Solution: The Namische /ˈnamɪʃə/ Collection as a whole

Paper ID: PALL *on May 29, 2025 – 24.04.2025 in Frankfurt* Version 1.0 Revision 5

Archive-ID: 3891M-932 DOI: 11.NOT.AVAILABLE

Duy Nam Schlitz[a*]

[a] *Department of ISAC for Competition, duynamschlitzresearch@gmail.com*

[*] *Corresponding Author*

Abstract

This collection presents a diverse set of mathematical problems spanning various fields, including number theory, combinatorics, computational logic, and high-dimensional geometry. Designed for advanced learners, the exercises explore fundamental and complex concepts such as recursive polynomial structures, hypergraph theory, quantum field interference models, and formal computability through Turing machines. Additionally, the collection integrates practical applications like Fourier analysis, stochastic wave phenomena, and optimization techniques. Each problem offers an opportunity for theoretical inquiry and applied problem-solving, ensuring a comprehensive exploration of mathematical principles.
Exercise: No.1, No.10, No.14, No.15, No.16, No.17, No.23, No.24, No.25, No.4-1, No.4-2, No.4-3, No.4-4, No.5, No.6, No.7, No.8, No.9, Test.1, Test.2, Test.3, Total time: De: 538 h 25 min, En: 538 h 25 min, Fr: 168 h 5 min, Jp: 168 h 0 min, Kr: 93 h 0 min, Zh: 41 h 0 min

Contents

Categories: induction sum odd numbers natural numbers

1 Einführung und Informationen: 538 h 25 min

Die Verwendung von Hilfsmitteln wie Taschenrechnern, Formelsammlungen, Tabellenkalkulationen und digitalen Werkzeugen ist nur unter den ausdrücklich angegebenen Bedingungen gestattet. Zulässige Hilfsmittel müssen im Voraus für Prüfungen deklariert und von der Prüfungsaufsicht genehmigt werden. Jegliche nicht genehmigten Hilfsmittel sind verboten und können zur Disqualifikation führen. Während der Bearbeitung einer Aufgabe oder Prüfung ist es untersagt, zusätzliche Materialien oder externe Hilfe in Anspruch zu nehmen, es sei denn, dies ist ausdrücklich erlaubt. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten. Ab einen Nam-Score von 3 dürfen alle Teilnehmende alle möglichen Hilfsmittel nutzen.

Ein Verstoß gegen diese Vorschriften kann schwerwiegende Konsequenzen haben. Insbesondere bei offiziellen Prüfungen kann die Verwendung nicht genehmigter Hilfsmittel zum sofortigen Ausschluss von der Prüfung führen. Bei wiederholten oder besonders schwerwiegenden Fällen kann sogar ein dauerhaftes Prüfungsverbot verhängt werden. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten und die Integrität der Prüfungen gewahrt bleibt.

Dieses Blatt dient dem Zweck der Übung und kann unter bestimmten Bedingungen offiziell eingereicht werden. Gleichzeitig sollte es als inoffizielles Dokument betrachtet werden, da es ohne administrative Aufsicht erstellt wurde.

1. **Korrekte Kennzeichnung** - Das Dokument muss eindeutig als Übungsblatt gekennzeichnet sein.
2. **Vollständigkeit und Formatierung** - Es muss in einem anerkannten Format (z. B. PDF oder gedruckte Kopie) vorliegen und alle erforderlichen Inhalte enthalten.
3. **Fristgerechte Einreichung** - Die Einreichung muss innerhalb der festgelegten Fristen erfolgen.
4. **Genehmigung durch die zuständige Behörde** - Eine offizielle Anerkennung erfordert die Genehmigung der zuständigen Prüfungs- oder Verwaltungsstelle.
5. **Keine externe Hilfe** - Das Dokument muss ausschließlich von der betreffenden Person ohne externe Hilfe erstellt worden sein.
6. **Keine Garantie auf Bewertung** - Da das Blatt ohne administrative Aufsicht erstellt wurde, besteht keine Verpflichtung, es für eine offizielle Bewertung zu berücksichtigen.
7. **Keine Haftung** - Der Autor übernimmt keine Haftung für die Richtigkeit oder Vollständigkeit des Inhalts.
8. **Kein offizieller Status** - Das Dokument ist kein offizielles Dokument und hat nicht denselben rechtlichen Status wie ein offiziell ausgestelltes Dokument.
9. **Keine Garantie auf Anerkennung** - Die Einreichung dieses Dokuments garantiert keine Anerkennung oder offizielle Berücksichtigung durch eine Behörde oder Institution.
10. **Keine Garantie auf Vertraulichkeit** - Der Schutz persönlicher Daten und die Vertraulichkeit können nicht gewährleistet werden.
11. **Keine Garantie auf Sicherheit** - Die Sicherheit des Inhalts und der darin enthaltenen Daten ist nicht gewährleistet.
12. **Keine Garantie auf Authentizität** - Die Authentizität der Informationen oder Daten innerhalb des Dokuments kann nicht bestätigt werden.
13. **Keine Garantie auf Integrität** - Die Authentizität oder Integrität des enthaltenen Inhalts kann nicht sichergestellt werden.
14. **Keine Garantie auf Gültigkeit** - Das Dokument kann Inhalte enthalten, deren rechtliche oder technische Gültigkeit nicht bestätigt werden kann.
15. **Keine Garantie auf Zuverlässigkeit** - Die Genauigkeit, Vollständigkeit oder Zuverlässigkeit der Informationen kann nicht garantiert werden.

Alles beruht auf Vertrauen und daher viel Spaß.

1.1 DE SH-1 No.1PALLV1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Zeit zur Bearbeitung: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Ein Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Einfach **Stichwörter**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.2 DE SKK-1 No.4-1PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.2.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n-1)$-Hyperfläche.

1.2.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.3 DE SKK-1/2 No.4-2PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

1.3.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

1.3.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.4 DE SKK-1/3 No.4-3PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3

Zeit zur Bearbeitung: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.4.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$-Hyperfläche.

1.4.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.5 DE SKK-1/4 No.4-4PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

Zeit zur Bearbeitung: 10 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

1.5.1 Aufgabe

Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.6 DE SKT-1 No.5PALLV1.0: Abstände im n-dimensionalen Raum

Zeit zur Bearbeitung: 50 min *Nam-Score: 1.2* *Ein Original*

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der i-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Stelle die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **($n-1$)-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f am 19.04.2025

1.7 DE SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensionale Flächendurchlauf-Prozesse und Erreichbarkeitsgraphen

Zeit zur Bearbeitung: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2 Ein Original*

Gegeben sei eine Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $|P| = kn$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wobei die Punkte in allgemeiner Lage liegen (d.h. keine $n+1$ Punkte liegen in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene).

Ein Drehdurchlaufprozess funktioniert wie folgt:

- Wähle einen Startpunkt $p_0 \in P$.
- Konstruiere eine $(n-1)$-Hyperfläche (eine "Drehfläche") durch diesen Punkt.
- Diese Hyperfläche wird kontinuierlich in festgelegter Weise (z.B. gemäß einer festen Orientierung im Raum) gedreht.
- Sobald ein weiterer Punkt $p_i \in P$ von der Fläche "berührt" wird (das heißt, sich auf der Fläche befindet), wird p_i zum neuen Ankerpunkt.
- Die Bewegung wird dort fortgesetzt.

1.7.1 Erweiterung

- Zwischen jeder Drehung wird die Orientierung der Fläche mit einer gegebenen Matrix aus $SO(n)$ verändert (d.h. jede Rotation ist durch einen Übergangsoperator festgelegt).
- Zwischenpunktsbeziehungen werden als gerichteter Graph $G = (V, E)$ gespeichert, wobei ein gerichteter Übergang $p_i \to p_j$ besteht, wenn p_j durch eine zulässige Drehung von p_i erreicht wurde.

1.7.2 Aufgaben

1. Beweise oder widerlege: Für bestimmte Punktkonfigurationen (z.B. reguläre Gitter, zufällige Punktwolken, Punkte auf Sphären oder simplizialen Flächen) ist der Erreichbarkeitsgraph stark zusammenhängend.
2. Finde einen allgemeinen Algorithmus, der für beliebiges n und Punktmenge P entscheidet, ob eine vollständige Erreichbarkeit aller Punkte durch den Prozess möglich ist.
3. Untersuche: Wie verändert sich die Erreichbarkeit bei Einführung von Übergangsverzögerungen oder zufälligen Störfaktoren in der Drehung?
4. Formuliere eine Optimierung: Finde einen minimalen Rotationspfad durch alle Punkte, der die Übergangsregeln beachtet.
5. Entwirf eine Visualisierung (in 2D, 3D oder nD-Projektionen), die den Prozess und Graphen dynamisch zeigt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Graphen, Hypergraphen, Flächendurchlauf-Prozesse, Erreichbarkeitsgraphen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.8 DE SH-3 No.7PALLV1.0: Analyse und Klassifikation von Wellensuperpositionen im gekrümmten Raum

Zeit zur Bearbeitung: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *Ein Original*

Ein gekrümmter Raum $\mathbb{R}^3$ mit einer glatten Metrik $g_{ij}(x, y, z)$, in dem sich eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ ausbreitet. Diese erfüllt die verallgemeinerte Wellengleichung:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|}\partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

1

mit $|g| = \det(g_{ij})$ und c als lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Aufgaben:

1. Löse (symbolisch oder numerisch) die Wellengleichung im Spezialfall einer sphärisch symmetrischen Metrik:

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

   mit geeigneten Randbedingungen (z. B. Dirichlet auf einer Kugeloberfläche $r = R$).

2. Zeige, dass sich die Lösung Ψ als Superposition von Eigenfunktionen der Laplace-Beltrami-Operatoren schreiben lässt, und berechne explizit die ersten nichttrivialen Moden.

3. Berechne das Gesamtenergiespektrum durch Integration über den Raum:

   $$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right] \sqrt{|g|}\, d^3x$$

4. Untersuche numerisch oder analytisch, wie sich die Energie über die Zeit verteilt –insbesondere bei Interferenz von zwei punktförmigen Quellen mit zeitlich phasenverschobener Emission.

5. Optional (Bonus): Modelliere und visualisiere den Effekt eines zeitabhängigen Metrikterms, etwa $g_{ij}(x, t)$, der eine Gravitationswelle simuliert. Untersuche, wie sich die Interferenzstruktur und Energieverteilung verändert.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Analyse, Klassifikation, Wellen, Raumkrümmung
UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 023cf134-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.9 DE SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastische Analyse von Wellenphänomenen mittels Fourier- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Zeit zur Bearbeitung: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *Ein Original*

Untersuchen Sie ein raumzeitlich abhängiges Wellenphänomen unter dem Einfluss eines stochastischen Rauschens. Die Wellenfunktion sei gegeben durch:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

wobei:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ eine deterministische Basiswelle ist,
- $N(x,t,\omega)$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwert 0 und stationärer Kovarianzfunktion ist.

Gegeben:
Ein Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

und bekannter Rauschstärke σ^2 sowie Skalenparameter $\lambda > 0$.

1.9.1 Aufgaben

1. **Modellierung:** Formulieren Sie $N(x,t,\omega)$ als Gauß-Prozess mit obiger Kovarianzfunktion.
2. **Simulation:** Simulieren Sie mehrere Realisierungen von $\Psi(x,t,\omega)$ auf einem Gitter (x_i,t_j) für verschiedene Parameter σ^2 und k.
3. **Statistik:** Berechnen Sie Erwartungswert $E[\Psi(x,t)]$ und Varianz $Var[\Psi(x,t)]$ sowohl analytisch als auch aus den simulierten Daten.
4. **Spektralanalyse:** Führen Sie eine Fourier-Zerlegung von $\Psi(x,t,\omega)$ durch und berechnen Sie die spektrale Energiedichte.
5. **Extremwertstatistik:** Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Maxima im Intervall $[a,b]$ mithilfe von Maximum-Likelihood oder Bayesianischen Methoden.

(Bonus) **Rekonstruktion:** Trainieren Sie ein neuronales Netz, das aus verrauschten Beobachtungen $\Psi(x,t,\omega)$ die Basiswelle $\psi(x,t)$ rekonstruiert.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: NAM **Stichwörter**: Stochastik, Analyse, Wellenphänomene, Fourier-Transformation, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.10 DE SH-5 Test.1PALLV1.0: Zahlentheorie −Diophantische Gleichungen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *Ein Original*

Finde alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Diophantischen Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Erkläre deinen Lösungsweg und bestimme alle möglichen Werte für x und y, die diese Gleichung erfüllen. Diskutiere, wie man diese Art von Gleichung im Allgemeinen angehen kann.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Einfach **Stichwörter**: Zahlentheorie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763736 am 29.04.2025

1.11 DE SH-6 Test.2PALLV1.0: Kombinatorik –Anordnungen und Permutationen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Wie viele verschiedene Wege gibt es, 5 verschiedene Bücher auf 3 Regalen anzuordnen, wenn auf jedem Regal mindestens ein Buch platziert werden muss und die Regale keine unendliche Kapazität haben? Erkläre den Lösungsweg unter Verwendung der Prinzipien der Inklusion und Exklusion.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Kombinatorik

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561273 am 29.04.2025

1.12 DE SH-7 Test.3PALLV1.0: Geometrie −Kreisgeometrie und Tangenten

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $r = 10$. Ein Punkt P liegt außerhalb des Kreises und hat einen Abstand von $OP = 17$. Bestimmen Sie die Länge der Tangente von P an den Kreis und erläutern Sie die Berechnung mithilfe des Satzes des Pythagoras.

Erklären Sie, warum die Länge der Tangente nur von der Differenz zwischen den Abständen zwischen Punkt und Mittelpunkt und dem Radius des Kreises abhängt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Geometrie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-198257198275 am 29.04.2025

1.13 DE SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta-Kombination durch Fouriertransformationen

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *Ein Original*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine glatte, rasch fallende Funktion (d. h. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), sodass für ihre Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx$$

folgende Identität gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Beweise mit Hilfe der Poissonschen Summenformel, dass die obige Gleichung unter geeigneten Bedingungen erfüllt ist.
2. Zeige, dass mit geeigneter Wahl von $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ für $\Re(s) > 1$, sich Aussagen über die analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion ableiten lassen.
3. Untersuche, wie die Beziehung in höhere Dimensionen erweitert werden kann (Fourier auf dem $\mathbb{R}^n$) und welche Rolle dabei die symmetrische Struktur in der Zeta-Analyse spielt.
4. Betrachte die Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

und zeige, dass sie sich als eine Art Fourierreihe der Zeta-Funktion interpretieren lässt. Leite eine Darstellung in Abhängigkeit von $\hat{f}$ her.

1.13.1 Hinweise

- Verwende die Poisson-Summenformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Nutze Eigenschaften der Mellin-Transformation für Teilaufgaben zu $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Beachte: Diese Aufgabe verlangt ein Verständnis für komplexe Analysis, Distributionentheorie, Fouriertransformation und spezielle Funktionen.

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Zeta-Kombination, Fouriertransformationen, Zeta-Funktion

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-239238527383 am 03.05.2025

1.14 DE SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximale Schnitte in k-uniformen Hypergraphen

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben sei ein k-uniformer Hypergraph $H = (V, E)$, d. h. jeder Hyperrand $e \in E$ verbindet genau k Knoten aus der Knotenmenge V. Definiere einen **Schnitt** als eine Partition von V in zwei disjunkte Teilmengen $V_1 \cup V_2 = V$, wobei ein Hyperrand **geschnitten** ist, wenn er Knoten aus beiden Teilen enthält.

Zeige oder widerlege:

Für jedes $k \geq 2$ existiert eine Partition von V in zwei Mengen, sodass mindestens $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) |E|$ Hyperkanten geschnitten werden.

Zusatz: Wie ändert sich die untere Schranke bei zufälliger Partition?

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-230587091872 am 03.05.2025

1.15 DE KTB-1 No.14PALLV1.0: Optimale Komplexität eines adaptiven Primalitätsverfahrens

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *Ein Original*

Problemstellung

Ein adaptiver Primalitätstest ist ein Algorithmus, der bei der Prüfung einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ auf Primzahl-Eigenschaft schrittweise zwischen probabilistischen und deterministischen Verfahren entscheidet. Beispiele sind Miller-Rabin, Baillie-PSW oder AKS.

Entwickle und analysiere ein adaptives Primalitätsverfahren mit folgender Eigenschaft:

- Der Algorithmus startet mit einem probabilistischen Test (z. B. Miller-Rabin).
- Falls dieser Test mehrfach „bestanden“wird, führt das System bei Grenzfällen einen deterministischen Subtest durch (z. B. Lucas, ECPP, oder reduzierte AKS-Stufe).
- Die Gesamtkomplexität des Verfahrens ist abhängig von der Größe von n sowie von der angenommenen Fehlerwahrscheinlichkeit ε. Aufgabe: Finde eine asymptotisch optimale Kombination solcher Verfahren (mit Beweis) und berechne die minimale erwartete Laufzeit für die Entscheidung „prim“vs. „nicht prim“unter Annahme realistischer Verteilungen zufällig gewählter Zahlen $n \in [1, N]$. **Ziel:**
- Analysiere das Modell der **Fehlerkontrollierten adaptiven Komplexität**.
- Entwickle eine Funktionsklasse $T(n, \varepsilon)$, die die Laufzeit (im Erwartungswert) des optimalen Verfahrens beschreibt.
- Vergleiche deine Lösung mit bekannten Verfahren wie Miller-Rabin (mehrfach), Baillie-PSW und deterministischem AKS.

Kategorie: Kaiketsu und Toku, Bunseki, Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Schwer **Stichwörter**:

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209843782653 am 11.05.2025

1.16 *DE SHB-3 No.15PALLV1.0: Lösungsstruktur verallgemeinerter rekursiver Polynome*

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben ist eine rekursive Definition:

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

mit Startwerten $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ und $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$
Analysiere:

- Bedingungen für geschlossene Form
- Struktur der Nullstellen
- Zusammenhang mit klassischen Polynomen (z. B. Tschebyscheff-, Legendre-, Hermite-Polynome)

1.16.1 *Lösungsstruktur (Allgemeine Schritte)*

1.16.2 *1. **Analyse der Rekursion***

- Bestimme den Rekursionsgrad k
- Klassifiziere die Koeffizienten $a_i(x)$
  - Konstant? Linear? Allgemeines Polynom?

1.16.3 *2. **Charakteristisches Polynom***

- Führe eine Transformation analog zur linearen Rekursion ein:
  - Betrachte ggf. lineare Unabhängigkeit der Basis $P_0, \ldots, P_k$
- Finde Lösung über charakteristisches Polynom (bei konstanten a_i)

1.16.4 *3. **Darstellung über Matrixmethoden***

- Schreibe die Rekursion als Matrixsystem:

  $$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

  mit Vektor $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$
- Untersuche Eigenwerte und Eigenvektoren von $A(x)$

1.16.5 *4. **Vergleich mit bekannten Familien***

- Überprüfe, ob sich das Polynom in einer bekannten Klasse (orthogonal, symmetrisch etc.) einordnen lässt.

1.16.6 *5. **Nullstellenstruktur***

- Verwende numerische Verfahren zur Analyse der Nullstellen
- Untersuche Konvergenzverhalten (z. B. bei $n \to \infty$)

1.16.7 *6. **Symbolische Lösung (falls möglich)***

- Suche geschlossene Formen (z. B. durch Generating Functions, Umformung zu Differentialgleichungen)
- Finde explizite Darstellung über Basisfunktionen oder kombinatorische Strukturen

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Schwer **Stichwörter**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 02d58e48-ddcb-4401-869a-c8e8a463a653 am 11.05.2025

1.17 DE SHKS-1 No.16PALLV1.0: Turing-Maschine mit beschränktem Gedächtnis −Korrektheitsbeweis

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *Ein Original*

Gegeben sei eine Turing-Maschine M_b, deren Arbeitsband auf $O(\log n)$ Speicherzellen beschränkt ist. Zeige, dass M_b korrekt eine bestimmte Sprache L entscheidet, z. B.:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

oder eine andere spezifische Sprache, bei der Speicherbeschränkung relevant ist.

1.17.1 Additionale Information

- Definitionen von Turingmaschinen (TM) und beschränkter Speicher (z. B. logarithmischer Platz)
- Formale Modelle wie LBA (Linear Bounded Automata)
- Vergleich mit regulären oder kontextfreien Sprachen
- Boolesche Logik & Invariantenmethoden
- Standard-Logikbeweise (z. B. Induktion, Widerspruch)
- Skizzen auf Papier oder Notizzettel

1.17.2 Anforderungen

1.17.3 ***1. Formale Spezifikation***

- Definiere die beschränkte TM M_b formal:
  - $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Begrenzung: Arbeitsbandgröße $\leq c \cdot \log n$

1.17.4 ***2. Sprache L beschreiben***

- Beweise, dass $L \in \mathsf{L}$ (entscheidbar mit logarithmischem Platz)
- Beispiele:
  - Ausgewogene Anzahl von Symbolen (z. B. gleiche Anzahl a und b)
- Erkennung einfacher regulärer Muster mit Platzoptimierung

1.17.5 ***3. Konstruktion/Simulation***

- Beschreibe die Strategie der TM mit wenig Speicher:
  - Lesezeichen (Pointer-Technik)
- Zwei-Pass-Verfahren
  - Zähler in Binärdarstellung auf Arbeitsband

1.17.6 ***4. Korrektheit***

- Verwende Invarianz oder Simulation:
  - Bei jedem Schritt bleibt die Invariante erhalten (z. B. Zählgleichheit)
- Zeige: Wenn TM akzeptiert, dann $w \in L$; wenn $w \in L$, dann akzeptiert TM

1.17.7 5. Platzkomplexität nachweisen

- Analyse: Alle Arbeitsschritte benötigen nur $O(\log n)$ Speicherzellen
- Argumentiere, dass keine unzulässige Speicherung erfolgt

1.17.8 6. Abschluss

- Beende mit einem vollständigen Beweis (z. B. durch vollständige Induktion über die Länge von w)
- Zeige, dass der beschränkte Speicher **ausreicht und korrekt arbeitet**

Kategorie: Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 7cf1fbfd-0b70-48ef-9d18-bb5fc8419a55 am 11.05.2025

1.18 DE BUK-1 No.17PALLV1.0: Quantenfeldmodell einer Wellenpaketinterferenz

Zeit zur Bearbeitung: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *Ein Original*

Gegeben ist ein quantenfeldtheoretisches Modell zur Beschreibung der Interferenz zweier sich bewegender Wellenpakete im skalaren Feld. Entwickeln Sie ein vollständiges theoretisches und numerisches Modell, das die Konstruktion, Entwicklung und Interferenz der Wellenpakete innerhalb der Quantenfeldtheorie beschreibt und analysiert.

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

1. **Theoretische Grundlagen**
   - Erläutern Sie die Quantisierung eines freien skalaren Feldes.
   - Leiten Sie den Feldoperator $\hat{\phi}(x,t)$ her.
   - Stellen Sie das Kommutatorverhalten von $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$ dar.
2. **Konstruktion der Wellenpaketzustände**
   - Definieren Sie zwei orthogonale Gausssche Impulsverteilungen $f_1(k)$, $f_2(k)$.
   - Leiten Sie den Zustand
     $$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger\,dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger\,dk\right)|0\rangle$$
     her und normalisieren Sie ihn.
3. **Erwartungswert und Interferenz**
   - Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
   - Identifizieren Sie Kreuzterme und deren Beitrag zur Interferenz.
   - Visualisieren Sie das Interferenzmuster in Abhängigkeit von x, t, δ.
4. **Zeitentwicklung und Wellenpaketverbreitung**
   - Simulieren Sie die Ausbreitung der Wellenpakete in Raum und Zeit.
   - Analysieren Sie den Einfluss von Gruppen- und Phasengeschwindigkeit auf die Interferenzstruktur.
   - Diskutieren Sie auftretende Dispersionsphänomene.
5. **Erweiterung auf Feldoperatorprodukte**
   - Berechnen Sie die Zwei-Punkt-Funktion $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
   - Analysieren Sie deren Raum-Zeit-Struktur.
   - Diskutieren Sie Implikationen für mögliche Messungen.
6. **Experimentelle Interpretation und Modellvalidierung**
   - Vergleichen Sie Ihr Modell mit einem quantenoptischen Interferometer (z. B. Mach-Zehnder).
   - Diskutieren Sie Messoperatoren, Zustandskollaps und Interferenzsichtbarkeit.
7. **Reflexion, Komplexitätsanalyse und Modellgrenzen**

- Schätzen Sie die algorithmische Komplexität Ihrer numerischen Verfahren.
- Diskutieren Sie mögliche Erweiterungen (z. B. Spinorfelder, QED).
- Reflektieren Sie über die Aussagekraft und Grenzen der Skalarfeldtheorie. Die Ausarbeitung soll mathematisch fundiert, physikalisch interpretiert und durch numerische Simulationen ergänzt sein.

Kategorie: Bunseki, Keisan **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 5ed4f53b-aec7-472c-a733-c1b3b3cf6a18 am 11.05.2025

1.19 DE SHK-1 No.23PALLV1.0: Rekursivität und Fixpunktkombinatoren im untypisierten Lambda-Kalkül

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *Ein Original*

Gegeben sei der untypisierte Lambda-Kalkül mit vollständiger β-Reduktion. Die Church-Kodierungen für natürliche Zahlen, "iszero", "pred" und "mult" gelten als bekannt.

