

Aufgabensammlung zur Beweisen

Paper ID: P1.0 on April 20, 2025 – 19.04.2025 in Frankfurt Version 1.0 Revision 1

Archive-ID: 3891M-932 DOI: 10.5281/zenodo.15249602

Duy Nam Schlitz^{a*}

^a *Deparment and Affiliation, duynamschlitz@gmail.com*

^{*} *Corresponding Author*

Abstract

Aufgaben zur Beweisen mit Induktion, Summen und ungeraden Zahlen.

Exercise: No.1, No.4-1, No.4-2, No.4-3, No.4-4, No.5

Contents

1 Exercises and Informtion	1	1.9 EN SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2	10	34
1.1 DE SH-1 No.1P1.0V1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n^2} = (2n-1) = n^2$	2	1.9.1 New rule	10	36
1.2 DE SKK-1 No.4-1P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2	3	1.9.2 Goal	10	
1.2.1 Übergangsregel	3	1.10 EN SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3	11	40
1.2.2 Ziel	3	1.10.1 Transition Rule	11	
1.3 DE SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2	4	1.10.2 Goal	11	42
1.3.1 Neue Regel	4	1.11 EN SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4	12	44
1.3.2 Ziel	4	1.11.1 Task	12	46
1.4 DE SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3	5	1.12 EN SKT-1 No.5P1.0V1.0: Distances in the n -dimensional space	13	48
1.4.1 Übergangsregel	5	1.13 FR SH-1 No.1P1.0V1.0: Prouver que $n^2 = \sum_{n=1}^{n^2} = (2n-1) = n^2$	14	50
1.4.2 Ziel	5	1.14 DE SH-1 No.1P1.0V1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n^2} = (2n-1) = n^2$	15	52
1.5 DE SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4	6	1.14.1 Solution	15	
1.5.1 Aufgabe	6	1.15 DE SKK-1 No.4-1P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2	16	54
1.6 DE SKT-1 No.5P1.0V1.0: Abstände im n -dimensionalen Raum	7	1.15.1 Übergangsregel	16	56
1.7 EN SH-1 No.1P1.0V1.0: Proof that $n^2 = \sum_{n=1}^{n^2} = (2n-1) = n^2$	8	1.15.2 Ziel	16	58
1.8 EN SKK-1 No.4-1P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1	9	1.15.3 Solution	16	
1.8.1 Transition rule	9	1.16 DE SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2	17	60
1.8.2 Goal	9	1.16.1 Neue Regel	17	62
		1.16.2 Ziel	17	64
		1.16.3 Solution	17	

66	1.17 DE SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.0d: Standard-	
	Windmühle mit Erreichbarkeit aller	
68	Punkte - Aufgabe 3	18
	1.17.1 Übergangsregel	18
70	1.17.2 Ziel	18
	1.17.3 Solution	18
72	1.18 DE SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.0d: Standard-	
	Windmühle mit Erreichbarkeit aller	
74	Punkte - Aufgabe 4	19
	1.18.1 Aufgabe	19
76	1.18.2 Solution	19
	1.19 DE SKT-1 No.5P1.0V1.0: Abstände im n -	
78	dimensionalen Raum	20
	1.19.1 Solution	20
80	1.20 EN SH-1 No.1P1.0V1.0: Proof that $n^2 =$	
	$\sum_{n=1}^{n^2} = (2n - 1) = n^2$	22
82	1.20.1 Solution	22
	1.21 EN SKK-1 No.4-1P1.0V1.1e: Standard	
84	Windmill with Reachability of all Points	
	- Task 1	23
86	1.21.1 Transition rule	23
	1.21.2 Goal	23
88	1.21.3 Solution	23
	1.22 EN SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.1e: Standard	
90	Windmill with Reachability of all Points -	
	Task 2	24
92	1.22.1 New rule	24
	1.22.2 Goal	24
94	1.22.3 Solution	24
	1.23 EN SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.1e: Standard	
96	Windmill with Reachability of All Points -	
	Task 3	25
98	1.23.1 Transition Rule	25
	1.23.2 Goal	25
100	1.23.3 Solution	25
	1.24 EN SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.1e: Standard	
102	Windmill with Reachability of All Points -	
	Task 4	26
104	1.24.1 Task	26
	1.24.2 Solution	26
106	1.25 EN SKT-1 No.5P1.0V1.0: Distances in	
	the n -dimensional space	27
108	1.25.1 Solution	27
	1.26 FR SH-1 No.1P1.0V1.0: Prouver que	
110	$n^2 = \sum_{n=1}^{n^2} = (2n - 1) = n^2$	29
	1.26.1 Solution	29
112	<i>Categories: induction sum odd numbers natural num-</i>	
	<i>bers</i>	

