## 1. Какими свойствами обладает целевая функция и функции ограничения в задачах линейного программирования?

Оптимизационная экономико-математическая модель состоит из целевой функции и системы ограничений. **Целевая функция** описывает цель оптимизации и отражает зависимость показателя, по которому ведется оптимизация, от независимых переменных (ограничений). **Система ограничений** отражает объективные экономические связи и зависимости и представляет собой систему равенств и неравенств, например, между потреблением ресурсов или величинами технико-экономических показателей и установленными лимитами, а также пределами выпуска продукции. Влияние каждой из переменных на величину целевой функции выражается коэффициентом-показателем, экстремум которого выступает критерием оптимальности.

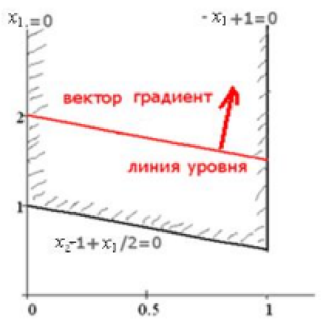
- Любая целевая функция системы обладает двойственностью. Она имеет два противоположных функциональных полюса, в которых принимает соответственно минимальное и максимальное значение.
- Любая целевая функция имеет свой собственный набор предельных параметров. Если значения этих параметров превысят критический уровень, то система начинает процесс трансформации в качественно новое состояние или, в противном случае, она будет разрушена.
- Любая целевая функция содержит индивидуальный набор двойственных параметров и, следовательно, законы сохранения этих двойственных параметров.
- Любая целевая функция системы имеет свой индивидуальный набор собственных значений и собственных векторов, которые в рамках системы данного качества являются неизменными и играют роль констант.
- Любая целевая функция иерархической системы имеет многоуровневый характер. На каждом уровне иерархии существует собственная целевая функция. Каждый уровень иерархии может характеризоваться индивидуальными наборами собственных значений (и векторов), ограничений (предельных параметров), законов сохранения двойственных параметров, которые будут носить локальный характер. Каждый уровень иерархии системы может характеризоваться собственными ритмами «жизни» (собственным временем).

Если ограничения задачи ЛП представлены в виде системы линейных неравенств с двумя переменными, то такая задача может быть решена геометрически.
Решение системы уравнений-ограничений, лежащее в одной из вершин ОДР, называется опорным решением, а сама вершина – опорной точкой или опорной вершиной
ЗЛП может не иметь решения даже в случае, когда существует область допустимых решений. Это бывает тогда, когда в направлении вектора градиента (антиградиента) целевая функция не ограничена

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения задач на экстремум (условный экстремум), которые характеризуются линейной зависимостью между переменными, как в ограничениях задачи, так и в критерии оптимальности. Иначе, все ограничения g(x) и критерий оптимальности (целевая функция) f(x) в этих задачах являются линейными функциями своих аргументов.

**2. Может ли задача линейного программирования иметь решение в одной из внутренних точек допустимого множества? В каком направлении следует перемещать линию уровня целевой функции при геометрическом методе решения?**

**Оптимальное решение ЗЛП (если оно существует) лежит не внутри, а на границе области допустимых решений, в одной из вершин этой области.**
Решение системы уравнений-ограничений, лежащее в одной из вершин ОДР, называется опорным решением, а сама вершина – опорной точкой или опорной вершиной.
Решение ЗЛП может быть и не единственным. Действительно, если линия уровня целевой функции, параллельна стороне многоугольника допустимых решений, на которой достигается экстремум целевой функции, то он достигается **не в одной точке, а на всей стороне**. В этом случае ЗЛП имеет бесчисленное множество оптимальных решений.
ЗЛП может не иметь решения даже в случае, когда существует область допустимых решений. Это бывает тогда, когда в направлении вектора градиента (антиградиента) целевая функция не ограничена.
Оптимальное решение ЗЛП всегда достигается в одной из опорных вершин многоугольника допустимых решений. Если оно достигается на целой стороне, то оно же достигается и в каждой из вершин, через которые проходит эта сторона.



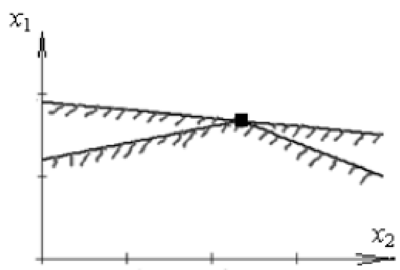




*Рис.2. Целевая функция не ограничена сверху.* *Рис.3. Вырожденный случай.*

Перемещая линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора градиента, мы увеличиваем значение целевой функции. Если решается задача на минимум – перемещаем в направлении вектора антиградиента. В результате, либо отыщется точка, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо будет установлена неограниченность функции на заданном множестве ограничений.

**3. Какая задача линейного программирования считается канонической? Сколько дополнительных переменных вводится при переходе от общей задачи к канонической? В чем состоит идея симплекс-метода? Какими свойствами обладает множество допустимых в задаче линейного программирования?**

**Канонической** называется такая задача ЛП, которая состоит в нахождении максимального или минимального значения целевой функции при условии, что все ограничения являются равенствами, а на все переменные наложено стандартное ограничение на знак ≥ 0

**Каноническая задача линейного программирования имеет вид:**

а) для задачи максимизации:

$$\max z = \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n); \quad (1.1.9)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (1.1.10)$$

а) для задачи минимизации:

$$\min z = \min(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n); \quad (1.1.11)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (1.1.12)$$

***Правило приведения ЗЛП к каноническому виду***

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, при чем в неравенство «≤» эта дополнительная переменная вводится со знаком плюс, а в случае неравенства «≥» со знаком минус

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots . + a_{1n}v_n \leq b_1 \quad (4)$$

Вводим переменную

$$v_{n+1} = b_1 - a_{11}v_1 - a_{12}v_2 - \cdots - a_{1n}v_n.$$

Тогда неравенство (4) запишется в виде

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots . + a_{1n}v_n + v_{n+1} = b_1 \quad (5)$$

В каждое из неравенств вводится своя «уравнивающая» переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных $v_k = v_k - v_l$, где $v_k \geq 0, v_l \geq 0$.

**Симплекс метод** − это метод решения задачи линейного программирования. Суть метода заключается в нахождении начального допустимого плана, и в последующем улучшении плана до достижения максимального (или минимального) значения целевой функции в данном выпуклом многогранном множестве или выяснения неразрешимости задачи.

Допустимым решением ОЗЛП называют любую совокупность переменных x1≥0, x2≥0, …, xn≥0, y1≥0,…, ym≥0, удовлетворяющую уравнениям y=b–AX

Если уравнения противоречат друг другу или имеют решение, но не в области неотрицательных значений переменных, то допустимых решений нет. Допустимые решения существуют, но среди них нет оптимального, тогда ЦФ в области допустимых решений не ограничена снизу.

1. Допустимое множество задачи ЛП либо пусто, либо является выпуклым многогранником в Rn (как пересечение полупространств, описываемых неравенствами (2)-(3)). Оно может быть kfk ограниченным, так и неограниченным; в любом случае это замкнутый многогранник.

2. Если допустимое множество не пусто, а целевая функция ограничена сверху (для задачи максимизации, а для задачи минимизации - ограничена снизу) на этом множестве, то задача ЛП имеет оптимальное решение.

3. Оптимальные решения задачи ЛП (если они существуют) всегда находятся на границе допустимого множества. Точнее, если существует единственное оптимальное решение, то им является какая-либо вершина многогранника допустимых решений; если две или несколько вершин являются оптимальными решениями, то любая их выпуклая комбинация также является оптимальным решением (т.е. существует бесконечное множество точек максимума или минимума).

**4. Сформулируйте критерий достижения оптимума при выполнении симплекс-метода, когда целевая функция будет не ограничена, в каком случае система ограничений задачи противоречива? Какими свойствами характеризуется опорный план, можно ли его найти с помощью симплекс-метода? Будет ли вершина xj=0, yi=bi опорной, если все bi<0?**

Так что, критерий оптимальности в симплекс алгоритме – отсутствие отрицательных коэффициентов с в строке целевой функции (критерий останова алгоритма).

**ОЗЛП**: $y=b-Ax,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ F(x)=(c\cdot x)\rightarrow min$. Сведем все исходные данные в симплекс-таблицу: коэффициенты $a$ заносятся в таблицу с противоположными знаками, а коэффициенты $b$ и $c$ (минимизируемой целевой функции) − со своими знаками.

Таблица 2. Симплекс-таблица

| **Свободные**<br>**Базисные** | $x_1$ | $x_2$ | …. | $x_S$ | …. | $x_n$ | **Свободные члены** $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1S}$<br>$-\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $y_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2S}$<br>$-\frac{a_{2s}}{a_{rs}}$ | … | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $y_r$ | $a_{r1}$<br>$a_{r1}'=\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$ | $a_{r2}$<br>$a_{r2}'=\frac{a_{r2}}{a_{rs}}$ | …. | $a_{rS}$<br>$\frac{1}{a_{rs}}$ | … | $a_{rn}$<br>$a_{rn}'=\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$ | $b_r$<br>$b_r'=\frac{b_r}{a_{rs}}$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $y_i$ | $a_{i1}$<br>$\frac{a_{i1}a_{rs}-a_{r1}a_{is}}{a_{rs}}$ | $a_{i2}$<br>$\frac{a_{i2}a_{rs}-a_{r2}a_{is}}{a_{rs}}$ | … | $a_{iS}$<br>$-\frac{a_{is}}{a_{rs}}$ | … | $a_{in}$<br>$\frac{a_{in}a_{rs}-a_{rn}a_{is}}{a_{rs}}$ | $b_i$<br>$\frac{b_i a_{rs}-a_{is}b_r}{a_{rs}}$ |
| … | … | .. | … | … | … | … | … |
| $y_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mS}$<br>$-\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$ | … | $a_{mn}$ | $b_n$ |
| $F$ | $c_1$ | $c_2$ | … | $c_S$<br>$-\frac{c_s}{a_{rs}}$ | ,,, | $c_n$<br>$\frac{c_n a_{rs}-a_{rn}c_s}{a_{rs}}$ | 0<br>$-\frac{b_r c_s}{a_{rs}}$ |

Вершина $x_j=0$, $y_i=b_i$ будет допустимой базисной, когда все коэффициенты $b_i\geq 0$. Итак, если все $b_i\geq 0$, то получен опорный план.