Es sei der Fixpunktkombinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ gegeben sowie die Funktion:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Aufgabe:

Beweisen Sie formal und vollständig, dass $Y\ F$ ein korrektes rekursives Verfahren zur Fakultätsberechnung gemäß Church-Kodierung darstellt. Im Detail sind folgende Punkte zu zeigen:

1. **Reduktion für festes Argument:** Führen Sie eine vollständige β-Reduktion des Terms $(Y\ F)$ 3 durch. Geben Sie alle Reduktionsschritte bis zur finalen Church-Kodierung an.

2. **Korrektheitsbeweis durch Induktion:** Führen Sie einen strukturellen Induktionsbeweis über die Church-Zahlen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(Y\ F)\ n \rightarrow^{\cdot}_{\beta} \text{fac}_n$$

   wobei fac_n die Church-Kodierung von $n!$ ist.

3. **Fixpunkteigenschaft:** Beweisen Sie formal, dass $Y\ F = F\ (Y\ F)$, und zeigen Sie, weshalb dieser Ausdruck die rekursive Berechnung ermöglicht.

4. **Vergleich mit dem Z-Kombinator:**

   - Definieren Sie den Z-Kombinator.
   - Vergleichen Sie die Reduktionslänge von $(Y\ F)$ 3 und $(Z\ F)$ 3.
   - Diskutieren Sie, in welchen Kontexten Z bevorzugt werden sollte. **Hinweis:** Für alle Reduktionsschritte sind die Zwischenterme explizit anzugeben. Nutzen Sie keine Vereinfachung oder Sprünge ohne Begründung.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 8092f0bf-7bf5-4082-ab2c-92e9403967f0 am 17.05.2025

1.20 DE SHK-2 No.24PALLV1.0: Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in Zustandssummen und Vakuumenergien der Quantenfeldtheorie

Zeit zur Bearbeitung: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *Ein Original*

Untersuchen und beweisen Sie die Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in der quantenfeldtheoretischen Regularisierung und Thermodynamik, speziell im Kontext der Zustandssummen und Vakuumenergie.

1.20.1 Aufgabenstellung

Gegeben sei ein skalares Quantenfeld auf einer kompakten Raumzeit mit Periodizität β in der Zeitdimension (entsprechend einer Temperatur $T = 1/\beta$) und einer Raumdimension L. Die Eigenfrequenzen des Feldes lauten:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Zeigen Sie durch Anwendung der **Zeta-Regularisierung**, dass die thermodynamische Zustandssumme

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

mit Hilfe der analytischen Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion und der Gammafunktion regulär berechnet werden kann.

1.20.2 Teilaufgaben

1. **Herleitung der regulierten Vakuumenergie** Leiten Sie den Ausdruck für die regulierte Vakuumenergie $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ unter Verwendung der **Zeta-Funktion** her. Zeigen Sie, dass:

   $$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{und} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

   und bringen Sie den Ausdruck auf eine Form mit Gammafunktionen via Mellin-Transformation.

2. **Reduktion zu einer Epstein-Zeta-Funktion** Zeigen Sie, dass die doppelte Summe über n und m als **Epstein-Zeta-Funktion** darstellbar ist. Analysieren Sie deren analytische Eigenschaften.

3. **Temperaturabhängigkeit und thermodynamische Funktionen** Verwenden Sie den regulierten Ausdruck zur Ableitung der freien Energie $F(\beta)$, inneren Energie $U(\beta)$ und Entropie $S(\beta)$. Zeigen Sie, wie die Gammafunktion in der asymptotischen Entwicklung für hohe und niedrige Temperaturen erscheint.

4. **Vergleich mit Casimir-Energie** Beweisen Sie, dass die Nulltemperatur-Grenze der Zustandssumme zur **Casimir-Energie** übergeht, und dass die Regularisierung exakt dieselbe Form liefert wie bei der klassischen Zeta-Casimir-Methode.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: NUM **Stichwörter**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: cc85e4ff-ce95-4192-9b9c-07372f6d7fdb am 24.05.2025

1.21 DE SHK-3 No.25PALLV1.0: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Zeit zur Bearbeitung: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Ein Original*

1.21.1 Aufgabe: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Gegeben sei ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion im Ortsraum:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Diese Funktion beschreibt ein stationäres, frei bewegliches Teilchen mit gaußscher Ortsverteilung.

1.21.2 ***Teilaufgaben***

1.21.3 Normierung der Wellenfunktion

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A so, dass die Wellenfunktion normiert ist, d. h.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

1.21.4 Fourier-Transformation in den Impulsraum

Berechnen Sie die Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ der Wellenfunktion mittels Fourier-Transformation gemäß:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Führen Sie die Integration vollständig durch und geben Sie die resultierende Funktion $\phi(p)$ in expliziter Form an.

1.21.5 Heisenbergsche Unschärferelation

Bestimmen Sie die Standardabweichungen σ_x und σ_p der Orts- bzw. Impulsverteilung:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

und zeigen Sie, dass das Produkt dieser Streuungen die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

1.21.6 Physikalische Interpretation der Grenzfälle

Diskutieren Sie qualitativ den physikalischen Grenzfall $a \to 0$. Was geschieht mit der Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ und wie ist dieser Grenzfall physikalisch zu interpretieren? Beziehen Sie sich dabei auf die Konzepte der Lokalisierung und Impulsunschärfe.

1.21.7 ***Hinweis:***

Diese Aufgabe eignet sich auch zur numerischen Auswertung und grafischen Darstellung in Python oder MATLAB. Optional kann die Fourier-Transformation auch symbolisch mit geeigneten Softwaretools (z. B. SymPy oder Mathematica) verifiziert werden.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 04e72fe3-a112-4eee-9352-964ca9fa0a13 am 24.05.2025

The use of aids such as calculators, formula collections, spreadsheets, and digital tools is permitted only under the expressly stated conditions. Permitted aids must be declared in advance for exams and approved by the exam administrator. Any unauthorized aids are prohibited and may result in disqualification. While working on an assignment or exam, it is prohibited to obtain additional materials or external assistance unless expressly permitted. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions. With a Nam-Score of 3, all participants are allowed to use all possible aids.

Violation of these regulations can result in serious consequences. Especially in official assessments, the use of unauthorized aids can lead to immediate exclusion from the exam. In repeated or particularly serious cases, a permanent ban from the exam may even be imposed. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions and that the integrity of the assessments is maintained.

This sheet serves the purpose of the exercise and can be submitted officially but under certain conditions. At the same time, it should be considered an unofficial document, as it was processed without administrative supervision.

1. **Correct labeling** - The document must be clearly marked as an exercise sheet.
2. **Completeness and formatting** - It must be in a recognized format (e.g., PDF or printed copy) and contain all required content.
3. **Timely submission** - Submission must be made within the specified deadlines.
4. **Approval by the responsible authority** - Official recognition requires the approval of the relevant examining or administrative unit.
5. **No outside assistance** - The document must have been completed exclusively by the relevant individual without outside assistance.
6. **No guarantee of grade** - Since the sheet was created without administrative oversight, there is no obligation to consider it for official grading.
7. **No liability** - The author assumes no liability for the correctness or completeness of the content.
8. **No official status** - The document is not an official document and does not have the same legal status as an officially issued document.
9. **No guarantee of recognition** - Submission of this document does not guarantee recognition or official consideration by any authority or institution.
10. **No guarantee of confidentiality** - Protection of personal data and confidentiality cannot be guaranteed.
11. **No guarantee of security** - The security of the content and the data contained therein is not guaranteed.
12. **No guarantee of authenticity** - The authenticity of the information or data within the document cannot be confirmed.
13. **No guarantee of integrity** - The authenticity or integrity of the content contained therein cannot be assured.
14. **No guarantee of validity** - The document may contain content whose legal or technical validity cannot be confirmed.
15. **No guarantee of reliability** - The accuracy, completeness, or reliability of the information cannot be guaranteed.

Everything is based on trust and so, have fun.

2.1 EN SH-1 No.1PALLV1.0: Proof that $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Estimated time for solving: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prove that for every natural number n the sum of the first n odd numbers is equal to n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
- Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary n, then it is also true for $n+1$.

Category: Shoemei **Difficulty**: Easy **Tags**: induction, sum, odd numbers, natural numbers
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 429b0f2a5-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.2 *EN SKK-1 No.4-1PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1*

Estimated time for solving: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

The points are distributed in space such that:

- no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

A **windmill process** starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

2.2.1 *Transition rule*

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

2.2.2 *Goal*

Prove that all points in P are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Hard **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.3 EN SKK-1/2 No.4-2PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- $2n$ random points in general position in $\mathbb{R}^n$,
- point sets A and B with $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

2.3.1 New rule

each point from P may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

2.3.2 Goal

Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.4 EN SKK-1/3 No.4-3PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3

Estimated time for solving: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

Additionally, n and k are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

A windmill process starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

2.4.1 Transition Rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

2.4.2 Goal

Prove that in this construction all points in P are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to n‘5.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac32df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.5 EN SKK-1/4 No.4-4PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4

Estimated time for solving: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given: Three points A_1, A_2, A_3 form an equilateral windmill in $\mathbb{R}^2$, where the center M of the equilateral triangle is also given. A point P lies outside the windmill.

2.5.1 Task

Determine the reflection of point P on the line passing through two windmill points (e.g., A_1 and A_2). Then calculate the distance between P and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center M and is orthogonal to the vector $\vec{M}P$. **Hint**: Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in $\mathbb{R}^2$.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hypersurface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.6 EN SKT-1 No.5PALLV1.0: Distances in the n-dimensional space

Estimated time for solving: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Given n points $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point P_i represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the i-th position)

1. Prove that the**points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

2. Represent the points $P_1, \ldots, P_n$ as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3. **Additionally prove**: The points $P_1, \ldots, P_n$ are**linearly independent** and form an**($n-1$)-dimensional simplex** in $mathbbR^n$.

4. Compute the volume of the regular simplex in $mathbbR^{n-1}$.

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: induction, geometry, space, real numbers
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

2.7 EN SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensional surface traversal processes and reachability graphs

Estimated time for solving: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *An Original*

Given a point set $P \subset \mathbb{R}^n$ with $|P| = kn$ for some $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, where the points are in general position (i.e., no $n+1$ points lie in an $(n-1)$-dimensional hyperplane).

A rotation traversal process works as follows:

- Choose a starting point $p_0 \in P$.
- Construct an $(n-1)$-hypersurface (a "surface of revolution") through this point.
- This hypersurface is continuously rotated in a fixed manner (e.g., according to a fixed orientation in space).
- As soon as another point $p_i \in P$ is "touched" by the surface (i.e., is located on the surface), p_i becomes the new anchor point.
- The movement continues from there.

2.7.1 Extension

- Between each rotation, the orientation of the surface is changed using a given matrix of $SO(n)$ (i.e., each rotation is specified by a transition operator).
- Interpoint relationships are stored as a directed graph $G = (V, E)$, where a directed transition $p_i \to p_j$ exists if p_j was reached by a feasible rotation of p_i.

2.7.2 Exercises

1. Prove or disprove: For certain point configurations (e.g., regular grids, random point clouds, points on spheres, or simplicial surfaces), the reachability graph is strongly connected.
2. Find a general algorithm that, for any n and point set P, decides whether complete reachability of all points is possible through the process.
3. Investigate: How does reachability change when transition delays or random perturbations are introduced into the rotation?
4. Formulate an optimization: Find a minimal rotation path through all points that respects the transition rules.
5. Design a visualization (in 2D, 3D, or nD projections) that dynamically shows the process and graph.

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Graphs, Hypergraphs, Surface traversal processes, Reachability graphs
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 19999942-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.8 EN SH-3 No.7PALLV1.0: Analysis and classification of wave superpositions in curved space

Estimated time for solving: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *An Original*

A curved space $\mathbb{R}^3$ with a smooth metric $g_{ij}(x, y, z)$, in which a wave function $\Psi(x, y, z, t)$ propagates. This satisfies the generalized wave equation:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|}\partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

with $|g| = \det(g_{ij})$ and c as the local propagation velocity.
Tasks:

1. Solve (symbolically or numerically) the wave equation in the special case of a spherically symmetric metric:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

   with suitable boundary conditions (e.g., Dirichlet on a spherical surface $r = R$).

2. Show that the solution Ψ can be written as a superposition of eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators and explicitly calculate the first nontrivial modes.

3. Calculate the total energy spectrum by integrating over space:

$$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right] \sqrt{|g|}\, d^3x$$

4. Investigate numerically or analytically how the energy is distributed over time −especially in the case of interference between two point sources with phase-shifted emission.

5. Optional (Bonus): Model and visualize the effect of a time-dependent metric term, such as $g_{ij}(x, t)$, simulating a gravitational wave. Investigate how the interference structure and energy distribution change.

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Analysis, Classification, Waves, Curvature of space
UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 02398437-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.9 EN SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastic analysis of wave phenomena using Fourier and probability density functions

Estimated time for solving: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *An Original*

Investigate a spatiotemporally dependent wave phenomenon under the influence of stochastic noise. Let the wave function be given by:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

where:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ is a deterministic base wave,
- $N(x,t,\omega)$ is a Gaussian process with mean 0 and stationary covariance function.

Given:

A Gaussian process with a covariance function:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

and a known noise level σ^2 and scale parameter $\lambda > 0$.

2.9.1 Exercises

1. **Modeling:** Formulate $N(x,t,\omega)$ as a Gaussian process with the above covariance function.
2. **Simulation:** Simulate several realizations of $\Psi(x,t,\omega)$ on a grid (x_i,t_j) for different parameters σ^2 and k.
3. **Statistics:** Calculate the expected value $E[\Psi(x,t)]$ and the variance $Var[\Psi(x,t)]$ both analytically and from the simulated data.
4. **Spectral Analysis:** Perform a Fourier decomposition of $\Psi(x,t,\omega)$ and calculate the spectral energy density.
5. **Extreme Value Statistics:** Estimate the probability distribution of the maxima in the interval $[a,b]$ using maximum likelihood or Bayesian methods.

(Bonus) **Reconstruction:** Train a neural network that reconstructs the base wave $\psi(x,t)$ from noisy observations $\Psi(x,t,\omega)$.

Category: Shoemei **Difficulty**: NAM **Tags**: Stochastic, Analysis, Wave phenomena, Fourier transformation, Probability density functions

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.10 EN SH-5 Test.1PALLV1.0: Number theory −Diophantine equations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *An Original*

Find all integer solutions to the following Diophantine equation:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Explain your solution and determine all possible values for x and y that satisfy this equation. Discuss how to approach this type of equation in general.

Category: Shoemei **Difficulty**: Higher Easy **Tags**: Number theory

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763737 on 29.04.2025

2.11 EN SH-6 Test.2PALLV1.0: Combinatorics −arrangements and permutations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

How many different ways are there to arrange 5 different books on 3 shelves if each shelf must hold at least one book and the shelves do not have infinite capacity? Explain the solution using the principles of inclusion and exclusion.

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Combinatorics

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561223 on 29.04.2025

2.12 EN SH-6 Test.3PALLV1.0: Geometry −Circle geometry and tangents

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

Given is a circle with center O and radius $r = 10$. A point P lies outside the circle and is at a distance of $OP = 17$. Determine the length of the tangent from P to the circle and explain the calculation using the Pythagorean theorem. Discuss why the length of the tangent depends only on the difference between the distances between the point and the center and the radius of the circle.

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Geometry

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 12987462-1073-4d3b-9f5c-120987561273 on 29.04.2025

2.13 EN SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta combination through Fourier transformations

Estimated time for solving: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a smooth, rapidly decreasing function (i.e., $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) such that its Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx$$

the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Prove using Poisson's sum formula that the above equation satisfies under suitable conditions is.
2. Show that with a suitable choice of $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ for $\Re(s) > 1$, statements about the analytical continuation of the Riemann zeta function can be derived.
3. Investigate how the relationship can be extended into higher dimensions (Fourier on $\mathbb{R}^n$) and what role the symmetric structure plays in zeta analysis.
4. Consider the function

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

and show that it can be interpreted as a kind of Fourier series of the zeta function. Derive a representation as a function of $\hat{f}$.

2.13.1 Notes

- Use the Poisson sum formula:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Use properties of the Mellin transform for subproblems on $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Note: This problem requires an understanding of complex analysis, distribution theory, Fourier transform, and special functions.

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Zeta combination, Fourier transformations, Zeta function
UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-198427198265 on 03.05.2025

2.14 EN SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximal numbers of cuts in k-uniform hypergraphs

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Given a k-uniform hypergraph $H = (V, E)$, i.e., each hyperedge $e \in E$ connects exactly k vertices from the vertex set V. Define a **cut** as a partition of V into two disjoint subsets $V_1 \cup V_2 = V$, where a hyperedge is **cut** if it contains vertices from both parts.

Prove or disprove:

For every $k \geq 2$, there exists a partition of V into two sets such that at least $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ hyperedges are intersected.

Addendum: How does the lower bound change under random partitioning?

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-172874618926 on 03.05.2025

2.15 EN KTB-1 No.14PALLV1.0: Optimal Complexity of an Adaptive Primality Test

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *An Original*

Problem

An adaptive primality test is an algorithm that, when testing a natural number $n \in \mathbb{N}$ for prime property, gradually decides between probabilistic and deterministic methods. Examples are Miller-Rabin, Baillie-PSW, or AKS.

Develop and analyze an adaptive primality method with the following property:

- The algorithm starts with a probabilistic test (e.g., Miller-Rabin).
- If this test is passed multiple times, the system performs a deterministic subtest (e.g., Lucas, ECPP, or reduced AKS level) for borderline cases.
- The overall complexity of the method depends on the size of n and the assumed error probability ε. Task: Find an asymptotically optimal combination of such methods (with proof) and calculate the minimum expected running time for the ”prime” vs. ”not prime” decision, assuming realistic distributions of randomly chosen numbers $n \in [1, N]$. **Goal:**
- Analyze the **error-controlled adaptive complexity** model.
- Develop a function class $T(n, \varepsilon)$ that describes the running time (in the expected value) of the optimal method.
- Compare your solution with well-known methods such as Miller-Rabin (multiple), Baillie-PSW, and deterministic AKS.

Category: Kaiketsu and Toku, Bunseki, Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Difficult **Tags**:
UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-624352343132 on 11.05.2025

2.16 EN SHB-3 No.15PALLV1.0: Solution structure of generalized recursive polynomials

Estimated time for solving: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *An Original*

A recursive definition is given:

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

with initial values $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ and $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$
Analyze:

- Conditions for closed form
- Structure of the zeros
- Connection with classical polynomials (e.g., Chebyshev, Legendre, Hermite polynomials)

2.16.1 Solution structure (General steps)

*2.16.2 1. **Analysis of the recursion***

- Determine the degree of recursion k
- Classify the coefficients $a_i(x)$
- Constant? Linear? General polynomial?

*2.16.3 2. **Characteristic polynomial***

- Introduce a transformation analogous to linear recursion:
- Consider linear independence of the basis $P_0, \ldots, P_k$
- Find a solution using a characteristic polynomial (for constant a_i)

*2.16.4 3. **Representation using matrix methods***

- Write the recursion as a matrix system:
$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$
with vector $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$
- Examine the eigenvalues and eigenvectors of $A(x)$

*2.16.5 4. **Comparison with known families***

- Check whether the polynomial belongs to a known class (orthogonal, symmetric, etc.).

*2.16.6 5. **Root Structure***

- Use numerical methods to analyze the roots
- Investigate convergence behavior (e.g., for $n \to \infty$)

*2.16.7 6. **Symbolic Solution (if possible)***

- Search for closed forms (e.g., using generating functions, transforming into differential equations)
- Find explicit representations using basis functions or combinatorial structures

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Higher Difficult **Tags**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 0163d8ec-b771-44db-9f6f-6546b4733395 on 11.05.2025

2.17 EN SHKS-1 No.16PALLV1.0: Turing machine with limited memory −proof of correctness

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *An Original*

Given a Turing machine M_b whose working tape is limited to $O(\log n)$ memory cells. Show that M_b correctly decides a certain language L, e.g.:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

or another specific language where memory constraints are relevant.

2.17.1 Additional Information

- Definitions of Turing machines (TM) and bounded memory (e.g., logarithmic space)
- Formal models such as LBA (Linear Bounded Automata)
- Comparison with regular or context-free languages
- Boolean logic & invariant methods
- Standard logic proofs (e.g., induction, contradiction)
- Sketches on paper or notepad

2.17.2 Requirements

*2.17.3 **1. Formal Specification***

- Formally define the bounded TM M_b:
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Boundary: Working tape size $\leq c \cdot \log n$

*2.17.4 **2. Describe the language** L*

- Prove that $L \in \mathsf{L}$ (decidable with logarithmic space)
- Examples:
- Balanced number of symbols (e.g., equal number of a and b)
- Recognition of simple regular patterns with space optimization

*2.17.5 **3. Construction/Simulation***

- Describe the TM's low-memory strategy:
- Bookmarks (pointer technique)
- Two-pass method
- Counter in binary representation on the working tape

*2.17.6 **4. Correctness***

- Use invariance or simulation:
- At each step, the invariant is preserved (e.g., counting equality)
- Show: If TM accepts, then $w \in L$; if $w \in L$, then TM accepts

2.17.7 5. Prove space complexity

- Analysis: All steps require only $O(\log n)$ memory cells
- Argue that no illegal storage occurs

2.17.8 6. Conclusion

- Conclude with a complete proof (e.g., by complete induction on the length of w)
- Show that the bounded memory **is sufficient and works correctly**

Category: Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 76026e70-8f1d-4319-a13e-7f5c8955fc83 on 11.05.2025

2.18 EN BUK-1 No.17PALLV1.0: Quantum field model of wave packet interference

Estimated time for solving: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *An Original*

A quantum field theory model is given to describe the interference of two moving wave packets in a scalar field. Develop a complete theoretical and numerical model that describes and analyzes the construction, evolution, and interference of the wave packets within quantum field theory.

Complete the following subtasks:

1. **Theoretical Foundations**
   - Explain the quantization of a free scalar field.
   - Derive the field operator $\hat{\phi}(x,t)$.
   - Describe the commutator behavior of $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$.
2. **Construction of the Wave Packet States**
   - Define two orthogonal Gaussian momentum distributions $f_1(k)$, $f_2(k)$. - Derive the state
   $$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger\, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger\, dk\right)|0\rangle$$
   and normalize it.
3. **Expectation Value and Interference**
   - Calculate the expectation value $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
   - Identify cross terms and their contribution to the interference.
   - Visualize the interference pattern as a function of x, t, δ.
4. **Time Evolution and Wave Packet Propagation**
   - Simulate the propagation of the wave packets in space and time.
   - Analyze the influence of group and phase velocities on the interference structure.
   - Discuss any dispersion phenomena that may occur.
5. **Extension to field operator products**
   - Calculate the two-point function $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
   - Analyze its space-time structure.
   - Discuss implications for possible measurements.
6. **Experimental Interpretation and Model Validation**
   - Compare your model with a quantum optical interferometer (e.g., Mach-Zehnder).
   - Discuss measurement operators, state collapse, and interference visibility.
7. **Reflection, Complexity Analysis, and Model Limits**
   - Estimate the algorithmic complexity of your numerical methods.
   - Discuss possible extensions (e.g., spinor fields, QED).
   - Reflect on the validity and limitations of scalar field theory. The paper should be mathematically sound, physically interpreted, and supplemented by numerical simulations.

Category: Bunseki, Keisan **Difficulty**: Darkside **Tags**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 5f69f358-a92b-4593-ac73-5aaf0fcb5f33 on 11.05.2025

2.19 *EN SHK-1 No.23PALLV1.0: Recursivity and fixed-point combinators in the untyped lambda calculus*

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *An Original*

Given is the untyped lambda calculus with complete β-reduction. The Church encodings for natural numbers, ”iszero”, ”pred”, and ”mult”, are considered known.

Let the fixed-point combinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ be given, as well as the function:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Task:

Prove formally and completely that $Y\ F$ is a correct recursive procedure for calculating factorials according to the Church encoding. The following points must be demonstrated in detail:

1. **Reduction for a fixed argument:** Perform a complete β-reduction of the term $(Y\ F)\ 3$. State all reduction steps up to the final Church encoding.

2. **Proof of correctness by induction:** Perform a structural induction proof on the Church numbers that for all $n \in \mathbb{N}$ the following holds:

$$(Y\ F)\ n \rightarrow^{*}_{\beta} \text{fac}_n$$

   where fac_n is the Church encoding of $n!$.

3. **Fixed-Point Property:** Prove formally that $Y\ F = F\ (Y\ F)$, and show why this expression enables recursive computation.

4. **Comparison with the Z-Combinator:**

- Define the Z-combinator.
- Compare the reduction length of $(Y\ F)\ 3$ and $(Z\ F)\ 3$.
- Discuss in which contexts Z should be preferred. **Note:** For all reduction steps, the intermediate terms must be stated explicitly. Do not use simplifications or jumps without justification.

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 887d0eeb-752d-454c-98be-4211f1b14647 on 17.05.2025

2.20 EN SHK-2 No.24PALLV1.0: Role of zeta and gamma functions in partition functions and vacuum energies of quantum field theory

Estimated time for solving: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *An Original*

Investigate and prove the role of zeta and gamma functions in quantum field theory regularization and thermodynamics, especially in the context of partition functions and vacuum energy.

2.20.1 Task

Given a scalar quantum field on a compact spacetime with periodicity β in the time dimension (corresponding to a temperature $T = 1/\beta$) and a spatial dimension L. The natural frequencies of the field are:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Using zeta regularization, show that the thermodynamic partition function

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

can be regularly calculated using the analytic extension of the Riemann zeta function and the gamma function.

2.20.2 Subtasks

1. **Derivation of the Regulated Vacuum Energy** Derive the expression for the regulated vacuum energy $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ using the **zeta function**. Show that:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

   and convert the expression to a gamma function form using the Mellin transform.