1 Exercises and Information

The use of aids such as calculators, formula collections, spreadsheets, and digital tools is permitted only under the expressly stated conditions. Permitted aids must be declared in advance for exams and approved by the exam administrator. Any unauthorized aids are prohibited and may result in disqualification. While working on an assignment or exam, it is prohibited to obtain additional materials or external assistance unless expressly permitted. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions.

Violation of these regulations can result in serious consequences. Especially in official assessments, the use of unauthorized aids can lead to immediate exclusion from the exam. In repeated or particularly serious cases, a permanent ban from the exam may even be imposed. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions and that the integrity of the assessments is maintained.

This sheet serves the purpose of the exercise and can be submitted officially but under certain conditions. At the same time, it should be considered an unofficial document, as it was processed without administrative supervision.

1. **Correct labeling** –The document must be clearly marked as an exercise sheet.
2. **Completeness and formatting** –It must be in a recognized format (e.g., PDF or printed copy) and contain all required content.
3. **Timely submission** –Submission must be made within the specified deadlines.
4. **Approval by the responsible authority** –Official recognition requires the approval of the relevant examining or administrative unit.
5. **No outside assistance** –The document must have been completed exclusively by the relevant individual without outside assistance.
6. **No guarantee of grade** –Since the sheet was created without administrative oversight, there is no obligation to consider it for official grading.
7. **No liability** –The author assumes no liability for the correctness or completeness of the content.
8. **No official status** –The document is not an official document and does not have the same legal status as an officially issued document.
9. **No guarantee of recognition** –Submission of this document does not guarantee recognition or official consideration by any authority or institution.
10. **No guarantee of confidentiality** –Protection of personal data and confidentiality cannot be guaranteed.
11. **No guarantee of security** –The security of the content and the data contained therein is not guaranteed.
12. **No guarantee of authenticity** –The authenticity of the information or data within the document cannot be confirmed.
13. **No guarantee of integrity** –The authenticity or integrity of the content contained therein cannot be assured.
14. **No guarantee of validity** –The document may contain content whose legal or technical validity cannot be confirmed.
15. **No guarantee of reliability** –The accuracy, completeness, or reliability of the information cannot be guaranteed.

Everything is based on trust and so, have fun.

150 1.1 DE SH-1 No.1P1.0V1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{k=1}^{n^2} (2k-1) = n^2$

Time for Exercise: 5 min *Nam-Score:* 1.0 *An Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

152 Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.

154 • Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

Category: Shoemei **Difficulty:** Einfach **Tags:** Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen

156 **UUID:** e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – **GUID:** 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.2 DE SKK-1 No.4-1P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Time for Exercise: 4 h 0 min *Nam-Score:* 4.0 *An Original*Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n , wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage), niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperfläche ("Flügel") durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.2.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n-1)$ -Hyperfläche.

1.2.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden muss, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** Hart **Tags:** Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ca62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.3 DE SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Time for Exercise: 10 h 0 min *Nam-Score:* 9.0 *An Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n , wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n ,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

1.3.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

1.3.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** YAMI **Tags:** Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.4 DE SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3

Time for Exercise: 7 h 30 min **Nam-Score:** 8.0 **An Original**Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n , wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperfläche ("Flügel") durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.4.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$ -Hyperfläche.

