Solution: Aufgabensammlung

Paper ID: P1.1 *on May 1, 2025 – 23.04.2025 in Frankfurt* Version 1.0 Revision 1

Archive-ID: 209387-932 DOI: 10.5281/zenodo.15266189

Duy Nam Schlitz[a*]

[a] *Department of ISAC for Competition, duy.schlitz@ohs.hanau.schule*
[*] *Corresponding Author*

Abstract

Difficulty: 6-10
Exercise: No.6, No.7, No.8, Total time: De: 279 h 20 min, En: 279 h 20 min

Contents

Categories: problem solving geometry algebra inequality combinatorics number theory competition

1 Einführung und Informationen: 279 h 20 min

Die Verwendung von Hilfsmitteln wie Taschenrechnern, Formelsammlungen, Tabellenkalkulationen und digitalen Werkzeugen ist nur unter den ausdrücklich angegebenen Bedingungen gestattet. Zulässige Hilfsmittel müssen im Voraus für Prüfungen deklariert und von der Prüfungsaufsicht genehmigt werden. Jegliche nicht genehmigten Hilfsmittel sind verboten und können zur Disqualifikation führen. Während der Bearbeitung einer Aufgabe oder Prüfung ist es untersagt, zusätzliche Materialien oder externe Hilfe in Anspruch zu nehmen, es sei denn, dies ist ausdrücklich erlaubt. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten.

Ein Verstoß gegen diese Vorschriften kann schwerwiegende Konsequenzen haben. Insbesondere bei offiziellen Prüfungen kann die Verwendung nicht genehmigter Hilfsmittel zum sofortigen Ausschluss von der Prüfung führen. Bei wiederholten oder besonders schwerwiegenden Fällen kann sogar ein dauerhaftes Prüfungsverbot verhängt werden. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten und die Integrität der Prüfungen gewahrt bleibt.

Dieses Blatt dient dem Zweck der Übung und kann unter bestimmten Bedingungen offiziell eingereicht werden. Gleichzeitig sollte es als inoffizielles Dokument betrachtet werden, da es ohne administrative Aufsicht erstellt wurde.

1. **Korrekte Kennzeichnung** - Das Dokument muss eindeutig als Übungsblatt gekennzeichnet sein.
2. **Vollständigkeit und Formatierung** - Es muss in einem anerkannten Format (z. B. PDF oder gedruckte Kopie) vorliegen und alle erforderlichen Inhalte enthalten.
3. **Fristgerechte Einreichung** - Die Einreichung muss innerhalb der festgelegten Fristen erfolgen.
4. **Genehmigung durch die zuständige Behörde** - Eine offizielle Anerkennung erfordert die Genehmigung der zuständigen Prüfungs- oder Verwaltungsstelle.
5. **Keine externe Hilfe** - Das Dokument muss ausschließlich von der betreffenden Person ohne externe Hilfe erstellt worden sein.
6. **Keine Garantie auf Bewertung** - Da das Blatt ohne administrative Aufsicht erstellt wurde, besteht keine Verpflichtung, es für eine offizielle Bewertung zu berücksichtigen.
7. **Keine Haftung** - Der Autor übernimmt keine Haftung für die Richtigkeit oder Vollständigkeit des Inhalts.
8. **Kein offizieller Status** - Das Dokument ist kein offizielles Dokument und hat nicht denselben rechtlichen Status wie ein offiziell ausgestelltes Dokument.
9. **Keine Garantie auf Anerkennung** - Die Einreichung dieses Dokuments garantiert keine Anerkennung oder offizielle Berücksichtigung durch eine Behörde oder Institution.
10. **Keine Garantie auf Vertraulichkeit** - Der Schutz persönlicher Daten und die Vertraulichkeit können nicht gewährleistet werden.
11. **Keine Garantie auf Sicherheit** - Die Sicherheit des Inhalts und der darin enthaltenen Daten ist nicht gewährleistet.
12. **Keine Garantie auf Authentizität** - Die Authentizität der Informationen oder Daten innerhalb des Dokuments kann nicht bestätigt werden.
13. **Keine Garantie auf Integrität** - Die Authentizität oder Integrität des enthaltenen Inhalts kann nicht sichergestellt werden.
14. **Keine Garantie auf Gültigkeit** - Das Dokument kann Inhalte enthalten, deren rechtliche oder technische Gültigkeit nicht bestätigt werden kann.
15. **Keine Garantie auf Zuverlässigkeit** - Die Genauigkeit, Vollständigkeit oder Zuverlässigkeit der Informationen kann nicht garantiert werden.