2. **Reduction to an Epstein zeta function** Show that the double sum over n and m can be represented as an Epstein zeta function. Analyze its analytical properties.

3. **Temperature Dependence and Thermodynamic Functions** Use the regularized expression to derive the free energy F(beta), internal energy U(beta), and entropy S(beta). Show how the gamma function appears in the asymptotic expansion for high and low temperatures.

4. **Comparison with Casimir Energy** Prove that the zero-temperature limit of the partition function transforms into the Casimir energy, and that the regularization yields exactly the same form as the classical zeta-Casimir method.

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: NUM **Tags**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: ad5daf78-d753-4dd9-b3c5-8d62f9acd212 on 24.05.2025

2.21 *EN SHK-3 No.25PALLV1.0: Momentum space representation of a Gaussian wave packet*

Estimated time for solving: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *An Original*

2.21.1 *Task: Momentum-space representation of a Gaussian wave packet*

Given a one-dimensional quantum mechanical particle with the wave function in position space:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

This function describes a stationary, freely moving particle with a Gaussian spatial distribution.

2.21.2 ***Subtasks***

2.21.3 *Normalization of the wave function*

Determine the normalization constant A such that the wave function is normalized, i.e. i.e.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

2.21.4 *Fourier Transformation into Momentum Space*

Calculate the momentum space representation $\phi(p)$ of the wave function using the Fourier transformation according to:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complete the integration and state the resulting function $\phi(p)$ explicitly.

2.21.5 *Heisenberg's Uncertainty Principle*

Determine the standard deviations σ_x and σ_p of the position and momentum distributions, respectively:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \ \rangle - \langle p \rangle^2$$

and show that the product of these dispersions satisfies the Heisenberg uncertainty principle:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

2.21.6 *Physical Interpretation of the Limiting Cases*

Discuss qualitatively the physical limiting case $a \to 0$. What happens to the momentum space representation $\phi(p)$ and how should this limiting case be interpreted physically? Refer to the concepts of localization and momentum uncertainty.

2.21.7 ***Note:***

This exercise is also suitable for numerical evaluation and graphical representation in Python or MATLAB. Optionally, the Fourier transform can also be verified symbolically using suitable software tools (e.g., SymPy or Mathematica).

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 006fe438-4c31-4b38-a199-f0b4144a2e00 on 24.05.2025

3 Introduction et informations: 168 h 5 min

L'utilisation d'aides telles que des calculatrices, des recueils de formules, des tableurs et des outils numériques n'est autorisée que dans les conditions expressément indiquées. Les aides autorisées doivent être déclarées à l'avance pour les examens et approuvées par l'administrateur de l'examen. Toute aide non autorisée est interdite et peut entraîner une disqualification. Lors de la réalisation d'un devoir ou d'un examen, il est interdit d'obtenir des matériaux supplémentaires ou une assistance externe, sauf autorisation expresse. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales. Avec un score Nam de 3, tous les participants sont autorisés à utiliser toutes les aides possibles.

La violation de ces règlements peut entraîner de graves conséquences. En particulier lors d'évaluations officielles, l'utilisation d'aides non autorisées peut entraîner une exclusion immédiate de l'examen. En cas de récidive ou de cas particulièrement graves, une interdiction permanente de l'examen peut même être imposée. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales et que l'intégrité des évaluations est maintenue.

Cette feuille sert à des fins d'exercice et peut être soumise officiellement mais sous certaines conditions. En même temps, elle doit être considérée comme un document non officiel, car elle a été traitée sans supervision administrative.

1. **Étiquetage correct** - Le document doit être clairement marqué comme une feuille d'exercice.
2. **Complétude et formatage** - Il doit être dans un format reconnu (par exemple, PDF ou copie imprimée) et contenir tout le contenu requis.
3. **Soumission dans les délais** - La soumission doit être effectuée dans les délais spécifiés.
4. **Approbation par l'autorité compétente** - La reconnaissance officielle nécessite l'approbation de l'unité d'examen ou administrative compétente.
5. **Aucune assistance extérieure** - Le document doit avoir été complété exclusivement par la personne concernée sans assistance extérieure.
6. **Aucune garantie de note** - Étant donné que la feuille a été créée sans supervision administrative, il n'y a aucune obligation de la considérer pour une évaluation officielle.
7. **Aucune responsabilité** - L'auteur n'assume aucune responsabilité quant à l'exactitude ou à l'exhaustivité du contenu.
8. **Aucun statut officiel** - Le document n'est pas un document officiel et n'a pas le même statut juridique qu'un document officiellement délivré.
9. **Aucune garantie de reconnaissance** - La soumission de ce document ne garantit pas sa reconnaissance ou sa prise en compte officielle par une autorité ou une institution.
10. **Aucune garantie de confidentialité** - La protection des données personnelles et la confidentialité ne peuvent pas être garanties.
11. **Aucune garantie de sécurité** - La sécurité du contenu et des données qu'il contient n'est pas garantie.
12. **Aucune garantie d'authenticité** - L'authenticité des informations ou des données contenues dans le document ne peut pas être confirmée.
13. **Aucune garantie d'intégrité** - L'authenticité ou l'intégrité du contenu qu'il contient ne peut pas être assurée.
14. **Aucune garantie de validité** - Le document peut contenir des contenus dont la validité juridique ou technique ne peut pas être confirmée.
15. **Aucune garantie de fiabilité** - L'exactitude, l'exhaustivité ou la fiabilité des informations ne peut pas être garantie.

Toute est basée sur la confiance et donc, amusez-vous bien.

3.1 FR SH-1 No.1PALLV1.0: Prouver que $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Temps estimé pour résoudre: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Un Original*

Prouver que pour tout nombre naturel n, la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un n quelconque, alors il est également vrai pour $n + 1$.

Catégorie: Preuve **Difficulté**: Facile **Étiquettes**: Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b le 19.04.2025

3.2 FR KAB-1 No.14PALLV1.0: Complexité optimale d'une méthode de primalité adaptative

Temps estimé pour résoudre: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *Un Original*

Problème

Un test de primalité adaptatif est un algorithme qui, lorsqu'il teste la propriété de premier d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, choisit progressivement entre les méthodes probabilistes et déterministes. Parmi les exemples, on peut citer Miller-Rabin, Baillie-PSW ou AKS.

Développer et analyser une méthode de primalité adaptative présentant la propriété suivante :

- L'algorithme commence par un test probabiliste (par exemple, Miller-Rabin).
- Si ce test est réussi plusieurs fois, le système effectue un sous-test déterministe (par exemple, Lucas, ECPP ou niveau AKS réduit) pour les cas limites.
- La complexité globale de la méthode dépend de la taille de n et de la probabilité d'erreur supposée ε. Tâche : Trouver une combinaison asymptotiquement optimale de ces méthodes (avec preuve) et calculer le temps d'exécution minimum attendu pour la décision « premier » ou « non premier », en supposant des distributions réalistes de nombres $n \in [1, N]$ choisis aléatoirement. **Objectif :**
- Analyser le **modèle de complexité adaptative à erreur contrôlée**.
- Développer une classe de fonctions $T(n, \varepsilon)$ décrivant le temps d'exécution (en valeur attendue) de la méthode optimale.
- Comparer votre solution à des méthodes connues telles que Miller-Rabin (multiple), Baillie-PSW et AKS déterministe.

Catégorie: Résolution et Résoudre, Analyse, Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Difficile **Étiquettes**:
UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: b6ff31f3-7845-47a3-803d-792690b52f48 le 11.05.2025

3.3 *FR SHB-3 No.15PALLV1.0: Structure de solution des polynômes récursifs généralisés*

Temps estimé pour résoudre: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Un Original*

Une définition récursive est donnée :

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

avec les valeurs initiales $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ et $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$
Analyser:

- Conditions pour la forme fermée
- Structure des zéros
- Lien avec les polynômes classiques (par exemple les polynômes de Tchebychev, Legendre, Hermite)

3.3.1 *Structure de la solution (étapes générales)*

3.3.2 *1. **Analyse de la récursivité***

- Déterminer le degré de récursivité k
- Classer les coefficients $a_i(x)$
- Constante? Linéaire? Polynôme général ?

3.3.3 *2. **Polynôme caractéristique***

- Introduire une transformation analogue à la récursivité linéaire :
- Considérons l'indépendance linéaire de la base $P_0, \ldots, P_k$
- Trouver une solution via un polynôme caractéristique (avec constante a_i)

3.3.4 *3. **Représentation à l'aide de méthodes matricielles***

- Écrire la récursivité sous forme de système matriciel :

  $$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

  avec le vecteur $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$
- Étudier les valeurs propres et les vecteurs propres de $A(x)$

3.3.5 *4. **Comparaison avec des familles connues***

- Vérifier si le polynôme peut être classé dans une classe connue (orthogonale, symétrique, etc.).

3.3.6 *5. **Structure zéro***

- Utiliser des méthodes numériques pour analyser les zéros
- Étudier le comportement de convergence (par exemple pour $n \to \infty$)

3.3.7 *6. **Solution symbolique (si possible)***

- Recherche de formes fermées (par exemple par génération de fonctions, transformation en équations différentielles)
- Trouver une représentation explicite via des fonctions de base ou des structures combinatoires

Catégorie: Preuve, Analyse **Difficulté**: Plus Difficile **Étiquettes**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 731c2ede-a852-4e70-90bf-cec748f09bf2 le 11.05.2025

3.4 FR SHKS-1 No.16PALLV1.0: Machine de Turing à mémoire limitée –preuve de correction

Temps estimé pour résoudre: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *Un Original*

Étant donné une machine de Turing M_b dont la bande de travail est limitée à $O(\log n)$ cellules mémoire. Montrer que M_b décide correctement d'une certaine langue L, par exemple Par exemple :

$$L = \{l \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(l) = \#b(l)\}$$

ou tout autre langage spécifique où les contraintes de mémoire sont pertinentes.

3.4.1 Informations Complémentaires

- Définitions des machines de Turing (MT) et de la mémoire limitée (par exemple, espace logarithmique)
- Modèles formels tels que LBA (Linear Bounded Automata)
- Comparaison avec des langages réguliers ou sans contexte
- Logique booléenne et méthodes invariantes
- Preuves logiques standard (par exemple, induction, contradiction)
- Croquis sur papier ou notes

3.4.2 Exigences

*3.4.3 **1. Spécification formelle***

- Définir formellement la TM bornée M_b :
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Limitation : Taille de la bande de travail $\leq c \cdot \log n$

*3.4.4 **2. Décrivez la langue** L*

- Démontrer que $L \in \mathsf{L}$ (décidable avec l'espace logarithmique)
- Exemples :
- Nombre équilibré de symboles (par exemple, nombre égal de a et b)
- Reconnaissance de motifs réguliers simples avec optimisation de l'espace

*3.4.5 **3. Construction/Simulation***

- Décrivez la stratégie TM avec peu de mémoire :
- Signets (technique du pointeur)
- Procédure en deux passes
- Compteur en représentation binaire sur bande de travail

*3.4.6 **4. Exactitude***

- Utiliser l'invariance ou la simulation :
- À chaque étape, l'invariant est préservé (par exemple, l'égalité de comptage)
- Afficher : Si TM accepte, alors $w \in L$; si $w \in L$, alors TM accepte

3.4.7 5. Prouver la complexité spatiale

- Analyse : Toutes les étapes ne nécessitent que $O(\log n)$ cellules mémoire
- Prétendre qu'aucun stockage non autorisé n'a lieu

3.4.8 6. Diplôme

- Terminer par une preuve complète (par exemple par induction complète sur la longueur de w)
- Montrer que la mémoire limitée est **suffisante et fonctionne correctement**

Catégorie: Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 1ae5432b-08b9-464d-a7d7-b20048523913 le 11.05.2025

3.5 FR BUK-1 No.17PALLV1.0: Modèle de champ quantique d'interférence de paquets d'ondes

Temps estimé pour résoudre: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *Un Original*

Un modèle de théorie quantique des champs est donné pour décrire l'interférence de deux paquets d'ondes en mouvement dans un champ scalaire. Développer un modèle théorique et numérique complet qui décrit et analyse la construction, l'évolution et l'interférence des paquets d'ondes dans la théorie quantique des champs.

Effectuez les sous-tâches suivantes :

1. **Fondements théoriques**
   - Expliquer la quantification d'un champ scalaire libre.
   - Dériver l'opérateur de champ $\hat{\phi}(x,t)$.
   - Décrivez le comportement du commutateur de $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$.
2. **Construction des états de paquets d'ondes**
   - Définir deux distributions d'impulsion gaussiennes orthogonales $f_1(k)$, $f_2(k)$.
   - Gérer la condition
   $$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger\, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger\, dk\right)|0\rangle$$
   et le normaliser.
3. **Valeur attendue et interférence**
   - Calculer l'espérance mathématique $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
   - Identifier les termes croisés et leur contribution aux interférences.
   - Visualiser le motif d'interférence en fonction de x, t, δ.
4. **Évolution temporelle et propagation des paquets d'ondes**
   - Simuler la propagation de paquets d'ondes dans l'espace et dans le temps.
   - Analyser l'influence de la vitesse de groupe et de phase sur la structure d'interférence.
   - Discutez de tout phénomène de dispersion qui pourrait se produire.
5. **Extension aux produits pour opérateurs de terrain**
   - Calculer la fonction à deux points $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
   - Analyser leur structure spatio-temporelle.
   - Discuter des implications pour les mesures possibles.
6. **Interprétation expérimentale et validation du modèle**
   - Comparez votre modèle avec un interféromètre optique quantique (par exemple Mach-Zehnder).
   - Discuter des opérateurs de mesure, de l'effondrement de l'état et de la visibilité des interférences.
7. **Réflexion, analyse de la complexité et limites du modèle**
   - Estimez la complexité algorithmique de vos procédures numériques.
   - Discuter des extensions possibles (par exemple, champs de spineurs, QED).
   - Réfléchir à l'importance et aux limites de la théorie des champs scalaires. Le travail doit être mathématiquement solide, interprété physiquement et complété par des simulations numériques.

Catégorie: Analyse, Calcul **Difficulté**: YAMI **Étiquettes**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: b30962b2-bc30-497d-bb98-ee335aeacd7f le 11.05.2025

3.6 FR SHK-1 No.23PALLV1.0: Récursivité et combinateurs à virgule fixe dans le calcul lambda non typé

Temps estimé pour résoudre: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *Un Original*

Le calcul lambda non typé avec réduction β complète est donné. Les codages de l'Église pour les nombres naturels, « iszero », « pred » et « mult » sont considérés comme bien connus.

Soit le combinateur à point fixe $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ donné ainsi que la fonction :

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Tâche:

Démontrer formellement et complètement que $Y\ F$ est une procédure récursive correcte pour calculer les factorielles selon le codage de Church. Les points suivants doivent être détaillés :

1. **Réduction pour argument fixe :** Effectuer une réduction β complète du terme $(Y\ F)\ 3$. Spécifiez toutes les étapes de réduction jusqu'au codage final de l'Église.

2. **Preuve de correction par récurrence :** Effectuez une preuve par récurrence structurelle sur les nombres de Church selon laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$ la condition suivante est remplie :

$$(Y\ F)\ n \rightarrow^{*}_{\beta} \text{fac}_n$$

   où fac$_n$ est l'encodage de l'Église de $n!$.

3. **Propriété du point fixe :** Démontrer formellement que $Y\ F = F\ (Y\ F)$, et montrer pourquoi cette expression permet un calcul récursif.

4. **Comparaison avec le Z-Combinator :**

- Définir le combinateur Z.
- Comparer la longueur de réduction de $(Y\ F)\ 3$ et $(Z\ F)\ 3$.
- Discutez dans quels contextes Z devraient être préférés. **Remarque :** pour toutes les étapes de réduction, les termes intermédiaires doivent être spécifiés explicitement. N'utilisez pas de simplifications ou de sauts sans justification.

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 118ed990-622b-42c5-85ff-c2c3252befcd le 17.05.2025

3.7 FR SHK-2 No.24PALLV1.0: Rôle des fonctions zêta et gamma dans les fonctions de partition et les énergies du vide de la théorie quantique des champs

Temps estimé pour résoudre: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* *Un Original*

Étudier et démontrer le rôle des fonctions zêta et gamma dans la régularisation de la théorie quantique des champs et la thermodynamique, notamment dans le contexte des fonctions de partition et de l'énergie du vide.

3.7.1 Tâche

Soit un champ quantique scalaire sur un espace-temps compact de périodicité β dans la dimension temporelle (correspondant à une température $T = 1/\beta$) et une dimension spatiale L. Les fréquences propres du champ sont :

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

En utilisant la régularisation zêta, montrer que la fonction de partition thermodynamique

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

peut être calculée régulièrement à l'aide de l'extension analytique de la fonction zêta de Riemann et de la fonction gamma.

3.7.2 Sous-tâches

1. **Dérivation de l'énergie régulée du vide** Déduire l'expression de l'énergie régulée du vide $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ à l'aide de la **fonction zêta**. Montrer que :

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{et} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

   et convertir l'expression en fonction gamma à l'aide de la transformée de Mellin.

2. **Réduction à une fonction zêta d'Epstein** Montrer que la double somme sur n et m peut être représentée par une fonction zêta d'Epstein. Analyser ses propriétés analytiques.

3. **Dépendance à la température et fonctions thermodynamiques** Utiliser l'expression régularisée pour déduire l'énergie libre F(bêta), l'énergie interne U(bêta) et l'entropie S(bêta). Montrer comment la fonction gamma apparaît dans le développement asymptotique pour les températures élevées et basses.

4. **Comparaison avec l'énergie de Casimir** Démontrer que la limite à température nulle de la fonction de partition se transforme en énergie de Casimir et que la régularisation donne exactement la même forme que la méthode zêta-Casimir classique.

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: NUM **Étiquettes**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: 5377267d-9aaa-4a14-86dc-4182c4a66fca le 24.05.2025

3.8 FR SHK-3 No.25PALLV1.0: Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussien

Temps estimé pour résoudre: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Un Original*

3.8.1 Tâche : Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussiennes

Étant donné une particule mécanique quantique unidimensionnelle avec la fonction d'onde dans l'espace de position :

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Cette fonction décrit une particule stationnaire et en mouvement libre avec une distribution spatiale gaussienne.

3.8.2 ***Sous-tâches***

3.8.3 Normalisation de la fonction d'onde

Déterminer la constante de normalisation A telle que la fonction d'onde soit normalisée, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

3.8.4 Transformation de Fourier dans l'espace des impulsions

Calculer la représentation spatiale de l'impulsion $\phi(p)$ de la fonction d'onde en utilisant la transformation de Fourier selon :

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complétez l'intégration et indiquez la fonction résultante $\phi(p)$ sous forme explicite.

3.8.5 Le principe d'incertitude de Heisenberg

Déterminer les écarts types σ_x et σ_p des distributions de position et d'impulsion, respectivement :

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

et montrer que le produit de ces diffusions satisfait le principe d'incertitude de Heisenberg :

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

3.8.6 Interprétation physique des cas limites

Discutez qualitativement du cas limite physique $a \to 0$. Qu'arrive-t-il à la représentation de l'espace d'impulsion $\phi(p)$ et comment ce cas limite doit-il être interprété physiquement ? Se référer aux concepts de localisation et d'incertitude d'impulsion.

3.8.7 ***Un avis :***

Cette tâche convient également à l'évaluation numérique et à la représentation graphique en Python ou MATLAB. En option, la transformée de Fourier peut également être vérifiée symboliquement à l'aide d'outils logiciels appropriés (par exemple, SymPy ou Mathematica).

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 1cf99a90-2b19-471b-9f08-3371ac30d6c4 le 24.05.2025

電卓、数式集、スプレッドシート、デジタルツールなどの補助機器の使用は、明示的に規定された条件の下でのみ許可されます。許可された補助機器は、試験前に申告し、試験管理者の承認を得る必要があります。許可されていない補助機器の使用は禁止されており、失格となる場合があります。課題または試験に取り組む際は、明示的に許可されている場合を除き、追加資料や外部からの支援を受けることは禁止されています。これらの規則を遵守することで、すべての参加者が公平かつ平等な条件で試験に取り組むことができます。Nam スコアが 3 の場合、すべての参加者は利用可能なすべての補助機器を使用できます。

これらの規則に違反すると、重大な結果を招く可能性があります。特に公式評価において、許可されていない補助機器の使用は、試験からの即時除外につながる可能性があります。繰り返し使用された場合、または特に深刻な場合は、試験への永久的な参加禁止が科されることもあります。これらの規則を遵守することで、すべての参加者が公平かつ平等な条件で試験に取り組むことができ、評価の完全性が維持されます。

このシートは演習の目的を果たすものであり、一定の条件の下で公式に提出することができます。同時に、この文書は行政の監督なしに処理されたため、非公式文書とみなされるべきです。

1. **正しいラベル付け** - 文書には演習シートであることが明確に示されている必要があります。
2. **完全性と書式** - 文書は認められた形式（例:PDF または印刷物）で、必要な内容がすべて含まれている必要があります。
3. **期限内の提出** - 提出は指定された期限内に行う必要があります。
4. **責任機関による承認** - 公式認定には、関係する試験機関または行政機関の承認が必要です。
5. **外部からの支援なし** - 文書は、外部からの支援なしに、関係者のみによって作成されている必要があります。
6. **成績保証なし** - このシートは管理監督なしに作成されたため、公式の成績評価の対象としない義務があります。
7. **免責事項** - 著者は、内容の正確性または完全性について一切の責任を負いません。
8. **公式性なし** - この文書は公式文書ではなく、公式に発行された文書と同じ法的地位を有しません。
9. **承認保証なし** - この文書を提出しても、いかなる当局または機関による承認または公式な審査も保証されません。
10. **機密保持保証なし** - 個人情報の保護および機密保持は保証されません。
11. **セキュリティ保証なし** - 内容およびそこに含まれるデータのセキュリティは保証されません。
12. **真正性の保証なし** - 文書内の情報またはデータの真正性は確認できません。
13. **完全性の保証なし** - 文書に含まれるコンテンツの真正性または完全性は保証できません。
14. **妥当性の保証なし** - 文書には、法的または技術的な妥当性を確認できないコンテンツが含まれている可能性があります。
15. **信頼性の保証なし** - 情報の正確性、完全性、または信頼性は保証できません。

すべては信頼に基づいています。楽しんでください。

4.1 JP KTB-1 No.14PALLV1.0: 適応型素数判定の最適複雑度

解決までの推定時間: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* オリジナル

問題

適応型素数判定法とは、自然数 $n \in \mathbb{N}$ が素数かどうかを判定する際に、確率的手法と決定論的手法を段階的に選択するアルゴリズムです。例としては、Miller-Rabin 法、Baillie-PSW 法、AKS 法などが挙げられます。

以下の特性を持つ適応型素数判定法を開発し、解析してください。

- アルゴリズムは確率的検定（例:Miller-Rabin 法）から開始します。
- この検定に複数回合格した場合、システムは境界条件において決定論的サブ検定（例:Lucas 法、ECPP 法、または簡約 AKS レベル）を実行します。
- 手法の全体的な複雑さは、n のサイズと想定される誤り確率 ε に依存します。課題: これらの手法の漸近的に最適な組み合わせ（証明付き）を見つけ、ランダムに選択された数 $n \in [1, N]$ の現実的な分布を仮定し、「素数」と「素数でない」の判定にかかる最小の期待実行時間を計算してください。**目標:**
- **誤差制御適応的複雑性** モデルを解析してください。
- 最適な手法の実行時間（期待値）を記述する関数クラス $T(n, \varepsilon)$ を開発してください。
- 作成した解を、Miller-Rabin（多重）、Baillie-PSW、決定論的 AKS などのよく知られた手法と比較してください。

カテゴリー: 解決と解く, 分析, 証明, 構築と設計 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-624352343133 日付 05 月 11 日 2025 年

4.2 JP SHB-3 No.15PALLV1.0: 一般化再帰多項式の解の構造

解決までの推定時間: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* オリジナル

再帰的な定義が与えられます。

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x)$$□

初期値は $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$、$a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ である。

分析:

- 閉じた形式の条件
- ゼロの構造
- 古典多項式（例: チェビシェフ多項式、ルジャンドル多項式、エルミート多項式）との関連

4.2.1 ソリューション構造（一般的な手順）

4.2.2 *1.* **再帰の分析**

- 再帰次数 k を決定する
- 係数 $a_i(x)$ を分類する
- 絶え間ない？リニア？一般多項式?