1.4.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden muss, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** YAMI **Tags:** Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.5 DE SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

224 **Time for Exercise:** 10 min *Nam-Score:* 4.0 *An Original*

226 Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im \mathbb{R}^2 , wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

1.5.1 Aufgabe

228 Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn
230 die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor \vec{MP} steht. **Hinweis:** Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im \mathbb{R}^2 .

232 Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

234 **Category:** Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** YAMI **Tags:** Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

236 **UUID:** 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.6 DE SKT-1 No.5P1.0V1.0: Abstände im n -dimensionalen Raum**Time for Exercise:** 50 min **Nam-Score:** 1.2 **An Original**

238

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der i -ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:

$$\|P_i - P_j\| = \sqrt{2}$$

2. Stelle die Punkte P_1, \dots, P_n als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.

240

3. **Zeige zusätzlich:** Die Punkte P_1, \dots, P_n sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **$(n - 1)$ -dimensionales Simplex** in \mathbb{R}^n .

242

4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in \mathbb{R}^{n-1} .

Category: Shoemei **Difficulty:** Mittel **Tags:** Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

244

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – **GUID:** 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f on 19.04.2025

246

1.7 EN SH-I No.1P1.0V1.0: *Proof that $n^2 = \sum_{n=1}^{n^2} (2n-1) = n^2$*

248 **Time for Exercise:** 5 min *Nam-Score: 1.0 An Original*

Prove that for every natural number n the sum of the first n odd numbers is equal to n^2 .

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \mid n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- 250
- Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
 - Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary n , then it is also true for $n + 1$.

252 **Category:** Shoemei **Difficulty:** Easy **Tags:** induction, sum, odd numbers, natural numbers

UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – **GUID:** 429b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.8 EN SKK-1 No.4-IP1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1

254

Time for Exercise: 4 h 0 min *Nam-Score:* 4.0 *An Original*Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in \mathbb{R}^n , where:

256

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

258

The points are distributed in space such that:

260

no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$ -dimensional hyperplane (general position), never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

262

A **windmill process** starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$ -dimensional hyper-surface ("wing") through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

264

1.8.1 Transition rule

266

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B , or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$ -hyper-surface.

268

1.8.2 Goal

Prove that all points in P are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

270

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

272

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** Hard **Tags:** induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

274

UUID: 048d25c1-ca62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

276 *1.9 EN SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2*

Time for Exercise: 10 h 0 min *Nam-Score:* 9.0 *An Original*

278 Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in \mathbb{R}^n , where:

- $2n$ random points in general position in \mathbb{R}^n ,
- 280 • point sets A and B with $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- 282 • Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

284 *1.9.1 New rule*

each point from P may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

286 *1.9.2 Goal*

288 Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

290 **Category:** Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** Darkside **Tags:** induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

292 **UUID:** 048d25c1-ca62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.10 EN SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3

Time for Exercise: 7 h 30 min **Nam-Score:** 8.0 **An Original**

Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in \mathbb{R}^n , where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

Additionally, n and k are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$ -dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

A windmill process starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$ -dimensional hyper-surface ("wing") through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

1.10.1 Transition Rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B , or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$ -hyper-surface.

1.10.2 Goal

Prove that in this construction all points in P are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty:** Darkside **Tags:** Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

316 *1.11 EN SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4*

Time for Exercise: 10 min *Nam-Score:* 4.0 *An Original*

318 Given: Three points A_1, A_2, A_3 form an equilateral windmill in \mathbb{R}^2 , where the center M of the equilateral triangle is also given. A point P lies outside the windmill.

320 *1.11.1 Task*

322 Determine the reflection of point P on the line passing through two windmill points (e.g., A_1 and A_2). Then calculate the distance between P and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center M and is orthogonal to the vector \vec{MP} . **Hint:** Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in \mathbb{R}^2 .