Alles beruht auf Vertrauen und daher viel Spaß.

1.1 DE SH-2 No.6P1.1V1.0: Hyperdimensionale Flächendurchlauf-Prozesse und Erreichbarkeitsgraphen

Zeit zur Bearbeitung: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *Ein Original*

Gegeben sei eine Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $|P| = kn$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wobei die Punkte in allgemeiner Lage liegen (d.h. keine $n+1$ Punkte liegen in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene).

Ein Drehdurchlaufprozess funktioniert wie folgt:

- Wähle einen Startpunkt $p_0 \in P$.
- Konstruiere eine $(n-1)$-Hyperfläche (eine ”Drehfläche”) durch diesen Punkt.
- Diese Hyperfläche wird kontinuierlich in festgelegter Weise (z.B. gemäß einer festen Orientierung im Raum) gedreht.
- Sobald ein weiterer Punkt $p_i \in P$ von der Fläche ”berührt” wird (das heißt, sich auf der Fläche befindet), wird p_i zum neuen Ankerpunkt.
- Die Bewegung wird dort fortgesetzt.

1.1.1 Erweiterung

- Zwischen jeder Drehung wird die Orientierung der Fläche mit einer gegebenen Matrix aus $SO(n)$ verändert (d.h. jede Rotation ist durch einen Übergangsoperator festgelegt).
- Zwischenpunktsbeziehungen werden als gerichteter Graph $G = (V, E)$ gespeichert, wobei ein gerichteter Übergang $p_i \to p_j$ besteht, wenn p_j durch eine zulässige Drehung von p_i erreicht wurde.

1.1.2 Aufgaben

1. Beweise oder widerlege: Für bestimmte Punktkonfigurationen (z.B. reguläre Gitter, zufällige Punktwolken, Punkte auf Sphären oder simplizialen Flächen) ist der Erreichbarkeitsgraph stark zusammenhängend.
2. Finde einen allgemeinen Algorithmus, der für beliebiges n und Punktmenge P entscheidet, ob eine vollständige Erreichbarkeit aller Punkte durch den Prozess möglich ist.
3. Untersuche: Wie verändert sich die Erreichbarkeit bei Einführung von Übergangsverzögerungen oder zufälligen Störfaktoren in der Drehung?
4. Formuliere eine Optimierung: Finde einen minimalen Rotationspfad durch alle Punkte, der die Übergangsregeln beachtet.
5. Entwirf eine Visualisierung (in 2D, 3D oder nD-Projektionen), die den Prozess und Graphen dynamisch zeigt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Graphen, Hypergraphen, Flächendurchlauf-Prozesse, Erreichbarkeitsgraphen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.2 DE SH-3 No.7P1.1V1.0: Analyse und Klassifikation von Wellensuperpositionen im gekrümmten Raum

Zeit zur Bearbeitung: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *Ein Original*

Ein gekrümmter Raum $\mathbb{R}^3$ mit einer glatten Metrik $g_{ij}(x, y, z)$, in dem sich eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ ausbreitet. Diese erfüllt die verallgemeinerte Wellengleichung:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|} \partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

mit $|g| = \det(g_{ij})$ und c als lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Aufgaben:

1. Löse (symbolisch oder numerisch) die Wellengleichung im Spezialfall einer sphärisch symmetrischen Metrik:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2$$

mit geeigneten Randbedingungen (z. B. Dirichlet auf einer Kugeloberfläche $r = R$).

2. Zeige, dass sich die Lösung Ψ als Superposition von Eigenfunktionen der Laplace-Beltrami-Operatoren schreiben lässt, und berechne explizit die ersten nichttrivialen Moden.

