Solution: The Namische /ˈnamɪʃə/ Collection as a whole

Paper ID: PALL *on May 4, 2025 – 24.04.2025 in Frankfurt* Version 1.0 Revision 1

Archive-ID: 3891M-932 DOI: 10.5281/zenodo.15249602

Duy Nam Schlitz[a*]

[a] *Department of ISAC for Competition, duynamschlitzresearch@gmail.com*

[*] *Corresponding Author*

Abstract

This collection contains selected problems on the zeta function and related topics. It is aimed at advanced students and offers both classical and innovative problems with detailed solutions.

Exercise: No.1, No.10, No.4-1, No.4-2, No.4-3, No.4-4, No.5, No.6, No.7, No.8, No.9, Test.1, Test.2, Test.3, Total time: De: 370 h 45 min, En: 370 h 45 min, Fr: 5 min

Contents

Categories: induction sum odd numbers natural numbers

1 Einführung und Informationen: 370 h 45 min

Die Verwendung von Hilfsmitteln wie Taschenrechnern, Formelsammlungen, Tabellenkalkulationen und digitalen Werkzeugen ist nur unter den ausdrücklich angegebenen Bedingungen gestattet. Zulässige Hilfsmittel müssen im Voraus für Prüfungen deklariert und von der Prüfungsaufsicht genehmigt werden. Jegliche nicht genehmigten Hilfsmittel sind verboten und können zur Disqualifikation führen. Während der Bearbeitung einer Aufgabe oder Prüfung ist es untersagt, zusätzliche Materialien oder externe Hilfe in Anspruch zu nehmen, es sei denn, dies ist ausdrücklich erlaubt. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten.

Ein Verstoß gegen diese Vorschriften kann schwerwiegende Konsequenzen haben. Insbesondere bei offiziellen Prüfungen kann die Verwendung nicht genehmigter Hilfsmittel zum sofortigen Ausschluss von der Prüfung führen. Bei wiederholten oder besonders schwerwiegenden Fällen kann sogar ein dauerhaftes Prüfungsverbot verhängt werden. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten und die Integrität der Prüfungen gewahrt bleibt.

Dieses Blatt dient dem Zweck der Übung und kann unter bestimmten Bedingungen offiziell eingereicht werden. Gleichzeitig sollte es als inoffizielles Dokument betrachtet werden, da es ohne administrative Aufsicht erstellt wurde.

1. **Korrekte Kennzeichnung** - Das Dokument muss eindeutig als Übungsblatt gekennzeichnet sein.
2. **Vollständigkeit und Formatierung** - Es muss in einem anerkannten Format (z. B. PDF oder gedruckte Kopie) vorliegen und alle erforderlichen Inhalte enthalten.
3. **Fristgerechte Einreichung** - Die Einreichung muss innerhalb der festgelegten Fristen erfolgen.
4. **Genehmigung durch die zuständige Behörde** - Eine offizielle Anerkennung erfordert die Genehmigung der zuständigen Prüfungs- oder Verwaltungsstelle.
5. **Keine externe Hilfe** - Das Dokument muss ausschließlich von der betreffenden Person ohne externe Hilfe erstellt worden sein.
6. **Keine Garantie auf Bewertung** - Da das Blatt ohne administrative Aufsicht erstellt wurde, besteht keine Verpflichtung, es für eine offizielle Bewertung zu berücksichtigen.
7. **Keine Haftung** - Der Autor übernimmt keine Haftung für die Richtigkeit oder Vollständigkeit des Inhalts.
8. **Kein offizieller Status** - Das Dokument ist kein offizielles Dokument und hat nicht denselben rechtlichen Status wie ein offiziell ausgestelltes Dokument.
9. **Keine Garantie auf Anerkennung** - Die Einreichung dieses Dokuments garantiert keine Anerkennung oder offizielle Berücksichtigung durch eine Behörde oder Institution.
10. **Keine Garantie auf Vertraulichkeit** - Der Schutz persönlicher Daten und die Vertraulichkeit können nicht gewährleistet werden.
11. **Keine Garantie auf Sicherheit** - Die Sicherheit des Inhalts und der darin enthaltenen Daten ist nicht gewährleistet.
12. **Keine Garantie auf Authentizität** - Die Authentizität der Informationen oder Daten innerhalb des Dokuments kann nicht bestätigt werden.
13. **Keine Garantie auf Integrität** - Die Authentizität oder Integrität des enthaltenen Inhalts kann nicht sichergestellt werden.
14. **Keine Garantie auf Gültigkeit** - Das Dokument kann Inhalte enthalten, deren rechtliche oder technische Gültigkeit nicht bestätigt werden kann.
15. **Keine Garantie auf Zuverlässigkeit** - Die Genauigkeit, Vollständigkeit oder Zuverlässigkeit der Informationen kann nicht garantiert werden.

Alles beruht auf Vertrauen und daher viel Spaß.

1.1 DE SH-1 No.1PALLV1.0: Beweise, dass $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Zeit zur Bearbeitung: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Ein Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Einfach **Stichwörter**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.2 DE SKK-1 No.4-1PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.2.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n-1)$-Hyperfläche.

1.2.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.3 DE SKK-1/2 No.4-2PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n+1$, $|B| = n-1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

1.3.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

1.3.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.4 DE SKK-1/3 No.4-3PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3

Zeit zur Bearbeitung: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

1.4.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$-Hyperfläche.

1.4.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.5 DE SKK-1/4 No.4-4PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

Zeit zur Bearbeitung: 10 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

1.5.1 Aufgabe

Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

1.6 DE SKT-1 No.5PALLV1.0: Abstände im n-dimensionalen Raum

Zeit zur Bearbeitung: 50 min *Nam-Score: 1.2* *Ein Original*

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der i-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Stelle die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **$(n-1)$-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f am 19.04.2025

1.7 DE SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensionale Flächendurchlauf-Prozesse und Erreichbarkeitsgraphen

Zeit zur Bearbeitung: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *Ein Original*

Gegeben sei eine Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $|P| = kn$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wobei die Punkte in allgemeiner Lage liegen (d.h. keine $n+1$ Punkte liegen in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene).

Ein Drehdurchlaufprozess funktioniert wie folgt:

- Wähle einen Startpunkt $p_0 \in P$.
- Konstruiere eine $(n-1)$-Hyperfläche (eine "Drehfläche") durch diesen Punkt.
- Diese Hyperfläche wird kontinuierlich in festgelegter Weise (z.B. gemäß einer festen Orientierung im Raum) gedreht.
- Sobald ein weiterer Punkt $p_i \in P$ von der Fläche "berührt" wird (das heißt, sich auf der Fläche befindet), wird p_i zum neuen Ankerpunkt.
- Die Bewegung wird dort fortgesetzt.

1.7.1 Erweiterung

- Zwischen jeder Drehung wird die Orientierung der Fläche mit einer gegebenen Matrix aus $SO(n)$ verändert (d.h. jede Rotation ist durch einen Übergangsoperator festgelegt).
- Zwischenpunktsbeziehungen werden als gerichteter Graph $G = (V, E)$ gespeichert, wobei ein gerichteter Übergang $p_i \to p_j$ besteht, wenn p_j durch eine zulässige Drehung von p_i erreicht wurde.

1.7.2 Aufgaben

1. Beweise oder widerlege: Für bestimmte Punktkonfigurationen (z.B. reguläre Gitter, zufällige Punktwolken, Punkte auf Sphären oder simplizialen Flächen) ist der Erreichbarkeitsgraph stark zusammenhängend.
2. Finde einen allgemeinen Algorithmus, der für beliebiges n und Punktmenge P entscheidet, ob eine vollständige Erreichbarkeit aller Punkte durch den Prozess möglich ist.
3. Untersuche: Wie verändert sich die Erreichbarkeit bei Einführung von Übergangsverzögerungen oder zufälligen Störfaktoren in der Drehung?
4. Formuliere eine Optimierung: Finde einen minimalen Rotationspfad durch alle Punkte, der die Übergangsregeln beachtet.
5. Entwirf eine Visualisierung (in 2D, 3D oder nD-Projektionen), die den Prozess und Graphen dynamisch zeigt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Graphen, Hypergraphen, Flächendurchlauf-Prozesse, Erreichbarkeitsgraphen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.8 DE SH-3 No.7PALLV1.0: Analyse und Klassifikation von Wellensuperpositionen im gekrümmten Raum

Zeit zur Bearbeitung: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *Ein Original*

Ein gekrümmter Raum $\mathbb{R}^3$ mit einer glatten Metrik $g_{ij}(x, y, z)$, in dem sich eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ ausbreitet. Diese erfüllt die verallgemeinerte Wellengleichung:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|} \partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

1

mit $|g| = \det(g_{ij})$ und c als lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit.
Aufgaben:

1. Löse (symbolisch oder numerisch) die Wellengleichung im Spezialfall einer sphärisch symmetrischen Metrik:

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2$$

   mit geeigneten Randbedingungen (z. B. Dirichlet auf einer Kugeloberfläche $r = R$).