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

326 **Category:** Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty:** Darkside **Tags:** Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

328 **UUID:** 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.12 EN SKT-1 No.5P1.0V1.0: Distances in the n -dimensional space

330

Time for Exercise: 50 min **Nam-Score:** 1.2 **An Original**Given n points $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point P_i represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the i -th position)

332

1. Prove that the **points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:

$$\|P_i - P_j\| = \sqrt{2}$$

2. Represent the points P_1, \dots, P_n as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3. **Additionally prove:** The points P_1, \dots, P_n are **linearly independent** and form an **$(n-1)$ -dimensional simplex** in \mathbb{R}^n .

334

4. Compute the volume of the regular simplex in \mathbb{R}^{n-1} .

336

Category: Shoemei **Difficulty:** Medium **Tags:** induction, geometry, space, real numbers**UUID:** f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – **GUID:** 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

338

1.13 FR SH-1 No.1P1.0V1.0: Prouver que $n^2 = \sum_{k=1}^{n^2} (2k-1) = n^2$

340 **Time for Exercise:** 5 min *Nam-Score:* 1.0 *An Original*

Prouver que pour tout nombre naturel n , la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2 .

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad | n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- 342 • Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un n quelconque, alors il est également vrai pour $n + 1$.

344 **Category:** Shoemei **Difficulty:** Unknown Language **Tags:** Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – **GUID:** 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.14 DE SH-1 No.1P1.0V1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{i=1}^n 2i - 1 = (2n - 1) = n^2$

346

Time for Exercise: 5 min **Nam-Score:** 1.0 **An Original**

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2 \mid n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

348

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n + 1$ gilt.

350

1.14.1 Solution

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Aussage für n wahr.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) &= n^2 + (2(n + 1) - 1) \\ &= n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Category: Shoemei **Difficulty:** Einfach **Tags:** Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen

352

UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – **GUID:** 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.15 DE SKK-1 No.4-IP1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Time for Exercise: 4 h 0 min **Nam-Score:** 4.0 **An Original**

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n , wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage), niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperfläche ("Flügel") durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.15.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$ -Hyperfläche.

1.15.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden muss, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

1.15.3 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** Hart **Tags:** Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.16 DE SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Time for Exercise: 10 h 0 min *Nam-Score:* 9.0 *An Original*Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n , wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n ,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

1.16.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

1.16.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

1.16.3 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** YAMI **Tags:** Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit**UUID:** 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

400 *1.17 DE SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3*

Time for Exercise: 7 h 30 min *Nam-Score:* 8.0 *An Original*

402 Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n , wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- 404 • B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

406 Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- 408 • niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$ -dimensionalen
410 Hyperfläche ("Flügel") durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

412 *1.17.1 Übergangsregel*

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird
414 dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$ -Hyperfläche.

1.17.2 Ziel

416 Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden muss, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht
418 werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

420 *1.17.3 Solution*

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

422 **Category:** Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** YAMI **Tags:** Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

424 **UUID:** 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.18 DE SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

426

Time for Exercise: 10 min **Nam-Score:** 4.0 *An Original*

Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im \mathbb{R}^2 , wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

428

1.18.1 Aufgabe

430

Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor \vec{MP} steht. **Hinweis:** Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im \mathbb{R}^2 .

432

434

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

1.18.2 Solution

436

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** YAMI **Tags:** Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

438

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

440

442 1.19 DE SKT-1 No.5P1.0V1.0: Abstände im n -dimensionalen Raum**Time for Exercise:** 50 min **Nam-Score:** 1.2 **An Original**Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

444 (der Eintrag 1 steht an der i -ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:

$$\|P_i - P_j\| = \sqrt{2}$$

2. Stelle die Punkte P_1, \dots, P_n als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.

446 3. **Zeige zusätzlich:** Die Punkte P_1, \dots, P_n sind **nicht linear abhängig** und bilden ein $(n - 1)$ -**dimensionales Simplex** in \mathbb{R}^n .448 4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in \mathbb{R}^{n-1} .

