 EN SH-3 No.7PALLV1.0: Analysis and classification of wave superpositions in curved space

Estimated time for solving: 73 h 50 min *Nam-Score: 7.5* *An Original*

A curved space $\mathbb{R}^3$ with a smooth metric $g_{ij}(x, y, z)$, in which a wave function $\Psi(x, y, z, t)$ propagates. This satisfies the generalized wave equation:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|} \partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

with $|g| = \det(g_{ij})$ and c as the local propagation velocity. Tasks:

1. Solve (symbolically or numerically) the wave equation in the special case of a spherically symmetric metric:

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2$$

   with suitable boundary conditions (e.g., Dirichlet on a spherical surface $r = R$).

2. Show that the solution Ψ can be written as a superposition of eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators and explicitly calculate the first nontrivial modes.

3. Calculate the total energy spectrum by integrating over space:

   $$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] \sqrt{|g|} \, d^3x$$

4. Investigate numerically or analytically how the energy is distributed over time −especially in the case of interference between two point sources with phase-shifted emission.

5. Optional (Bonus): Model and visualize the effect of a time-dependent metric term, such as $g_{ij}(x, t)$, simulating a gravitational wave. Investigate how the interference structure and energy distribution change.

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Analysis, Classification, Waves, Curvature of space
UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 02398437-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.9 EN SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastic analysis of wave phenomena using Fourier and probability density functions

Estimated time for solving: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *An Original*

Investigate a spatiotemporally dependent wave phenomenon under the influence of stochastic noise. Let the wave function be given by:

$$\Psi(x, t, \omega) = \psi(x, t) + N(x, t, \omega)$$

where:

- $\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ is a deterministic base wave,
- $N(x, t, \omega)$ is a Gaussian process with mean 0 and stationary covariance function.

Given: A Gaussian process with a covariance function:

$$K(x_1, x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda |x_1 - x_2|)$$

and a known noise level σ^2 and scale parameter $\lambda > 0$.

2.9.1 Exercises

1. **Modeling:** Formulate $N(x, t, \omega)$ as a Gaussian process with the above covariance function.
2. **Simulation:** Simulate several realizations of $\Psi(x, t, \omega)$ on a grid (x_i, t_j) for different parameters σ^2 and k.
3. **Statistics:** Calculate the expected value $E[\Psi(x, t)]$ and the variance $Var[\Psi(x, t)]$ both analytically and from the simulated data.
4. **Spectral Analysis:** Perform a Fourier decomposition of $\Psi(x, t, \omega)$ and calculate the spectral energy density.
5. **Extreme Value Statistics:** Estimate the probability distribution of the maxima in the interval $[a, b]$ using maximum likelihood or Bayesian methods.

(Bonus) Reconstruction: Train a neural network that reconstructs the base wave $\psi(x, t)$ from noisy observations $\Psi(x, t, \omega)$.

Category: Shoemei **Difficulty**: NAM **Tags**: Stochastic, Analysis, Wave phenomena, Fourier transformation, Probability density functions

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.10 EN SH-5 Test.1PALLV1.0: Number theory −Diophantine equations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *An Original*

Find all integer solutions to the following Diophantine equation:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Explain your solution and determine all possible values for x and y that satisfy this equation. Discuss how to approach this type of equation in general.

Category: Shoemei **Difficulty**: Higher Easy **Tags**: Number theory

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763737 on 29.04.2025

2.11 EN SH-6 Test.2PALLV1.0: Combinatorics −arrangements and permutations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

How many different ways are there to arrange 5 different books on 3 shelves if each shelf must hold at least one book and the shelves do not have infinite capacity? Explain the solution using the principles of inclusion and exclusion.

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Combinatorics

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561223 on 29.04.2025

2.12 EN SH-6 Test.3PALLV1.0: Geometry −Circle geometry and tangents

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

Given is a circle with center O and radius $r = 10$. A point P lies outside the circle and is at a distance of $OP = 17$. Determine the length of the tangent from P to the circle and explain the calculation using the Pythagorean theorem. Discuss why the length of the tangent depends only on the difference between the distances between the point and the center and the radius of the circle.

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Geometry

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 12987462-1073-4d3b-9f5c-120987561273 on 29.04.2025

2.13 EN SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta combination through Fourier transformations

Estimated time for solving: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a smooth, rapidly decreasing function (i.e., $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) such that its Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx$$

the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Prove using Poisson's sum formula that the above equation satisfies under suitable conditions is.
2. Show that with a suitable choice of $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ for $\Re(s) > 1$, statements about the analytical continuation of the Riemann zeta function can be derived.
3. Investigate how the relationship can be extended into higher dimensions (Fourier on $\mathbb{R}^n$) and what role the symmetric structure plays in zeta analysis.
4. Consider the function

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

and show that it can be interpreted as a kind of Fourier series of the zeta function. Derive a representation as a function of $\hat{f}$.

2.13.1 Notes

- Use the Poisson sum formula:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Use properties of the Mellin transform for subproblems on $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Note: This problem requires an understanding of complex analysis, distribution theory, Fourier transform, and special functions.

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Zeta combination, Fourier transformations, Zeta function
UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-198427198265 on 03.05.2025

2.14 *EN SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximal numbers of cuts in k-uniform hypergraphs*

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Given a k-uniform hypergraph $H = (V, E)$, i.e., each hyperedge $e \in E$ connects exactly k vertices from the vertex set V. Define a **cut** as a partition of V into two disjoint subsets $V_1 \cup V_2 = V$, where a hyperedge is **cut** if it contains vertices from both parts. Prove or disprove: For every $k \geq 2$, there exists a partition of V into two sets such that at least $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ hyperedges are intersected. **Addendum**: How does the lower bound change under random partitioning?

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-172874618926 on 03.05.2025

2.15 EN KTB-1 No.14PALLV1.0: Optimal Complexity of an Adaptive Primality Test

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *An Original*

Problem An adaptive primality test is an algorithm that, when testing a natural number $n \in \mathbb{N}$ for prime property, gradually decides between probabilistic and deterministic methods. Examples are Miller-Rabin, Baillie-PSW, or AKS. Develop and analyze an adaptive primality method with the following property:

- The algorithm starts with a probabilistic test (e.g., Miller-Rabin).
- If this test is passed multiple times, the system performs a deterministic subtest (e.g., Lucas, ECPP, or reduced AKS level) for borderline cases.
- The overall complexity of the method depends on the size of n and the assumed error probability ε.

Task: Find an asymptotically optimal combination of such methods (with proof) and calculate the minimum expected running time for the ”prime” vs. ”not prime” decision, assuming realistic distributions of randomly chosen numbers $n \in [1, N]$. **Goal:**

- Analyze the **error-controlled adaptive complexity** model.
- Develop a function class $T(n, \varepsilon)$ that describes the running time (in the expected value) of the optimal method.
- Compare your solution with well-known methods such as Miller-Rabin (multiple), Baillie-PSW, and deterministic AKS.

Category: Kaiketsu and Toku, Bunseki, Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Difficult **Tags**:
UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-624352343132 on 11.05.2025

2.16 *EN SHB-3 No.15PALLV1.0: Solution structure of generalized recursive polynomials*

Estimated time for solving: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *An Original*

A recursive definition is given:

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

with initial values $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ and $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ Analyze:

- Conditions for closed form
- Structure of the zeros
- Connection with classical polynomials (e.g., Chebyshev, Legendre, Hermite polynomials)

2.16.1 *Solution structure (General steps)*

2.16.2 *1. **Analysis of the recursion***

- Determine the degree of recursion k
- Classify the coefficients $a_i(x)$
- Constant? Linear? General polynomial?

2.16.3 *2. **Characteristic polynomial***

- Introduce a transformation analogous to linear recursion:
- Consider linear independence of the basis $P_0, \ldots, P_k$
- Find a solution using a characteristic polynomial (for constant a_i)

2.16.4 *3. **Representation using matrix methods***

- Write the recursion as a matrix system:

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

with vector $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- Examine the eigenvalues and eigenvectors of $A(x)$

2.16.5 *4. **Comparison with known families***

- Check whether the polynomial belongs to a known class (orthogonal, symmetric, etc.).

2.16.6 *5. **Root Structure***

- Use numerical methods to analyze the roots
- Investigate convergence behavior (e.g., for $n \to \infty$)

2.16.7 *6. **Symbolic Solution (if possible)***

- Search for closed forms (e.g., using generating functions, transforming into differential equations)
- Find explicit representations using basis functions or combinatorial structures

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Higher Difficult **Tags**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 0163d8ec-b771-44db-9f6f-6546b4733395 on 11.05.2025

2.17 EN SHKS-1 No.16PALLV1.0: Turing machine with limited memory –proof of correctness

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *An Original*

Given a Turing machine M_b whose working tape is limited to $O(\log n)$ memory cells. Show that M_b correctly decides a certain language L, e.g.:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

or another specific language where memory constraints are relevant.

2.17.1 Additional Information

- Definitions of Turing machines (TM) and bounded memory (e.g., logarithmic space)
- Formal models such as LBA (Linear Bounded Automata)
- Comparison with regular or context-free languages
- Boolean logic & invariant methods
- Standard logic proofs (e.g., induction, contradiction)
- Sketches on paper or notepad

2.17.2 Requirements

*2.17.3 **1. Formal Specification***

- Formally define the bounded TM M_b:
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Boundary: Working tape size $\leq c \cdot \log n$

*2.17.4 **2. Describe the language** L*

- Prove that $L \in \mathsf{L}$ (decidable with logarithmic space)
- Examples:
- Balanced number of symbols (e.g., equal number of a and b)
- Recognition of simple regular patterns with space optimization

*2.17.5 **3. Construction/Simulation***

- Describe the TM's low-memory strategy:
- Bookmarks (pointer technique)
- Two-pass method
- Counter in binary representation on the working tape

*2.17.6 **4. Correctness***

- Use invariance or simulation:
- At each step, the invariant is preserved (e.g., counting equality)
- Show: If TM accepts, then $w \in L$; if $w \in L$, then TM accepts

2.17.7 5. Prove space complexity

- Analysis: All steps require only $O(\log n)$ memory cells
- Argue that no illegal storage occurs

2.17.8 6. Conclusion

- Conclude with a complete proof (e.g., by complete induction on the length of w)
- Show that the bounded memory **is sufficient and works correctly**

Category: Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 76026e70-8f1d-4319-a13e-7f5c8955fc83 on 11.05.2025

2.18 EN BUK-1 No.17PALLV1.0: Quantum field model of wave packet interference

Estimated time for solving: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *An Original*

A quantum field theory model is given to describe the interference of two moving wave packets in a scalar field. Develop a complete theoretical and numerical model that describes and analyzes the construction, evolution, and interference of the wave packets within quantum field theory. Complete the following subtasks:

1. **Theoretical Foundations**
   - Explain the quantization of a free scalar field.
   - Derive the field operator $\hat{\phi}(x,t)$.
   - Describe the commutator behavior of $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$.
2. **Construction of the Wave Packet States**
   - Define two orthogonal Gaussian momentum distributions $f_1(k)$, $f_2(k)$. - Derive the state

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

and normalize it.

3. **Expectation Value and Interference**
   - Calculate the expectation value $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
   - Identify cross terms and their contribution to the interference.
   - Visualize the interference pattern as a function of x, t, δ.
4. **Time Evolution and Wave Packet Propagation**
   - Simulate the propagation of the wave packets in space and time.
   - Analyze the influence of group and phase velocities on the interference structure.
   - Discuss any dispersion phenomena that may occur.
5. **Extension to field operator products**
   - Calculate the two-point function $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
   - Analyze its space-time structure.
   - Discuss implications for possible measurements.
6. **Experimental Interpretation and Model Validation**
   - Compare your model with a quantum optical interferometer (e.g., Mach-Zehnder).
   - Discuss measurement operators, state collapse, and interference visibility.
7. **Reflection, Complexity Analysis, and Model Limits**
   - Estimate the algorithmic complexity of your numerical methods.
   - Discuss possible extensions (e.g., spinor fields, QED).
   - Reflect on the validity and limitations of scalar field theory.

The paper should be mathematically sound, physically interpreted, and supplemented by numerical simulations.

Category: Bunseki, Keisan **Difficulty**: Darkside **Tags**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 5f69f358-a92b-4593-ac73-5aaf0fcb5f33 on 11.05.2025

2.19 EN SHK-1 No.23PALLV1.0: Recursivity and fixed-point combinators in the untyped lambda calculus

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *An Original*

Given is the untyped lambda calculus with complete β-reduction. The Church encodings for natural numbers, ”iszero”, ”pred”, and ”mult”, are considered known. Let the fixed-point combinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ be given, as well as the function:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Task: Prove formally and completely that $Y\ F$ is a correct recursive procedure for calculating factorials according to the Church encoding. The following points must be demonstrated in detail:

1. **Reduction for a fixed argument:** Perform a complete β-reduction of the term $(Y\ F)\ 3$. State all reduction steps up to the final Church encoding.

2. **Proof of correctness by induction:** Perform a structural induction proof on the Church numbers that for all $n \in \mathbb{N}$ the following holds:

$$(Y\ F)\ n \rightarrow^{*}_{\beta} \text{fac}_n$$

where fac_n is the Church encoding of $n!$.

3. **Fixed-Point Property:** Prove formally that $Y\ F = F\ (Y\ F)$, and show why this expression enables recursive computation.

4. **Comparison with the Z-Combinator:**

- Define the Z-combinator.
- Compare the reduction length of $(Y\ F)\ 3$ and $(Z\ F)\ 3$.
- Discuss in which contexts Z should be preferred.

Note: For all reduction steps, the intermediate terms must be stated explicitly. Do not use simplifications or jumps without justification.

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 887d0eeb-752d-454c-98be-4211f1b14647 on 17.05.2025

2.20 EN SHK-2 No.24PALLV1.0: Role of zeta and gamma functions in partition functions and vacuum energies of quantum field theory

Estimated time for solving: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *An Original*

Investigate and prove the role of zeta and gamma functions in quantum field theory regularization and thermodynamics, especially in the context of partition functions and vacuum energy.

2.20.1 Task

Given a scalar quantum field on a compact spacetime with periodicity β in the time dimension (corresponding to a temperature $T = 1/\beta$) and a spatial dimension L. The natural frequencies of the field are:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Using zeta regularization, show that the thermodynamic partition function

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

can be regularly calculated using the analytic extension of the Riemann zeta function and the gamma function.

2.20.2 Subtasks

1. **Derivation of the Regulated Vacuum Energy**

Derive the expression for the regulated vacuum energy $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ using the **zeta function**. Show that:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

and convert the expression to a gamma function form using the Mellin transform.

2. **Reduction to an Epstein zeta function**

Show that the double sum over n and m can be represented as an Epstein zeta function. Analyze its analytical properties.

3. **Temperature Dependence and Thermodynamic Functions**

Use the regularized expression to derive the free energy F(beta), internal energy U(beta), and entropy S(beta). Show how the gamma function appears in the asymptotic expansion for high and low temperatures.

4. **Comparison with Casimir Energy**

Prove that the zero-temperature limit of the partition function transforms into the Casimir energy, and that the regularization yields exactly the same form as the classical zeta-Casimir method.

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: NUM **Tags**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: ad5daf78-d753-4dd9-b3c5-8d62f9acd212 on 24.05.2025

2.21 *EN SHK-3 No.25PALLV1.0: Momentum space representation of a Gaussian wave packet*

Estimated time for solving: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *An Original*

2.21.1 *Task: Momentum-space representation of a Gaussian wave packet*

Given a one-dimensional quantum mechanical particle with the wave function in position space:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

This function describes a stationary, freely moving particle with a Gaussian spatial distribution.

2.21.2 ***Subtasks***

2.21.3 *Normalization of the wave function*

Determine the normalization constant A such that the wave function is normalized, i.e. i.e.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

2.21.4 *Fourier Transformation into Momentum Space*

Calculate the momentum space representation $\phi(p)$ of the wave function using the Fourier transformation according to:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complete the integration and state the resulting function $\phi(p)$ explicitly.

2.21.5 *Heisenberg's Uncertainty Principle*

Determine the standard deviations σ_x and σ_p of the position and momentum distributions, respectively:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \ \rangle - \langle p \rangle^2$$

and show that the product of these dispersions satisfies the Heisenberg uncertainty principle:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

2.21.6 *Physical Interpretation of the Limiting Cases*

Discuss qualitatively the physical limiting case $a \to 0$. What happens to the momentum space representation $\phi(p)$ and how should this limiting case be interpreted physically? Refer to the concepts of localization and momentum uncertainty.

2.21.7 ***Note:***

This exercise is also suitable for numerical evaluation and graphical representation in Python or MATLAB. Optionally, the Fourier transform can also be verified symbolically using suitable software tools (e.g., SymPy or Mathematica).

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 006fe438-4c31-4b38-a199-f0b4144a2e00 on 24.05.2025

2.22 EN SHK-1 No.26-1PALLV1.0: Isometries in n-dimensional Euclidean space

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *An Original*

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

2.22.1 Aufgaben:

1. **Lineare Isometrien:**

Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.

2. **Affine Isometrien:**

Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.

3. **Erhaltung des Skalarprodukts:**

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f, die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **Konstruktion einer speziellen Isometrie:**

Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Keisan, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Medium **Tags**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 279441ee-c787-4429-9a05-1b35c79ef998 on 31.05.2025

2.23 EN SHK-1 No.26-2PALLV1.0: Proof task: Characterization of isometric mappings in $\mathbb{R}^n$

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *An Original*

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be an isometry, i.e.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

To show: Every isometry f in $\mathbb{R}^n$ is either an affine transformation of the form $f(x) = Ax + b$, where A is an orthogonal matrix, or can be written as a composition of such maps with reflections or translations. **Hint for further study (optional):** Show that the set of all isometries in $\mathbb{R}^n$ forms a group under composition —the so-called *Euclidean group* $\mathrm{E}(n)$.

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Keisan, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Medium **Tags**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 920ac3eb-4f5f-40ee-9485-9426674da59a on 31.05.2025

2.24 EN 1 No.27PALLV1.0: Isometries in the n-dimensional Euclidean space and proof task: Characterization of isometric mappings in $\mathbb{R}^n$

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *An Original*

A mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is called an **isometry** if it preserves the Euclidean distance between two points, i.e., for all $x, y \in \mathbb{R}^n$, we have:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

2.24.1 Exercises:

1. **Linear Isometries:**

Show that every linear isometry $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ can be represented by an orthogonal matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, i.e., $T(x) = Ax$ with $A^\top A = I$.

2. **Affine Isometries:**

Determine all isometries $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ that are additionally **affine**, i.e., of the form $f(x) = Ax+b$, where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, and A is orthogonal.

3. **Preservation of the Inner Product:**

Let $u, v \in \mathbb{R}^n$ be two unit vectors. Show that every isometry f, which is also linear, preserves the inner product, i.e.:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construction of a Special Isometry:**

Provide an example of a nonlinear isometry $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ which is not a linear map but still preserves distances. Show that f is indeed an isometry.

2.24.2 Proof Task: Characterization of Isometric Mappings in $\mathbb{R}^n$

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be an isometry, i.e.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2.24.3 To show:

Every isometry f in $\mathbb{R}^n$ is either an affine mapping of the form $f(x) = Ax + b$, where A is an orthogonal matrix, or it can be represented as a composition of such mappings with reflections or translations.

2.24.4 Optional deeper insight:

Show that the set of all isometries in $\mathbb{R}^n$ forms a group under composition –called the **Euclidean group** $\mathrm{E}(n)$.

Category: Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Medium **Tags**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 9c8f9906-0742-4308-8346-40895d72ad40 on 07.06.2025

2.25 EN 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Optimal Control of a Diffusive Process

Estimated time for solving: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *An Original*

This exercise explores the application of advanced calculus and real analysis concepts to an optimal control problem, which has strong parallels in fields like quantum system control and various engineering disciplines.

2.25.1 Problem Setup

Consider a 1-dimensional system whose "state" $y(x,t)$ (e.g., temperature distribution or concentration of a diffusing substance) evolves over a spatial domain $\Omega = [0, L]$ and time $t \in [0, T]$. The evolution is described by a simplified diffusion-like partial differential equation (PDE) with a time-dependent control parameter $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad \text{for } (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

with **boundary conditions**:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, for $t \in (0, T]$

and an **initial condition**:

- $y(x, 0) = y_0(x)$, for $x \in [0, L]$

Here, $\alpha > 0$ is the diffusion constant, and $g(x)$ is a given spatial function representing the influence of the control. Assume $y_0(x)$ and $g(x)$ are sufficiently smooth. The objective is to find an **optimal control** $u(t) \in U_{\text{ad}}$, where:

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\text{max}}\}$$

that minimizes the **cost functional**:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x, T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

where $y_{\text{desired}}(x)$ is the desired target state at time T, and $\lambda > 0$ is a regularization parameter penalizing large control effort.

2.25.2 Part 1: Foundational Analysis of the System

2.25.3 1. Existence and Uniqueness of the State

Explain, conceptually, why a unique solution $y(x,t)$ for the given PDE is expected for a given $u(t)$, initial, and boundary conditions. Reference the required properties (e.g., boundedness, continuity) and function spaces needed for weak solutions (e.g., Sobolev spaces such as $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, etc.).

2.25.4 2. Impact of Control Constraints

Discuss how the constraint $0 \le u(t) \le U_{\text{max}}$ in U_{ad} influences the nature of the optimization problem. Compare with the unconstrained case $U_{\text{ad}} = C([0, T])$. Explain the role of convexity and how constrained optimization problems lead to different types of optimality conditions.

2.25.5 Part 2: Variational Analysis and Optimality Conditions

2.25.6 1. Gateaux Differentiability of the Cost Functional

Assuming $J(u)$ is differentiable, derive the **Gateaux derivative** of $J(u)$ at $u_0(t)$ in the direction $h(t)$. **Hint**: Let $y_h(x,t)$ be the solution to the PDE when the control is $u_0(t) + \varepsilon h(t)$. Compute:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

2.25.7 2. Role of the Adjoint System

Explain, in general terms, the purpose of the adjoint state in PDE-constrained optimization problems. How does it simplify the calculation of the gradient of the cost functional? Describe its relation to the "sensitivity" of the cost with respect to the state $y(x,t)$.

2.25.8 3. First-Order Necessary Condition

State the **first-order necessary optimality condition** (variational inequality) that must be satisfied by an optimal control u

2.25.8 Part 3: Advanced Topics and Limiting Behavior

2.25.9 1. Behavior of Optimal Control under Regularization

Discuss what happens to the regularization term:

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

as $\lambda \to 0^+$. What implications does this have on the behavior of the optimal control u

2.25.9 2. Epsilon-Delta Rigor

Suppose $u^{\cdot}(t)$ is known to be optimal. Explain how the **epsilon-delta definition of a limit** would be applied to rigorously prove that $y(x,T)$ is "arbitrarily close" to $y_{\text{desired}}(x)$ in L^2-norm. Specify the roles of:

- ε: how close the final state should be to the target
- δ: how close the control or final time must be (e.g., $-u^{\cdot}| < \delta$) to guarantee this closeness

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki, Kōchiku and Sekkei, Kaishaku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Optimal Control, Functional Analysis, Partial Differential Equations, Gateaux Derivative, Adjoint System, Calculus of Variations, Numerical Mathematics, Epsilon-Delta Proof, Gradient Method, Boundary Value Problem, Regularization, Convexity, Function Spaces, Sobolev Space, PDE-Constrained Optimization
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: b83383ed-3418-49f7-aad3-7f3075620388 on 21.06.2025

3 Introducción e Información: 8 h 0 min

El uso de ayudas como calculadoras, fórmulas, hojas de cálculo y herramientas digitales solo está permitido bajo las condiciones expresamente establecidas. Las ayudas permitidas deben declararse con antelación para los exámenes y ser aprobadas por el supervisor del examen. Cualquier ayuda no autorizada está prohibida y puede resultar en la descalificación. Durante la realización de una tarea o examen, se prohíbe el uso de materiales adicionales o asistencia externa, a menos que esté expresamente permitido. El cumplimiento de estas normas garantiza que todos los participantes trabajen en condiciones justas e iguales. A partir de una puntuación Nam de 3, todos los participantes pueden utilizar todas las ayudas posibles.

El incumplimiento de estas normas puede tener graves consecuencias. Especialmente en los exámenes oficiales, el uso de ayudas no autorizadas puede conllevar la expulsión inmediata del examen. En casos reiterados o especialmente graves, incluso se puede imponer la prohibición permanente del examen. El cumplimiento de estas normas garantiza que todos los participantes trabajen en condiciones justas e iguales y que se mantenga la integridad de los exámenes.

Esta hoja de trabajo cumple la finalidad del ejercicio y puede entregarse oficialmente bajo ciertas condiciones. Al mismo tiempo, debe considerarse un documento no oficial, ya que se creó sin supervisión administrativa.

1. **Etiquetado correcto**: El documento debe estar claramente identificado como una hoja de ejercicios.
2. **Integridad y formato**: Debe estar en un formato reconocido (por ejemplo, PDF o copia impresa) y contener todo el contenido requerido.
3. **Entrega puntual**: La entrega debe realizarse dentro de los plazos especificados.
4. **Aprobación de la autoridad competente**: El reconocimiento oficial requiere la aprobación del organismo examinador o administrativo pertinente.
5. **Sin asistencia externa**: El documento debe ser creado únicamente por la persona en cuestión, sin asistencia externa.
6. **Sin garantía de evaluación**: Dado que esta hoja se preparó sin supervisión administrativa, no hay obligación de considerarla para la evaluación oficial.
7. **Sin responsabilidad** - El autor no asume ninguna responsabilidad por la exactitud ni la integridad del contenido.
8. **Sin carácter oficial** - Este documento no es un documento oficial y no tiene la misma validez legal que un documento emitido oficialmente.
9. **Sin garantía de reconocimiento** - La presentación de este documento no garantiza su reconocimiento ni consideración oficial por parte de ninguna autoridad o institución.
10. **Sin garantía de confidencialidad** - No se puede garantizar la protección de los datos personales ni la confidencialidad.
11. **Sin garantía de seguridad** - No se garantiza la seguridad del contenido ni de los datos que contiene.
12. **Sin garantía de autenticidad** - No se puede confirmar la autenticidad de la información o los datos del documento.
13. **Sin garantía de integridad** - No se puede garantizar la autenticidad ni la integridad del contenido.
14. **Sin garantía de validez** - El documento puede contener contenido cuya validez legal o técnica no se puede confirmar.
15. **Sin garantía de fiabilidad** - No se puede garantizar la exactitud, integridad ni fiabilidad de la información.

Todo se basa en la confianza, así que diviértete.

3.1 ES 1 No.26-1PALLV1.0: Isometrías en el espacio euclidiano de dimensión n

Tiempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama una **isometría** si conserva la distancia euclidiana entre dos puntos, es decir, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

3.1.1 Ejercicios:

1. **Isometrías lineales:**

Demuestre que toda isometría lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ puede representarse mediante una matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

2. **Isometrías afines:**

Determine todas las isometrías $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que además sean **afines**, es decir, de la forma $f(x) = Ax + b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, y A es ortogonal.

3. **Conservación del producto escalar:**

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores unitarios. Demuestre que toda isometría f, que además es lineal, conserva el producto escalar, es decir:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construcción de una isometría especial:**

Dé un ejemplo de una isometría no lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que no sea una transformación lineal pero que conserve las distancias. Demuestre que f es realmente una isometría.

Categoría: Demostración, Resolución y Resolver, Cálculo, Construcción y Diseño **Dificultad**: Más Medio **Etiquetas**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 525848ab-3c75-46de-a638-918396abdd44 el 31.05.2025

3.2 ES 1 No.26-2PALLV1.0: Problema de demostración: caracterización de las isometrías en $\mathbb{R}^n$

Tiempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría, es decir:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A demostrar: Toda isometría f en $\mathbb{R}^n$ es una transformación afín de la forma $f(x) = Ax + b$, donde A es una matriz ortogonal, o puede escribirse como una composición de tales transformaciones con reflexiones o traslaciones. **Nota para profundizar (opcional):** Demuestre que el conjunto de todas las isometrías en $\mathbb{R}^n$ forma un grupo bajo composición —el llamado *grupo euclídeo* $\mathrm{E}(n)$.

Categoría: Demostración, Resolución y Resolver, Cálculo, Construcción y Diseño **Dificultad**: Más Medio **Etiquetas**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 67c0b382-7dd2-4ed8-b626-75c7228017b5 el 31.05.2025

3.3 ES 1 No.27PALLV1.0: Isometrías en el espacio euclidiano de dimensión n y tarea de prueba: caracterización de las aplicaciones isométricas en $\mathbb{R}^n$

Tiempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama **isometría** si preserva la distancia euclidiana entre dos puntos, es decir, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

3.3.1 Ejercicios:

1. **Isometrías lineales:**

Demuestre que toda isometría lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ puede ser representada por una matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

2. **Isometrías afines:**

Determine todas las isometrías $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que además sean **afines**, es decir, de la forma $f(x) = Ax + b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, y A es ortogonal.

3. **Preservación del producto escalar:**

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores unitarios. Demuestre que toda isometría f, que además es lineal, preserva el producto escalar, es decir:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construcción de una isometría especial:**

Dé un ejemplo de una isometría no lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que no sea una aplicación lineal pero que conserve las distancias. Demuestre que f es realmente una isometría.

3.3.2 Tarea de demostración: Caracterización de las aplicaciones isométricas en $\mathbb{R}^n$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría, es decir:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

3.3.3 A demostrar:

Toda isometría f en $\mathbb{R}^n$ es o bien una aplicación afín de la forma $f(x) = Ax + b$, donde A es una matriz ortogonal, o se puede representar como una composición de tales aplicaciones con reflexiones o traslaciones.

3.3.4 Profundización opcional:

Demuestre que el conjunto de todas las isometrías en $\mathbb{R}^n$ forma un grupo bajo la composición –llamado el **grupo euclidiano** $\mathrm{E}(n)$.

Categoría: Demostración, Construcción y Diseño **Dificultad**: Más Medio **Etiquetas**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 97d5449b-9c5b-4f0c-8aa7-7d9b966994e0 el 07.06.2025

3.4 ES 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Control óptimo de un proceso difusivo

Tiempo estimado para resolver: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Un Original*

3.4.1 Enunciado

Este ejercicio estudia la aplicación de conceptos avanzados de análisis y cálculo variacional a un problema de control óptimo, con fuertes paralelismos en áreas como el control cuántico y diversas ingenierías.

3.4.2 Planteamiento del problema

Considera un sistema unidimensional cuyo ”estado” $y(x,t)$ (por ejemplo, distribución de temperatura o concentración de una sustancia difusiva) evoluciona en un dominio espacial $\Omega = [0, L]$ y en el tiempo $t \in [0, T]$. La evolución está gobernada por una ecuación en derivadas parciales (EDP) simplificada, de tipo difusión, con un parámetro de control dependiente del tiempo $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

con condiciones de frontera:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, para $t \in (0, T]$

y condición inicial:

- $y(x, 0) = y_0(x)$, para $x \in [0, L]$

Aquí $\alpha > 0$ es la constante de difusión y $g(x)$ es una función espacial dada que modela la influencia del control. Se asume que $y_0(x)$ y $g(x)$ son suficientemente suaves. El objetivo es encontrar un **control óptimo** $u(t) \in U_{\text{ad}}$, donde

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\max}\}$$

es el conjunto de controles admisibles. La **función costo** está definida como:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

donde $y_{\text{desired}}(x)$ es el estado objetivo deseado al tiempo T y $\lambda > 0$ es un parámetro de regularización que penaliza el esfuerzo de control.

3.4.3 Parte 1: Análisis básico del sistema

3.4.4 1. Existencia y unicidad del estado

Explica conceptualmente por qué para un control dado $u(t)$ junto con las condiciones iniciales y de frontera se espera una solución única $y(x,t)$ de la EDP. Considera las propiedades necesarias (como acotación, continuidad) y los espacios funcionales adecuados para soluciones débiles (por ejemplo, espacios de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, etc.).

3.4.5 2. Influencia de las restricciones de control

Discute cómo la restricción $0 \le u(t) \le U_{\max}$ en el dominio U_{ad} afecta la naturaleza del problema de optimización. Compara con el caso sin restricciones $U_{\text{ad}} = C([0, T])$. Explica el papel de la convexidad y cómo los problemas con restricciones conducen a condiciones óptimas diferentes.

3.4.6 Parte 2: Análisis variacional y condiciones de optimalidad

3.4.7 1. Diferenciabilidad de Gateaux de la función costo

Asumiendo que $J(u)$ es diferenciable, deriva la **derivada de Gateaux** de $J(u)$ en el punto $u_0(t)$ en la dirección $h(t)$. **Nota:** Sea $y_h(x,t)$ la solución de la EDP con el control $u_0(t) + \varepsilon h(t)$. Calcula:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$$

3.4.8 2. Rol del sistema adjunto

Explica de forma general la función del estado adjunto en problemas de optimización con EDP. ¿Cómo simplifica el cálculo del gradiente de la función costo? Describe su relación con la "sensibilidad" del costo respecto al estado $y(x,t)$.

3.4.9 3. Primera condición necesaria de optimalidad

Formula la **primera condición necesaria de optimalidad** (desigualdad variacional) que debe cumplir un control óptimo u

3.4.9 Parte 3: Temas avanzados y comportamiento límite

3.4.10 1. Comportamiento del control óptimo ante la regularización

Discute qué ocurre con el término de regularización

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

cuando $\lambda \to 0^+$. ¿Qué efectos tiene esto sobre el comportamiento del control óptimo u_λ

3.4.10 2. Rigor con definición épsilon-delta

Suponiendo que $u^{\cdot}(t)$ es óptimo y conocido, explica cómo se usa la **definición épsilon-delta de límite** para demostrar rigurosamente que $y(x,T)$ está arbitrariamente cerca de $y_{\text{desired}}(x)$ en norma L^2. Explica el papel de:

- ε: qué tan cerca debe estar el estado final del estado objetivo.
- δ: cuán cerca debe estar el control (o el tiempo final) de su valor óptimo para garantizar esta aproximación.

Categoría: Demostración, Resolución y Resolver, Análisis, Construcción y Diseño, Interpretación **Dificultad**: Lado Oscuro
Etiquetas:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: d9274a32-6e97-490e-9bcf-56131484b74e el 21.06.2025

Apuvälineiden, kuten laskinten, kaavasarjojen, taulukkolaskentaohjelmien ja digitaalisten työkalujen, käyttö on sallittua vain nimenomaisesti ilmoitetuin ehdoin. Sallitut apuvälineet on ilmoitettava kokeisiin etukäteen ja niiden on oltava kokeen valvojan hyväksymiä. Kaikki luvattomat apuvälineet ovat kiellettyjä ja voivat johtaa hylkäämiseen. Tehtävän tai kokeen parissa työskentelyn aikana lisämateriaalien tai ulkopuolisen avun käyttö on kielletty, ellei sitä ole nimenomaisesti sallittu. Näiden sääntöjen noudattaminen varmistaa, että kaikki osallistujat työskentelevät oikeudenmukaisissa ja tasa-arvoisissa olosuhteissa. Alkaen Nam-pistemäärästä 3 kaikki osallistujat voivat käyttää kaikkia mahdollisia apuvälineitä.

Näiden sääntöjen rikkomisella voi olla vakavia seurauksia. Erityisesti virallisissa kokeissa luvattomien apuvälineiden käyttö voi johtaa välittömään kokeesta erottamiseen. Toistuvissa tai erityisen vakavissa tapauksissa voidaan jopa määrätä pysyvä kielto osallistua kokeeseen. Näiden sääntöjen noudattaminen varmistaa, että kaikki osallistujat työskentelevät oikeudenmukaisissa ja tasa-arvoisissa olosuhteissa ja että kokeiden rehellisyys säilyy.

Tämä laskentataulukko palvelee harjoituksen tarkoitusta ja se voidaan virallisesti palauttaa tietyin ehdoin. Samalla sitä tulisi pitää epävirallisena asiakirjana, koska se on luotu ilman hallinnollista valvontaa.

1. **Oikea merkintä** - Asiakirjan on oltava selvästi merkitty harjoitustehtäväksi.
2. **Täydellisyys ja muotoilu** - Sen on oltava tunnistetussa muodossa (esim. PDF tai tulostettu kopio) ja sen on sisällettävä kaikki vaadittu sisältö.
3. **Aikataulun mukainen lähetys** - Lähetys on tehtävä annettujen määräaikojen puitteissa.
4. **Toimivaltaisen viranomaisen hyväksyntä** - Virallinen tunnustaminen edellyttää asiaankuuluvan tutkinta- tai hallintoelimen hyväksyntää.
5. **Ei ulkopuolista apua** - Asiakirjan on oltava yksinomaan kyseisen henkilön luoma ilman ulkopuolista apua.
6. **Ei arviointitakuuta** - Koska tämä lomake on laadittu ilman hallinnollista valvontaa, sitä ei ole pakko ottaa viralliseen arviointiin.
7. **Ei vastuuta** - Tekijä ei ota vastuuta sisällön oikeellisuudesta tai täydellisyydestä.
8. **Ei virallista asemaa** - Tämä asiakirja ei ole virallinen asiakirja, eikä sillä ole samaa oikeudellista asemaa kuin virallisesti myönnetyllä asiakirjalla.
9. **Ei tunnustustakuuta** - Tämän asiakirjan toimittaminen ei takaa minkään viranomaisen tai laitoksen tunnustusta tai virallista käsittelyä.
10. **Ei luottamuksellisuuden takeita** - Henkilötietojen ja luottamuksellisuuden suojaa ei voida taata.
11. **Ei turvallisuustakeita** - Sisällön ja siinä olevien tietojen turvallisuutta ei voida taata.
12. **Ei aitouden takeita** - Asiakirjan tietojen aitoutta ei voida vahvistaa.
13. **Ei eheyden takeita** - Sisällön aitoutta tai eheyttä ei voida taata.
14. **Ei pätevyyden takeita** - Asiakirja saattaa sisältää sisältöä, jonka oikeudellista tai teknistä pätevyyttä ei voida vahvistaa.
15. **Luotettavuustakuuta ei ole** - Tietojen tarkkuutta, täydellisyyttä tai luotettavuutta ei voida taata.

Kaikki perustuu luottamukseen, joten pidä hauskaa.

4.1 FN 1 No.26-1PALLV1.0: Isometriat n-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa

Ratkaisuun arvioitu aika: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Alkuperäinen*

Kuvauksesta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sanotaan, että se on **isometria**, jos se säilyttää euklidisen etäisyyden kahden pisteen välillä, eli kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

4.1.1 Tehtävät:

1. **Lineaariset isometriat:**

Osoita, että jokainen lineaarinen isometria $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ voidaan esittää ortogonaalisella matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eli $T(x) = Ax$ ja $A^\top A = I$.

2. **Affiinit isometriat:**

Määritä kaikki isometriat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jotka lisäksi ovat **affiineja**, eli muotoa $f(x) = Ax + b$, missä $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, ja A on ortogonaalinen.

3. **Skalaaritulon säilyminen:**

Olkoot $u, v \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektoreita. Osoita, että jokainen isometria f, joka on myös lineaarinen, säilyttää skalaaritulon:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Esimerkki erityisestä isometriasta:**

Anna esimerkki epälineaarisesta isometriasta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, joka ei ole lineaarinen, mutta säilyttää etäisyydet. Osoita, että f on todellakin isometria.

Kategoria: Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Laskenta, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso**: Korkea Keskitaso **Tunnisteet**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 2f62edea-11fe-4cd1-8f0c-5216db27cb0a päivämäärä 31.05.2025

4.2 FN 1 No.26-2PALLV1.0: Todistustehtävä: $\mathbb{R}^n$ -avaruuden isometrioiden ominaisuus

Ratkaisuun arvioitu aika: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Alkuperäinen*

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria, eli:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{kaikille } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Todistettava: Jokainen isometria f avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on joko affiini muunnos muotoa $f(x) = Ax + b$, missä A on ortogonaalimatriisi, tai koostuu tällaisten muunnosten ja peilausten tai siirtojen yhdistelmästä. **Lisätehtävä (valinnainen):** Näytä, että kaikkien $\mathbb{R}^n$:n isometristen kuvausten joukko muodostaa ryhmän komposition suhteen —niin sanottu *Euklidinen ryhmä* $\mathrm{E}(n)$.

Kategoria: Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Laskenta, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso**: Korkea Keskitaso **Tunnisteet**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 7e1b0a60-c236-4804-a837-dc31db3746a1 päivämäärä 31.05.2025

4.3 FN 1 No.27PALLV1.0: Isometria i n-dimensjonalt euklidsk rom og bevisoppgave: Karakterisering av isometriske avbildninger i $\mathbb{R}^n$

Ratkaisuun arvioitu aika: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Alkuperäinen*

Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on **isometria**, jos se säilyttää kahden pisteen euklidisen etäisyyden, eli kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

4.3.1 Tehtävät:

1. **Lineaariset isometriset:**

Todista, että jokainen lineaarinen isometria $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ voidaan esittää ortogonaalisella matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eli $T(x) = Ax$ ja $A^\top A = I$.

2. **Affiiniset isometriat:**

Määritä kaikki isometriat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jotka ovat lisäksi **affiineja**, eli muotoa $f(x) = Ax + b$, missä $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ ja A on ortogonaalinen.

3. **Sisätulon säilyminen:**

Olkoot $u, v \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektorit. Näytä, että jokainen lineaarinen isometria f säilyttää sisätulon, eli

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Erityisen isometrian rakentaminen:**

Anna esimerkki epälineaarisesta isometriasta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, joka ei ole lineaarinen mutta säilyttää etäisyydet. Todista, että f on todellakin isometria.

4.3.2 Todistustehtävä: Isometristen kuvausten karakterisointi $\mathbb{R}^n$:ssä

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria, eli pätee

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{kaikille } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4.3.3 Näytettävä:

Jokainen isometria f on joko affiininen kuvaus muodossa $f(x) = Ax + b$, missä A on ortogonaalinen matriisi, tai se voidaan esittää tällaisen kuvausten yhdistelmänä, johon sisältyy peilaus tai siirto.

4.3.4 Syventävä huomautus (valinnainen):

Näytä, että kaikkien isometrioiden joukko $\mathbb{R}^n$:ssä muodostaa ryhmän yhdistämällä eli kompositiolla −tätä ryhmää kutsutaan **euklidiseksi ryhmäksi** $\mathrm{E}(n)$.

Kategoria: Todistus, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso**: Korkea Keskitaso **Tunnisteet**:

UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: e22ff950-0938-4f0b-be56-aeaf2702bdd6 päivämäärä 07.06.2025

4.4 FN 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Kontroll optimal av en diffusjonsprosess

Ratkaisuun arvioitu aika: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Alkuperäinen*

4.4.1 Tehtävänanto

Tämä harjoitus tutkii edistyneiden analyysin ja variaatiolaskennan käsitteiden soveltamista optimaalisen ohjauksen ongelmaan, jolla on läheisiä yhteyksiä kvanttikontrolliin ja eri insinööritieteiden aloihin.

4.4.2 Ongelman määrittely

Tarkastellaan yksidimensionaalista järjestelmää, jonka ”tila” $y(x,t)$ (esim. lämpötilajakauma tai diffusoivan aineen konsentraatio) kehittyy avaruusalueella $\Omega = [0, L]$ ja ajassa $t \in [0, T]$. Kehitys kuvataan yksinkertaistetulla, diffuusion kaltaisella osittaisdifferentiaaliyhtälöllä, jossa on aika-riippuvainen ohjausparametri $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

Reunaehdot:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, kun $t \in (0, T]$

ja **alkuehto**:

- $y(x,0) = y_0(x)$, kun $x \in [0, L]$

Tässä $\alpha > 0$ on diffuusiovakio ja $g(x)$ on annettu avaruudellinen funktio, joka kuvaa ohjauksen vaikutusta. Oletetaan, että $y_0(x)$ ja $g(x)$ ovat riittävän sileitä. Tavoitteena on löytää **optimaalinen ohjaus** $u(t) \in U_{\text{ad}}$, missä

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\text{max}}\}$$

on sallitun ohjauksen joukko. **Kustannusfunktionaali** määritellään seuraavasti:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

missä $y_{\text{desired}}(x)$ on haluttu tavoitetila ajan T kohdalla ja $\lambda > 0$ on regularisointiparametri, joka rankaisee ohjauksen voimakkuutta.

4.4.3 Osa 1: Järjestelmän perusanalyysi

4.4.4 1. Tilatilan olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Selitä käsitteellisesti, miksi annetulla ohjauksella $u(t)$ sekä alku- ja reunaehdoilla odotetaan olevan yksikäsitteinen ratkaisu $y(x,t)$ PDE:lle. Viittaa tarvittaviin ominaisuuksiin (esim. rajoittuneisuus, jatkuvuus) ja sopiviin funktionaalitiloihin heikkojen ratkaisujen osalta (esim. Sobolev-tilat $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ jne.).

4.4.5 2. Ohjausrajoitusten vaikutus

Pohdi, miten rajoitus $0 \leq u(t) \leq U_{\text{max}}$ määrittelyjoukossa U_{ad} vaikuttaa optimointiongelman luonteeseen. Vertaa rajoittamattomaan tapaukseen $U_{\text{ad}} = C([0, T])$. Selitä konveksisuuden rooli ja miten rajatut optimointiongelmat johtavat erilaisiin optimaalisuusehtoihin.

4.4.6 Osa 2: Variaatioanalyysi ja optimiehdot

4.4.7 1. Gateaux-derivaatta kustannusfunktion osalta

Olettaen, että $J(u)$ on derivoituva, johda **Gateaux-derivaatta** kohdassa $u_0(t)$ suunnassa $h(t)$. **Vihje:** Olkoon $y_h(x,t)$ PDE:n ratkaisu, kun ohjaus on $u_0(t) + \varepsilon h(t)$. Laske:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

4.4.8 2. Adjoitujärjestelmän rooli

Selitä yleisesti adjoidun tilan funktio PDE-optimointiongelmissa. Kuinka se yksinkertaistaa kustannusfunktion gradientin laskentaa? Kuvaa sen suhdetta tilan $y(x,t)$ herkkyyteen kustannusta kohtaan.

4.4.9 3. Ensimmäinen välttämätön optimiehto

Muodosta **ensimmäinen välttämätön optimiehto** (variaatioepäyhtälö), joka optimaalisen ohjauksen u

4.4.9 Osa 3: Edistyneet aiheet ja raja-käyttäytyminen

4.4.10 1. Optimaaliohjauksen käyttäytyminen regularisoinnin suhteen

Pohdi, mitä tapahtuu regularisointitermille

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

kun $\lambda \to 0^+$. Millaisia vaikutuksia tällä on optimaaliohjaukselle u_λ

4.4.10 2. Epsilon-delta-rigorisuus

Oletetaan, että $u^{\cdot}(t)$ tunnetaan optimaalisena. Selitä, kuinka **epsilon-delta-rajojen määritelmä** sovelletaan näyttämään, että $y(x,T)$ on L^2-normissa "mielivaltaisen lähellä" $y_{\text{desired}}(x)$. Selitä seuraavien roolit:

- ε: kuinka lähellä lopputilan halutaan olevan tavoitetilaa
- δ: kuinka lähellä ohjausta tai lopetusaikaa (esim. $|u - u^{\cdot}| < \delta$) tulee olla, jotta tuo läheisyys varmistuu

Kategoria: Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Analyysi, Rakentaminen ja Suunnittelu, Tulkitseminen **Vaikeustaso**: Pimeä Puoli **Tunnisteet**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 41deec5f-8a8c-436e-b487-f3b549e085cc päivämäärä 21.06.2025

L'utilisation d'aides telles que des calculatrices, des recueils de formules, des tableurs et des outils numériques n'est autorisée que dans les conditions expressément indiquées. Les aides autorisées doivent être déclarées à l'avance pour les examens et approuvées par l'administrateur de l'examen. Toute aide non autorisée est interdite et peut entraîner une disqualification. Lors de la réalisation d'un devoir ou d'un examen, il est interdit d'obtenir des matériaux supplémentaires ou une assistance externe, sauf autorisation expresse. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales. Avec un score Nam de 3, tous les participants sont autorisés à utiliser toutes les aides possibles.

La violation de ces règlements peut entraîner de graves conséquences. En particulier lors d'évaluations officielles, l'utilisation d'aides non autorisées peut entraîner une exclusion immédiate de l'examen. En cas de récidive ou de cas particulièrement graves, une interdiction permanente de l'examen peut même être imposée. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales et que l'intégrité des évaluations est maintenue.

Cette feuille sert à des fins d'exercice et peut être soumise officiellement mais sous certaines conditions. En même temps, elle doit être considérée comme un document non officiel, car elle a été traitée sans supervision administrative.

1. **Étiquetage correct** - Le document doit être clairement marqué comme une feuille d'exercice.
2. **Complétude et formatage** - Il doit être dans un format reconnu (par exemple, PDF ou copie imprimée) et contenir tout le contenu requis.
3. **Soumission dans les délais** - La soumission doit être effectuée dans les délais spécifiés.
4. **Approbation par l'autorité compétente** - La reconnaissance officielle nécessite l'approbation de l'unité d'examen ou administrative compétente.
5. **Aucune assistance extérieure** - Le document doit avoir été complété exclusivement par la personne concernée sans assistance extérieure.
6. **Aucune garantie de note** - Étant donné que la feuille a été créée sans supervision administrative, il n'y a aucune obligation de la considérer pour une évaluation officielle.
7. **Aucune responsabilité** - L'auteur n'assume aucune responsabilité quant à l'exactitude ou à l'exhaustivité du contenu.
8. **Aucun statut officiel** - Le document n'est pas un document officiel et n'a pas le même statut juridique qu'un document officiellement délivré.
9. **Aucune garantie de reconnaissance** - La soumission de ce document ne garantit pas sa reconnaissance ou sa prise en compte officielle par une autorité ou une institution.
10. **Aucune garantie de confidentialité** - La protection des données personnelles et la confidentialité ne peuvent pas être garanties.
11. **Aucune garantie de sécurité** - La sécurité du contenu et des données qu'il contient n'est pas garantie.
12. **Aucune garantie d'authenticité** - L'authenticité des informations ou des données contenues dans le document ne peut pas être confirmée.
13. **Aucune garantie d'intégrité** - L'authenticité ou l'intégrité du contenu qu'il contient ne peut pas être assurée.
14. **Aucune garantie de validité** - Le document peut contenir des contenus dont la validité juridique ou technique ne peut pas être confirmée.
15. **Aucune garantie de fiabilité** - L'exactitude, l'exhaustivité ou la fiabilité des informations ne peut pas être garantie.

Toute est basée sur la confiance et donc, amusez-vous bien.

5.1 FR SH-1 No.1PALLV1.0: Prouver que $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Temps estimé pour résoudre: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Un Original*

Prouver que pour tout nombre naturel n, la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un n quelconque, alors il est également vrai pour $n+1$.

Catégorie: Preuve **Difficulté**: Facile **Étiquettes**: Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b le 19.04.2025

5.2 FR KAB-1 No.14PALLV1.0: Complexité optimale d'une méthode de primalité adaptative

Temps estimé pour résoudre: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *Un Original*

Problème Un test de primalité adaptatif est un algorithme qui, lorsqu'il teste la propriété de premier d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, choisit progressivement entre les méthodes probabilistes et déterministes. Parmi les exemples, on peut citer Miller-Rabin, Baillie-PSW ou AKS. Développer et analyser une méthode de primalité adaptative présentant la propriété suivante :

- L'algorithme commence par un test probabiliste (par exemple, Miller-Rabin).
- Si ce test est réussi plusieurs fois, le système effectue un sous-test déterministe (par exemple, Lucas, ECPP ou niveau AKS réduit) pour les cas limites.
- La complexité globale de la méthode dépend de la taille de n et de la probabilité d'erreur supposée ε.

Tâche : Trouver une combinaison asymptotiquement optimale de ces méthodes (avec preuve) et calculer le temps d'exécution minimum attendu pour la décision « premier » ou « non premier », en supposant des distributions réalistes de nombres $n \in [1, N]$ choisis aléatoirement. **Objectif :**

- Analyser le **modèle de complexité adaptative à erreur contrôlée**.
- Développer une classe de fonctions $T(n, \varepsilon)$ décrivant le temps d'exécution (en valeur attendue) de la méthode optimale.
- Comparer votre solution à des méthodes connues telles que Miller-Rabin (multiple), Baillie-PSW et AKS déterministe.