Когда в последней строке симплекс таблицы все коэффициенты $c_j\geq 0$, то дальнейшее увеличение $x_j\geq 0$ не приведет к уменьшению значений целевой функции. Оптимум достигнут. Так что, критерий оптимальности в симплекс

**В каких пределах возможен рост** $x_s$? Если в столбце, где $c_s<0$ есть отрицательные коэффициенты $a_{is}$, то в ограничение $y=b-Ax$ они войдут с противоположным положительным знаком, значит, эти $x_s$ ***можно увеличивать безгранично − из допустимой области мы не выйдем. В этом случае целевая функция не ограничена снизу – решения нет***.

## Транспортная задача

### *МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОПОРНЫХ ПЛАНОВ*

**Опорный план** является допустимым решением ТЗ и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов.

Существует три метода нахождения опорных планов:
- метод северо-западного угла;
- метод минимального элемента;
- Метод Фогеля.

**ВАЖНО !!!**

- Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только ***способом выбора клетки*** для заполнения
- Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода
- Перед нахождением опорного плана транспортная задача должна быть *сбалансирована*.

**если все bi ≥0, то получен опорный план.**

**5. Сформулируйте теорему о дополняющей нежесткости. Опишите взаимосвязь формализованных постановок взаимно двойственных задач.**

**Теорема 2 (о дополняющей нежесткости).** *Для того чтобы планы* $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *и* $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ *являлись оптимальными решениями, соответственно задач (2) и (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:*

$$\boxed{\begin{aligned} & x_j^*\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i^* - c_j\Big) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i^*\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^* - b_i\Big) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}} \qquad (5)$$

***которые называются условиями дополняющей нежесткости.***

Эти условия называются условиями дополняющей нежесткости. Из них следует: если какое-либо неравенство системы ограничений одной из задач не обращается в строгое равенство оптимальным планом этой задачи, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю. Если же какая-либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальным планом должно обращаться в строгое равенство.

Экономически это означает, что если по некоторому оптимальному плану $\vec{x}^*$ производства расход i-го ресурса строго меньше его запаса $b_i$, то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка единицы этого ресурса равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок его i-я компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу. Отсюда следует вывод: двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а избыточный ресурс (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.

### 6. Что можно сказать о переменной двойственной задачи, если отвечающее ей ограничение парной задачи выполняется как строгое неравенство? Известно оптимальное значение целевой функции одной из взаимно двойственных задач - определите оптимальное значение парной задачи.

Если в оптимальном решении одной из двойственных задач какая-либо переменная не равна нулю, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи на оптимальном решении выполняется как равенство, и наоборот, если на оптимальном решении одной из двойственных задач какое-либо ограничение выполняется как **строгое неравенство**, то соответствующая ему **переменная** в оптимальном решении двойственной задачи **равна нулю.**

- **3. Первая основная теорема двойственности**. Если одна из задач двойственной пары имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем оптимальные значения целевых функций равны. Если функция цели одной из задач не ограничена, то область допустимых решений другой задачи пуста.
- Между неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$, исходной задачи и неизвестными $y_1, y_2, \ldots, y_{m+n}$ двойственной задачи установим взаимно однозначное соответствие:
- $x_1 \leftrightarrow y_{m+1}$; $x_2 \leftrightarrow y_{m+2}$;...$x_n \leftrightarrow y_{m+n}$;
- $x_{n+1} \leftrightarrow y_1$; $x_{n+2} \leftrightarrow y_2$;..., $x_{n+m} \leftrightarrow y_m$,
- так что базисным неизвестным одной задачи соответствуют свободные неизвестные другой.

**7. В чем состоит содержание постоптимизационного анализа? Дайте содержательную интерпретацию двойственной переменной. В чем состоит отличие предельной эффективности от средней?**

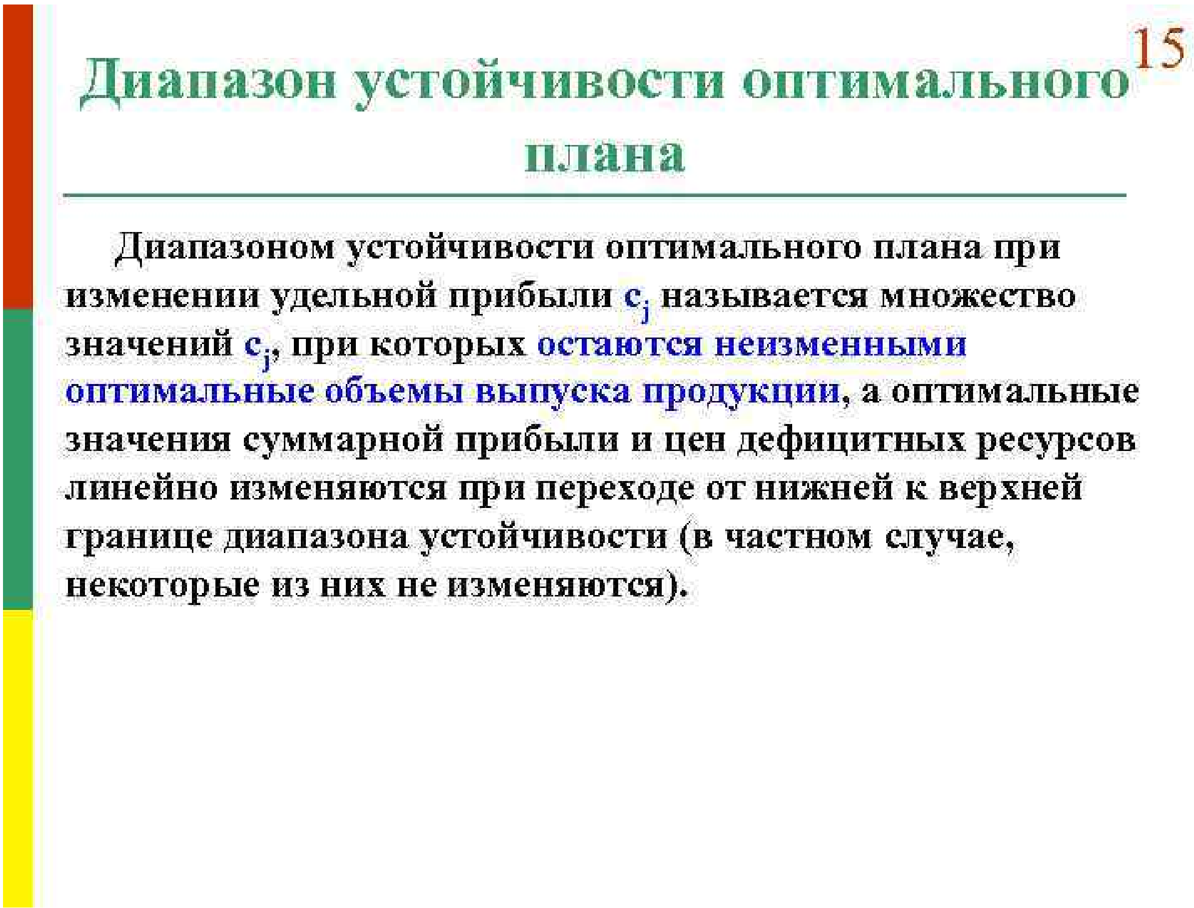
После математического решения задачи линейного программирования, расчета ее оптимального плана и оптимума, необходимо проанализировать полученные результаты. Такой анализ называют постоптимизационным. Общая цель постоптимизационного анализа - определить устойчивость полученного решения к изменению условий задачи и оценить чувствительность решения к изменению конкретных численных значений тех или иных параметров модели. Во-первых, необходимо выявить, на границах каких ограничений находится оптимальная точка. Эти ограничения выполняются как равенства (связанные, или активные ограничения), остальные - как строгие неравенства (не связанные, не активные, пассивные ограничения). Для задачи производственного планирования ограничения соответствуют ресурсам. Равенство левой и правой частей ограничения, его активность означает полное использование данного ресурса. Строгое неравенство - неполное использование ресурса.

# Цели и содержание постоптимизационного анализа 12

- **Разработка субоптимального плана, не слишком сильно отличающегося от теоретически оптимального по суммарной прибыли, но более удобного с точки зрения организации производства.**
- **Разработка рекомендаций по заблаговременной организационно-технологической подготовке производства на случай возможных изменений производственной ситуации.**
- **Поиск эффективных путей развития производства и радикального повышения суммарной прибыли.**

**Величина предельной эффективности называется теневой ценой (или двойственной оценкой) ресурса**. Наименование предельные возникает, так как $\frac{\partial f}{\partial b} = \lim\limits_{\Delta b \to \infty} \frac{\Delta f}{\Delta b}$, в отличие от средней эффективности – не предельной, величина которой равняется отношению $\frac{\Delta f}{\Delta b}$. Очевидно, что средние и предельные величины не равны.

**8. Как определить границы устойчивости оптимального плана производства к изменению цены реализации единицы продукции? Что понимается под активным ограничением? Каким образом установить границы устойчивости статуса ограничений и двойственных оценок?**




Во-первых, необходимо выявить, на границах каких ограничений находится оптимальная точка. Эти ограничения выполняются как равенства (связанные, или активные ограничения), остальные - как строгие неравенства (не связанные, не активные, пассивные ограничения). Для задачи производственного планирования ограничения соответствуют ресурсам. Равенство левой и правой частей ограничения, его активность означает полное использование данного ресурса. Строгое неравенство - неполное использование ресурса.

Критические границы ресурсов соответствуют границам устойчивости статуса ограничений при изменении их правых частей

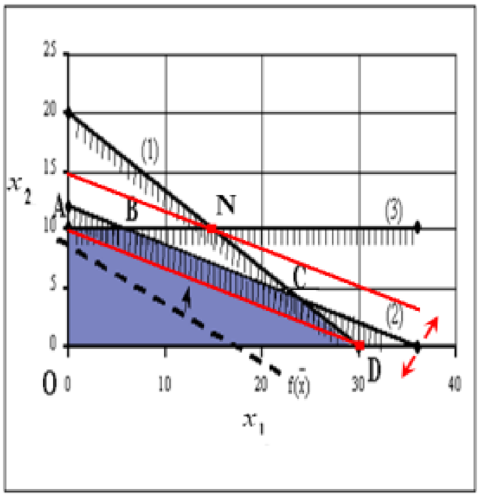



*Рис. 2. Определение критических границ ресурса (11). Линия BC смещается параллельно самой себе, пока не пройдет через точку N – верхнюю граничную точку области допустимых планов или точку D – нижнюю граничную точку области допустимых*

**9. Сформулируйте транспортную задачу, приведите ее математическую формулировку. Всегда ли ТЗ является задачей линейного программирования? Какие методы определения опорного плана ТЗ вы знаете, в чем состоит их содержание? Дайте определение понятию "цикл пересчета". Всегда ли в ТЗ линейного программирования существует цикл пересчета? В чем состоит распределительный метод решения ТЗ?**

Транспортная задача это задача рационального прикрепления поставщиков к потребителям, она связана с выбором транспортных маршрутов, по которым продукция различных предприятий доставляется потребителю. Другими словами, требуется найти такой план доставки грузов от 55 поставщиков к потребителям, при котором суммарная стоимость перевозок минимальная.