4.2.3 *2.* **特性多項式**

- 線形再帰に類似した変換を導入します。
- 基底 $P_0, \ldots, P_k$ の線形独立性を考慮する
- 特性多項式（定数 a_i）で解を求める

4.2.4 *3.* **行列法を用いた表現**

- 再帰を行列システムとして記述します。

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

  ベクトル $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- $A(x)$ の固有値と固有ベクトルを調べる

4.2.5 *4.* **有名な家族との比較**

- 多項式を既知のクラス (直交、対称など) に分類できるかどうかを確認します。

4.2.6 *5.* **ゼロ構造**

- 数値手法を使用してゼロを解析する
- 収束挙動を調べる（例:$n \to \infty$ の場合）

4.2.7 *6.* **記号的な解決法（可能な場合）**

- 閉じた形式を検索する（例: 生成関数、微分方程式への変換による）
- 基底関数または組み合わせ構造を介して明示的な表現を見つける

カテゴリー: 証明, 分析 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 0a989e7c-66a7-4a60-9a4a-b345009f7913 日付 11.05.2025

4.3 JP SHKS-1 No.16PALLV1.0: 限られたメモリを持つチューリングマシン - 正しさの証明

解決までの推定時間: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* オリジナル

作業テープが $O(\log n)$ 個のメモリセルに制限されているチューリングマシン M_b が与えられます。M_b が特定の言語 L を正しく決定することを示します。例えば。:

$$L = \{w \in \{a,b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

または、メモリ制約が関係するその他の特定の言語。

4.3.1 追加情報

- チューリングマシン（TM）の定義と限られたメモリ（例: 対数空間）
- LBA（線形有界オートマトン）などの形式モデル
- 正規言語または文脈自由言語との比較
- ブール論理と不変メソッド
- 標準的な論理的証明（例: 帰納法、背理法）
- 紙やメモに描いたスケッチ

4.3.2 要件

4.3.3 ***1.*** **形式仕様**

- 有界 TMM_b を正式に定義する: -$M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- 制限: 動作バンドサイズ $\leq c \cdot \log n$

4.3.4 ***2.*** **言語** L について説明してください

-$L \in$ L（対数空間で決定可能）であることを証明してください。

- 例:
- シンボルの数のバランス（例:a と b の数が等しい）
- 空間最適化による単純な規則パターンの認識

4.3.5 ***3.*** **建設/シミュレーション**

- メモリをほとんど使用せずに TM 戦略を説明します。
- ブックマーク（ポインタテクニック）
- 2 パス手順
- 作業テープ上の 2 進数表現のカウンタ

4.3.6 ***4.*** **正確性**

- 不変性またはシミュレーションを使用する:
- 各ステップで不変条件が保持される（例: 等価性のカウント）
- 表示: TM が受け入れる場合、$w \in L$ です。$w \in L$ ならば TM は

4.3.7 5. 空間計算量を証明する

- 分析: すべてのステップで必要なメモリセルは $O(\log n)$ 個のみ
- 不正な保管は行われていないと主張する

4.3.8 6. ディプロマ

- 完全な証明で終了する（例えば、w の長さにわたる完全な帰納法によって）
- 限られたメモリが**十分であり、正しく動作していることを示す**

カテゴリー: 証明, 構築と設計 **難易度**: ハード **タグ**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 1fd4436b-f494-4cb6-a919-8784410bc93c 日付 11.05.2025

4.4 JP BUK-1 No.17PALLV1.0: 波束干渉の量子場モデル

解決までの推定時間: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* オリジナル

スカラー場における 2 つの移動する波束の干渉を記述するために、量子場理論モデルが与えられます。量子場理論における波束の構築、進化、干渉を記述および分析する完全な理論的数値モデルを開発します。

次のサブタスクを完了します。

1. **理論的基礎**

- 自由スカラー場の量子化について説明します。
- 体演算子 $\hat{\phi}(x,t)$ を導出します。
- $\hat{a}_k$、$\hat{a}_k^\dagger$ の交換子の振る舞いを説明します。

2. **波束状態の構築**

- ２つの直交ガウス運動量分布 $f_1(k)$、$f_2(k)$ を定義する。
- 状態を管理する

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

  そしてそれを正規化します。

3. **期待値と干渉**

- 期待値 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$ を計算します。
- 交差項とそれらが干渉に与える影響を特定します。
- 干渉パターンを x、t、δ の関数として視覚化します。

4. **時間発展と波束伝播**

- 空間と時間における波束の伝播をシミュレートします。
- グループ速度と位相速度が干渉構造に与える影響を分析します。
- 発生する可能性のある分散現象について説明します。

5. **フィールドオペレータ製品への拡張**

- 2 点関数 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$ を計算します。
- 時空間構造を分析します。
- 可能な測定の意味について話し合います。

6. **実験的解釈とモデルの検証**

- モデルを量子光干渉計 (例: マッハ・ツェンダー) と比較します。
- 測定演算子、状態の崩壊、干渉の可視性について説明します。

7. **反射、複雑性分析、モデルの境界**

- 数値手順のアルゴリズムの複雑さを推定します。
- 可能な拡張について議論する（例: スピノル場、QED）。
- スカラー場理論の重要性と限界について考察します。作業は数学的に正確で、物理的に解釈され、数値シミュレーションによって補完される必要があります。

カテゴリー: 分析, 計算 **難易度**: ダークサイド **タグ**:

UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: fb2cb262-d694-4a23-a1a6-5a20b512ebea 日付 11.05.2025

4.5 JP SHK-1 No.23PALLV1.0: 型なしラムダ計算における再帰性と固定小数点コンビネータ

解決までの推定時間: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* オリジナル

完全な β-減算を伴う型なしラムダ計算が与えられます。自然数の Church エンコーディング、「iszero」、「pred」、「mult」はよく知られていると考えられています。

固定小数点コンビネータ $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ と関数が与えられているとします。

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

タスク:

$Y\ F$ がチャーチ符号化に従って階乗を計算する正しい再帰手順であることを形式的かつ完全に証明します。以下の点を詳細に示す必要があります。

1. **固定引数の縮約:** 項 $(Y\ F)\ 3$ の完全な β 縮約を実行します。最終的な Church エンコーディングまでのすべての削減手順を指定します。

2. **帰納法による正しさの証明:** すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して以下が成り立つことをチャーチ数に対して構造的帰納法で証明します。

$$(Y\ F)\ n \to_\beta^* \text{fac}_n$$

   ここで、fac_n は $n!$ のチャーチ符号化です。

3. **不動点特性:** $Y\ F = F\ (Y\ F)$ であることを正式に証明し、この式が再帰計算を可能にする理由を示します。

4. **Z-Combinator との比較:**

- Z コンビネータを定義します。
- $(Y\ F)\ 3$ と $(Z\ F)\ 3$ の短縮長を比較します。
- どのようなコンテキストで Z を優先すべきかを議論します。**注:** すべての削減手順において、中間項を明示的に指定する必要があります。正当な理由なく単純化やジャンプを使用しないでください。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード **タグ**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 27bbd441-79cc-47ec-8e15-375050f07157 日付 17.05.2025

4.6 JP SHK-2 No.24PALLV1.0: 量子場の理論における分配関数と真空エネルギーにおけるゼータ関数とガンマ関数の役割

解決までの推定時間: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* オリジナル

量子場の理論における正則化と熱力学、特に分配関数と真空エネルギーの文脈におけるゼータ関数とガンマ関数の役割を調査し、証明する。

4.6.1 課題

時間次元（温度 $T = 1/\beta$ に対応）と空間次元 L に周期性 β を持つコンパクト時空上のスカラー量子場が与えられる。場の固有振動数は、次の通りです。

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

ゼータ正規化を用いて、熱力学的分配関数

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

が、リーマンゼータ関数とガンマ関数の解析的拡張を用いて正規に計算できることを示しなさい。

4.6.2 サブタスク

1. **制御真空エネルギーの導出 ゼータ関数**を用いて、制御真空エネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ の式を導出せよ。以下の式が成り立つことを示せ。

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

そして、メリン変換を用いてこの式をガンマ関数形式に変換せよ。

2. **エプスタインゼータ関数への縮約** n と m の二重和がエプスタインゼータ関数として表せることを示せ。その解析的性質を解析せよ。

3. **温度依存性と熱力学関数** 正規化表現を用いて自由エネルギー F(β)、内部エネルギー U(β)、エントロピー S(β) を導出せよ。ガンマ関数が高温および低温における漸近展開にどのように現れるかを示しなさい。

4. **カシミールエネルギーとの比較** 分配関数の零温度極限がカシミールエネルギーに変換されること、そして正規化によって古典的なゼータ-カシミール法と全く同じ形が得られることを証明せよ。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: fa54f474-2db5-47ee-a259-b74482490238 日付 24.05.2025

4.7 JP SHK-3 No.25PALLV1.0: ガウス波束の運動量空間表現

解決までの推定時間: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* オリジナル

4.7.1 課題*:* ガウス波束の運動量空間表現

位置空間に波動関数を持つ 1 次元の量子力学粒子が与えられます。

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

この関数は、ガウス空間分布を持つ、静止した自由に移動する粒子を記述します。

4.7.2 **サブタスク**

4.7.3 波動関数の正規化

波動関数が正規化されるように正規化定数 A を決定します。つまり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

4.7.4 運動量空間へのフーリエ変換

フーリエ変換を用いて波動関数の運動量空間表現 $\phi(p)$ を次のように計算します。

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

積分を完了し、結果の関数 $\phi(p)$ を明示的な形式で述べます。

4.7.5 ハイゼンベルクの不確定性原理

位置分布と運動量分布の標準偏差 σ_x と σ_p をそれぞれ決定します。

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

これらの散乱の積がハイゼンベルクの不確定性原理を満たすことを示す。

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

4.7.6 極限ケースの物理的解釈

物理的な極限ケース $a \to 0$ について定性的に議論します。運動量空間表現 $\phi(p)$ では何が起こりますか? また、この極限ケースは物理的にどのように解釈されますか? 局所化とインパルス不確実性の概念を参照してください。

4.7.7 **お知らせ*:***

このタスクは、Python または MATLAB での数値評価とグラフィカル表現にも適しています。オプションとして、適切なソフトウェアツール (SymPy や Mathematica など) を使用して、フーリエ変換を記号的に検証することもできます。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード **タグ**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 572ebf6c-38dd-4582-ae7a-cb1aa9c89bc6 日付 24.05.2025

계산기, 공식모음, 스프레드시트, 디지털도구와같은보조도구의사용은명시적으로명시된조건에서만허용됩니다. 허용되는보조도구는시험을위해사전에신고해야하며, 시험감독관의승인을받아야합니다. 허가받지않은보조기구사용은금지되며, 적발시실격처리될수있습니다. 과제나시험을치르는동안에는명시적으로허가되지않는한추가자료나외부도움을이용하는것이금지되어있습니다. 이러한규정을준수하면모든참가자가공정하고평등한조건에서작업할수있습니다. 남점수 3 점부터는모든참가자가가능한모든보조도구를사용할수있습니다.

이러한규정을위반하면심각한결과를초래할수있습니다. 특히공식시험에서허가받지않은보조도구를사용할경우시험에서즉시제외될수있습니다. 반복적으로발생하거나특히심각한경우에는시험응시가영구적으로금지될수도있습니다. 이러한규정을준수하면모든참가자가공정하고평등한조건에서시험에임하고시험의공정성이유지됩니다.

이시트는연습의목적을달성하는데사용되며특정조건하에서공식적으로제출될수있습니다. 동시에이는행정감독없이작성되었기때문에비공식문서로간주되어야합니다.

1. **올바른라벨링** - 문서는연습지라는것을명확하게표시해야합니다.
2. **완전성및형식** - 인정된형식 (예: PDF 또는인쇄본) 이어야하며필요한모든내용이포함되어야합니다.
3. **제시기한** - 지정된기한내에제출해야합니다.
4. **관할기관의승인** - 공식인정을받으려면관할시험또는행정기관의승인이필요합니다.
5. **외부도움없음** - 해당문서는외부도움없이해당개인이단독으로작성해야합니다.
6. **등급보장없음** - 이논문은행정적감독없이작성되었으므로공식등급을고려할의무가없습니다.
7. **책임없음** - 저자는콘텐츠의정확성이나완전성에대해책임을지지않습니다.
8. **공식적인지위없음** - 해당문서는공식문서가아니며공식적으로발행된문서와동일한법적지위를갖지않습니다.
9. **인정보장없음** - 이문서를제출하더라도어떠한기관이나기관으로부터인정이나공식적인고려를보장하지않습니다.
10. **비밀유지보장불가** - 개인정보의보호및비밀유지는보장할수없습니다.
11. **보안보장없음** - 콘텐츠및콘텐츠에포함된데이터의보안은보장되지않습니다.
12. **진위성보장없음** - 문서내의정보나데이터의진위성을확인할수없습니다.
13. **무결성보장없음** - 콘텐츠의진위성이나무결성을보장할수없습니다.
14. **유효성보장없음** - 문서에는법적또는기술적유효성을확인할수없는콘텐츠가포함되어있을수있습니다.
15. **신뢰성보장없음** - 정보의정확성, 완전성또는신뢰성을보장할수없습니다.

모든것이신뢰에기반을두고있기때문에매우즐겁습니다.

5.1 KR BUK-1 No.17PALLV1.0: 파동패킷간섭의양자장모델

해결예상시간: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* 원본

스칼라장에서두개의움직이는파동패킷의간섭을설명하기위해양자장이론모델이제시됩니다. 양자장이론내에서파동패킷의구성, 진화, 간섭을설명하고분석하는완전한이론적, 수치적모델을개발합니다.

다음하위작업을완료하세요.

1. **이론적기초**
- 자유스칼라장의양자화를설명하세요.
- 필드연산자 $\hat{\phi}(x,t)$ 를도출합니다.
- $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ 의교환자동작을설명하세요.

2. **파동패킷상태의구성**
- 두개의직교가우스운동량분포 $f_1(k)$, $f_2(k)$ 를정의합니다.
- 상태를관리하다

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

  그리고그것을정상화합니다.

3. **기대값및간섭**
- 기대값 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$ 을계산합니다.
- 교차항과간섭에대한기여도를식별합니다.
- 간섭패턴을 x, t, δ 의함수로시각화합니다.

4. **시간진화및파동패킷전파**
- 공간과시간에따른파동패킷의전파를시뮬레이션합니다.
- 간섭구조에대한군속도와위상속도의영향을분석합니다.
- 발생할수있는분산현상에대해논의해보세요.

5. **현장운영자제품확장**
- 두점함수 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$ 을계산합니다.
- 시공간구조를분석합니다.
- 가능한측정에대한의미를논의합니다.

6. **실험해석및모델검증**
- 귀하의모델을양자광학간섭계 (예: 마하젠더) 와비교해보세요.
- 측정연산자, 상태붕괴및간섭가시성에대해논의합니다.

7. **반사, 복잡성분석및모델경계**
- 수치적절차의알고리즘복잡도를추정합니다.
- 가능한확장 (예: 스피너필드, QED) 에대해논의합니다.
- 스칼라장이론의중요성과한계에대해생각해보세요. 작업은수학적으로타당해야하며, 물리적으로해석되어야하며수치시뮬레이션으로보완되어야합니다.

카테고리: 분석, 계산 **난이도**: 하드 **태그**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 9f422ceb-8266-4e27-8cfd-82c209652be8 날짜 11.05.2025

5.2 KR SHK-1 No.23PALLV1.0: 유형이지정되지않은람다계산법의재귀성과고정소수점조합자

해결예상시간: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* 원본

완전한 β-축소를적용한무형의람다계산법이주어졌습니다. 자연수에대한교회인코딩인"iszero", "pred", "mult" 는잘알려진것으로간주됩니다.

고정점조합자 $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ 와다음함수가주어지도록하자.

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

일:

$Y\ F$ 가 Church 코딩에따라팩토리얼을계산하는올바른재귀절차임을정식적이고완벽하게증명하세요. 다음사항을자세히설명해야합니다.

1. **고정된인수에대한축소:** 항 $(Y\ F)\ 3$ 의전체 β-축소를수행합니다. 최종교회인코딩까지모든감소단계를지정하세요.
2. **귀납에의한정확성증명:** 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에대해다음이성립한다는것을교회수에대한구조적귀납증명을수행합니다.
$$(Y\ F)\ n \to_\beta^* \text{fac}_n$$
여기서 fac_n 은 $n!$ 의교회인코딩입니다.
3. **고정점속성:** $Y\ F = F\ (Y\ F)$ 임을공식적으로증명하고이표현식이재귀적계산을허용하는이유를보여주세요.
4. **Z-Combinator 와의비교:**

- Z-결합자를정의합니다.
- $(Y\ F)\ 3$ 과 $(Z\ F)\ 3$ 의감소길이를비교하세요.
- 어떤맥락에서 Z 가선호되는지논의해보세요. **참고:** 모든감소단계에대해중간용어를명확하게지정해야합니다. 정당한이유없이단순화나생략을하지마십시오.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 14d934cc-2e6e-4211-9ebb-bdb997a9b657 날짜 17.05.2025

5.3 KR SHK-2 No.24PALLV1.0: 양자장론의분배함수와진공에너지에서제타함수와감마함수의역할

해결예상시간: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 원본

양자장이론의정규화와열역학에서제타함수와감마함수의역할, 특히분배함수와진공에너지의맥락을조사하고증명합니다.

5.3.1 과제

시간차원 (온도 T = 1/β 에해당) 과공간차원 L 에주기성 β 를갖는콤팩트시공간상의스칼라양자장이주어졌습니다. 장의고유진동수는다음과같습니다.

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

제타정규화를사용하여열역학적분배함수가

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

리만제타함수와감마함수의해석적확장을사용하여정규적으로계산될수있음을보여주세요.

5.3.2 하위과제

1. **조절된진공에너지의유도 제타함수**를사용하여조절된진공에너지 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ 에대한식을유도하십시오. 다음을보여주십시오.

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

   그리고멜린변환을사용하여식을감마함수형태로변환하십시오.

2. **엡스타인제타함수로의환원** n 과 m 에대한이중합을엡스타인제타함수로나타낼수있음을보여주십시오. 그해석적성질을분석하십시오.

3. **온도의존성및열역학함수** 정규화된표현식을사용하여자유에너지 F(베타), 내부에너지 U(베타), 엔트로피 S(베타) 를유도하십시오. 감마함수가고온및저온에대한점근전개에서어떻게나타나는지보여주십시오.

4. **카시미르에너지와의비교** 분배함수의영온도한계가카시미르에너지로변환되고, 정규화가고전적인제타-카시미르방법과정확히동일한형태를낳음을증명하십시오.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: NUM **태그**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: a7ceaf1b-e71e-4d76-a632-c2b9363d5583 날짜 24.05.2025

5.4 KR SHK-3 No.25PALLV1.0: 가우스파패킷의운동량공간표현

해결예상시간: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 원본

5.4.1 과제*:* 가우스파패킷의운동량공간표현

위치공간에서파동함수를갖는 1 차원양자역학입자가주어지면:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

이함수는가우스공간분포를갖는고정되어있고자유롭게움직이는입자를설명합니다.

5.4.2 **하위작업**

5.4.3 파동함수의정규화

파동함수가정규화되도록정규화상수 A 를결정합니다. 즉,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

5.4.4 운동량공간으로의푸리에변환

푸리에변환을사용하여파동함수의운동량공간표현 $\phi(p)$ 을계산합니다.

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

적분을완료하고결과함수 $\phi(p)$ 를명시적인형태로나타내세요.

5.4.5 하이젠베르크의불확정성원리

위치와운동량분포의표준편차 σ_x 와 σ_p 를각각결정합니다.

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

그리고이러한산란의곱이하이젠베르크의불확정성원리를만족함을보여주세요.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

5.4.6 극한경우의물리적해석

물리적한계사례 $a \to 0$ 에대해질적으로논의해보세요. 운동량공간표현 $\phi(p)$ 은어떻게되나요? 그리고이제한적인경우는물리적으로어떻게해석해야할까요? 국소화와임펄스불확실성의개념을참조하세요.

5.4.7 **공지사항*:***

이작업은 Python 이나 MATLAB 에서수치적평가와그래픽표현에도적합합니다. 선택적으로, 푸리에변환은적절한소프트웨어도구 (예: SymPy 또는 Mathematica) 를사용하여기호적으로검증할수도있습니다.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 6dbbe88e-8124-48cf-94c9-d265d50d0819 날짜 24.05.2025

僅在明確規定的條件下才允許使用計算器、公式集、電子表格和數位工具等輔助工具。考試時必須事先申報允許使用的輔助器材，並獲得考試監督員的批准。禁止任何未經授權的輔助，否則可能導致取消資格。在完成作業或考試時，除非明確允許，否則禁止使用額外的材料或外部協助。遵守這些規定可確保所有參與者在公平、平等的條件下運作。從 Nam 分數為 3 開始，所有參與者都可以使用所有可能的輔助工具。

違反這些規定可能會造成嚴重後果。特別是在正式考試中，使用未經授權的輔助工具可能會導致立即被取消考試資格。對於重複或特別嚴重的情況，甚至可能被處以永久禁止參加考試的處罰。遵守這些規定可確保所有參與者在公平、平等的條件下運作，並維護考試的完整性。

此表用於練習目的，在一定條件下可以正式提交。同時，由於它是在沒有行政監督的情況下創建的，因此應該被視為非官方文件。

1. **正確標記** - 該文件必須清楚標示為練習表。
2. **完整性和格式** - 它必須採用可識別的格式（例如 PDF 或列印副本）並包含所有必要的內容。
3. **及時提交** - 必須在指定的期限內提交。
4. **主管機關核准** - 官方認可需要主管審查或行政機構的批准。
5. **無外部幫助** - 該文件必須是由相關人員獨自創建的，無需外部幫助。
6. **不保證評分** - 由於論文是在沒有行政監督的情況下準備的，因此沒有義務考慮對其進行官方評分。
7. **無責任** - 作者對內容的準確性或完整性不承擔任何責任。
8. **無官方地位** - 該文件不是官方文件，不具有與正式頒發的文件相同的法律地位。
9. **不保證獲得認可** - 提交此文件並不保證獲得任何當局或機構的認可或官方考慮。
10. **不保證保密** - 無法保證個人資料的保護和保密性。
11. **不保證安全** - 不保證其中包含的內容和資料的安全性。
12. **不保證真實性** - 無法確認文件中資訊或資料的真實性。
13. **不保證完整性** - 無法保證所含內容的真實性或完整性。
14. **不保證有效性** - 文件可能包含無法確認其法律或技術有效性的內容。
15. **不保證可靠性** - 無法保證資訊的準確性、完整性或可靠性。

一切都基於信任，因此很有趣。

6.1 ZH SHK-1 No.23PALLV1.0: 無型 *lambda* 演算中的遞歸與不動點組合器

解决的预计时间: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* 原创

給出了具有完整 β 約簡的無類型 lambda 演算。自然數的 Church 編碼“iszero”、“pred”和“mult”被認為是眾所周知的。設不動點組合子 $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ 以及函數:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

任務:

正式且完整地證明 $Y\ F$ 是根據 Church 編碼計算階乘的正確遞歸程序。需要詳細表明以下幾點:

1. **固定參數的約簡**: 對項 $(Y\ F)\ 3$ 進行完整的 β 約簡。指定直至最終 Church 編碼的所有簡化步驟。

2. **透過歸納證明正確性**: 對 Church 數進行結構化歸納證明，證明對於所有 $n \in \mathbb{N}$，以下成立:

   $$\square Y\ F\square\ n \to^{\cdot}_{\beta} \text{fac}_n$$

   其中 fac_n 是 $n!$ 的 Church 編碼。

3. **不動點性質** : 正式證明 $Y\ F = F\ (Y\ F)$，並說明為何該表達式允許遞歸計算。

4. **與 Z-Combinator 的比較:**

- 定義 Z-組合子。
- 比較 $(Y\ F)\ 3$ 和 $(Z\ F)\ 3$ 的減少長度。
- 討論在哪些情況下應該優先選擇 Z。**注意:** 對於所有減少步驟，必須明確指定中間項。請勿無故使用簡化或跳躍。

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: a94a62e4-a6bf-4386-8c65-5e294ef85c8d 日期 17.05.2025

6.2 ZH SHK-2 No.24PALLV1.0: zeta 函數和 *gamma* 函數在量子場論的配分函數和真空能量中的作用

解决的预计时间: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 原创

研究並證明 zeta 和 gamma 函數在量子場論正則化和熱力學中的作用，特別是在配分函數和真空能量的背景下。

6.2.1 任務

給定一個緊湊時空中的標量量子場，其時間維度具有週期性 β(對應於溫度 $T = 1/\beta$) 和空間維度 L。該場的固有頻率為:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

使用 zeta 正規化，證明熱力學配分函數

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

可以使用黎曼 zeta 函數和 gamma 函數的解析擴展進行定期計算。

6.2.2 子任務

1. **受控真空能量的推導** 使用 **zeta 函數**推導受控真空能量的表達式 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$。表明:

   $$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

   並使用梅林變換將表達式轉換為伽馬函數形式。

2. **簡化為 Epstein zeta 函數** 證明 n 和 m 的雙和可以表示為 Epstein zeta 函數。分析其分析性質。

3. **溫度依賴性和熱力學函數** 利用正規化表達式推導自由能 F(beta)、內能 U(beta) 和熵 S(beta)。展示伽馬函數在高溫和低溫的漸近展開中如何出現。

4. **與卡西米爾能量的比較** 證明配分函數的零溫度極限轉變為卡西米爾能量，而正則化產生與經典 zeta-卡西米爾方法完全相同的形式。

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: NUM **标签**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: b14eff42-fdc0-4ebc-880f-05167a978cbe 日期 24.05.2025

6.3 ZH SHK-3 No.25PALLV1.0: 高斯波包的動量空間表示

解决的预计时间: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 原创

6.3.1 任務*:* 高斯波包的動量空間表示

給定一個一維量子力學粒子，其波函數在位置空間:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

此函數描述具有高斯空間分佈的靜止、自由移動的粒子。

6.3.2 **子任務**

6.3.3 波函數的歸一化

決定標準化常數 A，使得波函數標準化，即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

6.3.4 傅立葉轉換到動量空間

根據下列公式利用傅立葉轉換計算波函數的動量空間表示 $\phi(p)$:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

完成積分並以明確形式表述所得函數 $\phi(p)$。

6.3.5 海森堡不確定原理

分別決定位置和動量分佈的標準差 σ_x 和 σ_p:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

並證明這些散射的乘積滿足海森堡不確定性原理:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

6.3.6 極限情況的物理解釋

定性地討論物理極限情況 $a \to 0$。動量空間表示 $\phi(p)$ 會發生什麼情況，以及如何從物理上解釋這種極限情況？參考局部化和脈衝不確定性的概念。

6.3.7 **通知*:***

此任務也適合在 Python 或 MATLAB 中進行數值評估和圖形表示。或者，也可以使用合適的軟體工具 (例如 SymPy 或 Mathematica) 以符號方式驗證傅立葉變換。

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 07f300e8-9ad4-4552-8048-256b953aecc1 日期 24.05.2025

7 Lösung

7.1 DE SH-1 No.1PALLV1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Zeit zur Bearbeitung: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Ein Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

7.1.1 Lösung

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Aussage für n wahr.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Dann gilt:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Einfach **Stichwörter**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

7.2 DE SKK-1 No.4-1PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

7.2.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n{-}1)$-Hyperfläche.