1.19.1 Solution

- 450 1.
- Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben**

Gegeben: Die Punkte $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ sind:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad P_j = e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Unterschied zweier Punkte: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$

452 Dieser Vektor hat:

- an Stelle i : 1,
- an Stelle j : -1 ,
- sonst 0

Norm:

$$\|P_i - P_j\|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \|P_i - P_j\| = \sqrt{2}$$

456 \rightarrow Alle Punkte haben den gleichen Abstand zueinander.

2. Matrixdarstellung

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

458 3. **Lineare Unabhängigkeit****Definition:** Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

Beweis:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Standardbasis ist **linear unabhängig**.

4. Volumen des regulären Simplex in \mathbb{R}^{n-1}

Wir verschieben die Punkte so, dass sie im Ursprung liegen, und berechnen das Volumen mithilfe von Gram-Determinanten oder der Formel für das Volumen eines Simplex aus Vektoren:

Volumenformel für Simplex aus Vektoren

Für ein $(n-1)$ -Simplex S mit Basisvektoren v_1, \dots, v_{n-1} :

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

wobei G die **Gram-Matrix** ist:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Es ist bekannt, dass das Volumen eines regulären Simplex mit Kantenlänge ℓ in \mathbb{R}^{n-1} ist:

$$\text{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

Für $\ell = \sqrt{2}$:

$$\text{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

Das ist das Volumen eines Simplex mit n Eckpunkten und Kantenlänge $\sqrt{2}$.

5. Punktetabelle

Kondition	Beschreibung	Punkte
Norm Gleichung Aufstellen	Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben.	3
Matrix	Stelle die Punkte als Matrix dar.	1
Gleichung und Unabhängigkeit	Beweise die lineare Unabhängigkeit.	2
Volumenformel	Leite die Volumenformel für das Simplex her.	1
Beispiel	Führe eine Beispielrechnung durch.	2
Allgemeine Zusammenfassung	Fasse die Ergebnisse zusammen.	2

Table 1: Punktevergabe für die Lösung

Category: Shoemei **Difficulty:** Mittel **Tags:** Induktion, Geometrie, Raum, Reelle Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – **GUID:** 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f on 19.04.2025

1.20 EN SH-I No.1P1.0V1.0: Proof that $n^2 = \sum_{k=1}^{n^2} (2k-1) = n^2$

470 **Time for Exercise:** 5 min **Nam-Score:** 1.0 **An Original**

Prove that for every natural number n the sum of the first n odd numbers is equal to n^2 .

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \mid n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- 472 • Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
- Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary n , then it is also true for $n + 1$.

474 1.20.1 Solution

Induction base: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induction step: Let $n \in \mathbb{N}$ and the statement is true for n .

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Then it holds:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) &= n^2 + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Category: Shoemei **Difficulty:** Easy **Tags:** induction, sum, odd numbers, natural numbers

476 **UUID:** e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – **GUID:** 429b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.21 EN SKK-1 No.4-IP1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1

Time for Exercise: 4 h 0 min **Nam-Score:** 4.0 **An Original**Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in \mathbb{R}^n , where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

The points are distributed in space such that:

no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$ -dimensional hyperplane (general position), never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

A **windmill process** starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$ -dimensional hyper-surface ("wing") through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

1.21.1 Transition rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B , or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$ -hyper-surface.

1.21.2 Goal

Prove that all points in P are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

1.21.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** Hard **Tags:** induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ca62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.22 EN SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2

Time for Exercise: 10 h 0 min *Nam-Score:* 9.0 *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in \mathbb{R}^n , where:

- $2n$ random points in general position in \mathbb{R}^n ,
- point sets A and B with $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

1.22.1 New rule

each point from P may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

1.22.2 Goal

Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

1.22.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty:** Darkside **Tags:** induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.23 EN SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3

520

Time for Exercise: 7 h 30 min **Nam-Score:** 8.0 **An Original**Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in \mathbb{R}^n , where:

522

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

524

Additionally, n and k are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

526

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$ -dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

528

A windmill process starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$ -dimensional hyper-surface ("wing") through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

530

1.23.1 Transition Rule

532

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B , or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$ -hyper-surface.