Catégorie: Résolution et Résoudre, Analyse, Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Difficile **Étiquettes**:
UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: b6ff31f3-7845-47a3-803d-792690b52f48 le 11.05.2025

5.3 *FR SHB-3 No.15PALLV1.0: Structure de solution des polynômes récursifs généralisés*

Temps estimé pour résoudre: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Un Original*

Une définition récursive est donnée :

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

avec les valeurs initiales $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ et $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ Analyser:

- Conditions pour la forme fermée
- Structure des zéros
- Lien avec les polynômes classiques (par exemple les polynômes de Tchebychev, Legendre, Hermite)

5.3.1 *Structure de la solution (étapes générales)*

5.3.2 *1. **Analyse de la récursivité***

- Déterminer le degré de récursivité k
- Classer les coefficients $a_i(x)$
- Constante? Linéaire? Polynôme général ?

5.3.3 *2. **Polynôme caractéristique***

- Introduire une transformation analogue à la récursivité linéaire :
- Considérons l'indépendance linéaire de la base $P_0, \ldots, P_k$
- Trouver une solution via un polynôme caractéristique (avec constante a_i)

5.3.4 *3. **Représentation à l'aide de méthodes matricielles***

- Écrire la récursivité sous forme de système matriciel :

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

avec le vecteur $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- Étudier les valeurs propres et les vecteurs propres de $A(x)$

5.3.5 *4. **Comparaison avec des familles connues***

- Vérifier si le polynôme peut être classé dans une classe connue (orthogonale, symétrique, etc.).

5.3.6 *5. **Structure zéro***

- Utiliser des méthodes numériques pour analyser les zéros
- Étudier le comportement de convergence (par exemple pour $n \to \infty$)

5.3.7 *6. **Solution symbolique (si possible)***

- Recherche de formes fermées (par exemple par génération de fonctions, transformation en équations différentielles)
- Trouver une représentation explicite via des fonctions de base ou des structures combinatoires

Catégorie: Preuve, Analyse **Difficulté**: Plus Difficile **Étiquettes**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 731c2ede-a852-4e70-90bf-cec748f09bf2 le 11.05.2025

5.4 FR SHKS-1 No.16PALLV1.0: Machine de Turing à mémoire limitée –preuve de correction

Temps estimé pour résoudre: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *Un Original*

Étant donné une machine de Turing M_b dont la bande de travail est limitée à $O(\log n)$ cellules mémoire. Montrer que M_b décide correctement d'une certaine langue L, par exemple Par exemple :

$$L = \{l \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(l) = \#b(l)\}$$

ou tout autre langage spécifique où les contraintes de mémoire sont pertinentes.

5.4.1 Informations Complémentaires

- Définitions des machines de Turing (MT) et de la mémoire limitée (par exemple, espace logarithmique)
- Modèles formels tels que LBA (Linear Bounded Automata)
- Comparaison avec des langages réguliers ou sans contexte
- Logique booléenne et méthodes invariantes
- Preuves logiques standard (par exemple, induction, contradiction)
- Croquis sur papier ou notes

5.4.2 Exigences

5.4.3 ***1. Spécification formelle***

- Définir formellement la TM bornée M_b :
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Limitation : Taille de la bande de travail $\leq c \cdot \log n$

5.4.4 ***2. Décrivez la langue*** L

- Démontrer que $L \in \mathsf{L}$ (décidable avec l'espace logarithmique)
- Exemples :
- Nombre équilibré de symboles (par exemple, nombre égal de a et b)
- Reconnaissance de motifs réguliers simples avec optimisation de l'espace

5.4.5 ***3. Construction/Simulation***

- Décrivez la stratégie TM avec peu de mémoire :
- Signets (technique du pointeur)
- Procédure en deux passes
- Compteur en représentation binaire sur bande de travail

5.4.6 ***4. Exactitude***

- Utiliser l'invariance ou la simulation :
- À chaque étape, l'invariant est préservé (par exemple, l'égalité de comptage)
- Afficher : Si TM accepte, alors $w \in L$; si $w \in L$, alors TM accepte

5.4.7 5. Prouver la complexité spatiale

- Analyse : Toutes les étapes ne nécessitent que $O(\log n)$ cellules mémoire
- Prétendre qu'aucun stockage non autorisé n'a lieu

5.4.8 6. Diplôme

- Terminer par une preuve complète (par exemple par induction complète sur la longueur de w)
- Montrer que la mémoire limitée est **suffisante et fonctionne correctement**

Catégorie: Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 1ae5432b-08b9-464d-a7d7-b20048523913 le 11.05.2025

5.5 FR BUK-1 No.17PALLV1.0: Modèle de champ quantique d'interférence de paquets d'ondes

Temps estimé pour résoudre: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *Un Original*

Un modèle de théorie quantique des champs est donné pour décrire l'interférence de deux paquets d'ondes en mouvement dans un champ scalaire. Développer un modèle théorique et numérique complet qui décrit et analyse la construction, l'évolution et l'interférence des paquets d'ondes dans la théorie quantique des champs. Effectuez les sous-tâches suivantes :

1. **Fondements théoriques**

- Expliquer la quantification d'un champ scalaire libre.
- Dériver l'opérateur de champ $\hat{\phi}(x,t)$.
- Décrivez le comportement du commutateur de $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$.

2. **Construction des états de paquets d'ondes**

- Définir deux distributions d'impulsion gaussiennes orthogonales $f_1(k)$, $f_2(k)$.
- Gérer la condition

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk\right)|0\rangle$$

et le normaliser.

3. **Valeur attendue et interférence**

- Calculer l'espérance mathématique $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
- Identifier les termes croisés et leur contribution aux interférences.
- Visualiser le motif d'interférence en fonction de x, t, δ.

4. **Évolution temporelle et propagation des paquets d'ondes**

- Simuler la propagation de paquets d'ondes dans l'espace et dans le temps.
- Analyser l'influence de la vitesse de groupe et de phase sur la structure d'interférence.
- Discutez de tout phénomène de dispersion qui pourrait se produire.

5. **Extension aux produits pour opérateurs de terrain**

- Calculer la fonction à deux points $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
- Analyser leur structure spatio-temporelle.
- Discuter des implications pour les mesures possibles.

6. **Interprétation expérimentale et validation du modèle**

- Comparez votre modèle avec un interféromètre optique quantique (par exemple Mach-Zehnder).
- Discuter des opérateurs de mesure, de l'effondrement de l'état et de la visibilité des interférences.

7. **Réflexion, analyse de la complexité et limites du modèle**

- Estimez la complexité algorithmique de vos procédures numériques.
- Discuter des extensions possibles (par exemple, champs de spineurs, QED).
- Réfléchir à l'importance et aux limites de la théorie des champs scalaires.

Le travail doit être mathématiquement solide, interprété physiquement et complété par des simulations numériques.

Catégorie: Analyse, Calcul **Difficulté**: YAMI **Étiquettes**:

UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: b30962b2-bc30-497d-bb98-ee335aeacd7f le 11.05.2025

5.6 FR SHK-1 No.23PALLV1.0: Récursivité et combinateurs à virgule fixe dans le calcul lambda non typé

Temps estimé pour résoudre: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *Un Original*

Le calcul lambda non typé avec réduction β complète est donné. Les codages de l'Église pour les nombres naturels, « iszero », « pred » et « mult » sont considérés comme bien connus. Soit le combinateur à point fixe $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ donné ainsi que la fonction :

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Tâche: Démontrer formellement et complètement que $Y\ F$ est une procédure récursive correcte pour calculer les factorielles selon le codage de Church. Les points suivants doivent être détaillés :

1. **Réduction pour argument fixe :** Effectuer une réduction β complète du terme $(Y\ F)\ 3$. Spécifiez toutes les étapes de réduction jusqu'au codage final de l'Église.

2. **Preuve de correction par récurrence :** Effectuez une preuve par récurrence structurelle sur les nombres de Church selon laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$ la condition suivante est remplie :

$$(Y\ F)\ n \rightarrow^{*}_{\beta} \text{fac}_n$$

où fac_n est l'encodage de l'Église de $n!$.

3. **Propriété du point fixe :** Démontrer formellement que $Y\ F = F\ (Y\ F)$, et montrer pourquoi cette expression permet un calcul récursif.

4. **Comparaison avec le Z-Combinator :**

- Définir le combinateur Z.
- Comparer la longueur de réduction de $(Y\ F)\ 3$ et $(Z\ F)\ 3$.
- Discutez dans quels contextes Z devraient être préférés.

Remarque : pour toutes les étapes de réduction, les termes intermédiaires doivent être spécifiés explicitement. N'utilisez pas de simplifications ou de sauts sans justification.

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 118ed990-622b-42c5-85ff-c2c3252befcd le 17.05.2025

5.7 FR SHK-2 No.24PALLV1.0: Rôle des fonctions zêta et gamma dans les fonctions de partition et les énergies du vide de la théorie quantique des champs

Temps estimé pour résoudre: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* *Un Original*

Étudier et démontrer le rôle des fonctions zêta et gamma dans la régularisation de la théorie quantique des champs et la thermodynamique, notamment dans le contexte des fonctions de partition et de l'énergie du vide.

5.7.1 Tâche

Soit un champ quantique scalaire sur un espace-temps compact de périodicité β dans la dimension temporelle (correspondant à une température $T = 1/\beta$) et une dimension spatiale L. Les fréquences propres du champ sont :

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

En utilisant la régularisation zêta, montrer que la fonction de partition thermodynamique

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

peut être calculée régulièrement à l'aide de l'extension analytique de la fonction zêta de Riemann et de la fonction gamma.

5.7.2 Sous-tâches

1. **Dérivation de l'énergie régulée du vide**

Déduire l'expression de l'énergie régulée du vide $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ à l'aide de la **fonction zêta**. Montrer que :

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{et} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

et convertir l'expression en fonction gamma à l'aide de la transformée de Mellin.

2. **Réduction à une fonction zêta d'Epstein**

Montrer que la double somme sur n et m peut être représentée par une fonction zêta d'Epstein. Analyser ses propriétés analytiques.

3. **Dépendance à la température et fonctions thermodynamiques**

Utiliser l'expression régularisée pour déduire l'énergie libre F(bêta), l'énergie interne U(bêta) et l'entropie S(bêta). Montrer comment la fonction gamma apparaît dans le développement asymptotique pour les températures élevées et basses.

4. **Comparaison avec l'énergie de Casimir**

Démontrer que la limite à température nulle de la fonction de partition se transforme en énergie de Casimir et que la régularisation donne exactement la même forme que la méthode zêta-Casimir classique.

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: NUM **Étiquettes**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: 5377267d-9aaa-4a14-86dc-4182c4a66fca le 24.05.2025

5.8 FR SHK-3 No.25PALLV1.0: Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussien

Temps estimé pour résoudre: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Un Original*

5.8.1 Tâche : Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussiennes

Étant donné une particule mécanique quantique unidimensionnelle avec la fonction d'onde dans l'espace de position :

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Cette fonction décrit une particule stationnaire et en mouvement libre avec une distribution spatiale gaussienne.

5.8.2 ***Sous-tâches***

5.8.3 Normalisation de la fonction d'onde

Déterminer la constante de normalisation A telle que la fonction d'onde soit normalisée, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

5.8.4 Transformation de Fourier dans l'espace des impulsions

Calculer la représentation spatiale de l'impulsion $\phi(p)$ de la fonction d'onde en utilisant la transformation de Fourier selon :

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complétez l'intégration et indiquez la fonction résultante $\phi(p)$ sous forme explicite.

5.8.5 Le principe d'incertitude de Heisenberg

Déterminer les écarts types σ_x et σ_p des distributions de position et d'impulsion, respectivement :

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

et montrer que le produit de ces diffusions satisfait le principe d'incertitude de Heisenberg :

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

5.8.6 Interprétation physique des cas limites

Discutez qualitativement du cas limite physique $a \to 0$. Qu'arrive-t-il à la représentation de l'espace d'impulsion $\phi(p)$ et comment ce cas limite doit-il être interprété physiquement ? Se référer aux concepts de localisation et d'incertitude d'impulsion.

5.8.7 ***Un avis :***

Cette tâche convient également à l'évaluation numérique et à la représentation graphique en Python ou MATLAB. En option, la transformée de Fourier peut également être vérifiée symboliquement à l'aide d'outils logiciels appropriés (par exemple, SymPy ou Mathematica).

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 1cf99a90-2b19-471b-9f08-3371ac30d6c4 le 24.05.2025

5.9 FR SHK-1 No.26-1PALLV1.0: Isométries dans l'espace euclidien de dimension n

Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est appelée une **isométrie** si elle conserve la distance euclidienne entre deux points, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

5.9.1 Exercices :

1. **Isométries linéaires :**

Montrez que toute isométrie linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ peut être représentée par une matrice orthogonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, c'est-à-dire $T(x) = Ax$ avec $A^\top A = I$.

2. **Isométries affines :**

Déterminez toutes les isométries $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui sont également **affines**, donc de la forme $f(x) = Ax + b$, où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, et A est orthogonale.

3. **Conservation du produit scalaire :**

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs unitaires. Montrez que toute isométrie f, qui est aussi linéaire, conserve le produit scalaire :

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construction d'une isométrie particulière :**

Donnez un exemple d'une isométrie non linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui n'est pas une transformation linéaire mais qui conserve néanmoins les distances. Montrez que f est bien isométrique.

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Calcul, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Moyen **Étiquettes**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 9e3d5cfc-ad12-41ae-a13b-228b0eafc565 le 31.05.2025

5.10 FR SHK-1 No.26-2PALLV1.0: Tâche de preuve: caractérisation des applications isométriques dans $\mathbb{R}^n$

Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie, c'est-à-dire :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

À montrer : Toute isométrie f de $\mathbb{R}^n$ est soit une application affine de la forme $f(x) = Ax + b$, où A est une matrice orthogonale, soit elle peut être obtenue par composition de telles applications avec des réflexions ou des translations. **Remarque pour approfondir (facultatif) :** Montrez que l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^n$ forme un groupe pour la composition —le *groupe euclidien* $\mathrm{E}(n)$.

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Calcul, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Moyen **Étiquettes**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: f7477982-9df6-482c-bbeb-ea0acd6e7fc2 le 31.05.2025

5.11 FR 1 No.27PALLV1.0: Isométries dans l'espace euclidien de dimension n et tâche de preuve : caractérisation des applications isométriques dans $\mathbb{R}^n$

Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une **isométrie** si elle préserve la distance euclidienne entre deux points, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

5.11.1 Exercices :

1. **Isométries linéaires :**

Montrez que toute isométrie linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ peut être représentée par une matrice orthogonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, c'est-à-dire que $T(x) = Ax$ avec $A^\top A = I$.

2. **Isométries affines :**

Déterminez toutes les isométries $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui sont également **affines**, c'est-à-dire de la forme $f(x) = Ax + b$, où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ et A est orthogonale.

3. **Préservation du produit scalaire :**

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs unitaires. Montrez que toute isométrie f linéaire préserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construction d'une isométrie particulière :**

Donnez un exemple d'isométrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ non linéaire, qui ne soit pas une application linéaire mais qui préserve néanmoins les distances. Montrez que f est bien une isométrie.

5.11.2 Exercice de preuve : caractérisation des isométries dans $\mathbb{R}^n$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie, c'est-à-dire :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

5.11.3 À montrer :

Toute isométrie f dans $\mathbb{R}^n$ est soit une application affine de la forme $f(x) = Ax + b$, où A est une matrice orthogonale, soit elle peut se décomposer en composition d'applications de ce type avec des réflexions ou des translations.

5.11.4 Remarque pour approfondissement (optionnel) :

Montrez que l'ensemble de toutes les isométries dans $\mathbb{R}^n$ forme un groupe pour la composition —appelé **groupe euclidien** $\mathrm{E}(n)$.

Catégorie: Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Moyen **Étiquettes**:

UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 918081ce-1154-48cd-8b4c-9f6b81fd8296 le 07.06.2025

5.12 FR 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Contrôle optimal d'un processus diffusif

Temps estimé pour résoudre: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Un Original*

5.12.1 Enunciato

Questo esercizio esplora l'applicazione di concetti avanzati di analisi funzionale e calcolo delle variazioni a un problema di controllo ottimale, con forti collegamenti al controllo quantistico e a diverse discipline di ingegneria.

5.12.2 Definizione del problema

Consideriamo un sistema unidimensionale il cui "stato" $y(x,t)$ (ad esempio una distribuzione di temperatura o la concentrazione di un diffusore) evolve in un dominio spaziale $\Omega = [0, L]$ e in un intervallo temporale $t \in [0, T]$. L'evoluzione è descritta da un'equazione alle derivate parziali di tipo diffusione semplificata, con un parametro di controllo dipendente dal tempo $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

Condizioni al contorno:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, per $t \in (0, T]$

e **condizione iniziale**:

- $y(x,0) = y_0(x)$, per $x \in [0, L]$

Qui, $\alpha > 0$ è una costante di diffusione e $g(x)$ una funzione spaziale data che descrive l'effetto del controllo. Si assume che $y_0(x)$ e $g(x)$ siano sufficientemente regolari. L'obiettivo è trovare un **controllo ottimale** $u(t) \in U_{\text{ad}}$, dove

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\text{max}}\}$$

è l'insieme dei controlli ammissibili. La **funzione costo** è definita da:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

dove $y_{\text{desired}}(x)$ è lo stato desiderato al tempo finale T e $\lambda > 0$ è un parametro di regolarizzazione che penalizza l'energia del controllo.

5.12.3 Parte 1: Analisi di base del sistema

5.12.4 1. Esistenza e unicità della soluzione

Spiegare concettualmente perché, per un controllo dato $u(t)$, così come le condizioni iniziali e al contorno imposte, ci si aspetta una soluzione unica $y(x,t)$ del problema PDE. Fare riferimento alle proprietà necessarie (ad esempio, limitatezza, continuità) e agli spazi funzionali appropriati per soluzioni deboli (es. spazi di Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, ecc.).

5.12.5 2. Effetto dei vincoli sul controllo

Discutere come il vincolo $0 \leq u(t) \leq U_{\text{max}}$ in U_{ad} influenzi la natura del problema di ottimizzazione. Confrontare con il caso senza vincoli $U_{\text{ad}} = C([0, T])$. Spiegare il ruolo della convessità e come i problemi di ottimizzazione vincolati portano a condizioni di ottimalità diverse.

5.12.6 Parte 2: Analisi variazionale e condizioni di ottimalità

5.12.7 1. Derivata di Gateaux della funzione costo

Supponendo che $J(u)$ sia differenziabile, derivare la **derivata di Gateaux** in un punto $u_0(t)$ nella direzione $h(t)$. **Suggerimento**: Sia $y_h(x,t)$ la soluzione del PDE per il controllo $u_0(t) + \varepsilon h(t)$. Calcolare:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

5.12.8 2. Ruolo del sistema aggiunto (adjoint)

Spiegare in termini generali la funzione dello stato aggiunto nei problemi di ottimizzazione PDE. Come semplifica il calcolo del gradiente della funzione costo? Descrivere il legame con la sensibilità dello stato $y(x,t)$ rispetto al costo.

5.12.9 3. Prima condizione necessaria di ottimalità

Formulare la **prima condizione necessaria di ottimalità** (disuguaglianza variazionale) che deve soddisfare il controllo ottimale u

5.12.9 Parte 3: Argomenti avanzati e comportamento limite

5.12.10 1. Comportamento ottimale del controllo in funzione della regolarizzazione

Discutere cosa succede al termine di regolarizzazione

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

quando $\lambda \to 0^+$. Quali sono le implicazioni per il controllo ottimale u_λ

5.12.10 2. Rigore epsilon-delta

Supponendo che $u^{\cdot}(t)$ sia noto come ottimale, spiegare come la definizione delle soglie epsilon-delta si applica per mostrare che $y(x,T)$ è "arbitrariamente vicino" a $y_{\text{desired}}(x)$ nella norma L^2. Descrivere i ruoli delle seguenti quantità:

- ε: la vicinanza desiderata dello stato finale allo stato obiettivo
- δ: la vicinanza richiesta del controllo o del tempo finale (es. $|u - u^{\cdot}| < \delta$) per garantire tale vicinanza

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse, Construction et Conception, Interprétation **Difficulté**: YAMI **Étiquettes**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 021c742f-9fd5-4890-8583-47b8cb9947a6 le 21.06.2025

L'uso di strumenti come calcolatrici, formule, fogli di calcolo e strumenti digitali è consentito solo alle condizioni espressamente indicate. Gli strumenti consentiti devono essere dichiarati in anticipo per gli esami e approvati dal sorvegliante. Qualsiasi strumento non autorizzato è vietato e può comportare la squalifica. Durante lo svolgimento di un compito o di un esame, l'uso di materiali aggiuntivi o assistenza esterna è vietato, salvo espressa autorizzazione. Il rispetto di queste regole garantisce che tutti i partecipanti lavorino in condizioni eque e paritarie. A partire da un punteggio Nam di 3, tutti i partecipanti possono utilizzare tutti gli strumenti possibili.

Le violazioni di queste regole possono avere gravi conseguenze. In particolare negli esami ufficiali, l'uso di strumenti non autorizzati può portare all'esclusione immediata dall'esame. In casi ripetuti o particolarmente gravi, può essere persino imposta una sospensione definitiva dall'esame. Il rispetto di queste regole garantisce che tutti i partecipanti lavorino in condizioni eque e paritarie e che l'integrità degli esami sia preservata.

Questo foglio di lavoro serve allo scopo dell'esercitazione e può essere presentato ufficialmente a determinate condizioni. Allo stesso tempo, dovrebbe essere considerato un documento non ufficiale perché è stato creato senza supervisione amministrativa.

1. **Etichettatura corretta** - Il documento deve essere chiaramente contrassegnato come foglio di lavoro per esercizi.
2. **Completezza e formattazione** - Deve essere in un formato riconosciuto (ad esempio, PDF o copia stampata) e contenere tutti i contenuti richiesti.
3. **Presentazione tempestiva** - La presentazione deve essere effettuata entro le scadenze specificate.
4. **Approvazione da parte dell'autorità competente** - Il riconoscimento ufficiale richiede l'approvazione dell'organismo esaminatore o amministrativo competente.
5. **Nessuna assistenza esterna** - Il documento deve essere creato esclusivamente dalla persona interessata, senza assistenza esterna.
6. **Nessuna garanzia di valutazione** - Poiché questo foglio è stato preparato senza supervisione amministrativa, non vi è alcun obbligo di considerarlo per la valutazione ufficiale.
7. **Nessuna responsabilità** - L'autore non si assume alcuna responsabilità per l'accuratezza o la completezza del contenuto.
8. **Nessuno status ufficiale** - Questo documento non è un documento ufficiale e non ha lo stesso status legale di un documento rilasciato ufficialmente.
9. **Nessuna garanzia di riconoscimento** - L'invio di questo documento non garantisce il riconoscimento o la considerazione ufficiale da parte di alcuna autorità o istituzione.
10. **Nessuna garanzia di riservatezza** - La protezione dei dati personali e la riservatezza non possono essere garantite.
11. **Nessuna garanzia di sicurezza** - La sicurezza del contenuto e dei dati in esso contenuti non è garantita.
12. **Nessuna garanzia di autenticità** - L'autenticità delle informazioni o dei dati contenuti nel documento non può essere confermata.
13. **Nessuna garanzia di integrità** - L'autenticità o l'integrità del contenuto non possono essere garantite.
14. **Nessuna garanzia di validità** - Il documento potrebbe contenere contenuti la cui validità legale o tecnica non può essere confermata.
15. **Nessuna garanzia di affidabilità** - L'accuratezza, la completezza o l'affidabilità delle informazioni non possono essere garantite.

Tutto si basa sulla fiducia, quindi buon divertimento.

6.1 IT 1 No.26-1PALLV1.0: Isometrie nello spazio euclideo di dimensione n

Tempo stimato per la risoluzione: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Originale*

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice una **isometria** se conserva la distanza euclidea tra due punti, cioè per tutti $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

6.1.1 Esercizi:

1. **Isometrie lineari:**

Mostra che ogni isometria lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ può essere rappresentata da una matrice ortogonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cioè $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

2. **Isometrie affini:**

Determina tutte le isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che sono anche **affini**, cioè della forma $f(x) = Ax + b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A ortogonale.

3. **Conservazione del prodotto scalare:**

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ due vettori unitari. Mostra che ogni isometria f lineare conserva il prodotto scalare:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Costruzione di un'isometria speciale:**

Fornisci un esempio di un'isometria non lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che non è una trasformazione lineare ma che conserva comunque le distanze. Mostra che f è effettivamente isometrica.

Categoria: Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Calcolo, Costruzione e Progettazione **Difficoltà**: Più Medio **Etichette**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 4d950882-f4cd-4549-b43a-547494aabfcb il 31.05.2025

6.2 IT 1 No.26-2PALLV1.0: Problema di dimostrazione: caratterizzazione delle isometrie in $\mathbb{R}^n$

Tempo stimato per la risoluzione: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Originale*

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria, cioè:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{per tutti } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Da dimostrare: Ogni isometria f in $\mathbb{R}^n$ è una trasformazione affine della forma $f(x) = Ax + b$, dove A è una matrice ortogonale, oppure può essere scritta come composizione di tali trasformazioni con riflessioni o traslazioni. **Suggerimento per approfondimento (opzionale):** Mostra che l'insieme di tutte le isometrie in $\mathbb{R}^n$ forma un gruppo rispetto alla composizione —il cosiddetto *gruppo euclideo* $\mathrm{E}(n)$.

Categoria: Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Calcolo, Costruzione e Progettazione **Difficoltà**: Più Medio **Etichette**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 1a2cdc82-23b6-400a-8696-ac2ff5453644 il 31.05.2025

6.3 IT 1 No.27PALLV1.0: Isometrie nello spazio euclideo di dimensione n e compito di prova: caratterizzazione delle applicazioni isometriche in $\mathbb{R}^n$

Tempo stimato per la risoluzione: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Originale*

Una mappa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si chiama **isometria** se preserva la distanza euclidea tra due punti, cioè per tutti $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

6.3.1 Esercizi:

1. **Isometrie lineari:**

Dimostrare che ogni isometria lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ può essere rappresentata da una matrice ortogonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cioè $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

2. **Isometrie affini:**

Determinare tutte le isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che sono anche **affini**, cioè della forma $f(x) = Ax + b$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A è ortogonale.

3. **Conservazione del prodotto scalare:**

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ due vettori unitari. Dimostrare che ogni isometria f, che è anche lineare, conserva il prodotto scalare, cioè:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Costruzione di un'isometria speciale:**

Fornire un esempio di isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ non lineare che non sia un'applicazione lineare ma che comunque preservi le distanze. Mostrare che f è effettivamente un'isometria.

6.3.2 Esercizio di dimostrazione: caratterizzazione delle applicazioni isometriche in $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria, cioè:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

6.3.3 Da dimostrare:

Ogni isometria f in $\mathbb{R}^n$ è o un'applicazione affine della forma $f(x) = Ax + b$, dove A è una matrice ortogonale, oppure può essere rappresentata come composizione di tali applicazioni con riflessioni o traslazioni.

6.3.4 Nota per approfondimento (opzionale):

Dimostrare che l'insieme di tutte le isometrie in $\mathbb{R}^n$ forma un gruppo rispetto alla composizione —il cosiddetto **gruppo euclideo** $\mathrm{E}(n)$.

Categoria: Dimostrazione, Costruzione e Progettazione **Difficoltà**: Più Medio **Etichette**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 72d8d05b-f04a-497b-b5a2-c730a4f3f72d il 07.06.2025

6.4 IT 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Controllo ottimale di un processo diffusivo

Tempo stimato per la risoluzione: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Un Originale*

6.4.1 Enunciato del problema

Questo esercizio tratta l'applicazione di concetti avanzati di analisi e calcolo delle variazioni a un problema di controllo ottimale, con forti analogie con il controllo quantistico e diversi ambiti di ingegneria.

6.4.2 Definizione del problema

Consideriamo un sistema unidimensionale il cui **stato**

$$y(x,t)$$

(ad esempio temperatura o concentrazione) è definito sul dominio $\Omega = [0, L]$ e nel tempo

$$t \in [0,T]$$

. Lo stato è governato da un processo di diffusione parziale dove il controllo

$$u(t)$$

dipende solo dal tempo:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad \text{per } (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

Condizioni al contorno:

- $$y(0,t) = 0$$
- $$y(L,t) = 0$$
  ,
  $$t \in (0,T]$$

Condizione iniziale:

- $$y(x,0) = y_0(x)$$
  ,
  $$x \in [0,L]$$

Qui $\alpha > 0$ è la costante di diffusione, e

$$g(x)$$

è una funzione data che descrive l'influenza spaziale del controllo. Si assume che

$$y_0(x)$$

e

$$g(x)$$

siano sufficientemente regolari. L'obiettivo è trovare un **controllo ottimale**

$$u(t) \in U_{\text{ad}}$$

, dove

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

è l'insieme ammissibile dei controlli, limitati tra 0 e un valore massimo

$$U_{\max}$$

. Il controllo ottimale minimizza la **funzione di costo**:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x, T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

dove

$$y_{\text{desired}}(x)$$

è lo stato desiderato all'istante finale

$$T$$

, e $\lambda > 0$ è un parametro di regolarizzazione che penalizza grandi valori del controllo.

6.4.3 Parte 1: Analisi di base del sistema

6.4.4 1. Esistenza e unicità

Spiega concettualmente perché, dato un controllo

$$u(t)$$

e condizioni iniziali e al contorno specificate, esiste una soluzione unica

$$y(x,t)$$

al problema alle derivate parziali. Discuta le proprietà richieste, come la limitatezza, continuità e gli spazi funzionali coinvolti (ad esempio spazi di Sobolev

$$H_0^1(\Omega)$$

,

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

).

6.4.5 2. Impatto delle restrizioni sul controllo

Discuti l'effetto del vincolo

$$0 \leq u(t) \leq U_{\max}$$

sulla natura del problema di ottimizzazione. Confronta con il caso senza vincoli, dove

$$U_{\text{ad}} = C([0,T])$$

. Spiega il ruolo della convessità e come i vincoli modificano le condizioni di ottimalità.

6.4.6 Parte 2: Analisi variazionale e condizioni di ottimalità

6.4.7 1. Calcolo della derivata di Gateaux della funzione di costo

Supponiamo che

$$J(u)$$

sia differenziabile, e deriva la **derivata di Gateaux** in

$$u_0(t)$$

nella direzione

$$h(t)$$

. **Nota:** Sia

$$y_h(x,t)$$

la soluzione corrispondente al controllo

$$u_0(t) + \varepsilon h(t)$$

. Calcola:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

6.4.8 2. Ruolo del sistema aggiunto (adjoint)

Spiega in generale l'utilità del sistema aggiunto nei problemi di ottimizzazione con vincoli PDE. Come permette di calcolare il gradiente della funzione di costo? Descrivi il legame con la sensibilità dello stato

$$y(x, t)$$

.

6.4.9 3. Prima condizione necessaria di ottimalità

Formula la **prima condizione necessaria di ottimalità** (disuguaglianza variazionale) che il controllo ottimale

$$u$$

deve soddisfare. Discuti come essa lega il gradiente di

$$J(u)$$

e la geometria di

$$U_{\text{ad}}$$

per garantire che

$$u(t) \in U_{ad}$$

deve soddisfare. Discuti come essa lega il gradiente di

$$J(u)$$

e la geometria di

$$U_{\text{ad}}$$

per garantire che

$$u(t) \in U_{ad}$$

deve soddisfare. Discuti come essa lega il gradiente di

$$J(u)$$

e la geometria di

$$U_{\text{ad}}$$

per garantire che

$$u_{(t)} \in U_{ad}$$

deve soddisfare. Discuti come essa lega il gradiente di

$$J(u)$$

e la geometria di

$$U_{\text{ad}}$$

per garantire che

$$u(t)$$

minimizzi la funzione di costo.

6.4.10 Parte 3: Argomenti avanzati e comportamento limite

6.4.11 1. Comportamento dell'ottimalità con la regolarizzazione

Analizza cosa succede al termine di regolarizzazione

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

quando $\lambda \to 0^+$. Quali sono le conseguenze sul controllo ottimale

$$u$$

e sullo stato finale

$$y(x, T)$$

? La successione $\{u_\lambda(t)$ e sullo stato finale

$$y(x, T)$$

? La successione $\{u_{\lambda(t)}$ e sullo stato finale

$$y(x,T)$$

? La successione $\{u_{\lambda(t)}$ e sullo stato finale

$$y(x,T)$$

? La successione $\{u_\lambda\}$ è una successione di Cauchy o converge uniformemente?

6.4.12 2. Precisione epsilon-delta

Supponi che

$$u^{\cdot}(t)$$

sia un ottimo noto. Spiega, usando la definizione di limite epsilon-delta, come dimostrare che

$$y(x,T)$$

può essere arbitrariamente vicino a

$$y_{\text{desired}}(x)$$

in norma

$$L^2$$

. Specifica i ruoli di:

- ε: la precisione desiderata per lo stato finale
- δ: la distanza tollerata nel controllo o nel tempo finale per garantire questa precisione

Categoria: Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Analisi, Costruzione e Progettazione, Interpretazione **Difficoltà**: Lato Oscuro **Etichette**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: df010f16-a57e-4c69-aa52-94c094acfec0 il 21.06.2025

電卓、数式集、スプレッドシート、デジタルツールなどの補助機器の使用は、明示的に規定された条件の下でのみ許可されます。許可された補助機器は、試験前に申告し、試験管理者の承認を得る必要があります。許可されていない補助機器の使用は禁止されており、失格となる場合があります。課題または試験に取り組む際は、明示的に許可されている場合を除き、追加資料や外部からの支援を受けることは禁止されています。これらの規則を遵守することで、すべての参加者が公平かつ平等な条件で試験に取り組むことができます。Nam スコアが 3 の場合、すべての参加者は利用可能なすべての補助機器を使用できます。

これらの規則に違反すると、重大な結果を招く可能性があります。特に公式評価において、許可されていない補助機器の使用は、試験からの即時除外につながる可能性があります。繰り返し使用された場合、または特に深刻な場合は、試験への永久的な参加禁止が科されることもあります。これらの規則を遵守することで、すべての参加者が公平かつ平等な条件で試験に取り組むことができ、評価の完全性が維持されます。

このシートは演習の目的を果たすものであり、一定の条件の下で公式に提出することができます。同時に、この文書は行政の監督なしに処理されたため、非公式文書とみなされるべきです。

1. **正しいラベル付け** - 文書には演習シートであることが明確に示されている必要があります。
2. **完全性と書式** - 文書は認められた形式（例:PDF または印刷物）で、必要な内容がすべて含まれている必要があります。
3. **期限内の提出** - 提出は指定された期限内に行う必要があります。
4. **責任機関による承認** - 公式認定には、関係する試験機関または行政機関の承認が必要です。
5. **外部からの支援なし** - 文書は、外部からの支援なしに、関係者のみによって作成されている必要があります。
6. **成績保証なし** - このシートは管理監督なしに作成されたため、公式の成績評価の対象としない義務があります。
7. **免責事項** - 著者は、内容の正確性または完全性について一切の責任を負いません。
8. **公式性なし** - この文書は公式文書ではなく、公式に発行された文書と同じ法的地位を有しません。
9. **承認保証なし** - この文書を提出しても、いかなる当局または機関による承認または公式な審査も保証されません。
10. **機密保持保証なし** - 個人情報の保護および機密保持は保証されません。
11. **セキュリティ保証なし** - 内容およびそこに含まれるデータのセキュリティは保証されません。
12. **真正性の保証なし** - 文書内の情報またはデータの真正性は確認できません。
13. **完全性の保証なし** - 文書に含まれるコンテンツの真正性または完全性は保証できません。
14. **妥当性の保証なし** - 文書には、法的または技術的な妥当性を確認できないコンテンツが含まれている可能性があります。
15. **信頼性の保証なし** - 情報の正確性、完全性、または信頼性は保証できません。

すべては信頼に基づいています。楽しんでください。

7.1 JP KTB-1 No.14PALLV1.0: 適応型素数判定の最適複雑度

解決までの推定時間: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* オリジナル

問題適応型素数判定法とは、自然数 $n \in \mathbb{N}$ が素数かどうかを判定する際に、確率的手法と決定論的手法を段階的に選択するアルゴリズムです。例としては、Miller-Rabin 法、Baillie-PSW 法、AKS 法などが挙げられます。以下の特性を持つ適応型素数判定法を開発し、解析してください。

- アルゴリズムは確率的検定（例:Miller-Rabin 法）から開始します。
- この検定に複数回合格した場合、システムは境界条件において決定論的サブ検定（例:Lucas 法、ECPP 法、または簡約 AKS レベル）を実行します。
- 手法の全体的な複雑さは、n のサイズと想定される誤り確率 ε に依存します。

課題: これらの手法の漸近的に最適な組み合わせ（証明付き）を見つけ、ランダムに選択された数 $n \in [1, N]$ の現実的な分布を仮定し、「素数」と「素数でない」の判定にかかる最小の期待実行時間を計算してください。**目標:**

- **誤差制御適応的複雑性** モデルを解析してください。
- 最適な手法の実行時間（期待値）を記述する関数クラス $T(n, \varepsilon)$ を開発してください。
- 作成した解を、Miller-Rabin（多重）、Baillie-PSW、決定論的 AKS などのよく知られた手法と比較してください。

カテゴリー: 解決と解く, 分析, 証明, 構築と設計 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-624352343133 日付 05 月 11 日 2025 年

7.2 JP SHB-3 No.15PALLV1.0: 一般化再帰多項式の解の構造

解決までの推定時間: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* オリジナル

再帰的な定義が与えられます。

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x)$$

初期値は $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$、$a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ である。分析:

- 閉じた形式の条件
- ゼロの構造
- 古典多項式（例: チェビシェフ多項式、ルジャンドル多項式、エルミート多項式）との関連

7.2.1 ソリューション構造（一般的な手順）

7.2.2 *1.* **再帰の分析**

- 再帰次数 k を決定する
- 係数 $a_i(x)$ を分類する
- 絶え間ない？リニア？一般多項式?

7.2.3 *2.* **特性多項式**

- 線形再帰に類似した変換を導入します。
- 基底 $P_0, \ldots, P_k$ の線形独立性を考慮する
- 特性多項式（定数 a_i）で解を求める

7.2.4 *3.* **行列法を用いた表現**

- 再帰を行列システムとして記述します。

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

ベクトル $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- $A(x)$ の固有値と固有ベクトルを調べる

7.2.5 *4.* **有名な家族との比較**

- 多項式を既知のクラス (直交、対称など) に分類できるかどうかを確認します。

7.2.6 *5.* **ゼロ構造**

- 数値手法を使用してゼロを解析する
- 収束挙動を調べる（例:$n \to \infty$ の場合）

7.2.7 *6.* **記号的な解決法（可能な場合）**

- 閉じた形式を検索する（例: 生成関数、微分方程式への変換による）
- 基底関数または組み合わせ構造を介して明示的な表現を見つける

カテゴリー: 証明, 分析 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 0a989e7c-66a7-4a60-9a4a-b345009f7913 日付 11.05.2025

7.3 JP SHKS-1 No.16PALLV1.0: 限られたメモリを持つチューリングマシン - 正しさの証明

解決までの推定時間: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* オリジナル

作業テープが $O(\log n)$ 個のメモリセルに制限されているチューリングマシン M_b が与えられます。M_b が特定の言語 L を正しく決定することを示します。例えば。:

$$L = \{w \in \{a,b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

または、メモリ制約が関係するその他の特定の言語。

7.3.1 追加情報

- チューリングマシン（TM）の定義と限られたメモリ（例: 対数空間）
- LBA（線形有界オートマトン）などの形式モデル
- 正規言語または文脈自由言語との比較
- ブール論理と不変メソッド
- 標準的な論理的証明（例: 帰納法、背理法）
- 紙やメモに描いたスケッチ

7.3.2 要件

7.3.3 ***1.*** **形式仕様**

- 有界 TMM_b を正式に定義する:
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- 制限: 動作バンドサイズ $\leq c \cdot \log n$

7.3.4 ***2.*** **言語** L について説明してください

- $L \in \mathsf{L}$（対数空間で決定可能）であることを証明してください。
- 例:
- シンボルの数のバランス（例:a と b の数が等しい）
- 空間最適化による単純な規則パターンの認識

7.3.5 ***3.*** **建設/シミュレーション**

- メモリをほとんど使用せずに TM 戦略を説明します。
- ブックマーク（ポインタテクニック）
- 2 パス手順
- 作業テープ上の 2 進数表現のカウンタ

7.3.6 ***4.*** **正確性**

- 不変性またはシミュレーションを使用する:
- 各ステップで不変条件が保持される（例: 等価性のカウント）
- 表示: TM が受け入れる場合、$w \in L$ です。$w \in L$ ならば TM は

7.3.7 **5. 空間計算量を証明する**

- 分析: すべてのステップで必要なメモリセルは $O(\log n)$ 個のみ
- 不正な保管は行われていないと主張する

7.3.8 **6. ディプロマ**

- 完全な証明で終了する（例えば、w の長さにわたる完全な帰納法によって）
- 限られたメモリが**十分であり、正しく動作していることを示す**

カテゴリー: 証明, 構築と設計 **難易度**: ハード **タグ**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 1fd4436b-f494-4cb6-a919-8784410bc93c 日付 11.05.2025

7.4 JP BUK-1 No.17PALLV1.0: 波束干渉の量子場モデル

解決までの推定時間: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* オリジナル

スカラー場における 2 つの移動する波束の干渉を記述するために、量子場理論モデルが与えられます。量子場理論における波束の構築、進化、干渉を記述および分析する完全な理論的数値モデルを開発します。次のサブタスクを完了します。

1. **理論的基礎**

- 自由スカラー場の量子化について説明します。
- 体演算子 $\hat{\phi}(x,t)$ を導出します。
- $\hat{a}_k$、$\hat{a}_k^\dagger$ の交換子の振る舞いを説明します。

2. **波束状態の構築**

- ２つの直交ガウス運動量分布 $f_1(k)$、$f_2(k)$ を定義する。
- 状態を管理する

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk\right)|0\rangle$$

そしてそれを正規化します。

3. **期待値と干渉**

- 期待値 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$ を計算します。
- 交差項とそれらが干渉に与える影響を特定します。
- 干渉パターンを x、t、δ の関数として視覚化します。

4. **時間発展と波束伝播**

- 空間と時間における波束の伝播をシミュレートします。
- グループ速度と位相速度が干渉構造に与える影響を分析します。
- 発生する可能性のある分散現象について説明します。

5. **フィールドオペレータ製品への拡張**

- 2 点関数 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$ を計算します。
- 時空間構造を分析します。
- 可能な測定の意味について話し合います。

6. **実験的解釈とモデルの検証**

- モデルを量子光干渉計 (例: マッハ・ツェンダー) と比較します。
- 測定演算子、状態の崩壊、干渉の可視性について説明します。

7. **反射、複雑性分析、モデルの境界**

- 数値手順のアルゴリズムの複雑さを推定します。
- 可能な拡張について議論する（例: スピノル場、QED）。
- スカラー場理論の重要性と限界について考察します。

作業は数学的に正確で、物理的に解釈され、数値シミュレーションによって補完される必要があります。

カテゴリー: 分析, 計算 **難易度**: ダークサイド **タグ**:

UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: fb2cb262-d694-4a23-a1a6-5a20b512ebea 日付 11.05.2025

7.5 JP SHK-1 No.23PALLV1.0: 型なしラムダ計算における再帰性と固定小数点コンビネータ

解決までの推定時間: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* オリジナル

完全な β-減算を伴う型なしラムダ計算が与えられます。自然数の Church エンコーディング、「iszero」、「pred」、「mult」はよく知られていると考えられています。固定小数点コンビネータ $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ と関数が与えられているとします。

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

タスク: $Y\ F$ がチャーチ符号化に従って階乗を計算する正しい再帰手順であることを形式的かつ完全に証明します。以下の点を詳細に示す必要があります。

1. **固定引数の縮約:** 項 $(Y\ F)\ 3$ の完全な β 縮約を実行します。最終的な Church エンコーディングまでのすべての削減手順を指定します。

2. **帰納法による正しさの証明:** すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して以下が成り立つことをチャーチ数に対して構造的帰納法で証明します。

$$(Y\ F)\ n \rightarrow_\beta^* \text{fac}_n$$

ここで、fac_n は $n!$ のチャーチ符号化です。

3. **不動点特性:** $Y\ F = F\ (Y\ F)$ であることを正式に証明し、この式が再帰計算を可能にする理由を示します。

4. **Z-Combinator との比較:**

- Z コンビネータを定義します。
- $(Y\ F)\ 3$ と $(Z\ F)\ 3$ の短縮長を比較します。
- どのようなコンテキストで Z を優先すべきかを議論します。

注: すべての削減手順において、中間項を明示的に指定する必要があります。正当な理由なく単純化やジャンプを使用しないでください。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード **タグ**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 27bbd441-79cc-47ec-8e15-375050f07157 日付 17.05.2025

7.6 *JP SHK-2 No.24PALLV1.0:* 量子場の理論における分配関数と真空エネルギーにおけるゼータ関数とガンマ関数の役割

解決までの推定時間: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* オリジナル

量子場の理論における正則化と熱力学、特に分配関数と真空エネルギーの文脈におけるゼータ関数とガンマ関数の役割を調査し、証明する。

7.6.1 課題

時間次元（温度 $T = 1/\beta$ に対応）と空間次元 L に周期性 β を持つコンパクト時空上のスカラー量子場が与えられる。場の固有振動数は、次の通りです。

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

ゼータ正規化を用いて、熱力学的分配関数

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

が、リーマンゼータ関数とガンマ関数の解析的拡張を用いて正規に計算できることを示しなさい。

7.6.2 サブタスク

1. **制御真空エネルギーの導出**

ゼータ関数を用いて、制御真空エネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ の式を導出せよ。以下の式が成り立つことを示せ。

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

そして、メリン変換を用いてこの式をガンマ関数形式に変換せよ。

2. **エプスタインゼータ関数への縮約**

n と m の二重和がエプスタインゼータ関数として表せることを示せ。その解析的性質を解析せよ。

3. **温度依存性と熱力学関数**

正規化表現を用いて自由エネルギー F(β)、内部エネルギー U(β)、エントロピー S(β) を導出せよ。ガンマ関数が高温および低温における漸近展開にどのように現れるかを示しなさい。

4. **カシミールエネルギーとの比較**

分配関数の零温度極限がカシミールエネルギーに変換されること、そして正規化によって古典的なゼータ-カシミール法と全く同じ形が得られることを証明せよ。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: fa54f474-2db5-47ee-a259-b74482490238 日付 24.05.2025

7.7 JP SHK-3 No.25PALLV1.0: ガウス波束の運動量空間表現

解決までの推定時間: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* オリジナル

7.7.1 課題*:* ガウス波束の運動量空間表現

位置空間に波動関数を持つ 1 次元の量子力学粒子が与えられます。

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

この関数は、ガウス空間分布を持つ、静止した自由に移動する粒子を記述します。

7.7.2 **サブタスク**

7.7.3 波動関数の正規化

波動関数が正規化されるように正規化定数 A を決定します。つまり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

7.7.4 運動量空間へのフーリエ変換

フーリエ変換を用いて波動関数の運動量空間表現 $\phi(p)$ を次のように計算します。

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

積分を完了し、結果の関数 $\phi(p)$ を明示的な形式で述べます。

7.7.5 ハイゼンベルクの不確定性原理

位置分布と運動量分布の標準偏差 σ_x と σ_p をそれぞれ決定します。

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

これらの散乱の積がハイゼンベルクの不確定性原理を満たすことを示す。

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

7.7.6 極限ケースの物理的解釈

物理的な極限ケース $a \to 0$ について定性的に議論します。運動量空間表現 $\phi(p)$ では何が起こりますか? また、この極限ケースは物理的にどのように解釈されますか? 局所化とインパルス不確実性の概念を参照してください。

7.7.7 **お知らせ*:***

このタスクは、Python または MATLAB での数値評価とグラフィカル表現にも適しています。オプションとして、適切なソフトウェアツール (SymPy や Mathematica など) を使用して、フーリエ変換を記号的に検証することもできます。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード ***タグ***:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 572ebf6c-38dd-4582-ae7a-cb1aa9c89bc6 日付 24.05.2025

7.8 JP 1 No.26-1PALLV1.0: n 次元ユークリッド空間における等長変換

解決までの推定時間: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* オリジナル

写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して次を満たすとき、**等距写像（Isometry）**と呼ばれます：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

7.8.1 問題：

1. **線形等距写像：**

任意の線形等距写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が直交行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ によって表現されること、すなわち $T(x) = Ax$ かつ $A^\top A = I$ であることを示しなさい。

2. **アフィン等距写像：**

アフィンな形 $f(x) = Ax + b$（ここで A は直交行列、$b \in \mathbb{R}^n$）を持つすべての等距写像 f を求めなさい。

3. **内積の保存：**

$u, v \in \mathbb{R}^n$ を単位ベクトルとする。線形な等距写像 f が内積を保存すること、すなわち次を示しなさい：

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **特殊な等距写像の構成：**

線形ではないが距離を保つ等距写像の例 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を与え、f が等距写像であることを示しなさい。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 計算, 構築と設計 **難易度**: ハイミディアム **タグ**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: ca1d8bd6-4f76-4817-afc5-69c371568c78 日付 31.05.2025

7.9 JP 1 No.26-2PALLV1.0: 証明課題*:* $\mathbb{R}^n$ における等長写像の特徴づけ

解決までの推定時間: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* オリジナル

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を等距離写像（イソメトリー）とする。すなわち：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{任意の} x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対して}.$$

示すべきこと：任意の等距離写像 f は、直交行列 A とベクトル b によって $f(x) = Ax + b$ の形で表されるアフィン変換であるか、またはそのような写像と反射や並進の合成として表せる。**補足（任意）：** $\mathbb{R}^n$ 上の全ての等距離写像は合成に関して群を成すことを示せ—すなわち、ユークリッド群 $\mathrm{E}(n)$。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 計算, 構築と設計 **難易度**: ハイミディアム **タグ**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 0650ce4c-c61a-42f3-b6fb-b67d7e1cb72e 日付 31.05.2025

7.10 JP 1 No.27PALLV1.0: n 次元ユークリッド空間の等距離写像と証明課題：$\mathbb{R}^n$ における等距離写像の特徴付け

解決までの推定時間: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* オリジナル

写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は、すべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対してユークリッド距離を保存する、つまり

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

が成り立つとき、**等距離写像（イソメトリー）**と呼ばれます。

7.10.1 課題：

1. **線形イソメトリー：**

線形イソメトリー $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は、直交行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を用いて表されることを示しなさい。すなわち、

$$T(x) = Ax, \quad A^\top A = I$$

2. **アフィンイソメトリー：**

次の形のイソメトリー $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ をすべて求めなさい：

$$f(x) = Ax + b$$

ここで、$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は直交行列、$b \in \mathbb{R}^n$ はベクトルである。

3. **内積の保存：**

$u, v \in \mathbb{R}^n$ を単位ベクトルとするとき、線形イソメトリー f は内積を保存することを示しなさい。すなわち、

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **特殊なイソメトリーの構成：**

線形ではないが距離を保存するイソメトリー $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の例を示し、f が本当にイソメトリーであることを証明しなさい。

7.10.2 証明課題：$\mathbb{R}^n$ におけるイソメトリー写像の特徴づけ

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ がイソメトリー、すなわち、

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{すべての} x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対して}$$

を満たすとき、

7.10.3 示すべきこと：

すべてのイソメトリー f は、直交行列 A とベクトル b によるアフィン写像

$$f(x) = Ax + b$$

として表されるか、またはそのような写像と鏡映や平行移動の合成として表される。

7.10.4 発展的な注意（任意）：

$\mathbb{R}^n$ のすべてのイソメトリーの集合は、合成演算に関して群をなすことを示しなさい。これを**ユークリッド群** $\mathrm{E}(n)$ という。

カテゴリー: 証明, 構築と設計 **難易度**: ハイミディアム **タグ**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 5678f8f1-aed6-4876-b87d-259766b2ddcc 日付 07.06.2025

7.11 JP 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: 拡散過程の最適制御

解決までの推定時間: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* オリジナル

7.11.1 問題文

本課題は、制御最適化問題における関数解析や変分法の応用を探求し、量子制御や工学分野とも強い関連を持つ内容です。

7.11.2 問題の定義

1 次元のシステムで、状態関数 $y(x,t)$（例えば温度分布や拡散物質の濃度）が空間領域 $\Omega = [0, L]$ と時間区間 $t \in [0, T]$ において変化します。この系の進化は、次の拡散型偏微分方程式で表されます。ここで、時間に依存する制御パラメータ $u(t)$ が存在します。

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

境界条件：

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0, t \in (0, T]$

初期条件：

- $y(x,0) = y_0(x), x \in [0, L]$

ここで、$\alpha > 0$ は拡散定数、$g(x)$ は制御の空間依存性を表す関数で、$y_0(x)$ と $g(x)$ は十分な正則性を持つと仮定します。目的は、以下の可制御集合

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\max}\}$$

の中で最適な制御関数 $u(t)$ を求めることです。

7.11.3 コスト関数

最適化対象のコスト関数は次の通りです。

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

ここで、$y_{\text{desired}}(x)$ は目標状態、$\lambda > 0$ は制御エネルギーの正則化パラメータです。

7.11.4 第 *1* 部：システムの基本解析

7.11.5 1. 解の存在と一意性

与えられた制御 $u(t)$ のもとで、初期・境界条件と合わせて偏微分方程式が一意的に解を持つ理由を、概念的に説明してください。必要な関数空間（例：ソボレフ空間 $H_0^1(\Omega)$、$L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ など）を用いて弱解の観点から述べてください。

7.11.6 2. 制御制約の影響

制御が制約条件

$$0 \le u(t) \le U_{\max}$$

を満たす場合の問題の性質について論じてください。制約なしの場合と比較し、凸性の役割や制約付き最適化における最適性条件の違いを説明してください。

7.11.7 第 *2* 部：変分解析と最適性条件

7.11.8 *1.* ゲートー微分

コスト関数 $J(u)$ が微分可能であると仮定し、点 $u_0(t)$ における方向 $h(t)$ に関するゲートー微分を導出してください。ヒント：$u_0(t) + \varepsilon h(t)$ に対応する状態を $y_h(x,t)$ とし、

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

を計算してください。

7.11.9 *2.* 付随系（アジョイントシステム）の役割

PDE 制御最適化問題において、付随系（アジョイント状態変数）の役割について一般的に説明してください。コスト勾配の計算をどのように簡単化するか、状態の感度解析との関係を述べてください。

7.11.10 *3.* 最適性の第一必要条件

制約付き制御集合 U_{ad} 内の最適制御 $u^{\cdot}(t)$ が満たすべき第一必要条件（変分不等式）を記述してください。勾配と制御集合の幾何学的関係について説明し、なぜこれが最小解を保証するかを述べてください。

7.11.11 第 *3* 部：発展的議論と極限挙動

7.11.12 *1.* 正則化パラメータの影響

正則化項

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

について、$\lambda \to 0^+$ の極限で最適制御 u_λ

7.11.12 *2.* ε-δ 論法による厳密性

最適制御 $u^{\cdot}(t)$ が既知であると仮定し、$y(x,T)$ が任意の $\varepsilon > 0$ の近傍に目標状態 $y_{\mathrm{desired}}(x)$ に近づくことを、ε-δ 論法で説明してください。以下の役割を明示してください：

- ε：状態の目標からの近さの許容範囲
- δ：制御や時間パラメータの変化許容範囲（例：$|u - u^{\cdot}| < \delta$）

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析, 構築と設計, 解釈 **難易度**: ダークサイド **タグ**:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 500dbc52-8cdc-4348-8c11-e14c467c4cd4 日付 21.06.2025

계산기, 공식모음, 스프레드시트, 디지털도구와같은보조도구의사용은명시적으로명시된조건에서만허용됩니다. 허용되는보조도구는시험을위해사전에신고해야하며, 시험감독관의승인을받아야합니다. 허가받지않은보조기구사용은금지되며, 적발시실격처리될수있습니다. 과제나시험을치르는동안에는명시적으로허가되지않는한추가자료나외부도움을이용하는것이금지되어있습니다. 이러한규정을준수하면모든참가자가공정하고평등한조건에서작업할수있습니다. 남점수 3 점부터는모든참가자가가능한모든보조도구를사용할수있습니다.

