Solution: The Namische /ˈnamɪʃə/ Collection

Paper ID: P1.4 *on May 24, 2025 – 24.05.2025 in Frankfurt* Version 1.0 Revision 1

Archive-ID: 33513-9323 DOI: 10.5281/zenodo.15507262

Duy Nam Schlitz[a*]

[a] *Department of ISAC for Competition, duynamschlitzresearch@gmail.com*

[*] *Corresponding Author*

Abstract

Exercise Collection Theme:

Exercise: No.24, No.25, Total time: De: 30 h 40 min, En: 30 h 40 min, Fr: 31 h 0 min, Jp: 31 h 0 min, Kr: 31 h 0 min, Zh: 31 h 0 min

Contents

Categories: problem solving

1 Einführung und Informationen: 30 h 40 min

Die Verwendung von Hilfsmitteln wie Taschenrechnern, Formelsammlungen, Tabellenkalkulationen und digitalen Werkzeugen ist nur unter den ausdrücklich angegebenen Bedingungen gestattet. Zulässige Hilfsmittel müssen im Voraus für Prüfungen deklariert und von der Prüfungsaufsicht genehmigt werden. Jegliche nicht genehmigten Hilfsmittel sind verboten und können zur Disqualifikation führen. Während der Bearbeitung einer Aufgabe oder Prüfung ist es untersagt, zusätzliche Materialien oder externe Hilfe in Anspruch zu nehmen, es sei denn, dies ist ausdrücklich erlaubt. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten. Ab einen Nam-Score von 3 dürfen alle Teilnehmende alle möglichen Hilfsmittel nutzen.

Ein Verstoß gegen diese Vorschriften kann schwerwiegende Konsequenzen haben. Insbesondere bei offiziellen Prüfungen kann die Verwendung nicht genehmigter Hilfsmittel zum sofortigen Ausschluss von der Prüfung führen. Bei wiederholten oder besonders schwerwiegenden Fällen kann sogar ein dauerhaftes Prüfungsverbot verhängt werden. Die Einhaltung dieser Vorschriften stellt sicher, dass alle Teilnehmer unter fairen und gleichen Bedingungen arbeiten und die Integrität der Prüfungen gewahrt bleibt.

Dieses Blatt dient dem Zweck der Übung und kann unter bestimmten Bedingungen offiziell eingereicht werden. Gleichzeitig sollte es als inoffizielles Dokument betrachtet werden, da es ohne administrative Aufsicht erstellt wurde.

1. **Korrekte Kennzeichnung** - Das Dokument muss eindeutig als Übungsblatt gekennzeichnet sein.
2. **Vollständigkeit und Formatierung** - Es muss in einem anerkannten Format (z. B. PDF oder gedruckte Kopie) vorliegen und alle erforderlichen Inhalte enthalten.
3. **Fristgerechte Einreichung** - Die Einreichung muss innerhalb der festgelegten Fristen erfolgen.
4. **Genehmigung durch die zuständige Behörde** - Eine offizielle Anerkennung erfordert die Genehmigung der zuständigen Prüfungs- oder Verwaltungsstelle.
5. **Keine externe Hilfe** - Das Dokument muss ausschließlich von der betreffenden Person ohne externe Hilfe erstellt worden sein.
6. **Keine Garantie auf Bewertung** - Da das Blatt ohne administrative Aufsicht erstellt wurde, besteht keine Verpflichtung, es für eine offizielle Bewertung zu berücksichtigen.
7. **Keine Haftung** - Der Autor übernimmt keine Haftung für die Richtigkeit oder Vollständigkeit des Inhalts.
8. **Kein offizieller Status** - Das Dokument ist kein offizielles Dokument und hat nicht denselben rechtlichen Status wie ein offiziell ausgestelltes Dokument.
9. **Keine Garantie auf Anerkennung** - Die Einreichung dieses Dokuments garantiert keine Anerkennung oder offizielle Berücksichtigung durch eine Behörde oder Institution.
10. **Keine Garantie auf Vertraulichkeit** - Der Schutz persönlicher Daten und die Vertraulichkeit können nicht gewährleistet werden.
11. **Keine Garantie auf Sicherheit** - Die Sicherheit des Inhalts und der darin enthaltenen Daten ist nicht gewährleistet.
12. **Keine Garantie auf Authentizität** - Die Authentizität der Informationen oder Daten innerhalb des Dokuments kann nicht bestätigt werden.
13. **Keine Garantie auf Integrität** - Die Authentizität oder Integrität des enthaltenen Inhalts kann nicht sichergestellt werden.
14. **Keine Garantie auf Gültigkeit** - Das Dokument kann Inhalte enthalten, deren rechtliche oder technische Gültigkeit nicht bestätigt werden kann.
15. **Keine Garantie auf Zuverlässigkeit** - Die Genauigkeit, Vollständigkeit oder Zuverlässigkeit der Informationen kann nicht garantiert werden.

Alles beruht auf Vertrauen und daher viel Spaß.

1.1 DE SHK-2 No.24P1.4V1.0: Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in Zustandssummen und Vakuumenergien der Quantenfeldtheorie

Zeit zur Bearbeitung: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *Ein Original*

Untersuchen und beweisen Sie die Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in der quantenfeldtheoretischen Regularisierung und Thermodynamik, speziell im Kontext der Zustandssummen und Vakuumenergie.

1.1.1 Aufgabenstellung

Gegeben sei ein skalares Quantenfeld auf einer kompakten Raumzeit mit Periodizität β in der Zeitdimension (entsprechend einer Temperatur $T = 1/\beta$) und einer Raumdimension L. Die Eigenfrequenzen des Feldes lauten:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Zeigen Sie durch Anwendung der **Zeta-Regularisierung**, dass die thermodynamische Zustandssumme

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

mit Hilfe der analytischen Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion und der Gammafunktion regulär berechnet werden kann.

1.1.2 Teilaufgaben

1. **Herleitung der regulierten Vakuumenergie**

Leiten Sie den Ausdruck für die regulierte Vakuumenergie $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ unter Verwendung der **Zeta-Funktion** her. Zeigen Sie, dass:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{und} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

und bringen Sie den Ausdruck auf eine Form mit Gammafunktionen via Mellin-Transformation.

2. **Reduktion zu einer Epstein-Zeta-Funktion**

Zeigen Sie, dass die doppelte Summe über n und m als **Epstein-Zeta-Funktion** darstellbar ist. Analysieren Sie deren analytische Eigenschaften.

3. **Temperaturabhängigkeit und thermodynamische Funktionen**

Verwenden Sie den regulierten Ausdruck zur Ableitung der freien Energie $F(\beta)$, inneren Energie $U(\beta)$ und Entropie $S(\beta)$. Zeigen Sie, wie die Gammafunktion in der asymptotischen Entwicklung für hohe und niedrige Temperaturen erscheint.

4. **Vergleich mit Casimir-Energie**

Beweisen Sie, dass die Nulltemperatur-Grenze der Zustandssumme zur **Casimir-Energie** übergeht, und dass die Regularisierung exakt dieselbe Form liefert wie bei der klassischen Zeta-Casimir-Methode.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: NUM **Stichwörter**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: cc85e4ff-ce95-4192-9b9c-07372f6d7fdb am 24.05.2025

1.2 DE SHK-3 No.25P1.4V1.0: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Zeit zur Bearbeitung: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Ein Original*

1.2.1 Aufgabe: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Gegeben sei ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion im Ortsraum:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Diese Funktion beschreibt ein stationäres, frei bewegliches Teilchen mit gaußscher Ortsverteilung.

1.2.2 ***Teilaufgaben***

1.2.3 Normierung der Wellenfunktion

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A so, dass die Wellenfunktion normiert ist, d. h.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

1.2.4 Fourier-Transformation in den Impulsraum

Berechnen Sie die Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ der Wellenfunktion mittels Fourier-Transformation gemäß:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Führen Sie die Integration vollständig durch und geben Sie die resultierende Funktion $\phi(p)$ in expliziter Form an.