Предположим, что имеется $m$ производителей (складов, пунктов отправления) $A_i$, $i \in \{1..m\}$, на которых хранится требуемое предприятиям-потребителям сырье или иная продукция. В каждом пункте отправления $A_i$ имеется в наличии запас товара в количестве $a_i$ соответственно, $i \in \{1..m\}$. Кроме того, имеется также $n$ пунктов потребления, например, промышленных предприятий $B_j$, $j \in \{1..n\}$, требующих снабжения некоторым определенным видом продукции, сырья, материалов и т.п. Потребности в сырье каждого предприятия $B_j$ равны соответственно $b_j$ условных единиц $j \in \{1..n\}$. Пункты отправления (склады) удалены от предприятий-потребителей и связаны с ними путями сообщений с различными тарифами на перевозку грузов. Издержки перевозки единицы груза от $A_i$ до $B_j$ составляют $c_{ij}$. Для простоты предположим, что сумма всех заявок в точности равна сумме всех имеющихся запасов: $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$ .

Требуется составить план перевозок, т.е. указать с какого пункта отправления на какие предприятия-потребители, и какое количество грузов нужно направить, чтобы заявки были выполнены, а общие расходы на все перевозки были минимальными. Транспортная задача всегда может быть задана таблицей издержек, связанных с перевозками грузов из данных истоков в данные пункты назначения - стоки. В ячейку с координатами (i, j) таблицы издержек записывают стоимость перевозки единицы груза из истока i в сток j. Кроме значений стоимости перевозок в данную таблицу в соответствующих строках помещают величины запасов в пунктах-истоках, а в соответствующих столбцах – величины заявок пунктов-стоков. Ниже приведен пример заполненной таким образом таблицы издержек

Таблица1. Издержки транспортной задачи.

| | Потребители (пункты назначения) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Сток / Исток | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | Запасы: $\sum a_i$ |
| **Производители (пункты отправления)** | $A_1$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | … | $c_{1n}$ | $a_1$ |
| | $A_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | … | $c_{2n}$ | $a_2$ |
| | … | … | … | … | … | … |
| | $A_m$ | $c_{m1}$ | $c_{m2}$ | … | $c_{mn}$ | $a_m$ |
| | Заявки: $\sum b_j$ | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_n$ | $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ |

**Математическая постановка транспортной задачи:**

**найти $x_{ij} \geq 0$, удовлетворяющие ограничениям**

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i=1,2,\dots m \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j=1,2,\dots n \qquad (2)$$

**и минимизирующие целевую функцию $L$ (суммарную стоимость перевозок)**

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (3)$$

В данной математической модели $x_{ij}$ - величина потока перевозок из истока *i* в сток *j*.

Целевой функцией может быть стоимость перевозок, расстояние (пробег), время, грузооборот (в тонно-километрах) и др. показатели эффективности.

В данной математической модели $x_{ij}$ - величина потока перевозок из истока *i* в сток *j*.

Целевой функцией может быть стоимость перевозок, расстояние (пробег), время, грузооборот (в тонно-километрах) и др. показатели эффективности.

При постановке классической транспортной задачи предполагается выполнение условия равенства суммарных запасов и суммарных запросов, $\sum_i a_i = \sum_j b_j$.

Решение транспортной задачи, как и всякой задачи линейного программирования, начинается с нахождения опорного решения или, в случае транспортной задачи, опорного плана перевозок. В отличие от общего случая задачи линейного программирования, решение транспортной задачи всегда существует.

Любая задача транспортного типа, как задача линейного программирования, может быть решена симплекс-методом. Однако специфические особенности задач рассматриваемого класса позволили разработать более эффективные вычислительные методы

**Метод северо-западного угла** заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего **угла**, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

# Метод Северо-Западного угла

| ПН / ПО | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Запасы $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 18 (13) | 12 (7) | (14) | (7) | (5) | 30 |
| $A_2$ | (11) | 15 (8) | 33 ([illegible]) | (6) | (8) | 48 |
| $A_3$ | (6) | (10) | 9 (16) | 11 (8) | (11) | 20 |
| $A_4$ | (14) | (8) | (10) | 4 (10) | 26 (15) | 30 |
| Заявки $b_j$ | 18 | 27 | 42 | 15 | 26 | 128 |

**Метод наименьший стоимости** по-другому называется методом минимального элемента. Суть заключается в том, что мы ищем в таблице самую минимальную стоимость. И эти клетки заполняются первыми. Метод наименьший стоимости простой и более эффективный, чем метод северозападного угла. Кроме этого, этот метод понятен и логичен. Но и метод минимального элемента не всегда приводить к оптимальному решению

Транспортная задача приведена в виде таблицы

| Поставщики их мощности | | Потребители и их спрос | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | $b_1$ | $b_2$ | $b_2$ | $b_4$ |
| 1 | $a_1$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{14}$ |
| 2 | $a_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $c_{23}$ | $c_{24}$ |
| 3 | $a_3$ | $c_{31}$ | $c_{32}$ | $c_{33}$ | $c_{34}$ |

Пусть $c_{22}$ – является самым минимальным тарифом. На эту клетку запишем $\min\{a_2; b_2\}$. Если $a_2 > b_2$, то $x_{22} = b_2$. После этого 2-о столбец исключаем из рассмотрения и ищем минимальные стоимости среди остальных тарифов. Если в таблице есть несколько ячеек с одинаковыми и минимальными стоимостями, то можно выбрать любую из них.

**Суть метода двойного предпочтения** отражена в его названии. Во время работы мы найдем наименьшее элементы в каждой строке и в каждом столбце. Поставим в соответствующую клетку знак ×. Если встречаются такие клетки, отмеченные двумя знаками, то их заполняем в первую очередь. Сюда запишем максимально возможное число

**Цикл пересчета** – замкнутая ломаная с вершинами в заполненных клетках и звеньями, расположенными вдоль строк и столбцов матрицы перевозок, при этом одна вершина находится в заполняемой клетке
В общем случае опорный план, являясь допустимым, не является оптимальным. Для нахождения оптимального плана перевозок необходимо последовательно, пока это, возможно, улучшать опорный план.
Циклом в транспортной таблице назовем несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на угол, равный 90о . Условимся помечать символами (+) те вершины ломаной линии, образующей цикл, в которых объемы перевозок увеличивается, а символом ( ) те вершины цикла, в которых они уменьшаются. Цикл содержит одну свободную клетку, остальные клетки – базисные. В результате циклического переноса меняются местами базисная и свободная переменная. Очевидно, что прямоугольник представляет собой наиболее простой случай такой замкнутой ломаной линии. В таблице 9, расположенной ниже, представлен более сложный пример возможного цикла. Цикл с отмеченными вершинами будем называть «означенным». Перенести какое-то количество единиц груза по означенному циклу – это означает увеличить объемы перевозок в положительных вершинах (вершинах, помеченных символом «+») на это количество единиц и одновременно с этим уменьшить перевозки на то же количество в

отрицательных вершинах (вершинах, помеченных символом «–»). Очевидно что, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется.

**Распределительный метод** состоит в последовательном улучшении опорного плана перевозок путем отыскания на каждом шаге выгодных циклов переноса грузов. При перемещении x единиц груза по некоторому циклу с ценой стоимость перевозок изменяется на величину x*y . Поэтому для улучшения текущего плана перевозок имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам, цена которых отрицательна. Если циклов с отрицательной ценой в таблице больше не осталось, оптимальный план достигнут. При улучшении плана циклическими переносами пользуются приемом, заимствованным из симплекс-метода: на каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, т.е. заполняют одну свободную клетку и взамен того освобождают одну из базисных клеток. Для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует цикл (и притом единственный), одна из вершин которого лежит в этой клетке, а все остальные в базисных клетках. Если цена такого цикла, с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить. Количество единиц груза (x), которые возможно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла. .

### 10. Сформулируйте критерий достижения оптимума при решении ТЗ распределительным методом. Какова размерность базиса ТЗ с матрицей m x n? Какой опорный план называют вырожденным? Возможно ли решение ТЗ в этом случае?

Метод состоит в последовательном улучшении опорного плана перевозок путем отыскания на каждом шаге выгодных циклов переноса грузов. При перемещении x единиц груза по некоторому циклу с ценой стоимость перевозок изменяется на величину x . Поэтому для улучшения текущего плана перевозок имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам, цена которых отрицательна.
Если циклов с отрицательной ценой в таблице больше не осталось, оптимальный план достигнут. При улучшении плана циклическими переносами пользуются приемом, заимствованным из симплекс-метода: на каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, т.е. заполняют одну свободную клетку и взамен того освобождают одну из базисных клеток
Для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует цикл (и притом единственный), одна из вершин которого лежит в этой клетке, а все остальные в базисных клетках. Если цена такого цикла, с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить. Количество единиц груза (x), которые возможно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла.

Очевидно, что не все $m+n$ уравнений системы ограничений транспортной задачи являются независимыми. Действительно, складывая все ограничения по заявкам и все ограничения по запасам, в силу равенства заявок и запасов, получаем доказательство того, что ранг системы ограничений, $r=m+n-1$. Следовательно, можно разрешить эти уравнения относительно $r$ базисных переменных, выразив их через остальные $k$ свободные:

$$k = m\cdot n - r = m\cdot n - m - (n-1) = m\cdot(n-1) - (n-1) \Rightarrow k = (m-1)\cdot(n-1).$$

**Вырожденный план**. Деля решения транспортной задачи необходимо, чтобы уравнения, формирующие план перевозок, имели базис размерности **r=m+n–1**. В противном случае дальнейшее решение транспортной задачи становится не возможным. Поэтому необходимо строго поддерживать размерность базиса, равную m+n – 1. Если на какой-либо итерации некоторые из базисных перевозок оказываются равными 0 (такой план перевозок называют вырожденным), то искусственным образом вводится дополнительная базисная переменная. Для этого в любую из свободных клеток транспортной таблицы следует поместить некоторую бесконечно малую величину и соответственно скорректировать значения всех соседних базисных клеток.

