

بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضیات تکمیلی

ویرگودارس استعدادهای درخشان

پایه هفتم دوره اول متوسطه

این کتاب، به منظور فراهم کردن مواد آموزشی تكمیلی
مورد نیاز مدارس استعدادهای درخشان، توسط
مرکز ملی پژوهش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
و دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطهٔ نظری
طراحی و تألیف شده است.

شورای راهبری: محمود امانی طهرانی، محمد نستوه، کورش امیری‌نیا، سیده‌طاهره آقامیری،
رضا گلشن مهرجردی، عباسعلی مظفری و ناصر جعفری

نام کتاب: ریاضیات تکمیلی ویژه مدارس استعدادهای درخشان
پایه هفتم دوره اول متوسطه - ۱۰۳/۱

مؤلفان: محمد حسین احمدی، نرگس اخلاقی‌نیا، عبدالرضا زارع شحنه، علی قصاب و
سعید صدری

نظرارت: گروه تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و
متوسطهٔ نظری

ویراستار علمی: عاطفه کشاورزی زرفقندی

ویراستار ادبی: سیدعلی‌اکبر میر جعفری

نظرارت بر چاپ و توزیع: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

طراح گرافیک، طراح جلد و صفحه‌آرا: حامد مشقق آرانی

ناشر:

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پژوهش (شهید موسوی)

تلفن: ۰۹۲۶۰۸۳۰۹۲۶۶، ۰۹۱۶۱۱۶۳۸۸۳، دورنگار: ۰۵۱۵۷۴۷۳۵۹

وب‌سایت: www.chap.sch.ir

چاپخانه: شرکت افست (سهامی عام)

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اول، ۱۳۹۳

حق چاپ محفوظ است.



بنیان‌گذار کبیر جمهوری اسلامی، حضرت امام خمینی (صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ)

ما در شرایط جنگ و محاصره توانسته‌ایم آن همه هنرآفرینی و اختراعات و پیشرفت‌ها داشته باشیم. ان شاء الله در شرایط بهتر، زمینه کافی برای رشد استعداد و تحقیقات را در همه امور فراهم می‌سازیم. مبارزه علمی برای جوانان زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت‌ها و حقیقت‌هاست.

رهبر معظم انقلاب اسلامی، حضرت آیت‌الله خامنه‌ای (سَلَّمَ اللَّهُ عَلَيْهِ)

عدالت به معنای این نیست که ما با همه استعدادها با یک شیوه بروخورد کنیم. نه؛ استعدادها بالآخره متفاوت است. نباید بگذاریم استعدادی ضایع بشود و برای پرورش استعدادها باید تدبیری بیندیشیم. در این تردیدی نیست. اما ملاک باید استعدادها باشد، لاغیر. عدالت این است.

این صفحه خالی است!

به نام خداوند جان آفرین

پیشگفتار

ریاضیات (که در زبان پارسی قدیم «انگارش» خوانده می‌شد) را بیشتر دانش بررسی کمیت‌ها، ساختارها، فضا و دگرگونی تعریف می‌کنند.

دیدگاه دیگری ریاضی را دانشی می‌داند که در آن با استدلال منطقی از اصول و تعریف‌ها به نتایج دقیق و جدیدی می‌رسیم. با اینکه ریاضیات از علوم طبیعی به شمار نمی‌رود ولی ساختارهای ویژه‌ای که ریاضی دانان می‌پژوهند، بیشتر از دانش‌های طبیعی به ویژه فیزیک سرچشمه می‌گیرند و در فضایی جدا از طبیعت و محض‌گونه گسترش پیدا می‌کنند به طوری که علوم طبیعی برای حل مسائل خود به ریاضی باز می‌گردند تا جواب‌هایشان را با آن مقایسه و بررسی کنند.

علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و پزشکی بسیار به ریاضیات تکیه دارد ولی ریاضی دانان گاه به دلایل صرفاً ریاضی (و نه کاربردی) به تعریف و بررسی برخی ساختارها می‌پردازند.^۱

این کتاب که در جهت اجرای بخشی از سند تحول بنیادین آموزش و پرورش و ویژه دانش آموزان مستعد و تیزهوش ایرانی نگاشته شده است، به تعمیق بخش‌هایی از کتاب درسی ریاضی پایه هفتم می‌پردازد. این کتاب حاصل فرایندی مطالعاتی با بیش از پنج سال است؛ با این همه تیزبینی صاحب‌نظران هنگام تدریس در نقد منصفانه این کتاب بسیار ضروری است؛ زیرا بینقضی این کتاب هیچ‌گاه در تصور نبوده است.

فصل‌های کتاب متاخر فصل‌های کتاب درسی ریاضی است و مشخصاً دبیر ریاضی مجرّب درخواهیدیافت که تدریس هر بخش را چه زمانی آغاز کند. با این همه کلید واژه‌های بخش‌های کتاب به صورت فهرست‌وار بدین شرح است.

تمرین‌ها: تمرین‌های این کتاب با پیش‌فرض استعداد بتر و نیاز مخاطبان نگاشته شده است. یک معلم خلاق می‌تواند مخاطبان خود را هنگام تدریس با بخشی از تمرین‌ها به چالش مفهومی بکشاند. تفکر درباره همه تمرین‌ها در سال آموزشی لازم تلقی می‌شود، و این موضوع شاید در تضاد با معرفی کتاب‌های دیگر باشد. خلاقیت خود را با تدریس «این کتاب» به تصویر بکشید.

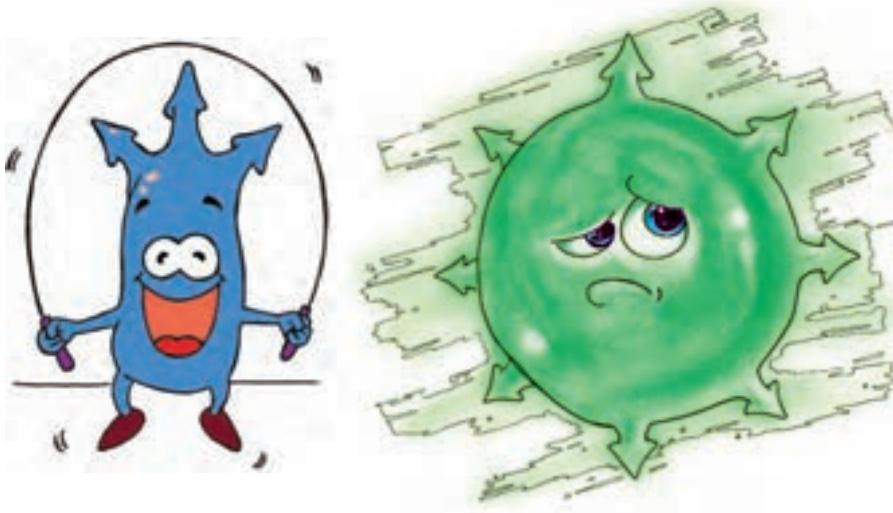
کارگاه بازی: دیر زمانی است که مقوله کارگاه بازی در فرایند تدریس نقش آفرینی می‌کند و

^۱ برگرفته از ویکی‌پدیا، دانشنامه آزاد

کتاب پیش رو نیز متناسب با موضوع، با کارگاه‌های آموزشی غنی شده است. توصیه می‌شود به اندازه یک یا دو جلسه زمان برای اجرای هریک از آنها در نظر بگیرید؛ و مکانی را که می‌تواند فضایی به جز فضای مرسوم کلاسی باشد، به این کار اختصاص دهد.

گفت و گوها: تغییرات فرهنگ آموزشی نیز مد نظر قرار گرفته‌اند. برای تغییر نسل، باید نخست دیدگاه خود را تغییر مناسب داد. برای این منظور، بخشی به نام گفت و گو در این کتاب گشوده شده است، تا عیاری برای سنجش نظام تفکر تدریس معلمان در اختیار قرار داده شود. این گفت و گوها آئینه‌ای است برای نمود ساخت ارزش‌های رو به رشد، تا یک معلم ایستایی و پویایی خود را مشاهده کند.

نماد تمرين‌های ویژه: کنار برخی از مسائل کتاب نماد آمده است. برای حل این مسائل دانش‌آموز باید نهایت دقیق و تمرکز خود را به کار بگیرد تا دچار اشتباه نشود. برخی دیگر از مسائل کتاب با نماد مشخص شده‌اند. این نماد برای اعلام نیاز زمان بیشتری برای تفکر است. معلم باید هنگام حل این مسائل زمان شایسته‌ای برای تفهیم روش حل و توصیف ایده‌ها و راهکارهای آن ارائه دهد؛ تا در طول یک سال آموزشی دانش‌آموزان منفعل، در کنار صدھا مسئله مهارتی، با حل چند مسئله چالش برانگیز هم آشنا شوند.



هنر تدریس، هنر همیاری در کشف کردن است.

مارک ون دورن

فهرست مطالب

۱	فصل صفر- سرآغاز
۲	ترتیب چهار عمل اصلی در محاسبات
۴	کارگاه بازی- مثلث همنگ
۵	فصل ۱- راهبردهای حل مسئله
۶	گفت و گو
۹	مسئله‌ها
۱۹	فصل ۲- عددهای صحیح
۲۰	معرفی عددهای علامت دار
۲۲	جمع و تفریق اعداد صحیح
۲۶	کارگاه بازی- دوز با اعداد صحیح
۲۷	ضرب و تقسیم اعداد صحیح
۲۹	گفت و گو
۳۱	فصل ۳- جبر و معادله
۳۲	الگوهای عددی
۳۳	جانکهدار
۳۴	عبارت جبری
۳۷	مقدار عددی یک عبارت جبری
۳۸	معادله
۳۸	حل معادله
۴۰	تعداد جواب‌های یک معادله
۴۱	روش حل معادله
۴۳	تمرین‌های تکمیلی

۴۷	فصل ۴ - هندسه و استدلال
۴۸	گفت‌وگو
۴۹	روابط بین پاره خط‌ها
۵۱	روابط بین زاویه‌ها
۵۵	تبديل‌های هندسی و هم‌نهشته
۵۹	فصل ۵ - شمارنده‌ها و اعداد اول
۶۰	گفت‌وگو
۶۱	عدد اول
۶۳	کارگاه بازی - شمارنده و هُپ
۶۴	شمارنده
۶۶	مسابقه تیراندازی
۶۷	شمارنده اول
۶۹	بزرگ‌ترین شمارنده مشترک
۷۰	کوچک‌ترین مضرب مشترک
۷۳	کارگاه بازی - نقطه بذار - شلیک کن!
۷۶	ارتباط ب.م.م و ک.م.م
۷۷	تمرین‌های تكميلي
۸۱	فصل ۶ - سطح و حجم
۸۲	ریاضیات سیب‌زمینی!
۸۳	مکعب
۸۶	چهار وجهی منتظم
۸۷	شهرده فضایی
۸۹	محاسبه حجم‌های منشوری
۹۱	مساحت جانبی و کل
۹۲	حجم و سطح
۹۶	کارگاه ساخت حجم - دوازده وجهی منتظم
۹۷	فصل ۷ - توان و جذر
۹۸	تعریف توان
۱۰۰	محاسبه یک عبارت توان دار
۱۰۱	ساده کردن عبارت‌های توان دار
۱۰۲	تمرین‌های تكميلي
۱۰۵	جذر و ریشه

۱۰۷	فصل ۸-بردار و مختصات
۱۰۸	کارگاه بازی-نبرد دریایی
۱۱۱	دریچه‌ای به روپوکاپ
۱۱۴	مختصات و تبدیل‌های هندسی
۱۱۷	فصل ۹-آمار و احتمال
۱۱۸	جمع‌آوری و نمایش داده‌ها
۱۱۹	نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها
۱۲۳	احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۱۲۶	احتمال و تجربه
۱۲۹	کتاب‌نامه

این صفحه خالی است!

فصل صفر

سرآغاز



نام پرویز شهریاری با ریاضیات در ایران گره خورده است. او در تمام سال‌های زندگی‌اش در حال نوشتن ریاضیات و آموزش دانش‌آموزان و دانشجویان ایرانی بود. زمانی که منابع بسیار محدودی برای مطالعه ریاضیات در ایران وجود داشت، او کتاب‌های زیادی را به فارسی ترجمه کرد و بسیاری را با ریاضیات روز دنیا آشنا کرد و شاید سهم او در پیشرفت ریاضیات معاصر ایران کمتر از دانشگاه‌ها نباشد.

ترتیب چهار عمل اصلی در محاسبات

یک عبارت ریاضی، شامل اعداد و نمادهایی از جمله پرانتز و چهار عمل اصلی است. برای محاسبه عبارت‌های ریاضی، نمادها را به ترتیب زیر به کار می‌بریم.

- ۱. پرانتز
- ۲. ضرب یا تقسیم
- ۳. جمع یا تفریق

اگر در یک عبارت، دو نماد دارای ترتیب مساوی بودند (مثلًاً ضرب یا تقسیم)، ابتدا نمادی را به کار می‌بریم که در سمت چپ قرار دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

- $12 - \overbrace{6}^{\frac{3}{2}} = 12 - 3 = 9$
- $7 - \underbrace{1 \times 2 + 3 - 5}_{5} = 7 - 2 + 3 - 5 = \underbrace{5 + 3}_{8} - 5 = 8 - 5 = 3$
- $3 \times (13 + 7) \div (8 - 2) = 3 \times 20 \div 6 = 60 \div 6 = 10$

۱. عبارت‌های برابر دو ستون را به هم وصل کنید (یک مورد اضافی است).

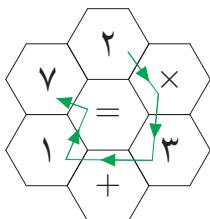
- | | |
|--|------|
| • $6 \div 2(1 + 2)$ | • ۱۹ |
| • $3(4 + 8) \div 3$ | • ۶ |
| • $12 \div 4 + 2(3 + 5)$ | • ۹ |
| • $4 + 2 \times 3 - 8 \div 4 \times 2$ | • ۱ |
| | • ۱۲ |

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

- | | | | |
|-----|--|-----|------------------------------------|
| الف | $34 - 18 + 2$ | ب | $8 \div 4 \div 2$ |
| (ج) | $12 - 8 \div 2 + 1$ | (د) | $10 - 4 \times 2 + 3$ |
| (ه) | $7 + 9 \times (3 + 8)$ | (و) | $63 \div (10 - 3) \times 3$ |
| (ز) | $12 \times 6 \div 3 - 2 \times 4$ | (ح) | $21 \div (3 + 4) \times 3 - 8$ |
| (ط) | $55 \div 11 + 7 \times (2 + 14)$ | (ی) | $27 \div (3 + 6) \times 5 - 12$ |
| (ک) | $12 + 6 \div 3 \times (18 + 3 \times 2)$ | (ل) | $280 - 40 \times (12 - 10 \div 2)$ |



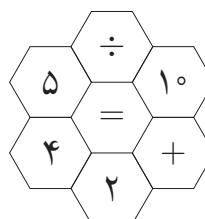
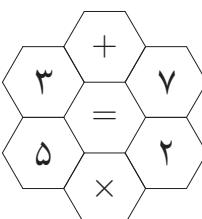
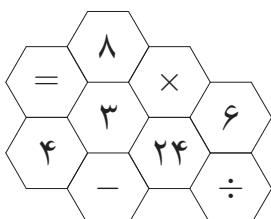
سرآغاز



۳. در شکل رویه‌رو، از عدد ۲ شروع به حرکت کرده‌ایم و در هر گام به یکی از خانه‌های همسایه رفته‌ایم. اگر به ترتیب ورود به هر خانه، عددها و عمل‌ها را پشت سرهم بنویسیم، یک رابطهٔ تساوی به دست می‌آید:

$$2 \times 3 + 1 = 7.$$

الف) در هریک از شکل‌های زیر، مسیری بیابید تا یک رابطهٔ تساوی به دست آید.



ب) در مثال بالا، مسیر آبی‌رنگ خاصیت عجیبی دارد!

روی مسیر آبی‌رنگ اعداد و نمادها به ترتیب $2 \times 3 + 1 = 7$ هستند. اگر در جهت عکس مسیر آبی‌رنگ اعداد و نمادها را به ترتیب بنویسیم ($7 = 1 + 3 \times 2$)، دوباره یک رابطهٔ تساوی خواهیم داشت.

$$7 = 1 + 3 \times 2$$

آیا مسیرهایی که در شکل‌های بالا پیدا کرده‌اید، این خاصیت عجیب را دارند؟

۴. در زیر، عبارت $1 + 3 \times 2$ را طوری پرانترگذاری کرده‌ایم که حاصل عبارت برابر ۸ شود.

$$2 \times (3 + 1) = 8$$

هریک از عبارت‌های زیر را طوری پرانترگذاری کنید که تساوی برقرار شود.

$$28 \div 2 \times 3 + 1 = 4 \quad (\text{الف})$$

$$24 + 6 \div 3 + 2 = 6 \quad (\text{ب})$$

$$18 + 3 \times 25 \div 15 - 3 = 20 \quad (\text{ج})$$

$$3 \times 40 \div 8 + 12 \div 6 = 1 \quad (\text{د})$$

5	×	2	-	6	=	4
+	+		×		+	
2	×	8	÷	4	=	4
-	÷		÷		÷	
3	+	5	-	6	=	2
=	=		=		=	
4	×	2	-	4	=	4

۵. جدول رویه‌رو را با اعداد قرمزرنگ طوری پر کرده‌ایم که در هر سطر و ستون تساوی‌ها برقرار باشند. معنای خانه‌های خاکستری‌رنگ این است که اعداد و نمادهای داخل این خانه‌ها در پرانتر قرار دارند. برای مثال، در ستون سوم (از سمت چپ)، رابطهٔ این‌گونه است:

$$(2 + 8) \div 5 = 2.$$



با قانون گفته شده، هریک از جدول‌های زیر را با اعداد یک رقمی پر کنید.^۱

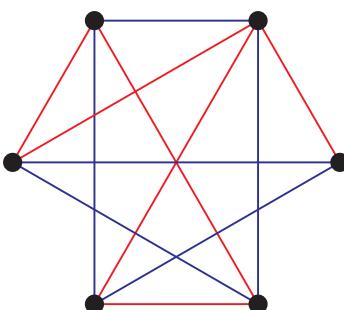
	÷		×		=	۶
+		-	×		+	
	+		-	۴	=	
÷		+	-		÷	
	×	۳	-		=	
=		=	=		=	
	÷		+		=	

	×		-		=	۹
+		+	-		-	
	-		×	۴	=	
-		-		×	+	×
	-	۵	+		=	
=		=	=		=	
۱	×		÷		=	

کارگاه بازی - مثلث همنگ

شش نقطه روی یک صفحه قرار داده شده است. دو نفر با دو خودکار، با رنگ‌های آبی و قرمز بازی را شروع می‌کنند. نفر اول دو نقطه را انتخاب می‌کند و با یک پاره خط این دو نقطه را بهم وصل می‌کند. نفر دوم نیز، دو نقطه را انتخاب و بهم وصل می‌کند. هر کس که اولین مثلث همنگ را بسازد باخته است. مثلث همنگ مثبتی است که سه ضلعش یک رنگ دارد و رأس‌های آن یکی از شش نقطه داده شده باشد.

برای مثال، در شکل زیر هنوز هیچ مثلث همنگی ساخته نشده است. آیا اگر نوبت آبی باشد، بازnde است؟ اگر نوبت قرمز باشد چطور؟



با یکی از دوستان یا اعضای خانواده این بازی را انجام دهید و سعی کنید روشی پیدا کنید که همیشه برنده باشید.

^۱P.J. Carter, *Advanced IQ tests*, Kogan page, London, 2008, page 8.

فصل ۱

راهبردهای حل مسئله



Save Water ... Save Life

کمبود آب از مهم‌ترین مشکلات حال ایران و جهان است. برخی این مسئله را یک بحران نامیده‌اند. برای حل این مسئله راهبردهای گوناگونی پیشنهاد شده است؛ اما این راهبردها تا به حال نتوانسته‌اند بحران کم‌آبی را برطرف کنند. آیا شما برای حل این مسئله راهبردی در نظر دارید؟

گفت و گو

معلم ۱ : واقعاً اینجا مدرسه تیزهوشان است؟!

معلم ۲ : اتفاقی افتاده است؟

معلم ۱ : خیلی از بچه‌ها با هوش هستند ولی با بچه‌هایی که ریاضی نمی‌فهمند، چه کنم؟

معلم ۲ : مدارا!

معلم ۱ : من اصلاً شوخی نمی‌کنم. می‌خواهم همه دانش‌آموزانم ریاضی دان شوند؟!
نمی‌دانم می‌توانم از پس این کار برآیم یا نه؟

معلم ۳ : [درحالی که از جا برمی‌خاست و جمع را ترک می‌کرد] آقا مگر ما ریاضی‌دانیم که بتوانیم ریاضی دان تربیت کنیم؟! ریاضی دان خودش ساخته می‌شود. مثل گیاه وحشی! نهایت هنر ما پرورش گیاهان گل خانه‌ای است!

معلم ۲ : مشکل چیست؟ درس ریاضی را نمی‌فهمند؟

معلم ۱ : بعضی از دانش‌آموزان بلد نیستند مسئله‌ها را حل کنند. وقتی مسئله را می‌بینند، انگار هیپنوتیزم می‌شوند؛ زل می‌زنند و هیچ حرکتی نمی‌کنند!

معلم ۲ : به نظر شما چه کار باید بکنند؟

معلم ۱ : باید از روش‌های حل مسئله فصل اوّل استفاده کنند.

معلم ۲ : پس نظر شما این است که اگر فصل اوّل خوب درس داده شود، همه بچه‌ها می‌توانند به خوبی مسائل ریاضی را حل کنند.

معلم ۱ : بله. دقیقاً.

معلم ۲ : درست است که خیلی از مسئله‌ها با این روش‌ها حل می‌شوند؛ ولی اگر منظور شما این است که دانش‌آموز باید این روش‌ها را بیاموزد تا حدّاقل روش فکر کردن را یاد بگیرد، بنده با شما موافقم؛ نمی‌خواهم از بچه‌های تنبل کلاس دفاع کنم، ولی سؤالی دارم.

معلم ۱ : بفرمایید!

راهبردهای حل مسئله

- معلم ۲: می‌دانید هدف از آموزش «روش حل مسئله» چیست؟
- معلم ۱: اینکه به بچه‌ها فکر کردن را آموزش دهیم.
- معلم ۲: این مطلب را فرموده بودید؛ بنده نیز قبول دارم؛ دیگر چه؟
- معلم ۱: اینکه دانش آموزان بیاموزنند همه مسائل را حل کنند.
- معلم ۲: در این موضوع با شما موافق نیستم!
- معلم ۱: چرا؟
- معلم ۲: نمی‌توان همه روش‌های حل مسئله را یاد داد!
- معلم ۱: چرا؟ هر مسئله جواب دارد. جوابش را می‌توان یاد داد. البته اگر مخاطب عاقل باشد!
- معلم ۲: بله. اگر بتوان مسئله را حل کرد و مخاطب باهوش باشد، می‌توان گفت آن مسئله چگونه حل شده است؛ ولی آیا می‌توان روش‌هایی را معرفی کرد تا به کمک آنها همه مسائل حل شوند؟
- معلم ۱: بله... به نظر بnde می‌توان این کار را انجام داد.
- معلم ۲: به نظر من نه! به نظر همه ریاضی‌دان‌ها هم نه!
- معلم ۱: چرا؟ پس فصل اوّل کتاب درسی کلاً ناکارآمد است؟
- معلم ۲: اشتباه شما اینجاست که از این فصل استفاده نادرست می‌کنید. فصل اوّل روش فکر کردن به بعضی از مسائل را یاد می‌دهد؛ نه همه مسائل را. این فصل برای دانش آموزان باهوش نیست. دانش آموز خیلی باهوش خودش می‌تواند روش حل مسئله را پیدا کند. این فصل برای دانش آموزان متوسط یا ضعیف نوشته شده است. آنها باید در حل مسائل از دانش آموزان باهوش‌تر تقلید کنند.
- معلم ۱: چرا آنها باید تقلید کنند؟
- معلم ۲: مثل خیلی از کارهای دیگر بشر. مثلاً وقتی کسی خوب فوتبال بازی می‌کند، بقیه از او تقلید می‌کنند تا بتوانند خوب فوتبال بازی کنند. وقتی کسی خوب حرف می‌زند، بقیه از او تقلید می‌کنند تا بتوانند خوب حرف بزنند. انسان‌ها علاقه مندند که از کارهای خوب دیگران، تقلید کنند. مانند آنها حرف بزنند، مانند آنها زندگی کنند و مانند آنها فکر کنند.

معلم ۱ : این حرف شما را قبول دارم؛ اما شما یک اشتباه کوچک دارید. درست است که انسان‌های باهوش راه حل‌های جالب ریاضی را کشف کرده‌اند؛ اما الان بقیه انسان‌ها آموخته‌اند که با آن راه حل‌ها مسائل ریاضی را حل کنند. بنده هم به عنوان یک معلم ریاضی، وظیفه دارم آن روش‌ها را به دانش‌آموزانم یاد بدهم. وظیفه دارم که شاگردانم را ریاضی دان کنم.

معلم ۲ : البته وظیفه یک معلم ریاضی، یاد دادن مفاهیم ریاضی و روش‌های حل مسائل ریاضی است؛ اما یک معلم نمی‌تواند همه روش‌های حل مسائل را یاد بدهد.

معلم ۱ : منظور شما چیست؟ یک ماه زمان صرف می‌کنیم و همه روش‌ها را یاد می‌دهیم. اگر نشد، دو ماه. اگر نشد یک سال!

معلم ۲ : نه، درست نیست! هیچ وقت نمی‌توانیم این کار را انجام دهیم. چون هیچ وقت همه روش‌های حل مسئله کشف نمی‌شوند. همیشه یک ریاضی دان جدید پیدا می‌شود که روش جدیدی را خلق می‌کند. روش‌های زیادی هستند که هنوز کشف نشده‌اند!

معلم ۱ : از کجا می‌دانید؟

معلم ۲ : از آنجایی که هنوز مسائل حل نشده زیادی در ریاضیات وجود دارد.

معلم ۱ : واقعاً؟

معلم ۲ : یعنی شما به عنوان یک معلم ریاضی که می‌خواهید ریاضی دان تربیت کنید، نمی‌دانید چه مسائل جالبی هنوز حل نشده‌اند؟! کافی است در اینترنت جست‌وجو کنید: «Unsolved problem in math».

معلم ۱ : اینترنت؟!!!

هر مسئله، ضرب‌آهنگ خاص خودش را دارد، درست مثل یک قطعه موسیقی.

هر وقت آن ضرب‌آهنگ را بگیری، کلیت مفهوم آن مسئله را می‌فهمی.

یوکو اوگاوا، خدمتکار و پروفسور، ترجمة کیهان بهمنی.

مسئله‌ها

۱. مسئله و راه حل زیر از کتاب «خلاقیت ریاضی»^۱ انتخاب شده است.

مسئله: دهقانی چند مرغ و چند خرگوش خانگی دارد. این مرغ‌ها و خرگوش‌ها روی هم، 50° سر و 140° پا دارند. این دهقان چند مرغ و چند خرگوش دارد؟



راه حل: دهقان، جانوران خود را مجبور می‌کند، در وضع غریبی قرار بگیرند: هر مرغ روی یک پا ایستاده است و هر خرگوش روی دو پای عقبی خود. با این تصور غریب، درست نصف همه پاهای، یعنی 70° عدد، شرکت خواهند داشت. عدد 70° را می‌توان به عنوان سرها در نظر گرفت، به شرطی که هر مرغ یک پاره و هر خرگوش را دو پاره حساب بباور پیر. بنابراین، اگر از عدد 70° تعداد کل مرغ‌ها و خرگوش‌ها، یعنی 50° را کم کنیم، تعداد خرگوش‌ها به دست می‌آید؛ یعنی تعداد خرگوش‌ها، برابر است با:

$$70 - 50 = 20$$

والبته، 30° مرغ.

بعد از خواندن راه حل بالا، سعی کنید راه حل دیگری برای این مسئله ارائه دهید.

۲. به چهار روش می‌توان عدد 4 را به صورت مجموع اعداد طبیعی کوچکتر از آن نوشت:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$4 = 1 + 1 + 2,$$

$$4 = 1 + 3,$$

$$4 = 2 + 2.$$

هر یک از اعداد 3 ، 5 و 6 را به چند روش می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی کوچکتر از خودشان نوشت؟ همه حالت‌های ممکن را بنویسید.

^۱ جرج پولیا، خلاقیت ریاضی، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، صفحه ۶۰.

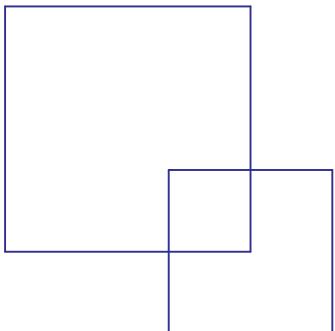
۳. قانون الگوی زیر را کشف کنید.

۱, ۱۱, ۲۱, ۱۲۱۱, ۱۱۱۲۲۱, ۳۱۲۲۱۱, ۱۳۱۱۲۲۲۱,



اگر موفق به کشف این قانون نشدید، نگران نشوید! ریاضی دان معروف انگلیسی معاصر (تصویر رو به رو)، به نام جان کانوی (John Conway)، وقتی برای اولین بار با این الگو بخورد کرد، بعد از ساعت‌ها تفکر نتوانست آن را حل کند؛ اما بعد از اینکه یکی از دوستانش قانون الگو را به او گفت، کانوی پی برد اطلاعات لازم برای کشف قانون الگو این است که: «یک نفر فقط بلد باشد تا عدد ۳ بشمارد!»

۴. با ۲ مربع، حداکثر ۳ مربع می‌توان ساخت. شکل زیر را ببینید.



با ۳ مربع، حداکثر چند مربع می‌توان ساخت؟ شکل مربوطه را رسم کنید.

۵. مسابقات سه‌گانه از سه بخش شنا، دوچرخه‌سواری و دو تشكیل شده است. در المپیک ورزشکاران این رشته، ابتدا $\frac{3}{10}$ مسیر را شنا می‌کنند. سپس $\frac{5}{6}$ باقی‌مانده راه را رکاب می‌زنند و بعد 10 km می‌دونند تا به خط پایان برسند. طول مسیر مسابقات سه‌گانه در المپیک چند کیلومتر است؟



۶. گلی شبنه شب $\frac{1}{3}$ کتاب قصه را برای عروسک‌هایش خواند. یکشبنه شب نیز $\frac{1}{3}$ از باقی‌مانده کتاب را خواند. و دوشنبه شب $\frac{1}{4}$ از باقی‌مانده کتاب را برای عروسک‌ها خواند. سه‌شنبه شب $\frac{1}{5}$ باقی‌مانده را خواند. گلی چه کسری از کتاب را برای عروسک‌هایش نخوانده است؟



راهبردهای حل مسئله

۷. به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل پنجم این الگو را رسم کنید.

ب) در شکل بیستم این الگو، چند دایره توپر وجود دارد؟

ج) به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل پنجم این الگو را رسم کنید.

ب) در شکل بیستم این الگو، چند دایره توپر وجود دارد؟ این تعداد با عددی که در

قسمت «ب» مسئله قبل به دست آورده است، چه رابطه‌ای دارد؟

ج) با توجه به شکل‌های بالا و شکل‌های مسئله قبل، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 51$$

۹. می‌دانیم که سن مونا برابر با تعداد شمع‌هایی است که در آخرین جشن تولدش روی یک قرار داده است. اگر او مجموعاً به ۶۶ شمع روی کیک‌های تولدش فوت کرده باشد، اکنون چند سال سن دارد؟





۱۰. در هندوستان، راننده‌گان عاشق بوق زدن هستند! فرض کنید پشت چراغ قرمز، رسم بر این باشد که نفر اول ۱ بار بوق بزند. بعد نفر دوم هر چند بار که خواست بوق بزند. نفر سوم به تعداد مجموع بوق‌های نفر اول و دوم بوق بزند. نفر چهارم به تعداد مجموع بوق‌های نفر اول و دوم و سوم بوق بزند و نفر پنجم به تعداد مجموع بوق‌های چهار نفر قبلی بوق بزند و ...