이러한규정을위반하면심각한결과를초래할수있습니다. 특히공식시험에서허가받지않은보조도구를사용할경우시험에서즉시제외될수있습니다. 반복적으로발생하거나특히심각한경우에는시험응시가영구적으로금지될수도있습니다. 이러한규정을준수하면모든참가자가공정하고평등한조건에서시험에임하고시험의공정성이유지됩니다.

이시트는연습의목적을달성하는데사용되며특정조건하에서공식적으로제출될수있습니다. 동시에이는행정감독없이작성되었기때문에비공식문서로간주되어야합니다.

1. **올바른라벨링** - 문서는연습지라는것을명확하게표시해야합니다.
2. **완전성및형식** - 인정된형식 (예: PDF 또는인쇄본) 이어야하며필요한모든내용이포함되어야합니다.
3. **제시기한** - 지정된기한내에제출해야합니다.
4. **관할기관의승인** - 공식인정을받으려면관할시험또는행정기관의승인이필요합니다.
5. **외부도움없음** - 해당문서는외부도움없이해당개인이단독으로작성해야합니다.
6. **등급보장없음** - 이논문은행정적감독없이작성되었으므로공식등급을고려할의무가없습니다.
7. **책임없음** - 저자는콘텐츠의정확성이나완전성에대해책임을지지않습니다.
8. **공식적인지위없음** - 해당문서는공식문서가아니며공식적으로발행된문서와동일한법적지위를갖지않습니다.
9. **인정보장없음** - 이문서를제출하더라도어떠한기관이나기관으로부터인정이나공식적인고려를보장하지않습니다.
10. **비밀유지보장불가** - 개인정보의보호및비밀유지는보장할수없습니다.
11. **보안보장없음** - 콘텐츠및콘텐츠에포함된데이터의보안은보장되지않습니다.
12. **진위성보장없음** - 문서내의정보나데이터의진위성을확인할수없습니다.
13. **무결성보장없음** - 콘텐츠의진위성이나무결성을보장할수없습니다.
14. **유효성보장없음** - 문서에는법적또는기술적유효성을확인할수없는콘텐츠가포함되어있을수있습니다.
15. **신뢰성보장없음** - 정보의정확성, 완전성또는신뢰성을보장할수없습니다.

모든것이신뢰에기반을두고있기때문에매우즐겁습니다.

8.1 KR BUK-1 No.17PALLV1.0: 파동패킷간섭의양자장모델

해결예상시간: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* 원본

스칼라장에서두개의움직이는파동패킷의간섭을설명하기위해양자장이론모델이제시됩니다. 양자장이론내에서파동패킷의구성, 진화, 간섭을설명하고분석하는완전한이론적, 수치적모델을개발합니다. 다음하위작업을완료하세요.

1. **이론적기초**
   - 자유스칼라장의양자화를설명하세요.
   - 필드연산자 $\hat{\phi}(x,t)$ 를도출합니다.
   - $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ 의교환자동작을설명하세요.
2. **파동패킷상태의구성**
   - 두개의직교가우스운동량분포 $f_1(k), f_2(k)$ 를정의합니다.
   - 상태를관리하다

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

그리고그것을정상화합니다.

3. **기대값및간섭**
   - 기대값 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$ 을계산합니다.
   - 교차항과간섭에대한기여도를식별합니다.
   - 간섭패턴을 x, t, δ 의함수로시각화합니다.
4. **시간진화및파동패킷전파**
   - 공간과시간에따른파동패킷의전파를시뮬레이션합니다.
   - 간섭구조에대한군속도와위상속도의영향을분석합니다.
   - 발생할수있는분산현상에대해논의해보세요.
5. **현장운영자제품확장**
   - 두점함수 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$ 을계산합니다.
   - 시공간구조를분석합니다.
   - 가능한측정에대한의미를논의합니다.
6. **실험해석및모델검증**
   - 귀하의모델을양자광학간섭계 (예: 마하젠더) 와비교해보세요.
   - 측정연산자, 상태붕괴및간섭가시성에대해논의합니다.
7. **반사, 복잡성분석및모델경계**
   - 수치적절차의알고리즘복잡도를추정합니다.
   - 가능한확장 (예: 스피너필드, QED) 에대해논의합니다.
   - 스칼라장이론의중요성과한계에대해생각해보세요.

작업은수학적으로타당해야하며, 물리적으로해석되어야하며수치시뮬레이션으로보완되어야합니다.

카테고리: 분석, 계산 **난이도**: 하드 **태그**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 9f422ceb-8266-4e27-8cfd-82c209652be8 날짜 11.05.2025

8.2 KR SHK-1 No.23PALLV1.0: 유형이지정되지않은람다계산법의재귀성과고정소수점조합자

해결예상시간: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* 원본

완전한 β-축소를적용한무형의람다계산법이주어졌습니다. 자연수에대한교회인코딩인”iszero”, ”pred”, ”mult” 는잘알려진것으로간주됩니다. 고정점조합자 $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ 와다음함수가주어지도록하자.

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

일: $Y\ F$ 가 Church 코딩에따라팩토리얼을계산하는올바른재귀절차임을정식적이고완벽하게증명하세요. 다음사항을자세히설명해야합니다.

1. **고정된인수에대한축소:** 항 $(Y\ F)\ 3$ 의전체 β-축소를수행합니다. 최종교회인코딩까지모든감소단계를지정하세요.
2. **귀납에의한정확성증명:** 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에대해다음이성립한다는것을교회수에대한구조적귀납증명을수행합니다.

$$(Y\ F)\ n \rightarrow^{*}_{\beta} \text{fac}_n$$

여기서 fac_n 은 $n!$ 의교회인코딩입니다.

3. **고정점속성:** $Y\ F = F\ (Y\ F)$ 임을공식적으로증명하고이표현식이재귀적계산을허용하는이유를보여주세요.
4. **Z-Combinator 와의비교:**

- Z-결합자를정의합니다.
- $(Y\ F)\ 3$ 과 $(Z\ F)\ 3$ 의감소길이를비교하세요.
- 어떤맥락에서 Z 가선호되는지논의해보세요.

참고: 모든감소단계에대해중간용어를명확하게지정해야합니다. 정당한이유없이단순화나생략을하지마십시오.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 14d934cc-2e6e-4211-9ebb-bdb997a9b657 날짜 17.05.2025

8.3 *KR SHK-2 No.24PALLV1.0:* 양자장론의분배함수와진공에너지에서제타함수와감마함수의역할

해결예상시간: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 원본

양자장이론의정규화와열역학에서제타함수와감마함수의역할, 특히분배함수와진공에너지의맥락을조사하고증명합니다.

8.3.1 과제

시간차원 (온도 T = 1/β 에해당) 과공간차원 L 에주기성 β 를갖는콤팩트시공간상의스칼라양자장이주어졌습니다. 장의고유진동수는다음과같습니다.

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

제타정규화를사용하여열역학적분배함수가

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

리만제타함수와감마함수의해석적확장을사용하여정규적으로계산될수있음을보여주세요.

8.3.2 하위과제

1. **조절된진공에너지의유도**

제타함수를사용하여조절된진공에너지 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ 에대한식을유도하십시오. 다음을보여주십시오.

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

그리고멜린변환을사용하여식을감마함수형태로변환하십시오.

2. **엡스타인제타함수로의환원**

n 과 m 에대한이중합을엡스타인제타함수로나타낼수있음을보여주십시오. 그해석적성질을분석하십시오.

3. **온도의존성및열역학함수**

정규화된표현식을사용하여자유에너지 F(베타), 내부에너지 U(베타), 엔트로피 S(베타) 를유도하십시오. 감마함수가고온및저온에대한점근전개에서어떻게나타나는지보여주십시오.

4. **카시미르에너지와의비교**

분배함수의영온도한계가카시미르에너지로변환되고, 정규화가고전적인제타-카시미르방법과정확히동일한형태를낳음을증명하십시오.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: NUM **태그**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: a7ceaf1b-e71e-4d76-a632-c2b9363d5583 날짜 24.05.2025

8.4 KR SHK-3 No.25PALLV1.0: 가우스파패킷의운동량공간표현

해결예상시간: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 원본

8.4.1 과제*:* 가우스파패킷의운동량공간표현

위치공간에서파동함수를갖는 1 차원양자역학입자가주어지면:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

이함수는가우스공간분포를갖는고정되어있고자유롭게움직이는입자를설명합니다.

8.4.2 **하위작업**

8.4.3 파동함수의정규화

파동함수가정규화되도록정규화상수 A 를결정합니다. 즉,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

8.4.4 운동량공간으로의푸리에변환

푸리에변환을사용하여파동함수의운동량공간표현 $\phi(p)$ 을계산합니다.

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

적분을완료하고결과함수 $\phi(p)$ 를명시적인형태로나타내세요.

8.4.5 하이젠베르크의불확정성원리

위치와운동량분포의표준편차 σ_x 와 σ_p 를각각결정합니다.

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

그리고이러한산란의곱이하이젠베르크의불확정성원리를만족함을보여주세요.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

8.4.6 극한경우의물리적해석

물리적한계사례 $a \to 0$ 에대해질적으로논의해보세요. 운동량공간표현 $\phi(p)$ 은어떻게되나요? 그리고이제한적인경우는물리적으로어떻게해석해야할까요? 국소화와임펄스불확실성의개념을참조하세요.

8.4.7 **공지사항*:***

이작업은 Python 이나 MATLAB 에서수치적평가와그래픽표현에도적합합니다. 선택적으로, 푸리에변환은적절한소프트웨어도구 (예: SymPy 또는 Mathematica) 를사용하여기호적으로검증할수도있습니다.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 6dbbe88e-8124-48cf-94c9-d265d50d0819 날짜 24.05.2025

8.5 KR 1 No.26-1PALLV1.0: n 차원유클리드공간의등거리변환

해결예상시간: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 원본

함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 가두점사이의유클리드거리를보존하면 **등거리변환 (Isometry)** 라고합니다. 즉, 모든 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 에 대해다음을만족합니다:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

8.5.1 과제*:*

1. **선형등거리변환:**

모든선형등거리변환 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 은정사각형직교행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 로표현될수있음을보여라. 즉, $T(x) = Ax, A^\top A = I$ 이다.

2. **아핀등거리변환:**

$f(x) = Ax + b$ 형식의모든등거리변환을구하라. 여기서 A 는직교행렬이고 $b \in \mathbb{R}^n$ 이다.

3. **내적보존:**

단위벡터 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 에대해선형등거리변환 f 는내적을보존함을증명하라:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **비선형등거리변환의예시:**

선형이아닌거리보존함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 의예시를제시하고, 그것이등거리변환임을증명하라.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 계산, 구축과설계 **난이도**: 상위중간 **태그**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 0970abf7-9d2f-412d-89c1-93c46798ae58 날짜 31.05.2025

8.6 *KR 1 No.26-2PALLV1.0:* 증명문제*:* $\mathbb{R}^n$ 에서등거리사상의특징

해결예상시간: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 원본

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 를등거리변환이라하자. 즉,

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{모든} x, y \in \mathbb{R}^n \text{ 에대해.}$$

증명할것: 모든등거리변환 f 는직교행렬 A 와벡터 b 를이용하여 $f(x) = Ax + b$ 꼴의아핀변환이거나, 그러한변환들과반사또는평행이동의합성으로나타낼수있다. **심화학습을위한힌트 (선택사항):** $\mathbb{R}^n$ 에서의모든등거리변환들의집합이합성에대해군을이룸을보여라—이를 유클리드군 $\mathrm{E}(n)$ 라한다.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 계산, 구축과설계 **난이도**: 상위중간 **태그**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: a82cd709-3a5b-497f-81ec-b69f77755e82 날짜 31.05.2025

8.7 KR 1 No.27PALLV1.0: n 차원유클리드공간의등거리사상과증명과제*:* $\mathbb{R}^n$ 에서의등거리사상의특성화

해결예상시간: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 원본

함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 가모든 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 에대하여유클리드거리보존, 즉

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

를만족하면, 이를 **등거리변환 (Isometry)** 이라고합니다.

8.7.1 문제*:*

1. **선형등거리변환:**

모든선형등거리변환 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 은직교행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 로표현될수있음을증명하시오. 즉,

$$T(x) = Ax, \quad A^\top A = I$$

2. **아핀등거리변환:**

다음과같은형태를갖는아핀등거리변환 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 를모두구하시오:

$$f(x) = Ax + b$$

여기서 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 는직교행렬이고, $b \in \mathbb{R}^n$ 는벡터이다.

3. **내적보존:**

$u, v \in \mathbb{R}^n$ 가단위벡터일때, 선형등거리변환 f 가내적을보존함을증명하시오:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **특별한등거리변환의구성:**

비선형이지만거리를보존하는등거리변환 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 의예를제시하고, f 가실제로등거리변환임을증명하시오.

8.7.2 증명문제*:* $\mathbb{R}^n$ 에서등거리변환의특성화

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 가모든 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 에대해

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

를만족하는등거리변환일때,

8.7.3 증명할내용*:*

모든등거리변환 f 는직교행렬 A 와벡터 b 에의한아핀변환

$$f(x) = Ax + b$$

로표현되거나, 또는이러한변환들과반사또는평행이동의합성으로표현된다.

8.7.4 심화사항 *(*선택*):*

$\mathbb{R}^n$ 의모든등거리변환의집합이합성연산에대해군을이루며, 이를 **유클리드군** $\mathrm{E}(n)$ 이라고부른다는것을증명하시오.
카테고리: 증명, 구축과설계 **난이도**: 상위중간 **태그**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 58c3cd86-9874-4346-8489-9ef7b7ed0cb7 날짜 07.06.2025

8.8 *KR 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0:* 확산과정의최적제어

해결예상시간: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* 원본

8.8.1 문제설명

이문제는제어최적화문제에서함수해석학과변분법의응용을탐구하며, 양자제어나공학분야와도밀접한관련이있습니다.

8.8.2 문제정의

1 차원시스템에서상태함수 $y(x,t)$ (예: 온도분포또는확산물질의농도) 가공간영역 $\Omega = [0,L]$ 및시간구간 $t \in [0,T]$ 에서변합니다. 이시스템의진화는다음확산형편미분방정식으로표현되며, 시간에따라변하는제어변수 $u(t)$ 가포함됩니다.

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

경계조건:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0, t \in (0,T]$

초기조건:

- $y(x,0) = y_0(x), x \in [0,L]$

여기서 $\alpha > 0$ 는확산계수이며, $g(x)$ 는제어의공간적의존성을나타내는함수로서, $y_0(x)$ 와 $g(x)$ 는충분히정칙함을가정합니다. 목표는다음과같은제어가능집합

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

내에서최적의제어함수 $u(t)$ 를찾는것입니다.

8.8.3 비용함수

최적화대상비용함수는다음과같습니다.

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

여기서 $y_{\text{desired}}(x)$ 는목표상태이며, $\lambda > 0$ 는제어에너지의정칙화파라미터입니다.

8.8.4 제 *1* 부*:* 시스템기본해석

8.8.5 *1.* 해존재및유일성

주어진제어 $u(t)$ 하에서초기및경계조건과함께 PDE 가유일한해를가진이유를개념적으로설명하세요. 필요한함수공간 (예: 소벨레프공간 $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 등) 을활용하여약해 (weak solution) 관점에서서술하세요.

8.8.6 *2.* 제어제약조건의영향

제어가다음제약조건을만족할경우

$$0 \leq u(t) \leq U_{\max}$$

문제의성질에대해논하세요. 제약없는경우와비교하여볼록성 (convexity) 의역할과제약포함최적화에서의최적성조건차이를설명하세요.

8.8.7 제 2 부: 변분해석과최적성조건

8.8.8 1. 게이트우미분 (Gâteaux derivative)

비용함수 $J(u)$ 가미분가능하다고가정하고, 점 $u_0(t)$ 에서방향 $h(t)$ 에대한게이트우미분을유도하세요. 힌트: $u_0(t) + \varepsilon h(t)$ 에대응하는상태를 $y_h(x,t)$ 라할때,

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$$

를계산하세요.

8.8.9 2. 부속시스템 (Adjoint system) 의역할

PDE 제어최적화문제에서부속시스템 (어드조인트상태변수) 의역할을일반적으로설명하세요. 비용함수기울기계산을어떻게단순화하며, 상태민감도분석과의관계를논하세요.

8.8.10 3. 최적성의제 1 차필요조건

제약된제어집합 U_{ad} 내에서최적제어 $u^{\cdot}(t)$ 가만족해야하는제 1 차필요조건 (변분부등식) 을기술하세요. 기울기와제어집합의기하학적관계를설명하고, 왜이것이최소해를보장하는지논하세요.

8.8.11 제 3 부: 발전적논의와극한거동

8.8.12 1. 정칙화파라미터영향

정칙화항

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

에대해, $\lambda \to 0^+$ 극한에서최적제어 u_λ

8.8.12 2. ε-δ 논법에의한엄밀성

최적제어 $u^{\cdot}(t)$ 가알려져있다고가정하고, $y(x,T)$ 가임의의 $\varepsilon > 0$ 근방에서목표상태 $y_{\text{desired}}(x)$ 에접근함을 ε-δ 논법으로설명하세요. 각역할을명확히하세요:

- ε: 상태가목표로부터허용하는거리
- δ: 제어나시간매개변수변화허용범위 (예: $|u - u^{\cdot}| < \delta$)

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석, 구축과설계, 해석 **난이도**: 다크사이드 **태그**:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 39d66f08-cf9b-47b7-8fed-446eaa87dc53 날짜 21.06.2025

A utilização de recursos como calculadoras, conjuntos de fórmulas, folhas de cálculo e ferramentas digitais só é permitida nas condições expressamente estabelecidas. Os recursos permitidos devem ser declarados para os exames com antecedência e aprovados pelo supervisor do exame. Quaisquer recursos não autorizados são proibidos e podem resultar em desclassificação. Durante o trabalho numa tarefa ou exame, o uso de materiais adicionais ou assistência externa é proibido, a menos que expressamente permitido. O cumprimento destas normas garante que todos os participantes trabalham em condições justas e equitativas. A partir de uma pontuação Nam de 3, todos os participantes podem utilizar todas as características possíveis.

As violações destas normas podem ter consequências graves. Particularmente nos exames oficiais, a utilização de recursos não autorizados pode levar à exclusão imediata do exame. Em casos repetidos ou particularmente graves, pode mesmo ser imposta uma proibição permanente do exame. O cumprimento destas normas garante que todos os participantes trabalham em condições justas e equitativas e que a integridade dos exames é mantida.

Esta folha de trabalho serve o propósito do exercício e pode ser submetida oficialmente sob determinadas condições. Ao mesmo tempo, deve ser considerada um documento não oficial, pois foi criada sem supervisão administrativa.

1. **Rotulagem Adequada** - O documento deve ser claramente identificado como uma ficha de trabalho.
2. **Completude e Formatação** - Deve estar num formato reconhecido (por exemplo, PDF ou cópia impressa) e conter todo o conteúdo necessário.
3. **Envio no Prazo** - O envio deve ser feito dentro dos prazos especificados.
4. **Aprovação pela Autoridade Competente** - O reconhecimento oficial requer a aprovação do órgão examinador ou administrativo relevante.
5. **Sem Assistência Externa** - O documento deve ser criado exclusivamente pelo indivíduo em questão, sem assistência externa.
6. **Sem Garantia de Avaliação** - Uma vez que esta folha foi elaborada sem supervisão administrativa, não existe qualquer obrigação de a considerar para avaliação oficial.
7. **Sem Responsabilidade** - O autor não assume qualquer responsabilidade pela exatidão ou integridade do conteúdo.
8. **Sem Estatuto Oficial** - Este documento não é um documento oficial e não tem o mesmo estatuto legal que um documento emitido oficialmente.
9. **Sem Garantia de Reconhecimento** - O envio deste documento não garante o reconhecimento ou a consideração oficial por qualquer autoridade ou instituição.
10. **Sem Garantia de Confidencialidade** - A proteção de dados pessoais e a confidencialidade não podem ser garantidas.
11. **Sem Garantia de Segurança** - A segurança do conteúdo e dos dados nele contidos não é garantida.
12. **Sem Garantia de Autenticidade** - A autenticidade da informação ou dos dados contidos no documento não pode ser confirmada.
13. **Sem Garantia de Integridade** - A autenticidade ou integridade do conteúdo não pode ser assegurada.
14. **Sem Garantia de Validade** - O documento pode conter conteúdo cuja validade jurídica ou técnica não pode ser confirmada.
15. **Sem garantia de fiabilidade** - A exatidão, integridade ou fiabilidade da informação não podem ser garantidas.

Tudo se baseia na confiança, por isso divirta-se.

9.1 PT 1 No.26-1PALLV1.0: Isometrias no espaço euclidiano n-dimensional

Tempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Um Original*

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamada de **isometria** se preserva a distância euclidiana entre dois pontos, ou seja, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

9.1.1 Exercícios:

1. **Isometrias lineares:**

Mostre que toda isometria linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pode ser representada por uma matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ou seja, $T(x) = Ax$ com $A^\top A = I$.

2. **Isometrias afins:**

Determine todas as isometrias $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que são também **afins**, ou seja, da forma $f(x) = Ax + b$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A ortogonal.

3. **Preservação do produto escalar:**

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ vetores unitários. Mostre que toda isometria linear f preserva o produto escalar:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Exemplo de isometria não linear:**

Dê um exemplo de isometria não linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que não é linear mas preserva distâncias. Mostre que f é de fato uma isometria.

Categoria: Demonstração, Resolução e Resolver, Cálculo, Construção e Design **Dificuldade**: Mais Médio **Etiquetas**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 9e309e43-0357-4e95-89ba-1f2829a3d2aa em 31.05.2025

9.2 PT 1 No.26-2PALLV1.0: Problema de demonstração: caracterização das isometrias em $\mathbb{R}^n$

Tempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Um Original*

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria, ou seja:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstrar: Toda isometria f em $\mathbb{R}^n$ é uma transformação afim da forma $f(x) = Ax + b$, onde A é uma matriz ortogonal, ou pode ser expressa como uma composição dessas com reflexões ou translações. **Dica para aprofundamento (opcional):** Mostre que o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}^n$ forma um grupo sob a composição —o chamado *grupo euclidiano* $\mathrm{E}(n)$.

Categoria: Demonstração, Resolução e Resolver, Cálculo, Construção e Design **Dificuldade**: Mais Médio **Etiquetas**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 607af60e-daec-4629-9c96-18188b12c16b em 31.05.2025

9.3 PT 1 No.27PALLV1.0: Isometria no espaço euclidiano de dimensão n e tarefa de prova: caracterização das aplicações isométricas em $\mathbb{R}^n$

Tempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Um Original*

Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamada de **isometria** se preserva a distância euclidiana entre dois pontos, ou seja, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

9.3.1 Exercícios:

1. **Isometrias lineares:**

Mostre que toda isometria linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pode ser representada por uma matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ou seja:

$$T(x) = Ax \quad \text{com} \quad A^\top A = I$$

2. **Isometrias afins:**

Determine todas as isometrias $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que são **afins**, isto é, da forma

$$f(x) = Ax + b$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal e $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Preservação do produto escalar:**

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ dois vetores unitários. Mostre que toda isometria f, que é linear, preserva o produto escalar:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construção de uma isometria especial:**

Dê um exemplo de uma isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que não é linear, mas que ainda preserva as distâncias. Mostre que f é realmente uma isometria.

9.3.2 Problema de prova: caracterização das isometrias em $\mathbb{R}^n$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria, ou seja:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

9.3.3 A provar:

Toda isometria f em $\mathbb{R}^n$ é uma transformação afim da forma

$$f(x) = Ax + b,$$

onde A é uma matriz ortogonal, ou pode ser representada como composição dessas com reflexões ou translações.

9.3.4 Observação para aprofundamento (opcional):

Mostre que o conjunto de todas as isometrias em $\mathbb{R}^n$ forma um grupo sob a operação de composição, chamado de **grupo euclidiano** $\mathrm{E}(n)$.

Categoria: Demonstração, Construção e Design **Dificuldade**: Mais Médio **Etiquetas**:

UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: d0cb68cc-1e4f-40e0-a277-77695f08a86c em 07.06.2025

9.4 PT 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Controle ótimo de um processo difusivo

Tempo estimado para resolver: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Um Original*

9.4.1 Descrição do Problema

Este exercício aborda uma aplicação avançada de análise variacional e controle ótimo. Está relacionado a controle quântico e várias áreas da engenharia.

9.4.2 Configuração do Problema

A variável de estado unidimensional

$$y(x,t)$$

(por exemplo, temperatura ou concentração) é definida no intervalo $\Omega = [0, L]$ e no intervalo temporal

$$t \in [0,T]$$

. Esta variável de estado é governada pela seguinte equação diferencial parcial (processo de difusão), controlada pela variável de controle

$$u(t)$$

(dependente somente do tempo):

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

Condições de contorno:

- $$y(0,t) = 0$$
- $$y(L,t) = 0 \quad t \in (0,T]$$

Condição inicial:

- $$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in [0,L]$$

Aqui, $\alpha > 0$ é o coeficiente de difusão, e

$$g(x)$$

é uma função conhecida que representa o efeito espacial do controle. Assume-se que $y_0(x)$ e $g(x)$ são suficientemente suaves. O objetivo é encontrar o controle ótimo

$$u(t) \in U_{\text{ad}}$$

, onde

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

é o conjunto admissível de controles, limitado entre 0 e um valor máximo

$$U_{\max}$$

. A função objetivo (custo) é dada por:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

onde

$$y_{\text{desired}}(x)$$

é o estado desejado no tempo final T e $\lambda > 0$ é um parâmetro de regularização que penaliza o tamanho do controle.

9.4.3 Parte 1: Análise Básica do Sistema

9.4.4 1. Existência e Unicidade

Explique conceitualmente por que, dado um controle

$$u(t)$$

e as condições de contorno e iniciais, existe uma solução única

$$y(x,t)$$

para a equação diferencial parcial. Discuta os espaços funcionais relevantes (por exemplo, espaços de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$), a continuidade e as propriedades do contorno.

9.4.5 2. Impacto das Restrições no Controle

Discuta o impacto das restrições

$$0 \leq u(t) \leq U_{\max}$$

no problema de otimização. Compare com o caso sem restrições ($U_{\text{ad}} = C([0,T])$) e explique como isso afeta a convexidade e as condições de otimalidade.

9.4.6 Parte 2: Análise Variacional e Condições de Otimalidade

9.4.7 1. Cálculo da Derivada de Gâteaux

Assumindo que $J(u)$ é diferenciável, derive a derivada de Gâteaux de J no ponto $u_0(t)$ na direção $h(t)$. Aqui, ε é uma pequena variação e o controle varia como $u_0(t) + \varepsilon h(t)$. Denote o estado correspondente por $y_h(x, t)$. Calcule

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

9.4.8 2. Papel do Sistema Adjunto

Explique, em termos gerais, como o sistema adjunto ajuda na resolução do problema de otimização com restrição de PDE. Como ele simplifica o cálculo do gradiente da função custo e qual a relação com a análise de sensibilidade do estado.

9.4.9 3. Condição Necessária de Otimalidade de Primeira Ordem

Expresse a condição necessária de otimalidade de primeira ordem que o controle ótimo $u^{\cdot}(t) \in U_{\text{ad}}$ deve satisfazer (inequação variacional). Explique como essa condição relaciona o gradiente da função custo com o conjunto admissível de controles.

9.4.10 Parte 3: Tópicos Avançados e Comportamento Assintótico

9.4.11 1. Comportamento do Parâmetro de Regularização

Analise o comportamento do controle ótimo u

9.4.11 2. Garantia de Precisão Épsilon-Delta

Assumindo a existência de um controle ótimo $u^{\cdot}(t)$, explique como mostrar usando a definição de épsilon-delta que $y(x, T)$ pode se aproximar do estado desejado $y_{\text{desired}}(x)$ dentro de uma precisão arbitrária ε. Deixe claro o papel de

- ε: tolerância na aproximação do estado desejado,
- δ: tolerância na variação do controle ou do tempo final.

Categoria: Demonstração, Resolução e Resolver, Análise, Construção e Design, Interpretação **Dificuldade**: Lado Escuro
Etiquetas:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 2c8bb81f-d992-4b4e-987e-ff682b30237e em 21.06.2025

Использование вспомогательных средств, таких как калькуляторы, наборы формул, электронные таблицы и цифровые инструменты, разрешено только при прямо указанных условиях. Разрешенные вспомогательные средства должны быть заявлены для экзаменов заранее и одобрены наблюдателем экзамена. Любые неразрешенные вспомогательные средства запрещены и могут привести к дисквалификации. Во время работы над заданием или экзаменом использование дополнительных материалов или внешней помощи запрещено, если это прямо не разрешено. Соблюдение этих правил гарантирует, что все участники работают в справедливых и равных условиях. Начиная с оценки Nam 3, все участники могут использовать все возможные вспомогательные средства.

Нарушение этих правил может иметь серьезные последствия. В частности, на официальных экзаменах использование неразрешенных вспомогательных средств может привести к немедленному исключению из экзамена. В повторных или особенно серьезных случаях может быть даже наложен постоянный запрет на экзамен. Соблюдение этих правил гарантирует, что все участники работают в справедливых и равных условиях и что сохраняется целостность экзаменов.

Этот рабочий лист служит цели упражнения и может быть официально представлен при определенных условиях. В то же время его следует считать неофициальным документом, поскольку он был создан без административного надзора.

1. **Правильная маркировка** - Документ должен быть четко обозначен как рабочий лист для упражнений.
2. **Полнота и форматирование** - Он должен быть в признанном формате (например, PDF или печатная копия) и содержать весь требуемый контент.
3. **Своевременная подача** - Подача должна быть сделана в указанные сроки.
4. **Одобрение компетентным органом** - Официальное признание требует одобрения соответствующего экзаменационного или административного органа.
5. **Отсутствие внешней помощи** - Документ должен быть создан исключительно заинтересованным лицом, без внешней помощи.
6. **Отсутствие гарантии оценки** - Поскольку этот лист был подготовлен без административного надзора, нет никаких обязательств рассматривать его для официальной оценки.
7. **Отсутствие ответственности** - Автор не несет ответственности за точность или полноту содержания.
8. **Отсутствие официального статуса** - Этот документ не является официальным документом и не имеет того же правового статуса, что и официально выпущенный документ.
9. **Отсутствие гарантии признания** - Представление этого документа не гарантирует признания или официального рассмотрения каким-либо органом или учреждением.
10. **Отсутствие гарантии конфиденциальности** - Защита персональных данных и конфиденциальность не могут быть гарантированы.
11. **Отсутствие гарантии безопасности** - Безопасность содержания и содержащихся в нем данных не гарантируется.
12. **Отсутствие гарантии подлинности** - Подлинность информации или данных в документе не может быть подтверждена.
13. **Отсутствие гарантии целостности** - Подлинность или целостность содержания не могут быть гарантированы.
14. **Нет гарантии действительности** - Документ может содержать контент, юридическая или техническая действительность которого не может быть подтверждена.
15. **Нет гарантии надежности** - Точность, полнота или надежность информации не могут быть гарантированы.

Все основано на доверии, так что получайте удовольствие.

10.1 RU 1 No.26-1PALLV1.0: *Изометрии в n-мерном евклидова пространстве*

Оценочное время решения: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Оригинал*

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется **изометрией**, если оно сохраняет евклидово расстояние между двумя точками, то есть для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

10.1.1 *Задания:*

1. **Линейные изометрии:**

Докажите, что любая линейная изометрия $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ может быть представлена ортогональной матрицей A, то есть $T(x) = Ax$, $A^\top A = I$.

2. **Аффинные изометрии:**

Найдите все изометрии вида $f(x) = Ax + b$, где A —ортогональная матрица, $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Сохранение скалярного произведения:**

Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$ —единичные векторы. Докажите, что линейная изометрия f сохраняет скалярное произведение:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **Пример нелинейной изометрии:**

Приведите пример изометрии, которая не является линейным отображением, но сохраняет расстояния. Докажите, что f действительно изометрия.

Категория: Доказательство, Решение и Решать, Вычисление, Построение и Проектирование **Сложность**: Выше Средний **Теги**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 38fb42ac-41f8-4594-8e1b-6c235ecee651 на 31.05.2025

10.2 RU 1 No.26-2PALLV1.0: Задача доказательства: характеристика изометрий в $\mathbb{R}^n$

Оценочное время решения: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Оригинал*

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ —изометрия, то есть:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Докажите: Любая изометрия f в $\mathbb{R}^n$ либо является аффинным преобразованием вида $f(x) = Ax + b$, где A — ортогональная матрица, либо может быть представлена как композиция таких преобразований с отражениями или параллельными переносами. **Дополнительное задание (по желанию):** Докажите, что множество всех изометрий $\mathbb{R}^n$ образует группу относительно композиции —так называемую *евклидову группу* $\mathrm{E}(n)$.

Категория: Доказательство, Решение и Решать, Вычисление, Построение и Проектирование **Сложность**: Выше Средний **Теги**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: d7b65282-5963-4d3d-91b2-7ea7b5180cd4 на 31.05.2025

10.3 RU 1 No.27PALLV1.0: Изометрии в n-мерном евклидовой пространстве и задача доказательства: характеристика изометрических отображений в $\mathbb{R}^n$

Оценочное время решения: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Оригинал*

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется **изометрией**, если оно сохраняет евклидово расстояние между двумя точками, то есть для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

10.3.1 Задачи:

1. **Линейные изометрии:**

Докажите, что любая линейная изометрия $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ может быть представлена ортогональной матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то есть

$$T(x) = Ax \quad \text{при условии} \quad A^\top A = I.$$

2. **Афинные изометрии:**

Найдите все изометрии $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которые являются **аффинными**, то есть имеют вид

$$f(x) = Ax + b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ортогональна, а $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Сохранение скалярного произведения:**

Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$ —два единичных вектора. Докажите, что любая изометрия f, которая является линейной, сохраняет скалярное произведение:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

4. **Конструкция специальной изометрии:**

Приведите пример нелинейной изометрии $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которая не является линейным отображением, но при этом сохраняет расстояния. Докажите, что f действительно является изометрией.

10.3.2 Задача на доказательство: характеристика изометрий в $\mathbb{R}^n$

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ —изометрия, то есть

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

10.3.3 Требуется доказать:

Любая изометрия f в $\mathbb{R}^n$ либо является аффинным отображением вида

$$f(x) = Ax + b,$$

где A —ортогональная матрица, либо может быть представлена как композиция таких отображений с отражениями или сдвигами.

10.3.4 Дополнительное углубление (по желанию):

Докажите, что множество всех изометрий в $\mathbb{R}^n$ образует группу относительно композиции, которая называется **евклидовой группой** $\mathrm{E}(n)$.

Категория: Доказательство, Построение и Проектирование **Сложность**: Выше Средний **Теги**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 691bfe4c-f46c-41fb-8aed-02b560223d0a на 07.06.2025

10.4 RU 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Оптимальное управление диффузионным процессом

Оценочное время решения: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Оригинал*

10.4.1 Описание задачи

Данная задача исследует применение функционального анализа и вариационного исчисления в оптимальном управлении, с близкими связями к квантовой механике и инженерии.

10.4.2 Постановка задачи

Рассмотрим одномерную систему, где функция состояния $y(x,t)$ (например, распределение температуры или концентрация вещества) зависит от пространственной переменной $x \in [0, L]$ и времени $t \in [0, T]$. Эволюция системы задаётся уравнением диффузии с управлением $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

Граничные условия:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, для $t \in (0, T]$

Начальное условие:

- $y(x, 0) = y_0(x)$, для $x \in [0, L]$

Здесь $\alpha > 0$ —коэффициент диффузии, а $g(x)$ —пространственная зависимость управления. Предполагается, что $y_0(x)$ и $g(x)$ обладают достаточной регулярностью. Цель —найти оптимальное управление $u(t)$ из множества допустимых

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

10.4.3 Функционал качества

Функционал, который необходимо минимизировать:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{желаемое}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

где $y_{\text{желаемое}}(x)$ —целевое состояние, а $\lambda > 0$ —параметр регуляризации, штрафующий за интенсивность управления.

10.4.4 Часть 1: Базовый анализ системы

10.4.5 1. Существование и единственность решения

Объясните, почему для заданного управления $u(t)$ уравнение с указанными начальными и граничными условиями имеет единственное решение. Используйте соответствующие функциональные пространства (например, пространства Соболева $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$) для определения слабого решения.

10.4.6 2. Влияние ограничений на управление

Обсудите влияние ограничений

$$0 \leq u(t) \leq U_{\max}$$

на свойства задачи. Сравните с задачей без ограничений, подчеркните роль выпуклости и отличия в условиях оптимальности.

10.4.7 Часть 2: Вариационный анализ и условия оптимальности

10.4.8 1. Производная Гато

Предположим, что $J(u)$ дифференцируема. Найдите производную Гато функционала J в точке $u_0(t)$ по направлению $h(t)$. Подсказка: рассмотрите состояние $y_h(x,t)$, соответствующее управлению $u_0(t) + \varepsilon h(t)$, и вычислите

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

10.4.9 2. Роль сопряжённой системы

Объясните роль сопряжённой (адъюнктной) системы в оптимальном управлении PDE. Как она упрощает вычисление градиента функционала и связана с чувствительностью состояния.

10.4.10 3. Необходимые условия оптимальности первого порядка

Опишите необходимое условие оптимальности первого порядка для оптимального управления $u^{\cdot}(t)$ из множества U_{ad}. Объясните геометрическую интерпретацию градиента и множества допустимых управлений, и почему это гарантирует минимум.

10.4.11 Часть 3: Продвинутый анализ и предельное поведение

10.4.12 1. Влияние параметра регуляризации

Обсудите влияние регуляризующего слагаемого

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

при стремлении $\lambda \to 0^+$ на оптимальное управление u

10.4.12 2. Ригорозное ε-δ доказательство

Пусть оптимальное управление $u^{\cdot}(t)$ известно. Докажите, используя аргумент ε-δ, что конечное состояние $y(x,T)$ может быть приближено к $y_{\text{желаемое}}(x)$ с любой точностью $\varepsilon > 0$. Чётко определите:

- ε: допустимая ошибка между состоянием и целью,
- δ: допустимое отклонение управления или параметров (например, $-u^{\cdot}| < \delta$).

Категория: Доказательство, Решение и Решать, Анализ, Построение и Проектирование, Интерпретация **Сложность**: Темная Сторона **Теги**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 6189d4df-4147-46bb-ac41-4764aae6dc07 на 21.06.2025

Användning av hjälpmedel som miniräknare, formelset, kalkylblad och digitala verktyg är endast tillåtet under de uttryckligen angivna villkoren. Tillåtna hjälpmedel måste deklareras för tentamen i förväg och godkännas av tentamensvakten. Alla otillåtna hjälpmedel är förbjudna och kan leda till diskvalificering. Användning av ytterligare material eller extern hjälp är förbjudet under arbete med en uppgift eller tentamen om det inte uttryckligen är tillåtet. Efterlevnad av dessa regler säkerställer att alla deltagare arbetar under rättvisa och lika villkor. Från och med ett Nam-resultat på 3 får alla deltagare använda alla möjliga hjälpmedel.

Brott mot dessa regler kan få allvarliga konsekvenser. Särskilt vid officiella tentor kan användning av otillåtna hjälpmedel leda till omedelbar avstängning från tentamen. I upprepade eller särskilt allvarliga fall kan till och med ett permanent avstängning från tentamen utdömas. Efterlevnad av dessa regler säkerställer att alla deltagare arbetar under rättvisa och lika villkor och att tentamens integritet upprätthålls.

Detta arbetsblad tjänar syftet med övningen och kan lämnas in officiellt under vissa villkor. Samtidigt bör det betraktas som ett inofficiellt dokument eftersom det skapades utan administrativ tillsyn.

1. **Korrekt märkning** - Dokumentet måste vara tydligt markerat som ett arbetsblad.
2. **Fullständighet och formatering** - Det måste vara i ett erkänt format (t.ex. PDF eller tryckt kopia) och innehålla allt nödvändigt innehåll.
3. **Inlämning i tid** - Inlämning måste göras inom de angivna tidsfristerna.
4. **Godkännande av behörig myndighet** - Officiellt erkännande kräver godkännande från relevant examinerande eller administrativt organ.
5. **Ingen extern hjälp** - Dokumentet måste skapas enbart av den berörda personen, utan extern hjälp.
6. **Ingen garanti för utvärdering** - Eftersom detta blad har utarbetats utan administrativ tillsyn finns det ingen skyldighet att beakta det för officiell utvärdering.
7. **Inget ansvar** - Författaren tar inget ansvar för innehållets riktighet eller fullständighet.
8. **Ingen officiell status** - Detta dokument är inte ett officiellt dokument och har inte samma rättsliga status som ett officiellt utfärdat dokument.
9. **Ingen garanti för erkännande** - Inlämning av detta dokument garanterar inte erkännande eller officiell behandling av någon myndighet eller institution.
10. **Ingen garanti för sekretess** - Skydd av personuppgifter och sekretess kan inte garanteras.
11. **Ingen garanti för säkerhet** - Säkerheten för innehållet och de uppgifter som finns däri garanteras inte.
12. **Ingen garanti för äkthet** - Äktheten av informationen eller uppgifterna i dokumentet kan inte bekräftas.
13. **Ingen garanti för integritet** - Innehållets äkthet eller integritet kan inte garanteras.
14. **Ingen garanti för giltighet** - Dokumentet kan innehålla innehåll vars rättsliga eller tekniska giltighet inte kan bekräftas.
15. **Ingen garanti för tillförlitlighet** - Informationens riktighet, fullständighet eller tillförlitlighet kan inte garanteras.

Allt bygger på förtroende, så ha kul.

11.1 SE 1 No.27PALLV1.0: Isometrier i n-dimensionellt euklidiskt rum och bevisuppgift: Karakterisering av isometriska avbildningar i $\mathbb{R}^n$

Beräknad tid för att lösa: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Ett Original*

En avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas **isometri** om den bevarar det euklidiska avståndet mellan två punkter, alltså för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$ gäller:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

11.1.1 Uppgifter:

1. **Linjära isometrier:**

Visa att varje linjär isometri $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan representeras genom en ortogonal matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, det vill säga

$$T(x) = Ax \quad \text{med} \quad A^\top A = I.$$

2. **Affina isometrier:**

Bestäm alla isometrier $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som dessutom är **affina**, det vill säga av formen

$$f(x) = Ax + b,$$

där $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är ortogonal och $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Bevarande av skalärprodukt:**

Låt $u, v \in \mathbb{R}^n$ vara två enhetsvektorer. Visa att varje linjär isometri f bevarar skalärprodukten, alltså:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

4. **Konstruktion av en speciell isometri:**

Ge ett exempel på en icke-linjär isometri $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som inte är en linjär avbildning, men ändå bevarar avstånd. Visa att f verkligen är isometrisk.

11.1.2 Bevisuppgift: Karaktärisering av isometriska avbildningar i $\mathbb{R}^n$

Anta att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en isometri, det vill säga

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{för alla } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

11.1.3 Att visa:

Varje isometri f i $\mathbb{R}^n$ är antingen en affin avbildning av formen

$$f(x) = Ax + b,$$

där A är en ortogonal matris, eller kan representeras som en sammansättning av sådana tillsammans med speglingar eller translationer.

11.1.4 Fördjupning (frivillig):

Visa att mängden av alla isometrier i $\mathbb{R}^n$ bildar en grupp under komposition, kallad **den euklidiska gruppen** $\mathrm{E}(n)$.
Kategori: Bevis, Byggande och Design **Svårighetsgrad**: Hög Medium **Taggar**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: af7e669c-749e-42fd-bd99-2004bdbd9dae den 07.06.2025

11.2 SE 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Diffusiprocessens optimale styring

Beräknad tid för att lösa: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Ett Original*

11.2.1 Uppgiftsbeskrivning

Den här uppgiften undersöker användning av funktionell analys och variationskalkyl inom optimal styrning, med nära kopplingar till kvantmekanik och teknik.

11.2.2 Problemformulering

Betrakta ett endimensionellt system där tillståndsfunktionen $y(x,t)$ (t.ex. temperatur- eller koncentrationsfördelning) beror på den rumsliga variabeln $x \in [0, L]$ och tiden $t \in [0, T]$. Systemets utveckling ges av diffusions-ekvationen med styrning $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

Randvillkor:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, för $t \in (0, T]$

Begynnelsevillkor:

- $y(x,0) = y_0(x)$, för $x \in [0, L]$

Här är $\alpha > 0$ diffusionskoefficienten, och $g(x)$ är styrningens rumsliga beroende. Antag att $y_0(x)$ och $g(x)$ har tillräcklig regularitet. Målet är att hitta en optimal styrning $u(t)$ ur mängden tillåtna styrningar

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

11.2.3 Kvalitetsfunktional

Funktionalen som ska minimeras är:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{önskad}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

där $y_{\text{önskad}}(x)$ är måltillståndet och $\lambda > 0$ är en regulariseringsparameter som straffar styrningens intensitet.

11.2.4 Del 1: Grundläggande systemanalys

11.2.5 1. Existens och entydighet av lösning

Förklara varför ekvationen med givna begynnelse- och randvillkor har en entydig lösning för en given styrning $u(t)$. Använd lämpliga funktionella rum (t.ex. Sobolev-rum $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$) för att definiera svag lösning.

11.2.6 2. Påverkan av styrningsbegränsningar

Diskutera hur begränsningarna

$$0 \leq u(t) \leq U_{\max}$$

påverkar problemets egenskaper. Jämför med fallet utan begränsningar, och betona rollen av konvexitet och skillnader i optimalitetsvillkor.

11.2.7 Del 2: Variationsanalys och optimalitetsvillkor

11.2.8 1. Gâteaux-derivata

Antag att $J(u)$ är differentierbar. Hitta Gâteaux-derivatan av funktionalen J i punkten $u_0(t)$ i riktningen $h(t)$. Tips: Betrakta tillståndet $y_h(x,t)$ som svarar mot styrningen $u_0(t) + \varepsilon h(t)$, och beräkna

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

11.2.9 2. Roll för det adjungerade systemet

Förklara rollen för det adjungerade systemet i optimal styrning av PDE. Hur underlättar det beräkning av gradienten av funktionalen och hur relaterar det till tillståndets känslighet?

11.2.10 3. Nödvändiga första ordningens optimalitetsvillkor

Beskriv det nödvändiga första ordningens villkoret för optimal styrning $u^{\cdot}(t)$ inom mängden U_{ad}. Förklara den geometriska tolkningen av gradienten och mängden tillåtna styrningar, och varför detta garanterar ett minimum.

11.2.11 Del 3: Avancerad analys och gränsbeteende

11.2.12 1. Påverkan av regulariseringsparametern

Diskutera hur regulariseringsledet

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

påverkar den optimala styrningen u

11.2.12 2. Strikt ε-δ-bevis

Anta att den optimala styrningen $u^{\cdot}(t)$ är känd. Bevisa med ett ε-δ-argument att slutliga tillståndet $y(x,T)$ kan approximeras till $y_{\text{önskad}}(x)$ med godtycklig noggrannhet $\varepsilon > 0$. Definiera tydligt:

- ε: tillåten felmarginal mellan tillståndet och målet,
- δ: tillåten avvikelse i styrningen eller parametrar (t.ex. $-u^{\cdot}| < \delta$).