**11. Как вы понимаете содержание понятия платежей (потенциалов) транспортной таблицы? Сформулируйте теоремы: о платежах и об оптимальном плане транспортной таблицы.**

## *Метод потенциалов решения транспортной задачи*

- Для транспортной задачи (ТЗ), как и для любой другой ЗЛП, существует двойственная к ней задача.
- Обозначим двойственные переменные для каждого ограничения вида (2) через $U_i$ ( i = 1,..,m) и вида (3) – $V_j$ ( j = 1,..,n), тогда двойственная задача имеет вид:

$$max\left[\sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j\right]$$

$$U_i + V_j \le C_{ij},\ i = 1..m,\ j = 1..n$$

- Переменные задачи, двойственной к транспортной, $U_i$ и $V_j$ называют *потенциалами* поставщика и потребителя соответственно.

# Метод потенциалов

- **Теорема**
- Если план $X^*$ транспортной задачи является **оптимальным**, то ему соответствует система из **m+n** чисел $\mathbf{U^*_i}$ $\mathbf{V^*_j}$, удовлетворяющих условиям

$$U^*_i+V^*_j=C_{ij}$$

$$U^*_i+V^*_j\le C_{ij}$$

Числа $\mathbf{U^*_i}$ и $\mathbf{V^*_j}$ называются потенциалами соответственно поставщиков и потребителей.

***Теорема о платежах транспортной задачи:***

Для заданной совокупности платежей $(\alpha_i,\beta_j)$ суммарная псевдостоимость плана перевозок, равная величине $\tilde{L}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij}$, **при любом допустимом плане** перевозок $(x_{ij})$ не зависит от конкретного плана перевозок, то есть сохраняет одно и то же **постоянное значение**.

***Доказательство:***

$$\tilde{L}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\ \alpha_i+\beta_j\ \ x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\underbrace{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}_{a_i}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\underbrace{\sum_{i=1}^{m}x_{ij}}_{b_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i+\sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j$$

**Теорема об оптимальном плане транспортной задачи.** *Если для всех базисных клеток некоторого допустимого плана перевозок* ***псевдостоимость совпадает со стоимостью*** *перевозки по соответствующему маршруту, то есть* $\forall\ x_{ij} > 0:\ \tilde{c}_{ij} = c_{ij}$, *а для всех свободных клеток* ***псевдостоимость не превышает стоимости*** *перевозки, то есть* $\forall\ x_{ij} = 0:\ \tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$, то *рассматриваемый допустимый план перевозок является оптимальным.*

### 12. Что является критерием получения потенциального плана? Дайте экономическую интерпретацию понятия платежей. Возможно ли решение ТЗ с неправильным балансом?

**признаком оптимальности допустимого плана перевозок является выполнение двух условий:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{c}_{ij} = c_{ij}\ \ \forall (i,j): x_{ij} \in B & (a) \\ \tilde{c}_{ij} \le c_{ij}\ \ \forall (i,j): x_{ij} \notin B & (б) \end{array}}$$

**План перевозок, обладающий таким свойством, называется потенциальным, а соответствующие ему платежи** $(\alpha_i, \beta_j)$ **- потенциалами пунктов** $A_i$ **и** $B_j$**.**

Понятиям платежей за перевозку и псевдостоимостей можно дать следующую **экономическую интерпретацию**. Пусть поставщики Ai и потребители Bj действуют как единая экономическая система, а платежи $(\alpha_i, \beta_j)$ реальные платежи, которые участники системы Ai и Bj вынуждены платить за перевозку единицы груза «перевозчику». Перевозка единицы груза из пункта Ai в пункт Bj объективно стоит Cij условных единиц. В то же время соответствующий поставщик и потребитель вместе платят за эту же перевозку сумму $\tilde{c}_{ij} = (\alpha_i + \beta_j)$ условных единиц. Тогда с точки зрения вносимых за перевозку груза платежей оптимальным будет такой план перевозок, при котором пункты отправления и назначения Ai и Bj не переплачивают «перевозчику» ничего сверх объективной стоимости перевозок, то есть выполняется условие $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$.

## 4. Решение транспортной задачи с неправильным балансом

Балансовое условие нарушено. Нарушение возможно в двух направлениях:

1. Сумма запасов в пунктах отправления превышает сумму поданных заявок

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \, .$$

2. Сумма поданных заявок превышает наличные запасы

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \, .$$

В первом случае говорят о ТЗ **с избытком запасов**, а во втором – ТЗ с **избытком заявок**.



Искусственным приемом эти задачи сводятся к задаче с правильным балансом. Для этого вводится **фиктивный пункт отправления** или **фиктивный пункт назначения**, которому приписывается фиктивный запас или заявка, равные разности

$$a_f = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{или}$$

$$b_f = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Стоимости отправления из фиктивного пункта отправления в любой пункт назначения равны нулю. Аналогично для задачи с избытком запасов – стоимости перевозок из всех пунктов отправления в фиктивный пункт назначения равны нулю.

**13. В чем состоит принцип оптимальности Беллмана? Запишите функциональное соотношение метода динамического программирования.**

Сформулированный Р.Беллманом принцип оптимальности гласит: ***отрезок оптимального процесса от любой его точки до конца процесса сам является оптимальным процессом с началом в данной точке.***[1]

Принцип оптимальности легко доказывается от противного.

[1] Согласно книге Р.Беллмана «Динамическое программирование», Изд-во Иностранная литература, М., 1960, принцип оптимальности формулируется следующим образом: «Оптимальное поведение обладает тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения» (стр. 105).



## Принцип оптимальности Беллмана

**Элементарный подход.** При помощи соотношений (2) состояние системы в каждый последующий момент времени выражается через ее состояние и управление в предыдущий момент времени. Применяя это соотношение многократно, можно выразить состояния системы во все моменты времени только через начальное состояние $x(0)$ и управления в предшествующие моменты. В результате получим из (4)

$$J = f^0(x(0), u(0)) + f^0(f(x(0), u(0)), u(1)) + \ldots = \Phi(x(0), u(0), u(1), \ldots, u(T-1)).$$

Здесь $\Phi$ - некоторая громоздкая, но, вообще говоря, известная функция своих аргументов. В результате такого подхода поставленная задача оптимального управления сводится к задаче минимизации функции $\Phi$ по переменным $u(0), u(1), \ldots, u(T-1)$, то есть всего $T \cdot m$ аргументов. При больших значениях параметра $T$ решение задачи представляет затруднение даже для мощных современных компьютеров. Дополнительное осложнение вызвано тем, что переменные $u(t)$ должны удовлетворять ограничениям (1).

Принципиально иной подход к поставленной проблеме дает метод динамического программирования.

$$S(t,x(t)) = \min_{u(t)\subseteq U}[f^0(x(t),u(t)) + S(t+1,x(t+1))], \qquad (6)$$

оно является **основным функциональным соотношением метода динамического программирования.**

**ТЕОРИЯ**

Операцию минимизации критерия качества $\boldsymbol{J_t}$ по $\boldsymbol{u}$ будем проводить, согласно **принципу сечений**. Зафиксируем $\boldsymbol{u(t)}$ и будем минимизировать $\boldsymbol{J_{t+1}}$ по $\boldsymbol{u(k)}$ для $\boldsymbol{k>t}$. Результат минимизации будет функцией зафиксированного параметра, то есть $\boldsymbol{u(t)}$. Итак,

$$\min_{u\subseteq U} J_t = \min_{u(t)\subseteq U_t}\ \min_{\substack{u(k)\subseteq U_k(u(t)),\\ k=t+1,\dots,T-1}} J_t = \min_{u(t)\subseteq U_t}\ \min_{\substack{u(k)\subseteq U_k(u(t)),\\ k=t+1,\dots,T-1}} [f^0(x(t),u(t)) + J_{t+1}(x(t+1),u(t+1))].$$

Здесь множество допустимых управлений $U_k$ $(u(t))$ тоже зависит от зафиксированного управления $\boldsymbol{u(t)}$**.**

Сумма в квадратных скобках – это $\boldsymbol{J_t}$ , то есть выделено первое слагаемое, которое заметим, не зависит от $u(k)$, начиная с $k=t+1,\dots$ Поэтому его можно вынеси из-под знака внутреннего минимума.

Теперь $\boldsymbol{u(t)}$ перестаем считать фиксированным, «отпускаем» и минимизируем по $\boldsymbol{u(t)}$ результат минимизации $\boldsymbol{J_{t+1}}$ по $\boldsymbol{u(k)}$ для $\boldsymbol{k>t}$**:**

$$\min_{u\subseteq U} J_t = \min_{u(t)\subseteq U_t}[f^0(x(t),u(t)) + \min_{\substack{u(k)\subseteq U_k(u(t)),\\ k=t+1,\dots,T-1}} J_{t+1}(x(t+1),u(t+1))]$$

Таким образом, **вклад в критерий качества первого участка процесса равен** $\boldsymbol{f^0(x,u)}$, а **вклад второго участка** можно, выразить через введенную выше функцию $\boldsymbol{S}$ в виде $\boldsymbol{S(t+1,x(t+1))}$**.** Учитывая, что управление на первом участке должно выбираться из условия минимизации критерия $\boldsymbol{J_t}$ при ограничении (1), получим равенство

$$S(t,x(t)) = \min_{u(t)\subseteq U}[f^0(x(t),u(t)) + S(t+1,x(t+1))], \qquad (6)$$

оно является **основным функциональным соотношением метода динамического программирования.**

### 14. Расскажите о назначении и характеристиках программного пакета Optimal Decisions. Какие встроенные функции пакета MathCad позволяют решать задачи линейного программирования?

**Optimal Decisions** – мощный аналитический инструмент для решения задач линейного программирования и пост оптимизационного анализа полученных оптимальных

решений. Гибкая реализация симплексного метода позволяет пользователю не только автоматически получать оптимальные решения, но и просматривать промежуточные симплексные таблицы – путь к оптимальному решению. При необходимости, пользователь может принудительно добавлять переменные в базис.
**Optimal Decisions** позволяет создавать подробные отчеты, содержащие результаты решения задач линейного программирования и задач пост оптимизационного анализа. Отчеты составляются программой автоматически в формате HTML. Информация из отчета легко может быть скопирована во внешние приложения (Microsoft Word, Microsoft Excel, Open Office и пр.).
Основные характеристики программы Optimal Decisions:

- максимальное количество переменных: 5000;
- максимальное количество ограничений: 10000;
- интеграция с продуктами компании Microsoft: Excel, Word;
- удобная графическая пользовательская среда;
- интуитивно понятное меню; наличие большого количества подсказок для пользователя;
- 34 генерация большого количества отчетов в формате HTML

Основные аналитические возможности Optimal Decisions представляют собой систему взаимосвязанных программных модулей:

- модуль решения задач линейного программирования, которое осуществляется путем использования прямого симплексного метода;
- система модулей пост оптимизационного анализа, которая состоит из: о модуля оценки влияния свободных членов;
- о модуля оценки влияния ЦФ; о модуля оценки влияния свободных членов и ЦФ;
- о модуля оценки влияния изменения столбца (строки) матрицы А;
- о модуля оценки влияния изменения двух столбцов (строк) матрицы А;
- о модуля оценки влияния изменения столбца и строки матрицы А;
- о модуля оценки влияния изменения столбца (строки) матрицы А и ЦФ (свободных членов);

Цель методов пост оптимизационного анализа – дать представление о том, как будет изменяться оптимальное решение задачи (например, выпуск продукции), от изменения запасов материалов на складах или изменения цен при том, что состав выпускаемой номенклатуры меняться не будет.