1.2.5 Heisenbergsche Unschärferelation

Bestimmen Sie die Standardabweichungen σ_x und σ_p der Orts- bzw. Impulsverteilung:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

und zeigen Sie, dass das Produkt dieser Streuungen die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

1.2.6 Physikalische Interpretation der Grenzfälle

Diskutieren Sie qualitativ den physikalischen Grenzfall $a \to 0$. Was geschieht mit der Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ und wie ist dieser Grenzfall physikalisch zu interpretieren? Beziehen Sie sich dabei auf die Konzepte der Lokalisierung und Impulsunschärfe.

1.2.7 ***Hinweis:***

Diese Aufgabe eignet sich auch zur numerischen Auswertung und grafischen Darstellung in Python oder MATLAB. Optional kann die Fourier-Transformation auch symbolisch mit geeigneten Softwaretools (z. B. SymPy oder Mathematica) verifiziert werden.

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 04e72fe3-a112-4eee-9352-964ca9fa0a13 am 24.05.2025

2 Introduction and Information: 30 h 40 min

The use of aids such as calculators, formula collections, spreadsheets, and digital tools is permitted only under the expressly stated conditions. Permitted aids must be declared in advance for exams and approved by the exam administrator. Any unauthorized aids are prohibited and may result in disqualification. While working on an assignment or exam, it is prohibited to obtain additional materials or external assistance unless expressly permitted. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions. With a Nam-Score of 3, all participants are allowed to use all possible aids.

Violation of these regulations can result in serious consequences. Especially in official assessments, the use of unauthorized aids can lead to immediate exclusion from the exam. In repeated or particularly serious cases, a permanent ban from the exam may even be imposed. Compliance with these regulations ensures that all participants work under fair and equal conditions and that the integrity of the assessments is maintained.

This sheet serves the purpose of the exercise and can be submitted officially but under certain conditions. At the same time, it should be considered an unofficial document, as it was processed without administrative supervision.

1. **Correct labeling** - The document must be clearly marked as an exercise sheet.
2. **Completeness and formatting** - It must be in a recognized format (e.g., PDF or printed copy) and contain all required content.
3. **Timely submission** - Submission must be made within the specified deadlines.
4. **Approval by the responsible authority** - Official recognition requires the approval of the relevant examining or administrative unit.
5. **No outside assistance** - The document must have been completed exclusively by the relevant individual without outside assistance.
6. **No guarantee of grade** - Since the sheet was created without administrative oversight, there is no obligation to consider it for official grading.
7. **No liability** - The author assumes no liability for the correctness or completeness of the content.
8. **No official status** - The document is not an official document and does not have the same legal status as an officially issued document.
9. **No guarantee of recognition** - Submission of this document does not guarantee recognition or official consideration by any authority or institution.
10. **No guarantee of confidentiality** - Protection of personal data and confidentiality cannot be guaranteed.
11. **No guarantee of security** - The security of the content and the data contained therein is not guaranteed.
12. **No guarantee of authenticity** - The authenticity of the information or data within the document cannot be confirmed.
13. **No guarantee of integrity** - The authenticity or integrity of the content contained therein cannot be assured.
14. **No guarantee of validity** - The document may contain content whose legal or technical validity cannot be confirmed.
15. **No guarantee of reliability** - The accuracy, completeness, or reliability of the information cannot be guaranteed.

Everything is based on trust and so, have fun.

2.1 EN SHK-2 No.24P1.4V1.0: Role of zeta and gamma functions in partition functions and vacuum energies of quantum field theory

Estimated time for solving: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *An Original*

Investigate and prove the role of zeta and gamma functions in quantum field theory regularization and thermodynamics, especially in the context of partition functions and vacuum energy.

2.1.1 Task

Given a scalar quantum field on a compact spacetime with periodicity β in the time dimension (corresponding to a temperature $T = 1/\beta$) and a spatial dimension L. The natural frequencies of the field are:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Using zeta regularization, show that the thermodynamic partition function

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

can be regularly calculated using the analytic extension of the Riemann zeta function and the gamma function.

2.1.2 Subtasks

1. **Derivation of the Regulated Vacuum Energy**

Derive the expression for the regulated vacuum energy $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ using the **zeta function**. Show that:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

and convert the expression to a gamma function form using the Mellin transform.

2. **Reduction to an Epstein zeta function**

Show that the double sum over n and m can be represented as an Epstein zeta function. Analyze its analytical properties.

3. **Temperature Dependence and Thermodynamic Functions**

Use the regularized expression to derive the free energy F(beta), internal energy U(beta), and entropy S(beta). Show how the gamma function appears in the asymptotic expansion for high and low temperatures.

4. **Comparison with Casimir Energy**

Prove that the zero-temperature limit of the partition function transforms into the Casimir energy, and that the regularization yields exactly the same form as the classical zeta-Casimir method.

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: NUM **Tags**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: ad5daf78-d753-4dd9-b3c5-8d62f9acd212 on 24.05.2025

2.2 EN SHK-3 No.25P1.4V1.0: Momentum space representation of a Gaussian wave packet

Estimated time for solving: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *An Original*

2.2.1 Task: Momentum-space representation of a Gaussian wave packet

Given a one-dimensional quantum mechanical particle with the wave function in position space:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

This function describes a stationary, freely moving particle with a Gaussian spatial distribution.

2.2.2 ***Subtasks***

2.2.3 Normalization of the wave function

Determine the normalization constant A such that the wave function is normalized, i.e. i.e.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

2.2.4 Fourier Transformation into Momentum Space

Calculate the momentum space representation $\phi(p)$ of the wave function using the Fourier transformation according to:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complete the integration and state the resulting function $\phi(p)$ explicitly.

2.2.5 Heisenberg's Uncertainty Principle

Determine the standard deviations σ_x and σ_p of the position and momentum distributions, respectively:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \ \rangle - \langle p \rangle^2$$

and show that the product of these dispersions satisfies the Heisenberg uncertainty principle:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

2.2.6 Physical Interpretation of the Limiting Cases

Discuss qualitatively the physical limiting case $a \to 0$. What happens to the momentum space representation $\phi(p)$ and how should this limiting case be interpreted physically? Refer to the concepts of localization and momentum uncertainty.

2.2.7 ***Note:***

This exercise is also suitable for numerical evaluation and graphical representation in Python or MATLAB. Optionally, the Fourier transform can also be verified symbolically using suitable software tools (e.g., SymPy or Mathematica).

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 006fe438-4c31-4b38-a199-f0b4144a2e00 on 24.05.2025

3 Introduction et informations: 31 h 0 min

L’utilisation d’aides telles que des calculatrices, des recueils de formules, des tableurs et des outils numériques n’est autorisée que dans les conditions expressément indiquées. Les aides autorisées doivent être déclarées à l’avance pour les examens et approuvées par l’administrateur de l’examen. Toute aide non autorisée est interdite et peut entraîner une disqualification. Lors de la réalisation d’un devoir ou d’un examen, il est interdit d’obtenir des matériaux supplémentaires ou une assistance externe, sauf autorisation expresse. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales. Avec un score Nam de 3, tous les participants sont autorisés à utiliser toutes les aides possibles.

La violation de ces règlements peut entraîner de graves conséquences. En particulier lors d’évaluations officielles, l’utilisation d’aides non autorisées peut entraîner une exclusion immédiate de l’examen. En cas de récidive ou de cas particulièrement graves, une interdiction permanente de l’examen peut même être imposée. Le respect de ces règlements garantit que tous les participants travaillent dans des conditions équitables et égales et que l’intégrité des évaluations est maintenue.

Cette feuille sert à des fins d’exercice et peut être soumise officiellement mais sous certaines conditions. En même temps, elle doit être considérée comme un document non officiel, car elle a été traitée sans supervision administrative.