Kategori: Bevis, Lösning och Lösa, Analys, Byggande och Design, Tolkning **Svårighetsgrad**: Mörk Sida **Taggar**:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: addf7bb2-2790-4d0c-8ef6-3ddc4991b475 den 21.06.2025

Việc sử dụng các công cụ hỗ trợ như máy tính, bộ công thức, bảng tính và công cụ kỹ thuật số chỉ được phép theo các điều kiện được nêu rõ. Các công cụ hỗ trợ được phép phải được khai báo trước cho kỳ thi và được giám thị kỳ thi chấp thuận. Bất kỳ công cụ hỗ trợ trái phép nào đều bị cấm và có thể dẫn đến việc bị loại. Trong khi làm bài tập hoặc kỳ thi, việc sử dụng các tài liệu bổ sung hoặc hỗ trợ bên ngoài đều bị cấm trừ khi được phép rõ ràng. Việc tuân thủ các quy định này đảm bảo rằng tất cả người tham gia đều làm việc trong các điều kiện công bằng và bình đẳng. Bắt đầu với điểm Nam là 3, tất cả người tham gia có thể sử dụng tất cả các công cụ hỗ trợ có thể.

Vi phạm các quy định này có thể dẫn đến hậu quả nghiêm trọng. Đặc biệt là trong các kỳ thi chính thức, việc sử dụng các công cụ hỗ trợ trái phép có thể dẫn đến việc bị loại ngay lập tức khỏi kỳ thi. Trong các trường hợp lặp lại hoặc đặc biệt nghiêm trọng, thậm chí có thể bị cấm thi vĩnh viễn. Việc tuân thủ các quy định này đảm bảo rằng tất cả người tham gia đều làm việc trong các điều kiện công bằng và bình đẳng và tính toàn vẹn của kỳ thi được duy trì.

Phiếu bài tập này phục vụ mục đích của bài tập và có thể được nộp chính thức trong một số điều kiện nhất định. Đồng thời, nó nên được coi là một tài liệu không chính thức vì nó được tạo ra mà không có sự giám sát của hành chính.

1. **Ghi nhãn đúng** - Tài liệu phải được đánh dấu rõ ràng là bài tập.
2. **Hoàn thiện và Định dạng** - Tài liệu phải ở định dạng được công nhận (ví dụ: PDF hoặc bản in) và chứa tất cả nội dung bắt buộc.
3. **Nộp đúng hạn** - Phải nộp trong thời hạn quy định.
4. **Phê duyệt của Cơ quan có thẩm quyền** - Sự công nhận chính thức đòi hỏi phải có sự chấp thuận của cơ quan kiểm tra hoặc hành chính có liên quan.
5. **Không có sự hỗ trợ bên ngoài** - Tài liệu phải do cá nhân có liên quan tạo ra, không có sự hỗ trợ bên ngoài.
6. **Không đảm bảo đánh giá** - Vì tờ giấy này được chuẩn bị mà không có sự giám sát của cơ quan hành chính nên không có nghĩa vụ phải xem xét để đánh giá chính thức.
7. **Không chịu trách nhiệm** - Tác giả không chịu trách nhiệm về tính chính xác hoặc tính đầy đủ của nội dung.
8. **Không có tư cách chính thức** - Tài liệu này không phải là tài liệu chính thức và không có tư cách pháp lý giống như tài liệu được cấp chính thức.
9. **Không đảm bảo công nhận** - Việc nộp tài liệu này không đảm bảo được bất kỳ cơ quan hoặc tổ chức nào công nhận hoặc xem xét chính thức.
10. **Không đảm bảo tính bảo mật** - Không thể đảm bảo việc bảo vệ dữ liệu cá nhân và tính bảo mật.
11. **Không đảm bảo an ninh** - Không đảm bảo tính bảo mật của nội dung và dữ liệu có trong đó.
12. **Không đảm bảo tính xác thực** - Không thể xác nhận tính xác thực của thông tin hoặc dữ liệu trong tài liệu.
13. **Không đảm bảo tính toàn vẹn** - Không thể đảm bảo tính xác thực hoặc tính toàn vẹn của nội dung.
14. **Không đảm bảo tính hợp lệ** - Tài liệu có thể chứa nội dung mà tính hợp lệ về mặt pháp lý hoặc kỹ thuật không thể xác nhận được.
15. **Không đảm bảo độ tin cậy** - Không thể đảm bảo tính chính xác, đầy đủ hoặc độ tin cậy của thông tin.

Mọi thứ đều dựa trên sự tin tưởng, vì vậy hãy vui vẻ.

12.1 VN 1 No.26-1PALLV1.0: Biến đổi đồng nhất trong không gian Euclid n chiều

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Một Bản Gốc*

Một ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **đẳng cự** nếu nó bảo toàn khoảng cách Euclid giữa hai điểm, tức là với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

12.1.1 Bài tập:

1. **Đẳng cự tuyến tính:**

Chứng minh rằng mọi ánh xạ đẳng cự tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có thể biểu diễn bằng một ma trận trực giao $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tức là $T(x) = Ax$, $A^\top A = I$.

2. **Đẳng cự affine:**

Xác định tất cả ánh xạ đẳng cự f có dạng affine $f(x) = Ax + b$, trong đó A là ma trận trực giao, $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Bảo toàn tích vô hướng:**

Với hai vector đơn vị $u, v \in \mathbb{R}^n$, chứng minh rằng ánh xạ tuyến tính đẳng cự f bảo toàn tích vô hướng:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Ví dụ ánh xạ không tuyến tính:**

Đưa ra một ví dụ về ánh xạ không tuyến tính nhưng vẫn bảo toàn khoảng cách. Chứng minh rằng f là ánh xạ đẳng cự.

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Tính toán, Xây dựng và Thiết kế **Độ khó**: Trung Bình Cao **Thẻ**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: e98a587c-c2b7-4363-9eda-4d7453bb5809 vào 31.05.2025

12.2 VN 1 No.26-2PALLV1.0: Bài toán chứng minh: đặc trưng của ánh xạ đồng nhất trong $\mathbb{R}^n$

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Một Bản Gốc*

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đẳng cấu, tức là:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Cần chứng minh: Mọi ánh xạ đẳng cấu f trên $\mathbb{R}^n$ đều là ánh xạ affine dạng $f(x) = Ax + b$ với A là ma trận trực giao, hoặc có thể được biểu diễn như một tổ hợp của các ánh xạ như vậy với các phép phản xạ hoặc tịnh tiến. **Gợi ý nâng cao (tùy chọn):** Chứng minh rằng tập hợp tất cả các ánh xạ đẳng cấu trên $\mathbb{R}^n$ tạo thành một nhóm với phép hợp thành —gọi là *nhóm Euclid* $\mathrm{E}(n)$.

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Tính toán, Xây dựng và Thiết kế **Độ khó**: Trung Bình Cao **Thẻ**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: bb34f908-3f65-4add-8596-5d9bb5e1b3bb vào 31.05.2025

12.3 VN 1 No.27PALLV1.0: Phép đẳng cự trong không gian Euclidean n chiều và nhiệm vụ chứng minh: Đặc tính của phép ánh xạ đẳng cự trong $\mathbb{R}^n$

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Một Bản Gốc*

Một ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **đẳng cấu** (isometry) nếu nó bảo toàn khoảng cách Euclid giữa hai điểm, tức là với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ ta có:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

12.3.1 Bài tập:

1. **Đẳng cấu tuyến tính:**

Chứng minh rằng mọi đẳng cấu tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có thể được biểu diễn bởi một ma trận trực giao $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tức là:

$$T(x) = Ax \quad \text{với} \quad A^\top A = I.$$

2. **Đẳng cấu affine:**

Xác định tất cả các đẳng cấu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ đồng thời là ánh xạ affine, tức là có dạng:

$$f(x) = Ax + b,$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận trực giao và $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Bảo toàn tích vô hướng:**

Cho $u, v \in \mathbb{R}^n$ là hai vectơ đơn vị. Chứng minh rằng mọi đẳng cấu tuyến tính f bảo toàn tích vô hướng, tức là:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

4. **Xây dựng một đẳng cấu đặc biệt:**

Cho ví dụ về một đẳng cấu không tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ không phải là ánh xạ tuyến tính nhưng vẫn bảo toàn khoảng cách. Chứng minh rằng f thực sự là đẳng cấu.

12.3.2 Bài toán chứng minh: Đặc trưng các ánh xạ đẳng cấu trên $\mathbb{R}^n$

Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một đẳng cấu, tức là:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

12.3.3 Cần chứng minh:

Mọi đẳng cấu f trên $\mathbb{R}^n$ là ánh xạ affine có dạng

$$f(x) = Ax + b,$$

trong đó A là ma trận trực giao, hoặc có thể được biểu diễn dưới dạng kết hợp của các ánh xạ affine này với phép phản chiếu hoặc phép tịnh tiến.

12.3.4 Mở rộng (tùy chọn):

Chứng minh rằng tập hợp tất cả các đẳng cấu trên $\mathbb{R}^n$ tạo thành một nhóm theo phép hợp thành, gọi là **nhóm Euclid** $\mathrm{E}(n)$.

Danh mục: Chứng minh, Xây dựng và Thiết kế **Độ khó**: Trung Bình Cao **Thẻ**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 45bc8662-0585-484b-aca4-3e487e748bc8 vào 07.06.2025

12.4 VN 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Điều khiển tối ưu của một quá trình khuếch tán

Thời gian ước tính để giải quyết: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Một Bản Gốc*

12.4.1 Mô tả bài toán

Bài toán này nghiên cứu việc sử dụng giải tích hàm và phép biến phân trong điều khiển tối ưu, với mối liên hệ chặt chẽ đến cơ học lượng tử và kỹ thuật.

12.4.2 Đặt bài toán

Xét một hệ thống một chiều, trong đó hàm trạng thái $y(x,t)$ (ví dụ: phân bố nhiệt độ hoặc nồng độ) phụ thuộc vào biến không gian $x \in [0,L]$ và thời gian $t \in [0,T]$. Sự phát triển của hệ được mô tả bởi phương trình khuếch tán có điều khiển $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

Điều kiện biên:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, với $t \in (0,T]$

Điều kiện đầu:

- $y(x,0) = y_0(x)$, với $x \in [0,L]$

Với $\alpha > 0$ là hệ số khuếch tán và $g(x)$ là hàm mô tả cách điều khiển tác động theo không gian. Giả sử $y_0(x)$ và $g(x)$ có tính trơn phù hợp. Mục tiêu là tìm điều khiển tối ưu $u(t)$ thuộc tập điều khiển khả thi:

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

12.4.3 Hàm mục tiêu

Hàm mục tiêu cần được tối thiểu hóa là:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{mục tiêu}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

Với $y_{\text{mục tiêu}}(x)$ là trạng thái đích mong muốn, và $\lambda > 0$ là hệ số điều chuẩn nhằm trừng phạt điều khiển quá mạnh.

12.4.4 Phần 1: Phân tích hệ cơ bản

12.4.5 1. Tồn tại và duy nhất nghiệm

Giải thích vì sao phương trình với điều kiện đầu và biên đã cho có nghiệm duy nhất cho mỗi điều khiển $u(t)$. Sử dụng các không gian hàm thích hợp (ví dụ: Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$) để định nghĩa nghiệm yếu.

12.4.6 2. Ảnh hưởng của ràng buộc điều khiển

Thảo luận ảnh hưởng của ràng buộc:

$$0 \leq u(t) \leq U_{\max}$$

đối với tính chất của bài toán. So sánh với trường hợp không có ràng buộc và nêu bật vai trò của tính lồi trong bài toán.

12.4.7 Phần 2: Phân tích biến phân và điều kiện tối ưu

12.4.8 1. Đạo hàm Gâteaux

Giả sử $J(u)$ khả vi. Hãy tính đạo hàm Gâteaux của J tại $u_0(t)$ theo hướng $h(t)$. Gợi ý: Xét trạng thái $y_h(x,t)$ ứng với điều khiển $u_0(t) + \varepsilon h(t)$, và tính:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

12.4.9 2. Vai trò hệ phụ hợp (adjoint system)

Giải thích vai trò của hệ phụ hợp trong điều khiển tối ưu PDE. Hệ này giúp tính đạo hàm của hàm mục tiêu như thế nào và có liên hệ gì đến độ nhạy trạng thái?

12.4.10 3. Điều kiện tối ưu bậc nhất

Mô tả điều kiện cần bậc nhất để $u^{\cdot}(t)$ là điều khiển tối ưu thuộc tập U_{ad}. Giải thích trực giác hình học về đạo hàm và tập điều khiển khả thi, tại sao điều kiện này đảm bảo tối ưu cục bộ.

12.4.11 Phần 3: Phân tích nâng cao và giới hạn

12.4.12 1. Ảnh hưởng của tham số điều chuẩn

Thảo luận ảnh hưởng của thành phần điều chuẩn:

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

đến điều khiển tối ưu u

12.4.12 2. Chứng minh ε-δ chặt chẽ

Giả sử điều khiển tối ưu $u^{\cdot}(t)$ đã biết. Hãy chứng minh bằng lập luận ε-δ rằng trạng thái cuối $y(x,T)$ có thể tiệm cận $y_{\text{mục tiêu}}(x)$ với sai số tuỳ ý $\varepsilon > 0$. Cần xác định rõ:

- ε: mức sai số cho phép giữa trạng thái và mục tiêu
- δ: sai lệch điều khiển hoặc tham số cho phép (ví dụ: $-u^{\cdot}| < \delta$)

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Phân tích, Xây dựng và Thiết kế, Diễn giải **Độ khó**: Mặt Tối **Thẻ**:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 1c8484b9-af7e-4581-b2bd-d939ce8b3556 vào 21.06.2025

僅在明確規定的條件下才允許使用計算器、公式集、電子表格和數位工具等輔助工具。考試時必須事先申報允許使用的輔助器材，並獲得考試監督員的批准。禁止任何未經授權的輔助，否則可能導致取消資格。在完成作業或考試時，除非明確允許，否則禁止使用額外的材料或外部協助。遵守這些規定可確保所有參與者在公平、平等的條件下運作。從 Nam 分數為 3 開始，所有參與者都可以使用所有可能的輔助工具。

違反這些規定可能會造成嚴重後果。特別是在正式考試中，使用未經授權的輔助工具可能會導致立即被取消考試資格。對於重複或特別嚴重的情況，甚至可能被處以永久禁止參加考試的處罰。遵守這些規定可確保所有參與者在公平、平等的條件下運作，並維護考試的完整性。

此表用於練習目的，在一定條件下可以正式提交。同時，由於它是在沒有行政監督的情況下創建的，因此應該被視為非官方文件。

1. **正確標記** - 該文件必須清楚標示為練習表。
2. **完整性和格式** - 它必須採用可識別的格式（例如 PDF 或列印副本）並包含所有必要的內容。
3. **及時提交** - 必須在指定的期限內提交。
4. **主管機關核准** - 官方認可需要主管審查或行政機構的批准。
5. **無外部幫助** - 該文件必須是由相關人員獨自創建的，無需外部幫助。
6. **不保證評分** - 由於論文是在沒有行政監督的情況下準備的，因此沒有義務考慮對其進行官方評分。
7. **無責任** - 作者對內容的準確性或完整性不承擔任何責任。
8. **無官方地位** - 該文件不是官方文件，不具有與正式頒發的文件相同的法律地位。
9. **不保證獲得認可** - 提交此文件並不保證獲得任何當局或機構的認可或官方考慮。
10. **不保證保密** - 無法保證個人資料的保護和保密性。
11. **不保證安全** - 不保證其中包含的內容和資料的安全性。
12. **不保證真實性** - 無法確認文件中資訊或資料的真實性。
13. **不保證完整性** - 無法保證所含內容的真實性或完整性。
14. **不保證有效性** - 文件可能包含無法確認其法律或技術有效性的內容。
15. **不保證可靠性** - 無法保證資訊的準確性、完整性或可靠性。

一切都基於信任，因此很有趣。

13.1 ZH SHK-1 No.23PALLV1.0: 無型 *lambda* 演算中的遞歸與不動點組合器

解决的预计时间: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* 原创

給出了具有完整 β 約簡的無類型 lambda 演算。自然數的 Church 編碼“iszero”、“pred”和“mult”被認為是眾所周知的。設不動點組合子 $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ 以及函數:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

任務: 正式且完整地證明 $Y\ F$ 是根據 Church 編碼計算階乘的正確遞歸程序。需要詳細表明以下幾點:

1. **固定參數的約簡**: 對項 $(Y\ F)\ 3$ 進行完整的 β 約簡。指定直至最終 Church 編碼的所有簡化步驟。
2. **透過歸納證明正確性**: 對 Church 數進行結構化歸納證明，證明對於所有 $n \in \mathbb{N}$，以下成立:

$$\square Y\ F \square\ n \to^{*}_{\beta} \text{fac}_n$$

其中 fac_n 是 $n!$ 的 Church 編碼。

3. **不動點性質** : 正式證明 $Y\ F = F\ (Y\ F)$，並說明為何該表達式允許遞歸計算。
4. **與 Z-Combinator 的比較:**

- 定義 Z-組合子。
- 比較 $(Y\ F)\ 3$ 和 $(Z\ F)\ 3$ 的減少長度。
- 討論在哪些情況下應該優先選擇 Z。

注意: 對於所有減少步驟，必須明確指定中間項。請勿無故使用簡化或跳躍。

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: a94a62e4-a6bf-4386-8c65-5e294ef85c8d 日期 17.05.2025

13.2 ZH SHK-2 No.24PALLV1.0: zeta 函數和 *gamma* 函數在量子場論的配分函數和真空能量中的作用

解決的预计时间: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 原创

研究並證明 zeta 和 gamma 函數在量子場論正則化和熱力學中的作用，特別是在配分函數和真空能量的背景下。

13.2.1 任務

給定一個緊湊時空中的標量量子場，其時間維度具有週期性 β(對應於溫度 $T = 1/\beta$) 和空間維度 L。該場的固有頻率為:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

使用 zeta 正規化，證明熱力學配分函數

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

可以使用黎曼 zeta 函數和 gamma 函數的解析擴展進行定期計算。

13.2.2 子任務

1. **受控真空能量的推導**

使用 **zeta 函數**推導受控真空能量的表達式 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$。表明:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

並使用梅林變換將表達式轉換為伽馬函數形式。

2. **簡化為 Epstein zeta 函數**

證明 n 和 m 的雙和可以表示為 Epstein zeta 函數。分析其分析性質。

3. **溫度依賴性和熱力學函數**

利用正規化表達式推導自由能 F(beta)、內能 U(beta) 和熵 S(beta)。展示伽馬函數在高溫和低溫的漸近展開中如何出現。

4. **與卡西米爾能量的比較**

證明配分函數的零溫度極限轉變為卡西米爾能量，而正則化產生與經典 zeta-卡西米爾方法完全相同的形式。

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: NUM **标签**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: b14eff42-fdc0-4ebc-880f-05167a978cbe 日期 24.05.2025

13.3 ZH SHK-3 No.25PALLV1.0: 高斯波包的動量空間表示

解決的预计时间: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 原创

13.3.1 任務*:* 高斯波包的動量空間表示

給定一個一維量子力學粒子，其波函數在位置空間:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

此函數描述具有高斯空間分佈的靜止、自由移動的粒子。

13.3.2 **子任務**

13.3.3 波函數的歸一化

決定標準化常數 A，使得波函數標準化，即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

13.3.4 傅立葉轉換到動量空間

根據下列公式利用傅立葉轉換計算波函數的動量空間表示 $\phi(p)$:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

完成積分並以明確形式表述所得函數 $\phi(p)$。

13.3.5 海森堡不確定原理

分別決定位置和動量分佈的標準差 σ_x 和 σ_p:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

並證明這些散射的乘積滿足海森堡不確定性原理:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

13.3.6 極限情況的物理解釋

定性地討論物理極限情況 $a \to 0$。動量空間表示 $\phi(p)$ 會發生什麼情況，以及如何從物理上解釋這種極限情況？參考局部化和脈衝不確定性的概念。

13.3.7 **通知*:***

此任務也適合在 Python 或 MATLAB 中進行數值評估和圖形表示。或者，也可以使用合適的軟體工具 (例如 SymPy 或 Mathematica) 以符號方式驗證傅立葉變換。

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 07f300e8-9ad4-4552-8048-256b953aecc1 日期 24.05.2025

13.4 ZH 1 No.26-1PALLV1.0: n 維歐氏空間中的等距

解决的预计时间: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 原创

若映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 保持兩點間的歐幾里得距離，則稱其為**等距映射（Isometry）**，即對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

13.4.1 題目：

1. **線性等距映射：**

證明每個線性等距映射 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可由正交矩陣 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示，即 $T(x) = Ax$ 且 $A^\top A = I$。

2. **仿射等距映射：**

找出所有形式為 $f(x) = Ax + b$ 的等距映射，其中 A 為正交矩陣，$b \in \mathbb{R}^n$。

3. **內積保持性：**

設 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 為單位向量，證明線性等距映射 f 保持內積：

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **非線性等距映射的構造：**

給出一個非線性但仍保距的等距映射例子，並證明該映射確實是等距的。

类别: 证明, 解决和解答, 计算, 构建和设计 **难度**: 更中等 **标签**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 70548499-05d5-4926-9c2d-70466c165b00 日期 31.05.2025

13.5 ZH 1 No.26-2PALLV1.0: 證明題目：$\mathbb{R}^n$ 中等距映射的特徵

解决的预计时间: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 原创

設 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 為一個等距映射，也就是說：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{對所有} x, y \in \mathbb{R}^n.$$

需證明：任何等距映射 f 皆為一個仿射映射，其形式為 $f(x) = Ax + b$，其中 A 為正交矩陣，或可表示為此類映射與反射或平移的組合。**進階補充（可選）：**證明所有 $\mathbb{R}^n$ 上的等距映射在合成下形成一個群，即所謂的 歐幾里得群 $\mathrm{E}(n)$。

类别: 证明, 解决和解答, 计算, 构建和设计 **难度**: 更中等 **标签**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 0854d323-52c5-479f-8685-324bccfc0093 日期 31.05.2025

13.6 ZH 1 No.27PALLV1.0: n 维欧几里得空间的等距映射和证明任务：$\mathbb{R}^n$ 中的等距映射特征化

解决的预计时间: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 原创

一个映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 称为**等距映射** (Isometry), 如果它保持两个点之间的欧几里得距离不变, 即对所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 有：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

13.6.1 练习：

1. **线性等距映射：**

证明每个线性等距映射 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可以用一个正交矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示，即：

$$T(x) = Ax \quad 且 \quad A^\top A = I.$$

2. **仿射等距映射：**

确定所有同时是仿射映射的等距映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，即形如：

$$f(x) = Ax + b,$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交矩阵，$b \in \mathbb{R}^n$。

3. **内积保持性：**

设 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 是单位向量。证明任一线性等距映射 f 保持内积不变，即：

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

4. **构造特殊等距映射：**

给出一个非线性等距映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的例子，该映射不是线性的，但仍保持距离。证明 f 确实是等距映射。

13.6.2 证明题：$\mathbb{R}^n$ 中等距映射的特征

设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个等距映射，即满足：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

13.6.3 需证明：

所有的等距映射 f 要么是仿射映射，形如

$$f(x) = Ax + b,$$

其中 A 是正交矩阵；或者可以通过这些仿射映射与反射、平移的组合来表示。

13.6.4 拓展（可选）：

证明所有等距映射构成一个在合成下的群，称为**欧几里得群** $\mathrm{E}(n)$。

类别: 证明, 构建和设计 **难度**: 更中等 **标签**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 5405a62a-d519-498e-a671-279666c67dda 日期 07.06.2025

13.7 ZH 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: 扩散过程的最优控制

解决的预计时间: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* 原创

13.7.1 问题描述

本题研究泛函分析与变分法在最优控制中的应用，涉及与量子力学与工程技术的紧密联系。

13.7.2 问题设定

考虑一维系统，其状态函数 $y(x,t)$（如温度分布或浓度）依赖于空间变量 $x \in [0,L]$ 和时间变量 $t \in [0,T]$。系统的演化由一个带有控制项 $u(t)$ 的扩散方程描述：

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T)$$

边界条件：

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$，其中 $t \in (0,T]$

初始条件：

- $y(x,0) = y_0(x)$，其中 $x \in [0,L]$

其中 $\alpha > 0$ 为扩散系数，$g(x)$ 是描述控制在空间中如何作用的函数。假设 $y_0(x)$ 与 $g(x)$ 是足够光滑的函数。目标是寻找控制函数 $u(t)$，其属于可接受控制集合：

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\max}\}$$

13.7.3 目标泛函

希望最小化的目标函数为：

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{目标}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

其中 $y_{\text{目标}}(x)$ 是期望的目标状态，$\lambda > 0$ 是调节参数，用于惩罚过强的控制力度。

13.7.4 第一部分：基础分析

13.7.5 *1.* 解的存在性与唯一性

说明为何上述 PDE 在给定控制 $u(t)$ 下存在唯一的解。请使用适当的函数空间（如 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$，或 $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$）来定义弱解。

13.7.6 *2.* 控制约束的影响

讨论约束：

$$0 \le u(t) \le U_{\max}$$

对问题性质的影响。请与无约束情形进行对比，重点强调问题凸性的作用。

13.7.7 第二部分：变分分析与最优性条件

13.7.8 *1. Gâteaux* 导数

假设泛函 $J(u)$ 可微，计算在 $u_0(t)$ 点沿方向 $h(t)$ 的 Gâteaux 导数：提示：考虑状态 $y_h(x,t)$ 对应于控制 $u_0(t)+\varepsilon h(t)$，并计算：

$$\frac{d}{d\varepsilon}J(u_0+\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

13.7.9 *2.* 对偶系统（伴随系统）的角色

解释对偶系统在最优控制中的作用。它如何帮助计算目标函数的导数？状态灵敏度又如何体现？

13.7.10 *3.* 一阶最优性条件

说明控制函数 $u^{\cdot}(t)$ 成为最优解的必要一阶条件，并解释这些条件在可行集上的几何直觉。为何它能保证局部最优？

13.7.11 第三部分：高级分析与极限过程

13.7.12 *1.* 正则化参数的影响

讨论正则化项：

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

对最优控制 u

13.7.12 *2.* – 严格论证

假设已知最优控制 u

ε：目标状态允许的误差

- δ：控制扰动允许的范围（例如在 L^2 范数中）

类别: 证明, 解决和解答, 分析, 构建和设计, 解释 **难度**: 黑暗面 **标签**:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 3bcdcbf3-51ed-4a98-9693-0d3b32849688 日期 21.06.2025

14.1 DE SH-1 No.1PALLV1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Zeit zur Bearbeitung: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Ein Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

14.1.1 Lösung

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Aussage für n wahr.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Dann gilt:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Einfach **Stichwörter**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen **UUID**: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

14.2 DE SKK-1 No.4-1PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

14.2.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n-1)$-Hyperfläche.

14.2.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können. Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

14.2.3 Lösung

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

14.3 DE SKK-1/2 No.4-2PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

14.3.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

14.3.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird. Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

14.3.3 Lösung

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

14.4 DE SKK-1/3 No.4-3PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3

Zeit zur Bearbeitung: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

14.4.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n-1)$-Hyperfläche.

14.4.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können. Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

14.4.3 Lösung

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

14.5 DE SKK-1/4 No.4-4PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

Zeit zur Bearbeitung: 10 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

14.5.1 Aufgabe

Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$. Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

14.5.2 Lösung

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

14.6 DE SKT-1 No.5PALLV1.0: Abstände im n-dimensionalen Raum

Zeit zur Bearbeitung: 50 min *Nam-Score: 1.2* *Ein Original*

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der i-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:

$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

2. Stelle die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **$(n-1)$-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

14.6.1 Lösung

1. **Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben** Gegeben: Die Punkte $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ sind:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \qquad P_j = e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Unterschied zweier Punkte: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$ Dieser Vektor hat:

- an Stelle i: 1,
- an Stelle j: -1,
- sonst 0

Norm:

$$\| P_i - P_j \|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

$\rightarrow$ Alle Punkte haben den gleichen Abstand zueinander.

2. **Matrixdarstellung**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Lineare Unabhängigkeit Definition**: Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$$

Beweis:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Standardbasis ist **linear unabhängig**.

4. **Volumen des regulären Simplex in** $\mathbb{R}^{n-1}$ Wir verschieben die Punkte so, dass sie im Ursprung liegen, und berechnen das Volumen mithilfe von Gram-Determinanten oder der Formel für das Volumen eines Simplex aus Vektoren: **Volumenformel für Simplex aus Vektoren** Für ein $(n-1)$-Simplex S mit Basisvektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\mathrm{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

wobei G die **Gram-Matrix** ist:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Es ist bekannt, dass das Volumen eines regulären Simplex mit Kantenlänge ℓ in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist:

$$\mathrm{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

Für $\ell = \sqrt{2}$:

$$\mathrm{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

Das ist das Volumen eines Simplex mit n Eckpunkten und Kantenlänge $\sqrt{2}$.

5. **Punktetabelle**

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f am 19.04.2025

Table 1: Punktevergabe für die Lösung

Kondition	**Beschreibung**	**Punkte**
Norm Gleichung Aufstellen	Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben.	3
Matrix	Stelle die Punkte als Matrix dar.	1
Gleichung und Unabhängigkeit	Beweise die lineare Unabhängigkeit.	2
Volumenformel	Leite die Volumenformel für das Simplex her.	1
Beispiel	Führe eine Beispielrechnung durch.	2
Allgemeine Zusammenfassung	Fasse die Ergebnisse zusammen.	2

14.7 DE SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensionale Flächendurchlauf-Prozesse und Erreichbarkeitsgraphen

Zeit zur Bearbeitung: 91 h 40 min *Nam-Score: 5* *Ein Original*

Gegeben sei eine Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $|P| = kn$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wobei die Punkte in allgemeiner Lage liegen (d.h. keine $n+1$ Punkte liegen in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene). Ein Drehdurchlaufprozess funktioniert wie folgt:

- Wähle einen Startpunkt $p_0 \in P$.
- Konstruiere eine $(n-1)$-Hyperfläche (eine "Drehfläche") durch diesen Punkt.
- Diese Hyperfläche wird kontinuierlich in festgelegter Weise (z.B. gemäß einer festen Orientierung im Raum) gedreht.
- Sobald ein weiterer Punkt $p_i \in P$ von der Fläche "berührt" wird (das heißt, sich auf der Fläche befindet), wird p_i zum neuen Ankerpunkt.
- Die Bewegung wird dort fortgesetzt.

14.7.1 Erweiterung

- Zwischen jeder Drehung wird die Orientierung der Fläche mit einer gegebenen Matrix aus $SO(n)$ verändert (d.h. jede Rotation ist durch einen Übergangsoperator festgelegt).
- Zwischenpunktsbeziehungen werden als gerichteter Graph $G = (V, E)$ gespeichert, wobei ein gerichteter Übergang $p_i \to p_j$ besteht, wenn p_j durch eine zulässige Drehung von p_i erreicht wurde.

14.7.2 Aufgaben

1. Beweise oder widerlege: Für bestimmte Punktkonfigurationen (z.B. reguläre Gitter, zufällige Punktwolken, Punkte auf Sphären oder simplizialen Flächen) ist der Erreichbarkeitsgraph stark zusammenhängend.
2. Finde einen allgemeinen Algorithmus, der für beliebiges n und Punktmenge P entscheidet, ob eine vollständige Erreichbarkeit aller Punkte durch den Prozess möglich ist.
3. Untersuche: Wie verändert sich die Erreichbarkeit bei Einführung von Übergangsverzögerungen oder zufälligen Störfaktoren in der Drehung?
4. Formuliere eine Optimierung: Finde einen minimalen Rotationspfad durch alle Punkte, der die Übergangsregeln beachtet.
5. Entwirf eine Visualisierung (in 2D, 3D oder nD-Projektionen), die den Prozess und Graphen dynamisch zeigt.

14.7.3 Lösung

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Graphen, Hypergraphen, Flächendurchlauf-Prozesse, Erreichbarkeitsgraphen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

14.8 DE SH-3 No.7PALLV1.0: Analyse und Klassifikation von Wellensuperpositionen im gekrümmten Raum

Zeit zur Bearbeitung: 73 h 50 min *Nam-Score: 7.5* *Ein Original*

Ein gekrümmter Raum $\mathbb{R}^3$ mit einer glatten Metrik $g_{ij}(x, y, z)$, in dem sich eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ ausbreitet. Diese erfüllt die verallgemeinerte Wellengleichung:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|}\partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

mit $|g| = \det(g_{ij})$ und c als lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit. Aufgaben:

1. Löse (symbolisch oder numerisch) die Wellengleichung im Spezialfall einer sphärisch symmetrischen Metrik:

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

   mit geeigneten Randbedingungen (z. B. Dirichlet auf einer Kugeloberfläche $r = R$).

2. Zeige, dass sich die Lösung Ψ als Superposition von Eigenfunktionen der Laplace-Beltrami-Operatoren schreiben lässt, und berechne explizit die ersten nichttrivialen Moden.

3. Berechne das Gesamtenergiespektrum durch Integration über den Raum:

   $$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right] \sqrt{|g|}\, d^3x$$

4. Untersuche numerisch oder analytisch, wie sich die Energie über die Zeit verteilt –insbesondere bei Interferenz von zwei punktförmigen Quellen mit zeitlich phasenverschobener Emission.

5. Optional (Bonus): Modelliere und visualisiere den Effekt eines zeitabhängigen Metrikterms, etwa $g_{ij}(x, t)$, der eine Gravitationswelle simuliert. Untersuche, wie sich die Interferenzstruktur und Energieverteilung verändert.

14.8.1 Lösung

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Analyse, Klassifikation, Wellen, Raumkrümmung
UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 023cf134-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

14.9 DE SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastische Analyse von Wellenphänomenen mittels Fourier- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Zeit zur Bearbeitung: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *Ein Original*

Untersuchen Sie ein raumzeitlich abhängiges Wellenphänomen unter dem Einfluss eines stochastischen Rauschens. Die Wellenfunktion sei gegeben durch:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

wobei:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ eine deterministische Basiswelle ist,
- $N(x,t,\omega)$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwert 0 und stationärer Kovarianzfunktion ist.

Gegeben: Ein Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

und bekannter Rauschstärke σ^2 sowie Skalenparameter $\lambda > 0$.

14.9.1 Aufgaben

1. **Modellierung:** Formulieren Sie $N(x,t,\omega)$ als Gauß-Prozess mit obiger Kovarianzfunktion.
2. **Simulation:** Simulieren Sie mehrere Realisierungen von $\Psi(x,t,\omega)$ auf einem Gitter (x_i,t_j) für verschiedene Parameter σ^2 und k.
3. **Statistik:** Berechnen Sie Erwartungswert $E[\Psi(x,t)]$ und Varianz $Var[\Psi(x,t)]$ sowohl analytisch als auch aus den simulierten Daten.
4. **Spektralanalyse:** Führen Sie eine Fourier-Zerlegung von $\Psi(x,t,\omega)$ durch und berechnen Sie die spektrale Energiedichte.
5. **Extremwertstatistik:** Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Maxima im Intervall $[a,b]$ mithilfe von Maximum-Likelihood oder Bayesianischen Methoden.

(Bonus) **Rekonstruktion:** Trainieren Sie ein neuronales Netz, das aus verrauschten Beobachtungen $\Psi(x,t,\omega)$ die Basiswelle $\psi(x,t)$ rekonstruiert.

14.9.2 Lösung

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: NAM **Stichwörter**: Stochastik, Analyse, Wellenphänomene, Fourier-Transformation, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

14.10 DE SH-5 Test.1PALLV1.0: Zahlentheorie −Diophantische Gleichungen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *Ein Original*

Finde alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Diophantischen Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Erkläre deinen Lösungsweg und bestimme alle möglichen Werte für x und y, die diese Gleichung erfüllen. Diskutiere, wie man diese Art von Gleichung im Allgemeinen angehen kann.

14.10.1 Lösung

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Einfach **Stichwörter**: Zahlentheorie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763736 am 29.04.2025

14.11 DE SH-6 Test.2PALLV1.0: Kombinatorik –Anordnungen und Permutationen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Wie viele verschiedene Wege gibt es, 5 verschiedene Bücher auf 3 Regalen anzuordnen, wenn auf jedem Regal mindestens ein Buch platziert werden muss und die Regale keine unendliche Kapazität haben? Erkläre den Lösungsweg unter Verwendung der Prinzipien der Inklusion und Exklusion.

14.11.1 Lösung

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Kombinatorik
UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561273 am 29.04.2025

14.12 DE SH-7 Test.3PALLV1.0: Geometrie −Kreisgeometrie und Tangenten

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $r = 10$. Ein Punkt P liegt außerhalb des Kreises und hat einen Abstand von $OP = 17$. Bestimmen Sie die Länge der Tangente von P an den Kreis und erläutern Sie die Berechnung mithilfe des Satzes des Pythagoras. Erklären Sie, warum die Länge der Tangente nur von der Differenz zwischen den Abständen zwischen Punkt und Mittelpunkt und dem Radius des Kreises abhängt.

14.12.1 Lösung

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Geometrie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-198257198275 am 29.04.2025

14.13 DE SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta-Kombination durch Fouriertransformationen

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *Ein Original*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine glatte, rasch fallende Funktion (d. h. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), sodass für ihre Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx$$

folgende Identität gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Beweise mit Hilfe der Poissonschen Summenformel, dass die obige Gleichung unter geeigneten Bedingungen erfüllt ist.
2. Zeige, dass mit geeigneter Wahl von $f(x) = x^{-s}e^{-x}$ für $\Re(s) > 1$, sich Aussagen über die analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion ableiten lassen.
3. Untersuche, wie die Beziehung in höhere Dimensionen erweitert werden kann (Fourier auf dem $\mathbb{R}^n$) und welche Rolle dabei die symmetrische Struktur in der Zeta-Analyse spielt.
4. Betrachte die Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

und zeige, dass sie sich als eine Art Fourierreihe der Zeta-Funktion interpretieren lässt. Leite eine Darstellung in Abhängigkeit von $\hat{f}$ her.

14.13.1 Hinweise

- Verwende die Poisson-Summenformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Nutze Eigenschaften der Mellin-Transformation für Teilaufgaben zu $f(x) = x^{-s}e^{-x}$.
- Beachte: Diese Aufgabe verlangt ein Verständnis für komplexe Analysis, Distributionentheorie, Fouriertransformation und spezielle Funktionen.

14.13.2 Lösung

Keine Lust

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Zeta-Kombination, Fouriertransformationen, Zeta-Funktion

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-239238527383 am 03.05.2025

14.14 DE SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximale Schnitte in k-uniformen Hypergraphen

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben sei ein k-uniformer Hypergraph $H = (V, E)$, d. h. jeder Hyperrand $e \in E$ verbindet genau k Knoten aus der Knotenmenge V. Definiere einen **Schnitt** als eine Partition von V in zwei disjunkte Teilmengen $V_1 \cup V_2 = V$, wobei ein Hyperrand **geschnitten** ist, wenn er Knoten aus beiden Teilen enthält. Zeige oder widerlege: Für jedes $k \geq 2$ existiert eine Partition von V in zwei Mengen, sodass mindestens $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ Hyperkanten geschnitten werden. **Zusatz**: Wie ändert sich die untere Schranke bei zufälliger Partition?

14.14.1 Lösung

Keine Lust

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-230587091872 am 03.05.2025

14.15 DE KTB-1 No.14PALLV1.0: Optimale Komplexität eines adaptiven Primalitätsverfahrens

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *Ein Original*

Problemstellung Ein adaptiver Primalitätstest ist ein Algorithmus, der bei der Prüfung einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ auf Primzahl-Eigenschaft schrittweise zwischen probabilistischen und deterministischen Verfahren entscheidet. Beispiele sind Miller-Rabin, Baillie-PSW oder AKS. Entwickle und analysiere ein adaptives Primalitätsverfahren mit folgender Eigenschaft:

- Der Algorithmus startet mit einem probabilistischen Test (z. B. Miller-Rabin).
- Falls dieser Test mehrfach „bestanden“wird, führt das System bei Grenzfällen einen deterministischen Subtest durch (z. B. Lucas, ECPP, oder reduzierte AKS-Stufe).
- Die Gesamtkomplexität des Verfahrens ist abhängig von der Größe von n sowie von der angenommenen Fehlerwahrscheinlichkeit ε.

Aufgabe: Finde eine asymptotisch optimale Kombination solcher Verfahren (mit Beweis) und berechne die minimale erwartete Laufzeit für die Entscheidung „prim“vs. „nicht prim“unter Annahme realistischer Verteilungen zufällig gewählter Zahlen $n \in [1, N]$. **Ziel:**

- Analysiere das Modell der **Fehlerkontrollierten adaptiven Komplexität**.
- Entwickle eine Funktionsklasse $T(n, \varepsilon)$, die die Laufzeit (im Erwartungswert) des optimalen Verfahrens beschreibt.
- Vergleiche deine Lösung mit bekannten Verfahren wie Miller-Rabin (mehrfach), Baillie-PSW und deterministischem AKS.

14.15.1 Lösung

Kategorie: Kaiketsu und Toku, Bunseki, Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Schwer **Stichwörter**: **UUID**: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209843782653 am 11.05.2025

14.16 DE SHB-3 No.15PALLV1.0: Lösungsstruktur verallgemeinerter rekursiver Polynome

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben ist eine rekursive Definition:

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

mit Startwerten $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ und $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ Analysiere:

- Bedingungen für geschlossene Form
- Struktur der Nullstellen
- Zusammenhang mit klassischen Polynomen (z. B. Tschebyscheff-, Legendre-, Hermite-Polynome)

14.16.1 Lösungsstruktur (Allgemeine Schritte)

14.16.2 1. ***Analyse der Rekursion***

- Bestimme den Rekursionsgrad k
- Klassifiziere die Koeffizienten $a_i(x)$
  - Konstant? Linear? Allgemeines Polynom?

14.16.3 2. ***Charakteristisches Polynom***

- Führe eine Transformation analog zur linearen Rekursion ein:
  - Betrachte ggf. lineare Unabhängigkeit der Basis $P_0, \ldots, P_k$
- Finde Lösung über charakteristisches Polynom (bei konstanten a_i)

14.16.4 3. ***Darstellung über Matrixmethoden***

- Schreibe die Rekursion als Matrixsystem:

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

mit Vektor $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- Untersuche Eigenwerte und Eigenvektoren von $A(x)$

14.16.5 4. ***Vergleich mit bekannten Familien***

- Überprüfe, ob sich das Polynom in einer bekannten Klasse (orthogonal, symmetrisch etc.) einordnen lässt.

14.16.6 5. ***Nullstellenstruktur***

- Verwende numerische Verfahren zur Analyse der Nullstellen
- Untersuche Konvergenzverhalten (z. B. bei $n \to \infty$)

14.16.7 6. ***Symbolische Lösung (falls möglich)***

- Suche geschlossene Formen (z. B. durch Generating Functions, Umformung zu Differentialgleichungen)
- Finde explizite Darstellung über Basisfunktionen oder kombinatorische Strukturen

14.16.8 Lösung

Solution for n15 in de

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Schwer **Stichwörter**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 02d58e48-ddcb-4401-869a-c8e8a463a653 am 11.05.2025

14.17 DE SHKS-1 No.16PALLV1.0: Turing-Maschine mit beschränktem Gedächtnis –Korrektheitsbeweis

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *Ein Original*

Gegeben sei eine Turing-Maschine M_b, deren Arbeitsband auf $O(\log n)$ Speicherzellen beschränkt ist. Zeige, dass M_b korrekt eine bestimmte Sprache L entscheidet, z. B.:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

oder eine andere spezifische Sprache, bei der Speicherbeschränkung relevant ist.

14.17.1 Additionale Information

- Definitionen von Turingmaschinen (TM) und beschränkter Speicher (z. B. logarithmischer Platz)
- Formale Modelle wie LBA (Linear Bounded Automata)
- Vergleich mit regulären oder kontextfreien Sprachen
- Boolesche Logik & Invariantenmethoden
- Standard-Logikbeweise (z. B. Induktion, Widerspruch)
- Skizzen auf Papier oder Notizzettel

14.17.2 Anforderungen

*14.17.3 **1. Formale Spezifikation***

- Definiere die beschränkte TM M_b formal:
  - $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Begrenzung: Arbeitsbandgröße $\leq c \cdot \log n$

*14.17.4 **2. Sprache L beschreiben***

- Beweise, dass $L \in \mathsf{L}$ (entscheidbar mit logarithmischem Platz)
- Beispiele:
  - Ausgewogene Anzahl von Symbolen (z. B. gleiche Anzahl a und b)
- Erkennung einfacher regulärer Muster mit Platzoptimierung

*14.17.5 **3. Konstruktion/Simulation***

- Beschreibe die Strategie der TM mit wenig Speicher:
  - Lesezeichen (Pointer-Technik)
- Zwei-Pass-Verfahren
  - Zähler in Binärdarstellung auf Arbeitsband

*14.17.6 **4. Korrektheit***

- Verwende Invarianz oder Simulation:
  - Bei jedem Schritt bleibt die Invariante erhalten (z. B. Zählgleichheit)
- Zeige: Wenn TM akzeptiert, dann $w \in L$; wenn $w \in L$, dann akzeptiert TM

14.17.7 5. Platzkomplexität nachweisen

- Analyse: Alle Arbeitsschritte benötigen nur $O(\log n)$ Speicherzellen
- Argumentiere, dass keine unzulässige Speicherung erfolgt

14.17.8 6. Abschluss

- Beende mit einem vollständigen Beweis (z. B. durch vollständige Induktion über die Länge von w)
- Zeige, dass der beschränkte Speicher **ausreicht und korrekt arbeitet**

14.17.9 Lösung

Solution for n16 in de

Kategorie: Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 7cf1fbfd-0b70-48ef-9d18-bb5fc8419a55 am 11.05.2025

14.18 DE BUK-1 No.17PALLV1.0: Quantenfeldmodell einer Wellenpaketinterferenz

Zeit zur Bearbeitung: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *Ein Original*

Gegeben ist ein quantenfeldtheoretisches Modell zur Beschreibung der Interferenz zweier sich bewegender Wellenpakete im skalaren Feld. Entwickeln Sie ein vollständiges theoretisches und numerisches Modell, das die Konstruktion, Entwicklung und Interferenz der Wellenpakete innerhalb der Quantenfeldtheorie beschreibt und analysiert. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

1. **Theoretische Grundlagen**
    - Erläutern Sie die Quantisierung eines freien skalaren Feldes.
    - Leiten Sie den Feldoperator $\hat{\phi}(x,t)$ her.
    - Stellen Sie das Kommutatorverhalten von $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$ dar.
2. **Konstruktion der Wellenpaketzustände**
    - Definieren Sie zwei orthogonale Gausssche Impulsverteilungen $f_1(k)$, $f_2(k)$.
    - Leiten Sie den Zustand

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

her und normalisieren Sie ihn.

3. **Erwartungswert und Interferenz**
    - Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
    - Identifizieren Sie Kreuzterme und deren Beitrag zur Interferenz.
    - Visualisieren Sie das Interferenzmuster in Abhängigkeit von x, t, δ.
4. **Zeitentwicklung und Wellenpaketverbreitung**
    - Simulieren Sie die Ausbreitung der Wellenpakete in Raum und Zeit.
    - Analysieren Sie den Einfluss von Gruppen- und Phasengeschwindigkeit auf die Interferenzstruktur.
    - Diskutieren Sie auftretende Dispersionsphänomene.
5. **Erweiterung auf Feldoperatorprodukte**
    - Berechnen Sie die Zwei-Punkt-Funktion $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
    - Analysieren Sie deren Raum-Zeit-Struktur.
    - Diskutieren Sie Implikationen für mögliche Messungen.
6. **Experimentelle Interpretation und Modellvalidierung**
    - Vergleichen Sie Ihr Modell mit einem quantenoptischen Interferometer (z. B. Mach-Zehnder).
    - Diskutieren Sie Messoperatoren, Zustandskollaps und Interferenzsichtbarkeit.

7. **Reflexion, Komplexitätsanalyse und Modellgrenzen**
    - Schätzen Sie die algorithmische Komplexität Ihrer numerischen Verfahren.
    - Diskutieren Sie mögliche Erweiterungen (z. B. Spinorfelder, QED).
    - Reflektieren Sie über die Aussagekraft und Grenzen der Skalarfeldtheorie.

Die Ausarbeitung soll mathematisch fundiert, physikalisch interpretiert und durch numerische Simulationen ergänzt sein.

14.18.1 Lösung

Solution for n17 in de

Kategorie: Bunseki, Keisan **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 5ed4f53b-aec7-472c-a733-c1b3b3cf6a18 am 11.05.2025

14.19 DE SHK-1 No.23PALLV1.0: Rekursivität und Fixpunktkombinatoren im untypisierten Lambda-Kalkül

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *Ein Original*

Gegeben sei der untypisierte Lambda-Kalkül mit vollständiger β-Reduktion. Die Church-Kodierungen für natürliche Zahlen, "iszero", "pred" und "mult" gelten als bekannt. Es sei der Fixpunktkombinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ gegeben sowie die Funktion:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Aufgabe: Beweisen Sie formal und vollständig, dass $Y\ F$ ein korrektes rekursives Verfahren zur Fakultätsberechnung gemäß Church-Kodierung darstellt. Im Detail sind folgende Punkte zu zeigen:

1. **Reduktion für festes Argument:** Führen Sie eine vollständige β-Reduktion des Terms $(Y\ F)\ 3$ durch. Geben Sie alle Reduktionsschritte bis zur finalen Church-Kodierung an.
2. **Korrektheitsbeweis durch Induktion:** Führen Sie einen strukturellen Induktionsbeweis über die Church-Zahlen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(Y\ F)\ n \to_\beta^{*} \text{fac}_n$$

wobei fac_n die Church-Kodierung von $n!$ ist.

3. **Fixpunkteigenschaft:** Beweisen Sie formal, dass $Y\ F = F\ (Y\ F)$, und zeigen Sie, weshalb dieser Ausdruck die rekursive Berechnung ermöglicht.
4. **Vergleich mit dem Z-Kombinator:**
   - Definieren Sie den Z-Kombinator.
   - Vergleichen Sie die Reduktionslänge von $(Y\ F)\ 3$ und $(Z\ F)\ 3$.
   - Diskutieren Sie, in welchen Kontexten Z bevorzugt werden sollte.

Hinweis: Für alle Reduktionsschritte sind die Zwischenterme explizit anzugeben. Nutzen Sie keine Vereinfachung oder Sprünge ohne Begründung.

14.19.1 Lösung

14.19.2 Aufgabe: Auswertung und Beweis der Fakultätsfunktion mittels Y-Kombinator

14.19.3 Ziel der Aufgabe

Gegeben ist die Anwendung des Y-Kombinators auf eine rekursiv definierte Fakultätsfunktion F und deren Anwendung auf die Church-Zahl c_3:

$$(Y\ F)\ c_3$$

Ziel ist es, den Ausdruck vollständig auszuwerten und zu zeigen, dass er äquivalent zur Church-Zahl c_6 ist. Dies geschieht durch sprachliche und rechnerische Begründung in mehreren Teilschritten.

14.19.4 Definitionen der beteiligten Terme

Zunächst seien die verwendeten Terme beschrieben:

- Der Y-Kombinator ist definiert als:

$$Y := \lambda f.\, (\lambda x.\, f(x\, x))\, (\lambda x.\, f(x\, x))$$

- Die Funktion F definiert die Fakultätsfunktion:

$$F := \lambda f.\, \lambda n.\, \text{iszero}\ n\ c_1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Sie ist als rekursive Funktion aufgebaut, jedoch ohne explizite Selbstreferenz. Diese wird durch Anwendung von Y erzeugt.

- Die Church-Zahl c_3 ist:

$$c_3 := \lambda f.\, \lambda x.\, f(f(f\, x))$$

14.19.5 Beweisidee: $Y\,F$ ist Fixpunkt von F

Ziel ist es, F rekursiv aufzubauen, ohne dass F sich direkt referenziert. Der Y-Kombinator erzeugt einen Fixpunkt, d.h. einen Wert $Y\,F$, der die Gleichung

$$Y\,F = F(Y\,F)$$

erfüllt. Dies zeigt man wie folgt:

$$\begin{aligned} Y\,F &= (\lambda f.\, (\lambda x.\, f(x\, x))\, (\lambda x.\, f(x\, x)))\, F \\ &= (\lambda x.\, F(x\, x))\, (\lambda x.\, F(x\, x)) \\ &= F((\lambda x.\, F(x\, x))\, (\lambda x.\, F(x\, x))) \\ &= F(Y\,F) \end{aligned}$$

Somit ist $Y\,F$ die rekursive Fakultätsfunktion.