3. Berechne das Gesamtenergiespektrum durch Integration über den Raum:

$$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] \sqrt{|g|} \, d^3x$$

4. Untersuche numerisch oder analytisch, wie sich die Energie über die Zeit verteilt –insbesondere bei Interferenz von zwei punktförmigen Quellen mit zeitlich phasenverschobener Emission.

5. Optional (Bonus): Modelliere und visualisiere den Effekt eines zeitabhängigen Metrikterms, etwa $g_{ij}(x, t)$, der eine Gravitationswelle simuliert. Untersuche, wie sich die Interferenzstruktur und Energieverteilung verändert.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Analyse, Klassifikation, Wellen, Raumkrümmung

UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 023cf134-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.3 DE SH-4 No.8P1.1V1.0: Stochastische Analyse von Wellenphänomenen mittels Fourier- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Zeit zur Bearbeitung: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *Ein Original*

Untersuchen Sie ein raumzeitlich abhängiges Wellenphänomen unter dem Einfluss eines stochastischen Rauschens. Die Wellenfunktion sei gegeben durch:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

wobei:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ eine deterministische Basiswelle ist,
- $N(x,t,\omega)$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwert 0 und stationärer Kovarianzfunktion ist.

Gegeben:
Ein Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

und bekannter Rauschstärke σ^2 sowie Skalenparameter $\lambda > 0$.

1.3.1 Aufgaben

1. **Modellierung:** Formulieren Sie $N(x,t,\omega)$ als Gauß-Prozess mit obiger Kovarianzfunktion.
2. **Simulation:** Simulieren Sie mehrere Realisierungen von $\Psi(x,t,\omega)$ auf einem Gitter (x_i,t_j) für verschiedene Parameter σ^2 und k.
3. **Statistik:** Berechnen Sie Erwartungswert $E[\Psi(x,t)]$ und Varianz $Var[\Psi(x,t)]$ sowohl analytisch als auch aus den simulierten Daten.
4. **Spektralanalyse:** Führen Sie eine Fourier-Zerlegung von $\Psi(x,t,\omega)$ durch und berechnen Sie die spektrale Energiedichte.
5. **Extremwertstatistik:** Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Maxima im Intervall $[a,b]$ mithilfe von Maximum-Likelihood oder Bayesianischen Methoden.

(Bonus) Rekonstruktion: Trainieren Sie ein neuronales Netz, das aus verrauschten Beobachtungen $\Psi(x,t,\omega)$ die Basiswelle $\psi(x,t)$ rekonstruiert.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: NAM **Stichwörter**: Stochastik, Analyse, Wellenphänomene, Fourier-Transformation, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

The use of aids such as calculators, formula collections, spreadsheets, and digital tools is permitted only under the expressly stated conditions. Permitted aids must be declared in advance for exams and approved by the exam administrator. Any unauthorized aids are prohibited and may result in disqualification. While working on an assignment or exam, it is prohibited to obtain additional materials or external assistance unless expressly permitted. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions.

Violation of these regulations can result in serious consequences. Especially in official assessments, the use of unauthorized aids can lead to immediate exclusion from the exam. In repeated or particularly serious cases, a permanent ban from the exam may even be imposed. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions and that the integrity of the assessments is maintained.

This sheet serves the purpose of the exercise and can be submitted officially but under certain conditions. At the same time, it should be considered an unofficial document, as it was processed without administrative supervision.