7.2.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

7.2.3 Lösung

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

7.3 DE SKK-1/2 No.4-2PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

7.3.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

7.3.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

7.3.3 Lösung

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

7.4 DE SKK-1/3 No.4-3PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3

Zeit zur Bearbeitung: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

7.4.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$-Hyperfläche.

7.4.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

7.4.3 Lösung

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

7.5 DE SKK-1/4 No.4-4PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

Zeit zur Bearbeitung: 10 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

7.5.1 Aufgabe

Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

7.5.2 Lösung

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaiketsu und Toku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

7.6 DE SKT-1 No.5PALLV1.0: Abstände im n-dimensionalen Raum

Zeit zur Bearbeitung: 50 min *Nam-Score: 1.2* *Ein Original*

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der i-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Stelle die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **($n-1$)-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

7.6.1 Lösung

1. **Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben**

   Gegeben: Die Punkte $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ sind:
$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \qquad P_j = e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

   Unterschied zweier Punkte: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$

   Dieser Vektor hat:

   - an Stelle i: 1,
   - an Stelle j: -1,
   - sonst 0

   Norm:
$$\| P_i - P_j \|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

   $\rightarrow$ Alle Punkte haben den gleichen Abstand zueinander.

2. **Matrixdarstellung**
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Lineare Unabhängigkeit**

   Definition: Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall\, i$$

Beweis:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Standardbasis ist **linear unabhängig**.

4. **Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$**

Wir verschieben die Punkte so, dass sie im Ursprung liegen, und berechnen das Volumen mithilfe von Gram-Determinanten oder der Formel für das Volumen eines Simplex aus Vektoren:

Volumenformel für Simplex aus Vektoren

Für ein $(n-1)$-Simplex S mit Basisvektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

wobei G die **Gram-Matrix** ist:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Es ist bekannt, dass das Volumen eines regulären Simplex mit Kantenlänge ℓ in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist:

$$\text{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

Für $\ell = \sqrt{2}$:

$$\text{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

Das ist das Volumen eines Simplex mit n Eckpunkten und Kantenlänge $\sqrt{2}$.

5. **Punktetabelle**

Table 1: Punktevergabe für die Lösung

Kondition	**Beschreibung**	**Punkte**
Norm Gleichung Aufstellen	Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben.	3
Matrix	Stelle die Punkte als Matrix dar.	1
Gleichung und Unabhängigkeit	Beweise die lineare Unabhängigkeit.	2
Volumenformel	Leite die Volumenformel für das Simplex her.	1
Beispiel	Führe eine Beispielrechnung durch.	2
Allgemeine Zusammenfassung	Fasse die Ergebnisse zusammen.	2

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f am 19.04.2025

7.7 DE SH-2 No.6PALLV1.0: *Hyperdimensionale Flächendurchlauf-Prozesse und Erreichbarkeitsgraphen*

Zeit zur Bearbeitung: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *Ein Original*

Gegeben sei eine Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $|P| = kn$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wobei die Punkte in allgemeiner Lage liegen (d.h. keine $n + 1$ Punkte liegen in einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene).

Ein Drehdurchlaufprozess funktioniert wie folgt:

- Wähle einen Startpunkt $p_0 \in P$.
- Konstruiere eine $(n - 1)$-Hyperfläche (eine ”Drehfläche”) durch diesen Punkt.
- Diese Hyperfläche wird kontinuierlich in festgelegter Weise (z.B. gemäß einer festen Orientierung im Raum) gedreht.
- Sobald ein weiterer Punkt $p_i \in P$ von der Fläche ”berührt” wird (das heißt, sich auf der Fläche befindet), wird p_i zum neuen Ankerpunkt.
- Die Bewegung wird dort fortgesetzt.

7.7.1 *Erweiterung*

- Zwischen jeder Drehung wird die Orientierung der Fläche mit einer gegebenen Matrix aus $SO(n)$ verändert (d.h. jede Rotation ist durch einen Übergangsoperator festgelegt).
- Zwischenpunktsbeziehungen werden als gerichteter Graph $G = (V, E)$ gespeichert, wobei ein gerichteter Übergang $p_i \to p_j$ besteht, wenn p_j durch eine zulässige Drehung von p_i erreicht wurde.

7.7.2 *Aufgaben*

1. Beweise oder widerlege: Für bestimmte Punktkonfigurationen (z.B. reguläre Gitter, zufällige Punktwolken, Punkte auf Sphären oder simplizialen Flächen) ist der Erreichbarkeitsgraph stark zusammenhängend.
2. Finde einen allgemeinen Algorithmus, der für beliebiges n und Punktmenge P entscheidet, ob eine vollständige Erreichbarkeit aller Punkte durch den Prozess möglich ist.
3. Untersuche: Wie verändert sich die Erreichbarkeit bei Einführung von Übergangsverzögerungen oder zufälligen Störfaktoren in der Drehung?
4. Formuliere eine Optimierung: Finde einen minimalen Rotationspfad durch alle Punkte, der die Übergangsregeln beachtet.
5. Entwirf eine Visualisierung (in 2D, 3D oder nD-Projektionen), die den Prozess und Graphen dynamisch zeigt.

7.7.3 *Lösung*

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Graphen, Hypergraphen, Flächendurchlauf-Prozesse, Erreichbarkeitsgraphen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

7.8 DE SH-3 No.7PALLV1.0: Analyse und Klassifikation von Wellensuperpositionen im gekrümmten Raum

Zeit zur Bearbeitung: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *Ein Original*

Ein gekrümmter Raum $\mathbb{R}^3$ mit einer glatten Metrik $g_{ij}(x, y, z)$, in dem sich eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ ausbreitet. Diese erfüllt die verallgemeinerte Wellengleichung:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|}\partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

1

mit $|g| = \det(g_{ij})$ und c als lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Aufgaben:

1. Löse (symbolisch oder numerisch) die Wellengleichung im Spezialfall einer sphärisch symmetrischen Metrik:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

   mit geeigneten Randbedingungen (z. B. Dirichlet auf einer Kugeloberfläche $r = R$).

2. Zeige, dass sich die Lösung Ψ als Superposition von Eigenfunktionen der Laplace-Beltrami-Operatoren schreiben lässt, und berechne explizit die ersten nichttrivialen Moden.

3. Berechne das Gesamtenergiespektrum durch Integration über den Raum:

$$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right] \sqrt{|g|}\, d^3x$$

4. Untersuche numerisch oder analytisch, wie sich die Energie über die Zeit verteilt –insbesondere bei Interferenz von zwei punktförmigen Quellen mit zeitlich phasenverschobener Emission.

5. Optional (Bonus): Modelliere und visualisiere den Effekt eines zeitabhängigen Metrikterms, etwa $g_{ij}(x, t)$, der eine Gravitationswelle simuliert. Untersuche, wie sich die Interferenzstruktur und Energieverteilung verändert.

7.8.1 Lösung

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Analyse, Klassifikation, Wellen, Raumkrümmung
UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 023cf134-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

7.9 DE SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastische Analyse von Wellenphänomenen mittels Fourier- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Zeit zur Bearbeitung: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *Ein Original*

Untersuchen Sie ein raumzeitlich abhängiges Wellenphänomen unter dem Einfluss eines stochastischen Rauschens. Die Wellenfunktion sei gegeben durch:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

wobei:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ eine deterministische Basiswelle ist,
- $N(x,t,\omega)$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwert 0 und stationärer Kovarianzfunktion ist.

Gegeben:
Ein Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

und bekannter Rauschstärke σ^2 sowie Skalenparameter $\lambda > 0$.

7.9.1 Aufgaben

1. **Modellierung:** Formulieren Sie $N(x,t,\omega)$ als Gauß-Prozess mit obiger Kovarianzfunktion.
2. **Simulation:** Simulieren Sie mehrere Realisierungen von $\Psi(x,t,\omega)$ auf einem Gitter (x_i, t_j) für verschiedene Parameter σ^2 und k.
3. **Statistik:** Berechnen Sie Erwartungswert $E[\Psi(x,t)]$ und Varianz $Var[\Psi(x,t)]$ sowohl analytisch als auch aus den simulierten Daten.
4. **Spektralanalyse:** Führen Sie eine Fourier-Zerlegung von $\Psi(x,t,\omega)$ durch und berechnen Sie die spektrale Energiedichte.
5. **Extremwertstatistik:** Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Maxima im Intervall $[a,b]$ mithilfe von Maximum-Likelihood oder Bayesianischen Methoden.

(Bonus) **Rekonstruktion:** Trainieren Sie ein neuronales Netz, das aus verrauschten Beobachtungen $\Psi(x,t,\omega)$ die Basiswelle $\psi(x,t)$ rekonstruiert.

7.9.2 Lösung

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: NAM **Stichwörter**: Stochastik, Analyse, Wellenphänomene, Fourier-Transformation, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

7.10 DE SH-5 Test.1PALLV1.0: Zahlentheorie –Diophantische Gleichungen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *Ein Original*

Finde alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Diophantischen Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Erkläre deinen Lösungsweg und bestimme alle möglichen Werte für x und y, die diese Gleichung erfüllen. Diskutiere, wie man diese Art von Gleichung im Allgemeinen angehen kann.

7.10.1 Lösung

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Einfach **Stichwörter**: Zahlentheorie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763736 am 29.04.2025

7.11 DE SH-6 Test.2PALLV1.0: Kombinatorik –Anordnungen und Permutationen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Wie viele verschiedene Wege gibt es, 5 verschiedene Bücher auf 3 Regalen anzuordnen, wenn auf jedem Regal mindestens ein Buch platziert werden muss und die Regale keine unendliche Kapazität haben? Erkläre den Lösungsweg unter Verwendung der Prinzipien der Inklusion und Exklusion.

7.11.1 Lösung

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Kombinatorik

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561273 am 29.04.2025

7.12 DE SH-7 Test.3PALLV1.0: Geometrie −Kreisgeometrie und Tangenten

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $r = 10$. Ein Punkt P liegt außerhalb des Kreises und hat einen Abstand von $OP = 17$. Bestimmen Sie die Länge der Tangente von P an den Kreis und erläutern Sie die Berechnung mithilfe des Satzes des Pythagoras.

Erklären Sie, warum die Länge der Tangente nur von der Differenz zwischen den Abständen zwischen Punkt und Mittelpunkt und dem Radius des Kreises abhängt.

7.12.1 Lösung

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Geometrie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-198257198275 am 29.04.2025

7.13 DE SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta-Kombination durch Fouriertransformationen

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *Ein Original*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine glatte, rasch fallende Funktion (d. h. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), sodass für ihre Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

folgende Identität gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Beweise mit Hilfe der Poissonschen Summenformel, dass die obige Gleichung unter geeigneten Bedingungen erfüllt ist.
2. Zeige, dass mit geeigneter Wahl von $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ für $\Re(s) > 1$, sich Aussagen über die analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion ableiten lassen.
3. Untersuche, wie die Beziehung in höhere Dimensionen erweitert werden kann (Fourier auf dem $\mathbb{R}^n$) und welche Rolle dabei die symmetrische Struktur in der Zeta-Analyse spielt.
4. Betrachte die Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

und zeige, dass sie sich als eine Art Fourierreihe der Zeta-Funktion interpretieren lässt. Leite eine Darstellung in Abhängigkeit von $\hat{f}$ her.

7.13.1 Hinweise

- Verwende die Poisson-Summenformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Nutze Eigenschaften der Mellin-Transformation für Teilaufgaben zu $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Beachte: Diese Aufgabe verlangt ein Verständnis für komplexe Analysis, Distributionentheorie, Fouriertransformation und spezielle Funktionen.

7.13.2 Lösung

Keine Lust

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Zeta-Kombination, Fouriertransformationen, Zeta-Funktion

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-239238527383 am 03.05.2025

7.14 DE SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximale Schnitte in k-uniformen Hypergraphen

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben sei ein k-uniformer Hypergraph $H = (V, E)$, d. h. jeder Hyperrand $e \in E$ verbindet genau k Knoten aus der Knotenmenge V. Definiere einen **Schnitt** als eine Partition von V in zwei disjunkte Teilmengen $V_1 \cup V_2 = V$, wobei ein Hyperrand **geschnitten** ist, wenn er Knoten aus beiden Teilen enthält.

Zeige oder widerlege:

Für jedes $k \geq 2$ existiert eine Partition von V in zwei Mengen, sodass mindestens $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ Hyperkanten geschnitten werden.

Zusatz: Wie ändert sich die untere Schranke bei zufälliger Partition?

7.14.1 Lösung

Keine Lust

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-230587091872 am 03.05.2025

7.15 DE KTB-1 No.14PALLV1.0: Optimale Komplexität eines adaptiven Primalitätsverfahrens

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *Ein Original*

Problemstellung

Ein adaptiver Primalitätstest ist ein Algorithmus, der bei der Prüfung einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ auf Primzahl-Eigenschaft schrittweise zwischen probabilistischen und deterministischen Verfahren entscheidet. Beispiele sind Miller-Rabin, Baillie-PSW oder AKS.

Entwickle und analysiere ein adaptives Primalitätsverfahren mit folgender Eigenschaft:

- Der Algorithmus startet mit einem probabilistischen Test (z. B. Miller-Rabin).
- Falls dieser Test mehrfach „bestanden“wird, führt das System bei Grenzfällen einen deterministischen Subtest durch (z. B. Lucas, ECPP, oder reduzierte AKS-Stufe).
- Die Gesamtkomplexität des Verfahrens ist abhängig von der Größe von n sowie von der angenommenen Fehlerwahrscheinlichkeit ε. Aufgabe: Finde eine asymptotisch optimale Kombination solcher Verfahren (mit Beweis) und berechne die minimale erwartete Laufzeit für die Entscheidung „prim“vs. „nicht prim“unter Annahme realistischer Verteilungen zufällig gewählter Zahlen $n \in [1, N]$. **Ziel:**
- Analysiere das Modell der **Fehlerkontrollierten adaptiven Komplexität**.
- Entwickle eine Funktionsklasse $T(n, \varepsilon)$, die die Laufzeit (im Erwartungswert) des optimalen Verfahrens beschreibt.
- Vergleiche deine Lösung mit bekannten Verfahren wie Miller-Rabin (mehrfach), Baillie-PSW und deterministischem AKS.

7.15.1 Lösung

Kategorie: Kaiketsu und Toku, Bunseki, Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Schwer **Stichwörter**:

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209843782653 am 11.05.2025

7.16 DE SHB-3 No.15PALLV1.0: Lösungsstruktur verallgemeinerter rekursiver Polynome

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben ist eine rekursive Definition:

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

mit Startwerten $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ und $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$

Analysiere:

- Bedingungen für geschlossene Form
- Struktur der Nullstellen
- Zusammenhang mit klassischen Polynomen (z. B. Tschebyscheff-, Legendre-, Hermite-Polynome)

7.16.1 Lösungsstruktur (Allgemeine Schritte)

*7.16.2 1. **Analyse der Rekursion***

- Bestimme den Rekursionsgrad k
- Klassifiziere die Koeffizienten $a_i(x)$
  - Konstant? Linear? Allgemeines Polynom?

*7.16.3 2. **Charakteristisches Polynom***

- Führe eine Transformation analog zur linearen Rekursion ein:
  - Betrachte ggf. lineare Unabhängigkeit der Basis $P_0, \ldots, P_k$
- Finde Lösung über charakteristisches Polynom (bei konstanten a_i)

*7.16.4 3. **Darstellung über Matrixmethoden***

- Schreibe die Rekursion als Matrixsystem:
  $$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$
  mit Vektor $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$
- Untersuche Eigenwerte und Eigenvektoren von $A(x)$

*7.16.5 4. **Vergleich mit bekannten Familien***

- Überprüfe, ob sich das Polynom in einer bekannten Klasse (orthogonal, symmetrisch etc.) einordnen lässt.

*7.16.6 5. **Nullstellenstruktur***

- Verwende numerische Verfahren zur Analyse der Nullstellen
- Untersuche Konvergenzverhalten (z. B. bei $n \to \infty$)

*7.16.7 6. **Symbolische Lösung (falls möglich)***

- Suche geschlossene Formen (z. B. durch Generating Functions, Umformung zu Differentialgleichungen)
- Finde explizite Darstellung über Basisfunktionen oder kombinatorische Strukturen

7.16.8 Lösung

Solution for n15 in de

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Schwer **Stichwörter**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 02d58e48-ddcb-4401-869a-c8e8a463a653 am 11.05.2025

7.17 DE SHKS-1 No.16PALLV1.0: Turing-Maschine mit beschränktem Gedächtnis –Korrektheitsbeweis

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *Ein Original*

Gegeben sei eine Turing-Maschine M_b, deren Arbeitsband auf $O(\log n)$ Speicherzellen beschränkt ist. Zeige, dass M_b korrekt eine bestimmte Sprache L entscheidet, z. B.:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

oder eine andere spezifische Sprache, bei der Speicherbeschränkung relevant ist.

7.17.1 Additionale Information

- Definitionen von Turingmaschinen (TM) und beschränkter Speicher (z. B. logarithmischer Platz)
- Formale Modelle wie LBA (Linear Bounded Automata)
- Vergleich mit regulären oder kontextfreien Sprachen
- Boolesche Logik & Invariantenmethoden
- Standard-Logikbeweise (z. B. Induktion, Widerspruch)
- Skizzen auf Papier oder Notizzettel

7.17.2 Anforderungen

*7.17.3 **1. Formale Spezifikation***

- Definiere die beschränkte TM M_b formal:
  - $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Begrenzung: Arbeitsbandgröße $\leq c \cdot \log n$

*7.17.4 **2. Sprache L beschreiben***

- Beweise, dass $L \in \mathsf{L}$ (entscheidbar mit logarithmischem Platz)
- Beispiele:
  - Ausgewogene Anzahl von Symbolen (z. B. gleiche Anzahl a und b)
- Erkennung einfacher regulärer Muster mit Platzoptimierung

*7.17.5 **3. Konstruktion/Simulation***

- Beschreibe die Strategie der TM mit wenig Speicher:
  - Lesezeichen (Pointer-Technik)
- Zwei-Pass-Verfahren
  - Zähler in Binärdarstellung auf Arbeitsband

*7.17.6 **4. Korrektheit***

- Verwende Invarianz oder Simulation:
  - Bei jedem Schritt bleibt die Invariante erhalten (z. B. Zählgleichheit)
- Zeige: Wenn TM akzeptiert, dann $w \in L$; wenn $w \in L$, dann akzeptiert TM

7.17.7 ***5. Platzkomplexität nachweisen***

- Analyse: Alle Arbeitsschritte benötigen nur $O(\log n)$ Speicherzellen
- Argumentiere, dass keine unzulässige Speicherung erfolgt

7.17.8 ***6. Abschluss***

- Beende mit einem vollständigen Beweis (z. B. durch vollständige Induktion über die Länge von w)
- Zeige, dass der beschränkte Speicher **ausreicht und korrekt arbeitet**

7.17.9 *Lösung*

Solution for n16 in de

Kategorie: Shoemei, Kōchiku und Sekkei **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 7cf1fbfd-0b70-48ef-9d18-bb5fc8419a55 am 11.05.2025

7.18 DE BUK-1 No.17PALLV1.0: Quantenfeldmodell einer Wellenpaketinterferenz

Zeit zur Bearbeitung: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *Ein Original*

Gegeben ist ein quantenfeldtheoretisches Modell zur Beschreibung der Interferenz zweier sich bewegender Wellenpakete im skalaren Feld. Entwickeln Sie ein vollständiges theoretisches und numerisches Modell, das die Konstruktion, Entwicklung und Interferenz der Wellenpakete innerhalb der Quantenfeldtheorie beschreibt und analysiert.

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

1. **Theoretische Grundlagen**
   - Erläutern Sie die Quantisierung eines freien skalaren Feldes.
   - Leiten Sie den Feldoperator $\hat{\phi}(x,t)$ her.
   - Stellen Sie das Kommutatorverhalten von $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$ dar.
2. **Konstruktion der Wellenpaketzustände**
   - Definieren Sie zwei orthogonale Gausssche Impulsverteilungen $f_1(k)$, $f_2(k)$.
   - Leiten Sie den Zustand
     $$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger\, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger\, dk\right)|0\rangle$$
     her und normalisieren Sie ihn.
3. **Erwartungswert und Interferenz**
   - Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
   - Identifizieren Sie Kreuzterme und deren Beitrag zur Interferenz.
   - Visualisieren Sie das Interferenzmuster in Abhängigkeit von x, t, δ.
4. **Zeitentwicklung und Wellenpaketverbreitung**
   - Simulieren Sie die Ausbreitung der Wellenpakete in Raum und Zeit.
   - Analysieren Sie den Einfluss von Gruppen- und Phasengeschwindigkeit auf die Interferenzstruktur.
   - Diskutieren Sie auftretende Dispersionsphänomene.
5. **Erweiterung auf Feldoperatorprodukte**
   - Berechnen Sie die Zwei-Punkt-Funktion $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
   - Analysieren Sie deren Raum-Zeit-Struktur.
   - Diskutieren Sie Implikationen für mögliche Messungen.
6. **Experimentelle Interpretation und Modellvalidierung**
   - Vergleichen Sie Ihr Modell mit einem quantenoptischen Interferometer (z. B. Mach-Zehnder).
   - Diskutieren Sie Messoperatoren, Zustandskollaps und Interferenzsichtbarkeit.
7. **Reflexion, Komplexitätsanalyse und Modellgrenzen**

- Schätzen Sie die algorithmische Komplexität Ihrer numerischen Verfahren.
- Diskutieren Sie mögliche Erweiterungen (z. B. Spinorfelder, QED).
- Reflektieren Sie über die Aussagekraft und Grenzen der Skalarfeldtheorie. Die Ausarbeitung soll mathematisch fundiert, physikalisch interpretiert und durch numerische Simulationen ergänzt sein.

7.18.1 Lösung

Solution for n17 in de

Kategorie: Bunseki, Keisan **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 5ed4f53b-aec7-472c-a733-c1b3b3cf6a18 am 11.05.2025

7.19 DE SHK-1 No.23PALLV1.0: Rekursivität und Fixpunktkombinatoren im untypisierten Lambda-Kalkül

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *Ein Original*

Gegeben sei der untypisierte Lambda-Kalkül mit vollständiger β-Reduktion. Die Church-Kodierungen für natürliche Zahlen, ”iszero”, ”pred” und ”mult” gelten als bekannt.

Es sei der Fixpunktkombinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ gegeben sowie die Funktion:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Aufgabe:

Beweisen Sie formal und vollständig, dass $Y\ F$ ein korrektes rekursives Verfahren zur Fakultätsberechnung gemäß Church-Kodierung darstellt. Im Detail sind folgende Punkte zu zeigen:

1. **Reduktion für festes Argument:** Führen Sie eine vollständige β-Reduktion des Terms $(Y\ F)\ 3$ durch. Geben Sie alle Reduktionsschritte bis zur finalen Church-Kodierung an.

2. **Korrektheitsbeweis durch Induktion:** Führen Sie einen strukturellen Induktionsbeweis über die Church-Zahlen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(Y\ F)\ n \rightarrow^{*}_{\beta} \text{fac}_n$$

   wobei fac_n die Church-Kodierung von $n!$ ist.

3. **Fixpunkteigenschaft:** Beweisen Sie formal, dass $Y\ F = F\ (Y\ F)$, und zeigen Sie, weshalb dieser Ausdruck die rekursive Berechnung ermöglicht.

4. **Vergleich mit dem Z-Kombinator:**

   - Definieren Sie den Z-Kombinator.
   - Vergleichen Sie die Reduktionslänge von $(Y\ F)\ 3$ und $(Z\ F)\ 3$.
   - Diskutieren Sie, in welchen Kontexten Z bevorzugt werden sollte. **Hinweis:** Für alle Reduktionsschritte sind die Zwischenterme explizit anzugeben. Nutzen Sie keine Vereinfachung oder Sprünge ohne Begründung.

7.19.1 Lösung

7.19.2 Aufgabe: Auswertung und Beweis der Fakultätsfunktion mittels Y-Kombinator

7.19.3 Ziel der Aufgabe

Gegeben ist die Anwendung des Y-Kombinators auf eine rekursiv definierte Fakultätsfunktion F und deren Anwendung auf die Church-Zahl c_3:

$$(Y\,F)\,c_3$$

Ziel ist es, den Ausdruck vollständig auszuwerten und zu zeigen, dass er äquivalent zur Church-Zahl c_6 ist. Dies geschieht durch sprachliche und rechnerische Begründung in mehreren Teilschritten.

7.19.4 Definitionen der beteiligten Terme

Zunächst seien die verwendeten Terme beschrieben:

- Der Y-Kombinator ist definiert als:

$$Y := \lambda f.\,(\lambda x.\,f(x\,x))\,(\lambda x.\,f(x\,x))$$

- Die Funktion F definiert die Fakultätsfunktion:

$$F := \lambda f.\, \lambda n.\, \text{iszero}\; n\; c_1\; (\text{mult}\; n\; (f\; (\text{pred}\; n)))$$

  Sie ist als rekursive Funktion aufgebaut, jedoch ohne explizite Selbstreferenz. Diese wird durch Anwendung von Y erzeugt.