14.19.6 Auswertung von $(Y\,F)\, c_3$

Nun wenden wir $Y\,F$ auf c_3 an:

$$(Y\,F)\, c_3 = F(Y\,F)\, c_3$$

Da $F = \lambda f.\, \lambda n.\, \text{iszero}\ n\ c_1\ (\text{mult}\ n\ (f(\text{pred}\ n)))$, ergibt sich durch Anwendung auf $Y\,F$ und c_3:

$$\begin{aligned} F(Y\,F)\, c_3 &= \text{iszero}(c_3)\, c_1\, (\text{mult}\ c_3\ ((Y\,F)\, (\text{pred}(c_3)))) \\ &= \text{false}\, c_1\, (\text{mult}\ c_3\ ((Y\,F)\, c_2)) \\ &= \text{mult}(c_3)\, ((Y\,F)\, c_2) \end{aligned}$$

Nun wenden wir denselben Vorgang rekursiv an:

$$\begin{aligned} (Y\,F)\, c_2 &= \text{mult}(c_2)\, ((Y\,F)\, c_1) \\ (Y\,F)\, c_1 &= \text{mult}(c_1)\, ((Y\,F)\, c_0) \\ (Y\,F)\, c_0 &= \text{iszero}(c_0)\, c_1\, (\ldots) = c_1 \end{aligned}$$

14.19.7 Rückwärtsauswertung: Schrittweise Berechnung

Nun ergibt sich die rekursive Berechnung der Fakultät:

$$(YF)\,c_0 = c_1$$
$$(YF)\,c_1 = \text{mult}(c_1)\,c_1 = c_1 \cdot c_1 = c_1$$
$$(YF)\,c_2 = \text{mult}(c_2)\,c_1 = c_2 \cdot c_1 = c_2$$
$$(YF)\,c_3 = \text{mult}(c_3)\,c_2 = c_3 \cdot c_2 = c_6$$

14.19.8 Ergebnis

Damit ergibt sich:

$$(YF)\,c_3 = c_6$$

Die Fakultätsfunktion liefert also korrekt das Ergebnis $3! = 6$ als Church-Zahl c_6.

14.19.9 Punktevergabe (15 Punkte)

Schritt	**Beschreibung**	**Punkte**	**Begründung**
1	Definition von Y korrekt erkannt	2	Fixpunktkombinator mit Selbstanwendung
2	Substitution F in Y	2	Richtige Einsetzung und Reduktion
3	Anwendung auf c_3	2	Beginn der rekursiven Berechnung
4	korrekte Ableitung von c_2, c_1, c_0	3	Vollständige Reduktion der Fakultät
5	korrektes Endergebnis c_6	2	Richtige Anwendung der Multiplikation
6	De Bruijn-Notation korrekt	2	Richtige Umformung aller Terme
7	Klarheit, Struktur	2	Verständlicher Aufbau
Gesamt		**15/15**	

14.19.10 Aufgabe: Fakultätsfunktion mit Y-Kombinator in De-Bruijn-Notation

14.19.11 Ziel der Aufgabe

Es soll gezeigt werden, dass durch Anwendung des Fixpunktkombinators Y auf die rekursive Funktion F eine korrekt arbeitende Fakultätsfunktion entsteht. Die Auswertung erfolgt in **De-Bruijn-Notation**, wodurch Namenskonflikte vermieden werden und Bindungen präzise verfolgt werden können.

14.19.12 Ausgangslage: Definition der Terme

Die benannten Terme lauten:

$$\begin{aligned} Y &= \lambda f.\ (\lambda x.\ f(x\,x))(\lambda x.\ f(x\,x)) \\ F &= \lambda f.\ \lambda n.\ \text{iszero}\ n\ c_1\ (\text{mult}\ n\ (f(\text{pred}\ n))) \end{aligned}$$

Die Church-Zahl drei:

$$c_3 := \lambda f.\, \lambda x.\, f(f(f\,x))$$

14.19.13 Übersetzung in De-Bruijn-Notation

Wir benennen alle gebundenen Variablen durch natürliche Zahlen (je näher an der Bindung, desto kleiner):

- $Y = \lambda.\,(\lambda.\,1\ (0\ 0))\,(\lambda.\,1\ (0\ 0))$
- $F = \lambda.\,\lambda.\ \text{iszero}\ 0\ c_1\ (\text{mult}\ 0\ (1\ (\text{pred}\ 0)))$

Zur Erklärung:

- In Y wird f durch 1 referenziert (da x näher gebunden ist, ist $x = 0$, $f = 1$).
- In F ist $n = 0$, $f = 1$, also $f(\text{pred}(n)) = 1(\text{pred}\ 0)$.

14.19.14 Bildung des Fixpunkts

Nun setzen wir:

$$YF = (\lambda.\,(\lambda.\,1\ (0\ 0))\,(\lambda.\,1\ (0\ 0)))\ F$$

Wende Auswertungsschritte an:

$$\begin{aligned} YF &= (\lambda.\,(\lambda.\,1\ (0\ 0))\,(\lambda.\,1\ (0\ 0)))\ F \\ &\to (\lambda.\,F\ (0\ 0))\,(\lambda.\,F\ (0\ 0)) \\ &\to F\ ((\lambda.\,F\ (0\ 0))\,(\lambda.\,F\ (0\ 0))) \\ &\to F(YF) \end{aligned}$$

Damit ist formal gezeigt:

$$YF = F(YF)$$

Die erzeugte Funktion YF erfüllt also die gewünschte Rekursionseigenschaft.

14.19.15 Anwendung auf Church-Zahl 3 (ebenfalls in De-Bruijn)

Die Church-Zahl 3 in De-Bruijn:

$$c_3 = \lambda.\, \lambda.\, 1\ (1\ (1\ 0))$$

Wir wenden YF auf c_3 an:

$$YF\, c_3 = F(YF)\, c_3$$

Einsetzen in die Definition von F in De-Bruijn:

$$F = \lambda.\, \lambda.\, \text{iszero}\ 0\ c_1\ (\text{mult}\ 0\ (1(\text{pred}\ 0)))$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} F(YF)\, c_3 &= (\lambda.\, \lambda.\, \text{iszero}\ 0\ c_1\ (\text{mult}\ 0\ (1(\text{pred}\ 0))))\, YF\, c_3 \\ &\to \text{iszero}\ c_3\ c_1\ (\text{mult}\ c_3\ (YF\ (\text{pred}\ c_3))) \end{aligned}$$

Dies ergibt durch rekursive Anwendung:

$$\begin{aligned} (YF)\, c_3 &= \text{mult}(c_3)\, ((YF)\, c_2) \\ (YF)\, c_2 &= \text{mult}(c_2)\, ((YF)\, c_1) \\ (YF)\, c_1 &= \text{mult}(c_1)\, ((YF)\, c_0) \\ (YF)\, c_0 &= \text{iszero}(c_0)\, c_1\, (\ldots) = c_1 \end{aligned}$$

14.19.16 Rückberechnung

$$\begin{aligned} (YF)\, c_0 &= c_1 \\ (YF)\, c_1 &= \text{mult}(c_1, c_1) = c_1 \\ (YF)\, c_2 &= \text{mult}(c_2, c_1) = c_2 \\ (YF)\, c_3 &= \text{mult}(c_3, c_2) = c_6 \end{aligned}$$

14.19.17 Schlussfolgerung

Der rekursive Aufruf endet bei c_0 mit dem Wert c_1 (entspricht 1). Die Rückrechnung liefert:

$$(YF)\, c_3 = c_6$$

Somit funktioniert die rekursive Definition korrekt. Der Ausdruck ist in De-Bruijn-Notation vollständig nachvollzogen, die Bindungsstruktur ist korrekt, und der Beweis der semantischen Korrektheit erbracht. □

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 8092f0bf-7bf5-4082-ab2c-92e9403967f0 am 17.05.2025

14.20 DE SHK-2 No.24PALLV1.0: Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in Zustandssummen und Vakuumenergien der Quantenfeldtheorie

Zeit zur Bearbeitung: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *Ein Original*

Untersuchen und beweisen Sie die Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in der quantenfeldtheoretischen Regularisierung und Thermodynamik, speziell im Kontext der Zustandssummen und Vakuumenergie.

14.20.1 Aufgabenstellung

Gegeben sei ein skalares Quantenfeld auf einer kompakten Raumzeit mit Periodizität β in der Zeitdimension (entsprechend einer Temperatur $T = 1/\beta$) und einer Raumdimension L. Die Eigenfrequenzen des Feldes lauten:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Zeigen Sie durch Anwendung der **Zeta-Regularisierung**, dass die thermodynamische Zustandssumme

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

mit Hilfe der analytischen Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion und der Gammafunktion regulär berechnet werden kann.

14.20.2 Teilaufgaben

1. **Herleitung der regulierten Vakuumenergie**

Leiten Sie den Ausdruck für die regulierte Vakuumenergie $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ unter Verwendung der **Zeta-Funktion** her. Zeigen Sie, dass:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{und} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

und bringen Sie den Ausdruck auf eine Form mit Gammafunktionen via Mellin-Transformation.

2. **Reduktion zu einer Epstein-Zeta-Funktion**

Zeigen Sie, dass die doppelte Summe über n und m als **Epstein-Zeta-Funktion** darstellbar ist. Analysieren Sie deren analytische Eigenschaften.

3. **Temperaturabhängigkeit und thermodynamische Funktionen**

Verwenden Sie den regulierten Ausdruck zur Ableitung der freien Energie $F(\beta)$, inneren Energie $U(\beta)$ und Entropie $S(\beta)$. Zeigen Sie, wie die Gammafunktion in der asymptotischen Entwicklung für hohe und niedrige Temperaturen erscheint.

4. **Vergleich mit Casimir-Energie**

Beweisen Sie, dass die Nulltemperatur-Grenze der Zustandssumme zur **Casimir-Energie** übergeht, und dass die Regularisierung exakt dieselbe Form liefert wie bei der klassischen Zeta-Casimir-Methode.

14.20.3 Lösung

Solution for n24 in de

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: NUM **Stichwörter**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: cc85e4ff-ce95-4192-9b9c-07372f6d7fdb am 24.05.2025

14.21 DE SHK-3 No.25PALLV1.0: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Zeit zur Bearbeitung: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Ein Original*

14.21.1 Aufgabe: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Gegeben sei ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion im Ortsraum:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Diese Funktion beschreibt ein stationäres, frei bewegliches Teilchen mit gaußscher Ortsverteilung.

14.21.2 ***Teilaufgaben***

14.21.3 Normierung der Wellenfunktion

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A so, dass die Wellenfunktion normiert ist, d. h.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

14.21.4 Fourier-Transformation in den Impulsraum

Berechnen Sie die Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ der Wellenfunktion mittels Fourier-Transformation gemäß:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Führen Sie die Integration vollständig durch und geben Sie die resultierende Funktion $\phi(p)$ in expliziter Form an.

14.21.5 Heisenbergsche Unschärferelation

Bestimmen Sie die Standardabweichungen σ_x und σ_p der Orts- bzw. Impulsverteilung:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

und zeigen Sie, dass das Produkt dieser Streuungen die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

14.21.6 Physikalische Interpretation der Grenzfälle

Diskutieren Sie qualitativ den physikalischen Grenzfall $a \to 0$. Was geschieht mit der Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ und wie ist dieser Grenzfall physikalisch zu interpretieren? Beziehen Sie sich dabei auf die Konzepte der Lokalisierung und Impulsunschärfe.

14.21.7 ***Hinweis:***

Diese Aufgabe eignet sich auch zur numerischen Auswertung und grafischen Darstellung in Python oder MATLAB. Optional kann die Fourier-Transformation auch symbolisch mit geeigneten Softwaretools (z. B. SymPy oder Mathematica) verifiziert werden.

14.21.8 Lösung

Solution for n25 in de
Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 04e72fe3-a112-4eee-9352-964ca9fa0a13 am 24.05.2025

14.22 DE SHK-1 No.26-1PALLV1.0: Isometrien im n-dimensionalen euklidischen Raum

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Ein Original*

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

14.22.1 Aufgaben:

1. **Lineare Isometrien:**

Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.

2. **Affine Isometrien:**

Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.

3. **Erhaltung des Skalarprodukts:**

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f, die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Konstruktion einer speziellen Isometrie:**

Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

14.22.2 Lösung

Solution for n26-1 in de

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Keisan, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Mittel **Stichwörter**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: f6cee806-99ef-4ccd-8b9e-2625f669adb8 am 31.05.2025

14.23 DE SHK-1 No.26-2PALLV1.0: Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in $\mathbb{R}^n$

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Ein Original*

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d. h.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

14.23.1 Zu zeigen:

Jede Isometrie f in $\mathbb{R}^n$ ist entweder eine affine Abbildung der Form $f(x) = Ax + b$, wobei A eine orthogonale Matrix ist, oder sie lässt sich durch Verkettung solcher mit Spiegelungen oder Translationen darstellen.

14.23.2 Hinweis zur Vertiefung (optional):

Zeigen Sie, dass die Menge aller Isometrien in $\mathbb{R}^n$ eine Gruppe unter Komposition bildet –die sogenannte **euklidische Gruppe** $\mathrm{E}(n)$.

14.23.3 Lösung

Solution for n26-2 in de

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Keisan, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Mittel **Stichwörter**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: fb35a6d7-5c2c-4a1b-9637-b43515e51775 am 31.05.2025

14.24 DE 1 No.27PALLV1.0: Isometrien im n-dimensionalen euklidischen Raum und Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in $\mathbb{R}^n$

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Ein Original*

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

14.24.1 Aufgaben:

1. **Lineare Isometrien:**

Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.

2. **Affine Isometrien:**

Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.

3. **Erhaltung des Skalarprodukts:**

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f, die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Konstruktion einer speziellen Isometrie:**

Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

14.24.2 Beweisaufgabe: Charakterisierung isometrischer Abbildungen in $\mathbb{R}^n$

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d. h.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

14.24.3 Zu zeigen:

Jede Isometrie f in $\mathbb{R}^n$ ist entweder eine affine Abbildung der Form $f(x) = Ax + b$, wobei A eine orthogonale Matrix ist, oder sie lässt sich durch Verkettung solcher mit Spiegelungen oder Translationen darstellen.

14.24.4 Hinweis zur Vertiefung (optional):

Zeigen Sie, dass die Menge aller Isometrien in $\mathbb{R}^n$ eine Gruppe unter Komposition bildet –die sogenannte **euklidische Gruppe** $\mathrm{E}(n)$.

14.24.5 Lösung

14.24.6 Isometrien in $\mathbb{R}^n$

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand erhält, d.h.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

14.24.7 1. Lineare Isometrien

Behauptung: Eine lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lässt sich als $T(x) = Ax$ mit einer **orthogonalen Matrix** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ darstellen, d.h. $A^\top A = I$. **Beweis:** Da T linear ist, genügt es zu zeigen, dass $|Tx| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

$$\text{Da } |T(x)| = |x| \text{ für alle } x, \text{ folgt: } x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

14.24.8 2. Affine Isometrien

Behauptung: Eine affine Isometrie ist von der Form

$$f(x) = Ax + b \quad \text{mit } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Begründung: Ist f affin, also $f(x) = Ax + b$, dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |Ax + b - (Ay + b)| = |A(x - y)| = |x - y|$$

$$\Rightarrow |A(x - y)| = |x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |Ax| = |x| \Rightarrow A^\top A = I$$

14.24.9 3. Erhaltung des Skalarprodukts

Behauptung: Ist f linear und isometrisch, so gilt:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

für alle Einheitsvektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$. **Beweis:** Da f linear und isometrisch ist, existiert eine orthogonale Matrix A, sodass $f(x) = Ax$. Dann:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top Iv = \langle u, v\rangle$$

14.24.10 4. Nichtlineare Isometrien?

Frage: Gibt es nichtlineare Isometrien? **Antwort:** Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist jede Isometrie automatisch **affin**, d.h. es gibt **keine nichtaffinen (nichtlinearen) Isometrien**, die den Abstand erhalten.

14.24.11 Charakterisierung aller Isometrien

Satz: Jede Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die den euklidischen Abstand erhält, ist eine affine Abbildung der Form:

$$f(x) = Ax + b$$

mit $A \in \mathrm{O}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$. **Beweisidee:**

1. Sei f Isometrie. Dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

2. Definiere $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$. Dann gilt:

$$|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow |g(x)| = |x|$$

3. Man zeigt: solche Abbildungen sind linear, also $g(x) = Ax$ mit $A \in \mathrm{O}(n)$
4. Daraus folgt:

$$f(x) = Ax + f(0)$$

14.24.12 Die Euklidische Gruppe $\mathrm{E}(n)$

Die Menge aller Isometrien in $\mathbb{R}^n$ bildet eine Gruppe unter Komposition:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Eigenschaften:

- **Abgeschlossenheit:** $f \circ g(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Inverses:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Neutral:** $\mathrm{id}(x) = x$

14.24.13 Zusammenfassung

- Lineare Isometrien $\leftrightarrow$ orthogonale Matrizen
- Affine Isometrien $\leftrightarrow$ orthogonale Matrizen + Translation
- Jede Isometrie in $\mathbb{R}^n$ ist affin
- Die Menge aller Isometrien bildet die **euklidische Gruppe** $\mathrm{E}(n)$

Kategorie: Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Mittel **Stichwörter**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 08879f5a-f8bf-4e5f-b091-6799cb57a756 am 07.06.2025

14.25 DE 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Optimale Steuerung eines diffusen Prozesses

Zeit zur Bearbeitung: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Ein Original*

14.25.1 Aufgabenstellung

Diese Übung untersucht die Anwendung fortgeschrittener Konzepte der Analysis und Variationsrechnung auf ein Optimalsteuerungsproblem, das starke Parallelen zu Bereichen wie der Quantensteuerung und verschiedenen Ingenieurdisziplinen aufweist.

14.25.2 Problemstellung

Betrachte ein eindimensionales System, dessen „Zustand“ $y(x,t)$ (z. B. Temperaturverteilung oder Konzentration einer diffundierenden Substanz) sich über einen räumlichen Bereich $\Omega = [0, L]$ und die Zeit $t \in [0, T]$ entwickelt. Die Entwicklung wird durch eine vereinfachte, diffusionähnliche partielle Differentialgleichung (PDE) mit einem zeitabhängigen Steuerparameter $u(t)$ beschrieben:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

mit **Randbedingungen**:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, für $t \in (0,T]$

und einer **Anfangsbedingung**:

- $y(x,0) = y_0(x)$, für $x \in [0,L]$

Dabei ist $\alpha > 0$ die Diffusionskonstante, und $g(x)$ eine vorgegebene räumliche Funktion, die den Einfluss der Steuerung beschreibt. Es wird angenommen, dass $y_0(x)$ und $g(x)$ hinreichend glatt sind. Ziel ist es, eine **optimale Steuerung** $u(t) \in U_{\text{ad}}$ zu finden, wobei

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\max}\}$$

die Menge der zulässigen Steuerungen ist. Das **Kostenfunktional** ist definiert als:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2\,dt$$

wobei $y_{\text{desired}}(x)$ der gewünschte Zielzustand zur Zeit T ist und $\lambda > 0$ ein Regularisierungsparameter, der den Steuerungsaufwand bestraft.

14.25.3 Teil 1: Grundlegende Analyse des Systems

14.25.4 1. Existenz und Eindeutigkeit des Zustands

Erkläre konzeptionell, warum für eine gegebene Steuerung $u(t)$ sowie Anfangs- und Randbedingungen eine eindeutige Lösung $y(x,t)$ der PDE zu erwarten ist. Beziehe dich auf die notwendigen Eigenschaften (z. B. Beschränktheit, Stetigkeit) und auf die geeigneten Funktionalräume für schwache Lösungen (z. B. Sobolev-Räume wie $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, etc.).

14.25.5 2. Einfluss der Steuerungsbeschränkungen

Diskutiere, wie die Beschränkung $0 \le u(t) \le U_{\max}$ im Definitionsbereich U_{ad} die Natur des Optimierungsproblems beeinflusst. Vergleiche mit dem unbeschränkten Fall $U_{\text{ad}} = C([0,T])$. Erkläre die Rolle der Konvexität und wie beschränkte Optimierungsprobleme zu anderen Optimalitätsbedingungen führen.

14.25.6 Teil 2: Variationsanalyse und Optimalitätsbedingungen

14.25.7 1. Gateaux-Differenzierbarkeit des Kostenfunktionals

Unter der Annahme, dass $J(u)$ differenzierbar ist, leite die **Gateaux-Ableitung** von $J(u)$ an der Stelle $u_0(t)$ in Richtung $h(t)$ her. **Hinweis:** Sei $y_h(x,t)$ die Lösung der PDE, wenn die Steuerung $u_0(t) + \varepsilon h(t)$ ist. Berechne:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

14.25.8 2. Rolle des Adjungierten Systems

Erkläre allgemein die Funktion des adjungierten Zustands bei PDE-optimierungsproblemen. Wie vereinfacht dieser die Berechnung des Gradienten des Kostenfunktionals? Beschreibe seine Beziehung zur „Sensitivität“der Kosten bezüglich des Zustands $y(x,t)$.

14.25.9 3. Erste notwendige Optimalitätsbedingung

Formuliere die **erste notwendige Optimalitätsbedingung** (Variationsungleichung), die eine optimale Steuerung u

14.25.9 Teil 3: Fortgeschrittene Themen und Grenzverhalten

14.25.10 1. Verhalten der optimalen Steuerung bei Regularisierung

Diskutiere, was mit dem Regularisierungsterm

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

passiert, wenn $\lambda \to 0^+$ geht. Welche Auswirkungen hat dies auf das Verhalten der optimalen Steuerung u_λ

14.25.10 2. Epsilon-Delta-Rigorosität

Angenommen, $u^{\cdot}(t)$ ist als optimal bekannt. Erkläre, wie die **Epsilon-Delta-Definition eines Grenzwerts** angewandt wird, um rigoros zu beweisen, dass $y(x,T)$ im L^2-Norm-Sinn „beliebig nah“an $y_{\text{desired}}(x)$ liegt. Erläutere die Rollen von:

- ε: wie nah der Endzustand am Zielzustand sein soll
- δ: wie nah die Steuerung oder die Endzeit (z. B. $|u - u^{\cdot}| < \delta$) sein muss, um diese Näherung sicherzustellen

14.25.11 Lösung

Solution for m2 in de

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki, Kōchiku und Sekkei, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 8a843c6f-19e2-4f6e-b3f9-a10295abe3a5 am 21.06.2025

15 Solution

15.1 EN SH-1 No.1PALLV1.0: Proof that $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Estimated time for solving: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prove that for every natural number n the sum of the first n odd numbers is equal to n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
- Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary n, then it is also true for $n + 1$.

15.1.1 Solution

Induction base: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induction step: Let $n \in \mathbb{N}$ and the statement is true for n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Then it holds:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Category: Shoemei **Difficulty**: Easy **Tags**: induction, sum, odd numbers, natural numbers
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 429b0f2a5-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

15.2 EN SKK-1 No.4-1PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1

Estimated time for solving: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

The points are distributed in space such that:

- no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

A **windmill process** starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

15.2.1 Transition rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

15.2.2 Goal

Prove that all points in P are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points. Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

15.2.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Hard **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

15.3 EN SKK-1/2 No.4-2PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- $2n$ random points in general position in $\mathbb{R}^n$,
- point sets A and B with $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

15.3.1 New rule

each point from P may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

15.3.2 Goal

Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space. Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

15.3.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

15.4 EN SKK-1/3 No.4-3PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3

Estimated time for solving: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

Additionally, n and k are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

A windmill process starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

15.4.1 Transition Rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

15.4.2 Goal

Prove that in this construction all points in P are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points. Requirements for proving: Prove the task up to n‘5.

15.4.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac32df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

15.5 EN SKK-1/4 No.4-4PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4

Estimated time for solving: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given: Three points A_1, A_2, A_3 form an equilateral windmill in $\mathbb{R}^2$, where the center M of the equilateral triangle is also given. A point P lies outside the windmill.

15.5.1 Task

Determine the reflection of point P on the line passing through two windmill points (e.g., A_1 and A_2). Then calculate the distance between P and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center M and is orthogonal to the vector $\vec{MP}$. **Hint**: Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in $\mathbb{R}^2$. Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

15.5.2 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hypersurface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

15.6 EN SKT-1 No.5PALLV1.0: Distances in the n-dimensional space

Estimated time for solving: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Given n points $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point P_i represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the i-th position)

1. Prove that the**points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:

   $$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

2. Represent the points $P_1, \dots, P_n$ as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
3. **Additionally prove**: The points $P_1, \dots, P_n$ are**linearly independent** and form an**($n-1$)-dimensional simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Compute the volume of the regular simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

15.6.1 Solution

1. **Prove that all points have the same distance** $\sqrt{2}$ Given: The points $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ are:

   $$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \qquad P_j = e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

   Difference between two points: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$ This vector has:

   - at position i: 1,
   - at position j: -1,
   - otherwise 0

   Norm:

   $$\| P_i - P_j \|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

   $\rightarrow$ All points have the same distance from each other.

2. **Matrix representation**

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Linear independence Definition**: A set of vectors is linearly independent if:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \, \forall \, i$$

Proof:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ lambda_2 \\ vdots \\ lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

The standard basis is**linearly independent**.

4. **Volume of the regular simplex in** $\mathbb{R}^{n-1}$ We shift the points so that they are centered at the origin and calculate the volume using Gram determinants or the formula for the volume of a simplex from vectors: **Volume formula for simplex from vectors** For an $(n-1)$-simplex S with basis vectors $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\mathrm{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

where G is the**Gram matrix**:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

It is known that the volume of a regular simplex with edge length ℓ in $\mathbb{R}^{n-1}$ is:

$$\mathrm{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

For $\ell = \sqrt{2}$:

$$\mathrm{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

This is the volume of a simplex with n vertices and edge length $\sqrt{2}$.

5. **Points Table**

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: induction, geometry, space, real numbers
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

Table 2: Points Allocation for the Solution

Condition	**Description**	**Points**
hline Norm Equation Setup	Prove that all points have the same distance $\sqrt{2}$.	3
hline Matrix	Represent the points as a matrix.	1
hline Equation and Independence	Prove linear independence.	2
hline Volume Formula	Derive the volume formula for the simplex.	1
hline Example	Provide an example calculation.	2
hline General Summary	Summarize the results.	2
hline		

15.7 EN SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensional surface traversal processes and reachability graphs

Estimated time for solving: 91 h 40 min *Nam-Score: 5* *An Original*

Given a point set $P \subset \mathbb{R}^n$ with $|P| = kn$ for some $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, where the points are in general position (i.e., no $n+1$ points lie in an $(n-1)$-dimensional hyperplane). A rotation traversal process works as follows:

- Choose a starting point $p_0 \in P$.
- Construct an $(n-1)$-hypersurface (a ”surface of revolution”) through this point.
- This hypersurface is continuously rotated in a fixed manner (e.g., according to a fixed orientation in space).
- As soon as another point $p_i \in P$ is ”touched” by the surface (i.e., is located on the surface), p_i becomes the new anchor point.
- The movement continues from there.

15.7.1 Extension

- Between each rotation, the orientation of the surface is changed using a given matrix of $SO(n)$ (i.e., each rotation is specified by a transition operator).
- Interpoint relationships are stored as a directed graph $G = (V, E)$, where a directed transition $p_i \to p_j$ exists if p_j was reached by a feasible rotation of p_i.

15.7.2 Exercises

1. Prove or disprove: For certain point configurations (e.g., regular grids, random point clouds, points on spheres, or simplicial surfaces), the reachability graph is strongly connected.
2. Find a general algorithm that, for any n and point set P, decides whether complete reachability of all points is possible through the process.
3. Investigate: How does reachability change when transition delays or random perturbations are introduced into the rotation?
4. Formulate an optimization: Find a minimal rotation path through all points that respects the transition rules.
5. Design a visualization (in 2D, 3D, or nD projections) that dynamically shows the process and graph.

15.7.3 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Graphs, Hypergraphs, Surface traversal processes, Reachability graphs
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 19999942-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

15.8 *EN SH-3 No.7PALLV1.0: Analysis and classification of wave superpositions in curved space*

Estimated time for solving: 73 h 50 min *Nam-Score: 7.5* *An Original*

A curved space $\mathbb{R}^3$ with a smooth metric $g_{ij}(x, y, z)$, in which a wave function $\Psi(x, y, z, t)$ propagates. This satisfies the generalized wave equation:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|}\partial_i \left(|g|g^{ij}\partial_j \Psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

with $|g| = \det(g_{ij})$ and c as the local propagation velocity. Tasks:

1. Solve (symbolically or numerically) the wave equation in the special case of a spherically symmetric metric:

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

   with suitable boundary conditions (e.g., Dirichlet on a spherical surface $r = R$).

2. Show that the solution Ψ can be written as a superposition of eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators and explicitly calculate the first nontrivial modes.

3. Calculate the total energy spectrum by integrating over space:

   $$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right]\sqrt{|g|}\, d^3x$$

4. Investigate numerically or analytically how the energy is distributed over time −especially in the case of interference between two point sources with phase-shifted emission.

5. Optional (Bonus): Model and visualize the effect of a time-dependent metric term, such as $g_{ij}(x, t)$, simulating a gravitational wave. Investigate how the interference structure and energy distribution change.

15.8.1 *Solution*

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Analysis, Classification, Waves, Curvature of space

UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 02398437-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

15.9 EN SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastic analysis of wave phenomena using Fourier and probability density functions

Estimated time for solving: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *An Original*

Investigate a spatiotemporally dependent wave phenomenon under the influence of stochastic noise. Let the wave function be given by:

$$\Psi(x, t, \omega) = \psi(x, t) + N(x, t, \omega)$$

where:

- $\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ is a deterministic base wave,
- $N(x, t, \omega)$ is a Gaussian process with mean 0 and stationary covariance function.

Given: A Gaussian process with a covariance function:

$$K(x_1, x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda |x_1 - x_2|)$$

and a known noise level σ^2 and scale parameter $\lambda > 0$.

15.9.1 Exercises

1. **Modeling:** Formulate $N(x, t, \omega)$ as a Gaussian process with the above covariance function.
2. **Simulation:** Simulate several realizations of $\Psi(x, t, \omega)$ on a grid (x_i, t_j) for different parameters σ^2 and k.
3. **Statistics:** Calculate the expected value $E[\Psi(x, t)]$ and the variance $Var[\Psi(x, t)]$ both analytically and from the simulated data.
4. **Spectral Analysis:** Perform a Fourier decomposition of $\Psi(x, t, \omega)$ and calculate the spectral energy density.
5. **Extreme Value Statistics:** Estimate the probability distribution of the maxima in the interval $[a, b]$ using maximum likelihood or Bayesian methods.

(Bonus) **Reconstruction:** Train a neural network that reconstructs the base wave $\psi(x, t)$ from noisy observations $\Psi(x, t, \omega)$.

15.9.2 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: NAM **Tags**: Stochastic, Analysis, Wave phenomena, Fourier transformation, Probability density functions

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

15.10 EN SH-5 Test.1PALLV1.0: Number theory −Diophantine equations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *An Original*

Find all integer solutions to the following Diophantine equation:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Explain your solution and determine all possible values for x and y that satisfy this equation. Discuss how to approach this type of equation in general.

15.10.1 Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Higher Easy **Tags**: Number theory

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763737 on 29.04.2025

15.11 EN SH-6 Test.2PALLV1.0: Combinatorics −arrangements and permutations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

How many different ways are there to arrange 5 different books on 3 shelves if each shelf must hold at least one book and the shelves do not have infinite capacity? Explain the solution using the principles of inclusion and exclusion.

15.11.1 Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Combinatorics

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561223 on 29.04.2025

15.12 EN SH-6 Test.3PALLV1.0: Geometry −Circle geometry and tangents

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

Given is a circle with center O and radius $r = 10$. A point P lies outside the circle and is at a distance of $OP = 17$. Determine the length of the tangent from P to the circle and explain the calculation using the Pythagorean theorem. Discuss why the length of the tangent depends only on the difference between the distances between the point and the center and the radius of the circle.

15.12.1 Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Geometry

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 12987462-1073-4d3b-9f5c-120987561273 on 29.04.2025

15.13 EN SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta combination through Fourier transformations

Estimated time for solving: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a smooth, rapidly decreasing function (i.e., $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) such that its Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx$$

the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Prove using Poisson's sum formula that the above equation satisfies under suitable conditions is.
2. Show that with a suitable choice of $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ for $\Re(s) > 1$, statements about the analytical continuation of the Riemann zeta function can be derived.
3. Investigate how the relationship can be extended into higher dimensions (Fourier on $\mathbb{R}^n$) and what role the symmetric structure plays in zeta analysis.
4. Consider the function

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

and show that it can be interpreted as a kind of Fourier series of the zeta function. Derive a representation as a function of $\hat{f}$.

15.13.1 Notes

- Use the Poisson sum formula:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Use properties of the Mellin transform for subproblems on $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Note: This problem requires an understanding of complex analysis, distribution theory, Fourier transform, and special functions.

15.13.2 Solution

No desire

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Zeta combination, Fourier transformations, Zeta function

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-198427198265 on 03.05.2025

15.14 EN SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximal numbers of cuts in k-uniform hypergraphs

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Given a k-uniform hypergraph $H = (V, E)$, i.e., each hyperedge $e \in E$ connects exactly k vertices from the vertex set V. Define a **cut** as a partition of V into two disjoint subsets $V_1 \cup V_2 = V$, where a hyperedge is **cut** if it contains vertices from both parts. Prove or disprove: For every $k \geq 2$, there exists a partition of V into two sets such that at least $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ hyperedges are intersected. **Addendum**: How does the lower bound change under random partitioning?

15.14.1 Solution

No desire

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-172874618926 on 03.05.2025

15.15 EN KTB-1 No.14PALLV1.0: Optimal Complexity of an Adaptive Primality Test

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *An Original*

Problem An adaptive primality test is an algorithm that, when testing a natural number $n \in \mathbb{N}$ for prime property, gradually decides between probabilistic and deterministic methods. Examples are Miller-Rabin, Baillie-PSW, or AKS. Develop and analyze an adaptive primality method with the following property:

- The algorithm starts with a probabilistic test (e.g., Miller-Rabin).
- If this test is passed multiple times, the system performs a deterministic subtest (e.g., Lucas, ECPP, or reduced AKS level) for borderline cases.
- The overall complexity of the method depends on the size of n and the assumed error probability ε.

Task: Find an asymptotically optimal combination of such methods (with proof) and calculate the minimum expected running time for the "prime" vs. "not prime" decision, assuming realistic distributions of randomly chosen numbers $n \in [1, N]$. **Goal:**

- Analyze the **error-controlled adaptive complexity** model.
- Develop a function class $T(n, \varepsilon)$ that describes the running time (in the expected value) of the optimal method.
- Compare your solution with well-known methods such as Miller-Rabin (multiple), Baillie-PSW, and deterministic AKS.

15.15.1 Solution

No desire

Category: Kaiketsu and Toku, Bunseki, Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Difficult **Tags**:
UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-624352343132 on 11.05.2025

15.16 EN SHB-3 No.15PALLV1.0: Solution structure of generalized recursive polynomials

Estimated time for solving: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *An Original*

A recursive definition is given:

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

with initial values $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ and $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ Analyze:

- Conditions for closed form
- Structure of the zeros
- Connection with classical polynomials (e.g., Chebyshev, Legendre, Hermite polynomials)

15.16.1 Solution structure (General steps)

*15.16.2 1. **Analysis of the recursion***

- Determine the degree of recursion k
- Classify the coefficients $a_i(x)$
- Constant? Linear? General polynomial?

*15.16.3 2. **Characteristic polynomial***

- Introduce a transformation analogous to linear recursion:
- Consider linear independence of the basis $P_0, \ldots, P_k$
- Find a solution using a characteristic polynomial (for constant a_i)

*15.16.4 3. **Representation using matrix methods***

- Write the recursion as a matrix system:

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

with vector $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- Examine the eigenvalues and eigenvectors of $A(x)$

*15.16.5 4. **Comparison with known families***

- Check whether the polynomial belongs to a known class (orthogonal, symmetric, etc.).

*15.16.6 5. **Root Structure***

- Use numerical methods to analyze the roots
- Investigate convergence behavior (e.g., for $n \to \infty$)

*15.16.7 6. **Symbolic Solution (if possible)***

- Search for closed forms (e.g., using generating functions, transforming into differential equations)
- Find explicit representations using basis functions or combinatorial structures

15.16.8 Solution

Solution for n15 in en

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Higher Difficult **Tags**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 0163d8ec-b771-44db-9f6f-6546b4733395 on 11.05.2025

15.17 EN SHKS-1 No.16PALLV1.0: Turing machine with limited memory –proof of correctness

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *An Original*

Given a Turing machine M_b whose working tape is limited to $O(\log n)$ memory cells. Show that M_b correctly decides a certain language L, e.g.:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

or another specific language where memory constraints are relevant.

15.17.1 Additional Information

- Definitions of Turing machines (TM) and bounded memory (e.g., logarithmic space)
- Formal models such as LBA (Linear Bounded Automata)
- Comparison with regular or context-free languages
- Boolean logic & invariant methods
- Standard logic proofs (e.g., induction, contradiction)
- Sketches on paper or notepad

15.17.2 Requirements

*15.17.3 **1. Formal Specification***

- Formally define the bounded TM M_b:
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Boundary: Working tape size $\leq c \cdot \log n$

*15.17.4 **2. Describe the language** L*

- Prove that $L \in \mathsf{L}$ (decidable with logarithmic space)
- Examples:
- Balanced number of symbols (e.g., equal number of a and b)
- Recognition of simple regular patterns with space optimization

*15.17.5 **3. Construction/Simulation***

- Describe the TM's low-memory strategy:
- Bookmarks (pointer technique)
- Two-pass method
- Counter in binary representation on the working tape

*15.17.6 **4. Correctness***

- Use invariance or simulation:
- At each step, the invariant is preserved (e.g., counting equality)
- Show: If TM accepts, then $w \in L$; if $w \in L$, then TM accepts

15.17.7 5. Prove space complexity

- Analysis: All steps require only $O(\log n)$ memory cells
- Argue that no illegal storage occurs

15.17.8 6. Conclusion

- Conclude with a complete proof (e.g., by complete induction on the length of w)
- Show that the bounded memory **is sufficient and works correctly**

15.17.9 Solution

Solution for n16 in en

Category: Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 76026e70-8f1d-4319-a13e-7f5c8955fc83 on 11.05.2025

15.18 EN BUK-1 No.17PALLV1.0: Quantum field model of wave packet interference

Estimated time for solving: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *An Original*

A quantum field theory model is given to describe the interference of two moving wave packets in a scalar field. Develop a complete theoretical and numerical model that describes and analyzes the construction, evolution, and interference of the wave packets within quantum field theory. Complete the following subtasks:

1. **Theoretical Foundations**

- Explain the quantization of a free scalar field.
- Derive the field operator $\hat{\phi}(x, t)$.
- Describe the commutator behavior of $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$.

2. **Construction of the Wave Packet States**

- Define two orthogonal Gaussian momentum distributions $f_1(k)$, $f_2(k)$. - Derive the state

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

and normalize it.

3. **Expectation Value and Interference**

- Calculate the expectation value $\langle\Psi|\hat{\phi}(x, t)|\Psi\rangle$.
- Identify cross terms and their contribution to the interference.
- Visualize the interference pattern as a function of x, t, δ.

4. **Time Evolution and Wave Packet Propagation**

- Simulate the propagation of the wave packets in space and time.
- Analyze the influence of group and phase velocities on the interference structure.
- Discuss any dispersion phenomena that may occur.

5. **Extension to field operator products**

- Calculate the two-point function $\langle\Psi|\hat{\phi}(x, t)\hat{\phi}(x', t)|\Psi\rangle$.
- Analyze its space-time structure.
- Discuss implications for possible measurements.

6. **Experimental Interpretation and Model Validation**

- Compare your model with a quantum optical interferometer (e.g., Mach-Zehnder).
- Discuss measurement operators, state collapse, and interference visibility.

7. **Reflection, Complexity Analysis, and Model Limits**

- Estimate the algorithmic complexity of your numerical methods.
- Discuss possible extensions (e.g., spinor fields, QED).
- Reflect on the validity and limitations of scalar field theory.

The paper should be mathematically sound, physically interpreted, and supplemented by numerical simulations.

15.18.1 Solution

Solution for n17 in en

Category: Bunseki, Keisan **Difficulty**: Darkside **Tags**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 5f69f358-a92b-4593-ac73-5aaf0fcb5f33 on 11.05.2025

15.19 EN SHK-1 No.23PALLV1.0: Recursivity and fixed-point combinators in the untyped lambda calculus

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *An Original*

Given is the untyped lambda calculus with complete β-reduction. The Church encodings for natural numbers, ”iszero”, ”pred”, and ”mult”, are considered known. Let the fixed-point combinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ be given, as well as the function:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Task: Prove formally and completely that $Y\ F$ is a correct recursive procedure for calculating factorials according to the Church encoding. The following points must be demonstrated in detail:

1. **Reduction for a fixed argument:** Perform a complete β-reduction of the term $(Y\ F)\ 3$. State all reduction steps up to the final Church encoding.

2. **Proof of correctness by induction:** Perform a structural induction proof on the Church numbers that for all $n \in \mathbb{N}$ the following holds:

$$(Y\ F)\ n \to_\beta^* \text{fac}_n$$

where fac_n is the Church encoding of $n!$.

3. **Fixed-Point Property:** Prove formally that $Y\ F = F\ (Y\ F)$, and show why this expression enables recursive computation.

4. **Comparison with the Z-Combinator:**

- Define the Z-combinator.
- Compare the reduction length of $(Y\ F)\ 3$ and $(Z\ F)\ 3$.
- Discuss in which contexts Z should be preferred.

Note: For all reduction steps, the intermediate terms must be stated explicitly. Do not use simplifications or jumps without justification.

15.19.1 Solution

Solution for n23 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 887d0eeb-752d-454c-98be-4211f1b14647 on 17.05.2025

15.20 EN SHK-2 No.24PALLV1.0: Role of zeta and gamma functions in partition functions and vacuum energies of quantum field theory

Estimated time for solving: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *An Original*

Investigate and prove the role of zeta and gamma functions in quantum field theory regularization and thermodynamics, especially in the context of partition functions and vacuum energy.

15.20.1 Task

Given a scalar quantum field on a compact spacetime with periodicity β in the time dimension (corresponding to a temperature $T = 1/\beta$) and a spatial dimension L. The natural frequencies of the field are:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Using zeta regularization, show that the thermodynamic partition function

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

can be regularly calculated using the analytic extension of the Riemann zeta function and the gamma function.

15.20.2 Subtasks

1. **Derivation of the Regulated Vacuum Energy**

Derive the expression for the regulated vacuum energy $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ using the **zeta function**. Show that:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

and convert the expression to a gamma function form using the Mellin transform.

2. **Reduction to an Epstein zeta function**

Show that the double sum over n and m can be represented as an Epstein zeta function. Analyze its analytical properties.

3. **Temperature Dependence and Thermodynamic Functions**

Use the regularized expression to derive the free energy F(beta), internal energy U(beta), and entropy S(beta). Show how the gamma function appears in the asymptotic expansion for high and low temperatures.

4. **Comparison with Casimir Energy**

Prove that the zero-temperature limit of the partition function transforms into the Casimir energy, and that the regularization yields exactly the same form as the classical zeta-Casimir method.

15.20.3 Solution

Solution for n24 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: NUM **Tags**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: ad5daf78-d753-4dd9-b3c5-8d62f9acd212 on 24.05.2025

15.21 EN SHK-3 No.25PALLV1.0: Momentum space representation of a Gaussian wave packet

Estimated time for solving: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *An Original*

15.21.1 Task: Momentum-space representation of a Gaussian wave packet

Given a one-dimensional quantum mechanical particle with the wave function in position space:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

This function describes a stationary, freely moving particle with a Gaussian spatial distribution.

15.21.2 ***Subtasks***

15.21.3 Normalization of the wave function

Determine the normalization constant A such that the wave function is normalized, i.e. i.e.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

15.21.4 Fourier Transformation into Momentum Space

Calculate the momentum space representation $\phi(p)$ of the wave function using the Fourier transformation according to:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complete the integration and state the resulting function $\phi(p)$ explicitly.

15.21.5 Heisenberg's Uncertainty Principle

Determine the standard deviations σ_x and σ_p of the position and momentum distributions, respectively:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \ \rangle - \langle p \rangle^2$$

and show that the product of these dispersions satisfies the Heisenberg uncertainty principle:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

15.21.6 Physical Interpretation of the Limiting Cases

Discuss qualitatively the physical limiting case $a \to 0$. What happens to the momentum space representation $\phi(p)$ and how should this limiting case be interpreted physically? Refer to the concepts of localization and momentum uncertainty.

15.21.7 ***Note:***

This exercise is also suitable for numerical evaluation and graphical representation in Python or MATLAB. Optionally, the Fourier transform can also be verified symbolically using suitable software tools (e.g., SymPy or Mathematica).

15.21.8 Solution

Solution for n25 in en

6418 **Category**: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 006fe438-4c31-4b38-a199-f0b4144a2e00 on 24.05.2025

15.22 EN SHK-1 No.26-1PALLV1.0: Isometries in n-dimensional Euclidean space

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *An Original*

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten erhält, also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

15.22.1 Aufgaben:

1. **Lineare Isometrien:**

Zeigen Sie, dass jede lineare Isometrie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt werden kann, d. h. es gilt $T(x) = Ax$ mit $A^\top A = I$.

2. **Affine Isometrien:**

Bestimmen Sie alle Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die zusätzlich **affin** sind, also von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, und A orthogonal ist.

3. **Erhaltung des Skalarprodukts:**

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f, die zusätzlich linear ist, das Skalarprodukt erhält, d. h.:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Konstruktion einer speziellen Isometrie:**

Geben Sie ein Beispiel einer nichtlinearen Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, die keine lineare Abbildung ist, aber dennoch Distanzen erhält. Zeigen Sie, dass f tatsächlich isometrisch ist.

15.22.2 Solution

Solution for n26-1 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Keisan, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Medium **Tags**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 279441ee-c787-4429-9a05-1b35c79ef998 on 31.05.2025

15.23 EN SHK-1 No.26-2PALLV1.0: Proof task: Characterization of isometric mappings in $\mathbb{R}^n$

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *An Original*

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be an isometry, i.e.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

To show: Every isometry f in $\mathbb{R}^n$ is either an affine transformation of the form $f(x) = Ax + b$, where A is an orthogonal matrix, or can be written as a composition of such maps with reflections or translations. **Hint for further study (optional):** Show that the set of all isometries in $\mathbb{R}^n$ forms a group under composition —the so-called *Euclidean group* $\mathrm{E}(n)$.

15.23.1 Solution

Solution for n26-2 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Keisan, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Medium **Tags**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 920ac3eb-4f5f-40ee-9485-9426674da59a on 31.05.2025

15.24 EN 1 No.27PALLV1.0: Isometries in the n-dimensional Euclidean space and proof task: Characterization of isometric mappings in $\mathbb{R}^n$

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *An Original*

A mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is called an **isometry** if it preserves the Euclidean distance between two points, i.e., for all $x, y \in \mathbb{R}^n$, we have:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

15.24.1 Exercises:

1. **Linear Isometries:**

Show that every linear isometry $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ can be represented by an orthogonal matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, i.e., $T(x) = Ax$ with $A^\top A = I$.

2. **Affine Isometries:**

Determine all isometries $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ that are additionally **affine**, i.e., of the form $f(x) = Ax + b$, where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, and A is orthogonal.

3. **Preservation of the Inner Product:**

Let $u, v \in \mathbb{R}^n$ be two unit vectors. Show that every isometry f, which is also linear, preserves the inner product, i.e.:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construction of a Special Isometry:**

Provide an example of a nonlinear isometry $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ which is not a linear map but still preserves distances. Show that f is indeed an isometry.

15.24.2 Proof Task: Characterization of Isometric Mappings in $\mathbb{R}^n$

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be an isometry, i.e.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

15.24.3 To show:

Every isometry f in $\mathbb{R}^n$ is either an affine mapping of the form $f(x) = Ax + b$, where A is an orthogonal matrix, or it can be represented as a composition of such mappings with reflections or translations.

15.24.4 Optional deeper insight:

Show that the set of all isometries in $\mathbb{R}^n$ forms a group under composition −called the **Euclidean group** $\mathrm{E}(n)$.

15.24.5 Solution

15.24.6 Isometries in $\mathbb{R}^n$

A mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is called an **isometry** if it preserves the Euclidean distance, i.e.:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n$$

15.24.7 1. Linear Isometries

Claim: A linear isometry $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ can be written as $T(x) = Ax$ for an **orthogonal matrix** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, i.e., $A^\top A = I$.
Proof: Since T is linear, it suffices to show that $|Tx| = |x|$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

$$\text{Since } |T(x)| = |x| \text{ for all } x, \text{ it follows: } x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

15.24.8 2. Affine Isometries

Claim: An affine isometry is of the form

$$f(x) = Ax + b \quad \text{with } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Justification: If f is affine, i.e., $f(x) = Ax + b$, then:

$$|f(x) - f(y)| = |Ax + b - (Ay + b)| = |A(x - y)| = |x - y|$$

$$\Rightarrow |A(x - y)| = |x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |Ax| = |x| \Rightarrow A^\top A = I$$

15.24.9 3. Preservation of the Scalar Product

Claim: If f is linear and isometric, then:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

for all unit vectors $u, v \in \mathbb{R}^n$. **Proof:** Since f is linear and isometric, there exists an orthogonal matrix A such that $f(x) = Ax$. Then:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top Iv = \langle u, v\rangle$$

15.24.10 4. Nonlinear Isometries?

Question: Do nonlinear isometries exist? **Answer:** In Euclidean space $\mathbb{R}^n$, every isometry is automatically **affine**, i.e., there are **no non-affine (nonlinear) isometries** that preserve distances.

15.24.11 Characterization of All Isometries

Theorem: Every isometry $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ that preserves the Euclidean distance is an affine map of the form:

$$f(x) = Ax + b$$

with $A \in \mathrm{O}(n)$ and $b \in \mathbb{R}^n$. **Proof Idea:**

1. Let f be an isometry. Then:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

2. Define $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$. Then:

$$|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow |g(x)| = |x|$$

3. One shows: such maps are linear, i.e., $g(x) = Ax$ with $A \in \mathrm{O}(n)$
4. It follows that:

$$f(x) = Ax + f(0)$$

15.24.12 The Euclidean Group $\mathrm{E}(n)$

The set of all isometries in $\mathbb{R}^n$ forms a group under composition:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Properties:

- **Closure:** $f \circ g(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Inverse:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Identity:** $\mathrm{id}(x) = x$

15.24.13 Summary

- Linear isometries $\leftrightarrow$ orthogonal matrices
- Affine isometries $\leftrightarrow$ orthogonal matrices + translation
- Every isometry in $\mathbb{R}^n$ is affine
- The set of all isometries forms the **Euclidean group** $\mathrm{E}(n)$

Category: Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Medium **Tags**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 9c8f9906-0742-4308-8346-40895d72ad40 on 07.06.2025

15.25 EN 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Optimal Control of a Diffusive Process

Estimated time for solving: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *An Original*

This exercise explores the application of advanced calculus and real analysis concepts to an optimal control problem, which has strong parallels in fields like quantum system control and various engineering disciplines.