1. **Correct labeling** - The document must be clearly marked as an exercise sheet.
2. **Completeness and formatting** - It must be in a recognized format (e.g., PDF or printed copy) and contain all required content.
3. **Timely submission** - Submission must be made within the specified deadlines.
4. **Approval by the responsible authority** - Official recognition requires the approval of the relevant examining or administrative unit.
5. **No outside assistance** - The document must have been completed exclusively by the relevant individual without outside assistance.
6. **No guarantee of grade** - Since the sheet was created without administrative oversight, there is no obligation to consider it for official grading.
7. **No liability** - The author assumes no liability for the correctness or completeness of the content.
8. **No official status** - The document is not an official document and does not have the same legal status as an officially issued document.
9. **No guarantee of recognition** - Submission of this document does not guarantee recognition or official consideration by any authority or institution.
10. **No guarantee of confidentiality** - Protection of personal data and confidentiality cannot be guaranteed.
11. **No guarantee of security** - The security of the content and the data contained therein is not guaranteed.
12. **No guarantee of authenticity** - The authenticity of the information or data within the document cannot be confirmed.
13. **No guarantee of integrity** - The authenticity or integrity of the content contained therein cannot be assured.
14. **No guarantee of validity** - The document may contain content whose legal or technical validity cannot be confirmed.
15. **No guarantee of reliability** - The accuracy, completeness, or reliability of the information cannot be guaranteed.

Everything is based on trust and so, have fun.

2.1 *EN SH-2 No.6P1.1V1.0: Hyperdimensional surface traversal processes and reachability graphs*

Estimated time for solving: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *An Original*

Given a point set $P \subset \mathbb{R}^n$ with $|P| = kn$ for some $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, where the points are in general position (i.e., no $n+1$ points lie in an $(n-1)$-dimensional hyperplane).

A rotation traversal process works as follows:

- Choose a starting point $p_0 \in P$.
- Construct an $(n-1)$-hypersurface (a ”surface of revolution”) through this point.
- This hypersurface is continuously rotated in a fixed manner (e.g., according to a fixed orientation in space).
- As soon as another point $p_i \in P$ is ”touched” by the surface (i.e., is located on the surface), p_i becomes the new anchor point.
- The movement continues from there.

2.1.1 *Extension*

- Between each rotation, the orientation of the surface is changed using a given matrix of $SO(n)$ (i.e., each rotation is specified by a transition operator).
- Interpoint relationships are stored as a directed graph $G = (V, E)$, where a directed transition $p_i \to p_j$ exists if p_j was reached by a feasible rotation of p_i.

2.1.2 *Exercises*

1. Prove or disprove: For certain point configurations (e.g., regular grids, random point clouds, points on spheres, or simplicial surfaces), the reachability graph is strongly connected.
2. Find a general algorithm that, for any n and point set P, decides whether complete reachability of all points is possible through the process.
3. Investigate: How does reachability change when transition delays or random perturbations are introduced into the rotation?
4. Formulate an optimization: Find a minimal rotation path through all points that respects the transition rules.
5. Design a visualization (in 2D, 3D, or nD projections) that dynamically shows the process and graph.

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Graphs, Hypergraphs, Surface traversal processes, Reachability graphs

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 19999942-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.2 EN SH-3 No.7P1.1V1.0: Analysis and classification of wave superpositions in curved space

Estimated time for solving: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *An Original*

A curved space $\mathbb{R}^3$ with a smooth metric $g_{ij}(x,y,z)$, in which a wave function $\Psi(x,y,z,t)$ propagates. This satisfies the generalized wave equation:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|}\partial_i\left(|g|g^{ij}\partial_j\Psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

with $|g| = \det(g_{ij})$ and c as the local propagation velocity.

Tasks:

1. Solve (symbolically or numerically) the wave equation in the special case of a spherically symmetric metric:

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2$$

   with suitable boundary conditions (e.g., Dirichlet on a spherical surface $r = R$).

2. Show that the solution Ψ can be written as a superposition of eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators and explicitly calculate the first nontrivial modes.

3. Calculate the total energy spectrum by integrating over space:

   $$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right]\sqrt{|g|}\, d^3x$$

4. Investigate numerically or analytically how the energy is distributed over time –especially in the case of interference between two point sources with phase-shifted emission.

5. Optional (Bonus): Model and visualize the effect of a time-dependent metric term, such as $g_{ij}(x,t)$, simulating a gravitational wave. Investigate how the interference structure and energy distribution change.

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Analysis, Classification, Waves, Curvature of space

UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 02398437-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.3 *EN SH-4 No.8P1.1V1.0: Stochastic analysis of wave phenomena using Fourier and probability density functions*

Estimated time for solving: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *An Original*

Investigate a spatiotemporally dependent wave phenomenon under the influence of stochastic noise. Let the wave function be given by:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

where:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ is a deterministic base wave,
- $N(x,t,\omega)$ is a Gaussian process with mean 0 and stationary covariance function.