1. **Étiquetage correct** - Le document doit être clairement marqué comme une feuille d’exercice.
2. **Complétude et formatage** - Il doit être dans un format reconnu (par exemple, PDF ou copie imprimée) et contenir tout le contenu requis.
3. **Soumission dans les délais** - La soumission doit être effectuée dans les délais spécifiés.
4. **Approbation par l’autorité compétente** - La reconnaissance officielle nécessite l’approbation de l’unité d’examen ou administrative compétente.
5. **Aucune assistance extérieure** - Le document doit avoir été complété exclusivement par la personne concernée sans assistance extérieure.
6. **Aucune garantie de note** - Étant donné que la feuille a été créée sans supervision administrative, il n’y a aucune obligation de la considérer pour une évaluation officielle.
7. **Aucune responsabilité** - L’auteur n’assume aucune responsabilité quant à l’exactitude ou à l’exhaustivité du contenu.
8. **Aucun statut officiel** - Le document n’est pas un document officiel et n’a pas le même statut juridique qu’un document officiellement délivré.
9. **Aucune garantie de reconnaissance** - La soumission de ce document ne garantit pas sa reconnaissance ou sa prise en compte officielle par une autorité ou une institution.
10. **Aucune garantie de confidentialité** - La protection des données personnelles et la confidentialité ne peuvent pas être garanties.
11. **Aucune garantie de sécurité** - La sécurité du contenu et des données qu’il contient n’est pas garantie.
12. **Aucune garantie d’authenticité** - L’authenticité des informations ou des données contenues dans le document ne peut pas être confirmée.
13. **Aucune garantie d’intégrité** - L’authenticité ou l’intégrité du contenu qu’il contient ne peut pas être assurée.
14. **Aucune garantie de validité** - Le document peut contenir des contenus dont la validité juridique ou technique ne peut pas être confirmée.
15. **Aucune garantie de fiabilité** - L’exactitude, l’exhaustivité ou la fiabilité des informations ne peut pas être garantie.

Toute est basée sur la confiance et donc, amusez-vous bien.

3.1 FR SHK-2 No.24P1.4V1.0: Rôle des fonctions zêta et gamma dans les fonctions de partition et les énergies du vide de la théorie quantique des champs

Temps estimé pour résoudre: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* *Un Original*

Étudier et démontrer le rôle des fonctions zêta et gamma dans la régularisation de la théorie quantique des champs et la thermodynamique, notamment dans le contexte des fonctions de partition et de l'énergie du vide.

3.1.1 Tâche

Soit un champ quantique scalaire sur un espace-temps compact de périodicité β dans la dimension temporelle (correspondant à une température $T = 1/\beta$) et une dimension spatiale L. Les fréquences propres du champ sont :

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

En utilisant la régularisation zêta, montrer que la fonction de partition thermodynamique

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

peut être calculée régulièrement à l'aide de l'extension analytique de la fonction zêta de Riemann et de la fonction gamma.

3.1.2 Sous-tâches

1. **Dérivation de l'énergie régulée du vide**

Déduire l'expression de l'énergie régulée du vide $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ à l'aide de la **fonction zêta**. Montrer que :

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{et} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

et convertir l'expression en fonction gamma à l'aide de la transformée de Mellin.

2. **Réduction à une fonction zêta d'Epstein**

Montrer que la double somme sur n et m peut être représentée par une fonction zêta d'Epstein. Analyser ses propriétés analytiques.

3. **Dépendance à la température et fonctions thermodynamiques**

Utiliser l'expression régularisée pour déduire l'énergie libre F(bêta), l'énergie interne U(bêta) et l'entropie S(bêta). Montrer comment la fonction gamma apparaît dans le développement asymptotique pour les températures élevées et basses.

4. **Comparaison avec l'énergie de Casimir**

Démontrer que la limite à température nulle de la fonction de partition se transforme en énergie de Casimir et que la régularisation donne exactement la même forme que la méthode zêta-Casimir classique.

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: NUM **Étiquettes**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: 5377267d-9aaa-4a14-86dc-4182c4a66fca le 24.05.2025

3.2 FR SHK-3 No.25P1.4V1.0: Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussien

Temps estimé pour résoudre: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Un Original*

3.2.1 Tâche : Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussiennes

Étant donné une particule mécanique quantique unidimensionnelle avec la fonction d'onde dans l'espace de position :

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Cette fonction décrit une particule stationnaire et en mouvement libre avec une distribution spatiale gaussienne.

3.2.2 ***Sous-tâches***

3.2.3 Normalisation de la fonction d'onde

Déterminer la constante de normalisation A telle que la fonction d'onde soit normalisée, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

3.2.4 Transformation de Fourier dans l'espace des impulsions

Calculer la représentation spatiale de l'impulsion $\phi(p)$ de la fonction d'onde en utilisant la transformation de Fourier selon :

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} px} \, dx$$

Complétez l'intégration et indiquez la fonction résultante $\phi(p)$ sous forme explicite.

3.2.5 Le principe d'incertitude de Heisenberg

Déterminer les écarts types σ_x et σ_p des distributions de position et d'impulsion, respectivement :

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

et montrer que le produit de ces diffusions satisfait le principe d'incertitude de Heisenberg :

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

3.2.6 Interprétation physique des cas limites

Discutez qualitativement du cas limite physique $a \to 0$. Qu'arrive-t-il à la représentation de l'espace d'impulsion $\phi(p)$ et comment ce cas limite doit-il être interprété physiquement ? Se référer aux concepts de localisation et d'incertitude d'impulsion.

3.2.7 ***Un avis :***

Cette tâche convient également à l'évaluation numérique et à la représentation graphique en Python ou MATLAB. En option, la transformée de Fourier peut également être vérifiée symboliquement à l'aide d'outils logiciels appropriés (par exemple, SymPy ou Mathematica).

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 1cf99a90-2b19-471b-9f08-3371ac30d6c4 le 24.05.2025

電卓、数式集、スプレッドシート、デジタルツールなどの補助機器の使用は、明示的に規定された条件の下でのみ許可されます。許可された補助機器は、試験前に申告し、試験管理者の承認を得る必要があります。許可されていない補助機器の使用は禁止されており、失格となる場合があります。課題または試験に取り組む際は、明示的に許可されている場合を除き、追加資料や外部からの支援を受けることは禁止されています。これらの規則を遵守することで、すべての参加者が公平かつ平等な条件で試験に取り組むことができます。Nam スコアが 3 の場合、すべての参加者は利用可能なすべての補助機器を使用できます。

これらの規則に違反すると、重大な結果を招く可能性があります。特に公式評価において、許可されていない補助機器の使用は、試験からの即時除外につながる可能性があります。繰り返し使用された場合、または特に深刻な場合は、試験への永久的な参加禁止が科されることもあります。これらの規則を遵守することで、すべての参加者が公平かつ平等な条件で試験に取り組むことができ、評価の完全性が維持されます。

このシートは演習の目的を果たすものであり、一定の条件の下で公式に提出することができます。同時に、この文書は行政の監督なしに処理されたため、非公式文書とみなされるべきです。

1. **正しいラベル付け** - 文書には演習シートであることが明確に示されている必要があります。
2. **完全性と書式** - 文書は認められた形式（例:PDF または印刷物）で、必要な内容がすべて含まれている必要があります。
3. **期限内の提出** - 提出は指定された期限内に行う必要があります。
4. **責任機関による承認** - 公式認定には、関係する試験機関または行政機関の承認が必要です。
5. **外部からの支援なし** - 文書は、外部からの支援なしに、関係者のみによって作成されている必要があります。
6. **成績保証なし** - このシートは管理監督なしに作成されたため、公式の成績評価の対象としない義務があります。
7. **免責事項** - 著者は、内容の正確性または完全性について一切の責任を負いません。
8. **公式性なし** - この文書は公式文書ではなく、公式に発行された文書と同じ法的地位を有しません。
9. **承認保証なし** - この文書を提出しても、いかなる当局または機関による承認または公式な審査も保証されません。
10. **機密保持保証なし** - 個人情報の保護および機密保持は保証されません。
11. **セキュリティ保証なし** - 内容およびそこに含まれるデータのセキュリティは保証されません。
12. **真正性の保証なし** - 文書内の情報またはデータの真正性は確認できません。
13. **完全性の保証なし** - 文書に含まれるコンテンツの真正性または完全性は保証できません。
14. **妥当性の保証なし** - 文書には、法的または技術的な妥当性を確認できないコンテンツが含まれている可能性があります。
15. **信頼性の保証なし** - 情報の正確性、完全性、または信頼性は保証できません。