الف) اگر پشت یک چراغ، نفر دوم ۲ بار بوق بزند و ۵ نفر بعدی با قانون بالا بوق بزند، نفر آخر چند بار بوق زده است؟

ب) اگر پشت یک چراغ، نفر دوم ۶ بار بوق زده باشد و ۵۶ بار صدای بوق شنیده شده باشد، چند راننده بوق زده‌اند؟

ج) ۶ نفر مجموعاً ۱۶ بار بوق زده‌اند. نفر دوم چند بار بوق زده است؟

۱۱. الف) در جام جهانی ۲۰۱۴، ۳۲ تیم حاضر بودند. این تیم‌ها در مرحله اول به ۸ گروه ۴ تیم تقسیم شدند و در هر گروه هر تیم یک‌بازی با سه تیم دیگر انجام داد. در مرحله اول جام جهانی ۲۰۱۴، چند بازی انجام شد؟

ب) در سال ۱۳۹۳، ۱۶ تیم در لیگ برتر فوتبال ایران (جام خلیج فارس) حاضرند. هر تیم باید دو بازی با تیم‌های دیگر انجام دهد. در این لیگ چند بازی انجام می‌شود؟

ج) کشوری ۲۰ شهر دارد که میان هر دو شهر یک خط هوایی دایر است. چند خط هوایی در این کشور وجود دارد؟

د) چه ارتباطی بین قسمت‌های «الف»، «ب» و «ج» وجود دارد؟



۱۲. در بازی «مثلث همنگ» که در فصل قبل با آن آشنا شدید،

الف) اگر هر نقطه را به پنج نقطه دیگر وصل کنیم، چند پاره خط رسم کرده ایم؟

ب) چرا همیشه یک نفر بازنده است؟ به عبارت دیگر چرا این بازی نمی‌تواند نتیجه مساوی داشته باشد؟

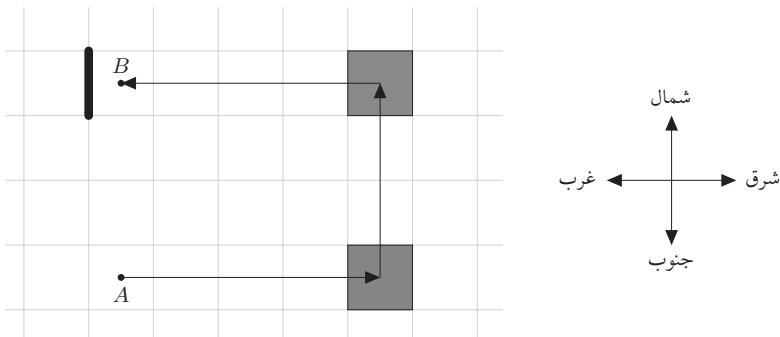


راهبردهای حل مسئله

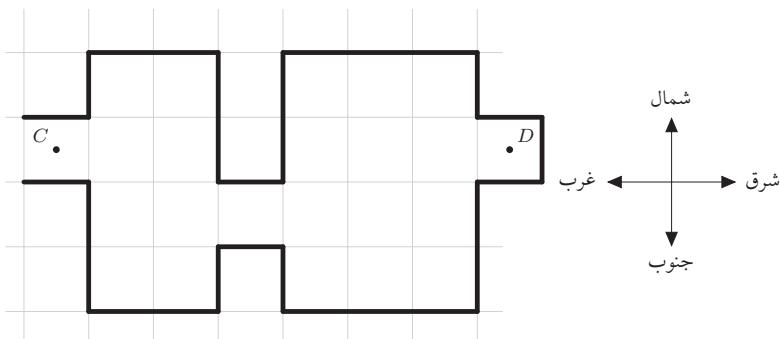
۱۳. تعدادی کبوتر و هشت پا روی هم 60° سر و 210° پا دارند. چند هشت پا داریم؟



۱۴. روباتی داریم که فقط به سمت جلو حرکت می‌کند و هنگامی که به یک کاشی تیره می‌رسد، 90° به سمت چپ خودش می‌چرخد. برای مثال، اگر روبات را در زمینی به‌شکل زیر در نقطه A رو به سمت شرق بگذاریم، به نقطه B می‌رسد. چون در نقطه B به دیوار برخورد کرده است، دیگر نمی‌تواند جلو برود و متوقف می‌شود.



در زمینی به‌شکل زیر روبات را در نقطه C رو به سمت شرق گذاشته‌ایم. می‌خواهیم روبات به نقطه D برسد. کدامیک از کاشی‌ها را باید تیره کنیم؟





۱۵. ۲۴ پرنده روی دو کابل برق نشسته بودند. وقتی ۶ پرنده از کابل دوم به کابل اول و ۹ پرنده از کابل اول به کابل دوم پریند، تعداد پرنده‌های کابل اول نصف پرنده‌های کابل دوم شد. در ابتدا چند پرنده روی کابل دوم نشسته بودند؟

۱۶. دهکده‌ای ۱۰۰ خانه دارد. روی هر ۳ خانه حداقل ۲ آتنن وجود دارد و روی هر ۲ آتنن حداقل ۳ کلاع نشسته است. این دهکده حداقل چند کلاع آتنن نشین دارد؟



۱۷. در یک مهد کودک تعدادی نیمکت وجود دارد. وقتی روی هر نیمکت یک نفر می‌نشیند، یک نفر مجبور است روی زمین بنشیند! اما اگر روی هر نیمکت ۲ نفر بنشینند، ۱ نیمکت خالی می‌ماند. این مهد کودک چند نیمکت دارد؟

۱۸. قیمت یک گلابی ۲۰۰ تومان، قیمت یک پرتقال ۳۰۰ تومان، و قیمت یک توت فرنگی ۴۰۰ تومان است. اگر ۸ عدد از این میوه‌ها را ۲۳۰ تومان خریده باشیم، بیشترین تعداد توت فرنگی که ممکن است خریده باشیم، چندتاست؟

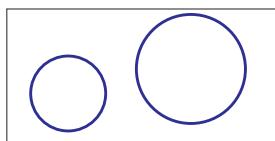
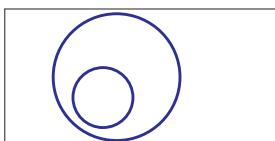


۱۹. عاطفه تعدادی پسته داشت که نتوانست آنها را به طور مساوی بین ۶ نفر از دوستانش تقسیم کند. او سراغ بهمن آقا پسته‌چی رفت و ماجرا را برای او توضیح داد. بهمن آقا پسته‌چی گفت: «اگه تا پسته از من بخري مشکلت حل می‌شه.» هر پسته ۱۰۰ تومان بود، ولی عاطفه فقط ۳۰۰ تومان پول داشت. آیا می‌توانید به عاطفه کمک کنید؟

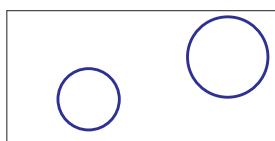
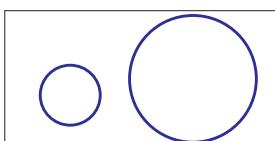


راهبردهای حل مسئله

۲۰. می‌خواهیم چند دایره پکشیم که همدیگر را قطع نکنند. برای مثال، با کمک دو دایره فقط به دو شیوه می‌توانیم این کار را انجام دهیم. هر کدام از این دو راه، در شکل‌های زیر رسم شده است.

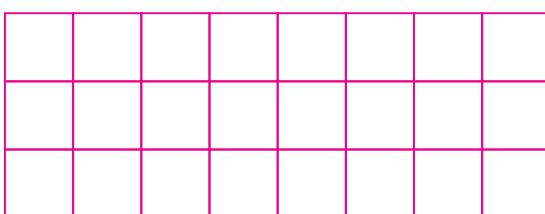


توجه کنید که دو حالت زیر با آنکه ظاهرًا متفاوت‌اند، ولی آنها را یکی در نظر می‌گیریم.



اگر چهار دایره داشته باشیم، به چند شیوه گوناگون می‌توانیم آنها را رسم کنیم به‌گونه‌ای که همدیگر را قطع نکنند؟ همهٔ حالت‌ها را رسم کنید.

۲۱. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول زیر را رنگ کنیم به‌طوری که هر خانه یا خودش رنگ شده باشد یا همسایه‌اش رنگی باشد. حداقل چند خانه رنگی می‌شوند؟ آنها را رنگ کنید.
(دو خانه همسایه‌اند هرگاه یک ضلع مشترک داشته باشند).



۲۲. در جعبه‌ای 100 مهره به رنگ‌های سفید، قرمز و آبی وجود دارد. در تاریکی، چند مهره از جعبه بیرون بیاوریم که در بین آنها حداقل 10 مهره همنگ وجود داشته باشد؟



۲۳. نرگس تعداد زیادی مکعب مستطیل با ابعاد $3 \times 2 \times 1$ دارد. او می‌خواهد با چسباندن تعدادی از این مکعب مستطیل‌ها بهم، یک مکعب توپر بسازد. کمترین تعداد مکعب مستطیل‌هایی که نیاز دارد، چندتاست؟



۲۴. در کنار جاده‌ای، تیرهای سیمانی به فاصله‌های برابر قرار دارند. حامد از تیر اول آغاز به حرکت کرد و بعد از 6 دقیقه از کنار تیر ششم گذشت. اگر حامد با همین سرعت ادامه دهد، پس از چند دقیقه از کنار تیر بیست و ششم می‌گذرد؟

۲۵. مجله Notices که انجمن ریاضی آمریکا آن را چاپ می‌کند، در یکی از شماره‌هایش، یک الگوی عددی معروف را به عنوان تصویر روی جلد انتخاب کرده است.



الف) ابتدا الگوی عددی بالا را بدقت مشاهده و قانون آن را کشف کنید. سپس با توجه به قانون الگو، سه ستون به سمت چپ آن اضافه کنید.

ب) نام ریاضی‌دان‌هایی را روی این الگوی عددی گذاشته‌اند؟ برای یافتن پاسخ این پرسش، عبارت «مثلث عددی» را در گوگل جست‌وجو کنید.

۲۶. در الگوهای عددی زیر به جای علامت ? عده‌های مناسب قرار دهید.

الف ۱۹, ۲۰, ۲۱, ?, ?, ۲۶, ۲۸, ۳۲, ۳۳, ۴۰ (ب) ۱۰, ۵۰, ۱۳, ۴۵, ۱۸, ۳۸, ?, ?

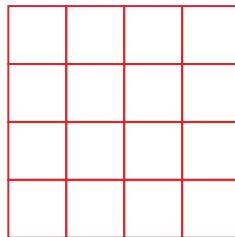
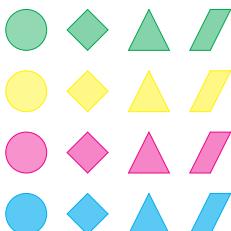
۲۷. حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{99}\right) \times \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$



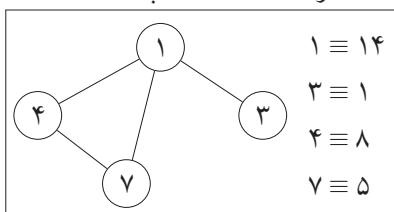
راهبردهای حل مسئله

۲۸. شکل‌ها را طوری در جدول 4×4 زیر بچینید که در هر سطر و هر ستون، هر رنگ و هر شکل یکبار دیده شود.



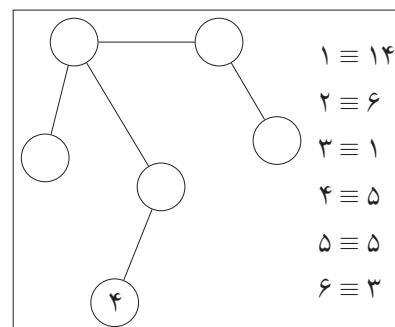
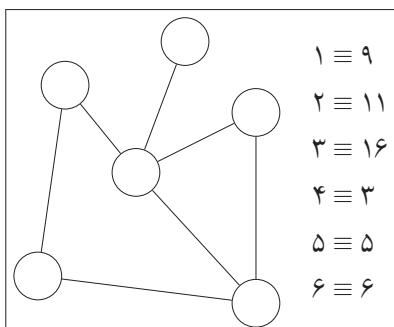
راهنمایی: عبارت «Orthogonal latin squares» را گوگل کنید.

۲۹. در کادر زیر، اعداد سمت چپ علامت \equiv را طوری داخل دایره‌ها قرار داده‌ایم که مجموع عددهایی که به هر دایره متصل‌اند، برابر عدد سمت راست علامت \equiv باشد.



برای مثال، عدد ۱ به عددهای ۴، ۷ و ۳ متصل است. پس $(4+7+3) \equiv 1 \equiv 14$. عدد ۳ فقط به ۱ وصل است. بنابراین $1 \equiv 14$. عدد ۴ به ۱ و ۷ وصل شده، پس $(1+7) \equiv 4 \equiv 8$ یا $4 \equiv 8 \equiv 14$ و ...

باتوجه به قانون گفته شده، دایره‌های خالی را با اعداد مناسب پر کنید.



۳۰. دستمزد سالانه یک بازیکن فوتبال در سال ۱۳۶۸ حدود سیصد هزار تومان بود. در سال ۱۳۹۲ هر فوتبالیست تقریباً یک میلیارد تومان درآمد سالانه داشته است. در این مدت دستمزد سالانه فوتبالیست‌ها چند درصد افزایش یافته است؟



خواندنی

الف، ب، ج، د. احتمالاً این ترتیب از حروف الفبا را دیده‌اید. آیا تا به حال پرسیده‌اید: این دیگر چه ترتیبی است؟

در میان شاعران ایرانی نوعی عدد نویسی بر اساس حرف‌های الفبا معمول است که به آن «حساب جمله‌ها» یا «ماده تاریخ» می‌گویند. در این شیوه، ترتیب حروف الفبا به شکل زیر است:

آجَد، هَوْز، حُطِّي، كَلِمَن، سَعْفَض، قُرِشَت، ثَخَد، ضَطَّغ.
البته هیچ یک از این کلمات معنای خاصی ندارند! رابطه حرف‌ها با اعداد به شکل زیر است:

الف	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط	ي	ك	ل	م	ن	س	ع
۷۰	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

هر عدد به حرفی که در بالای آن نوشته شده مربوط است. هریک از حروف دیگر به شکل زیر به یک عدد مربوط‌اند:

ف	س	ق	ر	ش	ت	خ	ذ	ض	ظ	غ	ب	ل	م	ن	ه
۱۰۰۰	۹۰۰	۸۰۰	۷۰۰	۶۰۰	۵۰۰	۴۰۰	۳۰۰	۲۰۰	۱۰۰	۹۰	۸۰	۷۰	۶۰	۵۰	۴۰

با استفاده از اعداد و حروف بالا، می‌توان یک عدد را با یک جمله یا یک عبارت بیان کرد. برای مثال، حافظ، تاریخ کشته شدن شاه شیخ ابواسحاق شیرازی را در بیتِ ببل و سرو و سمن و یاسمون و لاله و گل هست تاریخ وفات شه مُشکین کاکُل آورده است. با حساب جمله‌ها داریم:

$$\text{ببل} = ۶۴ \quad \text{سرو} = ۲۶۶ \quad \text{سمن} = ۱۵۰$$

$$\text{یاسمون} = ۱۶۱ \quad \text{لاله} = ۶۶ \quad \text{گل} = ۵۰$$

مجموع این اعداد برابر است با ۷۵۷ که سال کشته شدن ابواسحاق است. مظفرالدین شاه قاجار (تصویر زیر) در سال ۱۳۲۴ هجری قمری با مشروطه موافقت کرد. این کار به «عدل مظفر» معروف شد. با حساب جمله‌ها «عدل مظفر» برابر با عدد ۱۳۲۴ است.



یک عبارت برای سال تولد خود بسازید.

فصل ۲

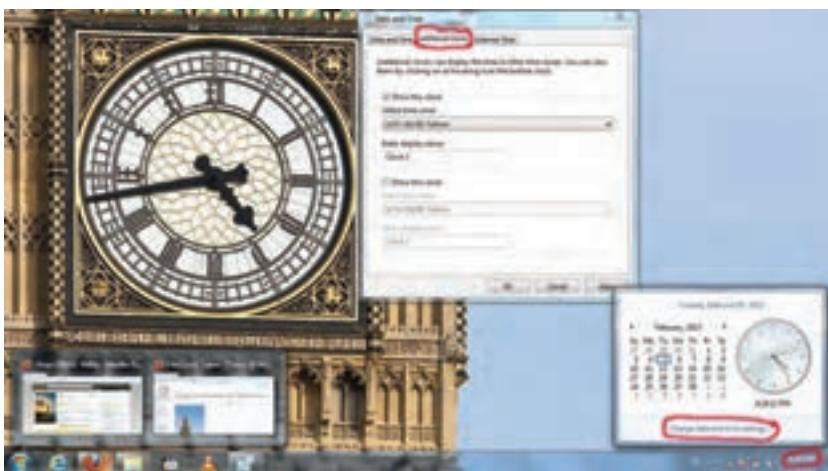
عددهای صحیح



مبدأ تاریخ در کشور ما هجرت رسول اکرم از مکه به مدینه است. در شکل بالا تاریخ برخی از رویدادهای مختلف را مشاهده می‌کنید. برخی از این واقعه‌ها پیش از هجرت و برخی دیگر پس از هجرت پیامبر روی داده‌اند. شما هم با جستجو می‌توانید نمودارهای مشابهی را پیدا کنید که تاریخ رویدادهای مختلف را به ترتیب وقوع نشان داده است.

معرفی عددهای علامت دار

۱. برگ وسط یک روزنامه را برداشته‌ایم. این برگ چهار صفحه دارد که شماره آنها $24, 23, 25$ و 26 است. این روزنامه چند صفحه دارد؟
۲. از یک روزنامه فقط یک برگ آن در دست است که شماره صفحه‌های $11, 12, 13$ و 14 روی آن دیده می‌شود.
 (الف) این روزنامه چند صفحه دارد?
 (ب) صفحه‌های برگ وسط، چه شماره‌هایی دارند؟
۳. نصرت آقا نقاش روی پله وسط نرده باش ایستاده است. او سه پله بالا می‌رود و سپس هشت پله پایین می‌آید. بعد چهار پله بالا می‌رود. اکنون اگر نصرت آقا هفت پله بالا برود، روی آخرین پله نرده باش می‌ایستد. نرده نصرت آقا چند پله دارد؟
۴. اگر روی ساعت ویندوز کلیک کنید و «...Change date and time settings...» را انتخاب کنید، پنجره «Date and Time» ظاهر می‌شود. با انتخاب گزینه «Additional Clocks» می‌توانید اختلاف ساعت شهرهای مهم جهان را با ساعت مبدأ (گرینویچ) ببینید.



- برای پاسخ دادن به پرسش‌های زیر از رایانه خود کمک بگیرید.
- (الف) تفاوت ساعت چه شهرهایی با گرینویچ $3:30'$ است؟
 - (ب) در آمریکا چند ساعت رسمی وجود دارد؟

- ج) اگر یک تاجر فرش ایرانی بخواهد به ساعت 10 صبح پاریس، با شریک تجاری اش با تلفن گفت و گو کند، چه ساعتی در ایران باید به او تلفن بزند؟
۵. الف) کدامیک از اعداد 48 – یا 55 –، به 51 نزدیک‌تر است؟
- ب) کدامیک از اعداد 3 یا 3 ، از قرینه 10 – کوچک‌تر است؟
- ج) درست یا نادرست؟
پنج عدد صحیح بزرگ‌تر از 5 – وجود دارد.
۶. الف) روی محور اعداد صحیح، بین $1/2$ – و $11/6$ – چند عدد صحیح وجود دارد؟
- ب) روی محور اعداد صحیح، بین $12/9$ و $341/8$ – چند عدد حسابی و چند عدد صحیح وجود دارد؟
۷. متن زیر را از کتاب تاریخ ریاضیات^۱ انتخاب کرده‌ایم.

روایت می‌گنند، وقتی ارشمیدس 212 – 287 پیش از میلاد^۲ به ریاضیات می‌پرداخت، حتی گرسنگی را از ایاد می‌برد. در این باره، همیشه مستخدمه او بیادآوری می‌گرد. برای غونه، یکبار دروان حمام نشسته بود و بی توجه به زمان و مکان با رسم شکل‌های هندسی به گمک آب صابون، روی مسئله‌ای می‌اندیشید. ناگفان مستخدم آمد و همه شکل‌های هندسی را از بین برداشت.

- الف) با توجه به متن بالا، سال تولد ارشمیدس چه سالی است؟
- ب) مریم میرزاخانی (تصویر زیر)، ریاضی‌دان ایرانی و برنده مدال فیلدز^۳ سال 2014 میلادی است. او در سیزدهم اردیبهشت 1356 هجری شمسی در تهران به دنیا آمد. مریم میرزاخانی چند سال بعد از فوت ارشمیدس به دنیا آمده است؟



^۱ پرویز شهریاری، تاریخ ریاضیات، انتشارات مدرسه، تهران، چاپ پنجم، 1387 ، صفحه 72 .
^۲ فیلدز مهم‌ترین جایزه بین‌المللی ریاضیات است که هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان زیر 40 سال اهدا می‌شود.

جمع و تفریق اعداد صحیح

۱. یک محور اعداد صحیح رسم کنید و یک پرگار در دست بگیرید!

الف) سوزن پرگار را روی نقطه ۲ بگذارید و دایره‌ای به شعاع ۵ رسم کنید. این دایره در چه نقاطی، محور اعداد را قطع می‌کند؟

ب) ابتدا سوزن پرگار را روی نقطه ۳- قرار دهید و دایره‌ای به شعاع ۲ رسم کنید. دایره در دو نقطه محور را قطع می‌کند؛ نقطه سمت چپ را A و نقطه سمت راست را B بنامید. سپس سوزن پرگار را روی نقطه A قرار دهید و به شعاع ۴ دایره‌ای رسم کنید؛ نقطه سمت راست محل تقاطع دایره با محور را C بنامید. اکنون سوزن پرگار را روی نقطه C بگذارید و دهانه پرگار را به اندازه فاصله A تا B ، باز کرده، دایره‌ای رسم کنید. نقطه سمت چپ محل تقاطع این دایره با محور چه عددی است؟

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف} \quad 2 - 3 + 4 - 5 + 3 - 4 = 11 - 17 + 18 - 15 - 12 \quad (\text{ب})$$

$$\text{ج} \quad 11 - 12 + 35 - 9 - 25 = 23 + 10 - 14 + 7 - 92 + 23 \quad (\text{د})$$

$$1224 - 5678 + 9132 - 4591 + 1203 = 974 \quad (\text{ه})$$

$$37824 - 51245 + 153 - 98461 + 75341 - 27549 = 4908 \quad (\text{و})$$

۳. برای هر یک از قانون‌های زیر، یک الگوی عددی بسازید.

الف) از ۱۱- شروع کنید و هر عدد را با اضافه کردن عدد ۴ به عدد قبلی بسازید.

ب) از ۵ شروع کنید و در هر مرحله ۲ را از عدد قبلی کم کنید.

ج) از ۲- و ۴- شروع کنید. هر عدد مجموع دو عدد قبل از آن است.

۴. جاهای خالی را با علامت‌های «+» و «-» طوری پر کنید که

$$158 \bigcirc (-1418) \bigcirc 127 \bigcirc (-983)$$

الف) حاصل کمترین مقدار ممکن باشد.

ب) حاصل بیشترین مقدار ممکن باشد.

عددهای صحیح

۵. عبارت زیر را طوری پرانتز گذاری کنید تا تساوی برقرار شود.

$$18 + (-3) - 7 + 4 = 11$$

۶. الف) آیا می‌توانید خانه‌های خالی جدول زیر را با عددهای طبیعی طوری پر کنید که مجموع هر سطر برابر صفر شود؟ با عددهای صحیح چطور؟

	-۳
۵	

ب) آیا می‌توانید جدول زیر را با چهار عدد صحیح متفاوت طوری پر کنید که مجموع هر سطر و هر ستون برابر صفر شود؟

ج) آیا می‌توانید جدول زیر را با اعداد $\{ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$ طوری پر کنید که مجموع سطراها و ستون‌ها برابر باشند؟ (تکرار اعداد مجاز نیست).



د) آیا می‌توانید جدول بالا را با اعداد صحیح طوری پر کنید که مجموع هر سطر برابر ۱ و مجموع هر ستون برابر ۱ شود؟



۷. فرض کنید در آسانسور ساختمانی که ۵۰ طبقه دارد، ایستادهاید. روی کلیدهای این آسانسور اعداد ۱ تا ۴۰، صفر و ۹ تا ۹ نوشته شده است.

الف) بیشترین مسافتی که این آسانسور طی می‌کند، چند طبقه است؟

ب) اگر در طبقه ۳ باشید و کلید طبقه ۳۴ را فشار دهید، چند طبقه بالا می‌روید؟

ج) اگر در طبقه ۲۳ باشید و کلید طبقه ۹ را فشار دهید، چند طبقه پایین می‌آید؟

د) اگر در طبقه ۵ باشید و ۱۸ طبقه بالا بروید، به طبقه چندم می‌رسید؟

ه) اگر ۳۹ طبقه پایین آمده باشید و در طبقه ۷ متوقف شوید، ابتدا در طبقه چندم بوده‌اید؟

.۸. جدول زیر، رده‌بندی تیم‌های لیگ برتر فوتبال ایران (جام خلیج فارس) در پایان نیم‌فصل سال ۱۳۹۱ است.

امتیاز	تفاضل گل	گل خورده	گل زده	تیم‌ها	رتبه
۳۱	۱۰	۱۸	۲۸	سپاهان	۱
۳۱	۷		۱۸	استقلال	۲
۲۹	۱۰	۱۹	۲۹	فولاد	۳
۲۹	۳	۱۷	۲۰	ملوان	۴
۲۹	۳	۱۴	۱۷	راه آهن	۵
۲۸	۱۰	۱۷	۲۷	تراکتورسازی	۶
۲۶	۴	۱۴	۱۸	ساپا	۷
۲۴	۸	۱۳	۲۱	فجرسپاسی	۸
۲۴	۱	۱۱	۱۲	مس	۹
۲۲	۲	۱۸	۲۰	نفت تهران	۱۰
۲۲		۲۲	۱۷	داماش گیلان	۱۱
۲۱	۳	۱۷		پرسپولیس	۱۲
۲۱	۱	۱۶	۱۷	صبای قم	۱۳
۲۰	-۱۶		۱۶	پیکان	۱۴
۱۷	-۳	۱۵		آلومینیوم	۱۵
۱۳	-۱۱	۲۷	۱۶	ذوب آهن	۱۶
۱۱		۲۸	۱۶	نفت آبادان	۱۷
۹	-۱۵	۲۶		گهر دورود	۱۸

الف) با توجه به گل زده، گل خورده و تفاضل گل هر تیم، خانه‌های خالی جدول بالا را پر کنید.

ب) مجموع تفاضل گل همه تیم‌ها را بیابید.

.۹. الف) جاهای خالی را با علامت‌های «+» و «-» طوری پر کنید که حاصل عبارت زیر برابر ۱ باشد.

$$10 \textcircled{2} 0 \textcircled{3} 0 \textcircled{4} 0 \textcircled{5} 0 \textcircled{6} 0 \textcircled{7} 0 \textcircled{8} 0 \textcircled{9} 0 \textcircled{1}$$



ب) چرا نمی‌توان جاهای خالی را با علامت‌های «+» و «-» طوری پر کرد که حاصل عبارت بالا برابر صفر باشد؟



.۱۰. در فصل اول با یک مثلث عددی مشهور آشنا شدیم. اگر اعداد هر سطر این مثلث را یکی در میان قرینه کنیم، الگوی زیر ساخته می‌شود.



عددهای صحیح

-1	1
-1	2
-1	3
-1	4

- الف) سطر پنجم و ششم مثلث روبرو را بنویسید.
 ب) مجموع اعداد سطر ششم و هفتم این مثلث را به دست آورید.
 ج) آیا می‌توانید مجموع اعداد سطر هزارم این مثلث را حدس بزنید؟ سطر هزار و یکم را چطور؟

۱۱. جای خالی را طوری پر کنید که مجموع اعداد دو سطر با هم برابر شوند.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۹۷۰
-1	-2	-3	-4	-5	-6	

۱۲. الف) در جدول زیر، در سطر اول عدد صفر را در خانه وسط قرار داده‌ایم و اعداد صحیح دیگر را به ترتیب قبل و بعد از آن نوشته‌ایم. در سطر دوم عدد ۲ را در خانه وسط قرار داده‌ایم. اعداد صحیح را به ترتیب قبل و بعد از ۲ قرار دهید. عددی که در خانه پایین عدد ۳ نوشته‌اید، چیست؟

-3	-2	-1	0	1	2	3
			2			

ب) اگر جدول بالا را از چپ و راست با قانون گفته شده ادامه دهیم، عددی که در خانه پایین 10^0 قرار می‌گیرد چیست؟ چه عددی در خانه بالای ۸۸- قرار خواهد داشت؟

ج) خانه‌های خالی جدول زیر را با قانون قسمت «الف» پر کنید.

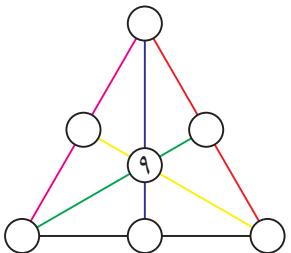
			...	-2	-1	0	1	2	...		
-237			91	

د) در جدول بالا در هر ستون دو عدد وجود دارد. تفاضل هر دو عدد را در زیر آن دو عدد بنویسید. اعدادی که در ردیف سوم نوشته اید، چه رابطه ای با یکدیگر دارند؟

۱۳. در زیر، شش پاره خط (با رنگ‌های متفاوت) رسم کرده‌ایم و سپس روی هریک سه دایره قرار داده‌ایم. آیا می‌توانید دایره‌های خالی را با اعداد صحیح طوری پر کنید که مجموع



سه عدد روی هر پاره خط برابر صفر شود؟



کارگاه بازی - دوز با اعداد صحیح

در جدول زیر، دسته‌های سه‌تایی عده‌ها را به صورت افقی، عمودی یا مورب در نظر بگیرید. می‌توان بین برخی از این دسته‌های سه‌تایی با استفاده از علامت‌های «+» یا «-»، یک رابطهٔ تساوی برقرار کرد.

-3	-1	-3	2	6	-4	3	1	5	1
-3	2	-4	-1	5	-3	4	2	-1	3
-2	2	-4	3	1	0	-5	7	0	4
4	-1	-2	6	7	0	-3	3	-4	-2
-1	-3	-5	2	3	-1	1	1	0	3
-2	7	-5	1	0	-4	4	-2	-3	1
-3	1	3	4	5	6	-6	0	5	7
-7	-1	6	-8	1	-6	-5	2	2	6
2	-5	-6	-3	-1	1	3	2	-5	2
-1	-4	3	0	-3	-1	-2	5	-2	-3

برای مثال در جدول بالا، سه‌تایی ۱، ۳ و -۲ باهم این تساوی را می‌سازند:

$$1 - 3 = -2$$

عددهای صحیح

و سه تایی $-5, -2, 7$ این تساوی را:

$$7 + (-5) = 2.$$

مرحله اول. با یکی از دوستان خود بازی کنید و در هر نوبت یک تساوی بنویسید. هر کس نتواند در کمتر از 30 ثانیه یک تساوی بیابد، نوبتش را از دست می‌دهد.
امتیاز هر بازیکن تعداد تساوی‌های درستی است که نوشته است.

مرحله دوم. هر بازیکن جدول ذیل را با عددهای $-5, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ در مدت چهار دقیقه پر کند به گونه‌ای که عددهای همسایه‌های هر خانه متفاوت باشند. برای مثال، در جدول زیر، عددهای همسایه خانه 1 متفاوت‌اند.

-3	-1	-2
2	1	-5
4	3	5

هر بازیکن جدول زیر را با قانون گفته شده پر کند.

سپس آن را به حریفش بدهد تا او مانند مرحله اول تساوی‌ها را پیدا کند و پایین جدول بنویسد.
بازیکنی که در جدول حریفش تساوی‌های بیشتری پیدا کند، برنده است.

ضرب و تقسیم اعداد صحیح

۱. الف) جاهای خالی را با دو عدد پر کنید به‌طوری که تساوی برقرار باشد.

$$(\bigcirc \times 3) - (\bigcirc \times (-2)) = 8$$

ب) برای «الف» جوابی دیگر بیابید.

۲. تمام جفت عدهای صحیحی را پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۱۸ باشد.

۳. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $(-21 \div 3) \times (-42 \div 6) \times (-63 \div -9) + 7$

(ب) $(-8 + 4) \times (-8) \times 4 \times (-8 \div 4) + (-8 - 4)$

(ج) $5 - 2 + (5 \times (-2)) - (5 - (-2)) \div (2 - (-5))$

(د) $- (16 \times 2) \div (-24 \times 2) - (12 \times (-5)) \div 15 - (-18)$

(ه) $-16 \div 3 \times (3 \div 16) \times (-16 \times 3) - (16 - (-2)) \div (-3 - 16)$

(و) $18 \times 7 \times (21 \div (-3)) \div 22 + (-91) \div 13 - (3 \times (-17))$

(ز) $512 \div (-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2)$

(ح) $8 \times (-3) \div (-6) \times (-2) \div (-4) + 11$

۴. هریک از عبارت‌های زیر را طوری پرانتزگذاری کنید که تساوی برقرار شود.