2. Zeige, dass sich die Lösung Ψ als Superposition von Eigenfunktionen der Laplace-Beltrami-Operatoren schreiben lässt, und berechne explizit die ersten nichttrivialen Moden.

3. Berechne das Gesamtenergiespektrum durch Integration über den Raum:

   $$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] \sqrt{|g|} \, d^3x$$

4. Untersuche numerisch oder analytisch, wie sich die Energie über die Zeit verteilt –insbesondere bei Interferenz von zwei punktförmigen Quellen mit zeitlich phasenverschobener Emission.

5. Optional (Bonus): Modelliere und visualisiere den Effekt eines zeitabhängigen Metrikterms, etwa $g_{ij}(x, t)$, der eine Gravitationswelle simuliert. Untersuche, wie sich die Interferenzstruktur und Energieverteilung verändert.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Analyse, Klassifikation, Wellen, Raumkrümmung
UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 023cf134-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.9 DE SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastische Analyse von Wellenphänomenen mittels Fourier- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Zeit zur Bearbeitung: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *Ein Original*

Untersuchen Sie ein raumzeitlich abhängiges Wellenphänomen unter dem Einfluss eines stochastischen Rauschens. Die Wellenfunktion sei gegeben durch:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

wobei:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ eine deterministische Basiswelle ist,
- $N(x,t,\omega)$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwert 0 und stationärer Kovarianzfunktion ist.

Gegeben:
Ein Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

und bekannter Rauschstärke σ^2 sowie Skalenparameter $\lambda > 0$.

1.9.1 Aufgaben

1. **Modellierung:** Formulieren Sie $N(x,t,\omega)$ als Gauß-Prozess mit obiger Kovarianzfunktion.
2. **Simulation:** Simulieren Sie mehrere Realisierungen von $\Psi(x,t,\omega)$ auf einem Gitter (x_i,t_j) für verschiedene Parameter σ^2 und k.
3. **Statistik:** Berechnen Sie Erwartungswert $E[\Psi(x,t)]$ und Varianz $Var[\Psi(x,t)]$ sowohl analytisch als auch aus den simulierten Daten.
4. **Spektralanalyse:** Führen Sie eine Fourier-Zerlegung von $\Psi(x,t,\omega)$ durch und berechnen Sie die spektrale Energiedichte.
5. **Extremwertstatistik:** Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Maxima im Intervall $[a,b]$ mithilfe von Maximum-Likelihood oder Bayesianischen Methoden.

(Bonus) **Rekonstruktion:** Trainieren Sie ein neuronales Netz, das aus verrauschten Beobachtungen $\Psi(x,t,\omega)$ die Basiswelle $\psi(x,t)$ rekonstruiert.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: NAM **Stichwörter**: Stochastik, Analyse, Wellenphänomene, Fourier-Transformation, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

1.10 DE SH-5 Test.1PALLV1.0: Zahlentheorie –Diophantische Gleichungen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *Ein Original*

Finde alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Diophantischen Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Erkläre deinen Lösungsweg und bestimme alle möglichen Werte für x und y, die diese Gleichung erfüllen. Diskutiere, wie man diese Art von Gleichung im Allgemeinen angehen kann.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Einfach **Stichwörter**: Zahlentheorie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763736 am 29.04.2025

1.11 DE SH-6 Test.2PALLV1.0: Kombinatorik –Anordnungen und Permutationen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Wie viele verschiedene Wege gibt es, 5 verschiedene Bücher auf 3 Regalen anzuordnen, wenn auf jedem Regal mindestens ein Buch platziert werden muss und die Regale keine unendliche Kapazität haben? Erkläre den Lösungsweg unter Verwendung der Prinzipien der Inklusion und Exklusion.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Kombinatorik

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561273 am 29.04.2025

1.12 DE SH-7 Test.3PALLV1.0: Geometrie –Kreisgeometrie und Tangenten

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $r = 10$. Ein Punkt P liegt außerhalb des Kreises und hat einen Abstand von $OP = 17$. Bestimmen Sie die Länge der Tangente von P an den Kreis und erläutern Sie die Berechnung mithilfe des Satzes des Pythagoras.

Erklären Sie, warum die Länge der Tangente nur von der Differenz zwischen den Abständen zwischen Punkt und Mittelpunkt und dem Radius des Kreises abhängt.

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Geometrie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-198257198275 am 29.04.2025

1.13 DE SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta-Kombination durch Fouriertransformationen

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *Ein Original*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine glatte, rasch fallende Funktion (d. h. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), sodass für ihre Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

folgende Identität gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Beweise mit Hilfe der Poissonschen Summenformel, dass die obige Gleichung unter geeigneten Bedingungen erfüllt ist.
2. Zeige, dass mit geeigneter Wahl von $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ für $\Re(s) > 1$, sich Aussagen über die analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion ableiten lassen.
3. Untersuche, wie die Beziehung in höhere Dimensionen erweitert werden kann (Fourier auf dem $\mathbb{R}^n$) und welche Rolle dabei die symmetrische Struktur in der Zeta-Analyse spielt.
4. Betrachte die Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

und zeige, dass sie sich als eine Art Fourierreihe der Zeta-Funktion interpretieren lässt. Leite eine Darstellung in Abhängigkeit von $\hat{f}$ her.

1.13.1 Hinweise

- Verwende die Poisson-Summenformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Nutze Eigenschaften der Mellin-Transformation für Teilaufgaben zu $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Beachte: Diese Aufgabe verlangt ein Verständnis für komplexe Analysis, Distributionentheorie, Fouriertransformation und spezielle Funktionen.

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Zeta-Kombination, Fouriertransformationen, Zeta-Funktion

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-239238527383 am 03.05.2025

1.14 DE SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximale Schnitte in k-uniformen Hypergraphen

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben sei ein k-uniformer Hypergraph $H = (V, E)$, d. h. jeder Hyperrand $e \in E$ verbindet genau k Knoten aus der Knotenmenge V. Definiere einen **Schnitt** als eine Partition von V in zwei disjunkte Teilmengen $V_1 \cup V_2 = V$, wobei ein Hyperrand **geschnitten** ist, wenn er Knoten aus beiden Teilen enthält.

Zeige oder widerlege:

Für jedes $k \geq 2$ existiert eine Partition von V in zwei Mengen, sodass mindestens $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ Hyperkanten geschnitten werden.

Zusatz: Wie ändert sich die untere Schranke bei zufälliger Partition?

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-230587091872 am 03.05.2025

The use of aids such as calculators, formula collections, spreadsheets, and digital tools is permitted only under the expressly stated conditions. Permitted aids must be declared in advance for exams and approved by the exam administrator. Any unauthorized aids are prohibited and may result in disqualification. While working on an assignment or exam, it is prohibited to obtain additional materials or external assistance unless expressly permitted. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions.

Violation of these regulations can result in serious consequences. Especially in official assessments, the use of unauthorized aids can lead to immediate exclusion from the exam. In repeated or particularly serious cases, a permanent ban from the exam may even be imposed. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions and that the integrity of the assessments is maintained.

This sheet serves the purpose of the exercise and can be submitted officially but under certain conditions. At the same time, it should be considered an unofficial document, as it was processed without administrative supervision.