- Die Church-Zahl c_3 ist:

$$c_3 := \lambda f.\, \lambda x.\, f(f(f\, x))$$

7.19.5 Beweisidee: $Y\,F$ ist Fixpunkt von F

Ziel ist es, F rekursiv aufzubauen, ohne dass F sich direkt referenziert. Der Y-Kombinator erzeugt einen Fixpunkt, d.h. einen Wert $Y\,F$, der die Gleichung

$$Y\,F = F(Y\,F)$$

erfüllt. Dies zeigt man wie folgt:

$$\begin{aligned}
Y\,F &= (\lambda f.\, (\lambda x.\, f(x\,x))\, (\lambda x.\, f(x\,x)))\, F \\
&= (\lambda x.\, F(x\,x))\, (\lambda x.\, F(x\,x)) \\
&= F((\lambda x.\, F(x\,x))\, (\lambda x.\, F(x\,x))) \\
&= F(Y\,F)
\end{aligned}$$

Somit ist $Y\,F$ die rekursive Fakultätsfunktion.

7.19.6 Auswertung von $(Y\,F)\,c_3$

Nun wenden wir $Y\,F$ auf c_3 an:

$$(Y\,F)\,c_3 = F(Y\,F)\,c_3$$

Da $F = \lambda f.\, \lambda n.\, \text{iszero}\; n\; c_1\; (\text{mult}\; n\; (f(\text{pred}\; n)))$, ergibt sich durch Anwendung auf $Y\,F$ und c_3:

$$\begin{aligned}
F(Y\,F)\,c_3 &= \text{iszero}(c_3)\, c_1\, (\text{mult}\; c_3\; ((Y\,F)\, (\text{pred}(c_3)))) \\
&= \text{false}\, c_1\, (\text{mult}\; c_3\; ((Y\,F)\, c_2)) \\
&= \text{mult}(c_3)\, ((Y\,F)\, c_2)
\end{aligned}$$

Nun wenden wir denselben Vorgang rekursiv an:

$$\begin{aligned}
(Y\,F)\,c_2 &= \text{mult}(c_2)\, ((Y\,F)\, c_1) \\
(Y\,F)\,c_1 &= \text{mult}(c_1)\, ((Y\,F)\, c_0) \\
(Y\,F)\,c_0 &= \text{iszero}(c_0)\, c_1\, (\ldots) = c_1
\end{aligned}$$

7.19.7 Rückwärtsauswertung: Schrittweise Berechnung

Nun ergibt sich die rekursive Berechnung der Fakultät:

$$\begin{aligned}
&(Y\,F)\,c_0 = c_1 \\
&(Y\,F)\,c_1 = \text{mult}(c_1)\, c_1 = c_1 \cdot c_1 = c_1 \\
&(Y\,F)\,c_2 = \text{mult}(c_2)\, c_1 = c_2 \cdot c_1 = c_2 \\
&(Y\,F)\,c_3 = \text{mult}(c_3)\, c_2 = c_3 \cdot c_2 = c_6
\end{aligned}$$

7.19.8 Ergebnis

Damit ergibt sich:

$$(Y F)\, c_3 = c_6$$

Die Fakultätsfunktion liefert also korrekt das Ergebnis $3! = 6$ als Church-Zahl c_6.

7.19.9 Punktevergabe (15 Punkte)

Schritt	**Beschreibung**	**Punkte**	**Begründung**
1	Definition von Y korrekt erkannt	2	Fixpunktkombinator mit Selbstanwendung
2	Substitution F in Y	2	Richtige Einsetzung und Reduktion
3	Anwendung auf c_3	2	Beginn der rekursiven Berechnung
4	korrekte Ableitung von c_2, c_1, c_0	3	Vollständige Reduktion der Fakultät
5	korrektes Endergebnis c_6	2	Richtige Anwendung der Multiplikation
6	De Bruijn-Notation korrekt	2	Richtige Umformung aller Terme
7	Klarheit, Struktur	2	Verständlicher Aufbau
Gesamt		**15/15**	

7.19.10 Aufgabe: Fakultätsfunktion mit Y-Kombinator in De-Bruijn-Notation

7.19.11 Ziel der Aufgabe

Es soll gezeigt werden, dass durch Anwendung des Fixpunktkombinators Y auf die rekursive Funktion F eine korrekt arbeitende Fakultätsfunktion entsteht. Die Auswertung erfolgt in **De-Bruijn-Notation**, wodurch Namenskonflikte vermieden werden und Bindungen präzise verfolgt werden können.

7.19.12 Ausgangslage: Definition der Terme

Die benannten Terme lauten:

$$
\begin{aligned}
Y &= \lambda f.\,(\lambda x.\,f(x\,x))(\lambda x.\,f(x\,x))\\
F &= \lambda f.\,\lambda n.\,\text{iszero}\;n\;c_1\;(\text{mult}\;n\;(f(\text{pred}\;n)))
\end{aligned}
$$

Die Church-Zahl drei:

$$
c_3 := \lambda f.\,\lambda x.\,f(f(f\,x))
$$

7.19.13 Übersetzung in De-Bruijn-Notation

Wir benennen alle gebundenen Variablen durch natürliche Zahlen (je näher an der Bindung, desto kleiner):

- $Y = \lambda.\,(\lambda.\,1\;(0\;0))\,(\lambda.\,1\;(0\;0))$
- $F = \lambda.\,\lambda.\,\text{iszero}\;0\;c_1\;(\text{mult}\;0\;(1\;(\text{pred}\;0)))$

Zur Erklärung:

- In Y wird f durch 1 referenziert (da x näher gebunden ist, ist $x = 0$, $f = 1$).
- In F ist $n = 0$, $f = 1$, also $f(\text{pred}(n)) = 1(\text{pred}\;0)$.

7.19.14 Bildung des Fixpunkts

Nun setzen wir:

$$
Y\,F = (\lambda.\,(\lambda.\,1\;(0\;0))\,(\lambda.\,1\;(0\;0)))\;F
$$

Wende Auswertungsschritte an:

$$
\begin{aligned}
Y\,F &= (\lambda.\,(\lambda.\,1\;(0\;0))\,(\lambda.\,1\;(0\;0)))\;F\\
&\to (\lambda.\,F\;(0\;0))\,(\lambda.\,F\;(0\;0))\\
&\to F\;((\lambda.\,F\;(0\;0))\,(\lambda.\,F\;(0\;0)))\\
&\to F(Y\,F)
\end{aligned}
$$

Damit ist formal gezeigt:

$$
Y\,F = F(Y\,F)
$$

Die erzeugte Funktion $Y\,F$ erfüllt also die gewünschte Rekursionseigenschaft.

7.19.15 Anwendung auf Church-Zahl 3 (ebenfalls in De-Bruijn)

Die Church-Zahl 3 in De-Bruijn:

$$
c_3 = \lambda.\,\lambda.\,1\;(1\;(1\;0))
$$

Wir wenden $Y\,F$ auf c_3 an:

$$
Y\,F\;c_3 = F(Y\,F)\;c_3
$$

Einsetzen in die Definition von F in De-Bruijn:

$$F = \lambda.\,\lambda.\,\text{iszero } 0\ c_1\ (\text{mult } 0\ (1(\text{pred } 0)))$$

2738 Daraus folgt:

$$\begin{aligned} F(YF)\,c_3 &= (\lambda.\,\lambda.\,\text{iszero } 0\ c_1\ (\text{mult } 0\ (1(\text{pred } 0))))\,YF\,c_3 \\ &\to \text{iszero } c_3\ c_1\ (\text{mult } c_3\ (YF\,(\text{pred } c_3))) \end{aligned}$$

Dies ergibt durch rekursive Anwendung:

$$\begin{aligned} (YF)\,c_3 &= \text{mult}(c_3)\,((YF)\,c_2) \\ (YF)\,c_2 &= \text{mult}(c_2)\,((YF)\,c_1) \\ (YF)\,c_1 &= \text{mult}(c_1)\,((YF)\,c_0) \\ (YF)\,c_0 &= \text{iszero}(c_0)\,c_1\,(\ldots) = c_1 \end{aligned}$$

2740 *7.19.16 Rückberechnung*

$$\begin{aligned} (YF)\,c_0 &= c_1 \\ (YF)\,c_1 &= \text{mult}(c_1, c_1) = c_1 \\ (YF)\,c_2 &= \text{mult}(c_2, c_1) = c_2 \\ (YF)\,c_3 &= \text{mult}(c_3, c_2) = c_6 \end{aligned}$$

7.19.17 Schlussfolgerung

2742 Der rekursive Aufruf endet bei c_0 mit dem Wert c_1 (entspricht 1). Die Rückrechnung liefert:

$$(YF)\,c_3 = c_6$$

Somit funktioniert die rekursive Definition korrekt. Der Ausdruck ist in De-Bruijn-Notation vollständig nachvollzogen,
2744 die Bindungsstruktur ist korrekt, und der Beweis der semantischen Korrektheit erbracht. □

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
2746 **UUID**: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 8092f0bf-7bf5-4082-ab2c-92e9403967f0 am 17.05.2025

7.20 DE SHK-2 No.24PALLV1.0: Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in Zustandssummen und Vakuumenergien der Quantenfeldtheorie

Zeit zur Bearbeitung: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *Ein Original*

Untersuchen und beweisen Sie die Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in der quantenfeldtheoretischen Regularisierung und Thermodynamik, speziell im Kontext der Zustandssummen und Vakuumenergie.

7.20.1 Aufgabenstellung

Gegeben sei ein skalares Quantenfeld auf einer kompakten Raumzeit mit Periodizität β in der Zeitdimension (entsprechend einer Temperatur $T = 1/\beta$) und einer Raumdimension L. Die Eigenfrequenzen des Feldes lauten:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Zeigen Sie durch Anwendung der **Zeta-Regularisierung**, dass die thermodynamische Zustandssumme

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

mit Hilfe der analytischen Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion und der Gammafunktion regulär berechnet werden kann.

7.20.2 Teilaufgaben

1. **Herleitung der regulierten Vakuumenergie** Leiten Sie den Ausdruck für die regulierte Vakuumenergie $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ unter Verwendung der **Zeta-Funktion** her. Zeigen Sie, dass:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{und} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

   und bringen Sie den Ausdruck auf eine Form mit Gammafunktionen via Mellin-Transformation.

2. **Reduktion zu einer Epstein-Zeta-Funktion** Zeigen Sie, dass die doppelte Summe über n und m als **Epstein-Zeta-Funktion** darstellbar ist. Analysieren Sie deren analytische Eigenschaften.

3. **Temperaturabhängigkeit und thermodynamische Funktionen** Verwenden Sie den regulierten Ausdruck zur Ableitung der freien Energie $F(\beta)$, inneren Energie $U(\beta)$ und Entropie $S(\beta)$. Zeigen Sie, wie die Gammafunktion in der asymptotischen Entwicklung für hohe und niedrige Temperaturen erscheint.

4. **Vergleich mit Casimir-Energie** Beweisen Sie, dass die Nulltemperatur-Grenze der Zustandssumme zur **Casimir-Energie** übergeht, und dass die Regularisierung exakt dieselbe Form liefert wie bei der klassischen Zeta-Casimir-Methode.

7.20.3 Lösung

Solution for n24 in de

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: NUM **Stichwörter**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: cc85e4ff-ce95-4192-9b9c-07372f6d7fdb am 24.05.2025

7.21 DE SHK-3 No.25PALLV1.0: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Zeit zur Bearbeitung: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Ein Original*

7.21.1 Aufgabe: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Gegeben sei ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion im Ortsraum:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Diese Funktion beschreibt ein stationäres, frei bewegliches Teilchen mit gaußscher Ortsverteilung.

7.21.2 ***Teilaufgaben***

7.21.3 Normierung der Wellenfunktion

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A so, dass die Wellenfunktion normiert ist, d. h.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

7.21.4 Fourier-Transformation in den Impulsraum

Berechnen Sie die Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ der Wellenfunktion mittels Fourier-Transformation gemäß:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} px} \, dx$$

Führen Sie die Integration vollständig durch und geben Sie die resultierende Funktion $\phi(p)$ in expliziter Form an.

7.21.5 Heisenbergsche Unschärferelation

Bestimmen Sie die Standardabweichungen σ_x und σ_p der Orts- bzw. Impulsverteilung:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

und zeigen Sie, dass das Produkt dieser Streuungen die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

7.21.6 Physikalische Interpretation der Grenzfälle

Diskutieren Sie qualitativ den physikalischen Grenzfall $a \to 0$. Was geschieht mit der Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ und wie ist dieser Grenzfall physikalisch zu interpretieren? Beziehen Sie sich dabei auf die Konzepte der Lokalisierung und Impulsunschärfe.

7.21.7 ***Hinweis:***

Diese Aufgabe eignet sich auch zur numerischen Auswertung und grafischen Darstellung in Python oder MATLAB. Optional kann die Fourier-Transformation auch symbolisch mit geeigneten Softwaretools (z. B. SymPy oder Mathematica) verifiziert werden.

7.21.8 Lösung

Solution for n25 in de

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 04e72fe3-a112-4eee-9352-964ca9fa0a13 am 24.05.2025

8 Solution

8.1 EN SH-1 No.1PALLV1.0: Proof that $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Estimated time for solving: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prove that for every natural number n the sum of the first n odd numbers is equal to n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
- Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary n, then it is also true for $n + 1$.

8.1.1 Solution

Induction base: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induction step: Let $n \in \mathbb{N}$ and the statement is true for n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Then it holds:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Category: Shoemei **Difficulty**: Easy **Tags**: induction, sum, odd numbers, natural numbers
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 429b0f2a5-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

8.2 EN SKK-1 No.4-1PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1

Estimated time for solving: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

The points are distributed in space such that:

- no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

A **windmill process** starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

8.2.1 Transition rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

8.2.2 Goal

Prove that all points in P are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

8.2.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Hard **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

8.3 EN SKK-1/2 No.4-2PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*
Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- $2n$ random points in general position in $\mathbb{R}^n$,
- point sets A and B with $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

8.3.1 New rule

each point from P may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

8.3.2 Goal

Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

8.3.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

8.4 EN SKK-1/3 No.4-3PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3

Estimated time for solving: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

Additionally, n and k are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

A windmill process starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

8.4.1 Transition Rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

8.4.2 Goal

Prove that in this construction all points in P are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to n‘5.

8.4.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac32df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

8.5 EN SKK-1/4 No.4-4PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4

Estimated time for solving: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given: Three points A_1, A_2, A_3 form an equilateral windmill in $\mathbb{R}^2$, where the center M of the equilateral triangle is also given. A point P lies outside the windmill.

8.5.1 Task

Determine the reflection of point P on the line passing through two windmill points (e.g., A_1 and A_2). Then calculate the distance between P and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center M and is orthogonal to the vector $\vec{M}P$. **Hint**: Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in $\mathbb{R}^2$.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

8.5.2 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaiketsu and Toku **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hypersurface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

8.6 EN SKT-1 No.5PALLV1.0: Distances in the n-dimensional space

Estimated time for solving: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Given n points $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point P_i represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the i-th position)

1. Prove that the**points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Represent the points $P_1, \ldots, P_n$ as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
3. **Additionally prove**: The points $P_1, \ldots, P_n$ are**linearly independent** and form an**($n-1$)-dimensional simplex** in $mathbbR^n$.
4. Compute the volume of the regular simplex in $mathbbR^{n-1}$.

8.6.1 Solution

1. **Prove that all points have the same distance $\sqrt{2}$**

   Given: The points $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ are:
$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \qquad P_j = e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$
   Difference between two points: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$

   This vector has:
   - at position i: 1,
   - at position j: -1,
   - otherwise 0

   Norm:
$$\| P_i - P_j \|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
   $\rightarrow$ All points have the same distance from each other.
2. **Matrix representation**
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
3. **Linear independence**

   Definition: A set of vectors is linearly independent if:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \, \forall \, i$$

Proof:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ lambda_2 \\ vdots \\ lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

The standard basis is**linearly independent**.

4. **Volume of the regular simplex in** $\mathbb{R}^{n-1}$

We shift the points so that they are centered at the origin and calculate the volume using Gram determinants or the formula for the volume of a simplex from vectors:

Volume formula for simplex from vectors

For an $(n-1)$-simplex S with basis vectors $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

where G is the**Gram matrix**:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

It is known that the volume of a regular simplex with edge length ℓ in $\mathbb{R}^{n-1}$ is:

$$\text{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

For $\ell = \sqrt{2}$:

$$\text{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

This is the volume of a simplex with n vertices and edge length $\sqrt{2}$.

5. **Points Table**

Table 2: Points Allocation for the Solution

Condition	**Description**	**Points**
hline Norm Equation Setup	Prove that all points have the same distance $\sqrt{2}$.	3
hline Matrix	Represent the points as a matrix.	1
hline Equation and Independence	Prove linear independence.	2
hline Volume Formula	Derive the volume formula for the simplex.	1
hline Example	Provide an example calculation.	2
hline General Summary	Summarize the results.	2
hline		

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: induction, geometry, space, real numbers
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

8.7 EN SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensional surface traversal processes and reachability graphs

Estimated time for solving: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *An Original*

Given a point set $P \subset \mathbb{R}^n$ with $|P| = kn$ for some $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, where the points are in general position (i.e., no $n+1$ points lie in an $(n-1)$-dimensional hyperplane).

A rotation traversal process works as follows:

- Choose a starting point $p_0 \in P$.
- Construct an $(n-1)$-hypersurface (a ”surface of revolution”) through this point.
- This hypersurface is continuously rotated in a fixed manner (e.g., according to a fixed orientation in space).
- As soon as another point $p_i \in P$ is ”touched” by the surface (i.e., is located on the surface), p_i becomes the new anchor point.
- The movement continues from there.

8.7.1 Extension

- Between each rotation, the orientation of the surface is changed using a given matrix of $SO(n)$ (i.e., each rotation is specified by a transition operator).
- Interpoint relationships are stored as a directed graph $G = (V, E)$, where a directed transition $p_i \to p_j$ exists if p_j was reached by a feasible rotation of p_i.

8.7.2 Exercises

1. Prove or disprove: For certain point configurations (e.g., regular grids, random point clouds, points on spheres, or simplicial surfaces), the reachability graph is strongly connected.
2. Find a general algorithm that, for any n and point set P, decides whether complete reachability of all points is possible through the process.
3. Investigate: How does reachability change when transition delays or random perturbations are introduced into the rotation?
4. Formulate an optimization: Find a minimal rotation path through all points that respects the transition rules.
5. Design a visualization (in 2D, 3D, or nD projections) that dynamically shows the process and graph.

8.7.3 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Graphs, Hypergraphs, Surface traversal processes, Reachability graphs
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 19999942-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

8.8 EN SH-3 No.7PALLV1.0: Analysis and classification of wave superpositions in curved space

Estimated time for solving: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *An Original*

A curved space $\mathbb{R}^3$ with a smooth metric $g_{ij}(x, y, z)$, in which a wave function $\Psi(x, y, z, t)$ propagates. This satisfies the generalized wave equation:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|} \partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

with $|g| = \det(g_{ij})$ and c as the local propagation velocity.

Tasks:

1. Solve (symbolically or numerically) the wave equation in the special case of a spherically symmetric metric:

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2$$

   with suitable boundary conditions (e.g., Dirichlet on a spherical surface $r = R$).

2. Show that the solution Ψ can be written as a superposition of eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators and explicitly calculate the first nontrivial modes.

3. Calculate the total energy spectrum by integrating over space:

   $$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] \sqrt{|g|} \, d^3x$$

4. Investigate numerically or analytically how the energy is distributed over time −especially in the case of interference between two point sources with phase-shifted emission.

5. Optional (Bonus): Model and visualize the effect of a time-dependent metric term, such as $g_{ij}(x, t)$, simulating a gravitational wave. Investigate how the interference structure and energy distribution change.

8.8.1 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Analysis, Classification, Waves, Curvature of space

UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 02398437-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

8.9 EN SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastic analysis of wave phenomena using Fourier and probability density functions

Estimated time for solving: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *An Original*

Investigate a spatiotemporally dependent wave phenomenon under the influence of stochastic noise. Let the wave function be given by:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

where:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ is a deterministic base wave,
- $N(x,t,\omega)$ is a Gaussian process with mean 0 and stationary covariance function.

Given:

A Gaussian process with a covariance function:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

and a known noise level σ^2 and scale parameter $\lambda > 0$.

8.9.1 Exercises

1. **Modeling:** Formulate $N(x,t,\omega)$ as a Gaussian process with the above covariance function.
2. **Simulation:** Simulate several realizations of $\Psi(x,t,\omega)$ on a grid (x_i,t_j) for different parameters σ^2 and k.
3. **Statistics:** Calculate the expected value $E[\Psi(x,t)]$ and the variance $Var[\Psi(x,t)]$ both analytically and from the simulated data.
4. **Spectral Analysis:** Perform a Fourier decomposition of $\Psi(x,t,\omega)$ and calculate the spectral energy density.
5. **Extreme Value Statistics:** Estimate the probability distribution of the maxima in the interval $[a,b]$ using maximum likelihood or Bayesian methods.

(Bonus) **Reconstruction:** Train a neural network that reconstructs the base wave $\psi(x,t)$ from noisy observations $\Psi(x,t,\omega)$.

8.9.2 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: NAM **Tags**: Stochastic, Analysis, Wave phenomena, Fourier transformation, Probability density functions

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

8.10 EN SH-5 Test.1PALLV1.0: Number theory −Diophantine equations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *An Original*

Find all integer solutions to the following Diophantine equation:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Explain your solution and determine all possible values for x and y that satisfy this equation. Discuss how to approach this type of equation in general.

8.10.1 Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Higher Easy **Tags**: Number theory

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763737 on 29.04.2025

8.11 EN SH-6 Test.2PALLV1.0: Combinatorics −arrangements and permutations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

How many different ways are there to arrange 5 different books on 3 shelves if each shelf must hold at least one book and the shelves do not have infinite capacity? Explain the solution using the principles of inclusion and exclusion.

8.11.1 Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Combinatorics

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561223 on 29.04.2025

8.12 EN SH-6 Test.3PALLV1.0: Geometry −Circle geometry and tangents

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

Given is a circle with center O and radius $r = 10$. A point P lies outside the circle and is at a distance of $OP = 17$. Determine the length of the tangent from P to the circle and explain the calculation using the Pythagorean theorem. Discuss why the length of the tangent depends only on the difference between the distances between the point and the center and the radius of the circle.

8.12.1 Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Geometry

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 12987462-1073-4d3b-9f5c-120987561273 on 29.04.2025

8.13 EN SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta combination through Fourier transformations

Estimated time for solving: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a smooth, rapidly decreasing function (i.e., $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) such that its Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx$$

the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Prove using Poisson's sum formula that the above equation satisfies under suitable conditions is.
2. Show that with a suitable choice of $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ for $\Re(s) > 1$, statements about the analytical continuation of the Riemann zeta function can be derived.
3. Investigate how the relationship can be extended into higher dimensions (Fourier on $\mathbb{R}^n$) and what role the symmetric structure plays in zeta analysis.
4. Consider the function

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

and show that it can be interpreted as a kind of Fourier series of the zeta function. Derive a representation as a function of $\hat{f}$.

8.13.1 Notes

- Use the Poisson sum formula:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Use properties of the Mellin transform for subproblems on $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Note: This problem requires an understanding of complex analysis, distribution theory, Fourier transform, and special functions.

8.13.2 Solution

No desire

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Zeta combination, Fourier transformations, Zeta function

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-198427198265 on 03.05.2025

8.14 EN SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximal numbers of cuts in k-uniform hypergraphs

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Given a k-uniform hypergraph $H = (V, E)$, i.e., each hyperedge $e \in E$ connects exactly k vertices from the vertex set V. Define a **cut** as a partition of V into two disjoint subsets $V_1 \cup V_2 = V$, where a hyperedge is **cut** if it contains vertices from both parts.

Prove or disprove:

For every $k \geq 2$, there exists a partition of V into two sets such that at least $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ hyperedges are intersected.

Addendum: How does the lower bound change under random partitioning?

8.14.1 Solution

No desire

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-172874618926 on 03.05.2025

8.15 EN KTB-1 No.14PALLV1.0: Optimal Complexity of an Adaptive Primality Test

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *An Original*

Problem

An adaptive primality test is an algorithm that, when testing a natural number $n \in \mathbb{N}$ for prime property, gradually decides between probabilistic and deterministic methods. Examples are Miller-Rabin, Baillie-PSW, or AKS.

Develop and analyze an adaptive primality method with the following property:

- The algorithm starts with a probabilistic test (e.g., Miller-Rabin).
- If this test is passed multiple times, the system performs a deterministic subtest (e.g., Lucas, ECPP, or reduced AKS level) for borderline cases.
- The overall complexity of the method depends on the size of n and the assumed error probability ε. Task: Find an asymptotically optimal combination of such methods (with proof) and calculate the minimum expected running time for the ”prime” vs. ”not prime” decision, assuming realistic distributions of randomly chosen numbers $n \in [1, N]$. **Goal:**
- Analyze the **error-controlled adaptive complexity** model.
- Develop a function class $T(n, \varepsilon)$ that describes the running time (in the expected value) of the optimal method.
- Compare your solution with well-known methods such as Miller-Rabin (multiple), Baillie-PSW, and deterministic AKS.