الف $5 \times 1 - 2 \times 3 - 4 = -9$

ب) $200 \div 2 \times 5 - (-10) \div (-3) \times 17 = -10$

ج) $18 \div (-9) \times (-20) \times 20 \div (-10) - (-30) \div 5 = -28$



۵. در یک آزمون تستی، برای هر پاسخ درست ۴ نمره مثبت و برای هر پاسخ نادرست، ۲

نمره منفی در نظر می‌گیرند. دانش‌آموزی از ۷۰ پرسش آزمون، به ۵۶ پرسش پاسخ درست

داده و به ۵ پرسش جواب نداده است. نمره نهایی این دانش‌آموز چند می‌شود؟ این نمره

چقدر از نمره کامل کمتر است؟

۶. اختلاف دمای دو جسم ۸ درجه است. اگر مجموع دمای این دو جسم -20° درجه باشد،
دمای هریک چند درجه است؟

۷. ابتدا جدول ضرب زیر را کامل کنید. سپس اعداد روی مسیر قرمزرنگ را به ترتیب جمع
بزنید. حاصل جمع چه خواهد شد؟

\times	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3							
-2							
-1							
0							
1							
2							
3							

گفت و گو

- معلم ۲: من فکر می‌کنم این جلسه، آخرین جلسه تدریس این فصل است.
- معلم ۱: چه فایده‌ای دارد که این قدر زود این فصل را تمام می‌کنید؟!
- معلم ۲: نه! زود نیست! ترجیح می‌دهم وقت کلاس را ذخیره کنم تا در فصل بعدی چند مسئله چالش برانگیز مطرح کنم.
- معلم ۱: تمرین بیشتر! راز موفقیت دانشآموزان من، تمرین بیشتر است!
- معلم ۲: شما واقعاً در این تمرین‌های بیشتر، مفهوم جدیدی را به دانشآموزان می‌دهید؟
- معلم ۱: نه! مفهوم جدیدی در کار نیست! من بر خلاف شما که بیست تا تمرین می‌دهید، معتقدم باید دویست تا تمرین داد!
- معلم ۲: چرا؟
- معلم ۱: تا مطلب برای دانشآموزانم به طور کامل جا بیفتند.
- معلم ۲: یعنی شما معتقدید که دویست تا تمرین لازم است تا یک مهارت جا بیفتند؟
- معلم ۱: بله؛ دویست تا؛ حتی بیشتر، سیصد تا.
- معلم ۲: بنده شنیده‌ام هر آدمی که بخواهد یک توانایی جدید به دست بیاورد، در ابتدا نیاز به تمرین دارد. هم نیاز به تمرین دارد و هم نیاز به راهنمایی. بعدش کمک آن مهارت را می‌آموزد. بعد می‌فهمد که می‌تواند آن کار را انجام دهد؛ اما هنوز شک دارد. بعد شکش برطرف می‌شود و می‌فهمد که یاد گرفته است. ذهنش می‌گوید: «تو دیگر یاد گرفته‌ای». انگار مغزش هشدار می‌دهد که یاد گرفته‌ای. آن وقت است که اگر به او بگوییم باز هم تمرین کن، مغزش جواب می‌دهد: «دیگر کافی است! بس است!»
- معلم ۱: شما فکر می‌کنید با بیست تا تمرین یاد می‌گیرند؟

معلم ۲: اصلاً چنین فکری نمی‌کنم. من چند تا تمرین مطرح می‌کنم. اگر یاد گرفتند، می‌گوییم کافی است. اگر نه، باید بیشتر تمرین حل کنند. معمولاً^۱ دانشآموزان باهوش با ده تا تمرین مهارت مورد نظر را می‌آموزند. برای دانشآموزان متوسط حدود بیست‌سی تا تمرین کافی است؛ البته باید به ضعیفه‌ها نیز توجه داشت. باید به آنها تمرین‌های بیشتری داد؛ ولی در کنار این تمرین‌های اضافه باید به آنها اشتباهات گذشته‌شان را نیز یادآوری کرد تا دیگر اشتباه قبلی را تکرار نکنند.

معلم ۱: اما وقتی من تمرین زیاد می‌دهم، اطمینان بیشتری دارم که دانشآموزانم یاد بگیرند.

معلم ۲: خدمت شما عرض کردم. اگر کسی مهارتی را یاد گرفته باشد و از او دوباره و دوباره و دوباره، همان مهارت را بخواهند تمرین کند، فریاد اعتراضش بلند می‌شود.

معلم ۱: من که تا به حال چیزی به نام اعتراض در کلاسم نشنیده‌ام.
معلم ۲: شاید آنها در مغزشان اعتراض می‌کنند.

معلم ۱: حتی اگر این طور باشد، من باز هم کوتاه نمی‌آیم. ریاضی یعنی تمرین زیاد؛ آنقدر که من معلم مطمئن باشم همه یاد گرفته‌اند.

معلم ۲: به نظرم تمرین‌های تکراری و بیهوده برای بعضی‌ها مُخرّب خلاقیت است.
معلم ۱: متوجه می‌شوید؟!

معلم ۱: [در حالی که سرش را می‌خاراند] بالاخره من معلم باید با زور هم که شده به دانشآموزانم مهارت‌های لازم را یاد بدهم.

معلم ۲: [در حالی که لبخند می‌زد] شما بودید که می‌خواستید ریاضی‌دان تربیت کنید؟!

یکی از ویژگی‌های پروفسور که باعث می‌شد معلمی نمونه باشد، این بود که هیچ وقت از گفتن «نمی‌دانم» ابابی نداشت. برای پروفسور پذیرش اینکه سؤالی را نمی‌داند، به هیچ‌وجه مایه شرم‌ساری نبود و در عوض این موضوع گامی به سوی رسیدن به حقیقت بود. برای پروفسور یاد دادن اینکه چه چیزهایی هنوز معلوم نبود یا ناشناخته بود، همان‌قدر ضروری می‌نمود که آموزش مطالب معلوم و ثابت شده. یوکو اوگاوا، خدمتکار و پروفسور، ترجمة کیهان بهمنی:

كتاب الحجى اخزى

ما نَحْنُ الْمُصْنَفُ الشَّيْخُ لِلْأَجْلِ الْعَدِيلِ
مُحَمَّدُ بْنُ خَلْدُونِي الْخَوَازْمِيُّ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ وَلَتَبَرُّ رَحْمَةً

فِي إِسْرَارِ دُنْيَاهُ وَحَطَابِهِ الْعَدِيلِ
إِلَيْهِ الْمُهَاجِرُونَ
أَنْجَبَهُ مُحَمَّدُ بْنُ خَلْدُونِي
حَقِيقَةُ الْحِسَنِ رَحْمَةُ أَنْرَاهِيمِ بْنِ مُحَمَّدٍ
أَرْهَمُ أَجْمَدُ الْمُغَيْرِيُّ مُهَمَّانُ عَلَامِي
الْوَلِيدُ بْنُ قَبَّاسٍ رَعِيَّدُ عَلَامِي

عَدِيلٌ مُنَافِعٌ

سَعَةُ اللَّهِ الْعِلْمُ وَالْعِلْمُ
الْعَالِمُ

وَحْسَنَ اللَّهُ فِيْنَعِ الْوَكَلَةَ
وَادَ لِمَنِ الْحَدَّ حَلَّ كَلَمُهُ
عَلَى الْمُؤْمِنِ وَارَتَ حَنَّ الْمُهَمَّدِ مِنَ اللَّهِ
لَعْنَةُ الْأَنْجَلِ وَرَحْمَةُ الْمُهَمَّدِ

Introduction to
Commutative Algebra

D. U. JORDAN
J. C. Mc DONALD

L'ALGEBRA
OPERA
DI RAPHAEL BONIFELLI DE BOLOGNA
Disseminata Libri.
Con la quale si risolve de se prima e senza perfezione.

ALGÈBRE فصل

Chapitre 7
جبر و
معادله

N. BOURBAKI
ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

MASSON

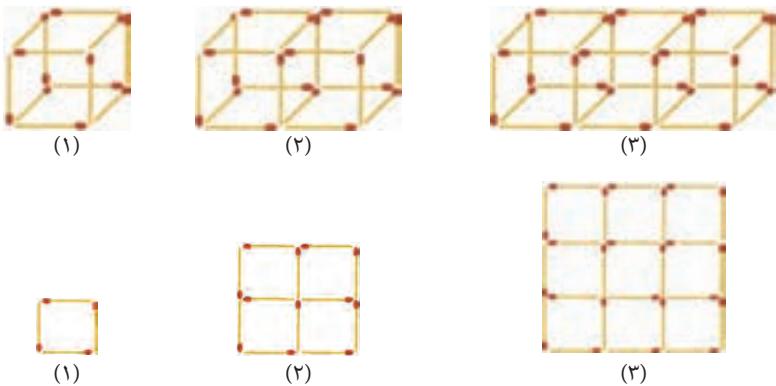
А. Г. КУРОШ

ЛЕКЦИИ
ПО ОБЩЕЙ
АЛГЕБРЕ

محمد خوارزمی را در همه جای دنیا به عنوان پدر جبر می‌شناستند. خوارزمی کتابی تألیف کرد با عنوان «الجبر و المقابلة» که واژه جبر یا algebra نیز از آن برداشت شده است. ترجمه این کتاب در اروپا باعث شد اروپاییان شیوه نوشتن عدددها را که رومی بود، کنار بگذارند و به شیوه فعلی که هندی-عربی نامیده می‌شود، روی بیاورند. خوارزمی با متمایز ساختن جبر از حساب گام بزرگی را در تحرید ریاضیات برداشت.

الگوهای عددی

۱. شکل‌های زیر، دو الگوی چوب‌کبریتی را نشان می‌دهند. الگوی اول را مکعبی و الگوی دوم را مربعی می‌نامیم.



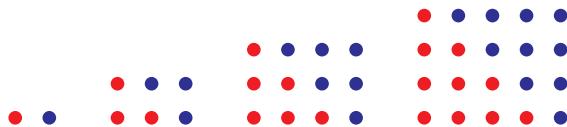
الف) برای هریک از دو الگوی بالا، با توجه به چوب‌کبریت‌های شکل‌های (۱)، (۲) و (۳)، شکل (۴) و شکل (۵) را رسم کنید.

ب) تعداد چوب‌کبریت‌های شکل n^3 هر الگو را برحسب n بیابید.

ج) با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت قبل به دست آورده‌اید، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل (۲۰) هریک از الگوها را پیدا کنید.

د) آیا می‌توانید شکلی از الگوی مکعبی بیابید که تعداد چوب‌کبریت‌های آن با تعداد چوب‌کبریت‌های یک شکل از الگوی مربعی برابر باشد؟

۲. در زیر، چهار شکل از یک الگو را مشاهده می‌کنید.



الف) شکل پنجم و ششم این الگو را رسم کنید.

ب) در شکل n^3 این الگو چند دایره توپر قرمز وجود دارد؟



۳. جمله هزارم هریک از الگوهای زیر را بیابید.

(الف) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$

(ب) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

(ج) $1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$

(د) $3, 8, 13, 18, 23, 28, \dots$

(ه) $-7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots$

(و) $7, 8, 13, 14, 19, 20, 25, 26, \dots$



۴. جدول‌های زیر را بدقت بینید. همهٔ عددهای نوشته شده جدول سمت راست نتیجهٔ قانونی است که روی عددهای جدول سمت چپ اعمال شده است.



-5	-8	7	4	9
6	3	4	-7	0

30	24	-28	28	0
11	11	-3	-11	-9

با کشف و اعمال این قانون روی عددهای جدول سمت چپ زیر، خانه‌های خالی را پر کنید.

1	2	-3	5	-8
2	-2	2	4	-1

جانگهدار

می‌خواهیم مفهومی را تعریف کنیم به نام «جانگهدار».

جانگهدار موجودی است که جا نگه می‌دارد!! این تعریف ساده‌تر از آن است که بخواهیم آن را شرح دهیم. در ادامه یک مثال از جانگهدار می‌آوریم.

داریوش کاپیتان تیم فوتسال کلاس، باید یک تیم برای شرکت در مسابقات فوتسال به مسئولان مدرسه معرفی کند. ولی او در انتخاب دروازه‌بان دچار مشکل شده است. داریوش برای پست دروازه‌بانی باید یک نفر را معرفی کند؛ ولی تعداد کسانی که می‌توانند دروازه‌بان باشند زیاد است. او باید از بین سهند، هونم، سروش و محمد یکی را انتخاب کند. مسئولان مدرسه هم گفته‌اند داریوش سریع‌تر تیم خود را معرفی کند. بنابراین داریوش تیم را بدون دروازه‌بان معرفی کرد و از مسئولان مدرسه درخواست کرد که بعداً دروازه‌بان را معرفی کند.

دروازه‌بان	مدافع	هافبک	هافبک	ذخیره	ذخیره	مهاجم	ذخیره	ذخیره
X	Dariush	Bardia	Ahsan	Ulirضا	Fرشاد	Mohsen		

در اینجا X جانگهدار است. کسانی که می‌توانند در جای X قرار بگیرند، عبارت‌اند از سهند،

هومن، سروش و محمد؛ بنابراین X یک جانگهدار اسمی است؛ یعنی موجوداتی که می‌توانند به جای X قرار بگیرند اسامی دانش‌آموزان هستند.

در ریاضیات معمولاً جانگهدارها با حروف انگلیسی نشان داده می‌شوند. به این جانگهدارها «متغیر» می‌گویند.



عبارت جبری

۱. کدامیک از جملات زیر متشابه‌اند؟

$$\begin{array}{l} 6x, 6x.y, 8x, 3, 4x.y.y, -2xy, -100, 15y.x.y, 3x.x.y, 19x, -x.y, 9y, \\ 2y, 16x.y, 0. \end{array}$$

۲. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف	$10y - 8x + y - 3x$	ب	$\frac{3}{7}x - \frac{5}{7}y - \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y$
	$18x + 10y - 8x + y - 3x$		$4(4y - 2a) + 4(a - 2y)$
ج	$13x.y - 44x - 9x.y + 8y$	د	$94x + 4(4y - 2a)$
	$13x.y - 44x - 9x.y + 8y$		$4(4y - 2a)$
ه	$3(x - 2z) - (8x - 4z) - 3(x - 2z)$		
	$3(x - 2z) - (8x - 4z) - 3(x - 2z)$		
و	$9(x - x.x + 1) + 6x(2x - 4) + 16$		
	$9(x - x.x + 1) + 6x(2x - 4) + 16$		

۳. جاهای خالی را با عبارت‌های جبری مناسب پر کنید.

$$\begin{array}{l} \text{الف} \quad 12m + \dots - 3k + \dots = 3m + 3k \\ \text{ب} \quad 6(2x + \dots) - 2(\dots + 3y) = 6x + 6y \end{array}$$

۴. می‌خواهیم با استفاده از خاصیت پخشی بررسی کنیم که چرا حاصل ضرب هر دو عدد منفی، عددی مثبت است. ابتدا با یک مثال، حاصل ضرب یک عدد مثبت در عددی منفی را بررسی می‌کنیم.

الف) با پر کردن جاهای خالی با عددهای مناسب نشان دهید: $-12 = -2 \times (-6)$.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times (-6 + 6) = 2 \times \dots + 2 \times \dots \\ 2 \times (-6 + 6) = 2 \times \dots = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \times \dots + 2 \times \dots = \dots$$

$$\Rightarrow 2 \times (-6) = -12.$$

ب) با پر کردن جاهای خالی با عددهای مناسب نشان دهید: $12 = -2 \times (-6)$.

$$\left. \begin{array}{l} -2 \times (-6 + 6) = -2 \times \dots + (-2) \times \dots \\ -2 \times (-6 + 6) = -2 \times \dots = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \times \dots + (-2) \times \dots = \dots$$

$$\Rightarrow -2 \times (-6) = 12.$$

ج) اگر a و b دو عدد مثبت باشند، نشان دهید $(-a)(-b) = ab$.

۵. یک عدد در نظر بگیرید. ۱۱ واحد به آن اضافه کنید. مجموع را در ۲ ضرب کنید و از حاصل ضرب ۲۰ واحد کم کنید. آنچه را که به دست آمده در ۵ ضرب کنید و از حاصل ضرب، ۱۰ برابر عددی که در ابتدا در نظر گرفته بودید، کم کنید. حاصل برابر ۱۰ خواهد شد.

با استفاده از رابطه های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۱۰ می رسید.

۶. سه رقم انتخاب کنید به طوری که همگی مخالف صفر باشند. با این سه رقم شش عدد دو رقمی مختلف درست کنید. مجموع این عددهای دو رقمی را بر مجموع سه رقم انتخابی تقسیم کنید. حاصل برابر ۲۲ خواهد شد.

با استفاده از رابطه های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۲۲ می رسید.

۷. از مدرسه حلی تا شهرک بهار ۱۲۰۰ متر، از مدرسه علامه تا شهرک بهار ۹۰۰ متر و از مدرسه حلی تا مدرسه علامه ۶۰۰ متر است.

الف) اگر صبحها a دانشآموز از شهرک بهار به مدرسه حلی و b دانشآموز از شهرک بهار به مدرسه علامه بروند، در مجموع در یک صبح چند متر پیاده روی توسط همه دانشآموزان صورت می گیرد؟

ب) اگر در عصر $\frac{1}{2}$ دانشآموزان حلی به سمت علامه بروند و از آنجا به شهرک برگردند و بقیه دانشآموزان حلی به شهرک برگردند و همچنین تمام دانشآموزان علامه به شهرک برگردند، در مجموع همه دانشآموزان در یک بعدازظهر چند متر پیاده روی انجام می دهند؟

۸. در پارکینگ لاله، تعداد دوچرخه ها را x ، تعداد سه چرخه ها را y و تعداد ماشین ها را z در نظر می گیرند.

الف) تعداد وسائل نقلیه‌ای که در پارکینگ لاله موجود است را با یک عبارت جبری نشان دهید.

ب) اگر در پارکینگ لادن ۳ برابر پارکینگ لاله دوچرخه، ۲ برابر پارکینگ لاله سه‌چرخه و نصف پارکینگ لاله ماشین موجود باشد، تعداد وسائل نقلیه‌ای را که در هر دو پارکینگ موجود است، با یک عبارت جبری نشان دهید.

ج) در هر دو پارکینگ چند چرخ موجود است؟



۹. در شهر عجایب قیمت هر میوه x ، هر غذا y و هر نوشیدنی z است. جدول زیر نشان می‌دهد که آقای شکمو در سه روز گذشته چه خوراکی‌هایی خورد است. ابتدا جدول را کامل کنید و سپس بگویید که آقای شکمو در این ۳ روز چقدر پول بابت شکم خرج خود کرده است.

نوع خوراکی	تعداد دفعات مصرف	قیمت
سیب	۴ بار	
چلوکباب	۲ بار	
شربت	۶ بار	
نوشابه	۹ بار	
پیتزا	۱۳ بار	
گلابی	۱ بار	
خیار	۱۸ بار	
آبپرتقال	۳ بار	
موز	۵ بار	
أملت	۱۵ بار	



مقدار عددی یک عبارت جبری

۱. در هریک از قسمت‌های زیر، با توجه به ستون اول، جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

(الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴	...	۱۲	۱۳
$2x - 1$								

(ب)

x	۳	۴	۵	۶	۷	...	۲۳	۲۴
$x(x - 1)$								

(ج)

x	۱	۲	۳	۴	۵	...	۹	۱۰
$4x \cdot x + 2$								

(د)

x	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۲	۱۳
$x \cdot x + x$								

۲. در هریک از قسمت‌های زیر مشخص کنید مساحت هر شکل برحسب چه متغیرهایی نوشته شده است و هر متغیر نشان‌دهنده چیست؟

الف) xy : مساحت مستطیل

(ب) ah : مساحت متوازی‌الاضلاع

ج) $\frac{ab}{2}$: مساحت لوزی

(د) $\frac{1}{2}(a+b)h$: مساحت ذوزنقه

۳. برای مقادیر داده شده در هر قسمت، مساحت خواسته شده را به دست آورید.

الف) مساحت مستطیلی به طول ۵ و عرض ۳.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاعی با طول قاعده ۲ و ارتفاع ۵.

ج) مساحت یک لوزی با طول قطرهای $\frac{3}{2}$ و $\frac{4}{3}$.

د) مساحت ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۱۲ و ۴، و ارتفاع ۳.

معادله

هرگاه یک عبارت جبری مساوی یک عبارت جبری دیگر یا یک عدد شود، معادله تشکیل می‌شود. هریک از تساوی‌های زیر یک معادله است.

$$15x - 4 = 5 \quad (\text{الف})$$

$$z = 18x \cdot x \cdot x - 4t \quad (\text{ج})$$

$$18x \cdot x - 3x \cdot y = 12x - 4y \cdot x \quad (\text{ب})$$

$$v = 2k + t \quad (\text{د})$$

معادله یعنی «معادل شدن» یک عبارت جبری با یک عبارت جبری دیگر (و یا یک عدد)

در قسمت «الف»، عبارت جبری $4 - 15x$ معادل است با 5 . این معادله دارای یک متغیر x است. در قسمت «ب»، عبارت جبری $18x \cdot x - 3x \cdot y$ معادل است با عبارت جبری $12x - 4y \cdot x$. این معادله دارای دو متغیر x و y است.

تمرین. در کدامیک از موارد زیر معادله نمی‌بینید؟ در مواردی که معادله هستند، تعیین کنید چه چیزی معادل چه چیزی است. همچنین تعیین کنید هر معادله چند متغیر دارد.

$$11x \cdot x + x = 8x - 3x \cdot x \cdot x \quad (\text{الف})$$

$$12x - 9y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$13x - 4x \cdot x \quad (\text{ج})$$

$$8x - 4 = 2x + 6 \quad (\text{د})$$

$$4x - 2 = 2x + 4z = 5x + 2y \quad (\text{ه})$$

$$1393 = 1393 \quad (\text{و})$$

$$5x + 4y - z = 20m - 2x + 4y = 2t - 5k = x \quad (\text{ز})$$

حل معادله

از اینجا به بعد درباره معادله‌هایی سخن می‌گوییم که فقط یک متغیر دارند.

تساوی زیر را در نظر بگیرید.

$$2x \cdot x + 5x = x \cdot x \cdot x - 12$$

می‌دانیم این تساوی یک معادله است. در این معادله عبارت جبری $2x \cdot x + 5x$ معادل شده است با عبارت جبری $12 - x \cdot x \cdot x$. در این معادله x یک متغیر عددی است. یعنی به جای x باید یک عدد قرار بگیرد. به نظر شما آیا در تساوی یا معادله بالا به جای x می‌توان هر عددی را قرار داد؟ به عنوان نمونه در معادله بالا مقدار x را برابر 2 قرار می‌دهیم. در این صورت آیا تساوی

جبر و معادله

بین دو عبارت جبری $x.x.x + 5x - 12$ و $2x.x + 5x$ برقار می‌ماند؟

$$2x.x + 5x = x.x.x - 12 \stackrel{x=2}{\Rightarrow} 2 \times 2 \times 2 + 5 \times 2 \stackrel{?}{=} 2 \times 2 \times 2 - 12$$

$$\Rightarrow 8 + 5 \times 2 \stackrel{?}{=} 8 - 12$$

$$\Rightarrow 18 \stackrel{?}{=} -4.$$

آیا تساوی به دست آمده برقار خواهد بود؟ واضح است که $-4 \neq 18$ ؛ یعنی 18 مساوی -4 نیست. پس ما مجاز نیستیم به جای x مقدار 2 را قرار دهیم؛ یعنی عدد 2 نمی‌تواند به جای x قرار بگیرد. حال این پرسش مطرح می‌شود:

به جای x چه عدد (یا اعدادی) را می‌توانیم قرار دهیم؟

تمرین. همانند نمونه حل شده بالا ($x = 2$)، به جای x در معادله $2x.x + 5x = x.x.x - 12$

هریک از مقدارهای زیر را قرار دهید و بررسی کنید: آیا تساوی به دست آمده درست است یا نه؟

(الف) $x = 0$

(د) $x = \frac{1}{2}$

(ب) $x = 1$

(ه) $x = -2$

(ج) $x = 3$

(و) $x = 4$

اگر تمرین قبل را کامل انجام دهید، ملاحظه خواهید کرد که تساوی

$$2x.x + 5x = x.x.x - 12$$

برای $x = 4$ برقار خواهد بود. یعنی اگر به جای x عدد 4 را قرار دهیم، توانسته‌ایم بین دو عبارت $5x + 2x.x$ و $x.x.x - 12$ ایجاد تعادل کنیم.

حل معادله یعنی «ایجاد تعادل». ایجاد تعادل بین سمت چپ و سمت راست تساوی.

مثال. می‌خواهیم معادله $6x.x - 11x = x.x.x - 6x$ را حل کنیم؛ یعنی باید عددهایی را پیدا کنیم که اگر آن عددها را به جای x قرار دهیم، تساوی بین دو عبارت جبری $(x.x.x - 6x)$ و $(6 - 11x)$ برقار بماند.

ابتدا به جای x مقدار 0 – قرار می‌دهیم.

$$x = -1 \Rightarrow (-1)(-1)(-1) - 6 \times (-1) \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times (-1) \Rightarrow -7 \neq 17$$

بنابراین -1 بین دو عبارت جبری $x.x.x - 6x$ و $x.x.x - 11x$ ایجاد تعادل نمی‌کند؛ بنابراین $x = -1$ نمی‌تواند جواب معادله $6x.x - 11x = x.x.x - 6x$ باشد.

به جای x مقدار 0 را قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \Rightarrow 0 \times 0 \times 0 - 6 \times 0 \times 0 \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times 0 \Rightarrow 0 \neq 6$$

$x = 0$ هم نمی‌تواند جواب معادله باشد.

بهجای x ، مقدار ۱ قرار می‌دهیم.

$$x = 1 \implies 1 \times 1 \times 1 - 6 \times 1 \times 1 = ? = 6 - 11 \times 1 = -5 = -5$$

اگر $x = 1$ باشد، بین دو عبارت جبری $6x.x - 6x.x - 6$ و $11x - 11x$ تعادل ایجاد شده است.

پس $x = 1$ یک جواب برای معادله $6x - 6x.x = 6 - 11x$ است.

بهجای x مقدار ۲ قرار می‌دهیم.

$$x = 2 \implies 2 \times 2 \times 2 - 6 \times 2 \times 2 = ? = 6 - 11 \times 2 = -16 = -16$$

پس $x = 2$ هم یک جواب برای معادله $6x - 6x.x = 6 - 11x$ است.

آیا می‌توانید باز هم برای این معادله جواب پیدا کنید؟ به نظر شما معادله $6x - 6x.x = 6 - 11x$ چند جواب دارد؟

تعداد جواب‌های یک معادله

برای بعضی از معادله‌ها نمی‌توان جواب پیدا کرد. برای مثال معادله زیر از این نوع است.

$$x + 4 = x - 2$$

بعضی از معادله‌ها فقط یک جواب دارند. معادله‌های زیر از این نوع اند.

- $-2x - 4 = x + 6$

- $3x - 2 = 7$

- $x.x + 6x - 4 = x.x + 5x + 6$

- $(x - 1)(x - 1) = 0$

بعضی از معادله‌ها فقط دو جواب دارند:

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

بعضی از معادله‌ها فقط سه جواب دارند. بعضی از معادله‌ها فقط چهار جواب دارند و

بعضی از معادله‌ها بینهایت جواب دارند. معادله‌های زیر از این نوع اند:

- $x(x - 1) + x = x.x$

- $3x + 4 - x = 5x - 2 - 3x + 6$

پس تکلیف ما چیست؟ از کجا بفهمیم که یک معادله چند جواب دارد؟ جواب‌های یک معادله را چگونه باید پیدا کنیم؟ اینها سؤالاتی است که به همه آنها نمی‌توان امسال پاسخ داد. چند سال برای جواب دادن به این پرسش‌ها وقت لازم است. کمی صبور باشید!

معادله‌هایی که امسال باید با آنها آشنا شوید و راه حل آنها را بیاموزید، معادله‌هایی‌اند که فقط یک متغیر دارند. در زیر، چند نمونه از این معادله‌ها را مشاهده می‌کنید.

$$\bullet \quad 3x = 18$$

$$\bullet \quad 2x - 6 = 5$$

$$\bullet \quad 6x + 5x = 11$$

$$\bullet \quad 12y - 9 = 3y - 6$$

آیا می‌توانید چند نمونه از این معادله‌ها را خودتان بسازید؟

روش حل معادله

برای حل یک معادله ابتدا باید عبارت‌های جبری سمت چپ و سمت راست تساوی را ساده کرد. سپس از خواص تساوی باید به‌گونه‌ای استفاده شود تا پس از به‌کار بردن آن، در یک طرف تساوی فقط عدد داشته باشیم و در سمت دیگر یک جمله که دارای متغیر است. در نهایت باز هم با استفاده از خاصیت تساوی می‌توانیم به جواب معادله برسیم. با این همه در این بخش تنها به روش حل معادلاتی که پس از ساده شدن در آنها تنها یک نماد متغیر ظاهر می‌شوند، توضیح داده می‌شود. همچنین خواهید دید که این معادلات تنها یک جواب دارند.

در زیر ۲ معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۱.

$$5x + 2 = 3x + 14 - x.$$

باید به دنبال عددی باشیم که اگر آن عدد را به جای متغیر x قرار دهیم، تعادل بین سمت و چپ و سمت راست تساوی برقرار بماند. اولین کاری که باید انجام دهیم، این است که عبارات جبری سمت چپ و سمت راست تساوی را ساده کنیم.

$$5x + 2 = 2x + 14.$$

در تساوی بالا می‌خواهیم عدد ۲ را از سمت چپ حذف کنیم. پس دو طرف تساوی را منهای ۲ می‌کنیم.

$$5x + 2 = 2x + 14 \implies 5x + 2 - 2 = 2x + 14 - 2$$

$$\implies 5x = 2x + 12.$$

حال می‌خواهیم جمله $2x$ را از سمت راست حذف کنیم. برای این کار دو طرف تساوی را منهای $2x$ می‌کنیم.

$$5x = 2x + 12 \implies 5x - 2x = 2x + 12 - 2x$$

$$\implies 3x = 12.$$

حالا به یک تساوی رسیده‌ایم که در یک طرف آن فقط عدد داریم و در طرف دیگر یک جمله که دارای یک متغیر است. اکنون اگر دو طرف تساوی را به عدد ۳ تقسیم کنیم، جواب معادله به دست می‌آید. جواب معادله، یعنی عددی که مجازیم در معادله بهجای متغیر قرار دهیم.

$$\begin{aligned} 3x = 12 &\implies \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \\ &\implies x = 4. \end{aligned}$$

پس در معادله $x - 5x + 2 = 3x + 14 - 4$ را قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد ماند.

$$\begin{aligned} 5 \times 4 + 2 &\stackrel{?}{=} 3 \times 4 + 14 - 4 \implies 20 + 2 \stackrel{?}{=} 12 + 14 - 4 \\ &\implies 22 = 22. \end{aligned}$$

مثال ۲

$$\frac{3x + 5}{4} + 2 = x - 3.$$

ابتدا هر دو طرف تساوی را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر از بین برود و سپس دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{3x + 5}{4} + 2\right) &= 4(x - 3) \implies 3x + 5 + 8 = 4x - 12 \\ &\implies 3x + 13 = 4x - 12. \end{aligned}$$

سپس برای اینکه عدد ۱۲ را از سمت راست تساوی از بین ببریم، هر دو طرف تساوی را با عدد ۱۲ جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 3x + 13 &= 4x - 12 \implies 3x + 13 + 12 = 4x - 12 + 12 \\ &\implies 3x + 25 = 4x. \end{aligned}$$

بعد از آن، از دو طرف تساوی $3x$ را کم می‌کنیم تا در سمت چپ تساوی $3x$ از بین برود.

$$\begin{aligned} 3x + 25 &= 4x \implies 3x + 25 - 3x = 4x - 3x \\ &\implies 25 = x. \end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید، مقدار x به دست آمد. اگر در معادله بهجای x مقدار ۲۵ را قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد ماند.

$$\begin{aligned} \frac{3 \times 25 + 5}{4} + 2 &\stackrel{?}{=} 25 - 3 \implies \frac{80}{4} + 2 \stackrel{?}{=} 22 \\ &\implies 22 = 22. \end{aligned}$$

تمرین‌های تکمیلی

۱. هریک از معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $5t - 4 = 16$

(ج) $-12x + 13 = 1$

(ه) $2b = 8b - 18$

(ز) $3g + 4 - g + 1 = 3 - 4g$

(ط) $\frac{8y-3}{5} = \frac{6y+10}{4}$

(ک) $x + 2x + 3x + \dots + 10x + 11 = 66$

(ب) $-3m - 2 = 13$

(د) $12 = 6 - 2x$

(و) $5z + 2 = 3z - 5$

(ح) $\frac{2k-2}{4} = k - 3$

(ی) $\frac{4a-6}{3} + 3a = 11 - 2a$

۲. سگی به دنبال خرگوشی که با آن 150° متر فاصله دارد، شروع به دویدن می‌کند. خرگوش در هر ثانیه ۲ متر و سگ در هر ثانیه ۴ متر می‌دود. بعد از چند ثانیه سگ به خرگوش می‌رسد؟



۳. اگر عدد ۷۲ به سه قسمت متناسب با عده‌های ۴، ۲ و ۶ تقسیم شود، کوچکترین قسمت برابر چه عددی خواهد شد؟

۴. فرض کنید $4yz - 8z = xy$ باشد. اگر آنگاه $z = 20$ باشد، آنگاه $x = 20$ خواهد بود. اگر $z = 10$ باشد، آنگاه x برابر چه عددی خواهد شد؟



۵. در یک بازی، جریمه هر خطای سه برابر جریمه خطای قبلی است. اگر یک بازیکن چهار بار خطای کند و در کل 40000 تومان جریمه شود، جریمه اولین خطای چقدر بوده است؟

۶. نینا، مینو و مینو سه خوارهنرند که یک بسته شکلات را تا آخر خورده‌اند. تعداد شکلات‌هایی که نینا خورده است، یکی بیشتر از دو برابر تعداد شکلات‌هایی است که مینا خورده است. تعداد شکلات‌هایی که مینو خورده است، پنج عدد کمتر از سه برابر تعداد شکلات‌هایی است که مینا خورده است. اگر مینو و نینا به تعداد مساوی شکلات خورده باشند، مینا چند شکلات خورده است؟ مینو و نینا چند شکلات خورده‌اند؟



۷. دو خودرو هم زمان از تهران به سمت زاهدان حرکت کردند. اگر خودرو اول با سرعت 100 کیلومتر بر ساعت و خودرو دوم با سرعت 115 کیلومتر بر ساعت حرکت کنند، بعد از چند ساعت فاصله این دو خودرو از هم 135 کیلومتر خواهد شد؟



۸. علی و رضا در مغازه پدرشان سیدهای حصیری درست می‌کنند. علی پسر بزرگ‌تر، روزی 5 سبد بیشتر از رضا می‌سازد. اگر علی 3 روز و رضا 6 روز کار کند، روی هم 60 عدد سبد تولید می‌باشند. تعیین کنید هر کدام روزی چند سبد می‌باشد.