すべては信頼に基づいています。楽しんでください。

4.1 JP SHK-2 No.24P1.4V1.0: 量子場の理論における分配関数と真空エネルギーにおけるゼータ関数とガンマ関数の役割

解決までの推定時間: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* オリジナル

量子場の理論における正則化と熱力学、特に分配関数と真空エネルギーの文脈におけるゼータ関数とガンマ関数の役割を調査し、証明する。

4.1.1 課題

時間次元（温度 $T = 1/\beta$ に対応）と空間次元 L に周期性 β を持つコンパクト時空上のスカラー量子場が与えられる。場の固有振動数は、次の通りです。

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

ゼータ正規化を用いて、熱力学的分配関数

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

が、リーマンゼータ関数とガンマ関数の解析的拡張を用いて正規に計算できることを示しなさい。

4.1.2 サブタスク

1. **制御真空エネルギーの導出**

ゼータ関数を用いて、制御真空エネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ の式を導出せよ。以下の式が成り立つことを示せ。

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s \to -1} E_0(s)$$

そして、メリン変換を用いてこの式をガンマ関数形式に変換せよ。

2. **エプスタインゼータ関数への縮約**

n と m の二重和がエプスタインゼータ関数として表せることを示せ。その解析的性質を解析せよ。

3. **温度依存性と熱力学関数**

正規化表現を用いて自由エネルギー F(β)、内部エネルギー U(β)、エントロピー S(β) を導出せよ。ガンマ関数が高温および低温における漸近展開にどのように現れるかを示しなさい。

4. **カシミールエネルギーとの比較**

分配関数の零温度極限がカシミールエネルギーに変換されること、そして正規化によって古典的なゼータ-カシミール法と全く同じ形が得られることを証明せよ。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハイ難しい ***タグ***:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: fa54f474-2db5-47ee-a259-b74482490238 日付 24.05.2025

4.2 JP SHK-3 No.25P1.4V1.0: ガウス波束の運動量空間表現

解決までの推定時間: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* オリジナル

4.2.1 課題*:* ガウス波束の運動量空間表現

位置空間に波動関数を持つ 1 次元の量子力学粒子が与えられます。

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

この関数は、ガウス空間分布を持つ、静止した自由に移動する粒子を記述します。

4.2.2 **サブタスク**

4.2.3 波動関数の正規化

波動関数が正規化されるように正規化定数 A を決定します。つまり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

4.2.4 運動量空間へのフーリエ変換

フーリエ変換を用いて波動関数の運動量空間表現 $\phi(p)$ を次のように計算します。

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

積分を完了し、結果の関数 $\phi(p)$ を明示的な形式で述べます。

4.2.5 ハイゼンベルクの不確定性原理

位置分布と運動量分布の標準偏差 σ_x と σ_p をそれぞれ決定します。

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

これらの散乱の積がハイゼンベルクの不確定性原理を満たすことを示す。

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

4.2.6 極限ケースの物理的解釈

物理的な極限ケース $a \to 0$ について定性的に議論します。運動量空間表現 $\phi(p)$ では何が起こりますか? また、この極限ケースは物理的にどのように解釈されますか? 局所化とインパルス不確実性の概念を参照してください。

4.2.7 **お知らせ***:*

このタスクは、Python または MATLAB での数値評価とグラフィカル表現にも適しています。オプションとして、適切なソフトウェアツール (SymPy や Mathematica など) を使用して、フーリエ変換を記号的に検証することもできます。

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード **タグ**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 572ebf6c-38dd-4582-ae7a-cb1aa9c89bc6 日付 24.05.2025

5 소개및정보: 31 h 0 min

계산기, 공식모음, 스프레드시트, 디지털도구와같은보조도구의사용은명시적으로명시된조건에서만허용됩니다. 허용되는보조도구는시험을위해사전에신고해야하며, 시험감독관의승인을받아야합니다. 허가받지않은보조기구사용은금지되며, 적발시실격처리될수있습니다. 과제나시험을치르는동안에는명시적으로허가되지않는한추가자료나외부도움을이용하는것이금지되어있습니다. 이러한규정을준수하면모든참가자가공정하고평등한조건에서작업할수있습니다. 남점수 3 점부터는모든참가자가가능한모든보조도구를사용할수있습니다.

이러한규정을위반하면심각한결과를초래할수있습니다. 특히공식시험에서허가받지않은보조도구를사용할경우시험에서즉시제외될수있습니다. 반복적으로발생하거나특히심각한경우에는시험응시가영구적으로금지될수도있습니다. 이러한규정을준수하면모든참가자가공정하고평등한조건에서시험에임하고시험의공정성이유지됩니다.

이시트는연습의목적을달성하는데사용되며특정조건하에서공식적으로제출될수있습니다. 동시에이는행정감독없이작성되었기때문에비공식문서로간주되어야합니다.

1. **올바른라벨링** - 문서는연습지라는것을명확하게표시해야합니다.
2. **완전성및형식** - 인정된형식 (예: PDF 또는인쇄본) 이어야하며필요한모든내용이포함되어야합니다.
3. **제시기한** - 지정된기한내에제출해야합니다.
4. **관할기관의승인** - 공식인정을받으려면관할시험또는행정기관의승인이필요합니다.
5. **외부도움없음** - 해당문서는외부도움없이해당개인이단독으로작성해야합니다.
6. **등급보장없음** - 이논문은행정적감독없이작성되었으므로공식등급을고려할의무가없습니다.
7. **책임없음** - 저자는콘텐츠의정확성이나완전성에대해책임을지지않습니다.
8. **공식적인지위없음** - 해당문서는공식문서가아니며공식적으로발행된문서와동일한법적지위를갖지않습니다.
9. **인정보장없음** - 이문서를제출하더라도어떠한기관이나기관으로부터인정이나공식적인고려를보장하지않습니다.
10. **비밀유지보장불가** - 개인정보의보호및비밀유지는보장할수없습니다.
11. **보안보장없음** - 콘텐츠및콘텐츠에포함된데이터의보안은보장되지않습니다.
12. **진위성보장없음** - 문서내의정보나데이터의진위성을확인할수없습니다.
13. **무결성보장없음** - 콘텐츠의진위성이나무결성을보장할수없습니다.
14. **유효성보장없음** - 문서에는법적또는기술적유효성을확인할수없는콘텐츠가포함되어있을수있습니다.
15. **신뢰성보장없음** - 정보의정확성, 완전성또는신뢰성을보장할수없습니다.

모든것이신뢰에기반을두고있기때문에매우즐겁습니다.

5.1 *KR SHK-2 No.24P1.4V1.0:* 양자장론의분배함수와진공에너지에서제타함수와감마함수의역할

해결예상시간: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 원본

양자장이론의정규화와열역학에서제타함수와감마함수의역할, 특히분배함수와진공에너지의맥락을조사하고증명합니다.

5.1.1 과제

시간차원 (온도 T = 1/β 에해당) 과공간차원 L 에주기성 β 를갖는콤팩트시공간상의스칼라양자장이주어졌습니다. 장의고유진동수는다음과같습니다.