**MathCad:**
Определяют оптимальное решение задачи с помощью встроенной функции Maximize (в случае поиска максимума функции) или Minimize (в случае поиска минимума функции).

### 15. Какое условие оптимальности дает метод динамического программирования: необходимое, достаточное или необходимое и достаточное?

**Теорема В.Ф.Кротова (достаточные условия оптимальности).**

Пусть существует функция $\varphi(t,x) \subseteq \Phi$ (функция Кротова) и элемент множества допустимых $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{u}) \subseteq D$, удовлетворяющие условиям

1. $R(t,\bar{x},\bar{u}) = \max\limits_{(x,u)\subseteq D} R(t,x,u)$,

2. $G(\bar{x}(T)) = \min\limits_{x(T)\subseteq X(T)} G(x(T))$,

тогда элемент $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{u})$ минимизирует функционал $J$ на $D$.

Конструкции $R(t,x,u)$ и $G(x(T))$, которые фигурируют в формулировке теоремы, имеют вид

$$R(t,x,u) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} \cdot f(t,x,u) + \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} - f^0(t,x,u)$$
$$G(T,x(T)) = F(x(T)) + \varphi(T,x(T))$$

В выборе функции Кротова имеется определенный произвол, воспользуемся им и зададим функцию $\varphi(t,x) \subseteq \Phi$ следующим образом.

Построим функцию $P(t,x) \equiv \max\limits_{u\in U(t,x)} R(t,x,u)$ и потребуем, чтобы функция ***P(t,x)*** не зависела от ***x***, то есть

$$P(t,x) = \max_{u\in U(t,x)} [\varphi_x f^0(t,x,u) - f^0(t,x,u) + \varphi_t] = c(t), \qquad (1)$$

а функция конечного состояния $G(T,x(T))$ при $t=T$ не зависела от $x$:

$$F(x(T)) + \varphi(T,x(T)) = const \qquad (2)$$

Иначе $\boldsymbol{H(t,x,\varphi_x)+\varphi_t=c(t)}$, где $c(t)$ – произвольная кусочно-непрерывная функция, $\boldsymbol{H(t,x,\varphi_x)}$ - **функция Гамильтона на оптимальном управлении, с сопряженной функцией** $\boldsymbol{\psi = \varphi_x}$.

Очевидно, $R(t,x,u) \le c(t)$, то есть $c(t) = \max\limits_{(x,u)\in D} R(t,x,u)$.

Уравнение (1) с точностью до произвольной функции ***c(t)*** и знака $\boldsymbol{\varphi}$ совпадает с уравнением Беллмана. Из теоремы Кротова следует, что дифференциальное уравнение в частных производных Беллмана совместно с краевым условием (2) есть достаточное условие абсолютного минимума функционала в рассматриваемой задаче.

**16. Укажите прикладные задачи, которые решаются методом динамического программирования**

Оптимальный набор высоты и скорости летательным аппаратом, оптимальное функционирование животноводческой фермы, оптимальное распределение капиталовложений.

**17. В чем состоит проблема рационального управления запасами? Сформулируйте основные стратегии управления запасами. Какая стратегия управления запасами считается оптимальной?**

В задаче управления запасами необходимо найти рациональное количество товарно-материального запаса, учитывая, что потери возникают как из-за неудовлетворенного спроса, так и из-за того, что продукт хранится на складе. Если запас мал, недостаточен, возможно, нарушение ритмичности производства, рост себестоимости продукции, срыв сроков выполнения работ по договорам, потеря прибыли, которая вследствие нерационального управления запасами, может быть значительной. 79 Ситуация, когда запас чрезмерно велик, также нежелательна – происходит "замораживание" оборотных средств организации. В результате те деньги, которые могли бы "работать", приносить доход покоятся на складах в виде запасов сырья, материалов, комплектующих. Определяющее значение при построении системы управления запасами имеет характер потребности в хранимом продукте.

**Зависимый спрос** возникает, когда в производстве конечного продукта используются подузлы и комплектующие. Спрос на подузлы и комплектующие определяется объемом производства готовых изделий. Классическим примером здесь является, например, потребность в колесах для выпускаемых автомобилей. Если для каждой машины требуется пять колес, то количество колес, требующихся для производства партии автомобилей, является простой функцией от объема этой партии. Проблемы, которые здесь возникают, решаются с помощью логистики.
Предметы с **независимым спросом -** это, чаще всего, готовые изделия, конечная продукция. В этом случае, как правило, невозможно точно определить потребность в товаре на какой-либо период времени, вследствие чего значимым в управлении запасами становится прогнозирование потребностей, в то время как для зависимого спроса потребность в запасах определяется, исходя из производственного плана. Далее будем рассматривать модели, применяемые для анализа ситуаций с независимым спросом. В случае зависимого спроса применяют логистические концепции управления движением материальных ценностей, которые изучаются в рамках дисциплин логистика и производственный менеджмент.

Проблема управления запасами возникает при рассмотрении разнообразных экономических объектов:
1) При анализе розничной торговли, рассматриваются запасы некоторого продукта в магазине, спрос считается случайной величиной с заданным распределением. Запас пополняется за счет доставки товара с оптовой базы по заявке магазина, причем время доставки может быть фиксированным или же является случайной величиной. Перед управляющим встает вопрос: когда подавать заявку на пополнение запаса, и какое количество товара требовать в заявке?
2)Управлять запасами необходимо и на производственных объектах, где нужно определять рациональный уровень запасов сырья, инструментов и т.п. Управление запасами заключается в установлении моментов и объемов заказов на их восполнение.

Совокупность правил, по которым принимаются такие решения, называется стратегией (системой) управления запасами.

Любая **стратегия** регулирования запасов призвана отвечать на два основных вопроса: когда заказывать очередную партию продукции, и сколько товара заказать? Выделяют **две основные стратегии** регулирования запасов:
1) система с фиксированным размером заказа;
2) система с фиксированной периодичностью заказа.
Система с фиксированным размером заказа предполагает, что размер поступающих партий - величина постоянная, а очередные поставки осуществляются через разные интервалы времени. Заказ на поставку партии делается при уменьшении размера запаса до заранее установленного критического уровня, называемого "точкой заказа" (в зарубежной литературе 81 используется аббревиатура ROP - Reorder Point). Таким образом, интервалы между поставками зависят от интенсивности потребления продукта.
Система с фиксированной периодичностью заказа предполагает, что продукция заказывается через равные промежутки времени, а размер запаса регулируется за счет изменения объема партии, который принимается равным разности между фиксированным максимальным уровнем, до которого производится пополнение запаса, и фактическим его размером в момент заказа.

**Оптимальной стратегией считается та, которая обеспечивает минимум затрат по доведению продукции до потребителей. Нахождение оптимальных стратегий составляет предмет теории оптимального управления запасами.**

### 18. В чем состоит отличие программного управления от синтеза оптимального управления? Управление какого вида определяется с помощью метода динамического программирования?

В отличие от программы, синтез оптимального управления оказывается функцией текущего момента времени t и текущего состояния x(t) и поэтому позволяет найти закон оптимального управления с обратной связью u(t,x). Синтез u(t,x) реализуется регулятором с идеальной обратной связью.

**ТЕОРИЯ**

В теории автоматического регулирования рассматриваются две постановки задачи, связанные с отысканием оптимальных управляющих воздействий: первая задача – определение оптимального управления в форме программы, вторая – в форме синтеза.
При управлении по заданной программе u(t) решается задача, как из заданного в момент t=t0 начального состояния x0 достичь абсциссы t1, при наименьшем значении критерия качества. В соответствии с терминологией теории автоматического регулирования эта задача связана с управлением по разомкнутому контуру, поскольку информация о реальном текущем состоянии динамической системы x(t) не используется и никак не влияет на формирование управляющего воздействия. Схема управления по разомкнутому контуру показана на рис. 4.

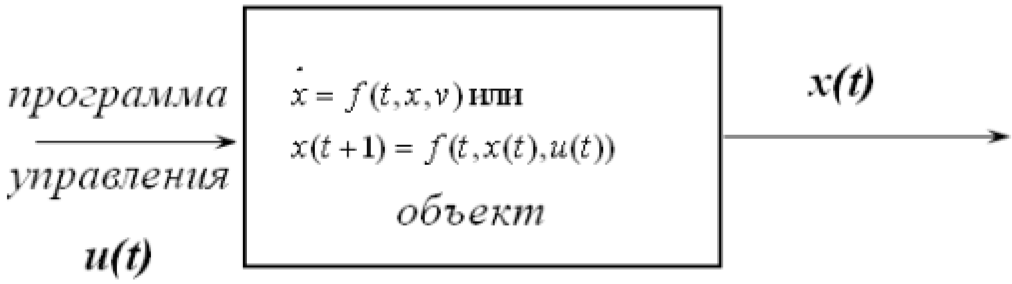
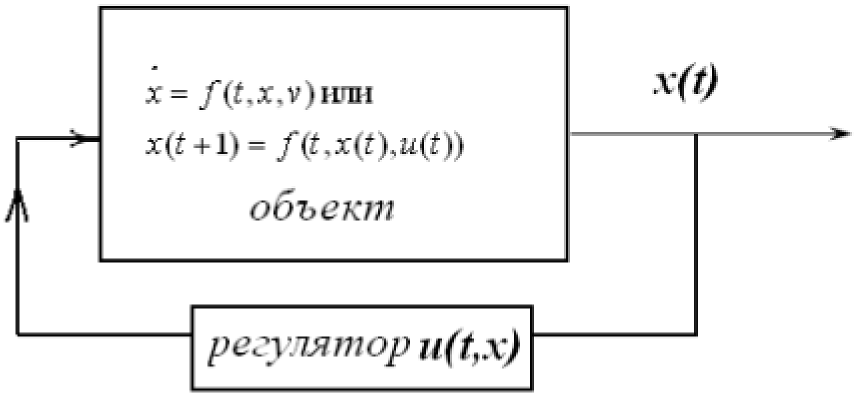



*Рис. 4. Схема управления объектом по разомкнутому контуру.*

В случае синтеза оптимального управления решается более общая задача – как из любого состояния (t, x) достичь абсциссы t1 при наименьшем значении функционала качества. В отличие от программы, синтез оптимального управления оказывается функцией текущего момента времени t и текущего состояния x(t) и поэтому позволяет найти закон оптимального управления с обратной связью u(t,x). Синтез u(t,x) реализуется регулятором с идеальной обратной связью.