8.15.1 Solution

No desire

Category: Kaiketsu and Toku, Bunseki, Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Higher Difficult **Tags**:
UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-624352343132 on 11.05.2025

8.16 EN SHB-3 No.15PALLV1.0: Solution structure of generalized recursive polynomials

Estimated time for solving: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *An Original*

A recursive definition is given:

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

with initial values $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ and $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$
Analyze:

- Conditions for closed form
- Structure of the zeros
- Connection with classical polynomials (e.g., Chebyshev, Legendre, Hermite polynomials)

8.16.1 Solution structure (General steps)

8.16.2 1. ***Analysis of the recursion***

- Determine the degree of recursion k
- Classify the coefficients $a_i(x)$
- Constant? Linear? General polynomial?

8.16.3 2. ***Characteristic polynomial***

- Introduce a transformation analogous to linear recursion:
- Consider linear independence of the basis $P_0, \ldots, P_k$
- Find a solution using a characteristic polynomial (for constant a_i)

8.16.4 3. ***Representation using matrix methods***

- Write the recursion as a matrix system:
$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$
with vector $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$
- Examine the eigenvalues and eigenvectors of $A(x)$

8.16.5 4. ***Comparison with known families***

- Check whether the polynomial belongs to a known class (orthogonal, symmetric, etc.).

8.16.6 5. ***Root Structure***

- Use numerical methods to analyze the roots
- Investigate convergence behavior (e.g., for $n \to \infty$)

8.16.7 6. ***Symbolic Solution (if possible)***

- Search for closed forms (e.g., using generating functions, transforming into differential equations)
- Find explicit representations using basis functions or combinatorial structures

8.16.8 *Solution*

Solution for n15 in en

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Higher Difficult **Tags**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 0163d8ec-b771-44db-9f6f-6546b4733395 on 11.05.2025

8.17 EN SHKS-1 No.16PALLV1.0: Turing machine with limited memory −proof of correctness

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *An Original*

Given a Turing machine M_b whose working tape is limited to $O(\log n)$ memory cells. Show that M_b correctly decides a certain language L, e.g.:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

or another specific language where memory constraints are relevant.

8.17.1 Additional Information

- Definitions of Turing machines (TM) and bounded memory (e.g., logarithmic space)
- Formal models such as LBA (Linear Bounded Automata)
- Comparison with regular or context-free languages
- Boolean logic & invariant methods
- Standard logic proofs (e.g., induction, contradiction)
- Sketches on paper or notepad

8.17.2 Requirements

8.17.3 ***1. Formal Specification***

- Formally define the bounded TM M_b:
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Boundary: Working tape size $\leq c \cdot \log n$

8.17.4 ***2. Describe the language*** L

- Prove that $L \in \mathsf{L}$ (decidable with logarithmic space)
- Examples:
- Balanced number of symbols (e.g., equal number of a and b)
- Recognition of simple regular patterns with space optimization

8.17.5 ***3. Construction/Simulation***

- Describe the TM's low-memory strategy:
- Bookmarks (pointer technique)
- Two-pass method
- Counter in binary representation on the working tape

8.17.6 ***4. Correctness***

- Use invariance or simulation:
- At each step, the invariant is preserved (e.g., counting equality)
- Show: If TM accepts, then $w \in L$; if $w \in L$, then TM accepts

*8.17.7 **5. Prove space complexity***

- Analysis: All steps require only $O(\log n)$ memory cells
- Argue that no illegal storage occurs

*8.17.8 **6. Conclusion***

- Conclude with a complete proof (e.g., by complete induction on the length of w)
- Show that the bounded memory **is sufficient and works correctly**

8.17.9 Solution

Solution for n16 in en

Category: Shoemei, Kōchiku and Sekkei **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 76026e70-8f1d-4319-a13e-7f5c8955fc83 on 11.05.2025

8.18 EN BUK-1 No.17PALLV1.0: Quantum field model of wave packet interference

Estimated time for solving: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *An Original*

A quantum field theory model is given to describe the interference of two moving wave packets in a scalar field. Develop a complete theoretical and numerical model that describes and analyzes the construction, evolution, and interference of the wave packets within quantum field theory.

Complete the following subtasks:

1. **Theoretical Foundations**

- Explain the quantization of a free scalar field.
- Derive the field operator $\hat{\phi}(x, t)$.
- Describe the commutator behavior of $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$.

2. **Construction of the Wave Packet States**

- Define two orthogonal Gaussian momentum distributions $f_1(k)$, $f_2(k)$. - Derive the state

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$

  and normalize it.

3. **Expectation Value and Interference**

- Calculate the expectation value $\langle\Psi|\hat{\phi}(x, t)|\Psi\rangle$.
- Identify cross terms and their contribution to the interference.
- Visualize the interference pattern as a function of x, t, δ.

4. **Time Evolution and Wave Packet Propagation**

- Simulate the propagation of the wave packets in space and time.
- Analyze the influence of group and phase velocities on the interference structure.
- Discuss any dispersion phenomena that may occur.

5. **Extension to field operator products**

- Calculate the two-point function $\langle\Psi|\hat{\phi}(x, t)\hat{\phi}(x', t)|\Psi\rangle$.
- Analyze its space-time structure.
- Discuss implications for possible measurements.

6. **Experimental Interpretation and Model Validation**

- Compare your model with a quantum optical interferometer (e.g., Mach-Zehnder).
- Discuss measurement operators, state collapse, and interference visibility.

7. **Reflection, Complexity Analysis, and Model Limits**

- Estimate the algorithmic complexity of your numerical methods.
- Discuss possible extensions (e.g., spinor fields, QED).
- Reflect on the validity and limitations of scalar field theory. The paper should be mathematically sound, physically interpreted, and supplemented by numerical simulations.

8.18.1 Solution

Solution for n17 in en

Category: Bunseki, Keisan **Difficulty**: Darkside **Tags**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 5f69f358-a92b-4593-ac73-5aaf0fcb5f33 on 11.05.2025

8.19 EN SHK-1 No.23PALLV1.0: Recursivity and fixed-point combinators in the untyped lambda calculus

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *An Original*

Given is the untyped lambda calculus with complete β-reduction. The Church encodings for natural numbers, ”iszero”, ”pred”, and ”mult”, are considered known.

Let the fixed-point combinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ be given, as well as the function:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Task:

Prove formally and completely that $Y\ F$ is a correct recursive procedure for calculating factorials according to the Church encoding. The following points must be demonstrated in detail:

1. **Reduction for a fixed argument:** Perform a complete β-reduction of the term $(Y\ F)\ 3$. State all reduction steps up to the final Church encoding.

2. **Proof of correctness by induction:** Perform a structural induction proof on the Church numbers that for all $n \in \mathbb{N}$ the following holds:

   $$(Y\ F)\ n \rightarrow^{*}_{\beta} \text{fac}_n$$

   where fac_n is the Church encoding of $n!$.

3. **Fixed-Point Property:** Prove formally that $Y\ F = F\ (Y\ F)$, and show why this expression enables recursive computation.

4. **Comparison with the Z-Combinator:**

- Define the Z-combinator.
- Compare the reduction length of $(Y\ F)$ 3 and $(Z\ F)$ 3.
- Discuss in which contexts Z should be preferred. **Note:** For all reduction steps, the intermediate terms must be stated explicitly. Do not use simplifications or jumps without justification.

8.19.1 Solution

Solution for n23 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 887d0eeb-752d-454c-98be-4211f1b14647 on 17.05.2025

8.20 EN SHK-2 No.24PALLV1.0: Role of zeta and gamma functions in partition functions and vacuum energies of quantum field theory

Estimated time for solving: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *An Original*

Investigate and prove the role of zeta and gamma functions in quantum field theory regularization and thermodynamics, especially in the context of partition functions and vacuum energy.

8.20.1 Task

Given a scalar quantum field on a compact spacetime with periodicity β in the time dimension (corresponding to a temperature $T = 1/\beta$) and a spatial dimension L. The natural frequencies of the field are:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Using zeta regularization, show that the thermodynamic partition function

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

can be regularly calculated using the analytic extension of the Riemann zeta function and the gamma function.

8.20.2 Subtasks

1. **Derivation of the Regulated Vacuum Energy** Derive the expression for the regulated vacuum energy $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ using the **zeta function**. Show that:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

   and convert the expression to a gamma function form using the Mellin transform.

2. **Reduction to an Epstein zeta function** Show that the double sum over n and m can be represented as an Epstein zeta function. Analyze its analytical properties.

3. **Temperature Dependence and Thermodynamic Functions** Use the regularized expression to derive the free energy F(beta), internal energy U(beta), and entropy S(beta). Show how the gamma function appears in the asymptotic expansion for high and low temperatures.

4. **Comparison with Casimir Energy** Prove that the zero-temperature limit of the partition function transforms into the Casimir energy, and that the regularization yields exactly the same form as the classical zeta-Casimir method.

8.20.3 Solution

Solution for n24 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: NUM **Tags**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: ad5daf78-d753-4dd9-b3c5-8d62f9acd212 on 24.05.2025

8.21 *EN SHK-3 No.25PALLV1.0: Momentum space representation of a Gaussian wave packet*

Estimated time for solving: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *An Original*

8.21.1 *Task: Momentum-space representation of a Gaussian wave packet*

Given a one-dimensional quantum mechanical particle with the wave function in position space:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

This function describes a stationary, freely moving particle with a Gaussian spatial distribution.

8.21.2 ***Subtasks***

8.21.3 *Normalization of the wave function*

Determine the normalization constant A such that the wave function is normalized, i.e. i.e.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

8.21.4 *Fourier Transformation into Momentum Space*

Calculate the momentum space representation $\phi(p)$ of the wave function using the Fourier transformation according to:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complete the integration and state the resulting function $\phi(p)$ explicitly.

8.21.5 *Heisenberg's Uncertainty Principle*

Determine the standard deviations σ_x and σ_p of the position and momentum distributions, respectively:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

and show that the product of these dispersions satisfies the Heisenberg uncertainty principle:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

8.21.6 *Physical Interpretation of the Limiting Cases*

Discuss qualitatively the physical limiting case $a \to 0$. What happens to the momentum space representation $\phi(p)$ and how should this limiting case be interpreted physically? Refer to the concepts of localization and momentum uncertainty.

8.21.7 ***Note:***

This exercise is also suitable for numerical evaluation and graphical representation in Python or MATLAB. Optionally, the Fourier transform can also be verified symbolically using suitable software tools (e.g., SymPy or Mathematica).

8.21.8 *Solution*

Solution for n25 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 006fe438-4c31-4b38-a199-f0b4144a2e00 on 24.05.2025

9 Solution

9.1 *FR SH-1 No.1PALLV1.0: Prouver que* $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Temps estimé pour résoudre: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Un Original*

Prouver que pour tout nombre naturel n, la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un n quelconque, alors il est également vrai pour $n + 1$.

9.1.1 *Solution*

Base de l'induction : $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Étape d'induction : Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'énoncé est vrai pour n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Alors :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Catégorie: Preuve **Difficulté**: Facile **Étiquettes**: Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b le 19.04.2025

9.2 FR KAB-1 No.14PALLV1.0: Complexité optimale d'une méthode de primalité adaptative

Temps estimé pour résoudre: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* *Un Original*

Problème

Un test de primalité adaptatif est un algorithme qui, lorsqu'il teste la propriété de premier d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, choisit progressivement entre les méthodes probabilistes et déterministes. Parmi les exemples, on peut citer Miller-Rabin, Baillie-PSW ou AKS.

Développer et analyser une méthode de primalité adaptative présentant la propriété suivante :

- L'algorithme commence par un test probabiliste (par exemple, Miller-Rabin).
- Si ce test est réussi plusieurs fois, le système effectue un sous-test déterministe (par exemple, Lucas, ECPP ou niveau AKS réduit) pour les cas limites.
- La complexité globale de la méthode dépend de la taille de n et de la probabilité d'erreur supposée ε. Tâche : Trouver une combinaison asymptotiquement optimale de ces méthodes (avec preuve) et calculer le temps d'exécution minimum attendu pour la décision « premier » ou « non premier », en supposant des distributions réalistes de nombres $n \in [1, N]$ choisis aléatoirement. **Objectif :**
- Analyser le **modèle de complexité adaptative à erreur contrôlée**.
- Développer une classe de fonctions $T(n, \varepsilon)$ décrivant le temps d'exécution (en valeur attendue) de la méthode optimale.
- Comparer votre solution à des méthodes connues telles que Miller-Rabin (multiple), Baillie-PSW et AKS déterministe.

9.2.1 Solution

Solution for n14 in fr

Catégorie: Résolution et Résoudre, Analyse, Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Plus Difficile **Étiquettes**:

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: b6ff31f3-7845-47a3-803d-792690b52f48 le 11.05.2025

9.3 FR SHB-3 No.15PALLV1.0: Structure de solution des polynômes récursifs généralisés

Temps estimé pour résoudre: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Un Original*

Une définition récursive est donnée :

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x),$$

avec les valeurs initiales $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$ et $a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$
Analyser:

- Conditions pour la forme fermée
- Structure des zéros
- Lien avec les polynômes classiques (par exemple les polynômes de Tchebychev, Legendre, Hermite)

9.3.1 Structure de la solution (étapes générales)

*9.3.2 1. **Analyse de la récursivité***

- Déterminer le degré de récursivité k
- Classer les coefficients $a_i(x)$
- Constante? Linéaire? Polynôme général ?

*9.3.3 2. **Polynôme caractéristique***

- Introduire une transformation analogue à la récursivité linéaire :
- Considérons l'indépendance linéaire de la base $P_0, \ldots, P_k$
- Trouver une solution via un polynôme caractéristique (avec constante a_i)

*9.3.4 3. **Représentation à l'aide de méthodes matricielles***

- Écrire la récursivité sous forme de système matriciel :
  $$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$
  avec le vecteur $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$
- Étudier les valeurs propres et les vecteurs propres de $A(x)$

*9.3.5 4. **Comparaison avec des familles connues***

- Vérifier si le polynôme peut être classé dans une classe connue (orthogonale, symétrique, etc.).

*9.3.6 5. **Structure zéro***

- Utiliser des méthodes numériques pour analyser les zéros
- Étudier le comportement de convergence (par exemple pour $n \to \infty$)

9.3.7 6. ***Solution symbolique (si possible)***

- Recherche de formes fermées (par exemple par génération de fonctions, transformation en équations différentielles)
- Trouver une représentation explicite via des fonctions de base ou des structures combinatoires

9.3.8 Solution

Solution for n15 in fr
Catégorie: Preuve, Analyse **Difficulté**: Plus Difficile **Étiquettes**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 731c2ede-a852-4e70-90bf-cec748f09bf2 le 11.05.2025

9.4 FR SHKS-1 No.16PALLV1.0: Machine de Turing à mémoire limitée –preuve de correction

Temps estimé pour résoudre: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* *Un Original*

Étant donné une machine de Turing M_b dont la bande de travail est limitée à $O(\log n)$ cellules mémoire. Montrer que M_b décide correctement d'une certaine langue L, par exemple Par exemple :

$$L = \{l \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(l) = \#b(l)\}$$

ou tout autre langage spécifique où les contraintes de mémoire sont pertinentes.

9.4.1 Informations Complémentaires

- Définitions des machines de Turing (MT) et de la mémoire limitée (par exemple, espace logarithmique)
- Modèles formels tels que LBA (Linear Bounded Automata)
- Comparaison avec des langages réguliers ou sans contexte
- Logique booléenne et méthodes invariantes
- Preuves logiques standard (par exemple, induction, contradiction)
- Croquis sur papier ou notes

9.4.2 Exigences

9.4.3 ***1. Spécification formelle***

- Définir formellement la TM bornée M_b :
- $M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- Limitation : Taille de la bande de travail $\leq c \cdot \log n$

9.4.4 ***2. Décrivez la langue*** L

- Démontrer que $L \in \mathsf{L}$ (décidable avec l'espace logarithmique)
- Exemples :
- Nombre équilibré de symboles (par exemple, nombre égal de a et b)
- Reconnaissance de motifs réguliers simples avec optimisation de l'espace

9.4.5 ***3. Construction/Simulation***

- Décrivez la stratégie TM avec peu de mémoire :
- Signets (technique du pointeur)
- Procédure en deux passes
- Compteur en représentation binaire sur bande de travail

9.4.6 ***4. Exactitude***

- Utiliser l'invariance ou la simulation :
- À chaque étape, l'invariant est préservé (par exemple, l'égalité de comptage)
- Afficher : Si TM accepte, alors $w \in L$; si $w \in L$, alors TM accepte

9.4.7 ***5. Prouver la complexité spatiale***

- Analyse : Toutes les étapes ne nécessitent que $O(\log n)$ cellules mémoire
- Prétendre qu'aucun stockage non autorisé n'a lieu

9.4.8 ***6. Diplôme***

- Terminer par une preuve complète (par exemple par induction complète sur la longueur de w)
- Montrer que la mémoire limitée est **suffisante et fonctionne correctement**

9.4.9 *Solution*

Solution for n16 in fr

Catégorie: Preuve, Construction et Conception **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 1ae5432b-08b9-464d-a7d7-b20048523913 le 11.05.2025

9.5 FR BUK-1 No.17PALLV1.0: Modèle de champ quantique d'interférence de paquets d'ondes

Temps estimé pour résoudre: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* *Un Original*

Un modèle de théorie quantique des champs est donné pour décrire l'interférence de deux paquets d'ondes en mouvement dans un champ scalaire. Développer un modèle théorique et numérique complet qui décrit et analyse la construction, l'évolution et l'interférence des paquets d'ondes dans la théorie quantique des champs.

Effectuez les sous-tâches suivantes :

1. **Fondements théoriques**
   - Expliquer la quantification d'un champ scalaire libre.
   - Dériver l'opérateur de champ $\hat{\phi}(x,t)$.
   - Décrivez le comportement du commutateur de $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$.
2. **Construction des états de paquets d'ondes**
   - Définir deux distributions d'impulsion gaussiennes orthogonales $f_1(k)$, $f_2(k)$.
   - Gérer la condition
   $$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger\, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger\, dk\right)|0\rangle$$
   et le normaliser.
3. **Valeur attendue et interférence**
   - Calculer l'espérance mathématique $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$.
   - Identifier les termes croisés et leur contribution aux interférences.
   - Visualiser le motif d'interférence en fonction de x, t, δ.
4. **Évolution temporelle et propagation des paquets d'ondes**
   - Simuler la propagation de paquets d'ondes dans l'espace et dans le temps.
   - Analyser l'influence de la vitesse de groupe et de phase sur la structure d'interférence.
   - Discutez de tout phénomène de dispersion qui pourrait se produire.
5. **Extension aux produits pour opérateurs de terrain**
   - Calculer la fonction à deux points $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$.
   - Analyser leur structure spatio-temporelle.
   - Discuter des implications pour les mesures possibles.
6. **Interprétation expérimentale et validation du modèle**
   - Comparez votre modèle avec un interféromètre optique quantique (par exemple Mach-Zehnder).
   - Discuter des opérateurs de mesure, de l'effondrement de l'état et de la visibilité des interférences.
7. **Réflexion, analyse de la complexité et limites du modèle**
   - Estimez la complexité algorithmique de vos procédures numériques.
   - Discuter des extensions possibles (par exemple, champs de spineurs, QED).
   - Réfléchir à l'importance et aux limites de la théorie des champs scalaires. Le travail doit être mathématiquement solide, interprété physiquement et complété par des simulations numériques.

9.5.1 Solution

Solution for n17 in fr

Catégorie: Analyse, Calcul **Difficulté**: YAMI **Étiquettes**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: b30962b2-bc30-497d-bb98-ee335aeacd7f le 11.05.2025

9.6 *FR SHK-1 No.23PALLV1.0: Récursivité et combinateurs à virgule fixe dans le calcul lambda non typé*

Temps estimé pour résoudre: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* *Un Original*

Le calcul lambda non typé avec réduction β complète est donné. Les codages de l'Église pour les nombres naturels, « iszero », « pred » et « mult » sont considérés comme bien connus.

Soit le combinateur à point fixe $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ donné ainsi que la fonction :

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

Tâche:

Démontrer formellement et complètement que $Y\ F$ est une procédure récursive correcte pour calculer les factorielles selon le codage de Church. Les points suivants doivent être détaillés :

1. **Réduction pour argument fixe :** Effectuer une réduction β complète du terme $(Y\ F)\ 3$. Spécifiez toutes les étapes de réduction jusqu'au codage final de l'Église.

2. **Preuve de correction par récurrence :** Effectuez une preuve par récurrence structurelle sur les nombres de Church selon laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$ la condition suivante est remplie :

$$(Y\ F)\ n \to_\beta^* \text{fac}_n$$

   où fac_n est l'encodage de l'Église de $n!$.

3. **Propriété du point fixe :** Démontrer formellement que $Y\ F = F\ (Y\ F)$, et montrer pourquoi cette expression permet un calcul récursif.

4. **Comparaison avec le Z-Combinator :**

- Définir le combinateur Z.
- Comparer la longueur de réduction de $(Y\ F)\ 3$ et $(Z\ F)\ 3$.
- Discutez dans quels contextes Z devraient être préférés. **Remarque :** pour toutes les étapes de réduction, les termes intermédiaires doivent être spécifiés explicitement. N'utilisez pas de simplifications ou de sauts sans justification.

9.6.1 *Solution*

Solution for n23 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 118ed990-622b-42c5-85ff-c2c3252befcd le 17.05.2025

9.7 FR SHK-2 No.24PALLV1.0: Rôle des fonctions zêta et gamma dans les fonctions de partition et les énergies du vide de la théorie quantique des champs

Temps estimé pour résoudre: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* *Un Original*

Étudier et démontrer le rôle des fonctions zêta et gamma dans la régularisation de la théorie quantique des champs et la thermodynamique, notamment dans le contexte des fonctions de partition et de l'énergie du vide.

9.7.1 Tâche

Soit un champ quantique scalaire sur un espace-temps compact de périodicité β dans la dimension temporelle (correspondant à une température $T = 1/\beta$) et une dimension spatiale L. Les fréquences propres du champ sont :

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

En utilisant la régularisation zêta, montrer que la fonction de partition thermodynamique

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

peut être calculée régulièrement à l'aide de l'extension analytique de la fonction zêta de Riemann et de la fonction gamma.

9.7.2 Sous-tâches

1. **Dérivation de l'énergie régulée du vide** Déduire l'expression de l'énergie régulée du vide $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ à l'aide de la **fonction zêta**. Montrer que :

   $$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{et} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

   et convertir l'expression en fonction gamma à l'aide de la transformée de Mellin.

2. **Réduction à une fonction zêta d'Epstein** Montrer que la double somme sur n et m peut être représentée par une fonction zêta d'Epstein. Analyser ses propriétés analytiques.

3. **Dépendance à la température et fonctions thermodynamiques** Utiliser l'expression régularisée pour déduire l'énergie libre F(bêta), l'énergie interne U(bêta) et l'entropie S(bêta). Montrer comment la fonction gamma apparaît dans le développement asymptotique pour les températures élevées et basses.

4. **Comparaison avec l'énergie de Casimir** Démontrer que la limite à température nulle de la fonction de partition se transforme en énergie de Casimir et que la régularisation donne exactement la même forme que la méthode zêta-Casimir classique.

9.7.3 Solution

Solution for n24 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: NUM **Étiquettes**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: 5377267d-9aaa-4a14-86dc-4182c4a66fca le 24.05.2025

9.8 FR SHK-3 No.25PALLV1.0: Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussien

Temps estimé pour résoudre: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Un Original*

9.8.1 Tâche : Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussiennes

Étant donné une particule mécanique quantique unidimensionnelle avec la fonction d'onde dans l'espace de position :

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Cette fonction décrit une particule stationnaire et en mouvement libre avec une distribution spatiale gaussienne.

*9.8.2 **Sous-tâches***

9.8.3 Normalisation de la fonction d'onde

Déterminer la constante de normalisation A telle que la fonction d'onde soit normalisée, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

9.8.4 Transformation de Fourier dans l'espace des impulsions

Calculer la représentation spatiale de l'impulsion $\phi(p)$ de la fonction d'onde en utilisant la transformation de Fourier selon :

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complétez l'intégration et indiquez la fonction résultante $\phi(p)$ sous forme explicite.

9.8.5 Le principe d'incertitude de Heisenberg

Déterminer les écarts types σ_x et σ_p des distributions de position et d'impulsion, respectivement :

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

et montrer que le produit de ces diffusions satisfait le principe d'incertitude de Heisenberg :

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

9.8.6 Interprétation physique des cas limites

Discutez qualitativement du cas limite physique $a \to 0$. Qu'arrive-t-il à la représentation de l'espace d'impulsion $\phi(p)$ et comment ce cas limite doit-il être interprété physiquement ? Se référer aux concepts de localisation et d'incertitude d'impulsion.

*9.8.7 **Un avis :***

Cette tâche convient également à l'évaluation numérique et à la représentation graphique en Python ou MATLAB. En option, la transformée de Fourier peut également être vérifiée symboliquement à l'aide d'outils logiciels appropriés (par exemple, SymPy ou Mathematica).