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

제타정규화를사용하여열역학적분배함수가

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

리만제타함수와감마함수의해석적확장을사용하여정규적으로계산될수있음을보여주세요.

5.1.2 하위과제

1. **조절된진공에너지의유도**

제타함수를사용하여조절된진공에너지 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ 에대한식을유도하십시오. 다음을보여주십시오.

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

그리고멜린변환을사용하여식을감마함수형태로변환하십시오.

2. **엡스타인제타함수로의환원**

n 과 m 에대한이중합을엡스타인제타함수로나타낼수있음을보여주십시오. 그해석적성질을분석하십시오.

3. **온도의존성및열역학함수**

정규화된표현식을사용하여자유에너지 F(베타), 내부에너지 U(베타), 엔트로피 S(베타) 를유도하십시오. 감마함수가고온및저온에대한점근전개에서어떻게나타나는지보여주십시오.

4. **카시미르에너지와의비교**

분배함수의영온도한계가카시미르에너지로변환되고, 정규화가고전적인제타-카시미르방법과정확히동일한형태를낳음을증명하십시오.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: NUM **태그**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: a7ceaf1b-e71e-4d76-a632-c2b9363d5583 날짜 24.05.2025

5.2 KR SHK-3 No.25P1.4V1.0: 가우스파패킷의운동량공간표현

해결예상시간: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 원본

5.2.1 과제*:* 가우스파패킷의운동량공간표현

위치공간에서파동함수를갖는 1 차원양자역학입자가주어지면:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

이함수는가우스공간분포를갖는고정되어있고자유롭게움직이는입자를설명합니다.

5.2.2 **하위작업**

5.2.3 파동함수의정규화

파동함수가정규화되도록정규화상수 A 를결정합니다. 즉,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

5.2.4 운동량공간으로의푸리에변환

푸리에변환을사용하여파동함수의운동량공간표현 $\phi(p)$ 을계산합니다.

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

적분을완료하고결과함수 $\phi(p)$ 를명시적인형태로나타내세요.

5.2.5 하이젠베르크의불확정성원리

위치와운동량분포의표준편차 σ_x 와 σ_p 를각각결정합니다.

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

그리고이러한산란의곱이하이젠베르크의불확정성원리를만족함을보여주세요.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

5.2.6 극한경우의물리적해석

물리적한계사례 $a \to 0$ 에대해질적으로논의해보세요. 운동량공간표현 $\phi(p)$ 은어떻게되나요? 그리고이제한적인경우는물리적으로어떻게해석해야할까요? 국소화와임펄스불확실성의개념을참조하세요.

5.2.7 **공지사항***:*

이작업은 Python 이나 MATLAB 에서수치적평가와그래픽표현에도적합합니다. 선택적으로, 푸리에변환은적절한소프트웨어도구 (예: SymPy 또는 Mathematica) 를사용하여기호적으로검증할수도있습니다.

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 6dbbe88e-8124-48cf-94c9-d265d50d0819 날짜 24.05.2025

僅在明確規定的條件下才允許使用計算器、公式集、電子表格和數位工具等輔助工具。考試時必須事先申報允許使用的輔助器材，並獲得考試監督員的批准。禁止任何未經授權的輔助，否則可能導致取消資格。在完成作業或考試時，除非明確允許，否則禁止使用額外的材料或外部協助。遵守這些規定可確保所有參與者在公平、平等的條件下運作。從 Nam 分數為 3 開始，所有參與者都可以使用所有可能的輔助工具。

違反這些規定可能會造成嚴重後果。特別是在正式考試中，使用未經授權的輔助工具可能會導致立即被取消考試資格。對於重複或特別嚴重的情況，甚至可能被處以永久禁止參加考試的處罰。遵守這些規定可確保所有參與者在公平、平等的條件下運作，並維護考試的完整性。

此表用於練習目的，在一定條件下可以正式提交。同時，由於它是在沒有行政監督的情況下創建的，因此應該被視為非官方文件。

1. **正確標記** - 該文件必須清楚標示為練習表。
2. **完整性和格式** - 它必須採用可識別的格式（例如 PDF 或列印副本）並包含所有必要的內容。
3. **及時提交** - 必須在指定的期限內提交。
4. **主管機關核准** - 官方認可需要主管審查或行政機構的批准。
5. **無外部幫助** - 該文件必須是由相關人員獨自創建的，無需外部幫助。
6. **不保證評分** - 由於論文是在沒有行政監督的情況下準備的，因此沒有義務考慮對其進行官方評分。
7. **無責任** - 作者對內容的準確性或完整性不承擔任何責任。
8. **無官方地位** - 該文件不是官方文件，不具有與正式頒發的文件相同的法律地位。
9. **不保證獲得認可** - 提交此文件並不保證獲得任何當局或機構的認可或官方考慮。
10. **不保證保密** - 無法保證個人資料的保護和保密性。
11. **不保證安全** - 不保證其中包含的內容和資料的安全性。
12. **不保證真實性** - 無法確認文件中資訊或資料的真實性。
13. **不保證完整性** - 無法保證所含內容的真實性或完整性。
14. **不保證有效性** - 文件可能包含無法確認其法律或技術有效性的內容。
15. **不保證可靠性** - 無法保證資訊的準確性、完整性或可靠性。

一切都基於信任，因此很有趣。

6.1 ZH SHK-2 No.24P1.4V1.0: zeta 函數和 *gamma* 函數在量子場論的配分函數和真空能量中的作用

解决的预计时间: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 原创

研究並證明 zeta 和 gamma 函數在量子場論正則化和熱力學中的作用，特別是在配分函數和真空能量的背景下。

6.1.1 任務

給定一個緊湊時空中的標量量子場，其時間維度具有週期性 β(對應於溫度 $T = 1/\beta$) 和空間維度 L。該場的固有頻率為:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

使用 zeta 正規化，證明熱力學配分函數

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

可以使用黎曼 zeta 函數和 gamma 函數的解析擴展進行定期計算。

6.1.2 子任務

1. **受控真空能量的推導**

使用 **zeta 函數**推導受控真空能量的表達式 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$。表明:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

並使用梅林變換將表達式轉換為伽馬函數形式。

2. **簡化為 Epstein zeta 函數**

證明 n 和 m 的雙和可以表示為 Epstein zeta 函數。分析其分析性質。

3. **溫度依賴性和熱力學函數**

利用正規化表達式推導自由能 F(beta)、內能 U(beta) 和熵 S(beta)。展示伽馬函數在高溫和低溫的漸近展開中如何出現。

4. **與卡西米爾能量的比較**

證明配分函數的零溫度極限轉變為卡西米爾能量，而正則化產生與經典 zeta-卡西米爾方法完全相同的形式。

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: NUM **标签**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: b14eff42-fdc0-4ebc-880f-05167a978cbe 日期 24.05.2025

6.2 ZH SHK-3 No.25P1.4V1.0: 高斯波包的動量空間表示

解决的预计时间: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 原创

6.2.1 任務*:* 高斯波包的動量空間表示

給定一個一維量子力學粒子，其波函數在位置空間:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

此函數描述具有高斯空間分佈的靜止、自由移動的粒子。

6.2.2 **子任務**

6.2.3 波函數的歸一化

決定標準化常數 A，使得波函數標準化，即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

6.2.4 傅立葉轉換到動量空間

根據下列公式利用傅立葉轉換計算波函數的動量空間表示 $\phi(p)$:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} px} \, dx$$

完成積分並以明確形式表述所得函數 $\phi(p)$。

6.2.5 海森堡不確定原理

分別決定位置和動量分佈的標準差 σ_x 和 σ_p:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

並證明這些散射的乘積滿足海森堡不確定性原理:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

6.2.6 極限情況的物理解釋

定性地討論物理極限情況 $a \to 0$。動量空間表示 $\phi(p)$ 會發生什麼情況，以及如何從物理上解釋這種極限情況？參考局部化和脈衝不確定性的概念。

6.2.7 **通知*:***

此任務也適合在 Python 或 MATLAB 中進行數值評估和圖形表示。或者，也可以使用合適的軟體工具 (例如 SymPy 或 Mathematica) 以符號方式驗證傅立葉變換。

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 07f300e8-9ad4-4552-8048-256b953aecc1 日期 24.05.2025

7.1 DE SHK-2 No.24P1.4V1.0: Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in Zustandssummen und Vakuumenergien der Quantenfeldtheorie

Zeit zur Bearbeitung: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *Ein Original*

Untersuchen und beweisen Sie die Rolle der Zeta- und Gammafunktionen in der quantenfeldtheoretischen Regularisierung und Thermodynamik, speziell im Kontext der Zustandssummen und Vakuumenergie.