15.25.1 Problem Setup

Consider a 1-dimensional system whose "state" $y(x,t)$ (e.g., temperature distribution or concentration of a diffusing substance) evolves over a spatial domain $\Omega = [0, L]$ and time $t \in [0, T]$. The evolution is described by a simplified diffusion-like partial differential equation (PDE) with a time-dependent control parameter $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad \text{for } (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

with **boundary conditions**:

- $y(0, t) = 0$
- $y(L, t) = 0$, for $t \in (0, T]$

and an **initial condition**:

- $y(x, 0) = y_0(x)$, for $x \in [0, L]$

Here, $\alpha > 0$ is the diffusion constant, and $g(x)$ is a given spatial function representing the influence of the control. Assume $y_0(x)$ and $g(x)$ are sufficiently smooth. The objective is to find an **optimal control** $u(t) \in U_{\text{ad}}$, where:

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\max}\}$$

that minimizes the **cost functional**:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x, T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

where $y_{\text{desired}}(x)$ is the desired target state at time T, and $\lambda > 0$ is a regularization parameter penalizing large control effort.

15.25.2 Part 1: Foundational Analysis of the System

15.25.3 1. Existence and Uniqueness of the State

Explain, conceptually, why a unique solution $y(x,t)$ for the given PDE is expected for a given $u(t)$, initial, and boundary conditions. Reference the required properties (e.g., boundedness, continuity) and function spaces needed for weak solutions (e.g., Sobolev spaces such as $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, etc.).

15.25.4 2. Impact of Control Constraints

Discuss how the constraint $0 \le u(t) \le U_{\max}$ in U_{ad} influences the nature of the optimization problem. Compare with the unconstrained case $U_{\text{ad}} = C([0, T])$. Explain the role of convexity and how constrained optimization problems lead to different types of optimality conditions.

15.25.5 Part 2: Variational Analysis and Optimality Conditions

15.25.6 1. Gateaux Differentiability of the Cost Functional

Assuming $J(u)$ is differentiable, derive the **Gateaux derivative** of $J(u)$ at $u_0(t)$ in the direction $h(t)$. **Hint**: Let $y_h(x,t)$ be the solution to the PDE when the control is $u_0(t) + \varepsilon h(t)$. Compute:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

15.25.7 2. Role of the Adjoint System

Explain, in general terms, the purpose of the adjoint state in PDE-constrained optimization problems. How does it simplify the calculation of the gradient of the cost functional? Describe its relation to the "sensitivity" of the cost with respect to the state $y(x,t)$.

15.25.8 3. First-Order Necessary Condition

State the **first-order necessary optimality condition** (variational inequality) that must be satisfied by an optimal control u

15.25.8 Part 3: Advanced Topics and Limiting Behavior

15.25.9 1. Behavior of Optimal Control under Regularization

Discuss what happens to the regularization term:

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

as $\lambda \to 0^+$. What implications does this have on the behavior of the optimal control u

15.25.9 2. Epsilon-Delta Rigor

Suppose $u^{\cdot}(t)$ is known to be optimal. Explain how the **epsilon-delta definition of a limit** would be applied to rigorously prove that $y(x,T)$ is "arbitrarily close" to $y_{\text{desired}}(x)$ in L^2-norm. Specify the roles of:

- ε: how close the final state should be to the target
- δ: how close the control or final time must be (e.g., $-u^{\cdot}| < \delta$) to guarantee this closeness

15.25.10 Solution

Solution for m2 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki, Kōchiku and Sekkei, Kaishaku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Optimal Control, Functional Analysis, Partial Differential Equations, Gateaux Derivative, Adjoint System, Calculus of Variations, Numerical Mathematics, Epsilon-Delta Proof, Gradient Method, Boundary Value Problem, Regularization, Convexity, Function Spaces, Sobolev Space, PDE-Constrained Optimization

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: b83383ed-3418-49f7-aad3-7f3075620388 on 21.06.2025

16.1 ES 1 No.26-1PALLV1.0: Isometrías en el espacio euclidiano de dimensión n

Tiempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama una **isometría** si conserva la distancia euclidiana entre dos puntos, es decir, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

16.1.1 Ejercicios:

1. **Isometrías lineales:**

Demuestre que toda isometría lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ puede representarse mediante una matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

2. **Isometrías afines:**

Determine todas las isometrías $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que además sean **afines**, es decir, de la forma $f(x) = Ax + b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, y A es ortogonal.

3. **Conservación del producto escalar:**

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores unitarios. Demuestre que toda isometría f, que además es lineal, conserva el producto escalar, es decir:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construcción de una isometría especial:**

Dé un ejemplo de una isometría no lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que no sea una transformación lineal pero que conserve las distancias. Demuestre que f es realmente una isometría.

16.1.2 Solución

Solution for n26-1 in es

Categoría: Demostración, Resolución y Resolver, Cálculo, Construcción y Diseño **Dificultad**: Más Medio **Etiquetas**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 525848ab-3c75-46de-a638-918396abdd44 el 31.05.2025

16.2 *ES 1 No.26-2PALLV1.0: Problema de demostración: caracterización de las isometrías en $\mathbb{R}^n$*

Tiempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría, es decir:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A demostrar: Toda isometría f en $\mathbb{R}^n$ es una transformación afín de la forma $f(x) = Ax + b$, donde A es una matriz ortogonal, o puede escribirse como una composición de tales transformaciones con reflexiones o traslaciones. **Nota para profundizar (opcional):** Demuestre que el conjunto de todas las isometrías en $\mathbb{R}^n$ forma un grupo bajo composición —el llamado *grupo euclídeo* $\mathrm{E}(n)$.

16.2.1 *Solución*

Solution for n26-2 in es

Categoría: Demostración, Resolución y Resolver, Cálculo, Construcción y Diseño **Dificultad**: Más Medio **Etiquetas**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 67c0b382-7dd2-4ed8-b626-75c7228017b5 el 31.05.2025

16.3 ES 1 No.27PALLV1.0: Isometrías en el espacio euclidiano de dimensión n y tarea de prueba: caracterización de las aplicaciones isométricas en $\mathbb{R}^n$

Tiempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama **isometría** si preserva la distancia euclidiana entre dos puntos, es decir, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

16.3.1 Ejercicios:

1. **Isometrías lineales:**

Demuestre que toda isometría lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ puede ser representada por una matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

2. **Isometrías afines:**

Determine todas las isometrías $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que además sean **afines**, es decir, de la forma $f(x) = Ax + b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, y A es ortogonal.

3. **Preservación del producto escalar:**

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores unitarios. Demuestre que toda isometría f, que además es lineal, preserva el producto escalar, es decir:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construcción de una isometría especial:**

Dé un ejemplo de una isometría no lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que no sea una aplicación lineal pero que conserve las distancias. Demuestre que f es realmente una isometría.

16.3.2 Tarea de demostración: Caracterización de las aplicaciones isométricas en $\mathbb{R}^n$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría, es decir:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

16.3.3 A demostrar:

Toda isometría f en $\mathbb{R}^n$ es o bien una aplicación afín de la forma $f(x) = Ax + b$, donde A es una matriz ortogonal, o se puede representar como una composición de tales aplicaciones con reflexiones o traslaciones.

16.3.4 Profundización opcional:

Demuestre que el conjunto de todas las isometrías en $\mathbb{R}^n$ forma un grupo bajo la composición –llamado el **grupo euclidiano** $\mathrm{E}(n)$.

16.3.5 Solución

16.3.6 Isometrías en $\mathbb{R}^n$

Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama **isometría** si preserva la distancia euclidiana, es decir:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n$$

16.3.7 1. Isometrías lineales

Afirmación: Una isometría lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ puede escribirse como $T(x) = Ax$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una **matriz ortogonal**, es decir, $A^\top A = I$. **Demostración:** Dado que T es lineal, basta con mostrar que $|T(x)| = |x|$ para todo x.

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = x^\top A^\top Ax$$

Como $|T(x)| = |x|$, se deduce que:

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

16.3.8 2. Isometrías afines

Afirmación: Una isometría afín tiene la forma

$$f(x) = Ax + b \quad \text{con } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Justificación: Si f es afín, es decir, $f(x) = Ax + b$, entonces:

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

16.3.9 3. Conservación del producto escalar

Afirmación: Si f es lineal e isométrica, entonces:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

para todos los vectores unitarios $u, v \in \mathbb{R}^n$. **Demostración:** Como $f(x) = Ax$ con A ortogonal, se tiene:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle Au, Av \rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v = \langle u, v \rangle$$

16.3.10 4. ¿Existen isometrías no lineales?

Respuesta: En $\mathbb{R}^n$, **toda isometría es afín**, por lo que **no existen isometrías no afines** que conserven la distancia.

16.3.11 Caracterización de todas las isometrías

Teorema: Toda isometría $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preserva la distancia euclidiana es una transformación afín de la forma:

$$f(x) = Ax + b$$

con $A \in \mathrm{O}(n), b \in \mathbb{R}^n$. **Idea de la demostración:**

1. Definir $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$
2. $|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow |g(x)| = |x|$
3. Se muestra que g es lineal y de la forma $g(x) = Ax$, con A ortogonal.

4. Entonces: $f(x) = Ax + f(0)$

16.3.12 El grupo euclidiano $\mathrm{E}(n)$

El conjunto de todas las isometrías de $\mathbb{R}^n$ forma un grupo bajo composición:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Propiedades:

- **Cerrado:** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Inverso:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Neutro:** $\mathrm{id}(x) = x$

16.3.13 Resumen

- Isometrías lineales $\leftrightarrow$ matrices ortogonales
- Isometrías afines $\leftrightarrow$ matrices ortogonales + traslación
- Toda isometría en $\mathbb{R}^n$ es afín
- El conjunto de todas las isometrías forma el **grupo euclidiano** $\mathrm{E}(n)$

Categoría: Demostración, Construcción y Diseño **Dificultad**: Más Medio **Etiquetas**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 97d5449b-9c5b-4f0c-8aa7-7d9b966994e0 el 07.06.2025

16.4 ES 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Control óptimo de un proceso difusivo

Tiempo estimado para resolver: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Un Original*

16.4.1 Enunciado

Este ejercicio estudia la aplicación de conceptos avanzados de análisis y cálculo variacional a un problema de control óptimo, con fuertes paralelismos en áreas como el control cuántico y diversas ingenierías.

16.4.2 Planteamiento del problema

Considera un sistema unidimensional cuyo ”estado” $y(x,t)$ (por ejemplo, distribución de temperatura o concentración de una sustancia difusiva) evoluciona en un dominio espacial $\Omega = [0, L]$ y en el tiempo $t \in [0, T]$. La evolución está gobernada por una ecuación en derivadas parciales (EDP) simplificada, de tipo difusión, con un parámetro de control dependiente del tiempo $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

con condiciones de frontera:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, para $t \in (0, T]$

y condición inicial:

- $y(x, 0) = y_0(x)$, para $x \in [0, L]$

Aquí $\alpha > 0$ es la constante de difusión y $g(x)$ es una función espacial dada que modela la influencia del control. Se asume que $y_0(x)$ y $g(x)$ son suficientemente suaves. El objetivo es encontrar un **control óptimo** $u(t) \in U_{\text{ad}}$, donde

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

es el conjunto de controles admisibles. La **función costo** está definida como:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

donde $y_{\text{desired}}(x)$ es el estado objetivo deseado al tiempo T y $\lambda > 0$ es un parámetro de regularización que penaliza el esfuerzo de control.

16.4.3 Parte 1: Análisis básico del sistema

16.4.4 1. Existencia y unicidad del estado

Explica conceptualmente por qué para un control dado $u(t)$ junto con las condiciones iniciales y de frontera se espera una solución única $y(x,t)$ de la EDP. Considera las propiedades necesarias (como acotación, continuidad) y los espacios funcionales adecuados para soluciones débiles (por ejemplo, espacios de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, etc.).

16.4.5 2. Influencia de las restricciones de control

Discute cómo la restricción $0 \leq u(t) \leq U_{\max}$ en el dominio U_{ad} afecta la naturaleza del problema de optimización. Compara con el caso sin restricciones $U_{\text{ad}} = C([0, T])$. Explica el papel de la convexidad y cómo los problemas con restricciones conducen a condiciones óptimas diferentes.

16.4.6 Parte 2: Análisis variacional y condiciones de optimalidad

16.4.7 1. Diferenciabilidad de Gateaux de la función costo

Asumiendo que $J(u)$ es diferenciable, deriva la **derivada de Gateaux** de $J(u)$ en el punto $u_0(t)$ en la dirección $h(t)$. **Nota:** Sea $y_h(x,t)$ la solución de la EDP con el control $u_0(t) + \varepsilon h(t)$. Calcula:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$$

16.4.8 2. Rol del sistema adjunto

Explica de forma general la función del estado adjunto en problemas de optimización con EDP. ¿Cómo simplifica el cálculo del gradiente de la función costo? Describe su relación con la ”sensibilidad” del costo respecto al estado $y(x,t)$.

16.4.9 3. Primera condición necesaria de optimalidad

Formula la **primera condición necesaria de optimalidad** (desigualdad variacional) que debe cumplir un control óptimo u

16.4.9 Parte 3: Temas avanzados y comportamiento límite

16.4.10 1. Comportamiento del control óptimo ante la regularización

Discute qué ocurre con el término de regularización

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

cuando $\lambda \to 0^+$. ¿Qué efectos tiene esto sobre el comportamiento del control óptimo u_λ

16.4.10 2. Rigor con definición épsilon-delta

Suponiendo que $u^{\cdot}(t)$ es óptimo y conocido, explica cómo se usa la **definición épsilon-delta de límite** para demostrar rigurosamente que $y(x,T)$ está arbitrariamente cerca de $y_{\text{desired}}(x)$ en norma L^2. Explica el papel de:

- ε: qué tan cerca debe estar el estado final del estado objetivo.
- δ: cuán cerca debe estar el control (o el tiempo final) de su valor óptimo para garantizar esta aproximación.

16.4.11 Solución

Solution for m2 in es

Categoría: Demostración, Resolución y Resolver, Análisis, Construcción y Diseño, Interpretación **Dificultad**: Lado Oscuro **Etiquetas**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: d9274a32-6e97-490e-9bcf-56131484b74e el 21.06.2025

17.1 FN 1 No.26-1PALLV1.0: Isometriat n-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa

Ratkaisuun arvioitu aika: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Alkuperäinen*

Kuvauksesta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sanotaan, että se on **isometria**, jos se säilyttää euklidisen etäisyyden kahden pisteen välillä, eli kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

17.1.1 Tehtävät:

1. **Lineaariset isometriat:**

Osoita, että jokainen lineaarinen isometria $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ voidaan esittää ortogonaalisella matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eli $T(x) = Ax$ ja $A^\top A = I$.

2. **Affiinit isometriat:**

Määritä kaikki isometriat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jotka lisäksi ovat **affiineja**, eli muotoa $f(x) = Ax + b$, missä $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, ja A on ortogonaalinen.

3. **Skalaaritulon säilyminen:**

Olkoot $u, v \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektoreita. Osoita, että jokainen isometria f, joka on myös lineaarinen, säilyttää skalaaritulon:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Esimerkki erityisestä isometriasta:**

Anna esimerkki epälineaarisesta isometriasta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, joka ei ole lineaarinen, mutta säilyttää etäisyydet. Osoita, että f on todellakin isometria.

17.1.2 Ratkaisu

Solution for n26-1 in fn

Kategoria: Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Laskenta, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso**: Korkea Keskitaso **Tunnisteet**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 2f62edea-11fe-4cd1-8f0c-5216db27cb0a päivämäärä 31.05.2025

17.2 FN 1 No.26-2PALLV1.0: Todistustehtävä: $\mathbb{R}^n$ -avaruuden isometrioiden ominaisuus

Ratkaisuun arvioitu aika: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Alkuperäinen*

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria, eli:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{kaikille } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Todistettava: Jokainen isometria f avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on joko affiini muunnos muotoa $f(x) = Ax + b$, missä A on ortogonaalimatriisi, tai koostuu tällaisten muunnosten ja peilausten tai siirtojen yhdistelmästä. **Lisätehtävä (valinnainen):** Näytä, että kaikkien $\mathbb{R}^n$:n isometristen kuvausten joukko muodostaa ryhmän komposition suhteen —niin sanottu *Euklidinen ryhmä* $\mathrm{E}(n)$.

17.2.1 Ratkaisu

Solution for n26-2 in fn

Kategoria: Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Laskenta, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso**: Korkea Keskitaso **Tunnisteet**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 7e1b0a60-c236-4804-a837-dc31db3746a1 päivämäärä 31.05.2025

17.3 FN 1 No.27PALLV1.0: Isometria i n-dimensjonalt euklidsk rom og bevisoppgave: Karakterisering av isometriske avbildninger i $\mathbb{R}^n$

Ratkaisuun arvioitu aika: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Alkuperäinen*

Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on **isometria**, jos se säilyttää kahden pisteen euklidisen etäisyyden, eli kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

17.3.1 Tehtävät:

1. **Lineaariset isometriset:**

Todista, että jokainen lineaarinen isometria $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ voidaan esittää ortogonaalisella matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eli $T(x) = Ax$ ja $A^\top A = I$.

2. **Affiiniset isometriat:**

Määritä kaikki isometriat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jotka ovat lisäksi **affiineja**, eli muotoa $f(x) = Ax + b$, missä $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ ja A on ortogonaalinen.

3. **Sisätulon säilyminen:**

Olkoot $u, v \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektorit. Näytä, että jokainen lineaarinen isometria f säilyttää sisätulon, eli

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Erityisen isometrian rakentaminen:**

Anna esimerkki epälineaarisesta isometriasta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, joka ei ole lineaarinen mutta säilyttää etäisyydet. Todista, että f on todellakin isometria.

17.3.2 Todistustehtävä: Isometristen kuvausten karakterisointi $\mathbb{R}^n$:ssä

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria, eli pätee

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{kaikille } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

17.3.3 Näytettävä:

Jokainen isometria f on joko affiininen kuvaus muodossa $f(x) = Ax + b$, missä A on ortogonaalinen matriisi, tai se voidaan esittää tällaisen kuvausten yhdistelmänä, johon sisältyy peilaus tai siirto.

17.3.4 Syventävä huomautus (valinnainen):

Näytä, että kaikkien isometrioiden joukko $\mathbb{R}^n$:ssä muodostaa ryhmän yhdistämällä eli kompositiolla −tätä ryhmää kutsutaan **euklidiseksi ryhmäksi** $\mathrm{E}(n)$.

17.3.5 Ratkaisu

17.3.6 Isometriat avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on **isometria**, jos se säilyttää euklidisen etäisyyden, eli:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}^n$$

17.3.7 1. Lineaariset isometriat

Väittämä: Lineaarinen isometria $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ voidaan kirjoittaa muodossa $T(x) = Ax$, missä $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on **ortogonaalinen matriisi**, eli $A^\top A = I$. **Todistus:** Koska T on lineaarinen, riittää näyttää että $|T(x)| = |x|$ kaikilla x.

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

Koska $|T(x)| = |x|$, seuraa että:

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

17.3.8 2. Affiinit isometriat

Väittämä: Affiini isometria on muotoa

$$f(x) = Ax + b \quad \text{missä } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Perustelu: Jos f on affiini eli $f(x) = Ax + b$, niin:

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

17.3.9 3. Skalaaritulon säilyminen

Väittämä: Jos f on lineaarinen ja isometrinen, niin:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

kaikille yksikkövektoreille $u, v \in \mathbb{R}^n$. **Todistus:** Koska $f(x) = Ax$ ja A on ortogonaalinen, saadaan:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v = \langle u, v\rangle$$

17.3.10 4. Ovatko olemassa epälineaarisia isometrioita?

Vastaus: Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ **kaikki isometriat ovat affiineja**, joten **epälineaarisia isometrioita ei ole olemassa**.

17.3.11 Kaikkien isometrioiden karakterisointi

Lause: Kaikki etäisyyttä säilyttävät isometriat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ovat muotoa:

$$f(x) = Ax + b$$

missä $A \in \mathrm{O}(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$. **Todistuksen idea:**

1. Määritä $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$
2. $|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow |g(x)| = |x|$
3. Näytetään että g on lineaarinen ja muotoa $g(x) = Ax$, missä A on ortogonaalinen
4. Tällöin: $f(x) = Ax + f(0)$

17.3.12 Euklidinen ryhmä $\mathrm{E}(n)$

Kaikkien $\mathbb{R}^n$:n isometrioiden joukko muodostaa ryhmän koosteen suhteen:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Ominaisuuksia:

- **Suljettu:** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Käänteisfunktio:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Identiteetti:** $\mathrm{id}(x) = x$

17.3.13 Yhteenveto

- Lineaariset isometriat $\leftrightarrow$ ortogonaaliset matriisit
- Affiinit isometriat $\leftrightarrow$ ortogonaalinen matriisi + siirtymä
- Kaikki isometriat $\mathbb{R}^n$:ssä ovat affiineja
- Isometrioiden joukko muodostaa **euklidisen ryhmän** $\mathrm{E}(n)$

Kategoria: Todistus, Rakentaminen ja Suunnittelu **Vaikeustaso**: Korkea Keskitaso **Tunnisteet**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: e22ff950-0938-4f0b-be56-aeaf2702bdd6 päivämäärä 07.06.2025

17.4 FN 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Kontroll optimal av en diffusjonsprosess

Ratkaisuun arvioitu aika: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Alkuperäinen*

17.4.1 Tehtävänanto

Tämä harjoitus tutkii edistyneiden analyysin ja variaatiolaskennan käsitteiden soveltamista optimaalisen ohjauksen ongelmaan, jolla on läheisiä yhteyksiä kvanttikontrolliin ja eri insinööritieteiden aloihin.

17.4.2 Ongelman määrittely

Tarkastellaan yksidimensionaalista järjestelmää, jonka ”tila” $y(x,t)$ (esim. lämpötilajakauma tai diffusoivan aineen konsentraatio) kehittyy avaruusalueella $\Omega = [0,L]$ ja ajassa $t \in [0,T]$. Kehitys kuvataan yksinkertaistetulla, diffuusion kaltaisella osittaisdifferentiaaliyhtälöllä, jossa on aika-riippuvainen ohjausparametri $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

Reunaehdot:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, kun $t \in (0,T]$

ja **alkuehto**:

- $y(x,0) = y_0(x)$, kun $x \in [0,L]$

Tässä $\alpha > 0$ on diffuusiovakio ja $g(x)$ on annettu avaruudellinen funktio, joka kuvaa ohjauksen vaikutusta. Oletetaan, että $y_0(x)$ ja $g(x)$ ovat riittävän sileitä. Tavoitteena on löytää **optimaalinen ohjaus** $u(t) \in U_{\text{ad}}$, missä

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\max}\}$$

on sallitun ohjauksen joukko. **Kustannusfunktionaali** määritellään seuraavasti:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

missä $y_{\text{desired}}(x)$ on haluttu tavoitetila ajan T kohdalla ja $\lambda > 0$ on regularisointiparametri, joka rankaisee ohjauksen voimakkuutta.

17.4.3 Osa 1: Järjestelmän perusanalyysi

17.4.4 1. Tilatilan olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Selitä käsitteellisesti, miksi annetulla ohjauksella $u(t)$ sekä alku- ja reunaehdoilla odotetaan olevan yksikäsitteinen ratkaisu $y(x,t)$ PDE:lle. Viittaa tarvittaviin ominaisuuksiin (esim. rajoittuneisuus, jatkuvuus) ja sopiviin funktionaalitiloihin heikkojen ratkaisujen osalta (esim. Sobolev-tilat $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ jne.).

17.4.5 2. Ohjausrajoitusten vaikutus

Pohdi, miten rajoitus $0 \le u(t) \le U_{\max}$ määrittelyjoukossa U_{ad} vaikuttaa optimointiongelman luonteeseen. Vertaa rajoittamattomaan tapaukseen $U_{\text{ad}} = C([0,T])$. Selitä konveksisuuden rooli ja miten rajatut optimointiongelmat johtavat erilaisiin optimaalisuusehtoihin.

17.4.6 Osa 2: Variaatioanalyysi ja optimiehdot

17.4.7 1. Gateaux-derivaatta kustannusfunktion osalta

Olettaen, että $J(u)$ on derivoituva, johda **Gateaux-derivaatta** kohdassa $u_0(t)$ suunnassa $h(t)$. **Vihje:** Olkoon $y_h(x,t)$ PDE:n ratkaisu, kun ohjaus on $u_0(t) + \varepsilon h(t)$. Laske:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

17.4.8 2. Adjoitujärjestelmän rooli

Selitä yleisesti adjoidun tilan funktio PDE-optimointiongelmissa. Kuinka se yksinkertaistaa kustannusfunktion gradientin laskentaa? Kuvaa sen suhdetta tilan $y(x,t)$ herkkyyteen kustannusta kohtaan.

17.4.9 3. Ensimmäinen välttämätön optimiehto

Muodosta **ensimmäinen välttämätön optimiehto** (variaatioepäyhtälö), joka optimaalisen ohjauksen u

17.4.9 Osa 3: Edistyneet aiheet ja raja-käyttäytyminen

17.4.10 1. Optimaaliohjauksen käyttäytyminen regularisoinnin suhteen

Pohdi, mitä tapahtuu regularisointitermille

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

kun $\lambda \to 0^+$. Millaisia vaikutuksia tällä on optimaaliohjaukselle u_λ

17.4.10 2. Epsilon-delta-rigorisuus

Oletetaan, että $u^{\cdot}(t)$ tunnetaan optimaalisena. Selitä, kuinka **epsilon-delta-rajojen määritelmä** sovelletaan näyttämään, että $y(x,T)$ on L^2-normissa ”mielivaltaisen lähellä” $y_{\text{desired}}(x)$. Selitä seuraavien roolit:

- ε: kuinka lähellä lopputilan halutaan olevan tavoitetilaa
- δ: kuinka lähellä ohjausta tai lopetusaikaa (esim. $|u - u^{\cdot}| < \delta$) tulee olla, jotta tuo läheisyys varmistuu

17.4.11 Ratkaisu

Solution for m2 in fn

Kategoria: Todistus, Ratkaisu ja Ratkaista, Analyysi, Rakentaminen ja Suunnittelu, Tulkitseminen **Vaikeustaso**: Pimeä Puoli **Tunnisteet**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 41deec5f-8a8c-436e-b487-f3b549e085cc päivämäärä 21.06.2025

18 Solution

18.1 *FR SH-1 No.1PALLV1.0: Prouver que $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$*

Temps estimé pour résoudre: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Un Original*

Prouver que pour tout nombre naturel n, la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un n quelconque, alors il est également vrai pour $n + 1$.

18.1.1 Solution

Base de l'induction : $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Étape d'induction : Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'énoncé est vrai pour n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Alors :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Catégorie: Preuve **Difficulté**: Facile **Étiquettes**: Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b le 19.04.2025

18.2 FR KAB-1 No.14PALLV1.0: Complexité optimale d'une méthode de primalité adaptative

Temps estimé pour résoudre: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *Un Original*

Problème Un test de primalité adaptatif est un algorithme qui, lorsqu'il teste la propriété de premier d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, choisit progressivement entre les méthodes probabilistes et déterministes. Parmi les exemples, on peut citer Miller-Rabin, Baillie-PSW ou AKS. Développer et analyser une méthode de primalité adaptative présentant la propriété suivante :

- L'algorithme commence par un test probabiliste (par exemple, Miller-Rabin).
- Si ce test est réussi plusieurs fois, le système effectue un sous-test déterministe (par exemple, Lucas, ECPP ou niveau AKS réduit) pour les cas limites.
- La complexité globale de la méthode dépend de la taille de n et de la probabilité d'erreur supposée ε.

Tâche : Trouver une combinaison asymptotiquement optimale de ces méthodes (avec preuve) et calculer le temps d'exécution minimum attendu pour la décision « premier » ou « non premier », en supposant des distributions réalistes de nombres $n \in [1, N]$ choisis aléatoirement. **Objectif :**

- Analyser le **modèle de complexité adaptative à erreur contrôlée**.
- Développer une classe de fonctions $T(n, \varepsilon)$ décrivant le temps d'exécution (en valeur attendue) de la méthode optimale.
- Comparer votre solution à des méthodes connues telles que Miller-Rabin (multiple), Baillie-PSW et AKS déterministe.

18.2.1 Solution

Solution for n14 in fr

Catégorie: Résolution et Résoudre, Analyse, Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Difficile **Étiquettes**: **UUID**: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: b6ff31f3-7845-47a3-803d-792690b52f48 le 11.05.2025

18.3 FR SHB-3 No.15PALLV1.0: Structure de solution des polynômes récursifs généralisés

Temps estimé pour résoudre: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Un Original*

Une définition récursive est donnée :

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

avec les valeurs initiales $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ et $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ Analyser:

- Conditions pour la forme fermée
- Structure des zéros
- Lien avec les polynômes classiques (par exemple les polynômes de Tchebychev, Legendre, Hermite)

18.3.1 Structure de la solution (étapes générales)

*18.3.2 1. **Analyse de la récursivité***

- Déterminer le degré de récursivité k
- Classer les coefficients $a_i(x)$
- Constante? Linéaire? Polynôme général ?

*18.3.3 2. **Polynôme caractéristique***

- Introduire une transformation analogue à la récursivité linéaire :
- Considérons l'indépendance linéaire de la base $P_0, \ldots, P_k$
- Trouver une solution via un polynôme caractéristique (avec constante a_i)

*18.3.4 3. **Représentation à l'aide de méthodes matricielles***

- Écrire la récursivité sous forme de système matriciel :

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

avec le vecteur $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- Étudier les valeurs propres et les vecteurs propres de $A(x)$

*18.3.5 4. **Comparaison avec des familles connues***

- Vérifier si le polynôme peut être classé dans une classe connue (orthogonale, symétrique, etc.).

*18.3.6 5. **Structure zéro***

- Utiliser des méthodes numériques pour analyser les zéros
- Étudier le comportement de convergence (par exemple pour $n \to \infty$)

*18.3.7 6. **Solution symbolique (si possible)***

- Recherche de formes fermées (par exemple par génération de fonctions, transformation en équations différentielles)
- Trouver une représentation explicite via des fonctions de base ou des structures combinatoires

18.3.8 Solution 6990

Solution for n15 in fr

Catégorie: Preuve, Analyse **Difficulté**: Plus Difficile **Étiquettes**: 6992

UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 731c2ede-a852-4e70-90bf-cec748f09bf2 le 11.05.2025

18.4 FR SHKS-1 No.16PALLV1.0: Machine de Turing à mémoire limitée –preuve de correction

Temps estimé pour résoudre: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *Un Original*

Étant donné une machine de Turing M_b dont la bande de travail est limitée à $O(\log n)$ cellules mémoire. Montrer que M_b décide correctement d'une certaine langue L, par exemple Par exemple :

$$L = \{l \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(l) = \#b(l)\}$$

ou tout autre langage spécifique où les contraintes de mémoire sont pertinentes.

18.4.1 Informations Complémentaires

- Définitions des machines de Turing (MT) et de la mémoire limitée (par exemple, espace logarithmique)
- Modèles formels tels que LBA (Linear Bounded Automata)
- Comparaison avec des langages réguliers ou sans contexte
- Logique booléenne et méthodes invariantes
- Preuves logiques standard (par exemple, induction, contradiction)
- Croquis sur papier ou notes

18.4.2 Exigences

18.4.3 **1. Spécification formelle**

- Définir formellement la TM bornée M_b :
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Limitation : Taille de la bande de travail $\leq c \cdot \log n$

18.4.4 **2. Décrivez la langue** L

- Démontrer que $L \in \mathsf{L}$ (décidable avec l'espace logarithmique)
- Exemples :
- Nombre équilibré de symboles (par exemple, nombre égal de a et b)
- Reconnaissance de motifs réguliers simples avec optimisation de l'espace

18.4.5 **3. Construction/Simulation**

- Décrivez la stratégie TM avec peu de mémoire :
- Signets (technique du pointeur)
- Procédure en deux passes
- Compteur en représentation binaire sur bande de travail

18.4.6 **4. Exactitude**

- Utiliser l'invariance ou la simulation :
- À chaque étape, l'invariant est préservé (par exemple, l'égalité de comptage)
- Afficher : Si TM accepte, alors $w \in L$; si $w \in L$, alors TM accepte

*18.4.7 **5. Prouver la complexité spatiale***

- Analyse : Toutes les étapes ne nécessitent que $O(\log n)$ cellules mémoire
- Prétendre qu'aucun stockage non autorisé n'a lieu

*18.4.8 **6. Diplôme***

- Terminer par une preuve complète (par exemple par induction complète sur la longueur de w)
- Montrer que la mémoire limitée est **suffisante et fonctionne correctement**

18.4.9 Solution

Solution for n16 in fr

Catégorie: Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 1ae5432b-08b9-464d-a7d7-b20048523913 le 11.05.2025

18.5 FR BUK-1 No.17PALLV1.0: Modèle de champ quantique d'interférence de paquets d'ondes

Temps estimé pour résoudre: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *Un Original*

Un modèle de théorie quantique des champs est donné pour décrire l'interférence de deux paquets d'ondes en mouvement dans un champ scalaire. Développer un modèle théorique et numérique complet qui décrit et analyse la construction, l'évolution et l'interférence des paquets d'ondes dans la théorie quantique des champs. Effectuez les sous-tâches suivantes :

1. **Fondements théoriques**
   - Expliquer la quantification d'un champ scalaire libre.
   - Dériver l'opérateur de champ $\hat{\phi}(x,t)$.
   - Décrivez le comportement du commutateur de $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$.
2. **Construction des états de paquets d'ondes**
   - Définir deux distributions d'impulsion gaussiennes orthogonales $f_1(k)$, $f_2(k)$.
   - Gérer la condition

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

et le normaliser.

3. **Valeur attendue et interférence**
   - Calculer l'espérance mathématique $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
   - Identifier les termes croisés et leur contribution aux interférences.
   - Visualiser le motif d'interférence en fonction de x, t, δ.
4. **Évolution temporelle et propagation des paquets d'ondes**
   - Simuler la propagation de paquets d'ondes dans l'espace et dans le temps.
   - Analyser l'influence de la vitesse de groupe et de phase sur la structure d'interférence.
   - Discutez de tout phénomène de dispersion qui pourrait se produire.
5. **Extension aux produits pour opérateurs de terrain**
   - Calculer la fonction à deux points $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
   - Analyser leur structure spatio-temporelle.
   - Discuter des implications pour les mesures possibles.
6. **Interprétation expérimentale et validation du modèle**
   - Comparez votre modèle avec un interféromètre optique quantique (par exemple Mach-Zehnder).
   - Discuter des opérateurs de mesure, de l'effondrement de l'état et de la visibilité des interférences.
7. **Réflexion, analyse de la complexité et limites du modèle**
   - Estimez la complexité algorithmique de vos procédures numériques.
   - Discuter des extensions possibles (par exemple, champs de spineurs, QED).
   - Réfléchir à l'importance et aux limites de la théorie des champs scalaires.

Le travail doit être mathématiquement solide, interprété physiquement et complété par des simulations numériques.

18.5.1 Solution 7070

Solution for n17 in fr
Catégorie: Analyse, Calcul **Difficulté**: YAMI **Étiquettes**: 7072
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: b30962b2-bc30-497d-bb98-ee335aeacd7f le 11.05.2025

18.6 FR SHK-1 No.23PALLV1.0: Récursivité et combinateurs à virgule fixe dans le calcul lambda non typé

Temps estimé pour résoudre: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *Un Original*

Le calcul lambda non typé avec réduction β complète est donné. Les codages de l'Église pour les nombres naturels, « iszero », « pred » et « mult » sont considérés comme bien connus. Soit le combinateur à point fixe $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ donné ainsi que la fonction :

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Tâche: Démontrer formellement et complètement que $Y\ F$ est une procédure récursive correcte pour calculer les factorielles selon le codage de Church. Les points suivants doivent être détaillés :

1. **Réduction pour argument fixe :** Effectuer une réduction β complète du terme $(Y\ F)\ 3$. Spécifiez toutes les étapes de réduction jusqu'au codage final de l'Église.

2. **Preuve de correction par récurrence :** Effectuez une preuve par récurrence structurelle sur les nombres de Church selon laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$ la condition suivante est remplie :

$$(Y\ F)\ n \rightarrow^{*}_{\beta} \text{fac}_n$$

où fac_n est l'encodage de l'Église de $n!$.

3. **Propriété du point fixe :** Démontrer formellement que $Y\ F = F\ (Y\ F)$, et montrer pourquoi cette expression permet un calcul récursif.

4. **Comparaison avec le Z-Combinator :**

- Définir le combinateur Z.
- Comparer la longueur de réduction de $(Y\ F)\ 3$ et $(Z\ F)\ 3$.
- Discutez dans quels contextes Z devraient être préférés.

Remarque : pour toutes les étapes de réduction, les termes intermédiaires doivent être spécifiés explicitement. N'utilisez pas de simplifications ou de sauts sans justification.

18.6.1 Solution

Solution for n23 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 118ed990-622b-42c5-85ff-c2c3252befcd le 17.05.2025

18.7 FR SHK-2 No.24PALLV1.0: Rôle des fonctions zêta et gamma dans les fonctions de partition et les énergies du vide de la théorie quantique des champs

Temps estimé pour résoudre: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* *Un Original*

Étudier et démontrer le rôle des fonctions zêta et gamma dans la régularisation de la théorie quantique des champs et la thermodynamique, notamment dans le contexte des fonctions de partition et de l'énergie du vide.

18.7.1 Tâche

Soit un champ quantique scalaire sur un espace-temps compact de périodicité β dans la dimension temporelle (correspondant à une température $T = 1/\beta$) et une dimension spatiale L. Les fréquences propres du champ sont :

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

En utilisant la régularisation zêta, montrer que la fonction de partition thermodynamique

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

peut être calculée régulièrement à l'aide de l'extension analytique de la fonction zêta de Riemann et de la fonction gamma.

18.7.2 Sous-tâches

1. **Dérivation de l'énergie régulée du vide**

Déduire l'expression de l'énergie régulée du vide $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ à l'aide de la **fonction zêta**. Montrer que :

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{et} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

et convertir l'expression en fonction gamma à l'aide de la transformée de Mellin.

2. **Réduction à une fonction zêta d'Epstein**

Montrer que la double somme sur n et m peut être représentée par une fonction zêta d'Epstein. Analyser ses propriétés analytiques.

3. **Dépendance à la température et fonctions thermodynamiques**

Utiliser l'expression régularisée pour déduire l'énergie libre F(bêta), l'énergie interne U(bêta) et l'entropie S(bêta). Montrer comment la fonction gamma apparaît dans le développement asymptotique pour les températures élevées et basses.

4. **Comparaison avec l'énergie de Casimir**

Démontrer que la limite à température nulle de la fonction de partition se transforme en énergie de Casimir et que la régularisation donne exactement la même forme que la méthode zêta-Casimir classique.

18.7.3 Solution

Solution for n24 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: NUM **Étiquettes**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: 5377267d-9aaa-4a14-86dc-4182c4a66fca le 24.05.2025

18.8 FR SHK-3 No.25PALLV1.0: Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussien

Temps estimé pour résoudre: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Un Original*

18.8.1 Tâche : Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussiennes

Étant donné une particule mécanique quantique unidimensionnelle avec la fonction d'onde dans l'espace de position :

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Cette fonction décrit une particule stationnaire et en mouvement libre avec une distribution spatiale gaussienne.

18.8.2 ***Sous-tâches***

18.8.3 Normalisation de la fonction d'onde

Déterminer la constante de normalisation A telle que la fonction d'onde soit normalisée, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

18.8.4 Transformation de Fourier dans l'espace des impulsions

Calculer la représentation spatiale de l'impulsion $\phi(p)$ de la fonction d'onde en utilisant la transformation de Fourier selon :

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complétez l'intégration et indiquez la fonction résultante $\phi(p)$ sous forme explicite.

18.8.5 Le principe d'incertitude de Heisenberg

Déterminer les écarts types σ_x et σ_p des distributions de position et d'impulsion, respectivement :

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

et montrer que le produit de ces diffusions satisfait le principe d'incertitude de Heisenberg :

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

18.8.6 Interprétation physique des cas limites

Discutez qualitativement du cas limite physique $a \to 0$. Qu'arrive-t-il à la représentation de l'espace d'impulsion $\phi(p)$ et comment ce cas limite doit-il être interprété physiquement ? Se référer aux concepts de localisation et d'incertitude d'impulsion.

18.8.7 ***Un avis :***

Cette tâche convient également à l'évaluation numérique et à la représentation graphique en Python ou MATLAB. En option, la transformée de Fourier peut également être vérifiée symboliquement à l'aide d'outils logiciels appropriés (par exemple, SymPy ou Mathematica).

18.8.8 Solution

Solution for n25 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 1cf99a90-2b19-471b-9f08-3371ac30d6c4 le 24.05.2025

18.9 FR SHK-1 No.26-1PALLV1.0: Isométries dans l'espace euclidien de dimension n

Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est appelée une **isométrie** si elle conserve la distance euclidienne entre deux points, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

18.9.1 Exercices :

1. **Isométries linéaires :**

Montrez que toute isométrie linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ peut être représentée par une matrice orthogonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, c'est-à-dire $T(x) = Ax$ avec $A^\top A = I$.

2. **Isométries affines :**

Déterminez toutes les isométries $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui sont également **affines**, donc de la forme $f(x) = Ax + b$, où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, et A est orthogonale.

3. **Conservation du produit scalaire :**

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs unitaires. Montrez que toute isométrie f, qui est aussi linéaire, conserve le produit scalaire :

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construction d'une isométrie particulière :**

Donnez un exemple d'une isométrie non linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui n'est pas une transformation linéaire mais qui conserve néanmoins les distances. Montrez que f est bien isométrique.

18.9.2 Solution

Solution for n26-1 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Calcul, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Moyen **Étiquettes**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 9e3d5cfc-ad12-41ae-a13b-228b0eafc565 le 31.05.2025

18.10 FR SHK-1 No.26-2PALLV1.0: Tâche de preuve: caractérisation des applications isométriques dans $\mathbb{R}^n$

Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie, c'est-à-dire :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

À montrer : Toute isométrie f de $\mathbb{R}^n$ est soit une application affine de la forme $f(x) = Ax + b$, où A est une matrice orthogonale, soit elle peut être obtenue par composition de telles applications avec des réflexions ou des translations. **Remarque pour approfondir (facultatif) :** Montrez que l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^n$ forme un groupe pour la composition —le *groupe euclidien* $\mathrm{E}(n)$.

18.10.1 Solution

Solution for n26-2 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Calcul, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Moyen **Étiquettes**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: f7477982-9df6-482c-bbeb-ea0acd6e7fc2 le 31.05.2025

18.11 FR 1 No.27PALLV1.0: Isométries dans l'espace euclidien de dimension n et tâche de preuve : caractérisation des applications isométriques dans $\mathbb{R}^n$

Temps estimé pour résoudre: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Original*

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une **isométrie** si elle préserve la distance euclidienne entre deux points, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

18.11.1 Exercices :

1. **Isométries linéaires :**

Montrez que toute isométrie linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ peut être représentée par une matrice orthogonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, c'est-à-dire que $T(x) = Ax$ avec $A^\top A = I$.

2. **Isométries affines :**

Déterminez toutes les isométries $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui sont également **affines**, c'est-à-dire de la forme $f(x) = Ax + b$, où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ et A est orthogonale.

3. **Préservation du produit scalaire :**

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs unitaires. Montrez que toute isométrie f linéaire préserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construction d'une isométrie particulière :**

Donnez un exemple d'isométrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ non linéaire, qui ne soit pas une application linéaire mais qui préserve néanmoins les distances. Montrez que f est bien une isométrie.

18.11.2 Exercice de preuve : caractérisation des isométries dans $\mathbb{R}^n$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie, c'est-à-dire :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

18.11.3 À montrer :

Toute isométrie f dans $\mathbb{R}^n$ est soit une application affine de la forme $f(x) = Ax + b$, où A est une matrice orthogonale, soit elle peut se décomposer en composition d'applications de ce type avec des réflexions ou des translations.

18.11.4 Remarque pour approfondissement (optionnel) :

Montrez que l'ensemble de toutes les isométries dans $\mathbb{R}^n$ forme un groupe pour la composition —appelé **groupe euclidien** $\mathrm{E}(n)$.

18.11.5 Solution

18.11.6 Isométries dans l'espace $\mathbb{R}^n$

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une **isométrie** si elle préserve la distance euclidienne, c'est-à-dire :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n$$

18.11.7 1. Isométries linéaires

Proposition : Une isométrie linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $T(x) = Ax$, avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une **matrice orthogonale**, c'est-à-dire $A^\top A = I$. **Démonstration :** Comme T est linéaire, il suffit de montrer que $|T(x)| = |x|$ pour tout x.

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

Comme $|T(x)| = |x|$, on en déduit :

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

18.11.8 2. Isométries affines

Proposition : Une isométrie affine est de la forme

$$f(x) = Ax + b \quad \text{avec } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Justification : Si f est affine, soit $f(x) = Ax + b$, alors :

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

18.11.9 3. Préservation du produit scalaire

Proposition : Si f est linéaire et isométrique, alors :

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

pour tous vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$. **Démonstration :** Si $f(x) = Ax$ avec A orthogonale, alors :

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v = \langle u, v\rangle$$

18.11.10 4. Existe-t-il des isométries non affines ?

Réponse : Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, **toutes les isométries sont affines**, donc **il n'existe pas d'isométries non affines**.

18.11.11 Caractérisation des isométries

Théorème : Toute isométrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = Ax + b$$

avec $A \in \mathrm{O}(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$. **Idée de la démonstration :**

1. Définir $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$
2. $|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow |g(x)| = |x|$

3. Montrer que g est linéaire : $g(x) = Ax$ avec A orthogonale
4. Donc $f(x) = Ax + f(0)$

18.11.12 Le groupe euclidien $\mathrm{E}(n)$

L'ensemble de toutes les isométries de $\mathbb{R}^n$ forme un **groupe** pour la composition :

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Propriétés :

- **Fermé :** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Inverse :** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Identité :** $\mathrm{id}(x) = x$

18.11.13 Résumé

- Isométries linéaires $\leftrightarrow$ matrices orthogonales
- Isométries affines $\leftrightarrow$ matrice orthogonale + translation
- Toutes les isométries de $\mathbb{R}^n$ sont affines
- L'ensemble des isométries forme le **groupe euclidien** $\mathrm{E}(n)$

Catégorie: Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Moyen **Étiquettes**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 918081ce-1154-48cd-8b4c-9f6b81fd8296 le 07.06.2025

18.12 FR 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Contrôle optimal d'un processus diffusif

Temps estimé pour résoudre: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Un Original*

18.12.1 Enunciato

Questo esercizio esplora l'applicazione di concetti avanzati di analisi funzionale e calcolo delle variazioni a un problema di controllo ottimale, con forti collegamenti al controllo quantistico e a diverse discipline di ingegneria.

18.12.2 Definizione del problema

Consideriamo un sistema unidimensionale il cui "stato" $y(x,t)$ (ad esempio una distribuzione di temperatura o la concentrazione di un diffusore) evolve in un dominio spaziale $\Omega = [0, L]$ e in un intervallo temporale $t \in [0, T]$. L'evoluzione è descritta da un'equazione alle derivate parziali di tipo diffusione semplificata, con un parametro di controllo dipendente dal tempo $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

Condizioni al contorno:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, per $t \in (0, T]$

e **condizione iniziale**:

- $y(x,0) = y_0(x)$, per $x \in [0, L]$

Qui, $\alpha > 0$ è una costante di diffusione e $g(x)$ una funzione spaziale data che descrive l'effetto del controllo. Si assume che $y_0(x)$ e $g(x)$ siano sufficientemente regolari. L'obiettivo è trovare un **controllo ottimale** $u(t) \in U_{\text{ad}}$, dove

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\max}\}$$

è l'insieme dei controlli ammissibili. La **funzione costo** è definita da:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

dove $y_{\text{desired}}(x)$ è lo stato desiderato al tempo finale T e $\lambda > 0$ è un parametro di regolarizzazione che penalizza l'energia del controllo.

18.12.3 Parte 1: Analisi di base del sistema

18.12.4 1. Esistenza e unicità della soluzione

Spiegare concettualmente perché, per un controllo dato $u(t)$, così come le condizioni iniziali e al contorno imposte, ci si aspetta una soluzione unica $y(x,t)$ del problema PDE. Fare riferimento alle proprietà necessarie (ad esempio, limitatezza, continuità) e agli spazi funzionali appropriati per soluzioni deboli (es. spazi di Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, ecc.).

18.12.5 2. Effetto dei vincoli sul controllo

Discutere come il vincolo $0 \le u(t) \le U_{\max}$ in U_{ad} influenzi la natura del problema di ottimizzazione. Confrontare con il caso senza vincoli $U_{\text{ad}} = C([0,T])$. Spiegare il ruolo della convessità e come i problemi di ottimizzazione vincolati portano a condizioni di ottimalità diverse.

18.12.6 Parte 2: Analisi variazionale e condizioni di ottimalità

18.12.7 1. Derivata di Gateaux della funzione costo

Supponendo che $J(u)$ sia differenziabile, derivare la **derivata di Gateaux** in un punto $u_0(t)$ nella direzione $h(t)$. **Suggerimento**: Sia $y_h(x,t)$ la soluzione del PDE per il controllo $u_0(t)+\varepsilon h(t)$. Calcolare:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0+\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

18.12.8 2. Ruolo del sistema aggiunto (adjoint)

Spiegare in termini generali la funzione dello stato aggiunto nei problemi di ottimizzazione PDE. Come semplifica il calcolo del gradiente della funzione costo? Descrivere il legame con la sensibilità dello stato $y(x,t)$ rispetto al costo.

18.12.9 3. Prima condizione necessaria di ottimalità

Formulare la **prima condizione necessaria di ottimalità** (disuguaglianza variazionale) che deve soddisfare il controllo ottimale u

18.12.9 Parte 3: Argomenti avanzati e comportamento limite

18.12.10 1. Comportamento ottimale del controllo in funzione della regolarizzazione

Discutere cosa succede al termine di regolarizzazione

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

quando $\lambda \to 0^+$. Quali sono le implicazioni per il controllo ottimale u_λ

18.12.10 2. Rigore epsilon-delta

Supponendo che $u^{\cdot}(t)$ sia noto come ottimale, spiegare come la definizione delle soglie epsilon-delta si applica per mostrare che $y(x,T)$ è ”arbitrariamente vicino” a $y_{\text{desired}}(x)$ nella norma L^2. Descrivere i ruoli delle seguenti quantità:

- ε: la vicinanza desiderata dello stato finale allo stato obiettivo
- δ: la vicinanza richiesta del controllo o del tempo finale (es. $|u-u^{\cdot}|<\delta$) per garantire tale vicinanza

18.12.11 Solution

Solution for m2 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse, Construction et Conception, Interprétation **Difficulté**: YAMI **Étiquettes**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 021c742f-9fd5-4890-8583-47b8cb9947a6 le 21.06.2025

19 Soluzione

19.1 IT 1 No.26-1PALLV1.0: Isometrie nello spazio euclideo di dimensione n

Tempo stimato per la risoluzione: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Originale*

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice una **isometria** se conserva la distanza euclidea tra due punti, cioè per tutti $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

19.1.1 Esercizi:

1. **Isometrie lineari:**

Mostra che ogni isometria lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ può essere rappresentata da una matrice ortogonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cioè $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

2. **Isometrie affini:**

Determina tutte le isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che sono anche **affini**, cioè della forma $f(x) = Ax + b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A ortogonale.

3. **Conservazione del prodotto scalare:**

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ due vettori unitari. Mostra che ogni isometria f lineare conserva il prodotto scalare:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Costruzione di un'isometria speciale:**

Fornisci un esempio di un'isometria non lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che non è una trasformazione lineare ma che conserva comunque le distanze. Mostra che f è effettivamente isometrica.

19.1.2 Soluzione

Solution for n26-1 in it

Categoria: Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Calcolo, Costruzione e Progettazione **Difficoltà**: Più Medio **Etichette**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 4d950882-f4cd-4549-b43a-547494aabfcb il 31.05.2025

19.2 IT 1 No.26-2PALLV1.0: Problema di dimostrazione: caratterizzazione delle isometrie in $\mathbb{R}^n$

Tempo stimato per la risoluzione: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Originale*

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria, cioè:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{per tutti } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Da dimostrare: Ogni isometria f in $\mathbb{R}^n$ è una trasformazione affine della forma $f(x) = Ax + b$, dove A è una matrice ortogonale, oppure può essere scritta come composizione di tali trasformazioni con riflessioni o traslazioni. **Suggerimento per approfondimento (opzionale):** Mostra che l'insieme di tutte le isometrie in $\mathbb{R}^n$ forma un gruppo rispetto alla composizione —il cosiddetto *gruppo euclideo* $\mathrm{E}(n)$.

