# Aufgabensammlung zur Beweisen

## Paper ID: P1.0 *on April 22, 2025 – 19.04.2025 in Frankfurt* Version 1.0 Revision 1

Archive-ID: 3891M-932 DOI: 10.5281/zenodo.15249602

**Duy Nam Schlitz**[a*]

[a] *Deparment and Affiliation, duy.schlitz@ohs.hanau.schule*
[*] *Corresponding Author*

**Abstract**

Aufgaben zur Beweisen mit Induktion, Summen und ungeraden Zahlen.
Exercise: No.1, No.4-1, No.4-2, No.4-3, No.4-4, No.5

Contents

*Categories: induction sum odd numbers natural numbers*

# 1 Exercises and Informtion

The use of aids such as calculators, formula collections, spreadsheets, and digital tools is permitted only under the expressly stated conditions. Permitted aids must be declared in advance for exams and approved by the exam administrator. Any unauthorized aids are prohibited and may result in disqualification. While working on an assignment or exam, it is prohibited to obtain additional materials or external assistance unless expressly permitted. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions.

Violation of these regulations can result in serious consequences. Especially in official assessments, the use of unauthorized aids can lead to immediate exclusion from the exam. In repeated or particularly serious cases, a permanent ban from the exam may even be imposed. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions and that the integrity of the assessments is maintained.

This sheet serves the purpose of the exercise and can be submitted officially but under certain conditions. At the same time, it should be considered an unofficial document, as it was processed without administrative supervision.

1. **Correct labeling** –The document must be clearly marked as an exercise sheet.
2. **Completeness and formatting** –It must be in a recognized format (e.g., PDF or printed copy) and contain all required content.
3. **Timely submission** –Submission must be made within the specified deadlines.
4. **Approval by the responsible authority** –Official recognition requires the approval of the relevant examining or administrative unit.
5. **No outside assistance** –The document must have been completed exclusively by the relevant individual without outside assistance.
6. **No guarantee of grade** –Since the sheet was created without administrative oversight, there is no obligation to consider it for official grading.
7. **No liability** –The author assumes no liability for the correctness or completeness of the content.
8. **No official status** –The document is not an official document and does not have the same legal status as an officially issued document.
9. **No guarantee of recognition** –Submission of this document does not guarantee recognition or official consideration by any authority or institution.
10. **No guarantee of confidentiality** –Protection of personal data and confidentiality cannot be guaranteed.
11. **No guarantee of security** –The security of the content and the data contained therein is not guaranteed.
12. **No guarantee of authenticity** –The authenticity of the information or data within the document cannot be confirmed.
13. **No guarantee of integrity** –The authenticity or integrity of the content contained therein cannot be assured.
14. **No guarantee of validity** –The document may contain content whose legal or technical validity cannot be confirmed.
15. **No guarantee of reliability** –The accuracy, completeness, or reliability of the information cannot be guaranteed.

Everything is based on trust and so, have fun.

### *1.1 DE SH-1 No.1P1.0V1.0: Beweise, dass* $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

**Time for Exercise**: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl $n$ die Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen gleich $n^2$ ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges $n$ gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Einfach **Tags**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen
**UUID**: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

## 1.2 *DE SKK-1 No.4-1P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2*

**Time for Exercise**: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- $B$ eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

> keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage), niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus $P$ (also aus $A$ oder $B$) mit einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche ( durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

### 1.2.1 *Übergangsregel*

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus $A$ wenn aktueller Drehpunkt in $B$ liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n-1)$-Hyperfläche.

### 1.2.2 *Ziel*

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in $P$ als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Hart **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.3 DE SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2*

**Time for Exercise**: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen $A$ und $B$ mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

#### *1.3.1 Neue Regel*

jeder Punkt aus $P$ darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

#### *1.3.2 Ziel*

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.4 DE SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3*

**Time for Exercise**: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- $B$ eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind $n$ und $k$ auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus $P$ (also aus $A$ oder $B$) mit einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche ( durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

#### *1.4.1 Übergangsregel*

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus $A$ wenn aktueller Drehpunkt in $B$ liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$-Hyperfläche.

#### *1.4.2 Ziel*

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in $P$ als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

## *1.5 DE SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4*

**Time for Exercise**: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Gegeben: Drei Punkte $A_1, A_2, A_3$ bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt $M$ des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt $P$ liegt außerhalb der Mühle.