В ходе выполнения **попятной процедуры метода динамического программирования** определяется оптимальное управление u(t,x), оно отнесено к моменту t при условии, что система находится в состоянии x. Таким образом, 103 результатом попятной процедуры является синтез управления. Схема управления объектом по замкнутому контуру показана на рис. 5

.

**19. В чем состоят особенности задач, для решения которых предназначена теория игр? Дайте определение стратегии игрока. Объясните понятие «гарантированный выигрыш» игрока?**

Необходимость анализировать подобные ситуации вызвала к жизни специальный математический аппарат.
Теория игр – раздел исследования операций, который изучает математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях, то есть в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах.

Конфликтные ситуации – ситуации, в которых сталкиваются две (или более) конфликтующие стороны, преследующие различные цели, причем результат каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник.
Задача теории конфликтных ситуаций – выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников конфликта. 2.1.Основные понятия теории игр

Основным в Теории игр является понятие игры, являющееся формализованным представлением о конфликте. Точное описание конфликта в виде игры состоит в указании того, кто и как участвует в конфликте, каковы возможные исходы конфликта, а также кто и в какой форме заинтересован в этих исходах. Стороны, участвующие в конфликте, называются коалициями действия; доступные для них действия − стратегиями; возможные исходы конфликта − ситуациями (обычно каждая ситуация понимается как результат выбора каждой из коалиций некоторой своей стратегии); стороны, заинтересованные в исходах конфликта − коалициями интересов; их интересы описываются предпочтениями тех или иных ситуаций (эти предпочтения часто выражаются численными выигрышами).

Человечество издавна пользуется моделями конфликтных ситуаций, которые являются играми в буквальном смысле слова, это, прежде всего, так называемые салонные игры – шашки, шахматы, домино, игра го, карточные игры. Из практики таких игр заимствованы основные понятия и терминология, применяемые при анализе других конфликтных ситуаций. Сама формализованная модель конфликтной ситуации получила название игры, стороны, участвующие в конфликте, именуют игроками, результат столкновения – выигрыш одной из сторон (проигрыш другой стороны)

Основное понятие теории игр – понятие **стратегии**. Стратегией игрока называется совокупность правил, однозначно определяющих поведение (выбор) при каждом личном ходе данного игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. Исход игры не изменится, если решения (о личных ходах) будут приниматься игроком не в процессе самой игры, а заранее. Для этого игрок должен заблаговременно составить перечень всех возможных в ходе игры ситуаций и предусмотреть свое решение для каждой из них, тогда будет выбрана определенная стратегия. После этого игрок может не участвовать в игре, а заменить свое участие списком правил, которые вместо него будет применять незаинтересованное лицо. Чтобы понятие стратегии имело смысл необходимо наличие в игре личных ходов. В играх, состоящих из случайных ходов, понятие стратегии отсутствует

Величина - **гарантированный выигрыш игрока** - называется нижней ценой игры. Стратегия, обеспечивающая получение выигрыша, называется максиминной. Аналогично определяется наилучшая стратегия второго **игрока**.

*Первый игрок*: Выбирая стратегию $A_i$, первому игроку всегда следует рассчитывать на то, что противник ответит на нее той из стратегий $B_j$, для которой выигрыш $a_{ij}$ первого игрока минимален. Определим минимальное из всех $a_{ij}$ в $i$-й строке, обозначим его $\alpha_i$: $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, $i=1,\ldots m$.

Числа $\alpha_i$ поместим справа от платежной матрицы, в дополнительном столбце.

Выбирая какую-либо стратегию $A_i$, первый игрок должен рассчитывать на то, что в результате разумных действий противника, он не выиграет больше, чем $\alpha_i$. Действуя наиболее осторожно и рассчитывая на разумного противника (то есть, избегая риска), первый игрок должен остановиться на той стратегии $A_i$, для которой число $\alpha_i$ является максимальным. Обозначим это максимальное число $\alpha$: $\alpha = \max_i \alpha_i$ или $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$.

Величина $\alpha$ называется ***нижней ценой*** игры, иначе максиминным выигрышем или просто ***максимином***.

Число $\alpha$ лежит в определенной строке матрицы, та стратегия первого игрока, которая соответствует этой строке, называется ***максиминной стратегией***. Если первый игрок будет придерживаться максиминной стратегии, то ему при любом поведении противника ***гарантирован выигрыш, во всяком случае, не меньший*** $\alpha$. Поэтому величина $\alpha$ и называется нижней ценой игры. Это тот ***гарантированный минимум***, который первый игрок может себе обеспечить, придерживаясь наиболее осторожной (перестраховочной стратегии).

### 20. Опишите однопродуктовую статическую модель управления запасами. Запишите формулу Уилсона, объясните смысл переменных этой формулы.

Статическая однопродуктовая модель управления запасами простейшего типа характеризуется тремя свойствами: - постоянным во времени спросом; - мгновенным пополнением запаса; - отсутствием дефицита. В этом случае модель с фиксированным размером заказа и модель с фиксированной периодичностью ведут себя совершенно одинаково, поскольку интенсивность спроса и продолжительность заготовительного периода не изменяются.
На практике такой модели могут соответствовать следующие ситуации:

- использование осветительных ламп в здании;
- использование крупной фирмой канцелярских товаров:
- бумаги, блокнотов, карандашей и т.д., потребление основных продуктов питания.

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_0}{b}} \qquad (8)$$

Вторая производная в точке $q^*$ строго положительна, следовательно, найден минимум функции.

Соотношение (8) носит имя **Уилсона**. Формула Уилсона занимает центральное место во всей теории управления запасами: согласно (8) оптимальная стратегия модели предусматривает заказ $q^*$ единиц продукта через каждые $l^* = q^*/\lambda$ единиц времени.

Стратегия размещения заказов в приведенной модели должна определять также "точку заказа". Можно показать, что "точка заказа" для данного случая определяется как

$$S^* = \lambda \cdot \theta \qquad (9)$$

При использовании формул (8) и (9) необходимо контролировать отнесение интенсивности спроса $\lambda$ и стоимости хранения $b$ к одному и тому же промежутку времени, например, к году, месяцу или дню.

## 21. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования седловой точки матричной игры. Опишите свойства оптимальных стратегий.

**Теорема Неймана (основная теорема теории матричных игр).**

Для того, чтобы в игре $\Gamma(A,B,K)$ существовало положение равновесия (седловая точка), необходимо и достаточно, чтобы существовали минимакс $\min_j \max_i a_{ij}$ и максимин $\max_i \min_j a_{ij}$ и выполнялось равенство

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \beta = v}.$$

5. Свойства оптимальных стратегий

Оптимальные стратегии имеют ряд свойств, которые используются в различных методах их нахождения. Так как функция выигрыша $H(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i y_j$ линейна по каждому из своих аргументов при фиксированном значении другого аргумента, то из условия (3.4) следует

**Теорема 3.3 (критерий оптимальности стратегий)**. *Пусть v — цена игры с платежной матрицей A. Тогда*

*а) вектор $x^*=(x_1^*,\dots,x_m^*)$ будет оптимальной стратегией игрока 1 в том и только в том случае, если для любой чистой стратегии $B_j$ игрока 2 выполняется неравенство*

$H(x^*,B_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*\ge v,\ j=\overline{1,n}$ ; (3.5)

*б) вектор $y^*=(y_1^*,\dots,y_n^*)$ будет оптимальной стратегией игрока 2 в том и только в том случае, если для любой чистой стратегии $A_i$ игрока 1 выполняется неравенство*

$H(A_i,y^*)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\le v,\ i=\overline{1,m}$ . (3.6)

Таким образом, при проверке оптимальности смешанной стратегии игрока можно ограничиться чистыми стратегиями его противника.

В оптимальной смешанной стратегии обычно используется лишь часть чистых стратегий игрока. Будем называть чистую стратегию $A_i$ $(B_j)$ игрока 1 (игрока 2) *активной*, если она входит в его оптимальную стратегию с положительной вероятностью (частотой), т.е. $x_i^*>0\,(y_j^*>0)$ .

Свойства активных стратегий описывает следующая теорема.

**Теорема 3.4.** *Пусть { , , v} — решение матричной игры. Тогда*

*а) если* $x_i^*>0$, то $H(A_i,y^*)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j^*=v$;

*б) если* $y_j^*>0$, то $H(x^*,B_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*=v$ .

Иными словами, если чистая стратегия игрока является активной, то его выигрыш в ситуации, образованной этой чистой стратегией и оптимальной стратегией другого игрока, равен цене игры.

## 22. Дайте определение нижней, верхней цены игры, цены игры.

**Нижняя цена игры – гарантированный выигрыш игрока при любой стратегии противника** (это тот минимум, который игрок может себе обеспечить, действуя наиболее осторожно). Очевидно, аналогичные рассуждения можно провести и за противника.

**Верхняя цена игры - гарантированный проигрыш игрока при любой стратегии противника** (это тот минимальный проигрыш, который может себе обеспечить игрок, действуя наиболее осторожно).

**Цена игры** — средний выигрыш стороны. А (проигрыш стороны В) при многократном повторении **игры** Выигрыш, соответствующий оптимальному решению.

## 23. В чем отличие решения в чистых стратегиях от решения в смешанных стратегиях?

Модель **смешанные стратегий отличается** от модели **чистых стратегий**. В случае **смешанных стратегий** тактика поведения игроков будет более гибкой, т.к. игроки знают заранее какую **чистую стратегию** они применят.

Если в матричной игре Г существует ситуация равновесия, то минимакс равен максимину, причем каждый из игроков может сообщить свою оптимальную стратегию противнику, и от этого ни один из игроков не может получить дополнительную выгоду. Когда нижняя и верхняя цены игры различны, ситуации равновесия и решения в чистых стратегиях нет. Иначе говоря, чистые минимаксные стратегии не являются оптимальными. Игрокам становится невыгодно их придерживаться. Игра имеет решение в смешанных стратегиях. Смешанные стратегии представляют собой модель изменчивой, гибкой тактики, при которой противник не знает, и не может узнать заранее, с какой обстановкой ему придется встретиться. Обоим игрокам разумно действовать случайно, что обеспечивает наибольшую скрытность выбора стратегии. Результат случайного выбора не может стать известен противнику, поскольку до реализации случайного механизма не известен самому игроку.