۹. یک نفر تعدادی جعبه دارد و در آن جعبه‌ها می‌خواهد کتاب‌هایش را قرار دهد. اگر در هر جعبه 40 کتاب قرار دهد، 180 کتاب روی زمین می‌ماند. اگر در هر جعبه 60 کتاب قرار دهد، 3 جعبه خالی برایش باقی می‌ماند. تعیین کنید او چند جعبه و چند کتاب دارد.

۱۰. عدد 10 را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که تفاوت آنها برابر 5 باشد.^۱

۱۱. این مسئله را ببینید.

فاطمه قصد دارد با جمع کردن پول خود یک چادر ملی که آن را بنیاد ملی مدد و لباس اسلامی-ایرانی معرفی کرده است، خریداری کند. قیمت این چادر $s + 5d$ است که در آن d قیمت یک متر چادر و s هزینه دوخت چادر است. اگر (پارچه) چادر را m متری 10000 تومان خریده باشد و هزینه دوخت آن 20000 تومان باشد، پول چادر فاطمه چقدر می‌شود؟

در این مسئله قیمت چادر این‌طور محاسبه می‌شود: پنج برابر قیمت یک متر پارچه بعلاوه هزینه دوخت چادر.

فاطمه می‌توانست هر جنس پارچه‌ای را که دوست داشت، سفارش دهد. در این صورت قیمت پارچه ممکن بود گران‌تر یا ارزان‌تر شود. هزینه دوخت را هم خیاط تعیین می‌کرد. خیاط می‌توانست هر مقدار ثابتی که می‌خواست اعلام کند.

^۱ این مسئله منتسب به شیخ بهایی است. مزار او در کنار صحن آزادی حرم امام رضا (ع) واقع است.

الف) عدد ۵ در این مسئله نشان‌دهنده چیست؟

ب) دستمزد خیاط با بالا رفتن d زیاد می‌شود یا با بالا رفتن s ؟

ج) اگر کیفیت دوخت خیاط متعدد باشد، چگونه می‌توان این تنوع را در رابطه قیمت چادر وارد کرد؟

د) اگر قیمت چادر در یک خیاطی به صورت $5d + sr$ محاسبه شود، به نظر شما نشانگر چیست؟

ه) اگر قیمت چادر در یک خیاطی به صورت $cd + s$ محاسبه شود، به نظر شما نشانگر چیست؟



و) قیمت یک چادر در یک تولیدی چادر به صورت $t \cdot (5d + s)$ محاسبه می‌شود. به نظر شما در این رابطه t بیانگر چیست؟ علامت «-» نشان از چه اتفاقی در محاسبه قیمت چادر می‌دهد؟



ز) به عنوان یک خیاط خلاق، رابطه‌ای برای قیمت چادر ارائه دهید که هم شما و هم مشتری‌هایتان راضی باشند.



۱۲. دختر دانشجوی ۱۸ ساله‌ای از من پرسید: دیروز، در جشن تولد چهلمین سال شما، سه دختر پیرامون شما را گرفته بودند، آنان چه کسانی بودند؟
گفتم: آنان دختران من بودند.
گفت: آنان چند ساله‌اند؟

گفتم: بگذار آن را به صورت یک مسئله در بیاورم: حاصل ضرب سن آنها مانند حاصل ضرب سن من و شمامت، و مجموع عمرشان به اندازه تفاوت سن من با سن خواهر کوچک شمامت.

دختر دانشجو، در حالی که به مسئله می‌اندیشید، رفت و پرسش کنан بازگشت.
گفتم: آرام باش، من می‌دانم شما میان دو پاسخ سرگردان و حیران هستید، ولی بدان در میان دخترانم دو قلوب نیستند.

گفت: بنابراین، در میان دختران شما کسی همسن و سال من نیست.
خب، حالا بگویید سن دختران من چقدر است؟ و سن خواهر کوچک دختر دانشجو چقدر است؟^{۱۹}

^{۱۹} احمد سلیم سعدان، لذت اندیشه ریاضی، ترجمه ستار عودی، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۸۳، صفحه ۶۰.

جایزه نوبل و جایزه فیلدرز

هر ساله یکی از خبرهای مهم علمی مربوط به اهدای جایزه‌های نوبل است. شش جایزه که چهار جایزه آن مربوط به علوم فیزیک، شیمی، پزشکی و اقتصاد است و دو جایزه دیگر برای صلح و ادبیات. آلفرد نوبل (Alfred Nobel)، شیمی‌دان سوئدی، با اختراع دینامیت ثروت زیادی به دست آورد که بته بیشتر از راه فروش اسلحه به دست آمده بود. نوبل وصیت کرد که ثروتش وقف جایزه‌هایی شود که وقف صلح شوند. با شروع قرن بیستم، اهدای جایزه نوبل شروع شد؛ ولی با نگاهی به قرن بیستم و جنگ‌های جهانی می‌توان نتیجه گرفت که مبلغی که بنیاد نوبل خرج صلح کرد خیلی کمتر از مخارج جنگ است.

شاید سؤال کنید: چرا جایزه نوبل به ریاضیات اختصاص نمی‌یابد؟ این سوال پایه داستان‌ها و روایت‌های فراوانی شده است که معروف‌ترین آنها روایتی عاشقانه است! می‌گویند آلفرد نوبل عاشق دختری می‌شود، ولی ازدواج آن دختر با یک ریاضی‌دان، کینه‌ای بزرگ نسبت به ریاضیات در دل نوبل پدید می‌آورد! بته بیشتر موّرخان این داستان را یک شایعهٔ اساس می‌دانند و به نظر آنها تنها دلیلی که نوبل جایزه‌ای به ریاضیات اختصاص نداده، این است که در زمان او ریاضیات نقش مستقیمی در علم شیمی نداشته و شیمی علمی بوده کاملاً تجربی و بیگانه با فرمول‌های ریاضیات.

اوخر قرن نوزدهم میلادی فلیکس کلاین (Felix Klein) و جرج کانتور (Georg Cantor) ریاضی‌دانان بزرگ آلمانی طرحی ریختند تا هر چند وقت یکبار ریاضی‌دانان سراسر جهان گرد هم آیند و به تبادل نظر پیردازند. اولین این گردهمایی در سال ۱۹۸۷ برگزار شد و پس از آن در سال ۱۹۰۰ هر چهار سال یکبار (به‌جز در زمان جنگ‌های جهانی) این گردهمایی که «کنگره بین‌المللی ریاضی» نام دارد برگزار می‌شود و بزرگ‌ترین و مهم‌ترین گردهمایی ریاضی‌دانان سراسر جهان است.

در سال ۱۹۲۴ کنگره بین‌المللی ریاضی در تورنتو کانادا برگزار شد. در این کنگره ریاضی‌دانان تصمیم گرفتند به دستاوردهای برگسته ریاضیات دو مدار طلا اهدا شود. دیگر این کنگره جان فیلدز (John Fields) بودجه لازم را برای بنیان نهادن این جایزه اهدا کرد و برای نخستین بار در سال ۱۹۳۶ این جایزه به دو ریاضی‌دان داده شد.

اما فیلدرز با آنکه از نظر همه ریاضی‌دانان معتبرترین نشان ریاضی به حساب می‌آید، هیچ‌گاه شهرت جایزه نوبل را کسب نکرد. برای همین و برای اینکه اهمیت این جایزه را در ریاضی نشان دهنند، از آن با عنوان «نوبل ریاضیات» نیز نام بردۀ می‌شود. بته این دو جایزه تفاوت‌های زیادی باهم دارند. مبلغ مادی جایزه فیلدرز اصلاً قابل مقایسه با جایزه بیش از یک میلیون دلاری نوبل نیست و شرط سنی زیر چهل سال، رسیدن به جایزه فیلدرز را خیلی دشوار می‌سازد. مریم میرزاخانی، ریاضی‌دان معروف ایرانی، اولین زنی است که موفق به دریافت جایزه فیلدرز شده است.

فصل ۴

هندسه و استدلال

طبیعت بهترین کتاب برای مطالعه و دیدن شکل‌های مختلف هندسی است. آیا تا به حال به تارهای عنکبوت دقت کرده‌اید؟ چه شکل‌های هندسی را در تار عنکبوت می‌توانید نام ببرید. آیا به این اندیشه‌اید که عنکبوت چگونه می‌تواند تارهایش را با این نظم و دقت درست کند؟

گفت و گو

- معلم معلم‌ها:** با اینکه هنوز برای آموزش روش تدریس کتاب جدید کار داریم، ولی برای امروز تا همینجا کافیه. خسته نباشید.
- معلم:** می‌تونم یه سؤال جانبی مطرح کنم؟
- معلم معلم‌ها:** بفرمایید. امیدوارم خیلی حاشیه‌ای نباشه.
- معلم:** می‌خواستم بدونم چرا تو هندسه اثبات می‌کنن.
- معلم معلم‌ها:** اوه! زدی تو خال! این یه سؤال واقعاً مهمه. فکر می‌کنی چرا؟
- معلم:** این سؤالیه که دانش آموز ازم می‌پرسن. منم یه جواب‌هایی به اونها می‌دم.
- معلم معلم‌ها:** مثلاً چی می‌گی؟
- معلم:** می‌گم اثبات می‌کنیم تا مطمئن بشیم.
- معلم معلم‌ها:** اگه من دانش آموز شما باشم می‌گم: «مگه با خطکش نمی‌شه مطمئن شد؟»
- معلم:** شما چی جواب می‌دیدی؟
- معلم:** موقع اندازه‌گیری با خطکش دچار خطأ می‌شیم. تازه هر خطکشی به درجه‌بندی داره. مثلاً با خطکشی که برحسب میلی‌متر درجه‌بندی شده نمی‌شه $\frac{4}{5}2$ میلی‌متر رو اندازه گرفت.
- معلم معلم‌ها:** من در نقش همون دانش آموز می‌گم: «از پرگار استفاده می‌کنیم. سوزن پرگار و نوک پرگار رو می‌ذاریم دو سر پاره خط و با پرگار دوتا پاره خط رو باهم مقایسه می‌کنیم. نیازی هم به اثبات نداریم!»
- معلم:** اگه پاره خط خیلی بزرگ بود چی؟ مثلاً اندازه زمین والیبال بود چی؟
- معلم معلم‌ها:** از طناب استفاده می‌کنیم.
- معلم:** اگه اندازه زمین فوتbal بود چی؟ یا خیلی بزرگ‌تر؟
- معلم معلم‌ها:** از GPS کمک می‌کنیم. بالاخره حتی اگه به اندازه فاصله دوتا شهر هم باشه، GPS جواب می‌ده!!

علم: اگه یه سر پاره خط اینجا بود و یه سرش توی یه کهکشان دیگه چی؟

علم معلم‌ها: آفرين! اين دیگه جواب نداره! هیچ روش اندازه‌گيري مستقيم و درست و حسابي وجود نداره تا تو اون فاصله بتونيم ازش کمک بگيريم. باید از اثبات عقلی کمک بگيريم تا خواص اشكال هندسي رو نشون بدیم. بهر حال جايی هست که هیچ ابزاری کار نمی‌کنه و فقط عقل کار می‌کنه!

علم: استاد واقعاً نيازه تا تو کهکشان بالا بريم؟ اگه اين طور باشه، تو ابعاد زميني، نيازی به اثبات هندسي نیست!!

همين هنگام صدایي از ته کلاس شنیده شد که معلمی می‌گفت: استاد خسته نباشد. صدای دیگري گفت: استاد اگه دانش آموزی ازم بپرسه چرا تو هندسه اثبات می‌کنيم و اين قدر پرس و جو کنه از کلاس می‌ندازمش بیرون! صدای دیگري گفت: استاد ما اعصاب معصاب نداریم. اگه کسی این سؤال رو بپرسه، همون اول می‌ندازیمش بیرون!
خیلی‌ها خنده‌ندند.

علم معلم‌ها: [در حالی که نگاهش در چشمان معلم بود و از کلاس بیرون می‌رفت] لازم نیست تا ابعاد کهکشان بالا بريم! اصل عدم قطعیت هایزنبرگ رو یه نگاه بنداز. اون موقع می‌فهمی که هیچ وقت بشر نمی‌تونه هیچ اندازه‌گيري دقیقی انجام بده!!

روابط بين پاره خطها

۱. همه پاره خط‌های موجود در شکل زیر را نام ببريد.



۲. چند مثلث با محیط ۷ واحد می‌توان رسم کرد به‌طوری‌که طول ضلع‌های آنها عددهای صحیح باشند؟ هریک از مثلث‌ها را رسم کنید.

۳. روی محور زیر، چند نقطه، مانند D ، وجود دارد به‌طوری‌که



۴. با توجه به اعداد و نمادهای به کار رفته در شکل‌های زیر، چرا در هر شکل $\overline{PR} = \overline{QS}$ آیا استدلالی وجود دارد که برای هر سه شکل درست باشد؟



۵. نقاط P , Q , R و S روی یک خط قرار دارند به طوری که S بین R و Q , و Q بین P و R قرار دارد.

الف) با توجه به توضیحات بالا، شکل مناسبی رسم کنید.

ب) اگر $\overline{RS} = \overline{PS} = \overline{RQ}$, ثابت کنید $.RS = \overline{PQ}$

در مسئله قبل، شکلی رسم نشده است؛ به نظر شما چند شکل برای شرایط گفته شده می‌توان رسم کرد؟

واضح است که با ابزار اندازه‌گیری نمی‌توانیم همه پاره خط‌هایی که شرایط گفته شده را دارند، بررسی کنیم؛ اما راه حلی وجود دارد که ما را از برابری \overline{PQ} و \overline{RS} (در همه حالت‌های ممکن) مطمئن می‌کند! به این‌گونه راه حل‌ها اثبات‌های هندسی می‌گویند.

کاری یک اثبات هندسی لزوماً برای یک شکل نیست؛ بلکه برای تمامی شکل‌هایی است که همه ویژگی‌های شکل داده شده را داشته باشند. در واقع در اثبات‌های هندسی از متغیرها استفاده می‌شود تا اثبات (لزوماً) برای یک شکل خاص نباشد.

۶. نقاط A , B , C و D روی یک خط قرار دارند به طوری که $\overline{AC} = \overline{BD} = y$ و $\overline{AB} = x$ در هریک از قسمت‌های زیر، ابتدا شکل مناسبی رسم کنید و سپس عبارت جبری خواسته شده را به دست آورید.

الف) اگر نقطه C بین دو نقطه A و D , و نقطه D بین دو نقطه B و C باشد، آنگاه \overline{CD} را برحسب متغیرهای x و y بنویسید.

ب) اگر نقطه A بین دو نقطه C و D , و نقطه D بین دو نقطه A و B باشد، آنگاه \overline{CD} را به صورت یک عبارت جبری با متغیرهای x و y بنویسید.

ج) اگر نقطه A بین دو نقطه C و D , و نقطه B بین دو نقطه A و D باشد، آنگاه \overline{CD} را برحسب x و y به دست آورید.

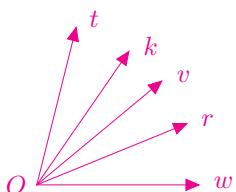
۷. دو پاره خط AB و CD روی یک خط راست قرار دارند و نقطه O وسط هر دو پاره خط است. ابتدا شکل (شکل‌های) مناسبی رسم کنید. سپس،

الف) ثابت کنید $\overline{AC} = \overline{BD}$.

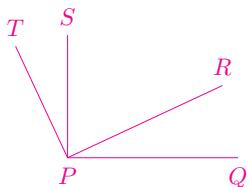
ب) ثابت کنید $.AD = \overline{BC}$.

روابط بین زاویه‌ها

۱. همهٔ زاویه‌های حاده موجود در شکل زیر را نام ببرید.



۲. در شکل زیر، $T\hat{P}S = R\hat{P}Q = 90^\circ$. ثابت کنید $T\hat{P}R = S\hat{P}Q = 90^\circ$.



۳. الف) متمم زاویهٔ 28° درجه را به دست آورید.

ب) اختلاف مکمل و متمم زاویهٔ 28° درجه چقدر است؟

ج) اختلاف مکمل و متمم زاویهٔ 77° درجه را به دست آورید.

د) آیا اختلاف مکمل و متمم هر زاویهٔ عددی ثابت است؟ چرا؟

۴. الف) دو پاره خط AB و CD یکدیگر را در نقطه O قطع کرده‌اند به‌طوری‌که $A\hat{O}C = 70^\circ$. هریک از زاویه‌های $A\hat{O}D$ ، $B\hat{O}C$ و $B\hat{O}D$ چند درجه است؟

ب) دو پاره خط AB و CD یکدیگر را در نقطه O قطع کرده‌اند به‌طوری‌که $A\hat{O}C = x$. هریک از زاویه‌های $A\hat{O}D$ ، $B\hat{O}C$ و $B\hat{O}D$ را بر حسب x به دست آوردید.

۵. الف) اگر زاویه‌ای 45° درجه باشد، زاویهٔ مکمل آن چند درجه است؟

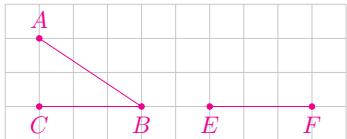
ب) اگر زاویه‌ای x درجه باشد، زاویهٔ مکمل آن بر حسب x چقدر است؟

ج) مجموع دو زاویه (به اندازه‌های a و b) 75° درجه است. مجموع مکمل‌های این دو زاویه چند درجه است؟

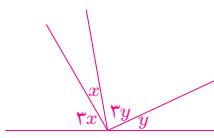
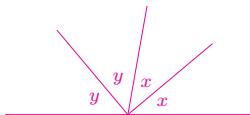
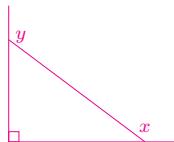
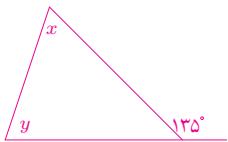


۶. در طول شباهنگ، چند بار زاویه بین عقریه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار 90° درجه می‌شود؟

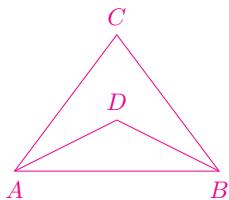
۷. در شکل زیر، نقطه D را چنان بیابید که $\overline{AB} = \overline{ED}$ و دو زاویه ABC و DEF مکمل باشند.



۸. در هریک از شکل‌های زیر، $x + y$ چقدر است؟



۹. در شکل زیر، $C\hat{B}D = C\hat{A}D = C\hat{B}A = D\hat{B}A$ و $D\hat{A}B = C\hat{A}B$. ثابت کنید AD به ترتیب نیمساز زاویه‌های A و B هستند؟



۱۰. دو زاویه AOB و BOC مکمل‌اند. اگر Ox نیمساز زاویه AOB و Oy نیمساز زاویه BOC باشد، ثابت کنید $x\hat{O}y = 90^\circ$ قائمه است.

۱۱. سه پاره خط ZW ، LK و XY در نقطه O همسر اند. نیم خط OK نیمساز $Z\hat{O}Y$ و $L\hat{O}W = 40^\circ$ است.

الف) با توجه به اطلاعات داده شده، شکل مناسبی رسم کنید.

ب) در شکلی که رسم کرده‌اید، چند زاویه متقابل به رأس وجود دارد. هریک از آنها را



نام ببرید.

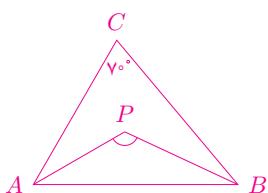
ج) اندازه زاویه‌های XOL و ZOX را به دست آورید.

۱۲. اندازه یک زاویه مثلثی از زاویه دوم 25° درجه بیشتر و اندازه زاویه سوم 9 واحد کمتر از دو برابر زاویه دوم است. اندازه هریک از سه زاویه این مثلث را بیابید.

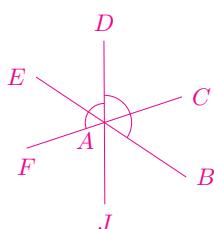
۱۳. در شکل رو به رو، $\hat{C} = 70^\circ$ نیمساز زاویه A و BP نیمساز زاویه B است.

الف) مقدار $P\hat{A}B + P\hat{B}A$ چقدر است؟

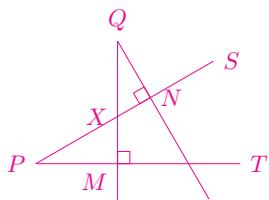
ب) زاویه APB چند درجه است؟



۱۴. سه پاره خط CF , BE و DJ در نقطه A هم‌مرسند. اگر $D\hat{A}F = 124^\circ$ و $B\hat{A}D = 108^\circ$ باشد، اندازه زاویه $E\hat{A}F$ چقدر است؟



۱۵. در شکل زیر، QM بر PS و QN بر PT عمود است. ثابت کنید زاویه‌های P و Q همان اندازه‌اند.



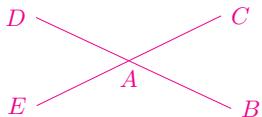
۱۶. اگر زاویه‌های مثلثی به صورت زیر باشند، اندازه زاویه سوم چقدر است؟

الف) 134° و 26° .
ب) $90^\circ - n$.

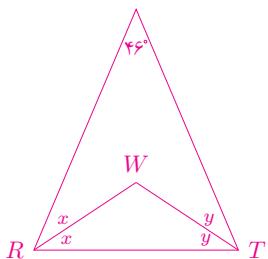
ج) u و v .
د) $a + 60^\circ$.

۱۷. در مثلث ABC ، اندازه زاویه A سه برابر اندازه زاویه B و نصف اندازه زاویه C است. اندازه زاویه A چقدر است؟

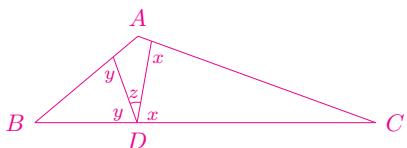
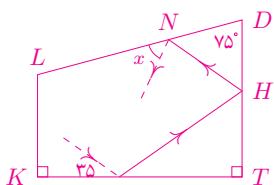
۱۸. در شکل زیر، اگر $B\hat{A}C = 2x + 5^\circ$ و $E\hat{A}D = 3x - 15^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه CAD چقدر است؟



۱۹. در شکل زیر، $R\widehat{W}T$ چند درجه است؟

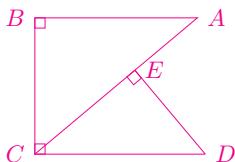


۲۰. در شکل، مسیر توپ بیلیاردی را نشان داده‌ایم که با زاویه 35° به یکی از دیوارهای میز بیلیارد می‌خورد و مسیرش را ادامه می‌دهد. اگر زاویه برخورد توپ به میز با زاویه دور شدن توپ از میز برابر باشد، x را بیابید.

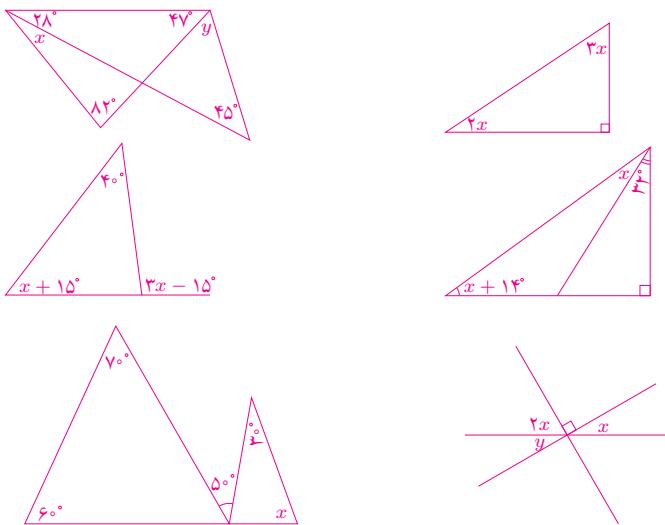


۲۱. در شکل روبرو، $\hat{A} = 110^\circ$.
 الف) مقدار $y + z$ را بیابید.
 ب) مقدار x چقدر است؟

۲۲. در شکل زیر، $A\hat{C}B = E\hat{D}C = \hat{B} = B\hat{C}D = D\hat{E}C = 90^\circ$. ثابت کنید $\hat{A} = \hat{E}$.



۲۳. در هریک از شکل‌های زیر، مقدار x و y را بیابید.



تبديل‌های هندسی و همنهشتی

نکته. دو نامگذاری $CADB$ و $ABCD$ شکل‌های یکسانی را نشان نمی‌دهند! در چهارضلعی $ABCD$ ، دو رأس A و C روی یک ضلع نیستند درحالی‌که در چهارضلعی $CADB$ دو رأس A و C روی یک ضلع قرار دارند. شکل‌های زیر این مطلب را روشن می‌کنند.



در نام چندضلعی‌ها هر دو حرف کنارهم نشان‌دهنده دو رأس روی یک ضلع‌اند. توجه کنید که شکل سمت راست بالا را می‌توان به صورت‌های $CBDA$ ، $ADBC$ ، $DBCA$ یا $NAMGZAR$ نیز نامگذاری کرد.

۱. در کدام قسمت‌ها، دو چهارضلعی داده شده یکسان نیستند؟

ب) $BADC$ و $BCDA$

الف) $CDAB$ و $ABCD$

۲. در کدام قسمت، دو پنجضلعی داده شده یکسان نیستند؟

- (الف) $.DEABC$ و $CDEAB$
- (ب) $.ABCDE$ و $ABCDE$
- (ج) $.ECDBA$ و $CADBE$
- (د) $.DBCAE$ و $CAEDB$

۳. در چهارضلعی دو مثلث $ABCD$ و BCD همنهشت‌اند.

الف) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟



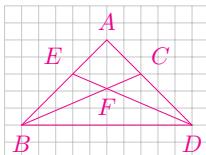
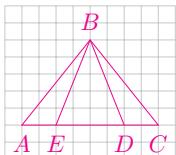
- $B\hat{A}D = B\hat{C}D$
- $A\hat{B}D = C\hat{D}B$
- $\overline{AB} = \overline{CD}$
- $\overline{AB} = \overline{BC}$
- $\overline{AD} = \overline{BC}$
- $A\hat{D}B = C\hat{B}D$
- $A\hat{B}D = C\hat{B}D$

۴. در چهارضلعی $IRAN$ دو مثلث IRA و INA همنهشت‌اند.

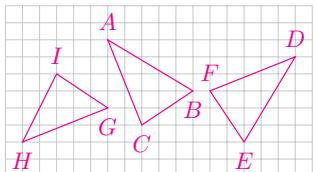
الف) اگر بدانیم $\overline{IR} = \overline{AN}$ ، آنگاه چه تبدیل‌هایی مثلث IRA را به مثلث INA تبدیل می‌کند؟

ب) اگر بدانیم $\overline{IR} = \overline{IN}$ ، آنگاه چه تبدیل‌هایی مثلث IRA را به مثلث INA تبدیل می‌کند؟

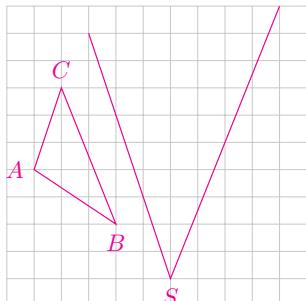
۵. در هریک از شکل‌های زیر، دو جفت مثلث همنهشت وجود دارد. آن مثلث‌ها را نام ببرید و مشخص کنید با چه تبدیل‌هایی به یکدیگر تبدیل می‌شوند. سپس اجزای برابر آنها را مشخص کنید.



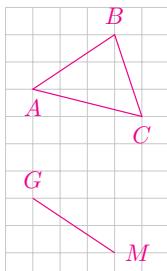
۶. در شکل زیر کدام مثلث‌ها همنهشت‌اند؟ تبدیل‌هایی که آنها را به یکدیگر تبدیل می‌کند، بیابید. سپس اجزای برابر دو مثلث همنهشت را مشخص کنید.



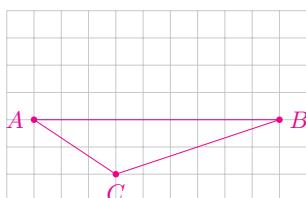
۷. در شکل رویه‌رو، دو نقطه P و Q را روی اضلاع زاویه S طوری بیابید که دو مثلث PQS و ABC همنهشت شوند. تبدیل‌هایی که دو مثلث را به یکدیگر تبدیل می‌کند، بیابید و سپس اجزای برابر را مشخص کنید.



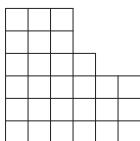
۸. در شکل رویه‌رو، نقطه N را طوری بیابید که دو مثلث ABC و GMN برابر باشند. تبدیل‌هایی که دو مثلث را به یکدیگر تبدیل می‌کند، بیابید و سپس اجزای برابر را مشخص کنید.



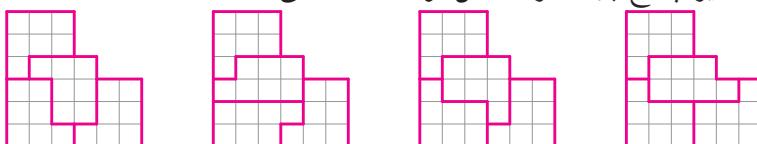
۹. در شکل رویه‌رو، چند نقطه مانند D می‌توان یافت به‌طوری‌که دو مثلث ABC و ABD همنهشت باشند؟ در هر حالت تبدیل‌ها را مشخص کنید و اجزای برابر را بیابید.



۱۰. در یک آزمون مسئله زیر مطرح شده بود.
شکل زیر را به چهار شکل همنهشت تقسیم کنید.

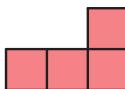
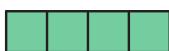
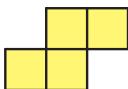


شکل‌های زیر، پاسخ چهار نفر از دانش‌آموزان را نشان می‌دهد.



کدام پاسخ درست و کدام نادرست است؟ درباره پاسخ‌های درست، مشخص کنید چه تبدیل‌هایی شکل‌های همنهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.

۱۱. به شکل‌هایی که از بهم چسباندن یک (یا چند) ضلع مریع‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، چندخونه‌ای می‌گویند. برای مثال، شکل‌های زیر چندخونه‌ای (۴-خونه‌ای) است.

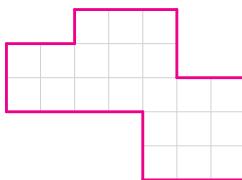
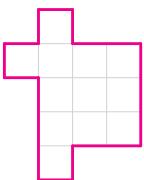


الف) چند ۴-خونه‌ای غیر همنهشت وجود دارد؟

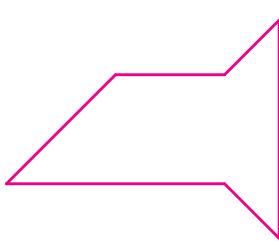
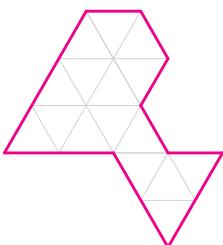
ب) چند ۵-خونه‌ای غیر همنهشت وجود دارد؟

ج) سی و پنج ۶-خونه‌ای غیر همنهشت وجود دارد. حداقل ده ۶-خونه‌ای غیر همنهشت رسم کنید و آنها را با پنج نفر از همکلاسی هایتان به اشتراک بگذارید. آیا از این جواب‌ها، سی و پنج ۶-خونه‌ای غیر همنهشت حاصل می‌شود؟

۱۲. هریک از شکل‌های زیر را به سه چندضلعی همنهشت تقسیم کنید. (خطوط خاکستری داخل شکل می‌توانند این کار را آسان‌تر کنند!) در هر مورد مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های همنهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.



۱۳. با یک برش، هریک از چندضلعی‌های زیر را به دو چندضلعی همنهشت تقسیم کنید. (خطوط خاکستری داخل شکل می‌توانند این کار را آسان‌تر کنند!) در هر مورد مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های همنهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.



^۱P.J. Carter, *Advanced IQ tests*, Kogan page, London, 2008, page 70.



فصل ۵

شمارنده‌ها و اعداد اول

مطالعه عددهای صحیح همیشه از زیباترین و جالب‌ترین بخش‌های ریاضیات بوده است. ریاضیدانان رابطه‌های زیبایی را در این اعداد کشف کرده‌اند که این رابطه‌ها در طبیعت هم دیده می‌شوند؛ از جمله مارپیچ‌هایی که در گل آفتابگردان می‌توانید ببینید.

گفت و گو

- معلم ریاضی: ههههه!
- معلم ورزش: چی شده؟ جک می خونی؟ ما رو هم بی نصیب ندار.
- معلم ریاضی: نه! مطلبی درباره «الکساندر گروتندیگ» می خونم. اینجا نوشته که یه روز در حال سخنرانی گفته: «یه عدد اول در نظر بگیرید، مثل ۵۱!»
- معلم ورزش: الکساندر چی؟
- معلم ریاضی: گروتندیک. یه ریاضی دان بزرگه!
- معلم ورزش: حالا چرا خندیدی؟
- معلم ریاضی: چون ۵۱ عدد اول نیست!
- معلم ورزش: این خیلی سخته که تشخیص بدن ۵۱ عدد اوله یا نه؟
- معلم ریاضی: نه!! خیلی هم آسونه. همینه که خنده داره!
- معلم ورزش: خب بیخشید؛ اینکه اصلاً خنده نداره. یه نفر که ادعا می کنه ریاضی دانه یه چیز آسون رو نتوNSTه تشخیص بده؛ حتماً یارو متقلب بوده!
- معلم ریاضی: نه! همه ریاضی دانها می دونن که گروتندیک یه ریاضی دان تراز اوله. وسط یه بحث خیلی سنگین، یه دفعه حواسش پرت می شه و این اشتباه ازش سر می زنه. ریاضی دانهای بزرگ هم گاهی اشتباههای کوچیک می کنن.
- معلم علوم: اتفاقاً من یه الکساندر می شناسم که از الکساندر شما مشهورتره. الکساندر فلمینگ. همون که پنی سلین رو کشف کرد.
- معلم ورزش: آره؛ اسمش رو شنیدم. از پنی سلین هم استفاده کردم.
- معلم علوم: بزرگ‌ترین جایزه بشری رو هم گرفته: مدال نوبل.
- معلم ریاضی: البته فلمینگ خدمت بزرگی به جامعه بشری کرده؛ اما بزرگ‌ترین جایزه بشری نوبل نیست.
- معلم علوم: اگه نوبل نیست، پس چیه؟
- معلم ریاضی: مدال فیلدزه.