### *1.5.1 Aufgabe*

Bestimme die Spiegelung des Punktes $P$ an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. $A_1$ und $A_2$) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen $P$ und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt $M$ verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### 1.6 DE SKT-1 No.5P1.0V1.0: Abstände im $n$-dimensionalen Raum

**Time for Exercise**: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Gegeben seien $n$ Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt $P_i$ die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der $i$-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Stelle die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **($n-1$)-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Mittel **Tags**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

**UUID**: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f on 19.04.2025

### *1.7 EN SH-1 No.1P1.0V1.0: Proof that* $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

**Time for Exercise**: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prove that for every natural number $n$ the sum of the first $n$ odd numbers is equal to $n^2$.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
- Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary $n$, then it is also true for $n + 1$.

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Easy **Tags**: induction, sum, odd numbers, natural numbers
**UUID**: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 429b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.8 EN SKK-1 No.4-1P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1*

**Time for Exercise**: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- $B$ a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

The points are distributed in space such that:

> no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position), never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

A **windmill process** starts at an arbitrary point from $P$ (i.e., from $A$ or $B$) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface ( through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

#### *1.8.1 Transition rule*

If a point from the other group (i.e., from $A$ if the current pivot point is in $B$, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

#### *1.8.2 Goal*

Prove that all points in $P$ are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Hard **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.9 EN SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2*

**Time for Exercise**: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- $2n$ random points in general position in $\mathbb{R}^n$,
- point sets $A$ and $B$ with $|A| = n+1$, $|B| = n-1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

#### *1.9.1 New rule*

each point from $P$ may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

#### *1.9.2 Goal*

Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Darkside **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

 

### *1.10 EN SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3*

**Time for Exercise**: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- $B$ a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

Additionally, $n$ and $k$ are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

A windmill process starts at an arbitrary point from $P$ (i.e., from $A$ or $B$) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface ( through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

#### *1.10.1 Transition Rule*

If a point from the other group (i.e., from $A$ if the current pivot point is in $B$, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

#### *1.10.2 Goal*

Prove that in this construction all points in $P$ are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n$‘5.

**Category**: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

## *1.11 EN SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4*

**Time for Exercise**: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given: Three points $A_1, A_2, A_3$ form an equilateral windmill in $\mathbb{R}^2$, where the center $M$ of the equilateral triangle is also given. A point $P$ lies outside the windmill.

### *1.11.1 Task*

Determine the reflection of point $P$ on the line passing through two windmill points (e.g., $A_1$ and $A_2$). Then calculate the distance between $P$ and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center $M$ and is orthogonal to the vector $\vec{MP}$. **Hint**: Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in $\mathbb{R}^2$.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

**Category**: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.12 EN SKT-1 No.5P1.0V1.0: Distances in the $n$-dimensional space*

**Time for Exercise**: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Given $n$ points $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point $P_i$ represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the $i$-th position)

1. Prove that the**points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Represent the points $P_1, \ldots, P_n$ as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
3. **Additionally prove**: The points $P_1, \ldots, P_n$ are**linearly independent** and form an**($n-1$)-dimensional simplex** in
$mathbbR^n$.
4. Compute the volume of the regular simplex in
$mathbbR^{n-1}$.

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: induction, geometry, space, real numbers
**UUID**: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

### *1.13 FR SH-1 No.1P1.0V1.0: Prouver que* $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

**Time for Exercise**: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prouver que pour tout nombre naturel $n$, la somme des $n$ premiers nombres impairs est égale à $n^2$.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un $n$ quelconque, alors il est également vrai pour $n + 1$.

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Unknown Language **Tags**: Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels
**UUID**: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.14 DE SH-1 No.1P1.0V1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$*

**Time for Exercise**: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl $n$ die Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen gleich $n^2$ ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges $n$ gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

---

#### *1.14.1 Solution*

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Aussage für $n$ wahr.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Dann gilt:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Einfach **Tags**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen
**UUID**: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

  

### 1.15 DE SKK-1 No.4-1P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

**Time for Exercise**: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- $B$ eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage), niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus $P$ (also aus $A$ oder $B$) mit einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche ( durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

#### 1.15.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus $A$ wenn aktueller Drehpunkt in $B$ liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n-1)$-Hyperfläche.

#### 1.15.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in $P$ als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

---

#### 1.15.3 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Hart **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

 

### *1.16 DE SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2*

**Time for Exercise**: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen $A$ und $B$ mit $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

#### *1.16.1 Neue Regel*

jeder Punkt aus $P$ darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

#### *1.16.2 Ziel*

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

---

#### *1.16.3 Solution*

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.17 DE SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3*

**Time for Exercise**: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- $B$ eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind $n$ und $k$ auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus $P$ (also aus $A$ oder $B$) mit einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche ( durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

#### *1.17.1 Übergangsregel*

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus $A$ wenn aktueller Drehpunkt in $B$ liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$-Hyperfläche.