### 24. Сформулируйте лемму о масштабе. Изменится ли решение матричной игры в результате применения леммы о масштабе?

- 6 (**Лемма о масштабе**).
- Если $\Gamma_A$ – игра с матрицей $A = (a_{ij})_{m\times n}$, а $\Gamma_{A'}$ – игра с матрицей $A' = (a'_{ij})_{m\times n}$, где $a'_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta$, где $\alpha,\beta$=const, $\alpha$>0, то множества оптимальных стратегий игроков в играх $\Gamma_A$ и $\Gamma_{A'}$ совпадают, а $v_{A'} = \alpha v_A + \beta$ .
- Иначе говоря, две игры, отличающиеся лишь началом отсчета выигрышей и масштабом их измерения, стратегически эквивалентны.

Предположим, что цена игры положительна ( V > 0). Для того что бы выполнялось условие V > 0, достаточно, чтобы все элементы матрицы ( aij ), были неотрицательными. Этого всегда можно добиться, прибавляя ко всем элементам матрицы ( aij ) одну и туже достаточно большую положительную величину M; при этом цена игры увеличится на M, а решение не изменится. В этом состоит **лемма о масштабе**: линейное преобразование элементов платежной матрицы **не изменяет решения игры**, однако цена игры подвергается такому же линейному преобразованию. Поэтому далее считаем цену игры положительной ( V > 0).

### 25. Какую роль играет лемма о масштабе в процедуре сведения игровой задачи к задачам линейного программирования?

Эта лемма имеет большое практическое значение, так как большинство алгоритмов для решения матричных игр основано на предположении, что матрица игры положительна. В случае, когда матрица имеет неположительные элементы, следует прибавить ко всем элементам матрицы число наибольшее по абсолютной величине, из всех отрицательных элементов.

Существуют игры, в которых ситуации равновесия в чистых стратегиях не существует. Тогда игрокам бывает не выгодно придерживаться своих минимаксных и максиминных стратегий, так как они могут получить больший выигрыш, отклонившись от них. В этом случае игрокам разумно действовать случайно, т. е. выбирать стратегии произвольно и не сообщать о выборе сопернику. Такие стратегии игроков будем называть смешанными**.**

### 26. В чем состоит идея метода итераций решения матричных игр?

Этот метод решения матричной игры отражает, в некоторой степени, реальную ситуацию накопления опыта по поиску игроками хороших стратегий в результате многократного повторения конфликтных ситуаций. На каждом шаге игрок выбирает наиболее выгодную для себя стратегию, опираясь на предыдущий выбор противника. То есть игрок на собственном опыте прощупывает способ поведения другого игрока и старается отвечать на него наиболее выгодным для себя образом.

Таким образом, происходит практическое «обучение» игроков в ходе самой игры.

### 27. В чем состоит идея метода итераций решения матричных игр?

Этот метод решения матричной игры отражает, в некоторой степени, реальную ситуацию накопления опыта по поиску игроками хороших стратегий в результате многократного повторения конфликтных ситуаций. На каждом шаге игрок выбирает наиболее выгодную для себя стратегию, опираясь на предыдущий выбор противника. То есть игрок на собственном опыте прощупывает способ поведения другого игрока и старается отвечать на него наиболее выгодным для себя образом.

Таким образом, происходит практическое «обучение» игроков в ходе самой игры.

### 28. В чем особенность биматричной игры? Дайте определение равновесия Нэша.

В конечной бескоалиционной игре двух игроков каждый из них делает один ход: выбирает одну стратегию из имеющегося у него конечного числа стратегий, и после этого получает свой выигрыш, согласно определённым для каждого из них матрицам выигрышей. Другими словами, бескоалиционная игра полностью определяется двумя матрицами выигрышей для двух игроков. Поэтому такие игры называются биматричными.

**Определение. Ситуацией равновесия** по Нэшу биматричной игры называется пара ($p^*,q^*$) смешанных стратегий игроков 1 и 2, которые удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q^*_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p^*_i q^*_j \quad (i=\overline{1,m}) \quad \text{или} \quad Aq^T \le pAq^T \quad (2) \\ \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p^*_i \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p^*_i q^*_j \quad (j=\overline{1,n}) \quad \text{или} \quad pB \le pBq^T \quad (3) \end{cases}$$

Соотношения (2)-(3) характеризуют ситуацию, когда игроки отошли от своих равновесных смешанных стратегий, и это не выгодно: **отступив от равновесной ситуации в одностороннем порядке – только проиграешь !!!**

Суммы в левых частях (2)-(3) определяют средние выигрыши первого и второго игроков соответственно при чистой стратегии каждого из них: $A_i$ – чистая стратегия первого игрока, $B_j$ – чистая стратегия второго игрока[3]. Для определения ситуаций равновесия необходимо решить систему неравенств (2) и (3) относительно неизвестных $p = (p_1, ..., p_m)$ и $q = (q_1, ..., q_n)$ при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad p_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,m}), \quad q_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}).$$

**Теорема (Нэша).**

**Каждая конечная множественная игра имеет, по крайней мере, одну ситуацию равновесия** (конечная со многими игроками)[4], возможно, в смешанных стратегиях.

### 29. Как определить решение в чистых стратегиях для биматричной игры?

В конечной парной игре с нулевой суммой поведение каждого игрока направлено на максимизацию своего выигрыша с учётом максимального противодействия противника. Поэтому подходящая стратегия игрока 1 - это оптимальная смешанная стратегия игрока 1 в матричной игре с матрицей А. Подходящая стратегия игрока 2 - оптимальная смешанная стратегия игрока 2 в матричной игре с матрицей В, если в ней рассматривать решение с позиций максимизации выигрыша игрока 2, т.е. решать её, как для игрока 1 только с матрицей $B^T$.

## Вычисление оптимальных стратегий в биматричных играх

*Описание биматричной игры.* Все игры которые были рассмотрены, относились к классу *игр с нулевой суммой.* Однако ряд конфликтных ситуаций, складывающихся в ходе действий, характерны тем, что выигрыш одной стороны не равен в точности проигрышу другой. *Теоретико-игровыми моделями* подобных ситуаций являются некооперативные игры с ненулевой суммой. Такие игры называются *биматричными,* потому что задание каждой такой игры сводится к заданию двух матриц $A$ и $B$ одинаковой формы: $A = ||a_{ij}||; B = ||b_{ij}||\text{при} i = 1, ...m; j = 1, ..., n$.

Процесс *биматричной игры* состоит в независимом выборе игроком I числа $i$ а игроком II — числа $j$, после чего игрок I получает выигрыш $a_{ij}$, а игрок II — выигрыш $b_{ij}$.

Номера строк матриц $A$ и $B$ назовем *чистыми стратегиями игрока* I, а номера столбцов этих матриц – *чистыми стратегиями игрока* II. Тогда пары вида $(i, j)$ будут являться ситуациями в чистых стратегиях *биматричной игры,* а числа $a_{ij}$ и $b_{ij}$ — выигрышами I и II игроков в ситуации $(i, j)$. Соответственно, распределение вероятностей применения чистых стратегий игрока I — $x = (x_1, ..., x_m)$ и игрока II — $y = (y_1, ..., y_n)$ будем называть *смешанными стратегиями.* Тогда пары вида $(x, y)$ представляют ситуации *биматричной игры* в *смешанных стратегиях,* а числа $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ и $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j$ являются математическими ожиданиями выигрыша I и II игроков.

*Ситуацией равновесия биматричной игры в смешанных стратегиях* будем называть такую пару $(x^*, y^*)$, при которой:

$$\begin{aligned} \nu_I = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^*y_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j^*; \\ \nu_{II} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i^*y_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j^* \end{aligned} \quad (8.2)$$

,

где $\nu_I$ — математическое ожидание выигрыша игрока I;

$\nu_{II}$ — математическое ожидание выигрыша игрока II;

$x^*$ — оптимальная смешанная *стратегия игрока* I;

$y^*$ — оптимальная смешанная *стратегия игрока* II.

### 30. В чем состоит особенность бесконечных игр с непрерывными функциями выигрышей?

Бесконечные антагонистические игры являются обобщением матричных игр, в которых один или оба игрока имеют бесконечное число возможных стратегий. При этом будут рассматриваться бесконечные игры, в которых каждый из игроков, как и в матричных играх, делает по одному ходу, и затем определяется величина выигрыша победившего игрока и проигрыша побежденного.

Две фирмы $i=1,2$ производят продукт одного наименования,

$q_1$, $q_2$ – объемы производства этого продукта каждой фирмой,

$Q$ − объем рыночного спроса,

$P$ – цена единицы продукта.

Функция спроса представляет собой убывающую функцию от цены продукта. Цена задана как цена равновесия отраслевого рынка (полагаем, что предложение равняется величине спроса на данное экономическое благо при одной и той же цене).

Обратная функция спроса определяет зависимость цены от объема производства:

$$P\ q_1, q_2\ = \begin{cases} Q-(q_1+q_2), & q_1+q_2<Q \\ 0, & q_1+q_2 \ge Q \end{cases}$$

Затраты на производство имеют переменный характер и зависят от объема производства, функции затрат – линейные, $C_i(q_i)=cq_i, c-const$. Фирмы выбирают $q_i$ одновременно и независимо. Требуется определить объемы производства $q_1$, $q_2$, максимизирующие прибыль каждой фирмы.

Модель (дуополии) Курно является примером бесконечной игры двух игроков с ненулевой суммой. Игроки – это конкурирующие фирмы, множество стратегий каждого игрока – это объемы производства. Иначе говоря, каждая стратегия каждой фирмы определяется ее уровнем объема производства, величины $q_i$ могут принимать любое из бесконечного набора значений в диапазоне $[0, Q]$.

**31. Сформулируйте критерии принятия решений в условиях неопределенности. Отличаются ли решения, принимаемые по матрице выигрышей и матрице рисков?**

## 1.Принятие управленческих решений в условиях неопределенности как антагонистическая «игра с природой».



Часто неопределенность, сопровождающая операцию, связана не с сознательным противодействием противника, а просто с нашей недостаточной осведомленностью об условиях, в которых будет проводиться операция. В этом случае условия выполнения операции зависят не от противодействия противника, а от объективной действительности, которую принято называть ***природой***.