7.1.1 Aufgabenstellung

Gegeben sei ein skalares Quantenfeld auf einer kompakten Raumzeit mit Periodizität β in der Zeitdimension (entsprechend einer Temperatur $T = 1/\beta$) und einer Raumdimension L. Die Eigenfrequenzen des Feldes lauten:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Zeigen Sie durch Anwendung der **Zeta-Regularisierung**, dass die thermodynamische Zustandssumme

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

mit Hilfe der analytischen Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion und der Gammafunktion regulär berechnet werden kann.

7.1.2 Teilaufgaben

1. **Herleitung der regulierten Vakuumenergie**

Leiten Sie den Ausdruck für die regulierte Vakuumenergie $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ unter Verwendung der **Zeta-Funktion** her. Zeigen Sie, dass:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{und} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

und bringen Sie den Ausdruck auf eine Form mit Gammafunktionen via Mellin-Transformation.

2. **Reduktion zu einer Epstein-Zeta-Funktion**

Zeigen Sie, dass die doppelte Summe über n und m als **Epstein-Zeta-Funktion** darstellbar ist. Analysieren Sie deren analytische Eigenschaften.

3. **Temperaturabhängigkeit und thermodynamische Funktionen**

Verwenden Sie den regulierten Ausdruck zur Ableitung der freien Energie $F(\beta)$, inneren Energie $U(\beta)$ und Entropie $S(\beta)$. Zeigen Sie, wie die Gammafunktion in der asymptotischen Entwicklung für hohe und niedrige Temperaturen erscheint.

4. **Vergleich mit Casimir-Energie**

Beweisen Sie, dass die Nulltemperatur-Grenze der Zustandssumme zur **Casimir-Energie** übergeht, und dass die Regularisierung exakt dieselbe Form liefert wie bei der klassischen Zeta-Casimir-Methode.

7.1.3 Solution

Solution for n24 in de

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: NUM **Stichwörter**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: cc85e4ff-ce95-4192-9b9c-07372f6d7fdb am 24.05.2025

7.2 DE SHK-3 No.25P1.4V1.0: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Zeit zur Bearbeitung: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Ein Original*

7.2.1 Aufgabe: Impulsraumdarstellung eines gaußschen Wellenpakets

Gegeben sei ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion im Ortsraum:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Diese Funktion beschreibt ein stationäres, frei bewegliches Teilchen mit gaußscher Ortsverteilung.

7.2.2 ***Teilaufgaben***

7.2.3 Normierung der Wellenfunktion

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A so, dass die Wellenfunktion normiert ist, d. h.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

7.2.4 Fourier-Transformation in den Impulsraum

Berechnen Sie die Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ der Wellenfunktion mittels Fourier-Transformation gemäß:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Führen Sie die Integration vollständig durch und geben Sie die resultierende Funktion $\phi(p)$ in expliziter Form an.

7.2.5 Heisenbergsche Unschärferelation

Bestimmen Sie die Standardabweichungen σ_x und σ_p der Orts- bzw. Impulsverteilung:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

und zeigen Sie, dass das Produkt dieser Streuungen die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

7.2.6 Physikalische Interpretation der Grenzfälle

Diskutieren Sie qualitativ den physikalischen Grenzfall $a \to 0$. Was geschieht mit der Impulsraumdarstellung $\phi(p)$ und wie ist dieser Grenzfall physikalisch zu interpretieren? Beziehen Sie sich dabei auf die Konzepte der Lokalisierung und Impulsunschärfe.

7.2.7 ***Hinweis:***

Diese Aufgabe eignet sich auch zur numerischen Auswertung und grafischen Darstellung in Python oder MATLAB. Optional kann die Fourier-Transformation auch symbolisch mit geeigneten Softwaretools (z. B. SymPy oder Mathematica) verifiziert werden.

7.2.8 Solution

Solution for n25 in de

Kategorie: Shoemei, Kaiketsu und Toku, Bunseki **Schwierigkeitsgrad**: Hart **Stichwörter**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 04e72fe3-a112-4eee-9352-964ca9fa0a13 am 24.05.2025

8.1 EN SHK-2 No.24P1.4V1.0: Role of zeta and gamma functions in partition functions and vacuum energies of quantum field theory

Estimated time for solving: 14 h 0 min *Nam-Score: 8.7* *An Original*

Investigate and prove the role of zeta and gamma functions in quantum field theory regularization and thermodynamics, especially in the context of partition functions and vacuum energy.

8.1.1 Task

Given a scalar quantum field on a compact spacetime with periodicity β in the time dimension (corresponding to a temperature $T = 1/\beta$) and a spatial dimension L. The natural frequencies of the field are:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Using zeta regularization, show that the thermodynamic partition function

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

can be regularly calculated using the analytic extension of the Riemann zeta function and the gamma function.

8.1.2 Subtasks

1. **Derivation of the Regulated Vacuum Energy**

Derive the expression for the regulated vacuum energy $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ using the **zeta function**. Show that:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

and convert the expression to a gamma function form using the Mellin transform.

2. **Reduction to an Epstein zeta function**

Show that the double sum over n and m can be represented as an Epstein zeta function. Analyze its analytical properties.

3. **Temperature Dependence and Thermodynamic Functions**

Use the regularized expression to derive the free energy F(beta), internal energy U(beta), and entropy S(beta). Show how the gamma function appears in the asymptotic expansion for high and low temperatures.

4. **Comparison with Casimir Energy**

Prove that the zero-temperature limit of the partition function transforms into the Casimir energy, and that the regularization yields exactly the same form as the classical zeta-Casimir method.

8.1.3 Solution

Solution for n24 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: NUM **Tags**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: ad5daf78-d753-4dd9-b3c5-8d62f9acd212 on 24.05.2025

8.2 EN SHK-3 No.25P1.4V1.0: Momentum space representation of a Gaussian wave packet

Estimated time for solving: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *An Original*

8.2.1 Task: Momentum-space representation of a Gaussian wave packet

Given a one-dimensional quantum mechanical particle with the wave function in position space:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

This function describes a stationary, freely moving particle with a Gaussian spatial distribution.

8.2.2 ***Subtasks***

8.2.3 Normalization of the wave function

Determine the normalization constant A such that the wave function is normalized, i.e. i.e.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

8.2.4 Fourier Transformation into Momentum Space

Calculate the momentum space representation $\phi(p)$ of the wave function using the Fourier transformation according to:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complete the integration and state the resulting function $\phi(p)$ explicitly.

8.2.5 Heisenberg's Uncertainty Principle

Determine the standard deviations σ_x and σ_p of the position and momentum distributions, respectively:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \ \rangle - \langle p \rangle^2$$

and show that the product of these dispersions satisfies the Heisenberg uncertainty principle:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

8.2.6 Physical Interpretation of the Limiting Cases

Discuss qualitatively the physical limiting case $a \to 0$. What happens to the momentum space representation $\phi(p)$ and how should this limiting case be interpreted physically? Refer to the concepts of localization and momentum uncertainty.

8.2.7 ***Note:***

This exercise is also suitable for numerical evaluation and graphical representation in Python or MATLAB. Optionally, the Fourier transform can also be verified symbolically using suitable software tools (e.g., SymPy or Mathematica).