#### *1.17.2 Ziel*

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in $P$ als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

---

#### *1.17.3 Solution*

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.18 DE SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4*

**Time for Exercise**: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Gegeben: Drei Punkte $A_1, A_2, A_3$ bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt $M$ des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt $P$ liegt außerhalb der Mühle.

#### *1.18.1 Aufgabe*

Bestimme die Spiegelung des Punktes $P$ an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. $A_1$ und $A_2$) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen $P$ und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt $M$ verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

---

#### *1.18.2 Solution*

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: YAMI **Tags**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### 1.19 *DE SKT-1 No.5P1.0V1.0: Abstände im $n$-dimensionalen Raum*

**Time for Exercise**: 50 min *Nam-Score: 1.2 An Original*

Gegeben seien $n$ Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt $P_i$ die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der $i$-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Stelle die Punkte $P_1, \dots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \dots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **($n-1$)-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

---

#### 1.19.1 *Solution*

1. **Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben**

   Gegeben: Die Punkte $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ sind:
$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \qquad P_j = e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$
   Unterschied zweier Punkte: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$

   Dieser Vektor hat:

   - an Stelle $i$: 1,
   - an Stelle $j$: $-1$,
   - sonst 0

   Norm:
$$\| P_i - P_j \|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
   $\rightarrow$ Alle Punkte haben den gleichen Abstand zueinander.

2. **Matrixdarstellung**
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Lineare Unabhängigkeit**

   **Definition**: Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$$

**Beweis**:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Standardbasis ist **linear unabhängig**.

4. **Volumen des regulären Simplex in** $\mathbb{R}^{n-1}$

Wir verschieben die Punkte so, dass sie im Ursprung liegen, und berechnen das Volumen mithilfe von Gram-Determinanten oder der Formel für das Volumen eines Simplex aus Vektoren:

**Volumenformel für Simplex aus Vektoren**

Für ein $(n-1)$-Simplex $S$ mit Basisvektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

wobei $G$ die **Gram-Matrix** ist:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Es ist bekannt, dass das Volumen eines regulären Simplex mit Kantenlänge $\ell$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist:

$$\text{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

Für $\ell = \sqrt{2}$:

$$\text{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

Das ist das Volumen eines Simplex mit $n$ Eckpunkten und Kantenlänge $\sqrt{2}$.

5. **Punktetabelle**

| **Kondition** | **Beschreibung** | **Punkte** |
|---|---|---|
| Norm Gleichung Aufstellen | Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben. | 3 |
| Matrix | Stelle die Punkte als Matrix dar. | 1 |
| Gleichung und Unabhängigkeit | Beweise die lineare Unabhängigkeit. | 2 |
| Volumenformel | Leite die Volumenformel für das Simplex her. | 1 |
| Beispiel | Führe eine Beispielrechnung durch. | 2 |
| Allgemeine Zusammenfassung | Fasse die Ergebnisse zusammen. | 2 |

Table 1: Punktevergabe für die Lösung

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Mittel **Tags**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen
**UUID**: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f on 19.04.2025

### *1.20 EN SH-1 No.1P1.0V1.0: Proof that* $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

**Time for Exercise**: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prove that for every natural number $n$ the sum of the first $n$ odd numbers is equal to $n^2$.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
- Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary $n$, then it is also true for $n + 1$.

---

#### *1.20.1 Solution*

Induction base: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induction step: Let $n \in \mathbb{N}$ and the statement is true for $n$.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Then it holds:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Easy **Tags**: induction, sum, odd numbers, natural numbers
**UUID**: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 429b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.21 EN SKK-1 No.4-1P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1*

**Time for Exercise**: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- $B$ a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

The points are distributed in space such that:

> no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position), never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

A **windmill process** starts at an arbitrary point from $P$ (i.e., from $A$ or $B$) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface ( through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

#### *1.21.1 Transition rule*

If a point from the other group (i.e., from $A$ if the current pivot point is in $B$, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

#### *1.21.2 Goal*

Prove that all points in $P$ are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

---

#### *1.21.3 Solution*

Not available yet in English.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Hard **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

  

### *1.22 EN SKK-1/2 No.4-2P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2*

**Time for Exercise**: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- $2n$ random points in general position in $\mathbb{R}^n$,
- point sets $A$ and $B$ with $|A| = n+1$, $|B| = n-1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

#### *1.22.1 New rule*

each point from $P$ may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

#### *1.22.2 Goal*

Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

---

#### *1.22.3 Solution*

Not available yet in English.