1. **Correct labeling** - The document must be clearly marked as an exercise sheet.
2. **Completeness and formatting** - It must be in a recognized format (e.g., PDF or printed copy) and contain all required content.
3. **Timely submission** - Submission must be made within the specified deadlines.
4. **Approval by the responsible authority** - Official recognition requires the approval of the relevant examining or administrative unit.
5. **No outside assistance** - The document must have been completed exclusively by the relevant individual without outside assistance.
6. **No guarantee of grade** - Since the sheet was created without administrative oversight, there is no obligation to consider it for official grading.
7. **No liability** - The author assumes no liability for the correctness or completeness of the content.
8. **No official status** - The document is not an official document and does not have the same legal status as an officially issued document.
9. **No guarantee of recognition** - Submission of this document does not guarantee recognition or official consideration by any authority or institution.
10. **No guarantee of confidentiality** - Protection of personal data and confidentiality cannot be guaranteed.
11. **No guarantee of security** - The security of the content and the data contained therein is not guaranteed.
12. **No guarantee of authenticity** - The authenticity of the information or data within the document cannot be confirmed.
13. **No guarantee of integrity** - The authenticity or integrity of the content contained therein cannot be assured.
14. **No guarantee of validity** - The document may contain content whose legal or technical validity cannot be confirmed.
15. **No guarantee of reliability** - The accuracy, completeness, or reliability of the information cannot be guaranteed.

Everything is based on trust and so, have fun.

2.1 *EN SH-1 No.1PALLV1.0: Proof that* $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Estimated time for solving: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prove that for every natural number n the sum of the first n odd numbers is equal to n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
- Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary n, then it is also true for $n + 1$.

Category: Shoemei **Difficulty**: Easy **Tags**: induction, sum, odd numbers, natural numbers
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 429b0f2a5-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.2 EN SKK-1 No.4-1PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1

Estimated time for solving: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

The points are distributed in space such that:

- no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

A **windmill process** starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

2.2.1 Transition rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

2.2.2 Goal

Prove that all points in P are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Hard **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.3 EN SKK-1/2 No.4-2PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- $2n$ random points in general position in $\mathbb{R}^n$,
- point sets A and B with $|A| = n + 1$, $|B| = n - 1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

2.3.1 New rule

each point from P may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

2.3.2 Goal

Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Darkside **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.4 EN SKK-1/3 No.4-3PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3

Estimated time for solving: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

Additionally, n and k are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

A windmill process starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

2.4.1 Transition Rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

2.4.2 Goal

Prove that in this construction all points in P are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to n‘5.

Category: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac32df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.5 EN SKK-1/4 No.4-4PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4

Estimated time for solving: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given: Three points A_1, A_2, A_3 form an equilateral windmill in $\mathbb{R}^2$, where the center M of the equilateral triangle is also given. A point P lies outside the windmill.

2.5.1 Task

Determine the reflection of point P on the line passing through two windmill points (e.g., A_1 and A_2). Then calculate the distance between P and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center M and is orthogonal to the vector $\vec{M}P$. **Hint**: Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in $\mathbb{R}^2$.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

Category: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hypersurface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

2.6 EN SKT-1 No.5PALLV1.0: Distances in the n-dimensional space

Estimated time for solving: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Given n points $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point P_i represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the i-th position)

1. Prove that the**points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Represent the points $P_1, \ldots, P_n$ as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
3. **Additionally prove**: The points $P_1, \ldots, P_n$ are**linearly independent** and form an**($n-1$)-dimensional simplex** in $mathbbR^n$.
4. Compute the volume of the regular simplex in $mathbbR^{n-1}$.

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: induction, geometry, space, real numbers
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

2.7 EN SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensional surface traversal processes and reachability graphs

Estimated time for solving: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *An Original*

Given a point set $P \subset \mathbb{R}^n$ with $|P| = kn$ for some $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, where the points are in general position (i.e., no $n+1$ points lie in an $(n-1)$-dimensional hyperplane).

A rotation traversal process works as follows:

- Choose a starting point $p_0 \in P$.
- Construct an $(n-1)$-hypersurface (a "surface of revolution") through this point.
- This hypersurface is continuously rotated in a fixed manner (e.g., according to a fixed orientation in space).
- As soon as another point $p_i \in P$ is "touched" by the surface (i.e., is located on the surface), p_i becomes the new anchor point.
- The movement continues from there.

2.7.1 Extension

- Between each rotation, the orientation of the surface is changed using a given matrix of $SO(n)$ (i.e., each rotation is specified by a transition operator).
- Interpoint relationships are stored as a directed graph $G = (V, E)$, where a directed transition $p_i \to p_j$ exists if p_j was reached by a feasible rotation of p_i.

2.7.2 Exercises

1. Prove or disprove: For certain point configurations (e.g., regular grids, random point clouds, points on spheres, or simplicial surfaces), the reachability graph is strongly connected.
2. Find a general algorithm that, for any n and point set P, decides whether complete reachability of all points is possible through the process.
3. Investigate: How does reachability change when transition delays or random perturbations are introduced into the rotation?
4. Formulate an optimization: Find a minimal rotation path through all points that respects the transition rules.
5. Design a visualization (in 2D, 3D, or nD projections) that dynamically shows the process and graph.

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Graphs, Hypergraphs, Surface traversal processes, Reachability graphs
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 19999942-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.8 EN SH-3 No.7PALLV1.0: Analysis and classification of wave superpositions in curved space

Estimated time for solving: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *An Original*

A curved space $\mathbb{R}^3$ with a smooth metric $g_{ij}(x, y, z)$, in which a wave function $\Psi(x, y, z, t)$ propagates. This satisfies the generalized wave equation:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|} \partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

with $|g| = \det(g_{ij})$ and c as the local propagation velocity.

Tasks:

1. Solve (symbolically or numerically) the wave equation in the special case of a spherically symmetric metric:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

   with suitable boundary conditions (e.g., Dirichlet on a spherical surface $r = R$).

2. Show that the solution Ψ can be written as a superposition of eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators and explicitly calculate the first nontrivial modes.

3. Calculate the total energy spectrum by integrating over space:

$$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] \sqrt{|g|} \, d^3x$$

4. Investigate numerically or analytically how the energy is distributed over time –especially in the case of interference between two point sources with phase-shifted emission.

5. Optional (Bonus): Model and visualize the effect of a time-dependent metric term, such as $g_{ij}(x, t)$, simulating a gravitational wave. Investigate how the interference structure and energy distribution change.

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Analysis, Classification, Waves, Curvature of space
UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 02398437-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.9 EN SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastic analysis of wave phenomena using Fourier and probability density functions

Estimated time for solving: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *An Original*

Investigate a spatiotemporally dependent wave phenomenon under the influence of stochastic noise. Let the wave function be given by:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

where:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ is a deterministic base wave,
- $N(x,t,\omega)$ is a Gaussian process with mean 0 and stationary covariance function.

Given:

A Gaussian process with a covariance function:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

and a known noise level σ^2 and scale parameter $\lambda > 0$.

2.9.1 Exercises

1. **Modeling:** Formulate $N(x,t,\omega)$ as a Gaussian process with the above covariance function.
2. **Simulation:** Simulate several realizations of $\Psi(x,t,\omega)$ on a grid (x_i,t_j) for different parameters σ^2 and k.
3. **Statistics:** Calculate the expected value $E[\Psi(x,t)]$ and the variance $Var[\Psi(x,t)]$ both analytically and from the simulated data.
4. **Spectral Analysis:** Perform a Fourier decomposition of $\Psi(x,t,\omega)$ and calculate the spectral energy density.
5. **Extreme Value Statistics:** Estimate the probability distribution of the maxima in the interval $[a,b]$ using maximum likelihood or Bayesian methods.

(Bonus) **Reconstruction:** Train a neural network that reconstructs the base wave $\psi(x,t)$ from noisy observations $\Psi(x,t,\omega)$.

Category: Shoemei **Difficulty**: NAM **Tags**: Stochastic, Analysis, Wave phenomena, Fourier transformation, Probability density functions

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

2.10 EN SH-5 Test.1PALLV1.0: Number theory –Diophantine equations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *An Original*

Find all integer solutions to the following Diophantine equation:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Explain your solution and determine all possible values for x and y that satisfy this equation. Discuss how to approach this type of equation in general.

Category: Shoemei **Difficulty**: Higher Easy **Tags**: Number theory

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763737 on 29.04.2025

2.11 EN SH-6 Test.2PALLV1.0: Combinatorics –arrangements and permutations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

How many different ways are there to arrange 5 different books on 3 shelves if each shelf must hold at least one book and the shelves do not have infinite capacity? Explain the solution using the principles of inclusion and exclusion.