علم علوم: چرا؟

خوب فیلدر رو هر چهار سال یه بار می‌دن؛ اما نوبل رو هر سال. فیلدر شرط بسیار سختش هم اینه که باید زیر ۴۰ سال داشته باشی؛ اما نوبل ممکنه تو هر سنی داده بشنه.

علم علوم: عجب! این همون جایزه‌ای نیست که تازگی‌ها به ایرانی گرفته؟

علم ریاضی: آره؛ مریم میرزا خانی. فرزانگان تهران درس خوننده بوده.

علم؟: یعنی باور کنم که جایزه‌ای که به ایرانی گرفته از جایزه نوبل بالاتره؟!

علم ریاضی: براتون متأسفم. زندگی و دیدگاه کوچکی دارید!

عدد اول

۱. با توجه به گفت و گوی بالا، به نظر شما چرا ریاضی دان بزرگی مانند گروتندیگ (تصویر زیر) گفته ۵۱ عدد اول است؟



۱	۲۲	۱۵	۲۱
۱۸			
۱۲	۷		
۵			
۲۳	۱۴	۶	۲۵

۲. عددهای ۱ تا ۲۵ (و هر کدام یک بار) را در ۲۵ خانه جدول رو به رو طوری قرار دهید که مجموع هر دو عدد همسایه، عدد اول شود.

به دو عدد همسایه می‌گوییم هرگاه خانه‌های آنها در یک ضلع مشترک باشند.

۳. الگوی عددی زیر، ۳ عضو دارد.

۳, ۵, ۷.

همه اعضای این دنباله، عدد اول اند و اختلاف هر دو عضو متواالی آن یکسان است.

الف) یک الگوی عددی با ۵ عضو بیابید که همه اعضای آن عدد اول باشند و اختلاف هر دو عضو متواالی آن یکسان باشد.

ب) یک الگوی عددی با ۶ عضو بیابید که همه اعضای آن عدد اول باشند و اختلاف هر دو عضو متواالی آن یکسان باشد.

ج) آیا یک الگوی عددی با ۱۰ عضو وجود دارد که همه اعضای آن عدد اول باشند و اختلاف هر دو عضو متواالی آن یکسان باشد؟

یکی از مشهورترین ریاضی دانان معاصر (تصویر زیر)، به نام ترنس تائو (Trence Tao)، در سال ۲۰۰۴ میلادی ثابت کرد که برای هر n داده شده می‌توان یک الگوی عددی با n عضو یافت بهطوری‌که همه اعضای آن عدد اول و اختلاف هر دو عضو متواالی مقداری ثابت باشد.



۴. قانون الگوی عددی زیر را کشف کنید و ۱۰ عدد بعدی آن را بنویسید.

۰, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۴, ۵, ۵, ۶, ۶, ۶, ۶, ۷, ۷,

راهنمایی: تعداد اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی هر عدد طبیعی را بشمارید.



کارگاه بازی-شمارنده و هُپ

۱. بازی شمارنده‌ها

این بازی، یک بازی دو نفره است. نفر اول از جدول زیر یک عدد انتخاب می‌کند و همهٔ شمارنده‌های آن عدد را خط می‌زند و به تعداد اعدادی که خط زده است، امتیاز کسب می‌کند. نفر دوم عددی خط نخورده را انتخاب می‌کند و همهٔ شمارنده‌های خط نخورده آن را خط می‌زند و به تعداد اعدادی که خط زده است، امتیاز می‌گیرد. این کار به نوبت ادامه پیدا می‌کند تا همهٔ عددهای جدول خط بخورند. در پایان کسی که امتیاز بیشتری دارد، برنده است. توجه. اگر بازیکنی عددی انتخاب کند و شمارنده‌های آن عدد را به اشتباہ خط بزند، رقیب او می‌تواند در نوبت خود دو عدد انتخاب کند!

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

۲. هُپ عدد اول

سه نفر از دانش‌آموزان جلوی کلاس می‌ایستند. معلم عددی طبیعی بین ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کند و بازی هُپ از این عدد شروع می‌شود. هر دانش‌آموز در نوبتش (بدون مکث) عدد طبیعی بعدی را می‌گوید اما باید به جای اعداد اول بگوید: «هُپ!»! اگر کسی عددی اول را به زبان آورد، بازنده است و معلم دانش‌آموز دیگری را جایگزین او می‌کند. سپس معلم دوباره بازی را با یک عدد بین ۱ تا ۱۰۰ شروع خواهد کرد.

شمارنده

۱. در بازی شمارنده‌ها،

الف) بهترین انتخاب برای کسی که بازی را شروع می‌کند، چه عددی است؟

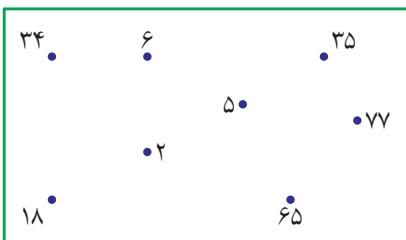
ب) اگر نفر اول با بهترین انتخاب بازی را شروع کند، بهترین انتخاب برای نفر دوم چه عددی است؟

۲. در شکل زیر دو فلش می‌بینید. از فلش بالایی وارد جدول می‌شویم و از فلش پایینی خارج. در هر مرحله به خانه همسایه می‌رویم با این شرط که عدد خانه همسایه شمارنده عدد خانه‌ای که داخل آن هستیم، باشد یا برعکس. مسیری پیدا کنید که از فلش بالایی وارد شویم و از فلش پایینی خارج. دو خانه همسایه‌اند هرگاه در یک ضلع مشترک باشند.

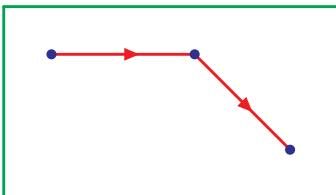
→	۱۸	۳	۱۲	۴	۲۰	۱۰۰
	۹	۳۹	۳	۲۱	۴۰	۸
	۶۳	۷	۲۸	۵۶	۳۰	۱۲
	۴۵	۹۱	۱۳	۱۶	۱۰	۲
	۱۵	۶	۷۸	۶۸	۴	۴۶
	۳	۱۰۲	۵۱	۱۷	۹۲	۲۳
→						

۳. تعدادی عدد طبیعی متفاوت روی کاغذ می‌نویسیم. دو عدد a و b از آنها را در نظر می‌گیریم. اگر a شمارنده b باشد، پیکانی از a به b رسم می‌کنیم. اگر تمام پیکان‌های موجود بین اعداد روی کاغذ را رسم کنیم، از آن به عنوان «نمودار کشیدن» یاد می‌کنیم.

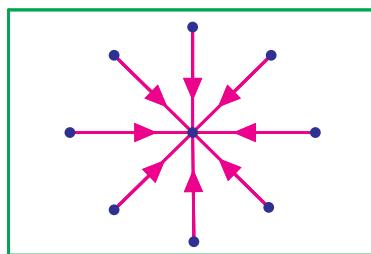
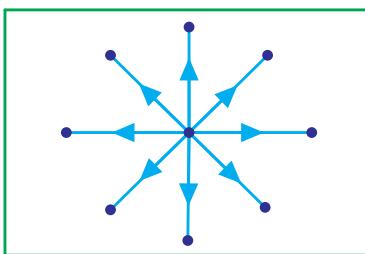
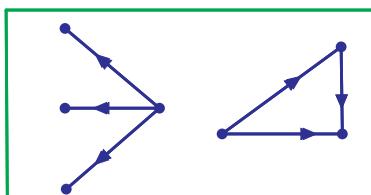
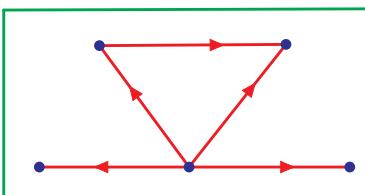
الف) برای عدهای زیر، نمودار بکشید.



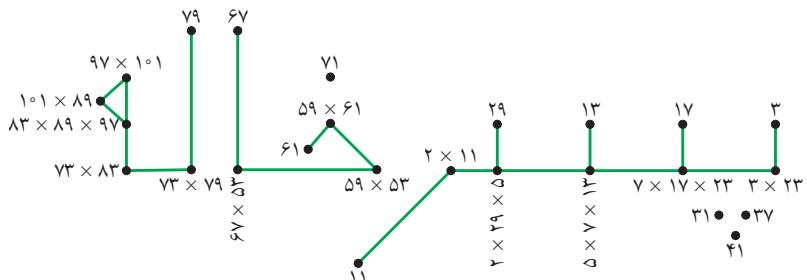
ب) بیژن نمودار صفحهٔ بعد را رسم کرد. بعد هر چه تلاش کرد سه عدد پیدا کند که این نمودار برای آن سه عدد درست باشد، نتوانست. چرا تلاش بیژن بی‌فایده بود؟



ج) هریک از نمودارهای زیر را با اعدادهای طبیعی مناسب پر کنید.



۴. پسخاله،^۱ با قانون تمرین قبل، نام خود را به شکل زیر نوشت و سپس روی هر نقطه عددی مناسب قرار داد.



الف) آیا پسخاله، همه اعدادهای اول دورقمی را برای نوشتن «پسخاله» به کار برده است؟

ب) شما هم نام خود را با همین روش بنویسید.

^۱ برگرفته از مجموعه تلویزیونی کلاهقرمزی به کارگردانی ایرج طهماسب.

۵. اگر p عددی اول باشد، آنگاه عبارت جبری $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p-1) + 1$ بر عدد p بخش‌پذیر است.

برای مثال، اگر $p = 5$ باشد، آنگاه $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$ بر 5 بخش‌پذیر است.
برای هریک از اعداد زیر نیز درستی عبارت فوق را بررسی کنید.

$$p = 7$$

$$p = 11$$

$$p = 13$$

۶. به عددی که مجموع همه شمارندهای آن، به جز خود عدد، برابر آن عدد شود، «عدد کامل» می‌گویند. برای مثال، اعداد 6 و 28 کامل‌اند.

$$\bullet \quad 6 = 1 + 2 + 3$$

$$\bullet \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

آیا می‌توانید عدد کاملی پیدا کنید که مضرب 16 باشد؟



مسابقهٔ تیراندازی

ستاره و سپیده یک سیبل و تعدادی دارت دارند. داخل سیبل، عده‌های $2, 3, 5$ و 7 نوشته شده است. ستاره و سپیده با قانون‌های زیر شروع به بازی می‌کنند.

- هر نفر 5 دارت پرتاب می‌کند.
- امتیاز نهایی هر نفر حاصل ضرب امتیاز 5 پرتابش است.
- امتیاز دارتنی که به عده‌های $2, 3, 5$ و 7 برخورد نکند، 1 است.
- امتیاز نهایی نباید بیشتر از 69 شود! اگر بیشتر از 69 شد، امتیاز نهایی صفر است!



باتوجه به قانون‌های بالا به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

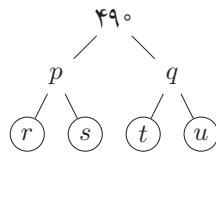
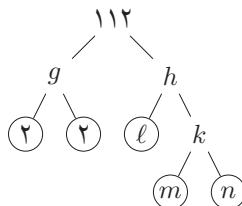
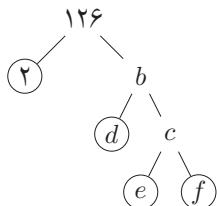
۱. اگر دارت‌های ستاره امتیاز‌های $2, 3, 5$ و 7 گرفته باشند، امتیاز نهایی ستاره چقدر است؟

شمارندها و اعداد اول

۲. اگر امتیاز نهایی سپیده 5° باشد، امتیاز هر پرتاب سپیده را از کوچک به بزرگ بنویسید.
۳. کدام‌یک از عددهای زیر می‌توانند امتیاز نهایی باشند؟ برای هر کدام دلیل بیاورید.
- | | | | |
|----------|--------|--------|--------|
| ۱۶ (الف) | ۲۷ (ب) | ۲۹ (ج) | ۳۲ (د) |
| ۵۴ (ه) | ۴۸ (و) | ۶۴ (ز) | ۷۲ (ح) |
۴. پرتاب اول ستاره به سیبل نخورد! حال اگر ستاره بخواهد (و بتواند!) به هر عدد داخل سیبل، حداکثر یک دارت برخورد کند، امتیاز نهایی او حداکثر چیست؟
۵. سپیده بعد از ۴ پرتاب، امتیازی کمتر از 4° به دست آورد و فهمید که اگر دارت بعدی اش را خارج از سیبل نزنند، امتیاز نهایی اش صفر می‌شود. ۴ دارت سپیده را روی سیبل نقاشی کنید.
۶. سپیده بعد از ۵ پرتاب، امتیازش 6° شد. آیا ستاره می‌توانست امتیاز بیشتری بگیرد؟
۷. اگر ستاره از پرتاب اول امتیاز ۲ گرفته باشد، آیا ممکن است امتیاز نهایی اش عددی فرد شود؟ چرا؟
۸. کدام عددهای فرد نمی‌توانند امتیاز نهایی باشند؛ چرا؟
۹. کدام عددهای زوج نمی‌توانند امتیاز نهایی باشند؛ چرا؟

شمارنده اول

۱. در زیر، نمودارهای تجزیه اعداد 112 ، 126 و 49° رسم شده است. ابتدا به جای هر متغیر اعداد مناسب قرار دهید. سپس هریک از این عددها را به صورت حاصل ضرب عددهای اول بنویسید.



۲. علی با مکعب‌های کوچک هماندازه یک مکعب مستطیل ساخت. خواهرش یک ردیف از وجه بالای مکعب مستطیل برداشت که از ۷۷ مکعب تشکیل شده بود. برادر بزرگ‌ترش یک ردیف از وجه جلوی مکعب مستطیل باقی‌مانده برداشت که از ۵۵ مکعب تشکیل



شده بود. برادر کوچکترش یک ردیف از وجه سمت راستِ شکل باقی‌مانده برداشت.
در پایان چند مکعب باقی‌مانده بود؟



۳. هر عدد مرکب، از حاصل ضرب عددهای اول به دست می‌آید. اعداد اولی را که از حاصل ضرب آنها یک عدد مرکب ساخته می‌شود، بچه‌های آن عدد مرکب می‌نامیم.

برای مثال، عدد ۱۲ سه بچه دارد. ۲، ۲ و ۳؛ یعنی یک بچه بزرگ (۳) و یک دوقلو (۲ و ۲). چون $12 = 2 \times 2 \times 3$

الف) تعداد بچه‌های هریک از اعداد زیر را به دست آورید.

- ۱۸
- ۳۲
- ۴۴
- ۵۱
- ۵۶
- ۶۸
- ۸۴
- ۸۷
- ۹۱
- ۹۵
- ۱۱۵
- ۱۴۴

ب) چند عدد دو رقمی با چهار بچه وجود دارد به طوری که این چهار بچه، دو جفت دوقلو باشند؟

ج) همه عددهای دو رقمی را بنویسید که حداقل چهار بچه چهار قلو داشته باشند.

د) من کوچکترین عدد فردی هستم که ۵ فرزند دارم. یک دوقلو و یک سه‌قلو! من کی ام؟

ه) همه عددهای فرد دو رقمی را بنویسید که یکی از بچه‌هایشان ۱۳ باشد.

۴. الف) حاصل ضرب دو عدد طبیعی برابر 50^0 شده است. اگر هیچ‌کدام از این دو عدد بر 10 بخش‌پذیر نباشند، این دو عدد را بیابید.

ب) اگر x و y عددهایی طبیعی باشند و هیچ‌یک برابر 6^0 و 15^0 باشند، آنگاه همه جواب‌های معادله $x.y = 60^0$ را بیابید.

ج) اگر m ، n و p اعدادی طبیعی باشند و هیچ‌یک برابر 9^0 ، 10^0 و 15^0 باشند، آنگاه همه جواب‌های معادله $m.n.p = 90^0$ را بیابید.

۵. خانه‌های خالی جدول روبرو را طوری پر کنید که:
اولاً حاصل ضرب عددهای دو سطر یکسان باشند؛
ثانیاً عددها از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند.

۱۵	۳۹	۴۹	۵۱	
	۳۶	۶۶	۹۱	



بزرگ‌ترین شمارنده مشترک

۱. حاصل ب.م.م‌های زیر را به دست آورید.

- (الف) $(2 \times 15, 2 \times 6)$
- (ج) $(4 \times 6, 12 \times 8)$
- (ه) $(91 \times 31, 39 \times 93)$
- (ز) $(202, 78)$

- (ب) $(2 \times 5, 3 \times 7)$
- (د) $(3 \times 15, 5 \times 9)$
- (و) $(18 \times 12, 24 \times 51)$
- (ح) $(105, 77)$

۲. منظور از $(2, 4, 6)$ ب.م.م سه عدد $2, 4, 6$ است. حاصل $(2, 4, 6)$ و $(45, 63, 90)$ را به دست آورید.

دو عدد a و b را «نسبت بهم اول» می‌نامند هرگاه $1 = \text{نسبت بهم اول} a, b$. برای مثال 91 و 51 نسبت بهم اول اند ولی 39 و 65 نسبت بهم اول نیستند.

۳. درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

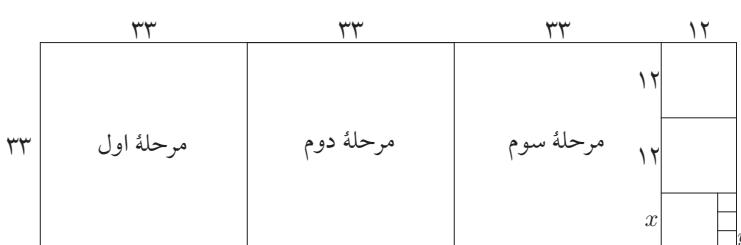
الف) ب.م.م دو عدد زوج، عددی زوج است.

ب) ب.م.م دو عدد فرد، عددی فرد است.

ج) ب.م.م یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی زوج است.

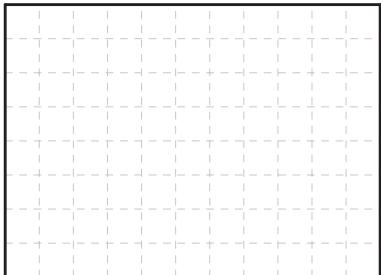
۴. شکل زیر مستطیلی به ابعاد 33 و 111 را نشان می‌دهد. در هر مرحله، بزرگ‌ترین مربع ممکن را از آن جدا می‌کنیم.

در مرحله اول مربعی به طول ضلع 33 از آن جدا می‌کنیم و یک مستطیل به ابعاد 78 و 33 باقی می‌ماند. در مرحله دوم و سوم نیز مربعی به طول ضلع 33 از باقی‌مانده شکل بر می‌داریم. در مرحله چهارم طول ضلع بزرگ‌ترین مربع ممکن 12 است. این کار را ادامه می‌دهیم تا تمام مستطیل با مربع‌های مختلف پوشیده شود.



الف) مقدار x و y را بیابید.

ب) طول ضلع مربع آخرین مرحله چه نسبتی با ب.م.م دو عدد 111 و 33 دارد؟



۵. در شکل رو به رو، مستطیلی به ابعاد ۶۶ و ۴۸ را با نقطه چین به مربع های برابر تقسیم کرده ایم. با روشی که در مسئله قبل گفته شد، هر یار بزرگترین مربع ممکن را از مستطیل شبکه بندی شده بالا جدا کنید. طول ضلع مربع آخرین مرحله چقدر است؟

۶. سه حوض داریم که می خواهیم در یکی ۸۷۰ لیتر، در دومی ۸۹۹ لیتر و در سومی ۹۲۸ لیتر آب بریزیم. می خواهیم فقط با یک نوع سطل این کار را انجام دهیم به شرطی که همه محتوای سطل را هر بار در حوض ها خالی کنیم. بزرگترین سطلی که می توانیم با آن این کار را انجام دهیم چند لیتری است؟

	۱۲	۱۰
۱۵	۳	۵
۴	۴	۲

۷. جدول رو به رو را با دقت ببینید. در سطر اول عده های ۱۰ و ۱۲ و در ستون اول عده های ۱۵ و ۴ را قرار داده ایم. سپس در محل تقاطع هر عدد از سطر اول با عددی از ستون اول، ب.م.م آن دو عدد را نوشتہ ایم.

باتوجه به سه جدول زیر به پرسش ها پاسخ دهید.

الف) خانه های خالی جدول سمت راست را با قانون بالا پر کنید.

ب) در جدول میانی، باتوجه به قانون گفته شده و ب.م.م های داخل جدول، برای هر یک از متغیرها کوچکترین عدد طبیعی ممکن چیست؟

ج) آیا می توانید جدول سمت چپ را با کوچکترین عده های طبیعی ممکن طوری پر کنید که قانون بالا برقرار باشد؟

	۶۶		
	۵۲		۸۴
۴۸			
	۹۸		۷۲

	t	k	v
x	۱	۵	۷۷
y	۱۸	۹	۱
z	۴	۱	۹۱

	۵۱	۱۰۵	۳۹
۸۵			
۹۱			
۶۵			



کوچکترین مضرب مشترک

۱. چند عدد طبیعی دورقیمی وجود دارد که هم بر ۶ بخش پذیر است و هم بر ۹؟

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

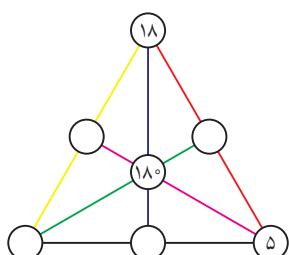
- | | | |
|----------------|----------------|---------------|
| الف [۲۱, ۵۵] | ب [۵۴, ۳۶] | ج [۲۴, ۳۹] |
| د [۳۹, ۶۵] | ه [۹۱, ۱۴] | و [۵۱, ۱۷] |
| ز [۱۶, ۲۰] | ح [۳۳, ۲۲] | ط [۴۰, ۶۰] |
| ی [۲۷, ۱۲, ۴۵] | ک [۱۵, ۲۵, ۷۵] | ل [۹, ۱۲, ۱۵] |

۳. در هر قسمت x را طوری بیابید که کوچک‌ترین عدد طبیعی ممکن باشد:

- | | | |
|-------------------|-------------------|-----------------|
| الف $[6, x] = ۲۴$ | ب $[۳۶, x] = ۷۲$ | ج $[6, x] = ۱۲$ |
| د $[۱۵, x] = ۲۵$ | ه $[۱۸, x] = ۵۴$ | و $[۹, x] = ۵۴$ |
| ز $[۵۱, x] = ۱۵۳$ | ح $[۳۵, x] = ۱۰۵$ | ط $[۸, x] = ۱۶$ |

۴. در شکل رو به رو، شش پاره خط (با رنگ‌های متفاوت) رسم کرده‌ایم و سپس روی هریک سه دایره قرار داده‌ایم.

ک.م.م عددهای داخل دایره‌های ابتدا و انتهای هر خط را در دایره میانی می‌نویسیم.
هریک از دایره‌های حالی را با کوچک‌ترین عدد طبیعی ممکن پر کنید.



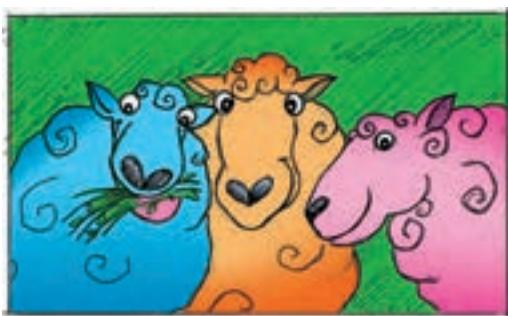
۵. مادربزرگه دو خروس به نام‌های «حنایی» و «نوك‌سیاه» دارد. آنها از ساعت ۴ تا ۶ صبح قو قولی قوقو می‌کنند. حنایی هر ۸ دقیقه یک بار قو قولی قوقو می‌کند و نوك‌سیاه هر ۱۴ دقیقه یک بار. وقتی که آنها با هم می‌خوانند، متحمل، گربه مادربزرگه، از خواب می‌پرد؛ کمی غُرُغُر می‌کند و دوباره می‌خوابد. اگر خروس‌ها از ساعت ۴ صبح، هم‌زمان با هم شروع به خواندن کنند، تا ساعت ۶ صبح متحمل چند بار از خواب ناز می‌پرد؟ در چه ساعت‌هایی؟



^۱ برگرفته از مجموعه تلویزیونی «خونه مادربزرگه»، اثر مرضیه برومند.

۶. چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که هم بر ۱۸ بخش پذیر است و هم بر ۸۱؟

۷. راهزنان «گرگ دره» تعدادی گوسفند دزدیدند. دزدها ۱۸ نفر بودند. سرdestه آنها «حسام بیگ»، گوسفندها را به طور مساوی بین همه اعضای گروه تقسیم کرد و ۵ گوسفند باقی ماند که آنها را هم برای خودش برداشت. سه نفر از دزدها به این روش تقسیم او اعتراض کردند. حسام بیگ عصبانی شد و گفت: «چه معنی می ده دزد اعتراض کنه! اصلاً به شما سه تا گوسفند، گوسفند نمی دم». حسام بیگ این بار گوسفندها را بین ۱۵ نفر به طور مساوی تقسیم کرد و باز هم ۵ گوسفند باقی ماند که آنها را هم برای خودش برداشت. اگر تعداد گوسفندها کمتر از ۱۰۰ رأس باشد، راهزنان چند گوسفند دزدیده اند؟



لقمان را گفتند: «ادب از که آموختی؟»

گفت: «از بی ادبان، هرچه از ایشان در نظرم ناپسند آمد، از آن پرهیز کردم.
نگویند از سر بازیچه حرفي
کز آن پندی نگیرد صاحب هوش
بخوانند، آیدش بازیچه در گوش
و گر صد باب حکمت پیش نادان
گلستان سعدی

۸. محمود تعدادی تیله دارد. می دانیم تعداد تیله ها بر عدهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر است. اگر تیله های محمود کمتر از صدتا باشد، محمود چند تیله دارد؟

۹. الف) می دانیم x عددی دورقمی و $7 - x$ و $8 - x$ به ترتیب بر ۷ و ۸ بخش پذیرند. x چه عددی است؟

ب) می دانیم y عددی دورقمی و $12 - y$ و $16 - y$ به ترتیب بر ۱۲ و ۱۶ بخش پذیرند. y چه عددی است؟

ج) کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که باقی مانده تقسیم آن بر هر دو عدد ۲۴ و ۱۸ برابر ۷ باشد.

^۱ برگرفته از مجموعه تلویزیونی «روزی روزگاری» اثر امرا.. احمدجو.

کارگاه بازی - نقطه‌بازار-شلیک کن!

تعداد نفرات هر تیم و وسایل مورد نیاز: این بازی که بین دو تیم دو نفره انجام می‌شود، به دو برگه «جدول نقطه‌بازار-شلیک کن» و دو «دایره امتیاز» نیاز دارد.

کار هر بازیکن: هر بازیکن، نقطه‌ای در زیر خطچین برگه جدول «نقطه‌بازار-شلیک کن» می‌گذارد؛ برگه را دقیقاً از وسط طول آن (نقطه‌چین)، تا می‌کند و پشت اثر نقطه، نقطه‌ای پررنگ می‌کشد تا اثر آن نقطه روی عددی از جدول بیفتد. عددی که بازیکن به آن شلیک کرده، باید در دایرة امتیاز، در ناحیه همان عدد با ضربدر علامت زده شود. هر بازیکن ۵ شلیک نقطه‌ای می‌کند.

امتیاز هر تیم و چگونگی محاسبه آن: امتیاز هر بازیکن حاصل‌ضرب عددهای ناحیه علامت‌دارشده در دایرة امتیاز است. امتیاز نهایی هر تیم، ک.م.م امتیاز بازیکن‌های آن تیم است.

برنده: هر تیمی که امتیاز نهایی اش بیشتر باشد، برنده است.
در زیر، تصویر یک دایرة امتیاز آمده است.



به نکته‌های زیر توجه کنید:

- ابتدا نفر اول هر تیم ۵ شلیک خود را انجام می‌دهد و سپس هم‌تیمی او وارد عمل می‌شود.
- در هر تیم باید رنگ خود کار اعضای تیم متفاوت باشد و امتیاز هر نفر با خود کار خودش در دایرة امتیاز ثبت شود.
- بعد از اینکه کار یک تیم تمام شد و امتیازهای دو نفر (با دو رنگ متفاوت) در دایرة امتیاز ثبت شد، دایرة امتیاز به تیم حریف داده می‌شود تا آنها ک.م.م را محاسبه کنند.
- اگر تیم حریف ک.م.م را اشتباہ حساب کند، هر بازیکن تیم مقابل یک شلیک جایزه می‌گیرد و بعد از شلیک و ثبت امتیاز، دوباره دایرة امتیاز به تیم حریف داده می‌شود.

- اگر شلیک نقطه‌ای به خانه‌های خالی یا اطراف جدول برخورد کند، امتیاز ۱ محسوب می‌شود. توجه کنید که در دایره امتیاز، عدد ۱ وجود ندارد و واضح است که نیازی به ثبت شدن آن نیست.
- اگر اثر نقطه دقیقاً روی خط جدول افتاد، شلیک تکرار می‌شود.
- خانه‌ای که به آن شلیک می‌شود و همه خانه‌های همسایه آن منفجر می‌شوند. خانه‌ای که منفجر می‌شوند، هیچ تفاوتی با خانه‌های خالی «جدول نقطه بذار-شلیک کن» ندارند.

در جدول زیر، خانه‌های همسایه یک خانه خالی مشخص شده‌اند.

همسایه شمال غربی	همسایه شمالي	همسایه شمال شرقی
همسایه غربی		همسایه شرقی
همسایه جنوب غربی	همسایه جنوبی	همسایه جنوب شرقی



شمارندها و اعداد اول

۵	۲	۲	۳	۷	۲	۳	۰	۳	۰	۲	۷	۲	۲	۳	۷		
۵	۳	۲	۳	۵	۳	۲	۵	۳	۳	۵	۳	۲	۲	۷	۳	۵	
۳	۲	۲		۲	۲	۷	۳	۲	۲	۵	۲		۵	۳	۲	۲	۳
۳		۲	۲	۳	۳	۵	۲	۳	۵	۲	۳	۷		۵	۳	۵	۷
۲	۳	۲	۳		۵	۳	۳	۵	۷	۳	۷	۵	۳	۳	۲	۷	
۷	۲	۳	۲	۵	۳	۲		۲	۲	۷	۲		۵	۷	۵	۲	۲
۲	۳	۵	۳	۳	۷	۵	۲	۵	۲	۳		۵	۲		۷	۳	۳
۳	۵	۷		۲	۳	۲	۵	۲	۳	۵	۷	۳	۲	۲	۳	۲	۵
۲	۳	۲	۷		۳	۲	۳	۲	۲	۳	۵		۵	۲	۳	۷	
۲	۵	۳	۲	۳	۲	۳	۷	۳	۲	۲	۵	۳	۵	۳	۲	۵	۳
۲	۷	۳		۲	۳	۲	۳		۵	۳	۲	۲	۳		۵	۳	۲
۵	۲	۲	۳	۵	۳	۲	۳	۳	۵	۳	۲	۲	۵	۳	۲	۳	

ارتباط ب.م.م و ک.م.م

۱. در بازی «نقطه بذار-شلیک کن»، نفر اول ۹۸ امتیاز گرفته است.

(الف) نقاطی را که نفر اول به آنها شلیک کرده است، در دایره امتیاز مشخص کنید.

(ب) هم‌تیمی او بهتر است به چه خانه‌هایی شلیک کند؟ چرا؟

۲. در بازی «نقطه بذار-شلیک کن»، نفر اول ۶۳ امتیاز گرفته است.

(الف) نقاطی را که نفر اول به آنها شلیک کرده است، در دایره امتیاز مشخص کنید.

(ب) هم‌تیمی او بهتر است به چه خانه‌هایی شکلیک کند؟ چرا؟

(ج) اگر شلیک اول نفر دوم به عدد ۷ برخورد کند، او تیرهای بعدی اش را باید به سمت چه عددی نشانه رو دهد؟ چرا؟

۳. در مسابقه‌های «نقطه بذار-شلیک کن»، ستاره ۲۵۲ امتیاز و سپیده، هم‌تیمی ستاره، ۷۵ امتیاز گرفته است.

(الف) در دایره امتیاز، نقاطی را که ستاره به آنها شلیک کرده، با خودکار آبی و نقاط سپیده را با خودکار قرمز مشخص کنید.

(ب) ب.م.م دو عدد ۲۵۲ و ۷۵ را با استفاده از علامت‌های آبی و قرمزی که گذاشته‌اید، پیدا کنید.

(ج) ک.م.م دو عدد ۲۵۲ و ۷۵ را با استفاده از علامت‌های آبی و قرمز به صورت حاصل ضرب عددهای اول بنویسید. کدام عدد یا عددهایی را که علامت زده شده‌اند، ننوشته‌اید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴. هر جفت از عددهای زیر، امتیاز دو هم‌تیمی را در بازی «نقطه بذار-شلیک کن» نشان می‌دهد.