19.2.1 Soluzione

Solution for n26-2 in it

Categoria: Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Calcolo, Costruzione e Progettazione **Difficoltà**: Più Medio **Etichette**: **UUID**: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 1a2cdc82-23b6-400a-8696-ac2ff5453644 il 31.05.2025

19.3 IT 1 No.27PALLV1.0: Isometrie nello spazio euclideo di dimensione n e compito di prova: caratterizzazione delle applicazioni isometriche in $\mathbb{R}^n$

Tempo stimato per la risoluzione: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Un Originale*

Una mappa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si chiama **isometria** se preserva la distanza euclidea tra due punti, cioè per tutti $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

19.3.1 Esercizi:

1. **Isometrie lineari:**

Dimostrare che ogni isometria lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ può essere rappresentata da una matrice ortogonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cioè $T(x) = Ax$ con $A^\top A = I$.

2. **Isometrie affini:**

Determinare tutte le isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che sono anche **affini**, cioè della forma $f(x) = Ax + b$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A è ortogonale.

3. **Conservazione del prodotto scalare:**

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ due vettori unitari. Dimostrare che ogni isometria f, che è anche lineare, conserva il prodotto scalare, cioè:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Costruzione di un'isometria speciale:**

Fornire un esempio di isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ non lineare che non sia un'applicazione lineare ma che comunque preservi le distanze. Mostrare che f è effettivamente un'isometria.

19.3.2 Esercizio di dimostrazione: caratterizzazione delle applicazioni isometriche in $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria, cioè:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

19.3.3 Da dimostrare:

Ogni isometria f in $\mathbb{R}^n$ è o un'applicazione affine della forma $f(x) = Ax + b$, dove A è una matrice ortogonale, oppure può essere rappresentata come composizione di tali applicazioni con riflessioni o traslazioni.

19.3.4 Nota per approfondimento (opzionale):

Dimostrare che l'insieme di tutte le isometrie in $\mathbb{R}^n$ forma un gruppo rispetto alla composizione —il cosiddetto **gruppo euclideo** $\mathrm{E}(n)$.

19.3.5 Soluzione

19.3.6 Isometrie nello spazio $\mathbb{R}^n$

Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'**isometria** se preserva la distanza euclidea, cioè:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n$$

19.3.7 1. Isometrie lineari

Proposizione: Un'isometria lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è della forma $T(x) = Ax$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una **matrice ortogonale**, ovvero $A^\top A = I$. **Dimostrazione:** Poiché T è lineare, basta mostrare che $|T(x)| = |x|$ per ogni x.

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

Poiché $|T(x)| = |x|$, si ottiene:

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

19.3.8 2. Isometrie affini

Proposizione: Un'isometria affine è della forma

$$f(x) = Ax + b \quad \text{con } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Giustificazione: Se f è affine, ovvero $f(x) = Ax + b$, allora:

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

19.3.9 3. Preservazione del prodotto scalare

Proposizione: Se f è lineare e isometrica, allora:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$. **Dimostrazione:** Se $f(x) = Ax$ con A ortogonale, allora:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v = \langle u, v\rangle$$

19.3.10 4. Esistono isometrie non affini?

Risposta: Nello spazio $\mathbb{R}^n$, **tutte le isometrie sono affini**, quindi **non esistono isometrie non affini**.

19.3.11 Caratterizzazione delle isometrie

Teorema: Ogni isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si può scrivere nella forma:

$$f(x) = Ax + b$$

con $A \in \mathrm{O}(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$. **Idea della dimostrazione:**

1. Definire $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$
2. $|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow |g(x)| = |x|$
3. Mostrare che g è lineare: $g(x) = Ax$ con A ortogonale

4. Quindi $f(x) = Ax + f(0)$

19.3.12 Il gruppo euclideo $\mathrm{E}(n)$

L'insieme di tutte le isometrie di $\mathbb{R}^n$ forma un **gruppo** rispetto alla composizione:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Proprietà:

- **Chiusura:** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Inverso:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Identità:** $\mathrm{id}(x) = x$

19.3.13 Riepilogo

- Isometrie lineari $\leftrightarrow$ matrici ortogonali
- Isometrie affini $\leftrightarrow$ matrice ortogonale + traslazione
- Tutte le isometrie in $\mathbb{R}^n$ sono affini
- L'insieme delle isometrie forma il **gruppo euclideo** $\mathrm{E}(n)$

Categoria: Dimostrazione, Costruzione e Progettazione **Difficoltà**: Più Medio **Etichette**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 72d8d05b-f04a-497b-b5a2-c730a4f3f72d il 07.06.2025

19.4 IT 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Controllo ottimale di un processo diffusivo

Tempo stimato per la risoluzione: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Un Originale*

19.4.1 Enunciato del problema

Questo esercizio tratta l'applicazione di concetti avanzati di analisi e calcolo delle variazioni a un problema di controllo ottimale, con forti analogie con il controllo quantistico e diversi ambiti di ingegneria.

19.4.2 Definizione del problema

Consideriamo un sistema unidimensionale il cui **stato**

$$y(x,t)$$

(ad esempio temperatura o concentrazione) è definito sul dominio $\Omega = [0, L]$ e nel tempo

$$t \in [0,T]$$

. Lo stato è governato da un processo di diffusione parziale dove il controllo

$$u(t)$$

dipende solo dal tempo:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad \text{per } (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

Condizioni al contorno:

- $$y(0,t) = 0$$
- $$y(L,t) = 0$$

  ,

  $$t \in (0,T]$$

Condizione iniziale:

- $$y(x,0) = y_0(x)$$

  ,

  $$x \in [0,L]$$

Qui $\alpha > 0$ è la costante di diffusione, e

$$g(x)$$

è una funzione data che descrive l'influenza spaziale del controllo. Si assume che

$$y_0(x)$$

e

$$g(x)$$

siano sufficientemente regolari. L'obiettivo è trovare un **controllo ottimale**

$$u(t) \in U_{\text{ad}}$$

, dove

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

è l'insieme ammissibile dei controlli, limitati tra 0 e un valore massimo

$$U_{\max}$$

. Il controllo ottimale minimizza la **funzione di costo**:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 \, dt$$

dove

$$y_{\text{desired}}(x)$$

è lo stato desiderato all'istante finale

$$T$$

, e $\lambda > 0$ è un parametro di regolarizzazione che penalizza grandi valori del controllo.

19.4.3 Parte 1: Analisi di base del sistema

19.4.4 1. Esistenza e unicità

Spiega concettualmente perché, dato un controllo

$$u(t)$$

e condizioni iniziali e al contorno specificate, esiste una soluzione unica

$$y(x,t)$$

al problema alle derivate parziali. Discuta le proprietà richieste, come la limitatezza, continuità e gli spazi funzionali coinvolti (ad esempio spazi di Sobolev

$$H_0^1(\Omega)$$

,

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

).

19.4.5 2. Impatto delle restrizioni sul controllo

Discuti l'effetto del vincolo

$$0 \leq u(t) \leq U_{\text{max}}$$

sulla natura del problema di ottimizzazione. Confronta con il caso senza vincoli, dove

$$U_{\text{ad}} = C([0,T])$$

. Spiega il ruolo della convessità e come i vincoli modificano le condizioni di ottimalità.

19.4.6 Parte 2: Analisi variazionale e condizioni di ottimalità

19.4.7 1. Calcolo della derivata di Gateaux della funzione di costo

Supponiamo che

$$J(u)$$

sia differenziabile, e deriva la **derivata di Gateaux** in

$$u_0(t)$$

nella direzione

$$h(t)$$

. **Nota:** Sia

$$y_h(x,t)$$

la soluzione corrispondente al controllo

$$u_0(t) + \varepsilon h(t)$$

. Calcola:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$$

19.4.8 2. Ruolo del sistema aggiunto (adjoint)

Spiega in generale l'utilità del sistema aggiunto nei problemi di ottimizzazione con vincoli PDE. Come permette di calcolare il gradiente della funzione di costo? Descrivi il legame con la sensibilità dello stato

$$y(x, t)$$

.

19.4.9 3. Prima condizione necessaria di ottimalità

Formula la **prima condizione necessaria di ottimalità** (disuguaglianza variazionale) che il controllo ottimale

$$u$$

deve soddisfare. Discuti come essa lega il gradiente di

$$J(u)$$

e la geometria di

$$U_{\text{ad}}$$

per garantire che

$$u(t) \in U_{ad}$$

deve soddisfare. Discuti come essa lega il gradiente di

$$J(u)$$

e la geometria di

$$U_{\text{ad}}$$

per garantire che

$$u(t) \in U_{ad}$$

deve soddisfare. Discuti come essa lega il gradiente di

$$J(u)$$

e la geometria di

$$U_{\text{ad}}$$

per garantire che

$$u_{(t)} \in U_{ad}$$

deve soddisfare. Discuti come essa lega il gradiente di

$$J(u)$$

e la geometria di

$$U_{\text{ad}}$$

per garantire che

$$u(t)$$

minimizzi la funzione di costo.

19.4.10 Parte 3: Argomenti avanzati e comportamento limite

19.4.11 1. Comportamento dell'ottimalità con la regolarizzazione

Analizza cosa succede al termine di regolarizzazione

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

quando $\lambda \to 0^+$. Quali sono le conseguenze sul controllo ottimale

$$u$$

e sullo stato finale

$$y(x, T)$$

? La successione $\{u_\lambda(t)$ e sullo stato finale

$$y(x, T)$$

? La successione $\{u_{\lambda(t)}$ e sullo stato finale

$$y(x,T)$$

? La successione $\{u_{\lambda(t)}$ e sullo stato finale

$$y(x,T)$$

? La successione $\{u_\lambda\}$ è una successione di Cauchy o converge uniformemente?

19.4.12 2. Precisione epsilon-delta

Supponi che

$$u^{\cdot}(t)$$

sia un ottimo noto. Spiega, usando la definizione di limite epsilon-delta, come dimostrare che

$$y(x,T)$$

può essere arbitrariamente vicino a

$$y_{\text{desired}}(x)$$

in norma

$$L^2$$

. Specifica i ruoli di:

- ε: la precisione desiderata per lo stato finale
- δ: la distanza tollerata nel controllo o nel tempo finale per garantire questa precisione

19.4.13 Soluzione

Solution for m2 in it

Categoria: Dimostrazione, Risoluzione e Risolvere, Analisi, Costruzione e Progettazione, Interpretazione **Difficoltà**: Lato Oscuro **Etichette**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: df010f16-a57e-4c69-aa52-94c094acfec0 il 21.06.2025

20.1　JP KTB-1 No.14PALLV1.0: 適応型素数判定の最適複雑度

解決までの推定時間: 45 h 0 min　*Nam-Score: 7.5*　オリジナル

問題適応型素数判定法とは、自然数 $n \in \mathbb{N}$ が素数かどうかを判定する際に、確率的手法と決定論的手法を段階的に選択するアルゴリズムです。例としては、Miller-Rabin 法、Baillie-PSW 法、AKS 法などが挙げられます。以下の特性を持つ適応型素数判定法を開発し、解析してください。

- アルゴリズムは確率的検定（例:Miller-Rabin 法）から開始します。
- この検定に複数回合格した場合、システムは境界条件において決定論的サブ検定（例:Lucas 法、ECPP 法、または簡約 AKS レベル）を実行します。
- 手法の全体的な複雑さは、n のサイズと想定される誤り確率 ε に依存します。

課題: これらの手法の漸近的に最適な組み合わせ（証明付き）を見つけ、ランダムに選択された数 $n \in [1, N]$ の現実的な分布を仮定し、「素数」と「素数でない」の判定にかかる最小の期待実行時間を計算してください。**目標:**

- **誤差制御適応的複雑性** モデルを解析してください。
- 最適な手法の実行時間（期待値）を記述する関数クラス $T(n, \varepsilon)$ を開発してください。
- 作成した解を、Miller-Rabin（多重）、Baillie-PSW、決定論的 AKS などのよく知られた手法と比較してください。

20.1.1　解決策

カテゴリー: 解決と解く, 分析, 証明, 構築と設計 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-624352343133 日付 05 月 11 日 2025 年

20.2 JP SHB-3 No.15PALLV1.0: 一般化再帰多項式の解の構造

解決までの推定時間: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* オリジナル

再帰的な定義が与えられます。

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x)$$

初期値は $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$、$a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ である。分析:

- 閉じた形式の条件
- ゼロの構造
- 古典多項式（例: チェビシェフ多項式、ルジャンドル多項式、エルミート多項式）との関連

20.2.1 ソリューション構造（一般的な手順）

20.2.2 1. **再帰の分析**

- 再帰次数 k を決定する
- 係数 $a_i(x)$ を分類する
- 絶え間ない？リニア？一般多項式?

20.2.3 2. **特性多項式**

- 線形再帰に類似した変換を導入します。
- 基底 $P_0, \ldots, P_k$ の線形独立性を考慮する
- 特性多項式（定数 a_i）で解を求める

20.2.4 3. **行列法を用いた表現**

- 再帰を行列システムとして記述します。

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

ベクトル $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- $A(x)$ の固有値と固有ベクトルを調べる

20.2.5 4. **有名な家族との比較**

- 多項式を既知のクラス (直交、対称など) に分類できるかどうかを確認します。

20.2.6 5. **ゼロ構造**

- 数値手法を使用してゼロを解析する
- 収束挙動を調べる（例:$n \to \infty$ の場合）

20.2.7 6. **記号的な解決法（可能な場合）**

- 閉じた形式を検索する（例: 生成関数、微分方程式への変換による）
- 基底関数または組み合わせ構造を介して明示的な表現を見つける

20.2.8 解決策

Solution for n15 in jp

カテゴリー: 証明, 分析 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:

UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 0a989e7c-66a7-4a60-9a4a-b345009f7913 日付 11.05.2025

20.3 JP SHKS-1 No.16PALLV1.0: 限られたメモリを持つチューリングマシン - 正しさの証明

解決までの推定時間: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* オリジナル

作業テープが $O(\log n)$ 個のメモリセルに制限されているチューリングマシン M_b が与えられます。M_b が特定の言語 L を正しく決定することを示します。例えば。:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

または、メモリ制約が関係するその他の特定の言語。

20.3.1 追加情報

- チューリングマシン（TM）の定義と限られたメモリ（例: 対数空間）
- LBA（線形有界オートマトン）などの形式モデル
- 正規言語または文脈自由言語との比較
- ブール論理と不変メソッド
- 標準的な論理的証明（例: 帰納法、背理法）
- 紙やメモに描いたスケッチ

20.3.2 要件

20.3.3 ***1.* 形式仕様**

- 有界 TMM_b を正式に定義する:
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- 制限: 動作バンドサイズ $\leq c \cdot \log n$

20.3.4 ***2.* 言語** L について説明してください

- $L \in \mathsf{L}$ （対数空間で決定可能）であることを証明してください。
- 例:
- シンボルの数のバランス（例:a と b の数が等しい）
- 空間最適化による単純な規則パターンの認識

20.3.5 ***3.* 建設/シミュレーション**

- メモリをほとんど使用せずに TM 戦略を説明します。
- ブックマーク（ポインタテクニック）
- 2 パス手順
- 作業テープ上の 2 進数表現のカウンタ

20.3.6 ***4.* 正確性**

- 不変性またはシミュレーションを使用する:
- 各ステップで不変条件が保持される（例: 等価性のカウント）
- 表示: TM が受け入れる場合、$w \in L$ です。$w \in L$ ならば TM は

20.3.7 **5. 空間計算量を証明する**

- 分析: すべてのステップで必要なメモリセルは $O(\log n)$ 個のみ
- 不正な保管は行われていないと主張する

20.3.8 **6. ディプロマ**

- 完全な証明で終了する（例えば、w の長さにわたる完全な帰納法によって）
- 限られたメモリが**十分であり、正しく動作していることを示す**

20.3.9 解決策

Solution for n16 in jp
カテゴリー: 証明, 構築と設計 **難易度**: ハード **タグ**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 1fd4436b-f494-4cb6-a919-8784410bc93c 日付 11.05.2025

20.4 JP BUK-1 No.17PALLV1.0: 波束干渉の量子場モデル

解決までの推定時間: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* オリジナル

スカラー場における２つの移動する波束の干渉を記述するために、量子場理論モデルが与えられます。量子場理論における波束の構築、進化、干渉を記述および分析する完全な理論的数値モデルを開発します。次のサブタスクを完了します。

1. **理論的基礎**
   - 自由スカラー場の量子化について説明します。
   - 体演算子 $\hat{\phi}(x,t)$ を導出します。
   - $\hat{a}_k$、$\hat{a}_k^\dagger$ の交換子の振る舞いを説明します。
2. **波束状態の構築**
   - ２つの直交ガウス運動量分布 $f_1(k)$、$f_2(k)$ を定義する。
   - 状態を管理する

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

そしてそれを正規化します。

3. **期待値と干渉**
   - 期待値 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$ を計算します。
   - 交差項とそれらが干渉に与える影響を特定します。
   - 干渉パターンを x、t、δ の関数として視覚化します。
4. **時間発展と波束伝播**
   - 空間と時間における波束の伝播をシミュレートします。
   - グループ速度と位相速度が干渉構造に与える影響を分析します。
   - 発生する可能性のある分散現象について説明します。
5. **フィールドオペレータ製品への拡張**
   - 2 点関数 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$ を計算します。
   - 時空間構造を分析します。
   - 可能な測定の意味について話し合います。
6. **実験的解釈とモデルの検証**
   - モデルを量子光干渉計 (例: マッハ・ツェンダー) と比較します。
   - 測定演算子、状態の崩壊、干渉の可視性について説明します。
7. **反射、複雑性分析、モデルの境界**
   - 数値手順のアルゴリズムの複雑さを推定します。
   - 可能な拡張について議論する（例: スピノル場、QED）。
   - スカラー場理論の重要性と限界について考察します。

作業は数学的に正確で、物理的に解釈され、数値シミュレーションによって補完される必要があります。

20.4.1 解決策

Solution for n17 in jp
カテゴリー: 分析, 計算 **難易度**: ダークサイド **タグ**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: fb2cb262-d694-4a23-a1a6-5a20b512ebea 日付 11.05.2025

20.5 JP SHK-1 No.23PALLV1.0: 型なしラムダ計算における再帰性と固定小数点コンビネータ

解決までの推定時間: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* オリジナル

完全な β-減算を伴う型なしラムダ計算が与えられます。自然数の Church エンコーディング、「iszero」、「pred」、「mult」はよく知られていると考えられています。固定小数点コンビネータ $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ と関数が与えられているとします。

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

タスク: $Y\ F$ がチャーチ符号化に従って階乗を計算する正しい再帰手順であることを形式的かつ完全に証明します。以下の点を詳細に示す必要があります。

1. **固定引数の縮約:** 項 $(Y\ F)\ 3$ の完全な β 縮約を実行します。最終的な Church エンコーディングまでのすべての削減手順を指定します。

2. **帰納法による正しさの証明:** すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して以下が成り立つことをチャーチ数に対して構造的帰納法で証明します。

$$(Y\ F)\ n \to_\beta^* \text{fac}_n$$

ここで、fac_n は $n!$ のチャーチ符号化です。

3. **不動点特性:** $Y\ F = F\ (Y\ F)$ であることを正式に証明し、この式が再帰計算を可能にする理由を示します。

4. **Z-Combinator との比較:**

- Z コンビネータを定義します。
- $(Y\ F)\ 3$ と $(Z\ F)\ 3$ の短縮長を比較します。
- どのようなコンテキストで Z を優先すべきかを議論します。

注: すべての削減手順において、中間項を明示的に指定する必要があります。正当な理由なく単純化やジャンプを使用しないでください。

20.5.1 解決策

Solution for n23 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード **タグ**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 27bbd441-79cc-47ec-8e15-375050f07157 日付 17.05.2025

20.6 JP SHK-2 No.24PALLV1.0: 量子場の理論における分配関数と真空エネルギーにおけるゼータ関数とガンマ関数の役割

解決までの推定時間: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* オリジナル

量子場の理論における正則化と熱力学、特に分配関数と真空エネルギーの文脈におけるゼータ関数とガンマ関数の役割を調査し、証明する。

20.6.1 課題

時間次元（温度 $T = 1/\beta$ に対応）と空間次元 L に周期性 β を持つコンパクト時空上のスカラー量子場が与えられる。場の固有振動数は、次の通りです。

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

ゼータ正規化を用いて、熱力学的分配関数

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

が、リーマンゼータ関数とガンマ関数の解析的拡張を用いて正規に計算できることを示しなさい。

20.6.2 サブタスク

1. **制御真空エネルギーの導出**

ゼータ関数を用いて、制御真空エネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ の式を導出せよ。以下の式が成り立つことを示せ。

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

そして、メリン変換を用いてこの式をガンマ関数形式に変換せよ。

2. **エプスタインゼータ関数への縮約**

n と m の二重和がエプスタインゼータ関数として表せることを示せ。その解析的性質を解析せよ。

3. **温度依存性と熱力学関数**

正規化表現を用いて自由エネルギー F(β)、内部エネルギー U(β)、エントロピー S(β) を導出せよ。ガンマ関数が高温および低温における漸近展開にどのように現れるかを示しなさい。

4. **カシミールエネルギーとの比較**

分配関数の零温度極限がカシミールエネルギーに変換されること、そして正規化によって古典的なゼータ-カシミール法と全く同じ形が得られることを証明せよ。

20.6.3 解決策

Solution for n24 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: fa54f474-2db5-47ee-a259-b74482490238 日付 24.05.2025

20.7 JP SHK-3 No.25PALLV1.0: ガウス波束の運動量空間表現

解決までの推定時間: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* オリジナル

20.7.1 課題*:* ガウス波束の運動量空間表現

位置空間に波動関数を持つ 1 次元の量子力学粒子が与えられます。

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

この関数は、ガウス空間分布を持つ、静止した自由に移動する粒子を記述します。

20.7.2 **サブタスク**

20.7.3 波動関数の正規化

波動関数が正規化されるように正規化定数 A を決定します。つまり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

20.7.4 運動量空間へのフーリエ変換

フーリエ変換を用いて波動関数の運動量空間表現 $\phi(p)$ を次のように計算します。

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

積分を完了し、結果の関数 $\phi(p)$ を明示的な形式で述べます。

20.7.5 ハイゼンベルクの不確定性原理

位置分布と運動量分布の標準偏差 σ_x と σ_p をそれぞれ決定します。

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

これらの散乱の積がハイゼンベルクの不確定性原理を満たすことを示す。

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

20.7.6 極限ケースの物理的解釈

物理的な極限ケース $a \to 0$ について定性的に議論します。運動量空間表現 $\phi(p)$ では何が起こりますか? また、この極限ケースは物理的にどのように解釈されますか? 局所化とインパルス不確実性の概念を参照してください。

20.7.7 **お知らせ*:***

このタスクは、Python または MATLAB での数値評価とグラフィカル表現にも適しています。オプションとして、適切なソフトウェアツール (SymPy や Mathematica など) を使用して、フーリエ変換を記号的に検証することもできます。

20.7.8 解決策

Solution for n25 in jp
カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード **タグ**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 572ebf6c-38dd-4582-ae7a-cb1aa9c89bc6 日付 24.05.2025

20.8 JP 1 No.26-1PALLV1.0: n 次元ユークリッド空間における等長変換

解決までの推定時間: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* オリジナル

写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して次を満たすとき、**等距写像（Isometry）**と呼ばれます：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

20.8.1 問題：

1. **線形等距写像：**

任意の線形等距写像 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が直交行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ によって表現されること、すなわち $T(x) = Ax$ かつ $A^\top A = I$ であることを示しなさい。

2. **アフィン等距写像：**

アフィンな形 $f(x) = Ax + b$（ここで A は直交行列、$b \in \mathbb{R}^n$）を持つすべての等距写像 f を求めなさい。

3. **内積の保存：**

$u, v \in \mathbb{R}^n$ を単位ベクトルとする。線形な等距写像 f が内積を保存すること、すなわち次を示しなさい：

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **特殊な等距写像の構成：**

線形ではないが距離を保つ等距写像の例 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を与え、f が等距写像であることを示しなさい。

20.8.2 解決策

Solution for n26-1 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 計算, 構築と設計 **難易度**: ハイミディアム **タグ**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: ca1d8bd6-4f76-4817-afc5-69c371568c78 日付 31.05.2025

20.9 JP 1 No.26-2PALLV1.0: 証明課題*:* $\mathbb{R}^n$ における等長写像の特徴づけ

解決までの推定時間: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* オリジナル

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を等距離写像（イソメトリー）とする。すなわち：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{任意の} x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対して.}$$

示すべきこと：任意の等距離写像 f は、直交行列 A とベクトル b によって $f(x) = Ax + b$ の形で表されるアフィン変換であるか、またはそのような写像と反射や並進の合成として表せる。**補足（任意）：** $\mathbb{R}^n$ 上の全ての等距離写像は合成に関して群を成すことを示せ—すなわち、ユークリッド群 $\mathrm{E}(n)$。

20.9.1 解決策

Solution for n26-2 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 計算, 構築と設計 **難易度**: ハイミディアム **タグ**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 0650ce4c-c61a-42f3-b6fb-b67d7e1cb72e 日付 31.05.2025

20.10 JP 1 No.27PALLV1.0: n 次元ユークリッド空間の等距離写像と証明課題：$\mathbb{R}^n$ における等距離写像の特徴付け

解決までの推定時間: 1 h 0 min　*Nam-Score: 3.0*　オリジナル

写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は、すべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対してユークリッド距離を保存する、つまり

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

が成り立つとき、**等距離写像（イソメトリー）**と呼ばれます。

20.10.1 課題：

1. **線形イソメトリー：**

線形イソメトリー $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は、直交行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を用いて表されることを示しなさい。すなわち、

$$T(x) = Ax, \quad A^\top A = I$$

2. **アフィンイソメトリー：**

次の形のイソメトリー $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ をすべて求めなさい：

$$f(x) = Ax + b$$

ここで、$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は直交行列、$b \in \mathbb{R}^n$ はベクトルである。

3. **内積の保存：**

$u, v \in \mathbb{R}^n$ を単位ベクトルとするとき、線形イソメトリー f は内積を保存することを示しなさい。すなわち、

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **特殊なイソメトリーの構成：**

線形ではないが距離を保存するイソメトリー $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の例を示し、f が本当にイソメトリーであることを証明しなさい。

20.10.2 証明課題：$\mathbb{R}^n$ におけるイソメトリー写像の特徴づけ

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ がイソメトリー、すなわち、

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{すべての} x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対して}$$

を満たすとき、

20.10.3 示すべきこと：

すべてのイソメトリー f は、直交行列 A とベクトル b によるアフィン写像

$$f(x) = Ax + b$$

として表されるか、またはそのような写像と鏡映や平行移動の合成として表される。

20.10.4　発展的な注意（任意）:

$\mathbb{R}^n$ のすべてのイソメトリーの集合は、合成演算に関して群をなすことを示しなさい。これを**ユークリッド群** $\mathrm{E}(n)$ という。

20.10.5　解決策

20.10.6　$\mathbb{R}^n$ における等距変換（アイソメトリー）

写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が**等距変換**であるとは、ユークリッド距離を保つこと、すなわち次を満たすことである：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{任意の} x, y \in \mathbb{R}^n$$

20.10.7　*1.* 線形等距変換

命題：線形写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が等距であるとき、$T(x) = Ax$ の形で表され、行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は**直交行列**である。つまり $A^\top A = I$。**証明：** T は線形なので、$|T(x)| = |x|$ を示せばよい：

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

このとき：

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

20.10.8　*2.* アフィン等距変換

命題：アフィンな等距変換は、次の形で表される：

$$f(x) = Ax + b \quad (A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n)$$

理由：アフィン写像 $f(x) = Ax + b$ に対して：

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

20.10.9　*3.* 内積の保存

命題：線形かつ等距な写像 f に対して：

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

証明： $f(x) = Ax$ とおくと：

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v = \langle u, v\rangle$$

20.10.10　*4.* アフィンでない等距変換は存在するか？

答え：ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において、**すべての等距変換はアフィン写像**である。したがって、**アフィンでない等距変換は存在しない。**

20.10.11 等距変換の特徴付け

定理：任意の等距変換 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は、次の形で表される：

$$f(x) = Ax + b \quad (A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n)$$

証明の概要：

1. $g(x) := f(x) - f(0)$ とおく（これで $g(0) = 0$）
2. $|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow |g(x)| = |x|$
3. g は線形、よって $g(x) = Ax$（A は直交行列）
4. よって $f(x) = Ax + f(0)$

20.10.12 ユークリッド群 $\mathrm{E}(n)$

すべての等距変換の集合は、**関数合成に関して群をなす**：

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

性質：

- **閉性：** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **逆元：** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **単位元：** $\mathrm{id}(x) = x$

20.10.13 まとめ

- 線形等距変換 $\leftrightarrow$ 直交行列
- アフィン等距変換 $\leftrightarrow$ 直交行列 + 並進ベクトル
- $\mathbb{R}^n$ におけるすべての等距変換はアフィン写像
- 等距変換全体の集合は **ユークリッド群** $\mathrm{E}(n)$ を構成する

カテゴリー: 証明, 構築と設計 **難易度**: ハイミディアム **タグ**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 5678f8f1-aed6-4876-b87d-259766b2ddcc 日付 07.06.2025

20.11 JP 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: 拡散過程の最適制御

解決までの推定時間: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* オリジナル

20.11.1 問題文

本課題は、制御最適化問題における関数解析や変分法の応用を探求し、量子制御や工学分野とも強い関連を持つ内容です。

20.11.2 問題の定義

1 次元のシステムで、状態関数 $y(x,t)$（例えば温度分布や拡散物質の濃度）が空間領域 $\Omega = [0, L]$ と時間区間 $t \in [0, T]$ において変化します。この系の進化は、次の拡散型偏微分方程式で表されます。ここで、時間に依存する制御パラメータ $u(t)$ が存在します。

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

境界条件：

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0, t \in (0, T]$

初期条件：

- $y(x,0) = y_0(x), x \in [0, L]$

ここで、$\alpha > 0$ は拡散定数、$g(x)$ は制御の空間依存性を表す関数で、$y_0(x)$ と $g(x)$ は十分な正則性を持つと仮定します。目的は、以下の可制御集合

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

の中で最適な制御関数 $u(t)$ を求めることです。

20.11.3 コスト関数

最適化対象のコスト関数は次の通りです。

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

ここで、$y_{\text{desired}}(x)$ は目標状態、$\lambda > 0$ は制御エネルギーの正則化パラメータです。

20.11.4 第 *1* 部：システムの基本解析

20.11.5 1. 解の存在と一意性

与えられた制御 $u(t)$ のもとで、初期・境界条件と合わせて偏微分方程式が一意的に解を持つ理由を、概念的に説明してください。必要な関数空間（例：ソボレフ空間 $H_0^1(\Omega)$、$L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ など）を用いて弱解の観点から述べてください。

20.11.6 2. 制御制約の影響

制御が制約条件

$$0 \leq u(t) \leq U_{\max}$$

を満たす場合の問題の性質について論じてください。制約なしの場合と比較し、凸性の役割や制約付き最適化における最適性条件の違いを説明してください。

20.11.7 第 *2* 部：変分解析と最適性条件

20.11.8 *1.* ゲートー微分

コスト関数 $J(u)$ が微分可能であると仮定し、点 $u_0(t)$ における方向 $h(t)$ に関するゲートー微分を導出してください。ヒント：$u_0(t) + \varepsilon h(t)$ に対応する状態を $y_h(x,t)$ とし、

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

を計算してください。

20.11.9 *2.* 付随系（アジョイントシステム）の役割

PDE 制御最適化問題において、付随系（アジョイント状態変数）の役割について一般的に説明してください。コスト勾配の計算をどのように簡単化するか、状態の感度解析との関係を述べてください。

20.11.10 *3.* 最適性の第一必要条件

制約付き制御集合 U_{ad} 内の最適制御 $u^{\cdot}(t)$ が満たすべき第一必要条件（変分不等式）を記述してください。勾配と制御集合の幾何学的関係について説明し、なぜこれが最小解を保証するかを述べてください。

20.11.11 第 *3* 部：発展的議論と極限挙動

20.11.12 *1.* 正則化パラメータの影響

正則化項

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

について、$\lambda \to 0^+$ の極限で最適制御 u_λ

20.11.12 *2.* *ε-δ* 論法による厳密性

最適制御 $u^{\cdot}(t)$ が既知であると仮定し、$y(x,T)$ が任意の $\varepsilon > 0$ の近傍に目標状態 $y_{\text{desired}}(x)$ に近づくことを、ε-δ 論法で説明してください。以下の役割を明示してください：

- ε：状態の目標からの近さの許容範囲
- δ：制御や時間パラメータの変化許容範囲（例：$|u - u^{\cdot}| < \delta$）

20.11.13 解決策

Solution for m2 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析, 構築と設計, 解釈 **難易度**: ダークサイド **タグ**:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 500dbc52-8cdc-4348-8c11-e14c467c4cd4 日付 21.06.2025

21 해결책

21.1 KR BUK-1 No.17PALLV1.0: 파동패킷간섭의양자장모델

해결예상시간: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* 원본

스칼라장에서두개의움직이는파동패킷의간섭을설명하기위해양자장이론모델이제시됩니다. 양자장이론내에서파동패킷의구성, 진화, 간섭을설명하고분석하는완전한이론적, 수치적모델을개발합니다. 다음하위작업을완료하세요.

1. **이론적기초**

- 자유스칼라장의양자화를설명하세요.
- 필드연산자 $\hat{\phi}(x,t)$ 를도출합니다.
- $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ 의교환자동작을설명하세요.

2. **파동패킷상태의구성**

- 두개의직교가우스운동량분포 $f_1(k), f_2(k)$ 를정의합니다.
- 상태를관리하다

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

그리고그것을정상화합니다.

3. **기대값및간섭**

- 기대값 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$ 을계산합니다.
- 교차항과간섭에대한기여도를식별합니다.
- 간섭패턴을 x, t, δ 의함수로시각화합니다.

4. **시간진화및파동패킷전파**

- 공간과시간에따른파동패킷의전파를시뮬레이션합니다.
- 간섭구조에대한군속도와위상속도의영향을분석합니다.
- 발생할수있는분산현상에대해논의해보세요.

5. **현장운영자제품확장**

- 두점함수 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$ 을계산합니다.
- 시공간구조를분석합니다.
- 가능한측정에대한의미를논의합니다.

6. **실험해석및모델검증**

- 귀하의모델을양자광학간섭계 (예: 마하젠더) 와비교해보세요.
- 측정연산자, 상태붕괴및간섭가시성에대해논의합니다.

7. **반사, 복잡성분석및모델경계**

- 수치적절차의알고리즘복잡도를추정합니다.
- 가능한확장 (예: 스피너필드, QED) 에대해논의합니다.
- 스칼라장이론의중요성과한계에대해생각해보세요.

작업은수학적으로타당해야하며, 물리적으로해석되어야하며수치시뮬레이션으로보완되어야합니다.

21.1.1 해결책

Solution for n17 in kr
카테고리: 분석, 계산 **난이도**: 하드 **태그**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 9f422ceb-8266-4e27-8cfd-82c209652be8 날짜 11.05.2025

21.2 KR SHK-1 No.23PALLV1.0: 유형이지정되지않은람다계산법의재귀성과고정소수점조합자

해결예상시간: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* 원본

완전한 β-축소를적용한무형의람다계산법이주어졌습니다. 자연수에대한교회인코딩인"iszero", "pred", "mult" 는잘알려진것으로간주됩니다. 고정점조합자 $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ 와다음함수가주어지도록하자.

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

일: $Y\ F$ 가 Church 코딩에따라팩토리얼을계산하는올바른재귀절차임을정식적이고완벽하게증명하세요. 다음사항을자세히설명해야합니다.

1. **고정된인수에대한축소:** 항 $(Y\ F)\ 3$ 의전체 β-축소를수행합니다. 최종교회인코딩까지모든감소단계를지정하세요.
2. **귀납에의한정확성증명:** 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에대해다음이성립한다는것을교회수에대한구조적귀납증명을수행합니다.

$$(Y\ F)\ n \to_\beta^* \text{fac}_n$$

여기서 fac_n 은 $n!$ 의교회인코딩입니다.

3. **고정점속성:** $Y\ F = F\ (Y\ F)$ 임을공식적으로증명하고이표현식이재귀적계산을허용하는이유를보여주세요.
4. **Z-Combinator 와의비교:**

- Z-결합자를정의합니다.
- $(Y\ F)\ 3$ 과 $(Z\ F)\ 3$ 의감소길이를비교하세요.
- 어떤맥락에서 Z 가선호되는지논의해보세요.

참고: 모든감소단계에대해중간용어를명확하게지정해야합니다. 정당한이유없이단순화나생략을하지마십시오.

21.2.1 해결책

Solution for n23 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 14d934cc-2e6e-4211-9ebb-bdb997a9b657 날짜 17.05.2025

21.3 KR SHK-2 No.24PALLV1.0: 양자장론의분배함수와진공에너지에서제타함수와감마함수의역할

해결예상시간: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 원본

양자장이론의정규화와열역학에서제타함수와감마함수의역할, 특히분배함수와진공에너지의맥락을조사하고증명합니다.

21.3.1 과제

시간차원 (온도 T = 1/β 에해당) 과공간차원 L 에주기성 β 를갖는콤팩트시공간상의스칼라양자장이주어졌습니다. 장의고유진동수는다음과같습니다.

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

제타정규화를사용하여열역학적분배함수가

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

리만제타함수와감마함수의해석적확장을사용하여정규적으로계산될수있음을보여주세요.

21.3.2 하위과제

1. **조절된진공에너지의유도**

제타함수를사용하여조절된진공에너지 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ 에대한식을유도하십시오. 다음을보여주십시오.

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

그리고멜린변환을사용하여식을감마함수형태로변환하십시오.

2. **엡스타인제타함수로의환원**

n 과 m 에대한이중합을엡스타인제타함수로나타낼수있음을보여주십시오. 그해석적성질을분석하십시오.

3. **온도의존성및열역학함수**

정규화된표현식을사용하여자유에너지 F(베타), 내부에너지 U(베타), 엔트로피 S(베타) 를유도하십시오. 감마함수가고온및저온에대한점근전개에서어떻게나타나는지보여주십시오.

4. **카시미르에너지와의비교**

분배함수의영온도한계가카시미르에너지로변환되고, 정규화가고전적인제타-카시미르방법과정확히동일한형태를낳음을증명하십시오.

21.3.3 해결책

Solution for n24 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: NUM **태그**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: a7ceaf1b-e71e-4d76-a632-c2b9363d5583 날짜 24.05.2025

21.4 KR SHK-3 No.25PALLV1.0: 가우스파패킷의운동량공간표현

해결예상시간: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 원본

21.4.1 과제*:* 가우스파패킷의운동량공간표현

위치공간에서파동함수를갖는 1 차원양자역학입자가주어지면:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

이함수는가우스공간분포를갖는고정되어있고자유롭게움직이는입자를설명합니다.

21.4.2 **하위작업**

21.4.3 파동함수의정규화

파동함수가정규화되도록정규화상수 A 를결정합니다. 즉,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

21.4.4 운동량공간으로의푸리에변환

푸리에변환을사용하여파동함수의운동량공간표현 $\phi(p)$ 을계산합니다.

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

적분을완료하고결과함수 $\phi(p)$ 를명시적인형태로나타내세요.

21.4.5 하이젠베르크의불확정성원리

위치와운동량분포의표준편차 σ_x 와 σ_p 를각각결정합니다.

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

그리고이러한산란의곱이하이젠베르크의불확정성원리를만족함을보여주세요.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

21.4.6 극한경우의물리적해석

물리적한계사례 $a \to 0$ 에대해질적으로논의해보세요. 운동량공간표현 $\phi(p)$ 은어떻게되나요? 그리고이제한적인경우는물리적으로어떻게해석해야할까요? 국소화와임펄스불확실성의개념을참조하세요.

21.4.7 **공지사항***:*

이작업은 Python 이나 MATLAB 에서수치적평가와그래픽표현에도적합합니다. 선택적으로, 푸리에변환은적절한소프트웨어도구 (예: SymPy 또는 Mathematica) 를사용하여기호적으로검증할수도있습니다.

21.4.8 해결책

Solution for n25 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**: 8070
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 6dbbe88e-8124-48cf-94c9-d265d50d0819 날짜 24.05.2025

21.5 KR 1 No.26-1PALLV1.0: n 차원유클리드공간의등거리변환

해결예상시간: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 원본

함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 가두점사이의유클리드거리를보존하면 **등거리변환 (Isometry)** 라고합니다. 즉, 모든 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 에 대해다음을만족합니다:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

21.5.1 과제*:*

1. **선형등거리변환:**

모든선형등거리변환 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 은정사각형직교행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 로표현될수있음을보여라. 즉, $T(x) = Ax, A^\top A = I$ 이다.

2. **아핀등거리변환:**

$f(x) = Ax + b$ 형식의모든등거리변환을구하라. 여기서 A 는직교행렬이고 $b \in \mathbb{R}^n$ 이다.

3. **내적보존:**

단위벡터 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 에대해선형등거리변환 f 는내적을보존함을증명하라:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **비선형등거리변환의예시:**

선형이아닌거리보존함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 의예시를제시하고, 그것이등거리변환임을증명하라.

21.5.2 해결책

Solution for n26-1 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 계산, 구축과설계 **난이도**: 상위중간 **태그**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 0970abf7-9d2f-412d-89c1-93c46798ae58 날짜 31.05.2025

21.6 KR 1 No.26-2PALLV1.0: 증명문제*:* $\mathbb{R}^n$ 에서등거리사상의특징

해결예상시간: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 원본
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 를등거리변환이라하자. 즉,

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{모든} x, y \in \mathbb{R}^n \text{ 에대해.}$$

증명할것: 모든등거리변환 f 는직교행렬 A 와벡터 b 를이용하여 $f(x) = Ax + b$ 꼴의아핀변환이거나, 그러한변환들과반사또는평행이동의합성으로나타낼수있다. **심화학습을위한힌트 (선택사항):** $\mathbb{R}^n$ 에서의모든등거리변환들의집합이합성에대해군을이룸을보여라—이를 유클리드군 $\mathrm{E}(n)$ 라한다.

21.6.1 해결책

Solution for n26-2 in kr
카테고리: 증명, 해결과풀기, 계산, 구축과설계 **난이도**: 상위중간 **태그**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: a82cd709-3a5b-497f-81ec-b69f77755e82 날짜 31.05.2025

21.7 KR 1 No.27PALLV1.0: n 차원유클리드공간의등거리사상과증명과제*:* $\mathbb{R}^n$ 에서의등거리사상의특성화

해결예상시간: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 원본

함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 가모든 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 에대하여유클리드거리보존, 즉

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

를만족하면, 이를 **등거리변환 (Isometry)** 이라고합니다.

21.7.1 문제*:*

1. **선형등거리변환:**

모든선형등거리변환 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 은직교행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 로표현될수있음을증명하시오. 즉,

$$T(x) = Ax, \quad A^\top A = I$$

2. **아핀등거리변환:**

다음과같은형태를갖는아핀등거리변환 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 를모두구하시오:

$$f(x) = Ax + b$$

여기서 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 는직교행렬이고, $b \in \mathbb{R}^n$ 는벡터이다.

3. **내적보존:**

$u, v \in \mathbb{R}^n$ 가단위벡터일때, 선형등거리변환 f 가내적을보존함을증명하시오:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **특별한등거리변환의구성:**

비선형이지만거리를보존하는등거리변환 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 의예를제시하고, f 가실제로등거리변환임을증명하시오.

21.7.2 증명문제*:* $\mathbb{R}^n$ 에서등거리변환의특성화

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 가모든 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 에대해

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

를만족하는등거리변환일때,

21.7.3 증명할내용*:*

모든등거리변환 f 는직교행렬 A 와벡터 b 에의한아핀변환

$$f(x) = Ax + b$$

로표현되거나, 또는이러한변환들과반사또는평행이동의합성으로표현된다.

21.7.4 심화사항 *(선택):*

$\mathbb{R}^n$ 의모든등거리변환의집합이합성연산에대해군을이루며, 이를 **유클리드군** $\mathrm{E}(n)$ 이라고부른다는것을증명하시오.

21.7.5 해결책

21.7.6 $\mathbb{R}^n$ 공간에서의등거리변환 *(Isometry)*

함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 가 **등거리변환**이라는것은, 다음조건을만족하는것을의미합니다:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{모든} x, y \in \mathbb{R}^n$$

21.7.7 *1.* 선형등거리변환

명제: 선형함수 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이등거리라면, $T(x) = Ax$ 의형태로나타낼수있으며, 행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 는 **직교행렬**입니다. 즉, $A^\top A = I$ 입니다. **증명:** T 가선형이므로, $|T(x)| = |x|$ 을증명하면충분합니다:

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

이때,

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

21.7.8 *2.* 아핀등거리변환

명제: 모든아핀등거리변환은다음과같은형태입니다:

$$f(x) = Ax + b \quad (A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n)$$

설명: 아핀함수 $f(x) = Ax + b$ 에대해서,

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

21.7.9 *3.* 내적보존

명제: 선형등거리함수 f 에대해서는다음이성립합니다:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

증명: $f(x) = Ax$ 라고하면,

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v = \langle u, v\rangle$$

21.7.10 *4.* 아핀이아닌등거리변환이존재하는가*?*

정답: 유클리드공간 $\mathbb{R}^n$ 에서 **모든등거리변환은아핀변환**입니다. 즉, **아핀이아닌등거리변환은존재하지않습니다.**

21.7.11 등거리변환의특성

정리: 임의의등거리변환 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 은다음의형태를가집니다:

$$f(x) = Ax + b \quad (A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n)$$

증명요약:

1. $g(x) := f(x) - f(0)$ 라고정의 $(g(0) = 0)$
2. $|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow |g(x)| = |x|$
3. g 는선형, 따라서 $g(x) = Ax$
4. 따라서 $f(x) = Ax + f(0)$

21.7.12 유클리드군 $\mathrm{E}(n)$

모든등거리변환들의집합은 **합성연산에대해군을이룹니다**:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

특징:

- **폐쇄성:** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **역원:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **항등원:** $\mathrm{id}(x) = x$

21.7.13 요약

- 선형등거리변환 $\leftrightarrow$ 직교행렬
- 아핀등거리변환 $\leftrightarrow$ 직교행렬 + 평행이동
- $\mathbb{R}^n$ 의모든등거리변환은아핀변환
- 모든등거리변환의집합은 **유클리드군** $\mathrm{E}(n)$ 을이룸

카테고리: 증명, 구축과설계 **난이도**: 상위중간 **태그**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 58c3cd86-9874-4346-8489-9ef7b7ed0cb7 날짜 07.06.2025

21.8 KR 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: 확산과정의최적제어

해결예상시간: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* 원본

21.8.1 문제설명

이문제는제어최적화문제에서함수해석학과변분법의응용을탐구하며, 양자제어나공학분야와도밀접한관련이있습니다.

21.8.2 문제정의

1 차원시스템에서상태함수 $y(x,t)$ (예: 온도분포또는확산물질의농도) 가공간영역 $\Omega = [0,L]$ 및시간구간 $t \in [0,T]$ 에서변합니다. 이시스템의진화는다음확산형편미분방정식으로표현되며, 시간에따라변하는제어변수 $u(t)$ 가포함됩니다.

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

경계조건:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0, t \in (0,T]$

초기조건:

- $y(x,0) = y_0(x), x \in [0,L]$

여기서 $\alpha > 0$ 는확산계수이며, $g(x)$ 는제어의공간적의존성을나타내는함수로서, $y_0(x)$ 와 $g(x)$ 는충분히정칙함을가정합니다. 목표는다음과같은제어가능집합

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\text{max}}\}$$

내에서최적의제어함수 $u(t)$ 를찾는것입니다.

21.8.3 비용함수

최적화대상비용함수는다음과같습니다.

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

여기서 $y_{\text{desired}}(x)$ 는목표상태이며, $\lambda > 0$ 는제어에너지의정칙화파라미터입니다.

21.8.4 제 *1* 부*:* 시스템기본해석

21.8.5 1. 해존재및유일성

주어진제어 $u(t)$ 하에서초기및경계조건과함께 PDE 가유일한해를가진이유를개념적으로설명하세요. 필요한함수공간 (예: 소벨레프공간 $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 등) 을활용하여약해 (weak solution) 관점에서서술하세요.

21.8.6 2. 제어제약조건의영향

제어가다음제약조건을만족할경우

$$0 \le u(t) \le U_{\text{max}}$$

문제의성질에대해논하세요. 제약없는경우와비교하여볼록성 (convexity) 의역할과제약포함최적화에서의최적성조건차이를설명하세요.

21.8.7 제 *2* 부*:* 변분해석과최적성조건

21.8.8 *1.* 게이트우미분 *(Gâteaux derivative)*

비용함수 $J(u)$ 가미분가능하다고가정하고, 점 $u_0(t)$ 에서방향 $h(t)$ 에대한게이트우미분을유도하세요. 힌트: $u_0(t) + \varepsilon h(t)$ 에대응하는상태를 $y_h(x,t)$ 라할때,

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

를계산하세요.

21.8.9 *2.* 부속시스템 *(Adjoint system)* 의역할

PDE 제어최적화문제에서부속시스템 (어드조인트상태변수) 의역할을일반적으로설명하세요. 비용함수기울기계산을어떻게단순화하며, 상태민감도분석과의관계를논하세요.

21.8.10 *3.* 최적성의제 *1* 차필요조건

제약된제어집합 U_{ad} 내에서최적제어 $u^{\cdot}(t)$ 가만족해야하는제 1 차필요조건 (변분부등식) 을기술하세요. 기울기와제어집합의기하학적관계를설명하고, 왜이것이최소해를보장하는지논하세요.

21.8.11 제 *3* 부*:* 발전적논의와극한거동

21.8.12 *1.* 정칙화파라미터영향

정칙화항

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

에대해, $\lambda \to 0^+$ 극한에서최적제어 u_λ

21.8.12 *2.* ε*-*δ 논법에의한엄밀성

최적제어 $u^{\cdot}(t)$ 가알려져있다고가정하고, $y(x,T)$ 가임의의 $\varepsilon > 0$ 근방에서목표상태 $y_{\text{desired}}(x)$ 에접근함을 ε-δ 논법으로설명하세요. 각역할을명확히하세요:

- ε: 상태가목표로부터허용하는거리
- δ: 제어나시간매개변수변화허용범위 (예: $|u - u^{\cdot}| < \delta$)

21.8.13 해결책

Solution for m2 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석, 구축과설계, 해석 **난이도**: 다크사이드 **태그**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 39d66f08-cf9b-47b7-8fed-446eaa87dc53 날짜 21.06.2025

22 Solução

22.1 PT 1 No.26-1PALLV1.0: Isometrias no espaço euclidiano n-dimensional

Tempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Um Original*

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamada de **isometria** se preserva a distância euclidiana entre dois pontos, ou seja, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

22.1.1 Exercícios:

1. **Isometrias lineares:**

Mostre que toda isometria linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pode ser representada por uma matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ou seja, $T(x) = Ax$ com $A^\top A = I$.

2. **Isometrias afins:**

Determine todas as isometrias $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que são também **afins**, ou seja, da forma $f(x) = Ax + b$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, e A ortogonal.

3. **Preservação do produto escalar:**

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ vetores unitários. Mostre que toda isometria linear f preserva o produto escalar:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Exemplo de isometria não linear:**

Dê um exemplo de isometria não linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que não é linear mas preserva distâncias. Mostre que f é de fato uma isometria.