8.2.8 Solution

Solution for n25 in en

Category: Shoemei, Kaiketsu and Toku, Bunseki **Difficulty**: Hard **Tags**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 006fe438-4c31-4b38-a199-f0b4144a2e00 on 24.05.2025

9 Solution

9.1 FR SHK-2 No.24P1.4V1.0: Rôle des fonctions zêta et gamma dans les fonctions de partition et les énergies du vide de la théorie quantique des champs

Temps estimé pour résoudre: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* *Un Original*

Étudier et démontrer le rôle des fonctions zêta et gamma dans la régularisation de la théorie quantique des champs et la thermodynamique, notamment dans le contexte des fonctions de partition et de l'énergie du vide.

9.1.1 Tâche

Soit un champ quantique scalaire sur un espace-temps compact de périodicité β dans la dimension temporelle (correspondant à une température $T = 1/\beta$) et une dimension spatiale L. Les fréquences propres du champ sont :

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

En utilisant la régularisation zêta, montrer que la fonction de partition thermodynamique

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

peut être calculée régulièrement à l'aide de l'extension analytique de la fonction zêta de Riemann et de la fonction gamma.

9.1.2 Sous-tâches

1. **Dérivation de l'énergie régulée du vide**

Déduire l'expression de l'énergie régulée du vide $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ à l'aide de la **fonction zêta**. Montrer que :

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{et} \quad E_0 = \lim_{s\to-1} E_0(s)$$

et convertir l'expression en fonction gamma à l'aide de la transformée de Mellin.

2. **Réduction à une fonction zêta d'Epstein**

Montrer que la double somme sur n et m peut être représentée par une fonction zêta d'Epstein. Analyser ses propriétés analytiques.

3. **Dépendance à la température et fonctions thermodynamiques**

Utiliser l'expression régularisée pour déduire l'énergie libre F(bêta), l'énergie interne U(bêta) et l'entropie S(bêta). Montrer comment la fonction gamma apparaît dans le développement asymptotique pour les températures élevées et basses.

4. **Comparaison avec l'énergie de Casimir**

Démontrer que la limite à température nulle de la fonction de partition se transforme en énergie de Casimir et que la régularisation donne exactement la même forme que la méthode zêta-Casimir classique.

9.1.3 Solution

Solution for n24 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: NUM **Étiquettes**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: 5377267d-9aaa-4a14-86dc-4182c4a66fca le 24.05.2025

9.2 FR SHK-3 No.25P1.4V1.0: Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussien

Temps estimé pour résoudre: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* *Un Original*

9.2.1 Tâche : Représentation spatiale de l'impulsion d'un paquet d'ondes gaussiennes

Étant donné une particule mécanique quantique unidimensionnelle avec la fonction d'onde dans l'espace de position :

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Cette fonction décrit une particule stationnaire et en mouvement libre avec une distribution spatiale gaussienne.

*9.2.2 **Sous-tâches***

9.2.3 Normalisation de la fonction d'onde

Déterminer la constante de normalisation A telle que la fonction d'onde soit normalisée, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

9.2.4 Transformation de Fourier dans l'espace des impulsions

Calculer la représentation spatiale de l'impulsion $\phi(p)$ de la fonction d'onde en utilisant la transformation de Fourier selon :

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

Complétez l'intégration et indiquez la fonction résultante $\phi(p)$ sous forme explicite.

9.2.5 Le principe d'incertitude de Heisenberg

Déterminer les écarts types σ_x et σ_p des distributions de position et d'impulsion, respectivement :

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

et montrer que le produit de ces diffusions satisfait le principe d'incertitude de Heisenberg :

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

9.2.6 Interprétation physique des cas limites

Discutez qualitativement du cas limite physique $a \to 0$. Qu'arrive-t-il à la représentation de l'espace d'impulsion $\phi(p)$ et comment ce cas limite doit-il être interprété physiquement ? Se référer aux concepts de localisation et d'incertitude d'impulsion.

*9.2.7 **Un avis :***

Cette tâche convient également à l'évaluation numérique et à la représentation graphique en Python ou MATLAB. En option, la transformée de Fourier peut également être vérifiée symboliquement à l'aide d'outils logiciels appropriés (par exemple, SymPy ou Mathematica).

9.2.8 Solution

Solution for n25 in fr

Catégorie: Preuve, Résolution et Résoudre, Analyse **Difficulté**: Dur **Étiquettes**:
UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 1cf99a90-2b19-471b-9f08-3371ac30d6c4 le 24.05.2025

10.1　JP SHK-2 No.24P1.4V1.0: 量子場の理論における分配関数と真空エネルギーにおけるゼータ関数とガンマ関数の役割

解決までの推定時間: 14 h 20 min　 *Nam-Score: 8.7*　 オリジナル

量子場の理論における正則化と熱力学、特に分配関数と真空エネルギーの文脈におけるゼータ関数とガンマ関数の役割を調査し、証明する。

10.1.1　課題

時間次元（温度 $T = 1/\beta$ に対応）と空間次元 L に周期性 β を持つコンパクト時空上のスカラー量子場が与えられる。場の固有振動数は、次の通りです。

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

ゼータ正規化を用いて、熱力学的分配関数

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

が、リーマンゼータ関数とガンマ関数の解析的拡張を用いて正規に計算できることを示しなさい。

10.1.2　サブタスク

1. **制御真空エネルギーの導出**

ゼータ関数を用いて、制御真空エネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \omega_{n,m}$ の式を導出せよ。以下の式が成り立つことを示せ。

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{n,m} \omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

そして、メリン変換を用いてこの式をガンマ関数形式に変換せよ。

2. **エプスタインゼータ関数への縮約**

n と m の二重和がエプスタインゼータ関数として表せることを示せ。その解析的性質を解析せよ。

3. **温度依存性と熱力学関数**

正規化表現を用いて自由エネルギー F(β)、内部エネルギー U(β)、エントロピー S(β) を導出せよ。ガンマ関数が高温および低温における漸近展開にどのように現れるかを示しなさい。

4. **カシミールエネルギーとの比較**

分配関数の零温度極限がカシミールエネルギーに変換されること、そして正規化によって古典的なゼータ-カシミール法と全く同じ形が得られることを証明せよ。

10.1.3　Solution

Solution for n24 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハイ難しい **タグ**:
UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: fa54f474-2db5-47ee-a259-b74482490238 日付 24.05.2025

10.2 JP SHK-3 No.25P1.4V1.0: ガウス波束の運動量空間表現

解決までの推定時間: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* オリジナル

10.2.1 課題*:* ガウス波束の運動量空間表現

位置空間に波動関数を持つ 1 次元の量子力学粒子が与えられます。

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

この関数は、ガウス空間分布を持つ、静止した自由に移動する粒子を記述します。

10.2.2 **サブタスク**

10.2.3 波動関数の正規化

波動関数が正規化されるように正規化定数 A を決定します。つまり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

10.2.4 運動量空間へのフーリエ変換

フーリエ変換を用いて波動関数の運動量空間表現 $\phi(p)$ を次のように計算します。

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

積分を完了し、結果の関数 $\phi(p)$ を明示的な形式で述べます。

10.2.5 ハイゼンベルクの不確定性原理

位置分布と運動量分布の標準偏差 σ_x と σ_p をそれぞれ決定します。

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

これらの散乱の積がハイゼンベルクの不確定性原理を満たすことを示す。

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

10.2.6 極限ケースの物理的解釈

物理的な極限ケース $a \to 0$ について定性的に議論します。運動量空間表現 $\phi(p)$ では何が起こりますか? また、この極限ケースは物理的にどのように解釈されますか? 局所化とインパルス不確実性の概念を参照してください。

10.2.7 **お知らせ*:***

このタスクは、Python または MATLAB での数値評価とグラフィカル表現にも適しています。オプションとして、適切なソフトウェアツール (SymPy や Mathematica など) を使用して、フーリエ変換を記号的に検証することもできます。

10.2.8 Solution

Solution for n25 in jp

カテゴリー: 証明, 解決と解く, 分析 **難易度**: ハード **タグ**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 572ebf6c-38dd-4582-ae7a-cb1aa9c89bc6 日付 24.05.2025

11.1 KR SHK-2 No.24P1.4V1.0: 양자장론의분배함수와진공에너지에서제타함수와감마함수의역할

해결예상시간: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 원본

양자장이론의정규화와열역학에서제타함수와감마함수의역할, 특히분배함수와진공에너지의맥락을조사하고증명합니다.