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Combinatorics

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561223 on 29.04.2025

2.12 EN SH-6 Test.3PALLV1.0: Geometry –Circle geometry and tangents

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

Given is a circle with center O and radius $r = 10$. A point P lies outside the circle and is at a distance of $OP = 17$. Determine the length of the tangent from P to the circle and explain the calculation using the Pythagorean theorem. Discuss why the length of the tangent depends only on the difference between the distances between the point and the center and the radius of the circle.

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Geometry

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 12987462-1073-4d3b-9f5c-120987561273 on 29.04.2025

2.13 EN SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta combination through Fourier transformations

Estimated time for solving: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a smooth, rapidly decreasing function (i.e., $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) such that its Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Prove using Poisson's sum formula that the above equation satisfies under suitable conditions is.
2. Show that with a suitable choice of $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ for $\Re(s) > 1$, statements about the analytical continuation of the Riemann zeta function can be derived.
3. Investigate how the relationship can be extended into higher dimensions (Fourier on $\mathbb{R}^n$) and what role the symmetric structure plays in zeta analysis.
4. Consider the function

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

and show that it can be interpreted as a kind of Fourier series of the zeta function. Derive a representation as a function of $\hat{f}$.

2.13.1 Notes

- Use the Poisson sum formula:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Use properties of the Mellin transform for subproblems on $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Note: This problem requires an understanding of complex analysis, distribution theory, Fourier transform, and special functions.

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Zeta combination, Fourier transformations, Zeta function
UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-198427198265 on 03.05.2025

2.14 EN SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximal numbers of cuts in k-uniform hypergraphs

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Given a k-uniform hypergraph $H = (V, E)$, i.e., each hyperedge $e \in E$ connects exactly k vertices from the vertex set V. Define a **cut** as a partition of V into two disjoint subsets $V_1 \cup V_2 = V$, where a hyperedge is **cut** if it contains vertices from both parts.

Prove or disprove:

For every $k \geq 2$, there exists a partition of V into two sets such that at least $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ hyperedges are intersected.

Addendum: How does the lower bound change under random partitioning?

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-172874618926 on 03.05.2025

3 Introduction et informations: 5 min

L'utilisation d'aides telles que des calculatrices, des recueils de formules, des tableurs et des outils numériques n'est autorisée que dans les conditions expressément indiquées. Les aides autorisées doivent être déclarées à l'avance pour les examens et approuvées par l'administrateur de l'examen. Toute aide non autorisée est interdite et peut entraîner une disqualification. Lors de la réalisation d'un devoir ou d'un examen, il est interdit d'obtenir des matériaux supplémentaires ou une assistance externe, sauf autorisation expresse. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales.

La violation de ces règlements peut entraîner de graves conséquences. En particulier lors d'évaluations officielles, l'utilisation d'aides non autorisées peut entraîner une exclusion immédiate de l'examen. En cas de récidive ou de cas particulièrement graves, une interdiction permanente de l'examen peut même être imposée. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales et que l'intégrité des évaluations est maintenue.

Cette feuille sert à des fins d'exercice et peut être soumise officiellement mais sous certaines conditions. En même temps, elle doit être considérée comme un document non officiel, car elle a été traitée sans supervision administrative.

1. **Étiquetage correct** - Le document doit être clairement marqué comme une feuille d'exercice.
2. **Complétude et formatage** - Il doit être dans un format reconnu (par exemple, PDF ou copie imprimée) et contenir tout le contenu requis.
3. **Soumission dans les délais** - La soumission doit être effectuée dans les délais spécifiés.
4. **Approbation par l'autorité compétente** - La reconnaissance officielle nécessite l'approbation de l'unité d'examen ou administrative compétente.
5. **Aucune assistance extérieure** - Le document doit avoir été complété exclusivement par la personne concernée sans assistance extérieure.
6. **Aucune garantie de note** - Étant donné que la feuille a été créée sans supervision administrative, il n'y a aucune obligation de la considérer pour une évaluation officielle.
7. **Aucune responsabilité** - L'auteur n'assume aucune responsabilité quant à l'exactitude ou à l'exhaustivité du contenu.
8. **Aucun statut officiel** - Le document n'est pas un document officiel et n'a pas le même statut juridique qu'un document officiellement délivré.
9. **Aucune garantie de reconnaissance** - La soumission de ce document ne garantit pas sa reconnaissance ou sa prise en compte officielle par une autorité ou une institution.
10. **Aucune garantie de confidentialité** - La protection des données personnelles et la confidentialité ne peuvent pas être garanties.
11. **Aucune garantie de sécurité** - La sécurité du contenu et des données qu'il contient n'est pas garantie.
12. **Aucune garantie d'authenticité** - L'authenticité des informations ou des données contenues dans le document ne peut pas être confirmée.
13. **Aucune garantie d'intégrité** - L'authenticité ou l'intégrité du contenu qu'il contient ne peut pas être assurée.
14. **Aucune garantie de validité** - Le document peut contenir des contenus dont la validité juridique ou technique ne peut pas être confirmée.
15. **Aucune garantie de fiabilité** - L'exactitude, l'exhaustivité ou la fiabilité des informations ne peut pas être garantie.

Toute est basée sur la confiance et donc, amusez-vous bien.

3.1 FR SH-1 No.1PALLV1.0: Prouver que $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Temps estimé pour résoudre: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Un Original*

Prouver que pour tout nombre naturel n, la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un n quelconque, alors il est également vrai pour $n + 1$.

Catégorie: Shoemei **Difficulté**: Unknown Language **Étiquettes**: Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b le 19.04.2025

4 Lösung

4.1 *DE SH-1 No.1PALLV1.0: Beweise, dass* $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Zeit zur Bearbeitung: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Ein Original*

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Oder auch:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hinweis:

- Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für wahr ist.
- Induktionsschritt: Zeige, dass wenn die Aussage für ein beliebiges n gilt, sie dann auch für $n+1$ gilt.

4.1.1 *Solution*

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Aussage für n wahr.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Dann gilt:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Einfach **Stichwörter**: Induktion, Summen, Ungerade Zahlen, Naturelle Zahlen
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 21c0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

4.2 DE SKK-1 No.4-1PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $n + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein **Windmühlenprozess** startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

4.2.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n{-}1)$-Hyperfläche.

4.2.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

4.2.3 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

4.3 DE SKK-1/2 No.4-2PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 2

Zeit zur Bearbeitung: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von $2n$ zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- $2n$ zufällige Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$,
- Punktmengen A und B mit $|A| = n+1$, $|B| = n-1$, $A \cap B = \emptyset$.

Der Windmühlenprozess verläuft genau wie beschrieben:

- Rotation um einen Punkt bis zur Berührung eines Punktes der jeweils anderen Gruppe,
- danach Wechsel des Drehpunkts und Fortsetzung mit neuer Hyperfläche.

4.3.1 Neue Regel

jeder Punkt aus P darf höchstens einmal als Drehpunkt verwendet werden - wenn eine entsprechende Reihenfolge existiert.

4.3.2 Ziel

Zeige, dass eine Windmühlenfolge existiert, in der jeder Punkt genau einmal Drehpunkt ist, während stets nur gültige Gruppenwechsel erfolgen und die Bewegung korrekt im Raum ausgeführt wird.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

4.3.3 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b0f2a4-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

4.4 DE SKK-1/3 No.4-3PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 3

Zeit zur Bearbeitung: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *Ein Original*

Gegeben ist eine Menge von unbestimmten zufällig verteilten Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^n$, wobei:

- eine Punktmenge mit $|A| = n + 1$,
- B eine Punktmenge mit $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, mit $|P| = 2n$.

Außerdem sind n und k auf jeder Ebene ungleich. Die Punkte sind so im Raum verteilt, dass:

- keine $k + 1$ Punkte in einer gemeinsamen $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegen (allgemeine Lage),
- niemals mehr als zwei Punkte bei einer Hyperflächenrotation gleichzeitig berührt werden können.