22.1.2 Solução

Solution for n26-1 in pt

Categoria: Demonstração, Resolução e Resolver, Cálculo, Construção e Design **Dificuldade**: Mais Médio **Etiquetas**:
UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 9e309e43-0357-4e95-89ba-1f2829a3d2aa em 31.05.2025

22.2 PT 1 No.26-2PALLV1.0: Problema de demonstração: caracterização das isometrias em $\mathbb{R}^n$

Tempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Um Original*

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria, ou seja:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstrar: Toda isometria f em $\mathbb{R}^n$ é uma transformação afim da forma $f(x) = Ax + b$, onde A é uma matriz ortogonal, ou pode ser expressa como uma composição dessas com reflexões ou translações. **Dica para aprofundamento (opcional):** Mostre que o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}^n$ forma um grupo sob a composição —o chamado *grupo euclidiano* $\mathrm{E}(n)$.

22.2.1 Solução

Solution for n26-2 in pt

Categoria: Demonstração, Resolução e Resolver, Cálculo, Construção e Design **Dificuldade**: Mais Médio **Etiquetas**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 607af60e-daec-4629-9c96-18188b12c16b em 31.05.2025

22.3 *PT 1 No.27PALLV1.0: Isometria no espaço euclidiano de dimensão n e tarefa de prova: caracterização das aplicações isométricas em $\mathbb{R}^n$*

Tempo estimado para resolver: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Um Original*

Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamada de **isometria** se preserva a distância euclidiana entre dois pontos, ou seja, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

22.3.1 *Exercícios:*

1. **Isometrias lineares:**

Mostre que toda isometria linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pode ser representada por uma matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ou seja:

$$T(x) = Ax \quad \text{com} \quad A^\top A = I$$

2. **Isometrias afins:**

Determine todas as isometrias $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que são **afins**, isto é, da forma

$$f(x) = Ax + b$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal e $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Preservação do produto escalar:**

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ dois vetores unitários. Mostre que toda isometria f, que é linear, preserva o produto escalar:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Construção de uma isometria especial:**

Dê um exemplo de uma isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que não é linear, mas que ainda preserva as distâncias. Mostre que f é realmente uma isometria.

22.3.2 *Problema de prova: caracterização das isometrias em $\mathbb{R}^n$*

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria, ou seja:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

22.3.3 *A provar:*

Toda isometria f em $\mathbb{R}^n$ é uma transformação afim da forma

$$f(x) = Ax + b,$$

onde A é uma matriz ortogonal, ou pode ser representada como composição dessas com reflexões ou translações.

22.3.4 Observação para aprofundamento (opcional):

Mostre que o conjunto de todas as isometrias em $\mathbb{R}^n$ forma um grupo sob a operação de composição, chamado de **grupo euclidiano** $\mathrm{E}(n)$.

22.3.5 Solução

22.3.6 Transformações Isométricas em $\mathbb{R}^n$

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamada de **isometria** se preservar distâncias, ou seja:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n$$

22.3.7 1. Transformações Lineares Isométricas

Teorema: Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é linear e isométrica, então $T(x) = Ax$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma **matriz ortogonal**:

$$A^\top A = I$$

Demonstração: Como T é linear, temos:

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

Para preservar norma:

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

22.3.8 2. Transformações Afinas Isométricas

Teorema: Toda transformação afim isométrica é da forma:

$$f(x) = Ax + b \quad (A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n)$$

Explicação: Para $f(x) = Ax + b$:

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

22.3.9 3. Preservação do Produto Interno

Teorema: Se f é linear e isométrica, então:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

Demonstração: Se $f(x) = Ax$:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v$$

22.3.10 4. Existem Isometrias que Não São Afins?

Resposta: Não. Em $\mathbb{R}^n$, **toda isometria é afim**. Ou seja, **não existem isometrias que não sejam afins**.

22.3.11 Caracterização das Isometrias

Teorema: Toda isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é da forma:

$$f(x) = Ax + b \quad \text{com } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Resumo da demonstração:

1. Defina $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$
2. $|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow g$ é linear e isométrica
3. $g(x) = Ax$, com A ortogonal
4. Portanto, $f(x) = Ax + f(0)$

22.3.12 O Grupo Euclidiano $\mathrm{E}(n)$

O conjunto de todas as isometrias forma um **grupo sob composição**:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Propriedades:

- **Fecho:** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Inverso:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Identidade:** $\mathrm{id}(x) = x$

22.3.13 Resumo

- Isometrias lineares $\leftrightarrow$ matrizes ortogonais
- Isometrias afins $\leftrightarrow$ ortogonais + translações
- Toda isometria em $\mathbb{R}^n$ é afim
- O conjunto das isometrias forma o **grupo euclidiano** $\mathrm{E}(n)$

Categoria: Demonstração, Construção e Design **Dificuldade**: Mais Médio **Etiquetas**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: d0cb68cc-1e4f-40e0-a277-77695f08a86c em 07.06.2025

22.4 PT 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Controle ótimo de um processo difusivo

Tempo estimado para resolver: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Um Original*

22.4.1 Descrição do Problema

Este exercício aborda uma aplicação avançada de análise variacional e controle ótimo. Está relacionado a controle quântico e várias áreas da engenharia.

22.4.2 Configuração do Problema

A variável de estado unidimensional

$$y(x,t)$$

(por exemplo, temperatura ou concentração) é definida no intervalo $\Omega = [0, L]$ e no intervalo temporal

$$t \in [0,T]$$

. Esta variável de estado é governada pela seguinte equação diferencial parcial (processo de difusão), controlada pela variável de controle

$$u(t)$$

(dependente somente do tempo):

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

Condições de contorno:

- $$y(0,t) = 0$$
- $$y(L,t) = 0 \quad t \in (0,T]$$

Condição inicial:

- $$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in [0,L]$$

Aqui, $\alpha > 0$ é o coeficiente de difusão, e

$$g(x)$$

é uma função conhecida que representa o efeito espacial do controle. Assume-se que $y_0(x)$ e $g(x)$ são suficientemente suaves. O objetivo é encontrar o controle ótimo

$$u(t) \in U_{\text{ad}}$$

, onde

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

é o conjunto admissível de controles, limitado entre 0 e um valor máximo

$$U_{\max}$$

. A função objetivo (custo) é dada por:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (y(x,T) - y_{\text{desired}}(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

onde

$$y_{\text{desired}}(x)$$

é o estado desejado no tempo final T e $\lambda > 0$ é um parâmetro de regularização que penaliza o tamanho do controle.

22.4.3 Parte 1: Análise Básica do Sistema

22.4.4 1. Existência e Unicidade

Explique conceitualmente por que, dado um controle

$$u(t)$$

e as condições de contorno e iniciais, existe uma solução única

$$y(x,t)$$

para a equação diferencial parcial. Discuta os espaços funcionais relevantes (por exemplo, espaços de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$), a continuidade e as propriedades do contorno.

22.4.5 2. Impacto das Restrições no Controle

Discuta o impacto das restrições

$$0 \leq u(t) \leq U_{\max}$$

no problema de otimização. Compare com o caso sem restrições ($U_{\text{ad}} = C([0,T])$) e explique como isso afeta a convexidade e as condições de otimalidade.

22.4.6 Parte 2: Análise Variacional e Condições de Otimalidade

22.4.7 1. Cálculo da Derivada de Gâteaux

Assumindo que $J(u)$ é diferenciável, derive a derivada de Gâteaux de J no ponto $u_0(t)$ na direção $h(t)$. Aqui, ε é uma pequena variação e o controle varia como $u_0(t) + \varepsilon h(t)$. Denote o estado correspondente por $y_h(x,t)$. Calcule

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

22.4.8 2. Papel do Sistema Adjunto

Explique, em termos gerais, como o sistema adjunto ajuda na resolução do problema de otimização com restrição de PDE. Como ele simplifica o cálculo do gradiente da função custo e qual a relação com a análise de sensibilidade do estado.

22.4.9 3. Condição Necessária de Otimalidade de Primeira Ordem

Expresse a condição necessária de otimalidade de primeira ordem que o controle ótimo $u^{\cdot}(t) \in U_{\text{ad}}$ deve satisfazer (inequação variacional). Explique como essa condição relaciona o gradiente da função custo com o conjunto admissível de controles.

22.4.10 Parte 3: Tópicos Avançados e Comportamento Assintótico

22.4.11 1. Comportamento do Parâmetro de Regularização

Analise o comportamento do controle ótimo u

22.4.11 2. Garantia de Precisão Épsilon-Delta

Assumindo a existência de um controle ótimo $u^{\cdot}(t)$, explique como mostrar usando a definição de épsilon-delta que $y(x,T)$ pode se aproximar do estado desejado $y_{\text{desired}}(x)$ dentro de uma precisão arbitrária ε. Deixe claro o papel de

- ε: tolerância na aproximação do estado desejado,
- δ: tolerância na variação do controle ou do tempo final.

22.4.12 Solução

Solution for m2 in pt

Categoria: Demonstração, Resolução e Resolver, Análise, Construção e Design, Interpretação **Dificuldade**: Lado Escuro
Etiquetas:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 2c8bb81f-d992-4b4e-987e-ff682b30237e em 21.06.2025

23 Решение

23.1 RU 1 No.26-1PALLV1.0: Изометрии в n-мерном евклидова пространстве

Оценочное время решения: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Оригинал*

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется **изометрией**, если оно сохраняет евклидово расстояние между двумя точками, то есть для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

23.1.1 Задания:

1. **Линейные изометрии:**

Докажите, что любая линейная изометрия $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ может быть представлена ортогональной матрицей A, то есть $T(x) = Ax$, $A^\top A = I$.

2. **Аффинные изометрии:**

Найдите все изометрии вида $f(x) = Ax + b$, где A —ортогональная матрица, $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Сохранение скалярного произведения:**

Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$ —единичные векторы. Докажите, что линейная изометрия f сохраняет скалярное произведение:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **Пример нелинейной изометрии:**

Приведите пример изометрии, которая не является линейным отображением, но сохраняет расстояния. Докажите, что f действительно изометрия.

23.1.2 Решение

Solution for n26-1 in ru

Категория: Доказательство, Решение и Решать, Вычисление, Построение и Проектирование **Сложность**: Выше Средний **Теги**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 38fb42ac-41f8-4594-8e1b-6c235ecee651 на 31.05.2025

23.2 RU 1 No.26-2PALLV1.0: Задача доказательства: характеристика изометрий в $\mathbb{R}^n$

Оценочное время решения: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Оригинал*

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ —изометрия, то есть:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Докажите: Любая изометрия f в $\mathbb{R}^n$ либо является аффинным преобразованием вида $f(x) = Ax + b$, где A — ортогональная матрица, либо может быть представлена как композиция таких преобразований с отражениями или параллельными переносами. **Дополнительное задание (по желанию):** Докажите, что множество всех изометрий $\mathbb{R}^n$ образует группу относительно композиции —так называемую *евклидову группу* $\mathrm{E}(n)$.

23.2.1 Решение

Solution for n26-2 in ru

Категория: Доказательство, Решение и Решать, Вычисление, Построение и Проектирование **Сложность**: Выше Средний **Теги**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: d7b65282-5963-4d3d-91b2-7ea7b5180cd4 на 31.05.2025

23.3 RU 1 No.27PALLV1.0: Изометрии в n-мерном евклидовой пространстве и задача доказательства: характеристика изометрических отображений в $\mathbb{R}^n$

Оценочное время решения: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Оригинал*

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется **изометрией**, если оно сохраняет евклидово расстояние между двумя точками, то есть для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

23.3.1 Задачи:

1. **Линейные изометрии:**

Докажите, что любая линейная изометрия $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ может быть представлена ортогональной матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то есть

$$T(x) = Ax \quad \text{при условии} \quad A^\top A = I.$$

2. **Афинные изометрии:**

Найдите все изометрии $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которые являются **аффинными**, то есть имеют вид

$$f(x) = Ax + b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ортогональна, а $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Сохранение скалярного произведения:**

Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$ —два единичных вектора. Докажите, что любая изометрия f, которая является линейной, сохраняет скалярное произведение:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

4. **Конструкция специальной изометрии:**

Приведите пример нелинейной изометрии $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которая не является линейным отображением, но при этом сохраняет расстояния. Докажите, что f действительно является изометрией.

23.3.2 Задача на доказательство: характеристика изометрий в $\mathbb{R}^n$

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ —изометрия, то есть

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

23.3.3 Требуется доказать:

Любая изометрия f в $\mathbb{R}^n$ либо является аффинным отображением вида

$$f(x) = Ax + b,$$

где A —ортогональная матрица, либо может быть представлена как композиция таких отображений с отражениями или сдвигами.

23.3.4 Дополнительное углубление (по желанию):

Докажите, что множество всех изометрий в $\mathbb{R}^n$ образует группу относительно композиции, которая называется **евклидовой группой** $\mathrm{E}(n)$.

23.3.5 Решение

23.3.6 Изометрические преобразования в $\mathbb{R}^n$

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется **изометрией**, если она сохраняет расстояния:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n$$

23.3.7 1. Линейные изометрии

Теорема: Если $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ —линейное изометрическое отображение, тогда $T(x) = Ax$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — **ортогональная матрица**:

$$A^\top A = I$$

Доказательство: Так как T линейно:

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

Из сохранения нормы:

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

23.3.8 2. Аффинные изометрии

Теорема: Любая аффинная изометрия имеет вид:

$$f(x) = Ax + b \quad (A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n)$$

Обоснование: Для $f(x) = Ax + b$:

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

23.3.9 3. Сохранение скалярного произведения

Теорема: Если f —линейная изометрия, то:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

Доказательство: Если $f(x) = Ax$, тогда:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v$$

23.3.10 4. Существуют ли неаффинные изометрии?

Ответ: Нет. В $\mathbb{R}^n$ **любая изометрия —аффинна**. То есть, **не существует неаффинных изометрий**.

23.3.11 Характеризация изометрий

Теорема: Любая изометрия $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет вид:

$$f(x) = Ax + b \quad \text{где } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Краткое доказательство:

1. Пусть $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$
2. $|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow g$ —линейная изометрия
3. $g(x) = Ax$, где A —ортогональная матрица
4. Следовательно, $f(x) = Ax + f(0)$

23.3.12 Евклидова группа $\mathrm{E}(n)$

Множество всех изометрий образует **группу по композиции**:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Свойства:

- **Замкнутость:** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Обратное:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Тождественное:** $\mathrm{id}(x) = x$

23.3.13 Итог

- Линейные изометрии $\leftrightarrow$ ортогональные матрицы
- Аффинные изометрии $\leftrightarrow$ ортогональные + сдвиг
- Все изометрии в $\mathbb{R}^n$ —аффинные
- Все изометрии образуют **евклидову группу** $\mathrm{E}(n)$

Категория: Доказательство, Построение и Проектирование **Сложность**: Выше Средний **Теги**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 691bfe4c-f46c-41fb-8aed-02b560223d0a на 07.06.2025

23.4 RU 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Оптимальное управление диффузионным процессом

Оценочное время решения: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Оригинал*

23.4.1 Описание задачи

Данная задача исследует применение функционального анализа и вариационного исчисления в оптимальном управлении, с близкими связями к квантовой механике и инженерии.

23.4.2 Постановка задачи

Рассмотрим одномерную систему, где функция состояния $y(x,t)$ (например, распределение температуры или концентрация вещества) зависит от пространственной переменной $x \in [0, L]$ и времени $t \in [0, T]$. Эволюция системы задаётся уравнением диффузии с управлением $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

Граничные условия:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, для $t \in (0, T]$

Начальное условие:

- $y(x,0) = y_0(x)$, для $x \in [0, L]$

Здесь $\alpha > 0$ —коэффициент диффузии, а $g(x)$ —пространственная зависимость управления. Предполагается, что $y_0(x)$ и $g(x)$ обладают достаточной регулярностью. Цель —найти оптимальное управление $u(t)$ из множества допустимых

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\max}\}$$

23.4.3 Функционал качества

Функционал, который необходимо минимизировать:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{желаемое}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

где $y_{\text{желаемое}}(x)$ —целевое состояние, а $\lambda > 0$ —параметр регуляризации, штрафующий за интенсивность управления.

23.4.4 Часть 1: Базовый анализ системы

23.4.5 1. Существование и единственность решения

Объясните, почему для заданного управления $u(t)$ уравнение с указанными начальными и граничными условиями имеет единственное решение. Используйте соответствующие функциональные пространства (например, пространства Соболева $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$) для определения слабого решения.

23.4.6 2. Влияние ограничений на управление

Обсудите влияние ограничений

$$0 \leq u(t) \leq U_{\max}$$

на свойства задачи. Сравните с задачей без ограничений, подчеркните роль выпуклости и отличия в условиях оптимальности.

23.4.7 Часть 2: Вариационный анализ и условия оптимальности

23.4.8 1. Производная Гато

Предположим, что $J(u)$ дифференцируема. Найдите производную Гато функционала J в точке $u_0(t)$ по направлению $h(t)$. Подсказка: рассмотрите состояние $y_h(x,t)$, соответствующее управлению $u_0(t) + \varepsilon h(t)$, и вычислите

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$$

23.4.9 2. Роль сопряжённой системы

Объясните роль сопряжённой (адъюнктной) системы в оптимальном управлении PDE. Как она упрощает вычисление градиента функционала и связана с чувствительностью состояния.

23.4.10 3. Необходимые условия оптимальности первого порядка

Опишите необходимое условие оптимальности первого порядка для оптимального управления $u^{\cdot}(t)$ из множества U_{ad}. Объясните геометрическую интерпретацию градиента и множества допустимых управлений, и почему это гарантирует минимум.

23.4.11 Часть 3: Продвинутый анализ и предельное поведение

23.4.12 1. Влияние параметра регуляризации

Обсудите влияние регуляризующего слагаемого

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$$

при стремлении $\lambda \to 0^+$ на оптимальное управление u

23.4.12 2. Ригорозное ε-δ доказательство

Пусть оптимальное управление $u^{\cdot}(t)$ известно. Докажите, используя аргумент ε-δ, что конечное состояние $y(x,T)$ может быть приближено к $y_{\text{желаемое}}(x)$ с любой точностью $\varepsilon > 0$. Чётко определите:

- ε: допустимая ошибка между состоянием и целью,
- δ: допустимое отклонение управления или параметров (например, $-u^{\cdot}| < \delta$).

23.4.13 Решение

Solution for m2 in ru

Категория: Доказательство, Решение и Решать, Анализ, Построение и Проектирование, Интерпретация **Сложность**: Темная Сторона **Теги**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 6189d4df-4147-46bb-ac41-4764aae6dc07 на 21.06.2025

24 Lösning

24.1 SE 1 No.27PALLV1.0: Isometrier i n-dimensionellt euklidiskt rum och bevisuppgift: Karakterisering av isometriska avbildningar i $\mathbb{R}^n$

Beräknad tid för att lösa: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Ett Original*

En avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas **isometri** om den bevarar det euklidiska avståndet mellan två punkter, alltså för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$ gäller:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

24.1.1 Uppgifter:

1. **Linjära isometrier:**

Visa att varje linjär isometri $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan representeras genom en ortogonal matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, det vill säga

$$T(x) = Ax \quad \text{med} \quad A^\top A = I.$$

2. **Affina isometrier:**

Bestäm alla isometrier $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som dessutom är **affina**, det vill säga av formen

$$f(x) = Ax + b,$$

där $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är ortogonal och $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Bevarande av skalärprodukt:**

Låt $u, v \in \mathbb{R}^n$ vara två enhetsvektorer. Visa att varje linjär isometri f bevarar skalärprodukten, alltså:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

4. **Konstruktion av en speciell isometri:**

Ge ett exempel på en icke-linjär isometri $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som inte är en linjär avbildning, men ändå bevarar avstånd. Visa att f verkligen är isometrisk.

24.1.2 Bevisuppgift: Karaktärisering av isometriska avbildningar i $\mathbb{R}^n$

Anta att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en isometri, det vill säga

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{för alla } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

24.1.3 Att visa:

Varje isometri f i $\mathbb{R}^n$ är antingen en affin avbildning av formen

$$f(x) = Ax + b,$$

där A är en ortogonal matris, eller kan representeras som en sammansättning av sådana tillsammans med speglingar eller translationer.

24.1.4 Fördjupning (frivillig):

Visa att mängden av alla isometrier i $\mathbb{R}^n$ bildar en grupp under komposition, kallad **den euklidiska gruppen** $\mathrm{E}(n)$.

24.1.5 Lösning

24.1.6 Isometriska avbildningar i $\mathbb{R}^n$

En funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sägs vara en **isometri** om den bevarar avståndet:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{för alla } x, y \in \mathbb{R}^n$$

24.1.7 1. Linjära isometrier

Sats: Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär isometri, då gäller:

$$T(x) = Ax \quad \text{där } A^\top A = I$$

Bevis: Eftersom T är linjär:

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = x^\top A^\top Ax$$

Men $|T(x)|^2 = |x|^2$, så:

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

24.1.8 2. Affina isometrier

Sats: Varje affin isometri är av formen:

$$f(x) = Ax + b \quad \text{där } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Förklaring: Eftersom:

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

24.1.9 3. Bevarande av skalärprodukt

Sats: Om f är en linjär isometri, då:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

Bevis: Skriv $f(x) = Ax$:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle Au, Av\rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v$$

24.1.10 4. Finns det icke-affina isometrier?

Svar: Nej. I $\mathbb{R}^n$ är **alla isometrier affina**. Det finns alltså **inga icke-affina isometrier**.

24.1.11 Karakterisering av isometrier

Sats: Varje isometri $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan skrivas som:

$$f(x) = Ax + b \quad \text{där } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Kort bevis:

1. Definiera $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$
2. $|g(x) - g(y)| = |x - y| \Rightarrow g$ är linjär isometri
3. $g(x) = Ax$ där A är ortogonal
4. Alltså: $f(x) = Ax + f(0)$

24.1.12 Euklidiska gruppen $\mathrm{E}(n)$

Mängden av alla isometrier bildar en **grupp under sammansättning**:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Egenskaper:

- **Slutenhet:** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Invers:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Identitet:** $\mathrm{id}(x) = x$

24.1.13 Sammanfattning

- Linjära isometrier $\leftrightarrow$ ortogonala matriser
- Affina isometrier $\leftrightarrow$ ortogonal + translation
- Alla isometrier i $\mathbb{R}^n$ är affina
- Isometrierna bildar **den euklidiska gruppen** $\mathrm{E}(n)$

Kategori: Bevis, Byggande och Design **Svårighetsgrad**: Hög Medium **Taggar**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: af7e669c-749e-42fd-bd99-2004bdbd9dae den 07.06.2025

24.2 SE 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Diffusiprocessens optimale styring

Beräknad tid för att lösa: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Ett Original*

24.2.1 Uppgiftsbeskrivning

Den här uppgiften undersöker användning av funktionell analys och variationskalkyl inom optimal styrning, med nära kopplingar till kvantmekanik och teknik.

24.2.2 Problemformulering

Betrakta ett endimensionellt system där tillståndsfunktionen $y(x,t)$ (t.ex. temperatur- eller koncentrationsfördelning) beror på den rumsliga variabeln $x \in [0,L]$ och tiden $t \in [0,T]$. Systemets utveckling ges av diffusions-ekvationen med styrning $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

Randvillkor:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, för $t \in (0,T]$

Begynnelsevillkor:

- $y(x,0) = y_0(x)$, för $x \in [0,L]$

Här är $\alpha > 0$ diffusionskoefficienten, och $g(x)$ är styrningens rumsliga beroende. Antag att $y_0(x)$ och $g(x)$ har tillräcklig regularitet. Målet är att hitta en optimal styrning $u(t)$ ur mängden tillåtna styrningar

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \le u(t) \le U_{\max}\}$$

24.2.3 Kvalitetsfunktional

Funktionalen som ska minimeras är:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{önskad}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

där $y_{\text{önskad}}(x)$ är måltillståndet och $\lambda > 0$ är en regulariseringsparameter som straffar styrningens intensitet.

24.2.4 Del 1: Grundläggande systemanalys

24.2.5 1. Existens och entydighet av lösning

Förklara varför ekvationen med givna begynnelse- och randvillkor har en entydig lösning för en given styrning $u(t)$. Använd lämpliga funktionella rum (t.ex. Sobolev-rum $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$) för att definiera svag lösning.

24.2.6 2. Påverkan av styrningsbegränsningar

Diskutera hur begränsningarna

$$0 \le u(t) \le U_{\max}$$

påverkar problemets egenskaper. Jämför med fallet utan begränsningar, och betona rollen av konvexitet och skillnader i optimalitetsvillkor.

24.2.7 Del 2: Variationsanalys och optimalitetsvillkor

24.2.8 1. Gâteaux-derivata

Antag att $J(u)$ är differentierbar. Hitta Gâteaux-derivatan av funktionalen J i punkten $u_0(t)$ i riktningen $h(t)$. Tips: Betrakta tillståndet $y_h(x,t)$ som svarar mot styrningen $u_0(t)+\varepsilon h(t)$, och beräkna

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0+\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

24.2.9 2. Roll för det adjungerade systemet

Förklara rollen för det adjungerade systemet i optimal styrning av PDE. Hur underlättar det beräkning av gradienten av funktionalen och hur relaterar det till tillståndets känslighet?

24.2.10 3. Nödvändiga första ordningens optimalitetsvillkor

Beskriv det nödvändiga första ordningens villkoret för optimal styrning $u^{\cdot}(t)$ inom mängden U_{ad}. Förklara den geometriska tolkningen av gradienten och mängden tillåtna styrningar, och varför detta garanterar ett minimum.

24.2.11 Del 3: Avancerad analys och gränsbeteende

24.2.12 1. Påverkan av regulariseringsparametern

Diskutera hur regulariseringsledet

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

påverkar den optimala styrningen u

24.2.12 2. Strikt ε-δ-bevis

Anta att den optimala styrningen $u^{\cdot}(t)$ är känd. Bevisa med ett ε-δ-argument att slutliga tillståndet $y(x,T)$ kan approximeras till $y_{\text{önskad}}(x)$ med godtycklig noggrannhet $\varepsilon > 0$. Definiera tydligt:

- ε: tillåten felmarginal mellan tillståndet och målet,
- δ: tillåten avvikelse i styrningen eller parametrar (t.ex. $-u^{\cdot}| < \delta$).

24.2.13 Lösning

Solution for m2 in se

Kategori: Bevis, Lösning och Lösa, Analys, Byggande och Design, Tolkning **Svårighetsgrad**: Mörk Sida **Taggar**:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: addf7bb2-2790-4d0c-8ef6-3ddc4991b475 den 21.06.2025

25 Giải pháp

25.1 *VN 1 No.26-1PALLV1.0: Biến đổi đồng nhất trong không gian Euclid n chiều*

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Một Bản Gốc*

Một ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **đẳng cự** nếu nó bảo toàn khoảng cách Euclid giữa hai điểm, tức là với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

25.1.1 *Bài tập:*

1. **Đẳng cự tuyến tính:**

Chứng minh rằng mọi ánh xạ đẳng cự tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có thể biểu diễn bằng một ma trận trực giao $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tức là $T(x) = Ax$, $A^\top A = I$.

2. **Đẳng cự affine:**

Xác định tất cả ánh xạ đẳng cự f có dạng affine $f(x) = Ax + b$, trong đó A là ma trận trực giao, $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Bảo toàn tích vô hướng:**

Với hai vector đơn vị $u, v \in \mathbb{R}^n$, chứng minh rằng ánh xạ tuyến tính đẳng cự f bảo toàn tích vô hướng:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

4. **Ví dụ ánh xạ không tuyến tính:**

Đưa ra một ví dụ về ánh xạ không tuyến tính nhưng vẫn bảo toàn khoảng cách. Chứng minh rằng f là ánh xạ đẳng cự.

25.1.2 *Giải pháp*

Solution for n26-1 in vn

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Tính toán, Xây dựng và Thiết kế **Độ khó**: Trung Bình Cao **Thẻ**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: e98a587c-c2b7-4363-9eda-4d7453bb5809 vào 31.05.2025

25.2 *VN 1 No.26-2PALLV1.0: Bài toán chứng minh: đặc trưng của ánh xạ đồng nhất trong* $\mathbb{R}^n$

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Một Bản Gốc*

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đẳng cấu, tức là:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Cần chứng minh: Mọi ánh xạ đẳng cấu f trên $\mathbb{R}^n$ đều là ánh xạ affine dạng $f(x) = Ax + b$ với A là ma trận trực giao, hoặc có thể được biểu diễn như một tổ hợp của các ánh xạ như vậy với các phép phản xạ hoặc tịnh tiến. **Gợi ý nâng cao (tùy chọn):** Chứng minh rằng tập hợp tất cả các ánh xạ đẳng cấu trên $\mathbb{R}^n$ tạo thành một nhóm với phép hợp thành —gọi là *nhóm Euclid* $\mathrm{E}(n)$.

25.2.1 *Giải pháp*

Solution for n26-2 in vn

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Tính toán, Xây dựng và Thiết kế **Độ khó**: Trung Bình Cao **Thẻ**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: bb34f908-3f65-4add-8596-5d9bb5e1b3bb vào 31.05.2025

25.3 VN 1 No.27PALLV1.0: Phép đẳng cự trong không gian Euclidean n chiều và nhiệm vụ chứng minh: Đặc tính của phép ánh xạ đẳng cự trong $\mathbb{R}^n$

Thời gian ước tính để giải quyết: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* *Một Bản Gốc*

Một ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **đẳng cấu** (isometry) nếu nó bảo toàn khoảng cách Euclid giữa hai điểm, tức là với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ ta có:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

25.3.1 Bài tập:

1. **Đẳng cấu tuyến tính:**

Chứng minh rằng mọi đẳng cấu tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có thể được biểu diễn bởi một ma trận trực giao $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tức là:

$$T(x) = Ax \quad \text{với} \quad A^\top A = I.$$

2. **Đẳng cấu affine:**

Xác định tất cả các đẳng cấu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ đồng thời là ánh xạ affine, tức là có dạng:

$$f(x) = Ax + b,$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận trực giao và $b \in \mathbb{R}^n$.

3. **Bảo toàn tích vô hướng:**

Cho $u, v \in \mathbb{R}^n$ là hai vectơ đơn vị. Chứng minh rằng mọi đẳng cấu tuyến tính f bảo toàn tích vô hướng, tức là:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

4. **Xây dựng một đẳng cấu đặc biệt:**

Cho ví dụ về một đẳng cấu không tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ không phải là ánh xạ tuyến tính nhưng vẫn bảo toàn khoảng cách. Chứng minh rằng f thực sự là đẳng cấu.

25.3.2 Bài toán chứng minh: Đặc trưng các ánh xạ đẳng cấu trên $\mathbb{R}^n$

Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một đẳng cấu, tức là:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

25.3.3 Cần chứng minh:

Mọi đẳng cấu f trên $\mathbb{R}^n$ là ánh xạ affine có dạng

$$f(x) = Ax + b,$$

trong đó A là ma trận trực giao, hoặc có thể được biểu diễn dưới dạng kết hợp của các ánh xạ affine này với phép phản chiếu hoặc phép tịnh tiến.

25.3.4 Mở rộng (tùy chọn):

Chứng minh rằng tập hợp tất cả các đẳng cấu trên $\mathbb{R}^n$ tạo thành một nhóm theo phép hợp thành, gọi là **nhóm Euclid** $\mathrm{E}(n)$.

25.3.5 Giải pháp

25.3.6 Ánh xạ đẳng cấu trong $\mathbb{R}^n$

Một hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **đẳng cấu** nếu nó bảo toàn khoảng cách:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n$$

25.3.7 1. Ánh xạ tuyến tính đẳng cấu

Định lý: Nếu $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ tuyến tính đẳng cấu, thì:

$$T(x) = Ax \quad \text{với } A^\top A = I$$

Chứng minh: Vì T là tuyến tính:

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = x^\top A^\top Ax$$

Do $|T(x)|^2 = |x|^2$, nên:

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

25.3.8 2. Ánh xạ affine đẳng cấu

Định lý: Mọi ánh xạ affine đẳng cấu đều có dạng:

$$f(x) = Ax + b \quad \text{với } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Giải thích: Vì:

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

25.3.9 3. Bảo toàn tích vô hướng

Định lý: Nếu f là ánh xạ tuyến tính đẳng cấu, thì:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Chứng minh: Với $f(x) = Ax$:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle Au, Av \rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v$$

25.3.10 4. Có tồn tại đẳng cấu không phải affine?

Trả lời: Không. Trong $\mathbb{R}^n$, **mọi ánh xạ đẳng cấu đều là affine**. Không tồn tại đẳng cấu nào không phải affine.

25.3.11 Đặc trưng của ánh xạ đẳng cấu

Định lý: Mọi ánh xạ đẳng cấu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có thể viết dưới dạng:

$$f(x) = Ax + b \quad \text{với } A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

Chứng minh ngắn gọn:

1. Đặt $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$
2. Vì $|g(x) - g(y)| = |x - y|$, nên g là ánh xạ tuyến tính đẳng cấu
3. Suy ra: $g(x) = Ax$ với A là ma trận trực giao
4. Vậy: $f(x) = Ax + f(0)$

25.3.12 Nhóm Euclid $\mathrm{E}(n)$

Tập hợp các ánh xạ đẳng cấu tạo thành một **nhóm** dưới phép hợp thành:

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Tính chất:

- **Đóng:** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **Nghịch đảo:** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **Đồng nhất:** $\mathrm{id}(x) = x$

25.3.13 Tóm tắt

- Ánh xạ tuyến tính đẳng cấu $\leftrightarrow$ ma trận trực giao
- Ánh xạ affine đẳng cấu $\leftrightarrow$ ma trận trực giao + tịnh tiến
- Mọi ánh xạ đẳng cấu trong $\mathbb{R}^n$ đều là affine
- Các ánh xạ đẳng cấu tạo thành **nhóm Euclid** $\mathrm{E}(n)$

Danh mục: Chứng minh, Xây dựng và Thiết kế **Độ khó**: Trung Bình Cao **Thẻ**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 45bc8662-0585-484b-aca4-3e487e748bc8 vào 07.06.2025

25.4 VN 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: Điều khiển tối ưu của một quá trình khuếch tán

Thời gian ước tính để giải quyết: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* *Một Bản Gốc*

25.4.1 Mô tả bài toán

Bài toán này nghiên cứu việc sử dụng giải tích hàm và phép biến phân trong điều khiển tối ưu, với mối liên hệ chặt chẽ đến cơ học lượng tử và kỹ thuật.

25.4.2 Đặt bài toán

Xét một hệ thống một chiều, trong đó hàm trạng thái $y(x,t)$ (ví dụ: phân bố nhiệt độ hoặc nồng độ) phụ thuộc vào biến không gian $x \in [0,L]$ và thời gian $t \in [0,T]$. Sự phát triển của hệ được mô tả bởi phương trình khuếch tán có điều khiển $u(t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T]$$

Điều kiện biên:

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$, với $t \in (0,T]$

Điều kiện đầu:

- $y(x,0) = y_0(x)$, với $x \in [0,L]$

Với $\alpha > 0$ là hệ số khuếch tán và $g(x)$ là hàm mô tả cách điều khiển tác động theo không gian. Giả sử $y_0(x)$ và $g(x)$ có tính trơn phù hợp. Mục tiêu là tìm điều khiển tối ưu $u(t)$ thuộc tập điều khiển khả thi:

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0,T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\text{max}}\}$$

25.4.3 Hàm mục tiêu

Hàm mục tiêu cần được tối thiểu hóa là:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{mục tiêu}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

Với $y_{\text{mục tiêu}}(x)$ là trạng thái đích mong muốn, và $\lambda > 0$ là hệ số điều chuẩn nhằm trừng phạt điều khiển quá mạnh.

25.4.4 Phần 1: Phân tích hệ cơ bản

25.4.5 1. Tồn tại và duy nhất nghiệm

Giải thích vì sao phương trình với điều kiện đầu và biên đã cho có nghiệm duy nhất cho mỗi điều khiển $u(t)$. Sử dụng các không gian hàm thích hợp (ví dụ: Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$) để định nghĩa nghiệm yếu.

25.4.6 2. Ảnh hưởng của ràng buộc điều khiển

Thảo luận ảnh hưởng của ràng buộc:

$$0 \leq u(t) \leq U_{\text{max}}$$

đối với tính chất của bài toán. So sánh với trường hợp không có ràng buộc và nêu bật vai trò của tính lồi trong bài toán.

25.4.7 Phần 2: Phân tích biến phân và điều kiện tối ưu

25.4.8 1. Đạo hàm Gâteaux

Giả sử $J(u)$ khả vi. Hãy tính đạo hàm Gâteaux của J tại $u_0(t)$ theo hướng $h(t)$. Gợi ý: Xét trạng thái $y_h(x,t)$ ứng với điều khiển $u_0(t) + \varepsilon h(t)$, và tính:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0 + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

25.4.9 2. Vai trò hệ phụ hợp (adjoint system)

Giải thích vai trò của hệ phụ hợp trong điều khiển tối ưu PDE. Hệ này giúp tính đạo hàm của hàm mục tiêu như thế nào và có liên hệ gì đến độ nhạy trạng thái?

25.4.10 3. Điều kiện tối ưu bậc nhất

Mô tả điều kiện cần bậc nhất để $u^{\cdot}(t)$ là điều khiển tối ưu thuộc tập U_{ad}. Giải thích trực giác hình học về đạo hàm và tập điều khiển khả thi, tại sao điều kiện này đảm bảo tối ưu cục bộ.

25.4.11 Phần 3: Phân tích nâng cao và giới hạn

25.4.12 1. Ảnh hưởng của tham số điều chuẩn

Thảo luận ảnh hưởng của thành phần điều chuẩn:

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

đến điều khiển tối ưu u

25.4.12 2. Chứng minh ε-δ chặt chẽ

Giả sử điều khiển tối ưu $u^{\cdot}(t)$ đã biết. Hãy chứng minh bằng lập luận ε-δ rằng trạng thái cuối $y(x,T)$ có thể tiệm cận $y_{\text{mục tiêu}}(x)$ với sai số tuỳ ý $\varepsilon > 0$. Cần xác định rõ:

- ε: mức sai số cho phép giữa trạng thái và mục tiêu
- δ: sai lệch điều khiển hoặc tham số cho phép (ví dụ: $-u^{\cdot}| < \delta$)

25.4.13 Giải pháp

Solution for m2 in vn

Danh mục: Chứng minh, Giải quyết và Giải, Phân tích, Xây dựng và Thiết kế, Diễn giải **Độ khó**: Mặt Tối **Thẻ**:
UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 1c8484b9-af7e-4581-b2bd-d939ce8b3556 vào 21.06.2025

26 解决方案

26.1 ZH SHK-1 No.23PALLV1.0: 無型 *lambda* 演算中的遞歸與不動點組合器

解决的预计时间: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* 原创

給出了具有完整 β 約簡的無類型 lambda 演算。自然數的 Church 編碼"iszero"、"pred"和"mult"被認為是眾所周知的。設不動點組合子 $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ 以及函數:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

任務: 正式且完整地證明 $Y\ F$ 是根據 Church 編碼計算階乘的正確遞歸程序。需要詳細表明以下幾點:

1. **固定參數的約簡**: 對項 $(Y\ F)\ 3$ 進行完整的 β 約簡。指定直至最終 Church 編碼的所有簡化步驟。

2. **透過歸納證明正確性**: 對 Church 數進行結構化歸納證明，證明對於所有 $n \in \mathbb{N}$，以下成立:

$$\square Y\ F \square\ n \to_{\beta}^{\cdot} \text{fac}_n$$

其中 fac_n 是 $n!$ 的 Church 編碼。

3. **不動點性質** : 正式證明 $Y\ F = F\ (Y\ F)$，並說明為何該表達式允許遞歸計算。

4. **與 Z-Combinator 的比較:**

- 定義 Z-組合子。
- 比較 $(Y\ F)\ 3$ 和 $(Z\ F)\ 3$ 的減少長度。
- 討論在哪些情況下應該優先選擇 Z。

注意: 對於所有減少步驟，必須明確指定中間項。請勿無故使用簡化或跳躍。

26.1.1 解決方案

Solution for n23 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: a94a62e4-a6bf-4386-8c65-5e294ef85c8d 日期 17.05.2025

26.2 ZH SHK-2 No.24PALLV1.0: zeta 函數和 *gamma* 函數在量子場論的配分函數和真空能量中的作用

解决的预计时间: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 原创

研究並證明 zeta 和 gamma 函數在量子場論正則化和熱力學中的作用，特別是在配分函數和真空能量的背景下。

26.2.1 任務

給定一個緊湊時空中的標量量子場，其時間維度具有週期性 β(對應於溫度 $T = 1/\beta$) 和空間維度 L。該場的固有頻率為:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

使用 zeta 正規化，證明熱力學配分函數

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta \omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

可以使用黎曼 zeta 函數和 gamma 函數的解析擴展進行定期計算。

26.2.2 子任務

1. **受控真空能量的推導**

使用 **zeta 函數**推導受控真空能量的表達式 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$。表明:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

並使用梅林變換將表達式轉換為伽馬函數形式。

2. **簡化為 Epstein zeta 函數**

證明 n 和 m 的雙和可以表示為 Epstein zeta 函數。分析其分析性質。

3. **溫度依賴性和熱力學函數**

利用正規化表達式推導自由能 F(beta)、內能 U(beta) 和熵 S(beta)。展示伽馬函數在高溫和低溫的漸近展開中如何出現。

4. **與卡西米爾能量的比較**

證明配分函數的零溫度極限轉變為卡西米爾能量，而正則化產生與經典 zeta-卡西米爾方法完全相同的形式。

26.2.3 解决方案

Solution for n24 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: NUM **标签**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: b14eff42-fdc0-4ebc-880f-05167a978cbe 日期 24.05.2025

26.3 ZH SHK-3 No.25PALLV1.0: 高斯波包的動量空間表示

解决的预计时间: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 原创

26.3.1 任務*:* 高斯波包的動量空間表示

給定一個一維量子力學粒子，其波函數在位置空間:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

此函數描述具有高斯空間分佈的靜止、自由移動的粒子。

26.3.2 **子任務**

26.3.3 波函數的歸一化

決定標準化常數 A，使得波函數標準化，即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

26.3.4 傅立葉轉換到動量空間

根據下列公式利用傅立葉轉換計算波函數的動量空間表示 $\phi(p)$:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

完成積分並以明確形式表述所得函數 $\phi(p)$。

26.3.5 海森堡不確定原理

分別決定位置和動量分佈的標準差 σ_x 和 σ_p:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

並證明這些散射的乘積滿足海森堡不確定性原理:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

26.3.6 極限情況的物理解釋

定性地討論物理極限情況 $a \to 0$。動量空間表示 $\phi(p)$ 會發生什麼情況，以及如何從物理上解釋這種極限情況？參考局部化和脈衝不確定性的概念。

26.3.7 **通知***:*

此任務也適合在 Python 或 MATLAB 中進行數值評估和圖形表示。或者，也可以使用合適的軟體工具 (例如 SymPy 或 Mathematica) 以符號方式驗證傅立葉變換。

26.3.8 解決方案

Solution for n25 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**: 8954
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 07f300e8-9ad4-4552-8048-256b953aecc1 日期 24.05.2025

26.4 ZH 1 No.26-1PALLV1.0: n 維歐氏空間中的等距

解決的预计时间: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 原创

若映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 保持兩點間的歐幾里得距離，則稱其為**等距映射（Isometry）**，即對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

26.4.1 題目：

1. **線性等距映射：**

證明每個線性等距映射 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可由正交矩陣 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示，即 $T(x) = Ax$ 且 $A^\top A = I$。

2. **仿射等距映射：**

找出所有形式為 $f(x) = Ax + b$ 的等距映射，其中 A 為正交矩陣，$b \in \mathbb{R}^n$。

3. **內積保持性：**

設 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 為單位向量，證明線性等距映射 f 保持內積：

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4. **非線性等距映射的構造：**

給出一個非線性但仍保距的等距映射例子，並證明該映射確實是等距的。

26.4.2 解決方案

Solution for n26-1 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 计算, 构建和设计 **难度**: 更中等 **标签**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 70548499-05d5-4926-9c2d-70466c165b00 日期 31.05.2025

26.5 ZH 1 No.26-2PALLV1.0: 證明題目：$\mathbb{R}^n$ 中等距映射的特徵

解决的预计时间: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 原创

設 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 為一個等距映射，也就是說：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{對所有} x, y \in \mathbb{R}^n.$$

需證明：任何等距映射 f 皆為一個仿射映射，其形式為 $f(x) = Ax + b$，其中 A 為正交矩陣，或可表示為此類映射與反射或平移的組合。**進階補充（可選）：**證明所有 $\mathbb{R}^n$ 上的等距映射在合成下形成一個群，即所謂的 歐幾里得群 $\mathrm{E}(n)$。

26.5.1 解决方案

Solution for n26-2 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 计算, 构建和设计 **难度**: 更中等 **标签**:

UUID: 1b8ff4e1-05b9-4cf8-b0ef-d3c1eef100f1 – *GUID*: 0854d323-52c5-479f-8685-324bccfc0093 日期 31.05.2025

26.6 ZH 1 No.27PALLV1.0: n 维欧几里得空间的等距映射和证明任务：$\mathbb{R}^n$ 中的等距映射特征化

解决的预计时间: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.0* 原创

一个映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 称为**等距映射** (Isometry), 如果它保持两个点之间的欧几里得距离不变, 即对所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 有：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

26.6.1 练习：

1. **线性等距映射：**

证明每个线性等距映射 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可以用一个正交矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示，即：

$$T(x) = Ax \quad \text{且} \quad A^\top A = I.$$

2. **仿射等距映射：**

确定所有同时是仿射映射的等距映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，即形如：

$$f(x) = Ax + b,$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交矩阵，$b \in \mathbb{R}^n$。

3. **内积保持性：**

设 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 是单位向量。证明任一线性等距映射 f 保持内积不变，即：

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

4. **构造特殊等距映射：**

给出一个非线性等距映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的例子，该映射不是线性的，但仍保持距离。证明 f 确实是等距映射。

26.6.2 证明题：$\mathbb{R}^n$ 中等距映射的特征

设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个等距映射，即满足：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

26.6.3 需证明：

所有的等距映射 f 要么是仿射映射，形如

$$f(x) = Ax + b,$$

其中 A 是正交矩阵；或者可以通过这些仿射映射与反射、平移的组合来表示。

26.6.4 拓展（可选）:

证明所有等距映射构成一个在合成下的群，称为**欧几里得群** $\mathrm{E}(n)$。

26.6.5 解决方案

26.6.6 $\mathbb{R}^n$ 中的等距映射

一个映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 称为**等距映射**（isometry），如果它保持距离不变：

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{对所有} x, y \in \mathbb{R}^n$$

26.6.7 1. 线性等距映射

定理：若 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性等距映射，则有：

$$T(x) = Ax \quad \text{其中} A^\top A = I$$

证明：由于 T 为线性映射：

$$|T(x)|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = x^\top A^\top Ax$$

又因 $|T(x)|^2 = |x|^2$，得：

$$x^\top A^\top Ax = x^\top x \Rightarrow A^\top A = I$$

26.6.8 2. 仿射等距映射

定理：任何仿射等距映射均可表示为：

$$f(x) = Ax + b \quad \text{其中} A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

说明：因为：

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| = |x - y| \Rightarrow A^\top A = I$$

26.6.9 3. 内积保持性

定理：若 f 是线性等距映射，则有：

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

证明：设 $f(x) = Ax$：

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle Au, Av \rangle = u^\top A^\top Av = u^\top v$$

26.6.10 4. 存在非仿射等距映射吗？

回答：在 $\mathbb{R}^n$ 中，**所有等距映射都是仿射的**。不存在不是仿射的等距映射。

26.6.11 等距映射的结构

定理：任何等距映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可写为：

$$f(x) = Ax + b \quad \text{其中} A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n$$

简要证明：

1. 定义 $g(x) := f(x) - f(0) \Rightarrow g(0) = 0$
2. 因为 $|g(x) - g(y)| = |x - y|$，得 g 为线性等距映射
3. 推出 $g(x) = Ax$，且 $A^\top A = I$
4. 故 $f(x) = Ax + f(0)$

26.6.12 欧氏群 $\mathrm{E}(n)$

所有等距映射在函数复合下构成一个**群**，称为欧氏群：

$$\mathrm{E}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

性质：

- **封闭性：** $(f \circ g)(x) = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$
- **逆元存在：** $f^{-1}(x) = A^\top (x - b)$
- **单位元：** $\mathrm{id}(x) = x$

26.6.13 总结

- 线性等距映射 $\leftrightarrow$ 正交矩阵
- 仿射等距映射 $\leftrightarrow$ 正交矩阵 + 平移
- 所有等距映射在 $\mathbb{R}^n$ 中都是仿射
- 等距映射构成**欧氏群** $\mathrm{E}(n)$

类别: 证明, 构建和设计 **难度**: 更中等 **标签**:
UUID: c9de10ae-0ca7-42e9-ab22-dcb21defed24 – *GUID*: 5405a62a-d519-498e-a671-279666c67dda 日期 07.06.2025

26.7 ZH 3 Masterclass Exercise.2PALLV1.0: 扩散过程的最优控制

解决的预计时间: 5 h 0 min *Nam-Score: 7.0* 原创

26.7.1 问题描述

本题研究泛函分析与变分法在最优控制中的应用，涉及与量子力学与工程技术的紧密联系。

26.7.2 问题设定

考虑一维系统，其状态函数 $y(x,t)$（如温度分布或浓度）依赖于空间变量 $x \in [0, L]$ 和时间变量 $t \in [0, T]$。系统的演化由一个带有控制项 $u(t)$ 的扩散方程描述：

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(t) \cdot g(x), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, T]$$

边界条件：

- $y(0,t) = 0$
- $y(L,t) = 0$，其中 $t \in (0, T]$

初始条件：

- $y(x, 0) = y_0(x)$，其中 $x \in [0, L]$

其中 $\alpha > 0$ 为扩散系数，$g(x)$ 是描述控制在空间中如何作用的函数。假设 $y_0(x)$ 与 $g(x)$ 是足够光滑的函数。目标是寻找控制函数 $u(t)$，其属于可接受控制集合：

$$U_{\text{ad}} = \{u \in C([0, T]) \mid 0 \leq u(t) \leq U_{\text{max}}\}$$

26.7.3 目标泛函

希望最小化的目标函数为：

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (y(x,T) - y_{\text{目标}}(x))^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

其中 $y_{\text{目标}}(x)$ 是期望的目标状态，$\lambda > 0$ 是调节参数，用于惩罚过强的控制力度。

26.7.4 第一部分：基础分析

26.7.5 1. 解的存在性与唯一性

说明为何上述 PDE 在给定控制 $u(t)$ 下存在唯一的解。请使用适当的函数空间（如 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$，或 $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$）来定义弱解。

26.7.6 2. 控制约束的影响

讨论约束：

$$0 \leq u(t) \leq U_{\text{max}}$$

对问题性质的影响。请与无约束情形进行对比，重点强调问题凸性的作用。

26.7.7 第二部分：变分分析与最优性条件

26.7.8 *1. Gâteaux* 导数

假设泛函 $J(u)$ 可微, 计算在 $u_0(t)$ 点沿方向 $h(t)$ 的 Gâteaux 导数：提示：考虑状态 $y_h(x,t)$ 对应于控制 $u_0(t)+\varepsilon h(t)$, 并计算：

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_0+\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

26.7.9 *2.* 对偶系统（伴随系统）的角色

解释对偶系统在最优控制中的作用。它如何帮助计算目标函数的导数？状态灵敏度又如何体现？

26.7.10 *3.* 一阶最优性条件

说明控制函数 $u^{\cdot}(t)$ 成为最优解的必要一阶条件, 并解释这些条件在可行集上的几何直觉。为何它能保证局部最优？

26.7.11 第三部分：高级分析与极限过程

26.7.12 *1.* 正则化参数的影响

讨论正则化项：

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

对最优控制 u

26.7.12 *2.* – 严格论证

假设已知最优控制 u

ε：目标状态允许的误差

- δ：控制扰动允许的范围（例如在 L^2 范数中）

26.7.13 解决方案

Solution for m2 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 分析, 构建和设计, 解释 **难度**: 黑暗面 **标签**:

UUID: f4238721-884b-4a9e-b456-37dbdfb55164 – *GUID*: 3bcdcbf3-51ed-4a98-9693-0d3b32849688 日期 21.06.2025