**Category**: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Darkside **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### 1.23 *EN SKK-1/3 No.4-3P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3*

**Time for Exercise**: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- $B$ a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

Additionally, $n$ and $k$ are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

A windmill process starts at an arbitrary point from $P$ (i.e., from $A$ or $B$) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface ( through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

#### 1.23.1 *Transition Rule*

If a point from the other group (i.e., from $A$ if the current pivot point is in $B$, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

#### 1.23.2 *Goal*

Prove that in this construction all points in $P$ are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n$‘5.

---

#### 1.23.3 *Solution*

Not available yet in English.

**Category**: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.24 EN SKK-1/4 No.4-4P1.0V1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4*

**Time for Exercise**: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given: Three points $A_1, A_2, A_3$ form an equilateral windmill in $\mathbb{R}^2$, where the center $M$ of the equilateral triangle is also given. A point $P$ lies outside the windmill.

#### *1.24.1 Task*

Determine the reflection of point $P$ on the line passing through two windmill points (e.g., $A_1$ and $A_2$). Then calculate the distance between $P$ and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center $M$ and is orthogonal to the vector $\vec{MP}$. **Hint**: Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in $\mathbb{R}^2$.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

#### *1.24.2 Solution*

Not available yet in English.

**Category**: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

**UUID**: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

### *1.25 EN SKT-1 No.5P1.0V1.0: Distances in the $n$-dimensional space*

**Time for Exercise**: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Given $n$ points $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point $P_i$ represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the $i$-th position)

1. Prove that the**points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Represent the points $P_1, \ldots, P_n$ as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
3. **Additionally prove**: The points $P_1, \ldots, P_n$ are**linearly independent** and form an**($n-1$)-dimensional simplex** in
$mathbbR^n$.
4. Compute the volume of the regular simplex in
$mathbbR^{n-1}$.

---

#### *1.25.1 Solution*

1. **Prove that all points have the same distance** $\sqrt{2}$

   Given: The points $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ are:
$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \qquad P_j = e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

   Difference between two points: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$

   This vector has:

   - at position $i$: 1,
   - at position $j$: $-1$,
   - otherwise 0

   Norm:
$$\| P_i - P_j \|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

   $\rightarrow$ All points have the same distance from each other.

2. **Matrix representation**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Linear independence**

   **Definition**: A set of vectors is linearly independent if:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \, \forall \, i$$

**Proof**:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ lambda_2 \\ vdots \\ lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

The standard basis is**linearly independent**.

4. **Volume of the regular simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$**

We shift the points so that they are centered at the origin and calculate the volume using Gram determinants or the formula for the volume of a simplex from vectors:

**Volume formula for simplex from vectors**

For an $(n-1)$-simplex $S$ with basis vectors $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

where $G$ is the**Gram matrix**:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

It is known that the volume of a regular simplex with edge length $\ell$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ is:

$$\text{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

For $\ell = \sqrt{2}$:

$$\text{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

This is the volume of a simplex with $n$ vertices and edge length $\sqrt{2}$.

5. **Points Table**

| **Condition** | **Description** | **Points** |
|---|---|---|
| hline Norm Equation Setup | Prove that all points have the same distance $\sqrt{2}$. | 3 |
| hline Matrix | Represent the points as a matrix. | 1 |
| hline Equation and Independence | Prove linear independence. | 2 |
| hline Volume Formula | Derive the volume formula for the simplex. | 1 |
| hline Example | Provide an example calculation. | 2 |
| hline General Summary | Summarize the results. | 2 |
| hline | | |

Table 2: Points Allocation for the Solution

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: induction, geometry, space, real numbers
**UUID**: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

### *1.26 FR SH-1 No.1P1.0V1.0: Prouver que* $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

**Time for Exercise**: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prouver que pour tout nombre naturel $n$, la somme des $n$ premiers nombres impairs est égale à $n^2$.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un $n$ quelconque, alors il est également vrai pour $n + 1$.

---

#### *1.26.1 Solution*

Base de l'induction : $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Étape d'induction : Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'énoncé est vrai pour $n$.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Alors :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

**Category**: Shoemei **Difficulty**: Unknown Language **Tags**: Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels
**UUID**: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025