● ۶۰, ۹۰

● ۵۷, ۹۸

● ۱۴۰, ۲۷۰

● ۸۰, ۵۴۰

● ۱۰۸, ۱۷۵

● ۸۴, ۱۰۵

● ۳۴۳, ۲۴۳

● ۱۰۸, ۱۱۲

(الف) برای هر جفت از عددهای بالا، یک دایره امتیاز رسم کنید و شلیک‌های دو نفر را با رنگ‌های متفاوت روی آن مشخص کنید.

ب) ب.م.م و ک.م.م هر دو عدد را (با استفاده از دایرة امتیاز) به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

۵. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

الف	$\frac{28 \times 39}{(28, 39)}$	ب)	$\frac{105 \times 35}{(105, 35)}$	ج)	$\frac{84 \times 102}{[84, 102]}$
د)	$\frac{155 \times 93}{(155, 93)}$	ه)	$\frac{106 \times 85}{[106, 85]}$	و)	$\frac{182 \times 54}{[182, 54]}$
ز)	$[85, 51] \times (85, 51)$	ح)	$[39, 91] \times [39, 91]$		

۶. x و y چه اعدادی باشند تا تساوی‌های زیر برقرار شوند؟

الف) $(54, x) \times [54, x] = 1836$ ب) $(45, y) \times [45, y] = 810$

تمرین‌های تکمیلی

۱. در هریک از قسمت‌های زیر، به جای هر متغیر، عددی یک رقمی بگذارید به طوری که حاصل هر عبارت بیشترین مقدار ممکن شود.

الف) (x, y, z) ب) $[t, k, v]$ ج) $[a, b, c, d]$

۲. به کسری که ب.م.م صورت و مخرج آن برابر ۱ باشد، کسر ساده‌نشدنی می‌گویند. کدامیک از کسرهای زیر ساده‌نشدنی‌اند؟

الف	$\frac{39}{89}$	ب)	$\frac{26}{57}$	ج)	$\frac{98}{35}$	د)	$\frac{51}{91}$
ه)	$\frac{95}{34}$	و)	$\frac{121}{1001}$	ز)	$\frac{343}{243}$	ح)	$\frac{221}{289}$

۳. کسرهای $\frac{2}{39}$ و $\frac{3}{66}$ را در نظر بگیرید.

الف) کوچک‌ترین کسر ساده‌نشدنی را بیابید که اگر آن را برابر هریک از این دو کسر تقسیم کنیم، حاصل عددی طبیعی شود.

ب) بزرگ‌ترین کسر ساده‌نشدنی را بیابید که اگر هریک از این دو کسر را بر آن تقسیم کنیم، حاصل عددی طبیعی شود.

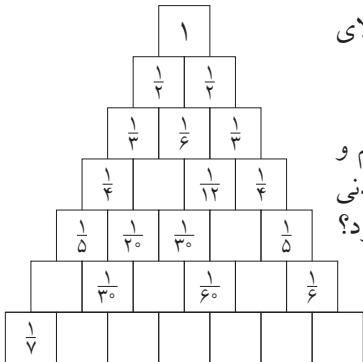
۴. همهٔ عددهای سه رقمی را که باقی‌مانده تقسیم آنها بر ۲، ۴، ۳، ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۱، ۶، ۳، ۲ و ۷ باشد، بیابید.



۵. بین حاصل ضرب و حاصل جمع $\frac{5}{2}$ و $\frac{5}{3}$ تفاوتی نیست.

$$\frac{5}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6}, \quad \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{15}{6} + \frac{10}{6} = \frac{25}{6}.$$

پنج جفت کسر دیگر با این خاصیت بیاید.



۶. در جدول رو به رو، مجموع دو کسر کنار هم را بالای آن دو نوشتایم.

(الف) خانه‌های خالی را با همین قانون پر کنید.

(ب) اگر تا سطر بیستم این جدول را ادامه دهیم و هر کسر را به صورت یک کسر ساده‌نشدنی بنویسیم، آنگاه صورت همه کسرها ۱ می‌شود؟

۷. با استفاده از جدول مسئله قبل،

(الف) عدد $\frac{1}{3}$ را به صورت مجموع دو کسر متفاوت با صورت ۱ بنویسید.

(ب) عدد $\frac{1}{4}$ را به صورت مجموع سه کسر متفاوت با صورت ۱ بنویسید.

(ج) عدد $\frac{1}{4}$ را به صورت مجموع پنج کسر متفاوت با صورت ۱ بنویسید.

(د) عدد $\frac{1}{3}$ را به صورت حاصل تفریق دو کسر با صورت ۱ بنویسید.

۸. در هر یک از قسمت‌های زیر x و y اعداد طبیعی‌اند. در هر قسمت x و y جانگهدار چه عده‌هایی هستند؟

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{5}{6} = \frac{7}{x} + \frac{5}{y} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1393}{x} + \frac{2014}{y} \quad (\text{د})$$

۹. دو شناگر در دو طرف یک استخر به طول ۵۰ متر هم‌زمان در آب شیرجه می‌زنند. اولی در هر 10° ثانیه 14 متر شنا می‌کند و دومی در هر 10° ثانیه 16 متر. اگر دو شناگر استخر را به‌طور رفت و برگشت شنا کنند،

(الف) چند ثانیه طول می‌کشد تا این دو شناگر برای اولین بار از کنار هم بگذرند؟

(ب) چند ثانیه طول می‌کشد تا شناگر سریع‌تر، از دیگری جلو بزند؟ در این مدت چند بار دو شناگر از کنار هم گذشته‌اند؟

شمارنده‌ها و اعداد اول

۱۰. صد لامپ داریم که آنها را از ۱ تا ۱۰۰ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر لامپ یک کلید دارد که با فشار دادن آن لامپ روشن یا خاموش می‌شود. فرض کنید همه لامپ‌ها خاموش‌اند. در ابتدا کلید همه لامپ‌های مضرب ۱ را فشار می‌دهیم. سپس کلید همه لامپ‌های مضرب ۲ را فشار می‌دهیم. بعد کلید همه لامپ‌های مضرب ۳، سپس کلید همه لامپ‌های مضرب ۴ و ...، بعد کلید لامپ ۱۰۰ فشار می‌دهیم. در پایان کدام لامپ‌ها روشن‌اند؟



۱۱. می‌دانیم a عددی زوج و b مضرب ۶۳ است. اگر $(a, b) = 15$ و $ab = 18900$ و b چه اعدادی هستند؟

۱۲. دو دونده تصمیم دارند با یکدیگر در پیاده‌روی مسابقه بدهند. دونده اول دور میدان دو را در ۷ دقیقه و دونده دوم این مسافت را در ۵ دقیقه طی می‌کند. اگر این دونده در یک زمان و یک مکان مسابقه را آغاز کنند و هریک هشت بار میدان را دور بزنند، پس از چند دقیقه برای اولین بار بعد از حرکت، کنار یکدیگر قرار خواهد گرفت؟



۱۳. شنگول و منگول و حبّه انگور هر روز کنار جاده‌ای دوچرخه‌سواری می‌کنند. کنار این جاده دکلهای برق با فاصله‌های یکسان قرار دارند.



یک روز، شنگول کنار دکل اول، منگول کنار دکل هجدهم و حبّه انگور کنار دکل سی و ششم ایستاده بودند. آنها همزمان شروع به حرکت کردند. وقتی شنگول به دکل ششم رسید، منگول به دکل نوزدهم و حبّه انگور به دکل سی و چهارم رسید. اگر هریک از آنها با سرعت ثابت، حرکت خود را ادامه دهند، آنگاه به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) منگول و حبّه انگور کجا بهم می‌رسند؟

ب) شنگول و حبّه انگور کجا بهم می‌رسند؟

ج) کجا شنگول از منگول جلو می‌زند؟

۱۴. روبات‌های جهنه خرگوشی و ملخی طوری برنامه‌ریزی شده‌اند که خرگوشی ۱۵ متر و ملخی ۱۲ متر می‌جهد. اگر جهنه خرگوشی از نقطه ۴ و جهنه ملخی از نقطه ۱ شروع به جهش کند، اولین بار روی چه عددی جای پای هر دو حک می‌شود؟ دو مینی‌بار چطور؟



چهارمین بار چطور؟



۱۵. به هر عدد طبیعی که بتوان آن را به صورت حاصل ضرب یک عدد طبیعی در خودش نوشت، عدد مربعی می‌گویند. برای مثال 121 یک عدد مربعی است؛ زیرا $11 \times 11 = 121$.

(الف) همهٔ عدهای مربعی یک رقمی، دورقمی و سه رقمی را به دست آورید.

(ب) چند عدد مربعی پنج رقمی وجود دارد؟

۱۲		۶۳
۴۵		۷۵

۳۴	
	۷۸

۱۶. در جدول‌های رو به رو، به دو عدد همسایه می‌گوییم هرگاه خانه‌های آنها در یک ضلع مشترک باشند.

باتوجه به جدول‌های رو به رو به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

(الف) خانه‌های خالی جدول سمت راست را با کوچک‌ترین عدهای طبیعی ممکن طوری پر کنید که ک.م.م هر دو عدد همسایه نصف حاصل ضرب آن دو عدد باشد.
(تکرار مجاز نیست).

(ب) خانه‌های خالی جدول سمت چپ را با عدهای مربعی دو رقمی متفاوت طوری پر کنید که ک.م.م هر دو عدد همسایه با حاصل ضرب آن دو عدد برابر باشد.

۱۷. (الف) هفت عدد دو رقمی متولی پیدا کنید که هیچ‌کدام اول نباشند.

(ب) ده عدد طبیعی متولی پیدا کنید که هیچ‌کدام اول نباشند.

(ج) هزار عدد طبیعی متولی پیدا کنید که هیچ‌کدام اول نباشند.

شاید حل مسئله زیر، ایده‌ای به شما بدهد تا بتوانید قسمت «ج» مسئله قبل را حل کنید!



۱۸. برای هریک از عدهای زیر، شمارندهای به غیر از ۱ و خود عدد پیدا کنید.

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 2$$

$$2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 27 + 11 \quad (\text{ب})$$

$$2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100 + 61$$

$$2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100 + 89 \quad (\text{د})$$

خواندنی

یک عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ در نظر بگیرید. آیا می‌توانید این عدد را به صورت حاصل جمع دو عدد اول بنویسید؟

برای مثال، می‌توان عدد 12 را به صورت مجموع دو عدد اول نوشت: $5 + 7 = 12$.
یکی از مشهورترین مسئله‌های ریاضی که (از قرن هجدهم میلادی تاکنون) حل نشده است، به

«حدس گُلدباخ» معروف است:

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.»



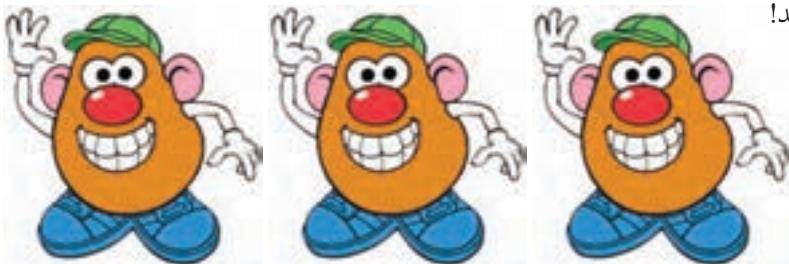
فصل ۶

سطح و حجم

منشورهای با قاعدة شش ضلعی، محل ذخیره عسل زنبورها هستند. عسل یکی از شگفت‌انگیزترین خوراکی‌هاست. در قرآن کریم سوره‌ای به نام زنبور (نحل) وجود دارد. مضمون یکی از آیه‌های این سوره چنین است: «انسان‌های زیادی هستند که سال‌ها عسل می‌خورند، ولی حاضر نیستند ساعتی درباره شگفتی‌های موجود در عسل فکر کنند».

ریاضیات سیب‌زمینی!

برای کمک به یافتن پاسخ سوالات، هر جا لازم بود از سیب‌زمینی و چاقو در کنار خطکش و پرگار کمک بگیرید. شاید بعد از حل مسائل، درست کردن چیزی برای رفع خستگی خیلی خوب باشد!



۱. الف) چطور با یک سیب‌زمینی، یک مکعب می‌توان ساخت؟ روش ساخت خود را شرح دهید.

ب) برای ساختن یک مکعب سیب‌زمینی حداقل به چند برش نیاز است؟

۲. چهار مکعب سیب‌زمینی بسازید!

الف) یکی از سیب‌زمینی‌ها را طوری برش دهید که مقطع آن مثلث باشد.

ب) روی سیب‌زمینی دوم یک مقطع چهارضلعی بسازید.

ج) سیب‌زمینی دیگر را طوری برش دهید که مقطع آن پنجضلعی شود.

د) روی سیب‌زمینی چهارم یک برش بزنید به‌طوری که مقطع آن ششضلعی باشد.

۳. الف) با سیب‌زمینی یک حجم منشوری بسازید که بیش از ۴ وجه جانبی داشته باشد.

ب) با یک سیب‌زمینی یک حجم هرمی بسازید.

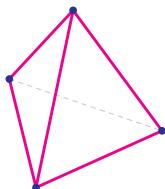
۴. الف) از یک سیب‌زمینی یک حجم هندسی بسازید که فقط چهار وجه داشته باشد و هر وجه آن مثلثی شکل باشد.

ب) با اصلاح حجم هندسی خواسته شده در قسمت «الف»، تلاش کنید تا چهار وجه، مثلث متساوی‌الاضلاع شوند (به این نوع حجم هندسی، چهاروجهی منتظم می‌گویند).

ج) آیا می‌توانید تنها با چهار برش سیب‌زمینی یک چهاروجهی منتظم بسازید؟

سطح و حجم

۵. شکل ذیل یک چهار وجهی منتظم را نشان می‌دهد (یالی که دیده نمی‌شود با خط‌چین مشخص شده است). با استفاده از ۶ خلال‌دندان (یا چوب‌کبریت) یک چهار وجهی منتظم بسازید. برای هریک از چهار رأس می‌توانید از چوب‌پنجه استفاده کنید.

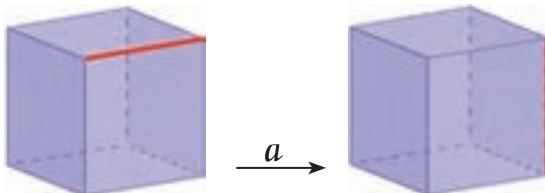


مکعب

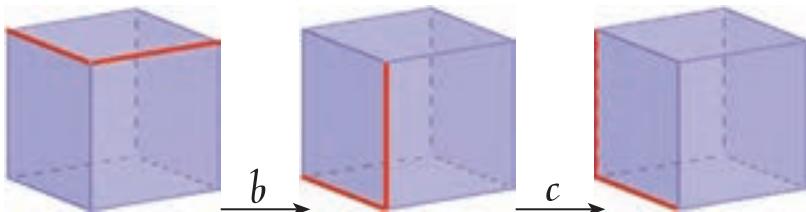
یک مکعب در نظر بگیرید. دستورهای a , b , c و d به ترتیب این مکعب را به سمت راست، سمت چپ، جلو و پشت می‌غلتانند.

چند مثال

- دستور a ، مکعب سمت چپ (شکل زیر) را به مکعب سمت راست تبدیل می‌کند.



- دستور ترکیبی bc مکعب سمت چپ (شکل زیر) را در دو مرحله به مکعب سمت راست تبدیل می‌کند. توجه کنید که دستورهای ترکیبی به ترتیب از چپ به راست عمل می‌کنند.



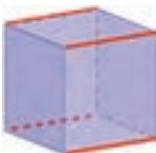
- مکعب زیر را در نظر بگیرید.



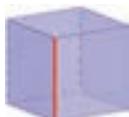
دستور $addb$ مکعب بالا را چهار بار حرکت می‌دهد:



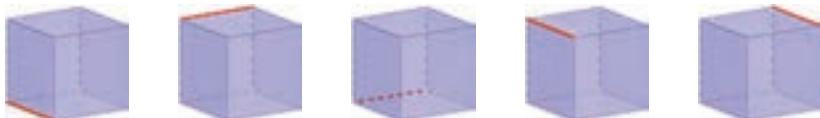
۱. در مکعب زیر، دستورات $abcadb$ را اجرا و مکعب هر مرحله را رسم کنید.



- مکعب زیر را در نظر بگیرید.

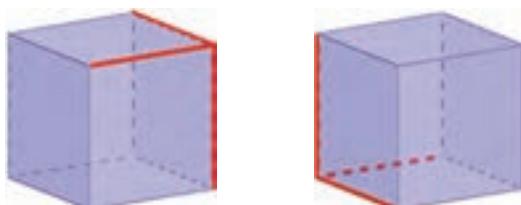


برای تبدیل این مکعب به هریک از مکعب‌های زیر، یک دستور برحسب a , b , c و d بیابید.



آیا پاسخی که برای هر قسمت یافته‌اید، حداقل دستورهای ممکن است؟

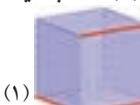
۳. در شکل زیر، سعی کنید با کمترین دستورات ممکن، مکعب سمت چپ را به مکعب سمت راست تبدیل کرد؟



سطح و حجم

دو مکعب داریم که در هریک تعدادی یال قرمز وجود دارد. اگر بتوانیم با دستورهای a, b, c و d یا ترکیبی از آنها مکعب اولی را به مکعب دومی تبدیل کنیم، آنگاه می‌گوییم «یال‌های قرمز مکعب اول» با «یال‌های قرمز مکعب دوم» مشابه‌اند.

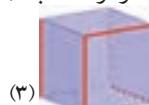
برای مثال، در شکل‌های زیر، یال‌های قرمز مکعب (۱) با یال‌های قرمز مکعب (۲) مشابه است؛ اما یال‌های قرمز مکعب (۳) با یال‌های قرمز مکعب (۴) مشابه نیست.



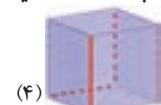
ad



(۲)



(۳)

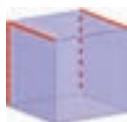


(۴)

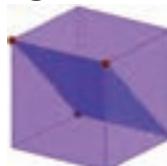
توجه کنید که یال‌های دو مکعب زیر نیز (بدون اجرای هیچ دستوری)، باهم مشابه‌اند.



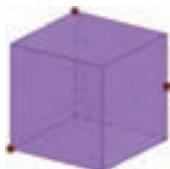
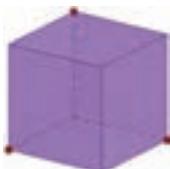
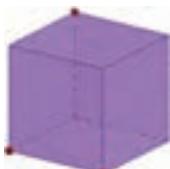
۴. در شکل زیر، جفت مکعب‌هایی را که یال‌های قرمز آنها مشابه یکدیگرند، مشخص کنید و دستور تبدیل آنها بهم را بیابید.



۵. در شکل زیر سه نقطه قرمز روی مکعب، یک سطح مقطع را مشخص کرده‌اند. در هریک



از شکل‌های زیر سه نقطه از یک سطح مقطع داده شده است. آن سطح مقطع را مشخص کنید. آیا شکلی وجود دارد که بیش از یک جواب داشته باشد؟

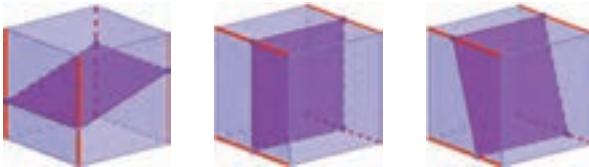


۶. سطح مقطع یک مکعب می‌تواند سه‌ضلعی، چهارضلعی، پنجضلعی یا شش‌ضلعی باشد. برای هریک از سطح مقطع‌های مذکور، یک شکل رسم کنید.



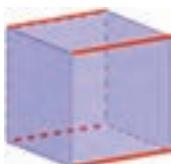
۷. سطح مقطع یک مکعب نمی‌تواند هفت‌ضلعی یا هشت‌ضلعی باشد؛ چرا؟

۸. به سه شکل زیر دقت کنید. در هر سه شکل، سطح مقطعی به شکل چهارضلعی دیده می‌شود. رأس‌های این سطح مقطع‌ها روی یال‌های قرمز هر مکعب قرار دارند. آیا یال‌های قرمز مکعب سمت چپ با یال‌های قرمز دو مکعب دیگر مشابه‌اند؟



۹. دو سطح مقطع از دو مکعب را در نظر بگیرید که رئوس این دو سطح مقطع روی رئوس مکعب نباشد. اگر رئوس این دو سطح مقطع روی یال‌های مشابه دو مکعب باشند، این دو سطح مقطع را مشابه می‌نامیم.

الف) روی مکعب زیر، سطح مقطعی مشابه سه سطح مقطع بالا معرفی کنید که رئوس آن روی چهار یال قرمز باشند.



ب) آیا امکان دارد سطح مقطع یک مکعب (که از هیچ رأس مکعب نمی‌گذرد)، چهارضلعی باشد ولی مشابه «الف» نباشد؟

ج) یک مکعب چند نوع سطح مقطع غیرمشابه دارد؟



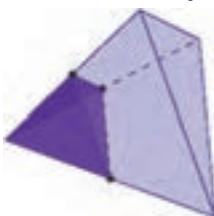
چهاروجهی منتظم

۱. چرا سطح مقطع یک چهاروجهی منتظم نمی‌تواند یک هفت‌ضلعی باشد؟

۲. آیا سطح مقطع یک چهار وجهی منتظم می‌تواند مربع شکل شود؟ اگر پاسخ‌تان «بله» است، با یک شکل آن را نشان دهید و اگر پاسخ‌تان «خیر» است، دلیل خود را توضیح دهید.

سطح و حجم

۳. یک چهار وجهی منتظم داریم. مطابق شکل زیر، نقاط مشخص شده روی یال‌های آن، بیانگر رئوس یک چهار وجهی دیگر شده‌اند.



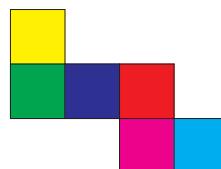
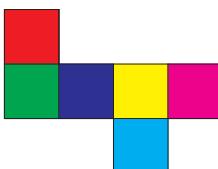
الف) یک چهار وجهی منتظم داریم. نقاطی را روی یال‌های آن مشخص کنید که (تقریباً) بیانگر رئوس یک مکعب باشند.

ب) یک مکعب داریم. نقاطی روی یال‌های آن مشخص کنید که (تقریباً) بیانگر رئوس یک چهار وجهی منتظم باشند.

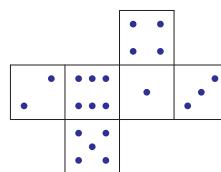
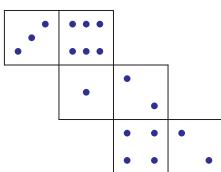


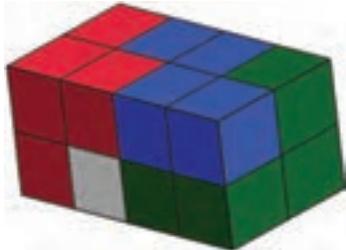
شهود فضایی

۱. هریک از شکل‌های زیر، گستردۀ یک مکعب را نشان می‌دهند. در هر شکل وجههای رو به رو را دو به دو مشخص کنید.



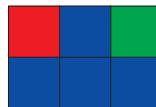
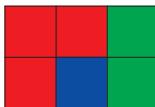
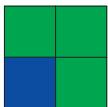
۲. اگر با هریک از شکل‌های زیر یک مکعب بسازیم، بزرگ‌ترین مجموع تعداد نقطه‌های سه وجه با رأس مشترک چقدر می‌شود؟



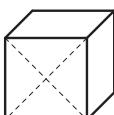
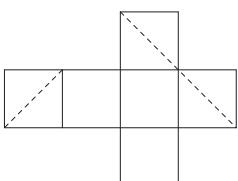


۳. مکعب مستطیل روبه‌رو از چهار بلوک تشکیل شده که هر بلوک با چهار مکعب کوچک ساخته شده است. سه تا از این بلوک‌ها را به طور کامل در شکل نشان داده‌ایم. بلوکی که با مکعب‌های سفید ساخته شده را رسم کنید.

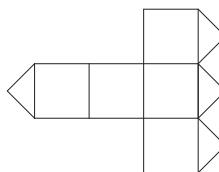
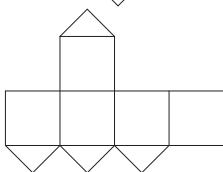
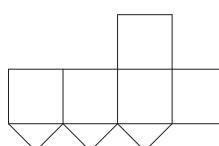
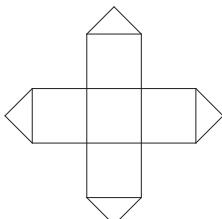
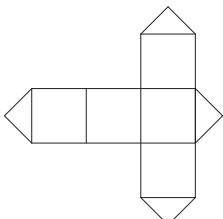
۴. یک مکعب مستطیل از سه بلوک به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز ساخته شده است. هر کدام از بلوک‌ها از چهار مکعب یکسان تشکیل شده‌اند. شکل‌های زیر، به ترتیب (از راست به چپ) روبه‌رو، بالا و سمت راست این مکعب مستطیل را نشان می‌دهند. این مکعب از پایین چگونه دیده می‌شود؟



۵. یک مکعب کاغذی را برش داده‌ایم. شکل زیر گسترده‌این مکعب را نشان می‌دهد. اگر خط‌چین‌ها نشان‌دهنده محل برش باشند، آنگاه مقطع حاصل از این برش را رسم کنید.



۶. یکی از وجههای مکعب روبه‌رو را در امتداد قطرهایش بریده‌ایم. کدامیک از نمودارهای زیر نمی‌تواند نمایش گسترده‌این مکعب باشد؟



سطح و حجم

۷. مکعبی چوبی به ابعاد $5 \times 5 \times 5$ را با بهم چسباندن ۱۲۵ مکعب واحد درست کردایم. از این مکعب طوری عکس گرفته‌ایم که بیشترین مکعب‌های واحد دیده شوند. چند مکعب واحد در عکس دیده می‌شود؟

۸. سعید تعداد زیادی مکعب رنگی $1 \times 1 \times 1$ دارد. او می‌خواهد با استفاده از ۲۷ مکعب کوچک، یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ بسازد بهطوری‌که هر دو مکعبی که حداقل در یک رأس مشترک‌اند، همنگ نباشند. سعید حداقل باید چند رنگ مکعب داشته باشد؟



محاسبه حجم‌های منشوری

۱. فرض کنید حجم یک مکعب مستطیل برابر V باشد. با هریک از تغییرات زیر، حجم مکعب مستطیل حاصل را برحسب V بهدست آورید.

(الف) طول ۳ برابر شود.

(ب) عرض ۲ برابر و ارتفاع، $\frac{1}{5}$ مس شود.

(ج) عرض ۳ برابر، ارتفاع ۴ برابر و طول $\frac{1}{8}$ برابر شود.

۲. طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل به ترتیب 18 ، 15 و 21 است. حجم یک منشور با حجم این مکعب مستطیل برابر است. اگر مساحت قاعده این منشور 210° باشد، ارتفاع منشور را بهدست آورید.

۳. یک قطعه فلز را در ظرف آبی به شکل مکعب مستطیل به قاعده 50×36 انداخته‌اند و کاملاً به زیر آب رفته است. در نتیجه ارتفاع آب $0/8$ بالا آمده است. حجم قطعه فلز را بیابید.

۴. دو ظرف استوانه‌ای مریای توت‌فرنگی ساخت یک کارخانه در قفسه‌های یک مغازه قرار دارد. ارتفاع ظرف بلندتر دو برابر ارتفاع ظرف کوتاه‌تر شعاع ظرف بلندتر نصف شعاع ظرف کوتاه‌تر است. قیمت ظرف بلندتر 23 هزار تومان و قیمت ظرف کوتاه‌تر 43 هزار تومان است. کدام را می‌خرید؟



۵. کاظم آقا هرچه تلاش کرد نتوانست برای کندن چاه مجوز بگیرد. او به دلیل وسوسه روحی اش، در تقسیم‌بندی آب قنات محل، ثبت نام نکرده بود. کاظم آقا که نمی‌خواست درختان با غش خشک شود، تصمیم گرفت بدون مجوز چاهی در با غش حفر کند. او درباره قیمت کندن چاه چیزی نمی‌دانست؛ بنابراین از چند مُقْنی^۱ هزینهٔ حفر چاه را پرسید. کمترین قیمتی که شنیده بود، چنین بود:

۱۰ متر اول، هر متر ۱۰۰۰۰۰ تومان، ۱۰ متر بعدی هر متر ۱۵۰۰۰۰ تومان، ۱۰ متر بعدی هر متر ۲۰۰۰۰۰ تومان و همین طور برای هر ۱۰ متر ۵۰۰۰۰ تومان به دستمزد اضافه می‌شود.

کاظم آقا حدس زد که این چاه در حدود عمق ۶۰ متری به آب می‌رسد. بعد از اینکه دستمزد کندن چاه را با خودش حساب کرد، خوشحال شد و از قنبرآقا چاه‌کن خواست که به باغ بیاید و کار را شروع کند.

مسئلهٔ ۱: کاظم آقا فکر می‌کرد قیمت کندن چاه چقدر می‌شود؟

بعد از اینکه قنبرآقا چاه‌کن کارش را شروع کرد، کاظم آقا هزینهٔ حمل خاک بیرون آمده از چاه را، به خارج شهر حساب کرد. او با خود گفت: «قطر دهانهٔ چاه ۹۰ سانتی‌متر است و ارتفاع آن حداقل ۶۰ متر. عدد پی هم که برابر ۳ است؛ هر کامیون در هر بار می‌تواند ۳/۵ متر مکعب خاک جابه‌جا کند. اجرت راننده برای هر بار حمل بار ۷۰۰۰۰ تومان است، پس

مسئلهٔ ۲: کاظم آقا فکر می‌کرد هزینهٔ حمل خاک چاه چقدر می‌شود؟
بعد از چند روز کاظم آقا دید که حجم خاک بیرون آمده از چاه از آن چیزی که او محاسبه کرده خیلی بیشتر است. قنبر مقتنی برای کاظم آقا توضیح داد که وقتی خاک از زمین بیرون می‌آید، حجمش ۱/۳ برابر می‌شود.

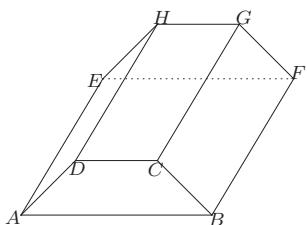
بالاخره قنبر مُقْنی در عمق ۶۰ متری به آب رسید. او به کاظم آقا گفت که باید حداقل ۲۰ متر بیشتر بکند و گرنه چاه خیلی زود خشک می‌شود. ولی کاظم آقا قبول نکرد و گفت: «پنج متر دیگه بکن و تموم!». قنبرآقا گفت: «پس انبارش چی؟ چاهی که انبار نداره خیلی کم آبه!» سرانجام بعد از گفت‌وگوی بسیار، کاظم آقا قبول کرد که چاهش یک انبار مکعب مستطیلی به عرض قطر دهانهٔ چاه، طول ۱۰ متر (موازی با سطح زمین) و ارتفاع ۱/۵ متر (عمود بر سطح زمین) داشته باشد. هزینهٔ کندن هر متر مکعب انبار چاه ۷۵۰۰۰ تومان بود.

مسئلهٔ ۳: در نهایت کاظم آقا برای حفر این چاه، چقدر هزینه کرد؟
بد نیست بدانید که این داستان واقعی بود و بعد از دو سال چاه کاظم آقا خشک شد!!

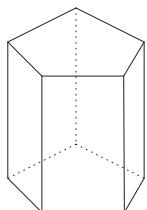
^۱ به کسانی که چاه و قنات می‌کنند، مُقْنی می‌گویند.

مساحت جانبی و کل

۱. در یک جعبه مکعبی بزرگ، ۸ مکعب کوچک قرار داده ایم به ترتیب که جعبه بزرگ پر شده است. کف جعبه بزرگ چند مکعب کوچک قرار داده شده است؟
 ۲. یک مکعب به طول ضلع ۱ سانتی متر را روی یک مکعب دیگر به طول ضلع ۳ سانتی متر چسبانده ایم. مساحت کل شکل حاصل، چقدر است؟
 ۳. یک مکعب مستطیل، از هشت مکعب همان اندازه تشکیل شده است.
- الف) همه حالت های ممکن برای این مکعب مستطیل را رسم کنید.
- ب) اگر مساحت جانبی هر مکعب 24 سانتی متر مربع باشد، آنگاه مساحت جانبی هر یک از مکعب مستطیل های رسم شده در قسمت «الف» را به دست آورید.
۴. شکل زیر یک منشور را نشان می دهد که قاعده های آن ذوزنقه اند. طول قاعده های این ذوزنقه 4 و 9 ، و طول ساق های آن 5 و 6 است. اگر $\overline{BF} = 12$ باشد، مساحت جانبی این منشور را به دست آورید.



۵. شکل زیر یک منشور با قاعده پنج ضلعی است که طول اضلاع قاعده آن 2 , 7 , 5 و $\frac{1}{2}$ است. اگر ارتفاع این منشور 8 باشد، مساحت جانبی آن را به دست آورید.



۶. ارتفاع منشوری را بیابید که مساحت جانبی آن 143 و محیط قاعده آن 13 باشد.



۷. دو غلتک، اولی با محیط ۲۴ و دومی با محیط ۳۶ را در نظر بگیرید. از این دو غلتک برای رنگ کردن استفاده می‌شود. هر دو غلتک در هر دور یک خط باریک را رنگ نشده باقی می‌گذارند.