Given:
A Gaussian process with a covariance function:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

and a known noise level σ^2 and scale parameter $\lambda > 0$.

2.3.1 *Exercises*

1. **Modeling:** Formulate $N(x,t,\omega)$ as a Gaussian process with the above covariance function.
2. **Simulation:** Simulate several realizations of $\Psi(x,t,\omega)$ on a grid (x_i,t_j) for different parameters σ^2 and k.
3. **Statistics:** Calculate the expected value $E[\Psi(x,t)]$ and the variance $Var[\Psi(x,t)]$ both analytically and from the simulated data.
4. **Spectral Analysis:** Perform a Fourier decomposition of $\Psi(x,t,\omega)$ and calculate the spectral energy density.
5. **Extreme Value Statistics:** Estimate the probability distribution of the maxima in the interval $[a,b]$ using maximum likelihood or Bayesian methods.

(Bonus) Reconstruction: Train a neural network that reconstructs the base wave $\psi(x,t)$ from noisy observations $\Psi(x,t,\omega)$.

Category: Shoemei **Difficulty**: NAM **Tags**: Stochastic, Analysis, Wave phenomena, Fourier transformation, Probability density functions

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

3.1 DE SH-2 No.6P1.1V1.0: Hyperdimensionale Flächendurchlauf-Prozesse und Erreichbarkeitsgraphen

Zeit zur Bearbeitung: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *Ein Original*

Gegeben sei eine Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $|P| = kn$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wobei die Punkte in allgemeiner Lage liegen (d.h. keine $n+1$ Punkte liegen in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene).

Ein Drehdurchlaufprozess funktioniert wie folgt:

- Wähle einen Startpunkt $p_0 \in P$.
- Konstruiere eine $(n-1)$-Hyperfläche (eine "Drehfläche") durch diesen Punkt.
- Diese Hyperfläche wird kontinuierlich in festgelegter Weise (z.B. gemäß einer festen Orientierung im Raum) gedreht.
- Sobald ein weiterer Punkt $p_i \in P$ von der Fläche "berührt" wird (das heißt, sich auf der Fläche befindet), wird p_i zum neuen Ankerpunkt.
- Die Bewegung wird dort fortgesetzt.

3.1.1 Erweiterung

- Zwischen jeder Drehung wird die Orientierung der Fläche mit einer gegebenen Matrix aus $SO(n)$ verändert (d.h. jede Rotation ist durch einen Übergangsoperator festgelegt).
- Zwischenpunktsbeziehungen werden als gerichteter Graph $G = (V, E)$ gespeichert, wobei ein gerichteter Übergang $p_i \to p_j$ besteht, wenn p_j durch eine zulässige Drehung von p_i erreicht wurde.

3.1.2 Aufgaben

1. Beweise oder widerlege: Für bestimmte Punktkonfigurationen (z.B. reguläre Gitter, zufällige Punktwolken, Punkte auf Sphären oder simplizialen Flächen) ist der Erreichbarkeitsgraph stark zusammenhängend.
2. Finde einen allgemeinen Algorithmus, der für beliebiges n und Punktmenge P entscheidet, ob eine vollständige Erreichbarkeit aller Punkte durch den Prozess möglich ist.
3. Untersuche: Wie verändert sich die Erreichbarkeit bei Einführung von Übergangsverzögerungen oder zufälligen Störfaktoren in der Drehung?
4. Formuliere eine Optimierung: Finde einen minimalen Rotationspfad durch alle Punkte, der die Übergangsregeln beachtet.
5. Entwirf eine Visualisierung (in 2D, 3D oder nD-Projektionen), die den Prozess und Graphen dynamisch zeigt.