9.8.8 Solution

Solution for n25 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 1cf99a90-2b19-471b-9f08-3371ac30d6c4 le 24.05.2025

10 解決策

10.1 JP KTB-1 No.14PALLV1.0: 適応型素数判定の最適複雑度

解決までの推定時間: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.5* オリジナル

問題

適応型素数判定法とは、自然数 $n \in \mathbb{N}$ が素数かどうかを判定する際に、確率的手法と決定論的手法を段階的に選択するアルゴリズムです。例としては、Miller-Rabin 法、Baillie-PSW 法、AKS 法などが挙げられます。

以下の特性を持つ適応型素数判定法を開発し、解析してください。

- アルゴリズムは確率的検定（例:Miller-Rabin 法）から開始します。
- この検定に複数回合格した場合、システムは境界条件において決定論的サブ検定（例:Lucas 法、ECPP 法、または簡約 AKS レベル）を実行します。
- 手法の全体的な複雑さは、n のサイズと想定される誤り確率 ε に依存します。課題: これらの手法の漸近的に最適な組み合わせ（証明付き）を見つけ、ランダムに選択された数 $n \in [1, N]$ の現実的な分布を仮定し、「素数」と「素数でない」の判定にかかる最小の期待実行時間を計算してください。**目標:**
- **誤差制御適応的複雑性** モデルを解析してください。
- 最適な手法の実行時間（期待値）を記述する関数クラス $T(n, \varepsilon)$ を開発してください。
- 作成した解を、Miller-Rabin（多重）、Baillie-PSW、決定論的 AKS などのよく知られた手法と比較してください。

10.1.1 解決策

カテゴリー: 解決と解く, 分析, 証明, 構築と設計 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-fb200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-624352343133 日付 05 月 11 日 2025 年

10.2 JP SHB-3 No.15PALLV1.0: 一般化再帰多項式の解の構造

解決までの推定時間: 20 h 0 min *Nam-Score: 7.4* オリジナル

再帰的な定義が与えられます。

$$P_n(x) = a_1(x)P_{n-1}(x) + a_2(x)P_{n-2}(x) + \cdots + a_k(x)P_{n-k}(x)$$□

初期値は $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$、$a_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ である。

分析:

- 閉じた形式の条件
- ゼロの構造
- 古典多項式（例: チェビシェフ多項式、ルジャンドル多項式、エルミート多項式）との関連

10.2.1 ソリューション構造（一般的な手順）

10.2.2 1. **再帰の分析**

- 再帰次数 k を決定する
- 係数 $a_i(x)$ を分類する
- 絶え間ない？リニア？一般多項式?

10.2.3 2. **特性多項式**

- 線形再帰に類似した変換を導入します。
- 基底 $P_0, \ldots, P_k$ の線形独立性を考慮する
- 特性多項式（定数 a_i）で解を求める

10.2.4 3. **行列法を用いた表現**

- 再帰を行列システムとして記述します。

$$\mathbf{P}_n = A(x)\mathbf{P}_{n-1},$$

  ベクトル $\mathbf{P}_n = [P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1}]^T$

- $A(x)$ の固有値と固有ベクトルを調べる

10.2.5 4. **有名な家族との比較**

- 多項式を既知のクラス (直交、対称など) に分類できるかどうかを確認します。

10.2.6 5. **ゼロ構造**

- 数値手法を使用してゼロを解析する
- 収束挙動を調べる（例:$n \to \infty$ の場合）

10.2.7 6. **記号的な解決法（可能な場合）**

- 閉じた形式を検索する（例: 生成関数、微分方程式への変換による）
- 基底関数または組み合わせ構造を介して明示的な表現を見つける

10.2.8 解決策

Solution for n15 in jp
カテゴリー: 証明, 分析 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:
UUID: 1aa60701-6939-4ba7-9f1c-53fbfed2686b – *GUID*: 0a989e7c-66a7-4a60-9a4a-b345009f7913 日付 11.05.2025

10.3 JP SHKS-1 No.16PALLV1.0: 限られたメモリを持つチューリングマシン - 正しさの証明

解決までの推定時間: 10 h 0 min *Nam-Score: 7.6* オリジナル

作業テープが $O(\log n)$ 個のメモリセルに制限されているチューリングマシン M_b が与えられます。M_b が特定の言語 L を正しく決定することを示します。例えば。:

$$L = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

または、メモリ制約が関係するその他の特定の言語。

10.3.1 追加情報

- チューリングマシン（TM）の定義と限られたメモリ（例: 対数空間）
- LBA（線形有界オートマトン）などの形式モデル
- 正規言語または文脈自由言語との比較
- ブール論理と不変メソッド
- 標準的な論理的証明（例: 帰納法、背理法）
- 紙やメモに描いたスケッチ

10.3.2 要件

10.3.3 ***1.* 形式仕様**

- 有界 TMM_b を正式に定義する: -$M_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$
- 制限: 動作バンドサイズ $\leq c \cdot \log n$

10.3.4 ***2.* 言語** L について説明してください

-$L \in$ L （対数空間で決定可能）であることを証明してください。

- 例:
- シンボルの数のバランス（例:a と b の数が等しい）
- 空間最適化による単純な規則パターンの認識

10.3.5 ***3.* 建設/シミュレーション**

- メモリをほとんど使用せずに TM 戦略を説明します。
- ブックマーク（ポインタテクニック）
- 2 パス手順
- 作業テープ上の 2 進数表現のカウンタ

10.3.6 ***4.* 正確性**

- 不変性またはシミュレーションを使用する:
- 各ステップで不変条件が保持される（例: 等価性のカウント）
- 表示: TM が受け入れる場合、$w \in L$ です。$w \in L$ ならば TM は

10.3.7 ***5.* 空間計算量を証明する**

- 分析: すべてのステップで必要なメモリセルは $O(\log n)$ 個のみ
- 不正な保管は行われていないと主張する

10.3.8 ***6.* ディプロマ**

- 完全な証明で終了する（例えば、w の長さにわたる完全な帰納法によって）
- 限られたメモリが**十分であり、正しく動作していることを示す**

10.3.9 解決策

Solution for n16 in jp

カテゴリー: 証明, 構築と設計 **難易度**: ハード **タグ**:

UUID: cff283f9-7344-4d48-acf2-0f7bf709276f – *GUID*: 1fd4436b-f494-4cb6-a919-8784410bc93c 日付 11.05.2025

10.4 JP BUK-1 No.17PALLV1.0: 波束干渉の量子場モデル

解決までの推定時間: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* オリジナル

スカラー場における 2 つの移動する波束の干渉を記述するために、量子場理論モデルが与えられます。量子場理論における波束の構築、進化、干渉を記述および分析する完全な理論的数値モデルを開発します。

次のサブタスクを完了します。

1. **理論的基礎**

- 自由スカラー場の量子化について説明します。
- 体演算子 $\hat{\phi}(x,t)$ を導出します。
- $\hat{a}_k$、$\hat{a}_k^\dagger$ の交換子の振る舞いを説明します。

2. **波束状態の構築**

- ２つの直交ガウス運動量分布 $f_1(k)$、$f_2(k)$ を定義する。
- 状態を管理する

$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk\right)|0\rangle$$

  そしてそれを正規化します。

3. **期待値と干渉**

- 期待値 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$ を計算します。
- 交差項とそれらが干渉に与える影響を特定します。
- 干渉パターンを x、t、δ の関数として視覚化します。

4. **時間発展と波束伝播**

- 空間と時間における波束の伝播をシミュレートします。
- グループ速度と位相速度が干渉構造に与える影響を分析します。
- 発生する可能性のある分散現象について説明します。

5. **フィールドオペレータ製品への拡張**

- 2 点関数 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$ を計算します。
- 時空間構造を分析します。
- 可能な測定の意味について話し合います。

6. **実験的解釈とモデルの検証**

- モデルを量子光干渉計 (例: マッハ・ツェンダー) と比較します。
- 測定演算子、状態の崩壊、干渉の可視性について説明します。

7. **反射、複雑性分析、モデルの境界**

- 数値手順のアルゴリズムの複雑さを推定します。
- 可能な拡張について議論する（例: スピノル場、QED）。
- スカラー場理論の重要性と限界について考察します。作業は数学的に正確で、物理的に解釈され、数値シミュレーションによって補完される必要があります。

10.4.1 解決策

Solution for n17 in jp 3592
カテゴリー: 分析, 計算 **難易度**: ダークサイド **タグ**:
UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: fb2cb262-d694-4a23-a1a6-5a20b512ebea 日付 11.05.2025 3594

10.5 JP SHK-1 No.23PALLV1.0: 型なしラムダ計算における再帰性と固定小数点コンビネータ

解決までの推定時間: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* オリジナル

完全な β-減算を伴う型なしラムダ計算が与えられます。自然数の Church エンコーディング、「iszero」、「pred」、「mult」はよく知られていると考えられています。

固定小数点コンビネータ $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ と関数が与えられているとします。

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

タスク:

$Y\ F$ がチャーチ符号化に従って階乗を計算する正しい再帰手順であることを形式的かつ完全に証明します。以下の点を詳細に示す必要があります。

1. **固定引数の縮約:** 項 $(Y\ F)\ 3$ の完全な β 縮約を実行します。最終的な Church エンコーディングまでのすべての削減手順を指定します。

2. **帰納法による正しさの証明:** すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して以下が成り立つことをチャーチ数に対して構造的帰納法で証明します。

$$(Y\ F)\ n \to_\beta^{*} \text{fac}_n$$

ここで、fac_n は $n!$ のチャーチ符号化です。

3. **不動点特性:** $Y\ F = F\ (Y\ F)$ であることを正式に証明し、この式が再帰計算を可能にする理由を示します。

4. **Z-Combinator との比較:**

- Z コンビネータを定義します。
- $(Y\ F)\ 3$ と $(Z\ F)\ 3$ の短縮長を比較します。
- どのようなコンテキストで Z を優先すべきかを議論します。**注:** すべての削減手順において、中間項を明示的に指定する必要があります。正当な理由なく単純化やジャンプを使用しないでください。

10.5.1 解決策

Solution for n23 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード **タグ**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 27bbd441-79cc-47ec-8e15-375050f07157 日付 17.05.2025

10.6 JP SHK-2 No.24PALLV1.0: 量子場の理論における分配関数と真空エネルギーにおけるゼータ関数とガンマ関数の役割

解決までの推定時間: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* オリジナル

量子場の理論における正則化と熱力学、特に分配関数と真空エネルギーの文脈におけるゼータ関数とガンマ関数の役割を調査し、証明する。

10.6.1 課題

時間次元（温度 $T = 1/\beta$ に対応）と空間次元 L に周期性 β を持つコンパクト時空上のスカラー量子場が与えられる。場の固有振動数は、次の通りです。

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

ゼータ正規化を用いて、熱力学的分配関数

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

が、リーマンゼータ関数とガンマ関数の解析的拡張を用いて正規に計算できることを示しなさい。

10.6.2 サブタスク

1. **制御真空エネルギーの導出 ゼータ関数**を用いて、制御真空エネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ の式を導出せよ。以下の式が成り立つことを示せ。

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

そして、メリン変換を用いてこの式をガンマ関数形式に変換せよ。

2. **エプスタインゼータ関数への縮約** n と m の二重和がエプスタインゼータ関数として表せることを示せ。その解析的性質を解析せよ。

3. **温度依存性と熱力学関数** 正規化表現を用いて自由エネルギー F(β)、内部エネルギー U(β)、エントロピー S(β) を導出せよ。ガンマ関数が高温および低温における漸近展開にどのように現れるかを示しなさい。

4. **カシミールエネルギーとの比較** 分配関数の零温度極限がカシミールエネルギーに変換されること、そして正規化によって古典的なゼータ-カシミール法と全く同じ形が得られることを証明せよ。

10.6.3 解決策

Solution for n24 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: fa54f474-2db5-47ee-a259-b74482490238 日付 24.05.2025

10.7 JP SHK-3 No.25PALLV1.0: ガウス波束の運動量空間表現

解決までの推定時間: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* オリジナル

10.7.1 課題*:* ガウス波束の運動量空間表現

位置空間に波動関数を持つ 1 次元の量子力学粒子が与えられます。

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

この関数は、ガウス空間分布を持つ、静止した自由に移動する粒子を記述します。

10.7.2 **サブタスク**

10.7.3 波動関数の正規化

波動関数が正規化されるように正規化定数 A を決定します。つまり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

10.7.4 運動量空間へのフーリエ変換

フーリエ変換を用いて波動関数の運動量空間表現 $\phi(p)$ を次のように計算します。

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

積分を完了し、結果の関数 $\phi(p)$ を明示的な形式で述べます。

10.7.5 ハイゼンベルクの不確定性原理

位置分布と運動量分布の標準偏差 σ_x と σ_p をそれぞれ決定します。

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

これらの散乱の積がハイゼンベルクの不確定性原理を満たすことを示す。

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

10.7.6 極限ケースの物理的解釈

物理的な極限ケース $a \to 0$ について定性的に議論します。運動量空間表現 $\phi(p)$ では何が起こりますか? また、この極限ケースは物理的にどのように解釈されますか? 局所化とインパルス不確実性の概念を参照してください。

10.7.7 **お知らせ*:***

このタスクは、Python または MATLAB での数値評価とグラフィカル表現にも適しています。オプションとして、適切なソフトウェアツール (SymPy や Mathematica など) を使用して、フーリエ変換を記号的に検証することもできます。

10.7.8 解決策

Solution for n25 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード **タグ**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 572ebf6c-38dd-4582-ae7a-cb1aa9c89bc6 日付 24.05.2025

11.1 KR BUK-1 No.17PALLV1.0: 파동패킷간섭의양자장모델

해결예상시간: 52 h 0 min *Nam-Score: 7.9* 원본

스칼라장에서두개의움직이는파동패킷의간섭을설명하기위해양자장이론모델이제시됩니다. 양자장이론내에서파동패킷의구성, 진화, 간섭을설명하고분석하는완전한이론적, 수치적모델을개발합니다.

다음하위작업을완료하세요.

1. **이론적기초**
- 자유스칼라장의양자화를설명하세요.
- 필드연산자 $\hat{\phi}(x,t)$ 를도출합니다.
- $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ 의교환자동작을설명하세요.

2. **파동패킷상태의구성**
- 두개의직교가우스운동량분포 $f_1(k), f_2(k)$ 를정의합니다.
- 상태를관리하다
$$|\Psi\rangle = \left(\int f_1(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk + \int f_2(k)\hat{a}_k^\dagger \, dk \right) |0\rangle$$
그리고그것을정상화합니다.

3. **기대값및간섭**
- 기대값 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)|\Psi\rangle$ 을계산합니다.
- 교차항과간섭에대한기여도를식별합니다.
- 간섭패턴을 x, t, δ 의함수로시각화합니다.

4. **시간진화및파동패킷전파**
- 공간과시간에따른파동패킷의전파를시뮬레이션합니다.
- 간섭구조에대한군속도와위상속도의영향을분석합니다.
- 발생할수있는분산현상에대해논의해보세요.

5. **현장운영자제품확장**
- 두점함수 $\langle\Psi|\hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(x',t)|\Psi\rangle$ 을계산합니다.
- 시공간구조를분석합니다.
- 가능한측정에대한의미를논의합니다.

6. **실험해석및모델검증**
- 귀하의모델을양자광학간섭계 (예: 마하젠더) 와비교해보세요.
- 측정연산자, 상태붕괴및간섭가시성에대해논의합니다.

7. **반사, 복잡성분석및모델경계**
- 수치적절차의알고리즘복잡도를추정합니다.
- 가능한확장 (예: 스피너필드, QED) 에대해논의합니다.
- 스칼라장이론의중요성과한계에대해생각해보세요. 작업은수학적으로타당해야하며, 물리적으로해석되어야하며수치시뮬레이션으로보완되어야합니다.

11.1.1 해결책

Solution for n17 in kr

카테고리: 분석, 계산 **난이도**: 하드 **태그**:

UUID: f916e747-b91d-47ec-83ba-3037cebeebcb – *GUID*: 9f422ceb-8266-4e27-8cfd-82c209652be8 날짜 11.05.2025

11.2 KR SHK-1 No.23PALLV1.0: 유형이지정되지않은람다계산법의재귀성과고정소수점조합자

해결예상시간: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* 원본

완전한 β-축소를적용한무형의람다계산법이주어졌습니다. 자연수에대한교회인코딩인"iszero", "pred", "mult" 는잘알려진것으로간주됩니다.

고정점조합자 $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ 와다음함수가주어지도록하자.

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

일:

$Y\ F$ 가 Church 코딩에따라팩토리얼을계산하는올바른재귀절차임을정식적이고완벽하게증명하세요. 다음사항을자세히설명해야합니다.

1. **고정된인수에대한축소:** 항 $(Y\ F)\ 3$ 의전체 β-축소를수행합니다. 최종교회인코딩까지모든감소단계를지정하세요.
2. **귀납에의한정확성증명:** 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에대해다음이성립한다는것을교회수에대한구조적귀납증명을수행합니다.
$$(Y\ F)\ n \to_\beta^* \text{fac}_n$$
여기서 fac_n 은 $n!$ 의교회인코딩입니다.
3. **고정점속성:** $Y\ F = F\ (Y\ F)$ 임을공식적으로증명하고이표현식이재귀적계산을허용하는이유를보여주세요.
4. **Z-Combinator 와의비교:**

- Z-결합자를정의합니다.
- $(Y\ F)\ 3$ 과 $(Z\ F)\ 3$ 의감소길이를비교하세요.
- 어떤맥락에서 Z 가선호되는지논의해보세요. **참고:** 모든감소단계에대해중간용어를명확하게지정해야합니다. 정당한이유없이단순화나생략을하지마십시오.

11.2.1 해결책

Solution for n23 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**:

UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: 14d934cc-2e6e-4211-9ebb-bdb997a9b657 날짜 17.05.2025

11.3 KR SHK-2 No.24PALLV1.0: 양자장론의분배함수와진공에너지에서제타함수와감마함수의역할

해결예상시간: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 원본

양자장이론의정규화와열역학에서제타함수와감마함수의역할, 특히분배함수와진공에너지의맥락을조사하고증명합니다.

11.3.1 과제

시간차원 (온도 T = 1/β 에해당) 과공간차원 L 에주기성 β 를갖는콤팩트시공간상의스칼라양자장이주어졌습니다. 장의고유진동수는다음과같습니다.

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

제타정규화를사용하여열역학적분배함수가

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

리만제타함수와감마함수의해석적확장을사용하여정규적으로계산될수있음을보여주세요.

11.3.2 하위과제

1. **조절된진공에너지의유도 제타함수**를사용하여조절된진공에너지 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ 에대한식을유도하십시오. 다음을보여주십시오.

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

그리고멜린변환을사용하여식을감마함수형태로변환하십시오.

2. **엡스타인제타함수로의환원** n 과 m 에대한이중합을엡스타인제타함수로나타낼수있음을보여주십시오. 그해석적성질을분석하십시오.

3. **온도의존성및열역학함수** 정규화된표현식을사용하여자유에너지 F(베타), 내부에너지 U(베타), 엔트로피 S(베타) 를유도하십시오. 감마함수가고온및저온에대한점근전개에서어떻게나타나는지보여주십시오.

4. **카시미르에너지와의비교** 분배함수의영온도한계가카시미르에너지로변환되고, 정규화가고전적인제타-카시미르방법과정확히동일한형태를낳음을증명하십시오.

11.3.3 해결책

Solution for n24 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: NUM **태그**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: a7ceaf1b-e71e-4d76-a632-c2b9363d5583 날짜 24.05.2025

11.4 KR SHK-3 No.25PALLV1.0: 가우스파패킷의운동량공간표현

해결예상시간: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 원본

11.4.1 과제*:* 가우스파패킷의운동량공간표현

위치공간에서파동함수를갖는 1 차원양자역학입자가주어지면:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

이함수는가우스공간분포를갖는고정되어있고자유롭게움직이는입자를설명합니다.

11.4.2 **하위작업**

11.4.3 파동함수의정규화

파동함수가정규화되도록정규화상수 A 를결정합니다. 즉,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

11.4.4 운동량공간으로의푸리에변환

푸리에변환을사용하여파동함수의운동량공간표현 $\phi(p)$ 을계산합니다.

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

적분을완료하고결과함수 $\phi(p)$ 를명시적인형태로나타내세요.

11.4.5 하이젠베르크의불확정성원리

위치와운동량분포의표준편차 σ_x 와 σ_p 를각각결정합니다.

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

그리고이러한산란의곱이하이젠베르크의불확정성원리를만족함을보여주세요.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

11.4.6 극한경우의물리적해석

물리적한계사례 $a \to 0$ 에대해질적으로논의해보세요. 운동량공간표현 $\phi(p)$ 은어떻게되나요? 그리고이제한적인경우는물리적으로어떻게해석해야할까요? 국소화와임펄스불확실성의개념을참조하세요.

11.4.7 **공지사항***:*

이작업은 Python 이나 MATLAB 에서수치적평가와그래픽표현에도적합합니다. 선택적으로, 푸리에변환은적절한소프트웨어도구 (예: SymPy 또는 Mathematica) 를사용하여기호적으로검증할수도있습니다.

11.4.8 해결책

Solution for n25 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 6dbbe88e-8124-48cf-94c9-d265d50d0819 날짜 24.05.2025

12.1 ZH SHK-1 No.23PALLV1.0: 無型 *lambda* 演算中的遞歸與不動點組合器

解決的预计时间: 10 h 0 min *Nam-Score: 6.0* 原创

給出了具有完整 β 約簡的無類型 lambda 演算。自然數的 Church 編碼"iszero"、"pred"和"mult"被認為是眾所周知的。設不動點組合子 $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ 以及函數:

$$F := \lambda f.\lambda n.\text{iszero}\ n\ 1\ (\text{mult}\ n\ (f\ (\text{pred}\ n)))$$

任務:
正式且完整地證明 $Y\ F$ 是根據 Church 編碼計算階乘的正確遞歸程序。需要詳細表明以下幾點:

1. **固定參數的約簡**: 對項 $(Y\ F)\ 3$ 進行完整的 β 約簡。指定直至最終 Church 編碼的所有簡化步驟。
2. **透過歸納證明正確性**: 對 Church 數進行結構化歸納證明，證明對於所有 $n \in \mathbb{N}$，以下成立:
$$\square Y\ F\square\ n \dot{\to}_\beta \text{fac}_n$$
其中 fac_n 是 $n!$ 的 Church 編碼。
3. **不動點性質** : 正式證明 $Y\ F = F\ (Y\ F)$，並說明為何該表達式允許遞歸計算。
4. **與 Z-Combinator 的比較:**

- 定義 Z-組合子。
- 比較 $(Y\ F)\ 3$ 和 $(Z\ F)\ 3$ 的減少長度。
- 討論在哪些情況下應該優先選擇 Z。**注意:** 對於所有減少步驟，必須明確指定中間項。請勿無故使用簡化或跳躍。

12.1.1 解決方案

Solution for n23 in zh
类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**:
UUID: ecc49ab8-1937-4d4a-8436-bea255df9c9b – *GUID*: a94a62e4-a6bf-4386-8c65-5e294ef85c8d 日期 17.05.2025

12.2 ZH SHK-2 No.24PALLV1.0: zeta 函數和 *gamma* 函數在量子場論的配分函數和真空能量中的作用

解決的预计时间: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 原创

研究並證明 zeta 和 gamma 函數在量子場論正則化和熱力學中的作用，特別是在配分函數和真空能量的背景下。

12.2.1 任務

給定一個緊湊時空中的標量量子場，其時間維度具有週期性 β(對應於溫度 $T = 1/\beta$) 和空間維度 L。該場的固有頻率為:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

使用 zeta 正規化，證明熱力學配分函數

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

可以使用黎曼 zeta 函數和 gamma 函數的解析擴展進行定期計算。

12.2.2 子任務

1. **受控真空能量的推導** 使用 **zeta 函數**推導受控真空能量的表達式 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$。表明:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

   並使用梅林變換將表達式轉換為伽馬函數形式。

2. **簡化為 Epstein zeta 函數** 證明 n 和 m 的雙和可以表示為 Epstein zeta 函數。分析其分析性質。

3. **溫度依賴性和熱力學函數** 利用正規化表達式推導自由能 F(beta)、內能 U(beta) 和熵 S(beta)。展示伽馬函數在高溫和低溫的漸近展開中如何出現。

4. **與卡西米爾能量的比較** 證明配分函數的零溫度極限轉變為卡西米爾能量，而正則化產生與經典 zeta-卡西米爾方法完全相同的形式。

12.2.3 解决方案

Solution for n24 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: NUM **标签**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: b14eff42-fdc0-4ebc-880f-05167a978cbe 日期 24.05.2025

12.3 ZH SHK-3 No.25PALLV1.0: 高斯波包的動量空間表示

解決的预计时间: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 原创

12.3.1 任務*:* 高斯波包的動量空間表示

給定一個一維量子力學粒子，其波函數在位置空間:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

此函數描述具有高斯空間分佈的靜止、自由移動的粒子。

12.3.2 **子任務**

12.3.3 波函數的歸一化

決定標準化常數 A，使得波函數標準化，即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

12.3.4 傅立葉轉換到動量空間

根據下列公式利用傅立葉轉換計算波函數的動量空間表示 $\phi(p)$:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

完成積分並以明確形式表述所得函數 $\phi(p)$。

12.3.5 海森堡不確定原理

分別決定位置和動量分佈的標準差 σ_x 和 σ_p:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

並證明這些散射的乘積滿足海森堡不確定性原理:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

12.3.6 極限情況的物理解釋

定性地討論物理極限情況 $a \to 0$。動量空間表示 $\phi(p)$ 會發生什麼情況，以及如何從物理上解釋這種極限情況？參考局部化和脈衝不確定性的概念。

12.3.7 **通知*:***

此任務也適合在 Python 或 MATLAB 中進行數值評估和圖形表示。或者，也可以使用合適的軟體工具 (例如 SymPy 或 Mathematica) 以符號方式驗證傅立葉變換。

12.3.8 解決方案

Solution for n25 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 07f300e8-9ad4-4552-8048-256b953aecc1 日期 24.05.2025