***Природа*** в теории игр рассматривается как некая незаинтересованная инстанция, поведение которой неизвестно, но не содержит элемента сознательного противодействия нашим планам, (противник настроен нейтрально, выигрыш его не интересует).

**Пример игры с природой.** Игра с природой 4×3 с четырьмя стратегиями

### 1.1.Вероятностное поведение природы известно

Оптимальные стратегии игрока находятся по двум критериям:

1)*Правило максимальной вероятности***.** Известно:

$$p_1 = 0{,}5$$
$$p_2 = 0{,}3$$
$$p_3 = 0{,}2$$
$$p_1 > p_2 > p_3$$



По правилу максимальной вероятности оптимальной стратегией первого игрока является $A_2$.

2) *Правило максимизации ожидаемого выигрыша* (выбор по максимальному математическому ожиданию). Оптимальной является стратегия, для которой математическое ожидание выигрыша, с учетом вероятностей всех возможных условий, является максимальным.

$$m_1 = 0{,}5 \cdot 2 + 0{,}3 \cdot (-3) + 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}3$$
$$m_2 = 0{,}5 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 5 = 3{,}6$$
$$m_3 = 0{,}5 \cdot (-1) + 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 3 = 1{,}3$$
$$m_4 = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}7$$
$$\Rightarrow m_1 < m_4 < m_3 < m_2$$

По правилу максимизации ожидаемого выигрыша оптимальной является стратегия $A_2$.

## 1.2.Поведение природы не определено

### *1.2.1. Критерий Вальда*

Оцениваем нижнюю цену игры. Согласно этому критерию в качестве оптимальной выбирается та стратегия *A*, при которой минимальный выигрыш максимален (то есть достигается нижняя цена игры).

| I \ II | **$B_1$** | **$B_2$** | **$B_3$** | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| **$A_1$** | 2 | -3 | 1 | -3 |
| **$A_2$** | 4 | 2 | 5 | 2 |
| **$A_3$** | -1 | 4 | 3 | -1 |
| **$A_4$** | 0 | 1 | 2 | 0 |

$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \max\limits_i \alpha_i = 2$ .   Стратегия $A_2$ оптимальна.

### *1.2.2.Критерий Сэвиджа*

Оцениваем риски:

***Риск*** – потеря выигрыша, которая возникает из-за того, что мы не имеем полную информацию о поведении природы.

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$$

Составляем матрицу рисков ***r***:



| II \ I | **$B_1$** | **$B_2$** | **$B_3$** | $r_i$ |
|---|---|---|---|---|
| **$A_1$** | 4-2=2 | 4-(-3)=7 | 5-1=4 | 7 |
| **$A_2$** | 4-4=0 | 4-2=2 | 5-5=0 | 2 |
| **$A_3$** | 4-(-1)=5 | 4-4=0 | 5-3=2 | 5 |
| **$A_4$** | 4-0=4 | 4-1=3 | 5-2=3 | 4 |

Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации. Минимальные гарантированные потери:

$S = \min\limits_i \max\limits_j r_{ij} = \min r_i = 2$.

Оптимальной является стратегия $A_2$.

### *1.2.3.Критерий Гурвица*

Критерий Гурвица имеет вид

$$H = \max_i \{k \cdot \min_j a_{ij} + (1-k) \cdot \max_j a_{ij}\}$$

где $k$ - коэффициент, выбираемый между нулем и единицей.

Критерий Гурвица можно переписать в виде:

$H = \max_i h_i$, $h_i = k \cdot \min_j a_{ij} + (1-k) \cdot \max_j a_{ij}$.

Полагаем $k$=0,6.

| I \ II | **B₁** | **B₂** | **B₃** | $\max_j a_{ij}$ | $\min_j a_{ij}$ | $h_i = k \cdot \min_j a_{ij} + (1-k) \cdot \max_j a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **$A_1$** | 2 | -3 | 1 | 2 | -3 | $h_1 = 0.6 \cdot (-3) + (1-0.6) \cdot 2 = 1$ |
| **$A_2$** | 4 | 2 | 5 | 5 | 2 | $h_2 = 0.6 \cdot 2 + (1-0.6) \cdot 5 = 3.2$ |
| **$A_3$** | -1 | 4 | 3 | 4 | -1 | $h_3 = 0.6 \cdot (-1) + (1-0.6) \cdot 4 = 1$ |
| **$A_4$** | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | $h_4 = 0.6 \cdot 0 + (1-0.6) \cdot 2 = 0.8$ |

$$H = \max_i h_i = 3.2$$

Оптимальной стратегией является стратегия $A_2$.

**Принцип недостаточного обоснования Лапласа** используется в случае, если можно предположить, что любой из вариантов обстановки не более вероятен, чем другой. Тогда вероятности обстановки можно считать равными и производить выбор решения так же, как и в условиях риска, — по минимуму средневзвешенного показателя риска.

Следовательно, предпочтение следует отдать варианту, который обеспечивает минимум в выражении:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} p_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}; \; i=1,m,$$

где $n$- количество рассматриваемых вариантов обстановки, $p_j$- вероятность появления обстановки $O_j$.

Рассмотрим выбор вариантов в условиях неопределенности с использованием ***принципа недостаточного обоснования Лапласа*** на исходных данных приведенного выше примера.

При учете трех вариантов обстановки ($n = 3$) вероятность каждого варианта составляет 0,33.

Тогда, с учетом приведенных данных о потерях для каждой пары сочетаний решений $P$ и обстановки $O$ (табл. 3) и вероятности каждого варианта обстановки, равной 0,33, средневзвешенный показатель риска для каждого из решений будет составлять:

$R_1 = 0,55 \cdot 0,33 + 0,47 \cdot 0,33 + 0,00 \cdot 0,33 = 0,3366;$ ;

$R_2 = 0,05 \cdot 0,33 + 0,62 \cdot 0,33 + 0,10 \cdot 0,33 = 0,2541;$

$R_3 = 0,45 \cdot 0,33 + 0,00 \cdot 0,33 + 0,3 \cdot 0,33 = 0,2475;$

$R_4 = 0,00 \cdot 0,33 + 0,72 \cdot 0,33 + 0,05 \cdot 0,33 = 0,2541.$

В качестве оптимального следует выбрать вариант решения $P_3$

Как видим, в исходном примере наилучшим с точки зрения принятого критерия (средневзвешенного показателя риска) было бы решение $P_4$.

Таким образом, изменение вероятности наступления вариантов обстановки привело к изменению варианта решения, которому следует отдать предпочтение.

Матрица рисков строится на основе матрицы выигрышей.

Пусть принимается $i$-е решение. Очевидно, если бы было известно, что реальное состояние среды будет $j$-е, то ЛПР принял бы решение, дающее доход $q_j = \max_i q_{ij}$ . Однако, $i$-е решение принимается в условиях неопределенности. Значит, ЛПР рискует получить не $q_j$ , а только $q_{ij}$. Таким образом, существует реальная возможность недополучить доход, и этому неблагоприятному исходу можно сопоставить риск $r_{ij}$, размер которого целесообразно оценить как разность

$$r_{ij} = q_j - q_{ij}. \qquad (2.1)$$

Матрица $R = (r_{ij})$ называется ***матрицей рисков.***

## 32. В каких случаях равновесие Нэша не является Парето-оптимальным решением?

Равновесие Нэша не всегда является наиболее оптимальным для участников. В этом случае говорят, что равновесие не является **Парето-оптимальным**.

**33. Опишите отличительные черты системной динамики Форрестера. Расскажите о моделировании глобальной мировой динамики. Что понимается под концепцией нулевого роста?**

Наиболее показательной моделью, на примере которой можно раскрыть отличительные черты и способы модельного проектирования, является модель Дж. Форрестера. Отличительной чертой методологии Дж. Форрестера является универсализм его подхода, представляющийся идентичным по отношению к различным сферам окружающей действительности: промышленного предприятия (ему посвящена отдельная книга ученого), города (другая книга) и глобальной природной системы (модель мировой динамики иллюстрирует, пожалуй, самая известная его работа). Общность предложенного подхода подтверждается универсальностью и продуктивностью системной методологии как особого направления научной рациональности, характерной чертой которой выступает наглядность представлений об исследуемых процессах, а также лежащих в их основе источниках.
Модели, используемые в системной динамике, являются компьютерными моделями, с помощью которых осуществляется имитация поведения сложных систем. Экспериментирование с моделью позволяет существенно углубить понимание поведения сложных систем и нередко спрогнозировать появление непредвиденных последствий, в том числе катастрофических. Однако реальную пользу моделирование приносит только в тех случаях, когда модель становится средством эффективной, компетентной коммуникации.
—-------------------------------------------------

—----------------------------------------------

Концепция нулевого экономического роста была выдвинута в начале 70-х гг. группой экономистов и социологов, которой руководили Деннис и Доннела Медоуз. Ссылаясь на истощение сырьевых ресурсов, опасность нарушения экономического равновесия, авторы этой концепции пришли к выводу, что экономический рост подошел (или подходит) к определенному пределу, за рамками которого человечеству угрожают серьезные катаклизмы, полное использование природных ресурсов.

Позитивным в концепции нулевого роста является стремление пересмотреть «привычные» представления о неисчерпаемости природных недр. Авторы концепции предупреждают о серьезных последствиях стремительного развития техники, о резком ухудшении среды проживания. По их мнению, реальный экономический рост возможен лишь при отказе «от проедания» природных ресурсов.

Подход к проблеме экономического роста не может быть одинаковым для стран и регионов, обладающих неодинаковыми возможностями, стоящих на различных ступенях индустриального развития. Нулевой рост для стран «третьего мира» означал бы консервацию экономической отсталости.

**Концепция «нулевого экономического роста»** Сторонники «нулевого роста» утверждают, что технический прогресс и экономический рост приводят к целому ряду отрицательных явлений в современной жизни: загрязнению окружающей среды, промышленному шуму, выбросу отравляющих веществ, ухудшению облика городов и т.д. В этой связи сторонники «нулевого роста» считают, что экономический рост должен целенаправленно сдерживаться. Признавая, что экономический рост обеспечивает увеличение объема производства, представители «нулевого роста» делают вывод, что экономический рост не всегда может создать высокое качество жизни.

### 34. Сформулируйте критерий Гермейера.

Критерий Гермейера относительно выигрышей и относительно рисков является критерием крайнего пессимизма с учетом вероятностей состояний природы.

Он предполагает для игрока А наихудшие состояния природы, при которых элемент Гермейера матрицы рисков каждой из чистых стратегий максимален, то есть при которых риск наименее удовлетворителен с учетом вероятностей состояний природы.