3.1.3 Solution

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Graphen, Hypergraphen, Flächendurchlauf-Prozesse, Erreichbarkeitsgraphen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

3.2 DE SH-3 No.7P1.1V1.0: Analyse und Klassifikation von Wellensuperpositionen im gekrümmten Raum

Zeit zur Bearbeitung: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *Ein Original*

Ein gekrümmter Raum $\mathbb{R}^3$ mit einer glatten Metrik $g_{ij}(x, y, z)$, in dem sich eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ ausbreitet. Diese erfüllt die verallgemeinerte Wellengleichung:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|}\partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

mit $|g| = \det(g_{ij})$ und c als lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Aufgaben:

1. Löse (symbolisch oder numerisch) die Wellengleichung im Spezialfall einer sphärisch symmetrischen Metrik:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

   mit geeigneten Randbedingungen (z. B. Dirichlet auf einer Kugeloberfläche $r = R$).

2. Zeige, dass sich die Lösung Ψ als Superposition von Eigenfunktionen der Laplace-Beltrami-Operatoren schreiben lässt, und berechne explizit die ersten nichttrivialen Moden.

3. Berechne das Gesamtenergiespektrum durch Integration über den Raum:

$$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right] \sqrt{|g|}\, d^3x$$

4. Untersuche numerisch oder analytisch, wie sich die Energie über die Zeit verteilt –insbesondere bei Interferenz von zwei punktförmigen Quellen mit zeitlich phasenverschobener Emission.

5. Optional (Bonus): Modelliere und visualisiere den Effekt eines zeitabhängigen Metrikterms, etwa $g_{ij}(x, t)$, der eine Gravitationswelle simuliert. Untersuche, wie sich die Interferenzstruktur und Energieverteilung verändert.

3.2.1 Solution

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Analyse, Klassifikation, Wellen, Raumkrümmung

UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 023cf134-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

3.3 DE SH-4 No.8P1.1V1.0: Stochastische Analyse von Wellenphänomenen mittels Fourier- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Zeit zur Bearbeitung: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *Ein Original*

Untersuchen Sie ein raumzeitlich abhängiges Wellenphänomen unter dem Einfluss eines stochastischen Rauschens. Die Wellenfunktion sei gegeben durch:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

wobei:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ eine deterministische Basiswelle ist,
- $N(x,t,\omega)$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwert 0 und stationärer Kovarianzfunktion ist.

Gegeben:

Ein Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

und bekannter Rauschstärke σ^2 sowie Skalenparameter $\lambda > 0$.

3.3.1 Aufgaben

1. **Modellierung:** Formulieren Sie $N(x,t,\omega)$ als Gauß-Prozess mit obiger Kovarianzfunktion.
2. **Simulation:** Simulieren Sie mehrere Realisierungen von $\Psi(x,t,\omega)$ auf einem Gitter (x_i,t_j) für verschiedene Parameter σ^2 und k.
3. **Statistik:** Berechnen Sie Erwartungswert $E[\Psi(x,t)]$ und Varianz $Var[\Psi(x,t)]$ sowohl analytisch als auch aus den simulierten Daten.
4. **Spektralanalyse:** Führen Sie eine Fourier-Zerlegung von $\Psi(x,t,\omega)$ durch und berechnen Sie die spektrale Energiedichte.
5. **Extremwertstatistik:** Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Maxima im Intervall $[a,b]$ mithilfe von Maximum-Likelihood oder Bayesianischen Methoden.

(Bonus) Rekonstruktion: Trainieren Sie ein neuronales Netz, das aus verrauschten Beobachtungen $\Psi(x,t,\omega)$ die Basiswelle $\psi(x,t)$ rekonstruiert.

3.3.2 Solution

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: NAM **Stichwörter**: Stochastik, Analyse, Wellenphänomene, Fourier-Transformation, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

4 Solution

4.1 EN SH-2 No.6P1.1V1.0: Hyperdimensional surface traversal processes and reachability graphs

Estimated time for solving: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *An Original*

Given a point set $P \subset \mathbb{R}^n$ with $|P| = kn$ for some $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, where the points are in general position (i.e., no $n+1$ points lie in an $(n-1)$-dimensional hyperplane).