Ein Windmühlenprozess startet bei einem beliebigen Punkt aus P (also aus A oder B) mit einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperfläche Flügel durch diesen Punkt. Diese Hyperfläche rotiert im Raum kontinuierlich im Uhrzeigersinn (d. h. gemäß einer festen Orientierung im Raum), bis sie genau einen weiteren Punkt berührt.

4.4.1 Übergangsregel

Wird ein Punkt der anderen Gruppe (d. h. aus A wenn aktueller Drehpunkt in B liegt, oder umgekehrt) getroffen, wird dieser Punkt neuer Drehpunkt, und der Windmühlenprozess setzt sich dort fort mit einer neuen $(n - 1)$-Hyperfläche.

4.4.2 Ziel

Beweise, dass bei dieser Konstruktion alle Punkte in P als Drehpunkt erreicht werden, unabhängig von Startpunkt und Startwinkel. Erkläre auch welche Art von Startpunkt gewählt werden musst, damit alle Punkte als Drehpunkte erreicht werden können.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

4.4.3 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac39df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

4.5 DE SKK-1/4 No.4-4PALLV1.0d: Standard-Windmühle mit Erreichbarkeit aller Punkte - Aufgabe 4

Zeit zur Bearbeitung: 10 min *Nam-Score: 4.0* *Ein Original*

Gegeben: Drei Punkte A_1, A_2, A_3 bilden eine gleichseitige Mühle im $\mathbb{R}^2$, wobei der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks ebenfalls gegeben ist. Ein Punkt P liegt außerhalb der Mühle.

4.5.1 Aufgabe

Bestimme die Spiegelung des Punktes P an der Geraden, die durch zwei Mühlenpunkte (z. B. A_1 und A_2) verläuft. Berechne anschließend den Abstand zwischen P und seiner Spiegelung. Zeige, dass dieser Abstand minimal ist, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt M verläuft und orthogonal zum Vektor $\vec{MP}$ steht. **Hinweis**: Nutze Vektorrechnung und geometrische Überlegungen zur Spiegelung an Geraden und orthogonalen Projektion im $\mathbb{R}^2$.

Anforderungen zum Beweisen: Beweisen Sie die Aufgabe bis $n \leq 5$.

4.5.2 Solution

Noch nicht verfügbar auf Deutsch.

Kategorie: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Induktion, Punkt menge, Generelle Lage, Hyperfläche, Windmühlenprozess, Rotation, Transformation, Drehpunkt, Drehwinkel, Erreichbarkeit

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 12098273-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b am 19.04.2025

4.6 DE SKT-1 No.5PALLV1.0: Abstände im n-dimensionalen Raum

Zeit zur Bearbeitung: 50 min *Nam-Score: 1.2* *Ein Original*

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, wobei jeder Punkt P_i die Standardbasis darstellt, also:

$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(der Eintrag 1 steht an der i-ten Stelle)

1. Zeige, dass die **Punkte alle den gleichen Abstand voneinander haben**, d. h. für alle $i \neq j$ gilt:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Stelle die Punkte $P_1, \dots, P_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
3. **Zeige zusätzlich**: Die Punkte $P_1, \dots, P_n$ sind **nicht linear abhängig** und bilden ein **($n-1$)-dimensionales Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
4. Berechne das Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$.

4.6.1 Solution

1. **Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben**

   Gegeben: Die Punkte $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ sind:
$$P_i = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \qquad P_j = e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

   Unterschied zweier Punkte: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$

   Dieser Vektor hat:

   - an Stelle i: 1,
   - an Stelle j: -1,
   - sonst 0

   Norm:
$$\| P_i - P_j \|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$

   $\rightarrow$ Alle Punkte haben den gleichen Abstand zueinander.

2. **Matrixdarstellung**
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Lineare Unabhängigkeit**

   Definition: Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$$

Beweis:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Standardbasis ist **linear unabhängig**.

4. **Volumen des regulären Simplex in $\mathbb{R}^{n-1}$**

Wir verschieben die Punkte so, dass sie im Ursprung liegen, und berechnen das Volumen mithilfe von Gram-Determinanten oder der Formel für das Volumen eines Simplex aus Vektoren:

Volumenformel für Simplex aus Vektoren

Für ein $(n-1)$-Simplex S mit Basisvektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

wobei G die **Gram-Matrix** ist:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Es ist bekannt, dass das Volumen eines regulären Simplex mit Kantenlänge ℓ in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist:

$$\text{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

Für $\ell = \sqrt{2}$:

$$\text{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

Das ist das Volumen eines Simplex mit n Eckpunkten und Kantenlänge $\sqrt{2}$.

5. **Punktetabelle**

Kondition	**Beschreibung**	**Punkte**
Norm Gleichung Aufstellen	Beweise, dass alle Punkte den gleichen Abstand $\sqrt{2}$ haben.	3
Matrix	Stelle die Punkte als Matrix dar.	1
Gleichung und Unabhängigkeit	Beweise die lineare Unabhängigkeit.	2
Volumenformel	Leite die Volumenformel für das Simplex her.	1
Beispiel	Führe eine Beispielrechnung durch.	2
Allgemeine Zusammenfassung	Fasse die Ergebnisse zusammen.	2

Table 1: Punktevergabe für die Lösung

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Induktion, Geometrie, Raum, Reele Nummern, Punkte, Vektoren, Matrix, Lineare Unabhängigkeit, Volumen
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2f am 19.04.2025

4.7 DE SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensionale Flächendurchlauf-Prozesse und Erreichbarkeitsgraphen

Zeit zur Bearbeitung: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *Ein Original*

Gegeben sei eine Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ mit $|P| = kn$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wobei die Punkte in allgemeiner Lage liegen (d.h. keine $n+1$ Punkte liegen in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene).

Ein Drehdurchlaufprozess funktioniert wie folgt:

- Wähle einen Startpunkt $p_0 \in P$.
- Konstruiere eine $(n-1)$-Hyperfläche (eine ”Drehfläche”) durch diesen Punkt.
- Diese Hyperfläche wird kontinuierlich in festgelegter Weise (z.B. gemäß einer festen Orientierung im Raum) gedreht.
- Sobald ein weiterer Punkt $p_i \in P$ von der Fläche ”berührt” wird (das heißt, sich auf der Fläche befindet), wird p_i zum neuen Ankerpunkt.
- Die Bewegung wird dort fortgesetzt.

4.7.1 Erweiterung

- Zwischen jeder Drehung wird die Orientierung der Fläche mit einer gegebenen Matrix aus $SO(n)$ verändert (d.h. jede Rotation ist durch einen Übergangsoperator festgelegt).
- Zwischenpunktsbeziehungen werden als gerichteter Graph $G = (V, E)$ gespeichert, wobei ein gerichteter Übergang $p_i \to p_j$ besteht, wenn p_j durch eine zulässige Drehung von p_i erreicht wurde.

4.7.2 Aufgaben

1. Beweise oder widerlege: Für bestimmte Punktkonfigurationen (z.B. reguläre Gitter, zufällige Punktwolken, Punkte auf Sphären oder simplizialen Flächen) ist der Erreichbarkeitsgraph stark zusammenhängend.
2. Finde einen allgemeinen Algorithmus, der für beliebiges n und Punktmenge P entscheidet, ob eine vollständige Erreichbarkeit aller Punkte durch den Prozess möglich ist.
3. Untersuche: Wie verändert sich die Erreichbarkeit bei Einführung von Übergangsverzögerungen oder zufälligen Störfaktoren in der Drehung?
4. Formuliere eine Optimierung: Finde einen minimalen Rotationspfad durch alle Punkte, der die Übergangsregeln beachtet.
5. Entwirf eine Visualisierung (in 2D, 3D oder nD-Projektionen), die den Prozess und Graphen dynamisch zeigt.

4.7.3 Solution

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Graphen, Hypergraphen, Flächendurchlauf-Prozesse, Erreichbarkeitsgraphen

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

4.8 DE SH-3 No.7PALLV1.0: Analyse und Klassifikation von Wellensuperpositionen im gekrümmten Raum

Zeit zur Bearbeitung: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *Ein Original*

Ein gekrümmter Raum $\mathbb{R}^3$ mit einer glatten Metrik $g_{ij}(x, y, z)$, in dem sich eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ ausbreitet. Diese erfüllt die verallgemeinerte Wellengleichung:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|} \partial_i \left(|g| g^{ij} \partial_j \Psi \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

1

mit $|g| = \det(g_{ij})$ und c als lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Aufgaben:

1. Löse (symbolisch oder numerisch) die Wellengleichung im Spezialfall einer sphärisch symmetrischen Metrik:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2$$

mit geeigneten Randbedingungen (z. B. Dirichlet auf einer Kugeloberfläche $r = R$).