11.1.1 과제

시간차원 (온도 T = 1/β 에해당) 과공간차원 L 에주기성 β 를갖는콤팩트시공간상의스칼라양자장이주어졌습니다. 장의고유진동수는다음과같습니다.

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

제타정규화를사용하여열역학적분배함수가

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

리만제타함수와감마함수의해석적확장을사용하여정규적으로계산될수있음을보여주세요.

11.1.2 하위과제

1. **조절된진공에너지의유도**

제타함수를사용하여조절된진공에너지 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$ 에대한식을유도하십시오. 다음을보여주십시오.

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

그리고멜린변환을사용하여식을감마함수형태로변환하십시오.

2. **엡스타인제타함수로의환원**

n 과 m 에대한이중합을엡스타인제타함수로나타낼수있음을보여주십시오. 그해석적성질을분석하십시오.

3. **온도의존성및열역학함수**

정규화된표현식을사용하여자유에너지 F(베타), 내부에너지 U(베타), 엔트로피 S(베타) 를유도하십시오. 감마함수가고온및저온에대한점근전개에서어떻게나타나는지보여주십시오.

4. **카시미르에너지와의비교**

분배함수의영온도한계가카시미르에너지로변환되고, 정규화가고전적인제타-카시미르방법과정확히동일한형태를낳음을증명하십시오.

11.1.3 Solution

Solution for n24 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: NUM **태그**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: a7ceaf1b-e71e-4d76-a632-c2b9363d5583 날짜 24.05.2025

11.2 KR SHK-3 No.25P1.4V1.0: 가우스파패킷의운동량공간표현

해결예상시간: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 원본

11.2.1 과제*:* 가우스파패킷의운동량공간표현

위치공간에서파동함수를갖는 1 차원양자역학입자가주어지면:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

이함수는가우스공간분포를갖는고정되어있고자유롭게움직이는입자를설명합니다.

11.2.2 **하위작업**

11.2.3 파동함수의정규화

파동함수가정규화되도록정규화상수 A 를결정합니다. 즉,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

11.2.4 운동량공간으로의푸리에변환

푸리에변환을사용하여파동함수의운동량공간표현 $\phi(p)$ 을계산합니다.

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

적분을완료하고결과함수 $\phi(p)$ 를명시적인형태로나타내세요.

11.2.5 하이젠베르크의불확정성원리

위치와운동량분포의표준편차 σ_x 와 σ_p 를각각결정합니다.

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \quad \rangle - \langle p \rangle^2$$

그리고이러한산란의곱이하이젠베르크의불확정성원리를만족함을보여주세요.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

11.2.6 극한경우의물리적해석

물리적한계사례 $a \to 0$ 에대해질적으로논의해보세요. 운동량공간표현 $\phi(p)$ 은어떻게되나요? 그리고이제한적인경우는물리적으로어떻게해석해야할까요? 국소화와임펄스불확실성의개념을참조하세요.

11.2.7 **공지사항***:*

이작업은 Python 이나 MATLAB 에서수치적평가와그래픽표현에도적합합니다. 선택적으로, 푸리에변환은적절한소프트웨어도구 (예: SymPy 또는 Mathematica) 를사용하여기호적으로검증할수도있습니다.

11.2.8 Solution

Solution for n25 in kr

카테고리: 증명, 해결과풀기, 분석 **난이도**: 하드 **태그**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 6dbbe88e-8124-48cf-94c9-d265d50d0819 날짜 24.05.2025

12.1 ZH SHK-2 No.24P1.4V1.0: zeta 函數和 *gamma* 函數在量子場論的配分函數和真空能量中的作用

解决的预计时间: 14 h 20 min *Nam-Score: 8.7* 原创

研究並證明 zeta 和 gamma 函數在量子場論正則化和熱力學中的作用，特別是在配分函數和真空能量的背景下。

12.1.1 任務

給定一個緊湊時空中的標量量子場，其時間維度具有週期性 β(對應於溫度 $T = 1/\beta$) 和空間維度 L。該場的固有頻率為:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 + m_0^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

使用 zeta 正規化，證明熱力學配分函數

$$Z(\beta) = \prod_{n,m} \left(1 - e^{-\beta\omega_{n,m}}\right)^{-1}$$

可以使用黎曼 zeta 函數和 gamma 函數的解析擴展進行定期計算。

12.1.2 子任務

1. **受控真空能量的推導**

使用 **zeta 函數**推導受控真空能量的表達式 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}$。表明:

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2}\sum_{n,m}\omega_{n,m}^{-s}, \quad \text{and} \quad E_0 = \lim_{s\to -1} E_0(s)$$

並使用梅林變換將表達式轉換為伽馬函數形式。

2. **簡化為 Epstein zeta 函數**

證明 n 和 m 的雙和可以表示為 Epstein zeta 函數。分析其分析性質。

3. **溫度依賴性和熱力學函數**

利用正規化表達式推導自由能 F(beta)、內能 U(beta) 和熵 S(beta)。展示伽馬函數在高溫和低溫的漸近展開中如何出現。

4. **與卡西米爾能量的比較**

證明配分函數的零溫度極限轉變為卡西米爾能量，而正則化產生與經典 zeta-卡西米爾方法完全相同的形式。

12.1.3 Solution

Solution for n24 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: NUM **标签**:

UUID: 7315621c-f5d3-43cc-af4f-805ea3816c8b – *GUID*: b14eff42-fdc0-4ebc-880f-05167a978cbe 日期 24.05.2025

12.2 ZH SHK-3 No.25P1.4V1.0: 高斯波包的動量空間表示

解决的预计时间: 16 h 40 min *Nam-Score: 6.4* 原创

12.2.1 任務*:* 高斯波包的動量空間表示

給定一個一維量子力學粒子，其波函數在位置空間:

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

此函數描述具有高斯空間分佈的靜止、自由移動的粒子。

12.2.2 **子任務**

12.2.3 波函數的歸一化

決定標準化常數 A，使得波函數標準化，即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

12.2.4 傅立葉轉換到動量空間

根據下列公式利用傅立葉轉換計算波函數的動量空間表示 $\phi(p)$:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \, dx$$

完成積分並以明確形式表述所得函數 $\phi(p)$。

12.2.5 海森堡不確定原理

分別決定位置和動量分佈的標準差 σ_x 和 σ_p:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

並證明這些散射的乘積滿足海森堡不確定性原理:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

12.2.6 極限情況的物理解釋

定性地討論物理極限情況 $a \to 0$。動量空間表示 $\phi(p)$ 會發生什麼情況，以及如何從物理上解釋這種極限情況？參考局部化和脈衝不確定性的概念。

12.2.7 **通知*:***

此任務也適合在 Python 或 MATLAB 中進行數值評估和圖形表示。或者，也可以使用合適的軟體工具 (例如 SymPy 或 Mathematica) 以符號方式驗證傅立葉變換。

12.2.8 Solution

Solution for n25 in zh

类别: 证明, 解决和解答, 分析 **难度**: 硬 **标签**:

UUID: 8ca34bf7-741d-4ee3-b51a-06865305af9a – *GUID*: 07f300e8-9ad4-4552-8048-256b953aecc1 日期 24.05.2025