A rotation traversal process works as follows:

- Choose a starting point $p_0 \in P$.
- Construct an $(n-1)$-hypersurface (a ”surface of revolution”) through this point.
- This hypersurface is continuously rotated in a fixed manner (e.g., according to a fixed orientation in space).
- As soon as another point $p_i \in P$ is ”touched” by the surface (i.e., is located on the surface), p_i becomes the new anchor point.
- The movement continues from there.

4.1.1 Extension

- Between each rotation, the orientation of the surface is changed using a given matrix of $SO(n)$ (i.e., each rotation is specified by a transition operator).
- Interpoint relationships are stored as a directed graph $G = (V, E)$, where a directed transition $p_i \to p_j$ exists if p_j was reached by a feasible rotation of p_i.

4.1.2 Exercises

1. Prove or disprove: For certain point configurations (e.g., regular grids, random point clouds, points on spheres, or simplicial surfaces), the reachability graph is strongly connected.
2. Find a general algorithm that, for any n and point set P, decides whether complete reachability of all points is possible through the process.
3. Investigate: How does reachability change when transition delays or random perturbations are introduced into the rotation?
4. Formulate an optimization: Find a minimal rotation path through all points that respects the transition rules.
5. Design a visualization (in 2D, 3D, or nD projections) that dynamically shows the process and graph.

4.1.3 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Graphs, Hypergraphs, Surface traversal processes, Reachability graphs

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 19999942-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

4.2 EN SH-3 No.7P1.1V1.0: Analysis and classification of wave superpositions in curved space

Estimated time for solving: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *An Original*

A curved space $\mathbb{R}^3$ with a smooth metric $g_{ij}(x, y, z)$, in which a wave function $\Psi(x, y, z, t)$ propagates. This satisfies the generalized wave equation:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|}\partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

with $|g| = \det(g_{ij})$ and c as the local propagation velocity.

Tasks:

1. Solve (symbolically or numerically) the wave equation in the special case of a spherically symmetric metric:

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

   with suitable boundary conditions (e.g., Dirichlet on a spherical surface $r = R$).

2. Show that the solution Ψ can be written as a superposition of eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators and explicitly calculate the first nontrivial modes.

3. Calculate the total energy spectrum by integrating over space:

   $$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right] \sqrt{|g|}\, d^3x$$

4. Investigate numerically or analytically how the energy is distributed over time –especially in the case of interference between two point sources with phase-shifted emission.

5. Optional (Bonus): Model and visualize the effect of a time-dependent metric term, such as $g_{ij}(x, t)$, simulating a gravitational wave. Investigate how the interference structure and energy distribution change.

4.2.1 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Analysis, Classification, Waves, Curvature of space

UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 02398437-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

4.3 EN SH-4 No.8P1.1V1.0: Stochastic analysis of wave phenomena using Fourier and probability density functions

Estimated time for solving: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *An Original*

Investigate a spatiotemporally dependent wave phenomenon under the influence of stochastic noise. Let the wave function be given by:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

where:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ is a deterministic base wave,
- $N(x,t,\omega)$ is a Gaussian process with mean 0 and stationary covariance function.

Given:
A Gaussian process with a covariance function:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

and a known noise level σ^2 and scale parameter $\lambda > 0$.

4.3.1 Exercises

1. **Modeling:** Formulate $N(x,t,\omega)$ as a Gaussian process with the above covariance function.
2. **Simulation:** Simulate several realizations of $\Psi(x,t,\omega)$ on a grid (x_i,t_j) for different parameters σ^2 and k.
3. **Statistics:** Calculate the expected value $E[\Psi(x,t)]$ and the variance $Var[\Psi(x,t)]$ both analytically and from the simulated data.
4. **Spectral Analysis:** Perform a Fourier decomposition of $\Psi(x,t,\omega)$ and calculate the spectral energy density.
5. **Extreme Value Statistics:** Estimate the probability distribution of the maxima in the interval $[a,b]$ using maximum likelihood or Bayesian methods.

(Bonus) Reconstruction: Train a neural network that reconstructs the base wave $\psi(x,t)$ from noisy observations $\Psi(x,t,\omega)$.

4.3.2 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: NAM **Tags**: Stochastic, Analysis, Wave phenomena, Fourier transformation, Probability density functions

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025