فرض کنید در غلتک اول، رنگ آبی، و در غلتک دوم رنگ زرد ریخته‌اند؛ ابتدا با غلتک اول مسیری به طول 180° و سپس با غلتک دوم روی همان مسیر را رنگ زده‌اند. اگر هریار، هنگام شروع به رنگ کردن، قسمتی از غلتک که رنگ نمی‌کند، روی زمین باشد، آنگاه به پرسش‌های زیر پاسخ دهید (می‌دانیم ترکیب رنگ‌های آبی و زرد، رنگ سبز است).

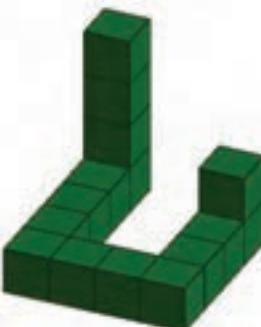
الف) چند خط در مسیر رنگ نشده باقی می‌ماند؟

ب) چند خط در مسیر سبز رنگ نیست؟

حجم و سطح

۱. حسین ۴۲ مکعب یکسان به طول ضلع ۱ سانتی‌متر دارد. او با استفاده از همه این مکعب‌ها یک مکعب مستطیل می‌سازد که محیط قاعده‌اش ۱۸ سانتی‌متر است. ارتفاع مکعب مستطیلی که علی ساخته، چقدر است؟

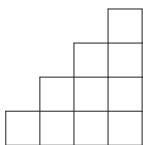
۲. شکل زیر از مکعب‌های به ضلع ۱ درست شده است. حداقل چند مکعب دیگر به شکل اضافه کنیم تا یک مکعب توپر بزرگ به دست آید؟ (مکعب‌های شکل را نمی‌توانند جای‌جا کنند).



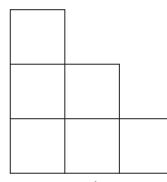
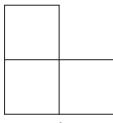
۳. یک ظرف مکعب شکل به ضلع ۳۰ سانتی‌متر پراز آب است. اگر وزن یک لیتر آب یک کیلوگرم باشد، وزن آب درون ظرف چقدر است؟

سطح و حجم

۴. یک جسم سه بعدی از مکعب های واحد ساخته شده است. شکل های زیر، به ترتیب از راست به چپ، نمای جلو، نمای بالا و نمای چپ، از این جسم سه بعدی را نشان می دهند.
حجم این جسم چقدر است؟



۵. در الگوی زیر، هر یک از شکل ها، نمای جلو، بالا و سمت راست یک جسم سه بعدی است که از مکعب های به ضلع واحد درست شده است. جسم سه بعدی (۱) را ۱- پله، جسم سه بعدی (۲) را ۲- پله، جسم سه بعدی (۳) را ۳- پله، ... و جسم سه بعدی (n) را n - پله می نامیم.



شکل ۱

شکل ۲

شکل ۳

الف) حجم ۴- پله را به دست آورید.

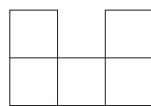
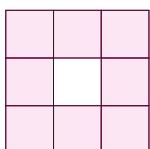
ب) به ۵- پله حداقل چند مکعب واحد بچسبانیم تا شکل حاصل یک مکعب شود؟

ج) حجم شکل چندم ۵۶ می شود؟

د) حجم ۱۰- پله را به دست آورید.

ه) حجم n - پله بر حسب n چیست؟

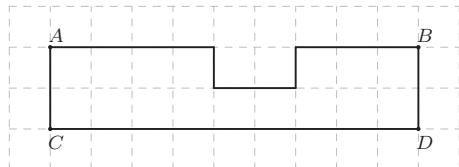
۶. دو جسم سه بعدی با رنگ های سفید و صورتی داریم که هر یک از مکعب های به طول واحد تشکیل شده اند. در زیر، شکل سمت چپ نمای بالا و رو به روی جسم صورتی و شکل سمت راست نمای بالا و رو به روی جسم سفید است.



الف) حجم جسم سفید حداقل چقدر است؟

ب) حجم جسم صورتی حداقل چقدر است؟

۷. در شکل زیر، هر مربع کوچک، یک واحد مساحت است.

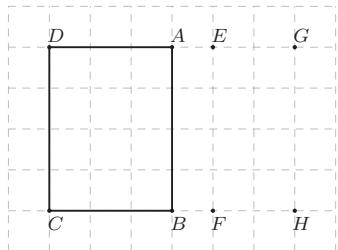


حجم شکل به دست آمده از دوران چندضلعی بالا؛

الف) حول خط AB چقدر است؟

ب) حول خط CD چقدر است؟

۸. در شکل زیر، هر مربع کوچک، یک واحد مساحت است. حجم شکل به دست آمده از دوران مستطیل $:ABCD$ می‌باشد.



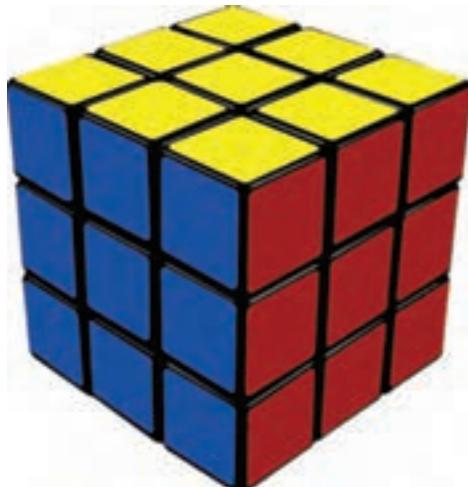
الف) حول خط AB چقدر است؟

ب) حول خط EF چقدر است؟

ج) حول خط GH چقدر است؟

د) اعداد به دست آمده در قسمت‌های بالا را با یکدیگر مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹. شکل زیر یک مکعب روبيک^۱ $3 \times 3 \times 3$ است.



^۱ این مکعب را «ارنو روبيک» (Erno Rubik) در سال ۱۹۷۴ ميلادي طراحی كرده است.

سطح و حجم

الف) چند مکعب $1 \times 1 \times 1$ در مکعب روییک $3 \times 3 \times 3$ وجود دارد؟

ب) در این روییک چند مکعب $1 \times 1 \times 1$ سه وجه آن رنگی است؟ چند مکعب از آنها دو وجه آن رنگی شده است؟ چند مکعب از آنها تنها یک وجه آن رنگی شده است؟ چند مکعب از آنها اصلاً رنگی نشده‌اند؟

ج) آیا در روییک بالا مکعبی هست که بیش از سه ضلعش رنگی باشد؟

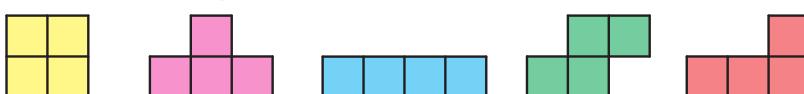
د) مکعب‌هایی که رنگی نمی‌شوند، مکعب‌های پنهانی‌اند که روی سطح ظاهر نمی‌شوند. تعداد این مکعب‌های پنهانی در یک مکعب روییک به ابعاد $4 \times 4 \times 4$ چند عدد است؟

ه) تعداد مکعب‌های پنهانی در یک مکعب (مکعب مستطیل) روییک به ابعاد $d \times e \times f$ چند عدد است؟



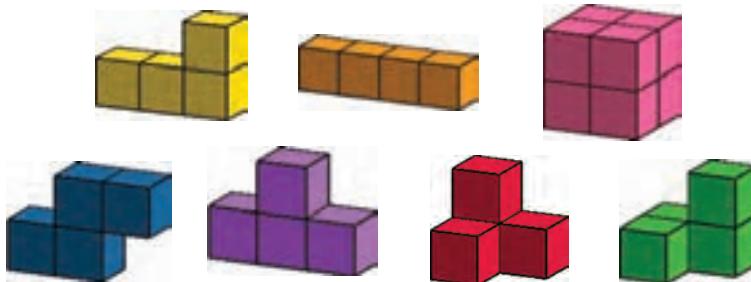
و) در یک مکعب روییک به ابعاد $c \times b \times a$ ، نصف مکعب‌ها پنهانی هستند. a , b و c چه اعدادی می‌توانند باشند؟

۱۰. پنج موجود ۴-خونه‌ای داریم (شکل‌های زیر) که هریک از ۴ مربع واحد تشکیل شده‌اند.



آیا می‌توانید با چسباندن این ۴-خونه‌ای‌ها به یکدیگر مستطیلی 5×5 بسازید؟ (اگر لازم شد می‌توانید ۴-خونه‌ای‌ها را دوران یا بازتاب دهید، ولی مجاز به بریدن آنها نیستید).

۱۱. هفت موجود ۴-مکعبی داریم:

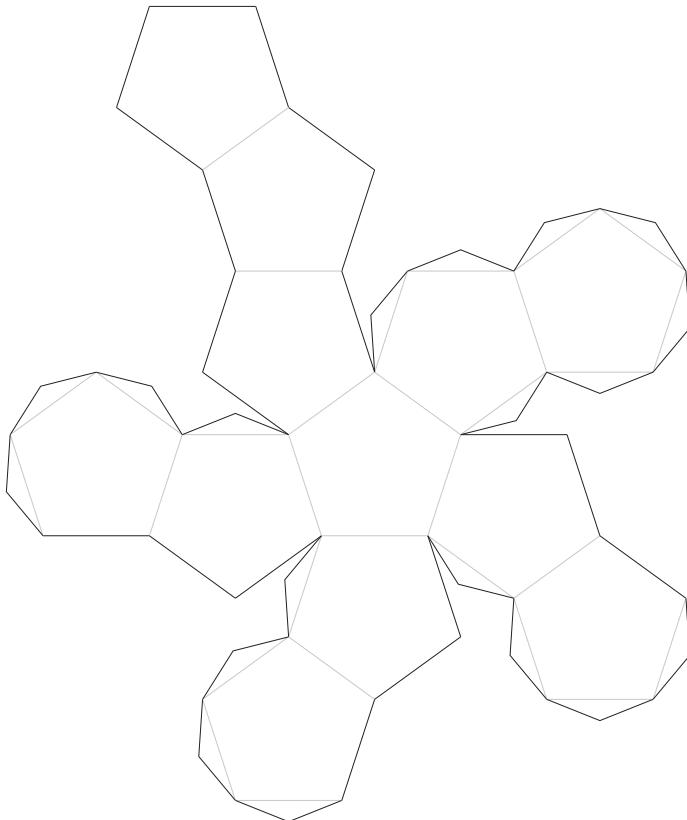


آیا می‌توانید با چسباندن این موجودات به یکدیگر یک مکعب مستطیل $7 \times 2 \times 2$ بسازید؟

^۱ M. Erickson, *Aha! Solutions*, Mathematical Association of America, 2008, Page 102.

کارگاه ساخت حجم-دوازده وجهی منتظم

شکل زیر گسترده یک دوازده وجهی منتظم را نشان می‌دهد. این گسترده را با ابعاد بزرگ‌تر روی یک مقوای A۳ رسم کنید به طوری که وقتی اطراف آن را می‌برید، تبدیل به یک دوازده وجهی منتظم با بیشترین حجم ممکن شود. می‌توانید روی هر وجه این حجم، تقویم یک ماه از سال را بنویسید و یک سال از آن استفاده کنید!^۱



^۱ دوازده وجهی منتظم یکی از احجام افلاطونی است. برای آشنایی بیشتر با این اجسام، «احجام افلاطونی» را در گوگل جست‌وجو کنید.

فصل ۷

توان و جذر



یک دانه گندم،
یک خوشه گندم،
یک مزرعه گندم ...

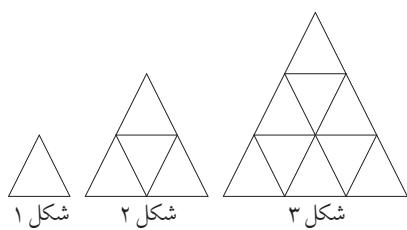
تعريف توان

۱. در یک مدرسه، ۳ پایه وجود دارد. هر پایه ۳ کلاس دارد. در هر کلاس ۳ ردیف نیمکت چیده شده است. در هر ردیف، ۳ نیمکت قرار دارد. روی هر نیمکت ۳ دانشآموز می‌نشینند. اگر هر دانشآموز، ۳ بار در روز آب بنوشد و هر بار به اندازه ۳ فنجان، آب هدر بدهد، دانشآموزان این مدرسه در ۳ روز، چند فنجان آب اسراف می‌کنند؟ در ۲۷ روز چطور؟

۲. به شکل‌های زیر توجه کنید.

همان‌طور که می‌بینید، در «شکل ۱» یک مثلث کوچک، در «شکل ۲» چهار مثلث کوچک و در «شکل ۳» نه مثلث کوچک وجود دارد.

قانون این الگو را کشف کنید و سپس به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.



الف) «شکل ۴» و «شکل ۵» را رسم کنید و تعداد مثلث‌های کوچک هر شکل را بشمارید.

ب) در شکل دهم چند مثلث کوچک وجود دارد؟

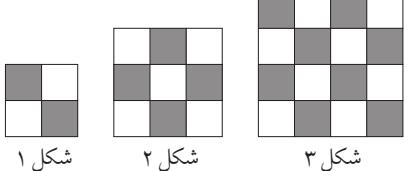
۳. الگوی رو به رو را به دقت ببینید.

الف) در «شکل ۱»، چند مربع سیاه هست؟

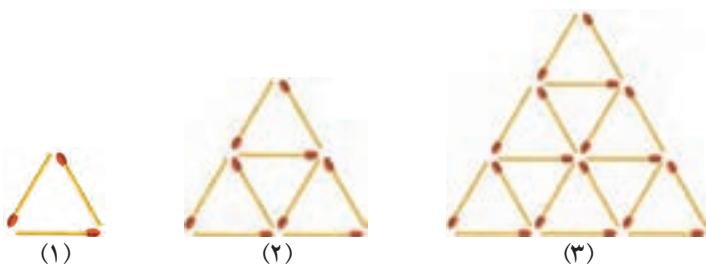
ب) در «شکل ۲»، چند مربع سیاه هست؟

ج) در «شکل ۳»، چند مربع سیاه هست؟

د) در «شکل ۲۰»، چند مربع سیاه هست؟



۴. شکل‌های زیر، یک الگوی چوب‌کبریتی را نشان می‌دهد.



توان و جذر

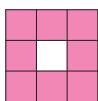
الف) با توجه به چوبکبریت‌های شکل‌های (۱)، (۲) و (۳)، شکل (۴) و شکل (۵) را رسم کنید.



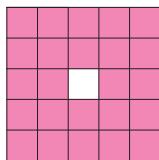
ب) تعداد چوبکبریت‌های شکل $n^{\text{م}}$ این الگو را برحسب n بیابید.

ج) با توجه به رابطه‌ای که در قسمت قبل به دست آورده‌ید، تعداد چوبکبریت‌های شکل (۲۰) را محاسبه کنید.

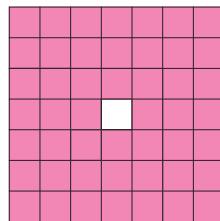
۵. در الگوی زیر، هریک از شکل‌ها، نمای جلو، بالا و چپ یک جسم سه‌بعدی است که از مکعب‌های صورتی رنگ به‌ضلع واحد ساخته شده است.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

الف) شکل چهارم حداقل از چند مکعب صورتی تشکیل شده است؟

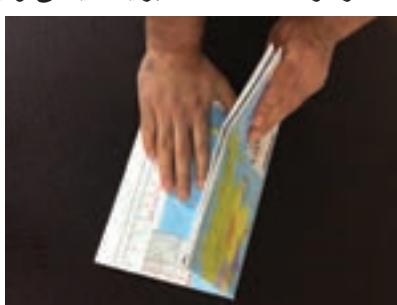
ب) شکل پنجم حداقل از چند مکعب صورتی تشکیل شده است؟

ج) حداکثر حجم شکل $n^{\text{م}}$ را به‌صورت یک عبارت جبری بنویسید.

۶. کاغذی را هر بار از وسط تا می‌زنیم. اگر مساحت کاغذ اصلی یک متر مربع باشد، مساحت شکل به‌دست آمده بعد از سومین تا، چقدر است؟

۷. الف) اگر یک کاغذ مربعی شکل به طول ضلع یک متر و ضخامت ۱٪ میلی‌متر داشته باشیم و آن را در هر مرحله از وسط تا بزنیم، بعد از هشتمنی تا، طول و ضخامت آن چقدر می‌شود؟

ب) یک کاغذ بردارید و آن را در هر مرحله از وسط تا بزنید. آیا می‌توانید از مرحله هفتم جلوتر بروید؟



محاسبه یک عبارت توان دار

۱. در هر یک از قسمت های زیر، ابتدا پایه هر توان را مشخص کنید. سپس حاصل هر عبارت را بیابید:

الف $2^6 \times 3^5 \times 7^4$

ج -3^4

ه 3×10^{12}

ز $-4^5 \times (-5)^4$

ب 5×3^4

د $8 - 3^4 - (4 \times 5)^2$

و $0^7 \times 7^0 - 4^0$

ح $11 - 10^3 \times 3^4 + (2^5 + 3)^2$

الف $3^2 \times 2^3 \div 6 - 1^7$

ج $19 - (3^2 + 4) + 6$

ه $12 - (4^3 \div 8) + 1$

ز $5^3 + 5^3 + 5^3$

ط $3 \times (13 + 7) \div (10 - 4^2)$

ک $5^2 - (3^2 - 1^3) \times 2^4 \div 4^2$

م $(5^3 \div 25) \times (2^3 + 2^3) \div 2^2$

س $(-7 \times 2^4) \div 2^4 \times (-4)^2$

ب $4^2 - 3 \times 2^2$

د $3 \times 6^2 + 4$

و $15 - 2^3 \div 4$

ح $7^2 + 7^2$

ی $(-5 \times 4)^3 \div 4^3 \times (-3)^2$

ل $(7^2 - 5^2)(6 \times 3^2 + 4) \times 2^0$

ن $5^2 - (3^2 - 1^3) \times 2^2 \div 4^2$

ع $(3^5 - 5^3)(2^3 - 3^2) \div 2^2$

۳. داخل هریک از دایره های زیر، علامت «<»، «=» یا «>» قرار دهید:

الف $3^5 \bigcirc 5^3$

ج $2 \times 2 \bigcirc 2^2$

ه $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \bigcirc \left(\frac{1}{2}\right)^7$

ز $21^\circ + 21^\circ \bigcirc 211^\circ$

ح $0^{100} \bigcirc 100^\circ$

ی $-3^4 \bigcirc (-3)^4$

م $1 \div 2 \times 2 \times 2 \bigcirc 1 \div 2^3$

ب $2 \times 10 \bigcirc 21^\circ$

د $4^3 + 4^2 \bigcirc 4^5$

و $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \bigcirc \frac{1^3}{3}$

ل $(-1)^{20} \bigcirc -1^{100}$

ط $1 \times 25 \bigcirc 1^{25}$

ک $-3^5 \bigcirc (-3)^5$

ساده کردن عبارت‌های توان‌دار

۱. کدام شیوه نمایش را برای عدد $1,000,000,000,000,000$ بیشتر می‌پسندید؟

$$\text{الـ بـ } ١٠٢١ \quad \text{الـ جـ } ١,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠$$

بار ٢١ $\underbrace{1^{\circ} \times 1^{\circ} \times \cdots \times 1^{\circ}}$

۲. کدام نمایش را برای تجزیه عدد ۱۹۱۴۴۲۲۳۴۳۷۵ بیشتر می‌پسندید؟

$$\begin{array}{lll} \text{(الف)} & 5^5 \times 5^5 \times 5^5 \times 5^5 \times 5^5 \times 3^3 \times 3^3 \times 3^3 \times 3^3 \times 3^3 \times 7^7 \times 7^7 \times 7^7 \times 7^7 \\ & 5^3 \times 3^1 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 3^5 \times 5^3 & \text{(ج)} \quad 5^6 \times 1 \times 3^6 \times 1 \times 7^5 \\ \text{(ب)} & 5^6 \times 3^6 \times 7^5 & \text{(ه)} \quad 15^5 \times 7^5 \end{array}$$

۳۰. الف) در رایانه، ۱ بایت ۸ بیت است. 21° بایت، ۱ کیلوبایت، 21° کیلوبایت ۱ مگابایت، 21° مگابایت ۱ گیگابایت و 21° گیگابایت برابر ۱ تربابایت است. اگر بپرسید یک

- $1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1$
 - $1 \times \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{43 \text{ بار}}$

ب) سه هزار میلیارد بزرگ‌تر است یا تعداد بیت‌های یک تا ایات؟

۴. فروشنده‌ای می‌خواهد عدد ۱۹۲۱۷۸۹۷۵۴۹۲۱۶۳۶۵۲۶۴۹ را بفروشد! به نظر شما کدام نمایش زیر، خریدار پیشتری دارد؟!

- ۳۲۳۱°
 - $17^{\circ} \times 19^{\circ}$

۵. حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید:

الف 10000×100 (ج) $(\frac{7}{20})^5 \times (0/35)^{11}$ د $2 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{10}$ ح $2^5 + 2^5$	ب $(\frac{1}{5})^7 \times (0/2)^4$ د $(\frac{3}{5})^{10} \times (0/6)^3 \times \frac{11}{20}$ و $3^5 \times 3^6 \times 3^7 \times \dots \times 3^{10}$ ح $3^2 + 3^2 + 3^2$
--	---

۶. عدد ۱۸ را به صورت حاصل ضرب

لف) دو عدد توان دار مساوی پنوسید.

ب) سه عدد توان دار مساوی بنویسید.

۷. عدد ۷۷۷ را به صورت حاصل ضرب ۷ عدد توان دار مساوی پنوندید.

۸. هر دسته از عدهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

الف $2^4, 3^4, 4^2, 5^3, 9^2$

ج $2^2 \times 3^5, 5 \times 3^5, 5^2 \times 3^4$

ه $\left(\frac{2}{3}\right)^8, \frac{2^8}{3}, \frac{2}{3^8}$

ز $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$

ط $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$

ک $5^{21}, 5^{23} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{22}, 5^{23} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2$

ب $2^3, 3^3, 4^2, 5^2, 6^2$

د $2^5 \times 17, 3^5 \times 17, 5^3 \times 17$

و $\left(\frac{1}{5}\right)^{10}, \left(\frac{2}{5}\right)^{10}, \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$

ح $3^{20}, 2^3 \times 3^{18}, 5^3 \times 3^{16}$

ی $2^{10}, 3 \times 2^9, 4^2 \times 2^8$

تمرین‌های تکمیلی

۱. هریک از عدهای زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول تواندار بنویسید:

الف 5^4

ه 128

ط 1001

م 51×3^4

ع 234×343

ب 72

و 808

ی 72×57

ن 39×91

ف 78×81

ج 96

ز 2500

ک 35×49

س 66×121

ص $256 \times 225 \times 250$

د 98

ح 105000

ل 36×88

۲. در هر قسمت x چه عددی است؟

الف $2^2 \times (x) \times 11 = 66^{\circ}$

ج $2^2 \times (x) \times 3 = 150^{\circ}$

ب $3 \times 2^4 \times (x) = 120^{\circ}$

د $2 \times (x) \times 5^2 = 45^{\circ}$

۳. ب.م.م و ک.م.م هر جفت از اعداد زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول تواندار

بنویسید:

الف $5^7 \times 7^5, 5^3 \times 3^5$

ج $35 \times 77, 12 \times 18$

ه $14 \times 18 \times 21, 15 \times 51 \times 72$

ب $3^2 \times 7 \times 11, 2^5 \times 3 \times 7^2$

د $100 \times 7^4 \times 3^5, 5^7 \times 2^5 \times 18$

و $91 \times 39 \times 45, 65 \times 49 \times 85$

۴. هر دسته از عدهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

الف $2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 4 \times 11, 2^4 \times 3^7 \times 5^3, 2^2 \times 3^6 \times 5^4$

(ب) $2^6 \times 3^2 \times 5^5, 2^2 \times 3^7 \times 5^4$

(ج) $2^6 \times 5^5 \times 13^7, 2^3 \times 3 \times 5^4 \times 13^8$

(د) $13^{18}, 13^{21} \times \left(\frac{1}{13}\right)^4, 13^{21} \times \left(\frac{2}{13}\right)^4$

۵. مساحت یک مستطیل 5^{1393} است. اگر طول ضلع مستطیل ۵ برابر عرض مستطیل باشد،

الف) طول و عرض این مستطیل را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

ب) محیط این مستطیل چند برابر عرضش است؟

۶. الف) می دانیم x و y دو عدد طبیعی هستند و $x.y = 1000$. اگر 10 شمارنده x و y نباشد، x و y چه اعدادی هستند؟

ب) خانه های خالی جدول زیر را با اعدادهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل ضرب اعدادهای هر سطر برابر 10^6 شود.



ج) آیا می توانید خانه های خالی جدول بالا را با اعدادهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل ضرب اعدادهای هر سطر و هر ستون برابر 1000 شود؟

۷. خانه های خالی جدول زیر را با اعدادهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل ضرب اعدادهای هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر 10^6 شود.

راهنمایی: می توانید از مربع های لاتین متعامد که در فصل یک درباره آنها تحقیق کردید، استفاده کنید. (Orthogonal latin squares)

۸. آیا ۶ شمارنده 3×27 است؟ چرا؟

۹. الف) حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۷۲ بنویسید.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9 \times 12 \times 18 \times 24 \times 36 \times 72$$

ب) حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار با توان بزرگتر از 10 بنویسید.

$$2^3 \times 3^3 \times 6^3 \times 9^3 \times 18^3 \times 27^3 \times 54^3$$

۱۰. عدد $18 \times 2 \times 3 \times \dots = 1 \times 2 \times 3 \times \dots$ را در نظر بگیرید.

(الف) عدد A را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

(ب) ابتدا هر یک از اعدادهای زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید. سپس با ذکر دلیل مشخص کنید کدامیک شمارنده عدد A هستند.

- 128
- 290

- 49×28
- 320×230

- 221
- 128×128
- 51×91

(ج) شمارنده‌های عدد A را به ترتیب از کوچک به بزرگ نوشت‌ایم. نوزدهمین شمارنده چیست؟



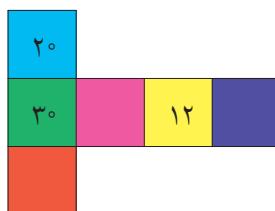
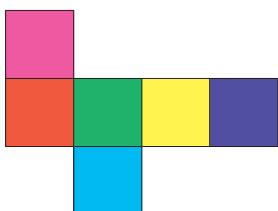
(د) اگر شمارنده‌های عدد A را به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسیم، بیست و سومین شمارنده چیست؟



۱۱. تعدادی باکتری در ظرفی شیشه‌ای گذاشته شده‌اند. یک ثانیه بعد هر باکتری به دو باکتری تقسیم می‌شود؛ یک ثانیه بعد از آن هر یک از باکتری‌های حاصل هم به دو باکتری تقسیم می‌شوند و همین طور تا آخر. بعد از یک دقیقه ظرف پر می‌شود. چند ثانیه طول کشیده تا نصف ظرف پر شده است؟



۱۲. هر یک از شکل‌های زیر گسترش‌یافته یک مکعب را نشان می‌دهند. ابتدا در هر شکل وجههای رویه‌رو را دو به دو مشخص کنید؛ سپس به پرسش‌ها پاسخ دهید.



(الف) خانه‌های خالی مکعب سمت راست را با اعداد طبیعی کمتر از 4° طوری پر کنید که حاصل ضرب هر دو عدد رویه‌روی هم مقداری یکسان شود (تکرار اعداد مجاز نیست).

(ب) آیا می‌توانید خانه‌های خالی مکعب سمت چپ را با اعداد طبیعی کمتر از 4° که بر 5 بخش پذیر نیستند، طوری پر کنید که حاصل ضرب هر دو عدد رویه‌روی هم مقداری یکسان شود؟ (تکرار اعداد مجاز نیست).



توان و جذر

۱۳. عددی را که فقط سه شمارنده دارد، عدد دوم می‌نامیم. برای مثال ۴ یک عدد دوم است؛ زیرا سه شمارنده دارد: ۲، ۱ و ۴.

(الف) کدامیک از عددهای زیر، عدد دوم هستند؟

● ۶

● ۵۱۲

● ۴۹

● ۳۶

● ۸۱

● ۱۲۱

● ۱۶۹

● ۱۴۲

(ب) کدامیک از عددهای زیر را می‌توان به صورت حاصل ضربی از عددهای دوم نوشت؟

● ۵۰

● ۶۴

● ۱۰۰

● 39×26

(ج) درست یا نادرست؟

«هر عدد دوم، توان دوم یک عدد اول است».

۱۴. جمله $n^{\text{ام}}$ هریک از دنباله‌های زیر را بیابید.

(الف) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

(ب) $1, -4, 9, -16, 25, -36, \dots$

جذر و ریشه

۱. مقدار دقیق عبارت‌های زیر را به دست آورید:

(الف) $\sqrt{5^{20}}$

(ب) $\sqrt{\sqrt{400} + \sqrt{16} - \sqrt{64}}$

(ج) $\sqrt{15 \times 35 \times 21}$

(د) $\sqrt{40 - \sqrt{16}}$

(ه) $\sqrt{\frac{64}{49} \times \frac{4}{81}}$

(و) $\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{71}{72}}$

(ز) $\sqrt{\frac{32^2 + 30^2 + 16^2 + 15^2 + 5^2}{30}}$

(ح) $\sqrt{\frac{9+16}{36+64}}$

(ط) $\sqrt{(-25) \times (-4)}$

(ی) $\sqrt{\frac{64}{100} \times 0/36}$

(ک) $\sqrt{0/04 \times 81}$

(ل) $\sqrt{4 \times 25 \times 9}$

(م) $\sqrt{\sqrt{625}}$

(ن) $\sqrt{3^3 \times 2^4 \times 12}$

(س) $\sqrt{0/7 \times 6/3}$

(ع) $\sqrt{\frac{\sqrt{51/2}}{\sqrt{0/2}} + \frac{\sqrt{486}}{\sqrt{6}}}$

(ف) $\sqrt{1+2 \times \sqrt{1+3 \times \sqrt{1+4 \times \sqrt{1+5 \times \sqrt{(1+6)^2}}}}}$

۲. در هر قسمت، x چه عددی باشد تا تساوی برقرار شود؟

الف) $3 \times \sqrt{x} = 21$

(ب) $\sqrt{\frac{28}{\sqrt{x}}} = 2$

ج) $3 \times 4 \times \sqrt{x} = \frac{120}{2}$

(د) $\sqrt{1+2 \times \sqrt{x}} = 3$

۳. برای هریک از موارد زیر، یک مثال بزنید.

الف) جذر عددی با خود عدد مساوی باشد.

ب) جذر عددی از خود عدد کوچک‌تر باشد.

ج) جذر عددی از خود عدد بزرگ‌تر باشد.

۴. مقدار تقریبی جذرها را زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{0/27}$

(ب) $\sqrt{78}$

(ج) $\sqrt{47/3}$

(د) $\sqrt{35/5}$

(ه) $\sqrt{740}$

(و) $\sqrt{0/074}$

۵. شکل رو به رو از ۶ مربع با مساحت‌های برابر تشکیل شده است. مساحت کل شکل ۲۱۶۰۰ سانتی‌متر مربع است.

الف) مساحت یک مربع را پیدا کنید.

ب) طول ضلع یک مربع را به دست آورید.

ج) محیط تمام شکل را بر حسب سانتی‌متر بیابید.

۶. $2\sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3}$ یعنی مقدار تقریبی هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{6} \times \sqrt{2}$

(ب) $3\sqrt{2}$

ج) $2\sqrt{5} \times \sqrt{99}$

(د) $\sqrt{88} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8}$

ه) $\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{7}$

۷. اگر هریک از حروف نشان‌دهنده یک رقم ناصفر باشد، کدامیک از عبارت‌های زیر حتماً نادرست است؟

الف) $\sqrt{ab} = c$ (د) $\sqrt{0/ab} = 0/c$ (ج) $\sqrt{abc} = def$ (ب) $\sqrt{abcd} = ef$

فصل ۸

بردار و مختصات

امروزه استفاده از ابزارهای جدید، مسافت و یافتن نقشه جاهای مختلف را برای ما آسان کرده است. این ابزارها با استفاده از مختصات هر نقطه‌ای که به دنبال آن می‌گردید، می‌توانند آن را برای شما پیدا کند و راه رسیدن به آن را نیز به شما نشان دهد.

کارگاه بازی-نبرد دریایی

بازی «نبرد دریایی»، یک جنگ دریایی است! باید تلاش کنید در این جنگ شکست نخورید. این بازی، دو نفره است. قبل از شروع بازی باید ناوگان خود را مستقر کنید. این کار می‌تواند با فکر و ظرافت خاصی انجام شود. اگر خوش‌اقبال باشد، ناوگان شما از شلیک‌های حریف جان سالم بهدر خواهد برد. هر نفر قبل از شروع بازی باید در صفحه «ناوگان نیروهای خودی»، ناوها، کشتی‌ها و زیردریایی خود را به صورت عمودی یا افقی بچیند. هرکس در ناوگان خود، یک ناو هوایی‌پر به طول ۵ خانه، یک کشتی جنگی به طول ۴ خانه، یک رزم‌ناو به طول ۳ خانه، یک زیردریایی به طول ۳ خانه و یک ناو شکن به طول ۲ خانه دارد. بنابراین ناو هوایی‌پر را با پنج «ه»، کشتی جنگی را با چهار «ج»، رزم‌ناو را به سه «ر»، زیردریایی را با سه «ز» و ناو شکن را با دو «ن» نشان می‌دهیم.