2. Zeige, dass sich die Lösung Ψ als Superposition von Eigenfunktionen der Laplace-Beltrami-Operatoren schreiben lässt, und berechne explizit die ersten nichttrivialen Moden.

3. Berechne das Gesamtenergiespektrum durch Integration über den Raum:

$$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] \sqrt{|g|} \, d^3x$$

4. Untersuche numerisch oder analytisch, wie sich die Energie über die Zeit verteilt –insbesondere bei Interferenz von zwei punktförmigen Quellen mit zeitlich phasenverschobener Emission.

5. Optional (Bonus): Modelliere und visualisiere den Effekt eines zeitabhängigen Metrikterms, etwa $g_{ij}(x, t)$, der eine Gravitationswelle simuliert. Untersuche, wie sich die Interferenzstruktur und Energieverteilung verändert.

4.8.1 Solution

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: YAMI **Stichwörter**: Analyse, Klassifikation, Wellen, Raumkrümmung

UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 023cf134-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

4.9 DE SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastische Analyse von Wellenphänomenen mittels Fourier- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Zeit zur Bearbeitung: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *Ein Original*

Untersuchen Sie ein raumzeitlich abhängiges Wellenphänomen unter dem Einfluss eines stochastischen Rauschens. Die Wellenfunktion sei gegeben durch:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

wobei:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ eine deterministische Basiswelle ist,
- $N(x,t,\omega)$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwert 0 und stationärer Kovarianzfunktion ist.

Gegeben:
Ein Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

und bekannter Rauschstärke σ^2 sowie Skalenparameter $\lambda > 0$.

4.9.1 Aufgaben

1. **Modellierung:** Formulieren Sie $N(x,t,\omega)$ als Gauß-Prozess mit obiger Kovarianzfunktion.
2. **Simulation:** Simulieren Sie mehrere Realisierungen von $\Psi(x,t,\omega)$ auf einem Gitter (x_i,t_j) für verschiedene Parameter σ^2 und k.
3. **Statistik:** Berechnen Sie Erwartungswert $E[\Psi(x,t)]$ und Varianz $Var[\Psi(x,t)]$ sowohl analytisch als auch aus den simulierten Daten.
4. **Spektralanalyse:** Führen Sie eine Fourier-Zerlegung von $\Psi(x,t,\omega)$ durch und berechnen Sie die spektrale Energiedichte.
5. **Extremwertstatistik:** Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Maxima im Intervall $[a,b]$ mithilfe von Maximum-Likelihood oder Bayesianischen Methoden.

(Bonus) **Rekonstruktion:** Trainieren Sie ein neuronales Netz, das aus verrauschten Beobachtungen $\Psi(x,t,\omega)$ die Basiswelle $\psi(x,t)$ rekonstruiert.

4.9.2 Solution

Keine Lust

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: NAM **Stichwörter**: Stochastik, Analyse, Wellenphänomene, Fourier-Transformation, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 am 22.04.2025

4.10 DE SH-5 Test.1PALLV1.0: Zahlentheorie –Diophantische Gleichungen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *Ein Original*

Finde alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Diophantischen Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Erkläre deinen Lösungsweg und bestimme alle möglichen Werte für x und y, die diese Gleichung erfüllen. Diskutiere, wie man diese Art von Gleichung im Allgemeinen angehen kann.

4.10.1 Solution

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Höheres Einfach **Stichwörter**: Zahlentheorie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763736 am 29.04.2025

4.11 DE SH-6 Test.2PALLV1.0: Kombinatorik –Anordnungen und Permutationen

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Wie viele verschiedene Wege gibt es, 5 verschiedene Bücher auf 3 Regalen anzuordnen, wenn auf jedem Regal mindestens ein Buch platziert werden muss und die Regale keine unendliche Kapazität haben? Erkläre den Lösungsweg unter Verwendung der Prinzipien der Inklusion und Exklusion. ____

4.11.1 Solution

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Kombinatorik

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561273 am 29.04.2025

4.12 DE SH-7 Test.3PALLV1.0: Geometrie –Kreisgeometrie und Tangenten

Zeit zur Bearbeitung: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *Ein Original*

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $r = 10$. Ein Punkt P liegt außerhalb des Kreises und hat einen Abstand von $OP = 17$. Bestimmen Sie die Länge der Tangente von P an den Kreis und erläutern Sie die Berechnung mithilfe des Satzes des Pythagoras.

Erklären Sie, warum die Länge der Tangente nur von der Differenz zwischen den Abständen zwischen Punkt und Mittelpunkt und dem Radius des Kreises abhängt. ______________________________

4.12.1 Solution

Kategorie: Shoemei **Schwierigkeitsgrad**: Mittel **Stichwörter**: Geometrie

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-198257198275 am 29.04.2025

4.13 DE SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta-Kombination durch Fouriertransformationen

Zeit zur Bearbeitung: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *Ein Original*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine glatte, rasch fallende Funktion (d. h. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), sodass für ihre Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx$$

folgende Identität gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Beweise mit Hilfe der Poissonschen Summenformel, dass die obige Gleichung unter geeigneten Bedingungen erfüllt ist.
2. Zeige, dass mit geeigneter Wahl von $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ für $\Re(s) > 1$, sich Aussagen über die analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion ableiten lassen.
3. Untersuche, wie die Beziehung in höhere Dimensionen erweitert werden kann (Fourier auf dem $\mathbb{R}^n$) und welche Rolle dabei die symmetrische Struktur in der Zeta-Analyse spielt.
4. Betrachte die Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

und zeige, dass sie sich als eine Art Fourierreihe der Zeta-Funktion interpretieren lässt. Leite eine Darstellung in Abhängigkeit von $\hat{f}$ her.

4.13.1 Hinweise

- Verwende die Poisson-Summenformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Nutze Eigenschaften der Mellin-Transformation für Teilaufgaben zu $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Beachte: Diese Aufgabe verlangt ein Verständnis für komplexe Analysis, Distributionentheorie, Fouriertransformation und spezielle Funktionen.

4.13.2 Solution

Keine Lust

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Zeta-Kombination, Fouriertransformationen, Zeta-Funktion

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-239238527383 am 03.05.2025

4.14 DE SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximale Schnitte in k-uniformen Hypergraphen

Zeit zur Bearbeitung: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.4* *Ein Original*

Gegeben sei ein k-uniformer Hypergraph $H = (V, E)$, d. h. jeder Hyperrand $e \in E$ verbindet genau k Knoten aus der Knotenmenge V. Definiere einen **Schnitt** als eine Partition von V in zwei disjunkte Teilmengen $V_1 \cup V_2 = V$, wobei ein Hyperrand **geschnitten** ist, wenn er Knoten aus beiden Teilen enthält.

Zeige oder widerlege:

Für jedes $k \geq 2$ existiert eine Partition von V in zwei Mengen, sodass mindestens $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) |E|$ Hyperkanten geschnitten werden.

Zusatz: Wie ändert sich die untere Schranke bei zufälliger Partition?

4.14.1 Solution

Keine Lust

Kategorie: Shoemei, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-230587091872 am 03.05.2025

5 Solution

5.1 EN SH-1 No.1PALLV1.0: Proof that $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Estimated time for solving: 5 min *Nam-Score: 1.0* *An Original*

Prove that for every natural number n the sum of the first n odd numbers is equal to n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Or also:

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Hint:

- Induction base: Show that the statement is true for $n = 1$.
- Induction step: Show that if the statement is true for an arbitrary n, then it is also true for $n + 1$.

5.1.1 Solution

Induction base: $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Induction step: Let $n \in \mathbb{N}$ and the statement is true for n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Then it holds:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Category: Shoemei **Difficulty**: Easy **Tags**: induction, sum, odd numbers, natural numbers
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 429b0f2a5-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

5.2 EN SKK-1 No.4-1PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 1

Estimated time for solving: 4 h 0 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

The points are distributed in space such that:

- no $n + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched at the same time during a hyper-surface rotation.