534

1.23.2 Goal

Prove that in this construction all points in P are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

536

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

538

1.23.3 Solution

Not yet available in English.

540

Category: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty:** Darkside **Tags:** Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

542

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

544

1.24 EN SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4

Time for Exercise: 10 min *Nam-Score:* 4.0 *An Original*

Given: Three points A_1, A_2, A_3 form an equilateral windmill in \mathbb{R}^2 , where the center M of the equilateral triangle is also given. A point P lies outside the windmill.

1.24.1 Task

Determine the reflection of point P on the line passing through two windmill points (e.g., A_1 and A_2). Then calculate the distance between P and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center M and is orthogonal to the vector \vec{MP} . **Hint:** Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in \mathbb{R}^2 .

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

1.24.2 Solution

Not yet available in English.

Category: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty:** Darkside **Tags:** Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – **GUID:** 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

1.25 EN SKT-1 No.5P1.0V1.0: Distances in the n -dimensional space**Time for Exercise:** 50 min **Nam-Score:** 1.2 **An Original**Given n points $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point P_i represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the i -th position)

1. Prove that the **points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:

$$\|P_i - P_j\| = \sqrt{2}$$

2. Represent the points P_1, \dots, P_n as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3. **Additionally prove:** The points P_1, \dots, P_n are **linearly independent** and form an $(n-1)$ -dimensional simplex in \mathbb{R}^n .

4. Compute the volume of the regular simplex in \mathbb{R}^{n-1} .

1.25.1 Solution

1. **Prove that all points have the same distance $\sqrt{2}$**

Given: The points $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ are:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad P_j = e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Difference between two points: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$

This vector has:

- at position i : 1,
- at position j : -1 ,
- otherwise 0

Norm:

$$\|P_i - P_j\|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \|P_i - P_j\| = \sqrt{2}$$

 \rightarrow All points have the same distance from each other.

2. **Matrix representation**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Linear independence**

Definition: A set of vectors is linearly independent if:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

Proof:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

The standard basis is **linearly independent**.

4. Volume of the regular simplex in \mathbb{R}^{n-1}

We shift the points so that they are centered at the origin and calculate the volume using Gram determinants or the formula for the volume of a simplex from vectors:

Volume formula for simplex from vectors

For an $(n-1)$ -simplex S with basis vectors v_1, \dots, v_{n-1} :

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

where G is the **Gram matrix**:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

It is known that the volume of a regular simplex with edge length ℓ in \mathbb{R}^{n-1} is:

$$\text{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

For $\ell = \sqrt{2}$:

$$\text{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

This is the volume of a simplex with n vertices and edge length $\sqrt{2}$.

5. Points Table

Condition	Description	Points
Norm Equation Setup	Prove that all points have the same distance $\sqrt{2}$.	3
Matrix	Represent the points as a matrix.	1
Equation and Independence	Prove linear independence.	2
Volume Formula	Derive the volume formula for the simplex.	1
Example	Provide an example calculation.	2
General Summary	Summarize the results.	2

Table 2: Points Allocation for the Solution

Category: Shoemei **Difficulty:** Medium **Tags:** induction, geometry, space, real numbers

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – **GUID:** 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

1.26 FR SH-1 No.1P1.0V1.0: Prouver que $n^2 = \sum_{n=1}^{n^2} (2n-1) = n^2$

Time for Exercise: 5 min **Nam-Score:** 1.0 **An Original**

588

Prouver que pour tout nombre naturel n , la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2 .

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \mid n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un n quelconque, alors il est également vrai pour $n + 1$.

590

1.26.1 Solution

592

Base de l'induction : $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Étape d'induction : Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'énoncé est vrai pour n .

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Alors :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1) &= n^2 + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Category: Shoemei **Difficulty:** Unknown **Language Tags:** Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels

UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – **GUID:** 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

594