A **windmill process** starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

5.2.1 Transition rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

5.2.2 Goal

Prove that all points in P are reached as pivot points in this construction, regardless of starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

5.2.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Hard **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 1092a837-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

5.3 EN SKK-1/2 No.4-2PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of all Points - Task 2

Estimated time for solving: 10 h 0 min *Nam-Score: 9.0* *An Original*

Given a set of $2n$ randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- $2n$ random points in general position in $\mathbb{R}^n$,
- point sets A and B with $|A| = n+1$, $|B| = n-1$, $A \cap B = \emptyset$.

The windmill process proceeds exactly as described:

- Rotation around a point until a point from the respective other group is touched,
- then change of the pivot point and continuation with a new hyper-surface.

5.3.1 New rule

each point from P may be used as a pivot point at most once - if a corresponding sequence exists.

5.3.2 Goal

Show that a windmill sequence exists in which each point is a pivot point exactly once, while valid group changes occur and the movement is executed correctly in space.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

5.3.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Shoemei, Keisan, Kaishaku **Difficulty**: Darkside **Tags**: induction, point set, general position, windmill process, rotation, hyper-surface, transition rule, pivot point, reachability, starting point

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

5.4 EN SKK-1/3 No.4-3PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 3

Estimated time for solving: 7 h 30 min *Nam-Score: 8.0* *An Original*

Given is a set of undefined randomly distributed points in general position in $\mathbb{R}^n$, where:

- a point set with $|A| = n + 1$,
- B a point set with $|B| = n - 1$,
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = P$, with $|P| = 2n$.

Additionally, n and k are unequal on every plane. The points are distributed in space such that:

- no $k + 1$ points lie in a common $(n - 1)$-dimensional hyperplane (general position),
- never more than two points can be touched simultaneously during a hyper-surface rotation.

A windmill process starts at an arbitrary point from P (i.e., from A or B) with an $(n - 1)$-dimensional hyper-surface wing through this point. This hyper-surface rotates continuously in the space clockwise (i.e., according to a fixed orientation in the space) until it touches exactly one other point.

5.4.1 Transition Rule

If a point from the other group (i.e., from A if the current pivot point is in B, or vice versa) is hit, this point becomes the new pivot point, and the windmill process continues there with a new $(n - 1)$-hyper-surface.

5.4.2 Goal

Prove that in this construction all points in P are reached as pivot points, regardless of the starting point and starting angle. Also explain what kind of starting point must be chosen so that all points can be reached as pivot points.

Requirements for proving: Prove the task up to n‘5.

5.4.3 Solution

Not available yet in English.

Category: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hyper-surface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 21ac32df-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

5.5 EN SKK-1/4 No.4-4PALLV1.1e: Standard Windmill with Reachability of All Points - Task 4

Estimated time for solving: 10 min *Nam-Score: 4.0* *An Original*

Given: Three points A_1, A_2, A_3 form an equilateral windmill in $\mathbb{R}^2$, where the center M of the equilateral triangle is also given. A point P lies outside the windmill.

5.5.1 Task

Determine the reflection of point P on the line passing through two windmill points (e.g., A_1 and A_2). Then calculate the distance between P and its reflection. Show that this distance is minimal when the line passes through the center M and is orthogonal to the vector $\vec{MP}$. **Hint**: Use vector calculations and geometric considerations for reflection on lines and orthogonal projection in $\mathbb{R}^2$.

Requirements for proving: Prove the task up to $n \leq 5$.

5.5.2 Solution

Not available yet in English.

Category: Proof, Calculation, Interpretation **Difficulty**: Darkside **Tags**: Induction, Point set, General position, Hypersurface, Windmill process, Rotation, Transformation, Pivot point, Rotation angle, Reachability

UUID: 048d25c1-ea62-4ee5-b78f-342798a9da82 – *GUID*: 20397583-1b8e-4d3b-9f5c-23a6d1e0f3a2b on 19.04.2025

5.6 EN SKT-1 No.5PALLV1.0: Distances in the n-dimensional space

Estimated time for solving: 50 min *Nam-Score: 1.2* *An Original*

Given n points $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, where each point P_i represents the standard basis, i.e.:

$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(the entry 1 is at the i-th position)

1. Prove that the**points all have the same distance from each other**, i.e., for all $i \neq j$:
$$\| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
2. Represent the points $P_1, \ldots, P_n$ as column vectors of a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
3. **Additionally prove**: The points $P_1, \ldots, P_n$ are**linearly independent** and form an**($n-1$)-dimensional simplex** in $mathbbR^n$.
4. Compute the volume of the regular simplex in $mathbbR^{n-1}$.

5.6.1 Solution

1. **Prove that all points have the same distance $\sqrt{2}$**

   Given: The points $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ are:
$$P_i = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \qquad P_j = e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$
   Difference between two points: $\Delta d = P_i - P_j = e_i - e_j$

   This vector has:

   - at position i: 1,
   - at position j: -1,
   - otherwise 0

   Norm:
$$\| P_i - P_j \|^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow \| P_i - P_j \| = \sqrt{2}$$
   $\rightarrow$ All points have the same distance from each other.

2. **Matrix representation**
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
3. **Linear independence**

   Definition: A set of vectors is linearly independent if:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \, \forall \, i$$

Proof:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ lambda_2 \\ vdots \\ lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

The standard basis is**linearly independent**.

4. **Volume of the regular simplex in** $\mathbb{R}^{n-1}$

We shift the points so that they are centered at the origin and calculate the volume using Gram determinants or the formula for the volume of a simplex from vectors:

Volume formula for simplex from vectors

For an $(n-1)$-simplex S with basis vectors $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\det(G)}$$

where G is the**Gram matrix**:

$$G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

It is known that the volume of a regular simplex with edge length ℓ in $\mathbb{R}^{n-1}$ is:

$$\text{Vol}_n = \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

For $\ell = \sqrt{2}$:

$$\text{Vol}_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sqrt{n}$$

This is the volume of a simplex with n vertices and edge length $\sqrt{2}$.

5. **Points Table**

Condition	Description	Points
hline Norm Equation Setup	Prove that all points have the same distance $\sqrt{2}$.	3
hline Matrix	Represent the points as a matrix.	1
hline Equation and Independence	Prove linear independence.	2
hline Volume Formula	Derive the volume formula for the simplex.	1
hline Example	Provide an example calculation.	2
hline General Summary	Summarize the results.	2
hline		

Table 2: Points Allocation for the Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: induction, geometry, space, real numbers
UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f38 – *GUID*: 05b002a4-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f312f on 19.04.2025

5.7 EN SH-2 No.6PALLV1.0: Hyperdimensional surface traversal processes and reachability graphs

Estimated time for solving: 91 h 40 min *Nam-Score: 6.2* *An Original*

Given a point set $P \subset \mathbb{R}^n$ with $|P| = kn$ for some $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, where the points are in general position (i.e., no $n+1$ points lie in an $(n-1)$-dimensional hyperplane).

A rotation traversal process works as follows:

- Choose a starting point $p_0 \in P$.
- Construct an $(n-1)$-hypersurface (a "surface of revolution") through this point.
- This hypersurface is continuously rotated in a fixed manner (e.g., according to a fixed orientation in space).
- As soon as another point $p_i \in P$ is "touched" by the surface (i.e., is located on the surface), p_i becomes the new anchor point.
- The movement continues from there.

5.7.1 Extension

- Between each rotation, the orientation of the surface is changed using a given matrix of $SO(n)$ (i.e., each rotation is specified by a transition operator).
- Interpoint relationships are stored as a directed graph $G = (V, E)$, where a directed transition $p_i \to p_j$ exists if p_j was reached by a feasible rotation of p_i.

5.7.2 Exercises

1. Prove or disprove: For certain point configurations (e.g., regular grids, random point clouds, points on spheres, or simplicial surfaces), the reachability graph is strongly connected.
2. Find a general algorithm that, for any n and point set P, decides whether complete reachability of all points is possible through the process.
3. Investigate: How does reachability change when transition delays or random perturbations are introduced into the rotation?
4. Formulate an optimization: Find a minimal rotation path through all points that respects the transition rules.
5. Design a visualization (in 2D, 3D, or nD projections) that dynamically shows the process and graph.

5.7.3 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Graphs, Hypergraphs, Surface traversal processes, Reachability graphs

UUID: f4273154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 19999942-1b8e-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

5.8 EN SH-3 No.7PALLV1.0: Analysis and classification of wave superpositions in curved space

Estimated time for solving: 73 h 50 min *Nam-Score: 8.2* *An Original*

A curved space $\mathbb{R}^3$ with a smooth metric $g_{ij}(x, y, z)$, in which a wave function $\Psi(x, y, z, t)$ propagates. This satisfies the generalized wave equation:

$$\Box_g \Psi = \frac{1}{|g|}\partial_i \left(|g|g^{ij}\partial_j \Psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

with $|g| = \det(g_{ij})$ and c as the local propagation velocity.

Tasks:

1. Solve (symbolically or numerically) the wave equation in the special case of a spherically symmetric metric:

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

   with suitable boundary conditions (e.g., Dirichlet on a spherical surface $r = R$).

2. Show that the solution Ψ can be written as a superposition of eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators and explicitly calculate the first nontrivial modes.

3. Calculate the total energy spectrum by integrating over space:

   $$E(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right]\sqrt{|g|}\, d^3x$$

4. Investigate numerically or analytically how the energy is distributed over time –especially in the case of interference between two point sources with phase-shifted emission.

5. Optional (Bonus): Model and visualize the effect of a time-dependent metric term, such as $g_{ij}(x, t)$, simulating a gravitational wave. Investigate how the interference structure and energy distribution change.

5.8.1 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: Darkside **Tags**: Analysis, Classification, Waves, Curvature of space

UUID: a2473154-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 02398437-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

5.9 EN SH-4 No.8PALLV1.0: Stochastic analysis of wave phenomena using Fourier and probability density functions

Estimated time for solving: 113 h 50 min *Nam-Score: 9.3* *An Original*

Investigate a spatiotemporally dependent wave phenomenon under the influence of stochastic noise. Let the wave function be given by:

$$\Psi(x,t,\omega) = \psi(x,t) + N(x,t,\omega)$$

where:

- $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ is a deterministic base wave,
- $N(x,t,\omega)$ is a Gaussian process with mean 0 and stationary covariance function.

Given:
A Gaussian process with a covariance function:

$$K(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp(-\lambda|x_1 - x_2|)$$

and a known noise level σ^2 and scale parameter $\lambda > 0$.

5.9.1 Exercises

1. **Modeling:** Formulate $N(x,t,\omega)$ as a Gaussian process with the above covariance function.
2. **Simulation:** Simulate several realizations of $\Psi(x,t,\omega)$ on a grid (x_i,t_j) for different parameters σ^2 and k.
3. **Statistics:** Calculate the expected value $E[\Psi(x,t)]$ and the variance $Var[\Psi(x,t)]$ both analytically and from the simulated data.
4. **Spectral Analysis:** Perform a Fourier decomposition of $\Psi(x,t,\omega)$ and calculate the spectral energy density.
5. **Extreme Value Statistics:** Estimate the probability distribution of the maxima in the interval $[a,b]$ using maximum likelihood or Bayesian methods.

(Bonus) **Reconstruction:** Train a neural network that reconstructs the base wave $\psi(x,t)$ from noisy observations $\Psi(x,t,\omega)$.

5.9.2 Solution

No desire

Category: Shoemei **Difficulty**: NAM **Tags**: Stochastic, Analysis, Wave phenomena, Fourier transformation, Probability density functions

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f39 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-2398579abc39 on 23.04.2025

5.10 EN SH-5 Test.1PALLV1.0: Number theory –Diophantine equations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 4.3* *An Original*

Find all integer solutions to the following Diophantine equation:

$$x^2 + y^2 = 2025$$

Explain your solution and determine all possible values for x and y that satisfy this equation. Discuss how to approach this type of equation in general. ____

5.10.1 Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Higher Easy **Tags**: Number theory

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-109298209174 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-209385763737 on 29.04.2025

5.11 EN SH-6 Test.2PALLV1.0: Combinatorics –arrangements and permutations

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

How many different ways are there to arrange 5 different books on 3 shelves if each shelf must hold at least one book and the shelves do not have infinite capacity? Explain the solution using the principles of inclusion and exclusion.

5.11.1 Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Combinatorics
UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-102987519864 – *GUID*: 2c0a8372-1073-4d3b-9f5c-120987561223 on 29.04.2025

5.12 EN SH-6 Test.3PALLV1.0: Geometry –Circle geometry and tangents

Estimated time for solving: 1 h 0 min *Nam-Score: 3.1* *An Original*

Given is a circle with center O and radius $r = 10$. A point P lies outside the circle and is at a distance of $OP = 17$. Determine the length of the tangent from P to the circle and explain the calculation using the Pythagorean theorem. Discuss why the length of the tangent depends only on the difference between the distances between the point and the center and the radius of the circle.

5.12.1 Solution

Category: Shoemei **Difficulty**: Medium **Tags**: Geometry

UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-129857262711 – *GUID*: 12987462-1073-4d3b-9f5c-120987561273 on 29.04.2025

5.13 EN SHB-1 No.9PALLV1.0: Zeta combination through Fourier transformations

Estimated time for solving: 20 h 50 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a smooth, rapidly decreasing function (i.e., $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) such that its Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)$$

1. Prove using Poisson's sum formula that the above equation satisfies under suitable conditions is.
2. Show that with a suitable choice of $f(x) = x^{-s} e^{-x}$ for $\Re(s) > 1$, statements about the analytical continuation of the Riemann zeta function can be derived.
3. Investigate how the relationship can be extended into higher dimensions (Fourier on $\mathbb{R}^n$) and what role the symmetric structure plays in zeta analysis.
4. Consider the function

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^s}$$

and show that it can be interpreted as a kind of Fourier series of the zeta function. Derive a representation as a function of $\hat{f}$.

5.13.1 Notes

- Use the Poisson sum formula:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

- Use properties of the Mellin transform for subproblems on $f(x) = x^{-s} e^{-x}$.
- Note: This problem requires an understanding of complex analysis, distribution theory, Fourier transform, and special functions.

5.13.2 Solution

No desire

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Zeta combination, Fourier transformations, Zeta function
UUID: 02853973-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-198427198265 on 03.05.2025

5.14 EN SHB-2 No.10PALLV1.0: Maximal numbers of cuts in k-uniform hypergraphs

Estimated time for solving: 45 h 0 min *Nam-Score: 7.2* *An Original*

Given a k-uniform hypergraph $H = (V, E)$, i.e., each hyperedge $e \in E$ connects exactly k vertices from the vertex set V. Define a **cut** as a partition of V into two disjoint subsets $V_1 \cup V_2 = V$, where a hyperedge is **cut** if it contains vertices from both parts.

Prove or disprove:

For every $k \geq 2$, there exists a partition of V into two sets such that at least $\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)|E|$ hyperedges are intersected.

Addendum: How does the lower bound change under random partitioning?

5.14.1 Solution

No desire

Category: Shoemei, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**: Hypergraph

UUID: 34123421-ca61-44eb-a6f0-db200d780f10 – *GUID*: 10047928-1073-4d3b-9f5c-172874618926 on 03.05.2025

6 Solution

6.1 *FR SH-1 No.1PALLV1.0: Prouver que* $n^2 = \sum_{n=1}^{n2} = (2n-1) = n^2$

Temps estimé pour résoudre: 5 min *Nam-Score: 1.0* *Un Original*

Prouver que pour tout nombre naturel n, la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} = (2k-1) = n^2 = n^2 | n \in \mathbb{N}$$

Indication :

- Base de l'induction : Montrer que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.
- Étape d'induction : Montrer que si l'énoncé est vrai pour un n quelconque, alors il est également vrai pour $n + 1$.

6.1.1 *Solution*

Base de l'induction : $n = 1$

$$1 = 1^2$$

Étape d'induction : Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'énoncé est vrai pour n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Alors :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Catégorie: Shoemei **Difficulté**: Unknown Language **Étiquettes**: Induction, Sommes, Nombres impairs, Nombres naturels
UUID: e89de9cb-5ccc-4512-a077-38f7b983aef4 – *GUID*: 12387420-1b8e-4d3b-9f5c-7a6d1e0f3a2b le 19.04.2025