در زیر نمونه‌ای از این چیدمان را می‌توانید ببینید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج				ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه
د			ز							
ه			ز				ج			
و			ز				ج			
ز						ج				
ح						ج				
ط						ن	ن			
ی	ر	ر	ر							

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
ه										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

واضح است حریف شما نباید از شیوه چیدمان ناوگان شما مطلع شود. هر بازیکن در دست خود دو صفحه دارد. یک صفحه مربوط به «ناوگان نیروهای خودی» و یک صفحه مربوط به «ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف» است. بعد از اینکه شما و حریفتان ناوگان‌هایتان را مستقر کردید، می‌توانید بازی را شروع کنید.

هرکس در نوبت خود باید یک شلیک به سمت ناوگان حریف انجام دهد. برای این منظور باید مختصات یک خانه را انتخاب و به حریف اعلام کنید؛ مثلاً به او بگویید «من به خانه ۴-۴ شلیک می‌کنم». سپس حریف شما باید اعلام کند که آیا شلیک شما به یکی از اهداف برخورد کرده است یا خیر. اگر شلیک شما به یکی از اهداف برخورد کرده باشد، شما در

بردار و مختصات

خانه «الف-۴» در صفحه «ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف» علامت «✓» بزندید. در غیر این صورت علامت «✗» بزندید. برنده کسی است که زودتر بتواند ناوگان حریف را از بین ببرد. یعنی بتواند تمام ناوها، کشتی‌ها و زیردریایی‌های حریف را غرق کند.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج					ه	ه	ه	ه		
د			ز							
هـ		ز				ج				
و		ز				ج				
ز						ج				
حـ						ج				
طـ						نـ	نـ			
رـ		رـ	رـ							
یـ										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف	✓									
ب	✓									
ج	✓									
د										
هـ										
و										
ز										
حـ										
طـ										
رـ										
یـ										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

اما قوانین مسابقه:

- برای غرق کردن یک کشتی باید به تمام خانه‌های اشغال شده توسط آن کشتی، شلیک شود. برای مثال اگر می‌خواهید ناو هواپیمابر را غرق کنید، باید به تمام پنج خانه آن شلیک کنید.
- زمانی که یک شلیک به یک هدف برخورد کرد، می‌توانید یک شلیک دیگر جایزه بگیرید.

دیدنی!

در تصویر زیر خانه‌های A و B هم رنگ‌اند! اگر باور نمی‌کنید از این صفحه کپی بگیرید و خانه‌های A و B را با قیچی ببرید و کنار یکدیگر بگذارید.



	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
ه										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
ه										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
ه										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
ه										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
ه										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
ه										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

دربیچه‌ای به روبوکاپ



روبوکاپ «RoboCup» یک رقابت روباتی سالانه بین‌المللی است. روبوکاپ از سال ۱۳۷۶ برگزار می‌شود، و از همان سال ایران حضور پُررنگ و افتخارآمیزی در این رقابت مهیج داشته است. هدف این مسابقه، ارتقای دانش «робاتیک» و پژوهش در زمینه «هوش مصنوعی»، در قالب رقابتی چالش برانگیز است. نام روبوکاپ «Robot Soccer» برگرفته از «RoboCup» به معنای فوتبال روباتی و «World Cup» به معنای جام جهانی است. هدف این مسابقات، برگزاری مسابقة فوتbalی در نیمه قرن حاضر است که در آن تیم روبات‌های انسان‌نما بتواند بهترین تیم فوتبال جهان را شکست دهد!

تمرین ۱. در روبوکاپ لیگ‌های متنوعی برگزار می‌شود و هر ساله نمایندگان منتخبی از دانش آموزان مدارس استعدادهای درخشان در آن شرکت می‌کنند. با ترجمه لیگ‌های این مسابقه، حدس می‌زنید این دانش آموزان در کدام لیگ(ها) شرکت می‌کنند؟

- RoboCup Soccer
- RoboCup@Home
- RoboCupJunior
- RoboCup Rescue
- RoboCup Logistics League

برای ساخت یک روبات چندین فن و دانش از جمله مکانیک و الکترونیک به کار گرفته می‌شود و در شیوه هدایت یک روبات چندین دانش از جمله برنامه‌نویسی رایانه‌ای و ریاضیات کاربرد دارد. در طی چندین سال شما با کاربرهایی از ریاضیات در روبوکاپ آشنا خواهید شد.

در اولین قدم، سه نفر از دانش آموزان سال اول دبیرستان تصمیم گرفتند که یک روبات بسازند. پس از گذراندن چندین ماه کلاس روباتیک در زمینه‌های مکانیک و الکترونیک، روبات دست‌سازی ساختند که شبیه ماشین کترولی به جلو-عقب و چپ-راست حرکت می‌کرد. آنها در گام بعدی توانستند با نصب یک قطب نمای الکترونیکی، روباتی بسازند که می‌توانست به شمال-جنوب و شرق-غرب حرکت کند. آنها به شرایطی رسیده بودند که ریاضیاتی را که خوانده بودند به کار بزنند؛ اما چگونه؟ آنها روبات را طوری ارتقا دادند که بتواند به جای کنترل دستی با یک برنامه رایانه‌ای کنترل شود. برنامه‌ای که آنها نوشته بودند، می‌توانست با دریافت حروف خاصی، در یک جهت خاص روبات را به مسافت یک واحد (که برای آنها ده سانتی متر بود)، حرکت دهد.

S : حرکت رو به سوی شمال
 W : حرکت رو به سوی غرب

اکنون روباتی که ساخته بودند، دیگر یک اسباب بازی بچگانه نبود. آنها برای اینکه یادشان نزود هدفشان چیست، به سبک نامگذاری روبوکاپ، از ترکیب دو اسم روبات و سمپاد، نام جدیدی ساختند: «روپاد».

برای اینکه بتوانند بدانند روپاد دقیقاً کجاست، از دستگاه مختصات استفاده کردند که روی هریک از محورهای آن بر اساس دسی متر (که برابر ده سانتی متر است) مدرج شده بودند. این برای آنها بسیار لذت بخش بود که همزمان با یادگیری بهتر مختصات، به هدایت روپاد بیشتر مسلط می شدند.

با این همه وارد کردن تک تک حروف از سرعت حرکت روپاد می کاست. برای همین آنها برنامه ای رایانه ای نوشته که یک رشته حروف را می گرفت و آن را تبدیل به حروفی جداگانه می کرد. با ترکیب این دو برنامه، آنها می توانستند دستوراتی پیچیده تر به روپاد بدهند.

تمرین ۲. فرض کنید روپاد در مبدأ مختصات باشد. اگر دستور

NNNNNEEEENEESSSSSWNW

را به روپاد بدهیم، آنگاه روپاد،

الف) چه مسیری را طی می کند؟
 ب) در چه نقطه ای متوقف می شود؟

توجه کنید که دستورات از چپ به راست خوانده می شوند.

برای دقت بیشتر حرکت روبات، تیم سازنده تصمیم گرفت دقت هر حرکت را افزایش دهد؛ بنابراین از نظر الکترونیکی مدارها را تغییر داد. آنها حتی مجبور شدند موتورهای خاصی بخورد که دقت حرکت آنها بالاتر بود. به این ترتیب اکنون با دریافت هر حرکت، روبات به جای ۱۰ سانتی متر، یک میلی متر حرکت می کرد.

اکنون مشکلی دیگری پیدا شده بود. برای اینکه روپاد بتواند جابهجا شود، به دستورات بسیار زیادی نیاز بود. برای مثال با ۲۰ بار نوشتن S ، روپاد تنها دو سانتی متر جابهجا می شد. در اینجا بود که یکی از دانش آموزان از جبری که امسال آموخته بود، ایده گرفت. او از راهی شبیه روش ضرایب متغیرها برای ساده کار استفاده کرد؛ به این ترتیب که به جای مثلاً $EEEEEEEEEE$ از $(5E)(4E)(3E)(8W)$ استفاده کرد. سپس برنامه رایانه ای را طوری تغییر داد که این نامگذاری را بفهمد؛ بنابراین اکنون می توانستند دستوری مثلاً به صورت

$(5E)(4E)(3E)(8W)$

را به روپاد بدهند.

تمرین ۳. دستور بالا به چه معناست؟

تمرین ۴. دستور $WWW(4E)(5E)N(3N)N(2S)NSSS(5E)$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

تمرین ۵. چرا ساده‌سازی دستور $S(4E)(5E)N(3N)N(2S)NSSS(5E)$ به صورت $S(9E)$ درست نیست؟

تمرین ۶. دستور $(3S)(2E)SE(2N)(2W)(3N)$ را اجرا کرده ایم.

الف) اگر روپاد با دستور فوق از مبدأ شروع به حرکت کند، آیا به مبدأ برمی‌گردد؟

ب) اگر روپاد از نقطه -3 شروع به حرکت کند، آیا به آن نقطه بازمی‌گردد؟

ج) این روپاد چند بار مسیر حرکتش را قطع خواهد کرد؟

تمرین ۷. فرض کنید روپاد در مبدأ مختصات باشد. با صد بار اجرای دستور $E(2N)E(3S)EN$ آیا عرض نقطه توقف روپاد صفر خواهد بود؟ طول آن چطور؟

تمرین ۸. دستور $NE(2S)EN(2N)(2E)(2N)(32E)NE(2N)(2E)(4S)(2E)(2N)$ را اجرا کرده‌ایم.

الف) روپاد جمعاً چند حرکت انجام داده است؟

ب) در سیصدمین حرکت، روپاد به چه سمتی حرکت کرده است؟

یک روبات باید بتواند (سریع) به نقطه‌ای خاص دست یابد؛ مثلاً فرض کنیم روپاد در نقطه $A = [4]$ است و می‌خواهیم به نقطه‌ای مثل $B = [5]$ برویم. راه ساده و سریع این است از دستور ENE یا EEN استفاده کنیم. حتی دستورهایی چون $NESSEENWN$ با اینکه مسیر طولانی‌تری را طی می‌کند، روپاد را به همان نقطه B خواهد رساند. پس عملکرد همه این دستورات یکی است: در مجموع دو واحد به سمت شرق و یک واحد به سمت شمال. در این حالت می‌نویسیم: $\vec{AB} = [1]$. به عملکرد یک دستور ترکیبی، «بردار انتقال» می‌گوییم.

برنامه‌نویس گروه روپاد برای ساده‌تر شدن کار، با تغییراتی در برنامه رایانه‌ای توانست معنای «دستور ترکیبی در دستور ترکیبی» را به روپاد بفهماند. او دستورات ترکیبی را با حروف کوچک نشان می‌داد، و برای مثال می‌توانست در برنامه بنویسد:

$x = WN(5S)$: این یک دستور ترکیبی است، که نام آن را x گذاشته‌ایم.

$y = WNx$: این یک دستور ترکیبی است که در آن از x استفاده شده است و نام آن را y گذاشته‌ایم.

$Nx(2y)$: این دستوری است که به روپاد داده می‌شود و در آن از x و y استفاده شده است.

تمرین ۹. با توجه به متن بالا به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) دستورهای x ، y و $Nx(2y)$ به چه معنا هستند؟

ب) عملکرد دستورهای x ، y و $Nx(2y)$ چیست؟

تمرین ۱۰. روپاد با دستور $N(ENESE(2x)(3N)(2W)(2N))$ از نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ شروع به حرکت می‌کند.

الف) دستور ترکیبی x را بهگونه‌ای تعریف کنید که نقطه انتهای مسیر $\left[\begin{smallmatrix} 7 \\ 11 \end{smallmatrix}\right]$ باشد. بردار این دستور ترکیبی را بیابید.

ب) دستور ترکیبی x را بهگونه‌ای تعریف کنید که روپاد در همانجا که شروع به حرکت کرده، پس از طی مسیر، متوقف شود. بردار انتقال این دستور ترکیبی را بیابید.

تمرین ۱۱. در هریک از حالات داده شده، بردار انتقال روپاد را بیابید.

الف) نقطه شروع از $\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ و نقطه انتها در $\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

ب) نقطه شروع از $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$ و نقطه انتها در $\left[\begin{smallmatrix} -5 \\ 11 \end{smallmatrix}\right]$.

تمرین ۱۲. می‌دانیم که $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ و $B = \left[\begin{smallmatrix} 6 \\ 10 \end{smallmatrix}\right]$. حاصل \vec{AB} و \vec{CB} را بهدست آورید.

تمرین ۱۳. می‌دانیم اگر دو روپاد باهم برخورد کنند، متوقف می‌شوند. دو روپاد داریم که بهطور همزمان شروع به حرکت می‌کنند: روپاد اول با دستور $E(4N)(3E)(3S)(2N)$ از نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ ، و روپاد دوم با دستور $N(3W)(5S)(2E)(2N)E(2S)(2E)$ از نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 7 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$.

الف) این دو روپاد در چه نقطه‌ای متوقف می‌شوند؟

ب) اگر روپاد دوم از نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 7 \\ 8 \end{smallmatrix}\right]$ شروع به حرکت کند، در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟

ج) روپاد دوم باید از چه نقطه‌ای شروع به حرکت کند تا در سیزدهمین حرکت متوقف شود؟

ه) آیا امکان دارد که روپاد دوم در نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ از حرکت بازایستد؟ چرا؟

و) روپاد دوم از کجا شروع به حرکت کند تا در نقطه $\left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ متوقف شود؟

مختصات و تبدیلهای هندسی

۱. در مثلث ABC ، $C = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ ، $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ و $B = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$. تصویر مثلث ABC را تحت هریک از دوران‌های زیر حول نقطه A بیابید و مختصات رئوس مثلث بهدست آمده را بنویسید.

الف) 90°

ب) -90°

ج) 180°

۲. ابتدا نقاط زیر را در صفحهٔ مختصات مشخص کنید:

$$S = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L' = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

سپس مشخص کنید چه تبدیل‌هایی پنج ضلعی $SMILE$ را به پنج ضلعی $L'AUGH$ تبدیل می‌کند.

۳. الف) نقاط زیر را در صفحهٔ مختصات مشخص کنید:

$$W = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ب) آیا دو پنج ضلعی $WHITE$ و $BLACK$ هم نهشت‌اند؟ چرا؟

ج) کدام نقطه از پنج ضلعی $BLACK$ را تعویض کنیم تا پنج ضلعی حاصل با پنج ضلعی $BLACK$ هم نهشت شود؟



۴. نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -18 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. چند نقطه، مانند E و F ، می‌توان یافت به‌طوری‌که مثلث ABC با یک بردار انتقال به مثلث EFD تبدیل شود؟ همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید و در هر حالت اجزای برابر دو مثلث را مشخص کنید.

۵. فرض کنید a ، b و c سه عدد منفی باشند به‌طوری‌که سه نقطه $B = \begin{bmatrix} b \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} c \\ 4 \end{bmatrix}$ سه رأس یک مثلث در صفحهٔ مختصات باشند؛

الف) مثلث ABC در کدام ناحیه است؟



ب) فرض کنید $y \cdot E = \begin{bmatrix} c \\ y \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$. چه عددی باشد تا دو مثلث ABC و ADE هم نهشت شوند؟ با چه تبدیلی ABC به ADE تبدیل می‌شود؟ اجزای متناظر این دو مثلث را بنویسید.



۶. نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ رأس‌های مثلث ABC هستند. اگر $M = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ باشد، چند نقطه مانند N ، وجود دارد به‌طوری‌که دو مثلث GMN و ABC هم نهشت باشند؟ در هر حالت تبدیل‌هایی که مثلث ABC را به مثلث GMN تبدیل می‌کند، بنویسید.

۷. نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 19 \\ -15 \end{bmatrix}$ رأس‌های یک مثلث هستند. چند نقطه، مانند D ، می‌توان یافت که دو مثلث ABC و ABD هم نهشت باشند. در هریک از حالت‌های تساوی، اجزای متناظر را بنویسید.

۸. دستورهای زیر را در نظر بگیرید.

a : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تبدیل شود.

b_1 : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ انتقال یابد.

b_2 : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با بردار $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ انتقال یابد.

b_3 : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با بردار $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ انتقال یابد.

c : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تبدیل شود.

d : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تبدیل شود.

شکل $ABCDE$ را با مختصات $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید.

• هریک از جملات زیر کدامیک از دستورات بالا را مشخص می‌کند؟

الف) هر نقطه نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌شود.

ب) هر نقطه نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.

ج) هر نقطه نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌شود.

د) هر نقطه ۲ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌یابد.

ه) هر نقطه ۴ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌یابد.

• در هریک از قسمت‌های زیر دستورات را (به ترتیب از چپ به راست) درباره شکل $ABCDE$ اجرا کنید و مختصات رأس‌های شکل تبدیل یافته را به دست آورید (در هر مورد، انتقال، دوران و بازتاب شکل را مشخص کنید).

الف) $ab_1b_2b_3a$

د) ad

(ب) cd

(ه) cab_1

(ج) ac

(و) $cb_1ab_2db_3$

• در هریک از قسمت‌های زیر دستورات را (به ترتیب از چپ به راست) درباره شکل $ABCDE$ اجرا کنید و مختصات رأس‌های شکل تبدیل یافته را به دست آورید.

سپس مشخص کنید در کدام قسمت‌ها نتیجه یکسانی به دست می‌آید؟

الف) b_1b_3

د) dc

(ب) b_2b_1

(ه) ad

(ج) cd

(و) da



فصل ۹ آمار و احتمال

گربه‌ای که در تصویر می‌بینید، «گربه پالاس» نام دارد. به احتمال زیاد چنین گربه‌ای به چشم شما نا آشناست؛ اما این گربه در ایران هم زندگی می‌کند. ولی متأسفانه از گونه‌های در حال انقراض است و تعداد کمی از این گربه‌ها باقی مانده‌اند. البته آماری هم از تعداد آنها در ایران وجود ندارد. برای همین شما وقتی می‌شنوید این جانور در ایران هم زندگی می‌کند، تعجب می‌کنید.

جمع‌آوری و نمایش داده‌ها

در یک کلاس ۲۰ نفره از مدارس سمپاد، برای تدریس ریاضی هفتم، به جای این کتابی که در دست دارید، از کتاب‌های نامناسبی استفاده کرده بودند. روایت تقویم زمانی چنین بود:

شنبه: زمان برگزاری امتحان هماهنگ کشوری درس ریاضی بود.

یک شنبه: معلم ریاضی تا دیرهنگام به تصحیح برگه‌های امتحان پرداخت و فرصت نکرد نتایج اعلام کند.

دوشنبه: معلم در جلسه انجمن اولیای دانش‌آموزان گفت: «باعت سرفرازی مدرسه است که بیشترین نمره گرفته شده از این امتحان سخت و طاقت‌فرسا ۲۰ بوده است».

اولیای دانش‌آموزان خوشحال به خانه رفتند. مدیر که در جلسه حضور داشت، از معلم خواست گزارش مکتوبی درباره نمره‌های این درس، به او ارائه کند.

سه شنبه: معلم در گزارش کتبی خود به مدیر مدرسه نوشت: «در امتحان ریاضی گرفته شده، بیش از نصف دانش‌آموزان نمره‌شان حداقل ۱۸ شده است».

مدیر از اینکه گزارش شفافی دریافت کرده بود، خوشحال شد و از اینکه چنین معلمی را در این مدرسه انتخاب کرده، به خود بالید.

چهارشنبه: معلم عصبانی سرکلاس رفت و به دانش‌آموزان چنین گفت: «میانگین نمرات شما ۱۲ شده است. از شما راضی نیستم! فردا کسانی که نمره آنها زیر میانگین شده است، باید در کلاس جبرانی شرکت کنند».

پنج شنبه: اولین کلاس جبرانی درس ریاضی هفتم تشکیل شد!

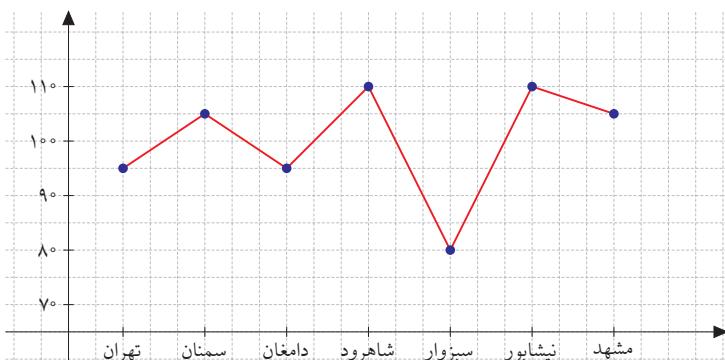
جمعه: معلم با خودش فکر کرد آیا بهتر نبود به جای استفاده از تمرین‌های متوسط و زیاد، از تمرین‌های خوب ولی کمتری استفاده می‌کرد؟ با این فکر تصمیم گرفت شنبه هفته آینده، روز متفاوتی برای تدریس ریاضی هفتم باشد؛ روزی که برای اولین بار تنها به دو کتاب فکر می‌کرد؛ کتاب درسی رسمی و کتاب تکمیلی.

باتوجه به متن بالا،

- مثالی از نمرات این کلاس ارائه دهید.
- مثالtan را طوری ارائه دهید که کلاس جبرانی روز پنج شنبه با بیشترین تعداد نفرات ممکن تشکیل شود.

نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها

۱. خانواده محترم رجبی با خودروی شخصی شان از تهران عازم مشهد شدند. مهران رجبی، فرزند دوم خانواده، همیار پلیس است. او سرعت خودرو را در نزدیکی شهرهای تهران، سمنان، دامغان، شاهروド، سبزوار، نیشابور و مشهد یادداشت کرد. سپس نمودار زیر را کشید.



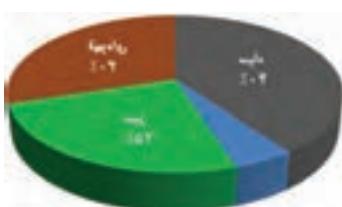
با توجه به نمودار بالا درستی یا نادرستی هریک از جمله‌های زیر را بررسی کنید:

- (الف) در این سفر هیچ‌گاه سرعت خودرو از 110° بیشتر نبوده است.
 (ب) میانگین سرعت خودروی خانواده رجبی در جاده شاهروド–سبزوار از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{110 + 80}{2} = 95.$$

۲. نمودار رو به رو تعداد انسان‌ها با رنگ چشم‌های مختلف را در یک شهر نشان می‌دهد.

- (الف) چند درصد از مردم این شهر چشم‌های آبی دارند؟
 (ب) اگر جمعیت این شهر 285200 باشد، رنگ چشم چند نفر سبز است؟



۳. تصویر زیر که از www.fifa.com/worldcup انتخاب شده است، اطلاعاتی از بازی دو تیم در جام جهانی ۲۰۱۴ را ارائه می‌کند. دو مستطیل سبز و دایره‌های داخل آن وضعیت قرار گرفتن بازیکنان هر تیم را نشان می‌دهد.



الف) آیا باتوجه به وضعیت قرار گرفتن بازیکنان دو تیم در زمین، می‌توانید نتیجه بازی را حدس بزنید؟

ب) به جدول میان دو مستطیل سبز دقت کنید. ردیف اول تعداد حملات خطرناک دو تیم را نشان می‌دهد. در ردیف دوم تعداد شوت‌های به سمت دروازه هر تیم را می‌بینید. ردیف آخر نشان می‌دهد که تیم سبز ۵۶۶ پاس سالم و تیم قرمز ۳۱۸ پاس سالم داشته است. دایره‌های که با دو رنگ سبز و قرمز مشاهده می‌کنید، درصد مالکیت توپ را در هر تیم نشان می‌دهد. آیا با این اطلاعات می‌توانید نتیجه بازی را حدس بزنید؟

ج) برای دیدن نتیجه و آمار کامل این بازی نشانی زیر را در مرورگر رایانه خود وارد کنید:

<http://www.fifa.com/worldcup/matches/round=255931/match=300186510/statistics.html>

د) به نظر شما با داشتن چه اطلاعاتی از یک بازی فوتبال، می‌توان با اطمینان خاطر، تیم برنده را تعیین کرد؟

۴. قانون انتخابات ریاست جمهوری اسلامی ایران، فصل دوم، ماده ۱۳ به شرح زیر است:

چنانچه در مرحله اول برای هیچ یک از داوطلبان اکثریت مطلق حاصل نگردد، انتخابات دو مرحله‌ای خواهد شد بدین معنی که دونامزدی که بیشترین آرای در مرحله اول داشته‌اند، در انتخابات مرحله دور شرکت می‌کنند.

در اینجا منظور از اکثریت مطلق، کسب حداقل نصف به علاوه یک رای، از کل آراء مأخوذه است.

آمار و احتمال

دو وبگاه نتیجه انتخابات ریاست جمهوری اسلامی ایران در سال ۹۲ را به صورت زیر نمایش دادند.



کدام وبگاه از نمودار مناسب‌تری استفاده کرده است؟ چرا؟

۵. یک روز آقای شکمو روی ترازویش ایستاد؛ اما به دلیل بزرگی شکمش نتوانست وزنش را از روی ترازو بخواند! بهنچار از یک آینه کمک گرفت. وزن او ۱۳۵ کیلوگرم بود. همان روز آقای شکمو تصمیم گرفت وزنش را کم کند. او چند هفته رژیم غذایی سختی را هفته اجرا کرد. آقای شکمو هر هفته، صبح شنبه وزنش را اندازه گرفت و آنها را این‌گونه یادداشت کرد:

هفتة اول: ۱۳۵ کیلوگرم، هفتة دوم: ۱۲۶ کیلوگرم، هفتة سوم: ۱۲۶ کیلوگرم، هفتة چهارم: ۱۲۲ کیلوگرم، هفتة پنجم: ۱۱۸ کیلوگرم، هفتة ششم: ۱۱۵ کیلوگرم، هفتة هفتم: ۱۱۲ کیلوگرم، هفتة هشتم: ۱۱۰ کیلوگرم، هفتة نهم: ۱۰۸ کیلوگرم، هفتة دهم: ۱۰۶ کیلوگرم، هفتة یازدهم: ۱۰۴ کیلوگرم، هفتة دوازدهم: ۱۰۲ کیلوگرم، هفتة سیزدهم: ۱۰۲ کیلوگرم، هفتة چهاردهم: ۱۰۷ کیلوگرم، هفتة پانزدهم: ۱۱۱ کیلوگرم، هفتة شانزدهم: ۱۱۳ کیلوگرم.

الف) چه نموداری برای نشان دادن وزن آقای شکمو در این ۱۶ هفته مناسب است؟ آن نمودار را رسم کنید.

ب) اگر کسی به نموداری که شما کشیده‌اید دقت کند، می‌تواند نتیجه بگیرد که میانگین وزن آقای شکمو در روزهای هفتة یازدهم تقریباً ۱۰۳ کیلو بوده است. آیا این نتیجه‌گیری درست است؟

ج) به نظر شما آقای شمکو در هفتة چندم از آن رژیم طاقت‌فرسا دست کشیده است؟ ۶. فیلم «آتش بس» را اولین فیلم میلیاردی سینمای ایران نامیده‌اند. این فیلم در سال ۱۳۸۵، حدود یک میلیارد و پانصد میلیون تومان فروش داشته است. فیلم «کلاه قرمزی و پسرخاله» در سال ۱۳۷۳، حدود چهارصد میلیون تومان فروش داشته است.

الف) به نظر شما آیا فقط با دانستن میزان فروش این دو فیلم می‌توان محبوبیت هریک را در زمان خودشان با یکدیگر مقایسه کرد؟

ب) میانگین قیمت بلیت در سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۷۳ به ترتیب ۱۲۰۰ و ۷۰ تومان بوده است. فیلم کلاه‌قرمزی و پسرخاله تقریباً چند بلیت بیشتر از فیلم آتش بس فروخته است؟

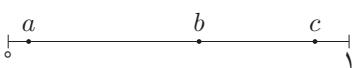
ج) در سال‌های ۱۳۷۵ و ۱۳۸۵ جمعیت ایران، به ترتیب در حدود ۶۰ و ۷۰ میلیون نفر بوده است. چند درصد مردم برای دیدن این دو فیلم به سینما رفته‌اند؟

د) به نظر شما برای مقایسه میزان فروش و محبوبیت فیلم‌ها چه شاخص‌هایی را باید در نظر گرفت؟



احتمال یا اندازه‌گیری شанс

۱. در هریک از قسمت‌های زیر، «صفرا»، «یک» یا «بین صفر و یک» بودن احتمال پیشامد داده شده را بررسی کنید. در مواردی که احتمال بین صفر و یک است، درباره نزدیک بودن آن به عده‌های a , b یا c (که در شکل زیر مشخص شده‌اند) بحث کنید.



الف) انتخاب شدن شما برای درس جواب دادن در کلاستان!

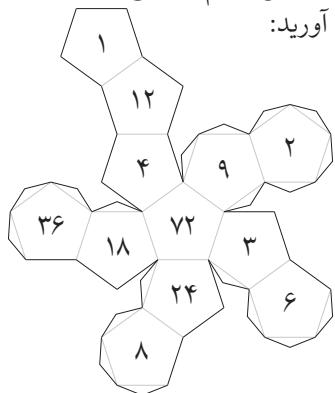
- ب) برنده شدن یک نفر در قرعه‌کشی برنامه نود!
- ج) شیرین بودن خربزه مشهدی!
- د) سبز شدن یک گل در باغچه، بدون کاشتن بذر!
- ه) آفای گل شدن شخصی که در هیچ تیم فوتبالی حضور ندارد!
- و) ایرانی بودن فیلم سینمایی تلویزیون در عصر جمعه هفت آینده
- ز) بارش برف در ماه ژانویه در سیبری
- ح) احتمال پیدا کردن رمز یک کارت بانکی در سومین آزمایش تصادفی!
- ط) وجود فلفل در غذای یک کدبانوی خرمشه‌ی
- ی) همنگ شدن تمام وجهه‌های یک مکعب روبيک بهم ریخته با دهبار چرخاندن وجهه‌های مکعب بهطور تصادفی
- ک) پرواز کلاع در آسمان محله شما در غروب یک روز پاییزی!
- ل) دختر بودن فرزند یک خانم باردار
- م) ابری بودن هوای تهران در یک روز پاییزی
- ن) پرواز یک مگس در یخچال نزدیک‌ترین شیرینی فروشی به خانه شما!
- س) قرمز بودن انار ساوه!
- ع) پخش شدن اذان ظهر از بلندگوی مسجد محله شما در ظهر شرعی
- ف) یک دانش آموز در برگه امتحانش، عدد ۹۱ را عددی اول در نظر بگیرد!
- ص) یک ریاضی‌دان در سخنرانی مهمی بگوید: ۵۱ عددی اول است!
۲. تاسی را می‌اندازیم. آیا احتمال اینکه «عدد بزرگ‌تر از چهار ظاهر شود» از احتمال اینکه «عدد اول ظاهر شود» بیشتر است؟
۳. با توجه به بازی نبرد دریابی که در فصل قبل با آن آشنا شدید، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:
- الف) چقدر احتمال دارد که شلیک اول شما به هدف برخورد کند؟
- ب) اگر شلیک اول شما به هدف برخورد نکند، چقدر احتمال دارد که شلیک دوم به هدف برخورد کند؟

- ج) فرض کنید شلیک اول شما به هدف برخورد کرده باشد. آیا ممکن است احتمال برخورد شلیک دوم شما به هدف بیش از $\frac{1}{3}$ باشد؟
۴. الف) از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۵۰ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد اول باشد؟

- ب) از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۱۰۰ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد اول باشد یا فقط دو شمارنده اول داشته باشد؟

۵. در کیسه‌ای تعدادی مهره سیاه، سفید و آبی وجود دارد. اگر احتمال بیرون آمدن مهره سیاه $\frac{3}{8}$ و احتمال بیرون آمدن مهره سفید $\frac{2}{7}$ باشد، احتمال بیرون آمدن مهره آبی چقدر است؟

۶. شکل رو به رو گسترده یک جسم فضایی را نشان می‌دهد. این جسم فضایی را مانند یک تاس می‌اندازیم. هریک از احتمال‌های زیر را به دست آورید:



الف) وجه بالا شمارنده ۷۲ باشد.

ب) وجه بالا مضرب ۱۲ شود.

ج) وجه بالا شمارنده ۳۶ نباشد.

د) حاصل ضرب وجه بالا و پایین برابر ۷۲ نشود.

ه) حاصل ضرب وجه بالا و پایین برابر ۵۶ شود.

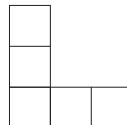
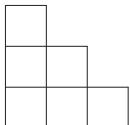
و) حاصل ضرب وجه بالا و پایین برابر ۲۸۸ باشد.

ز) حاصل ضرب همه وجه‌ها به‌غیر از وجه بالا و پایین برابر $31^{\circ} \times 215$ باشد.

ح) وجه بالا مضرب ۶ باشد ولی مضرب ۴ نباشد.

ط) وجه بالا بر هر دو عدد ۴ و ۶ بخش‌پذیر باشد.

۷. یک جسم فضایی از مکعب‌های واحد ساخته شده است. در زیر، شکل سمت چپ و شکل سمت راست به ترتیب این جسم را از بالا و رو به رو نشان می‌دهند.

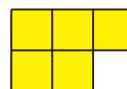
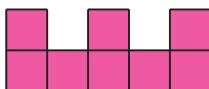


الف) احتمال اینکه حجم این جسم سه‌بعدی برابر ۷ باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه حجم این جسم سه‌بعدی برابر ۱۱ باشد، چقدر است؟

۸. مهدی سه کتاب داستان خارجی، چهار کتاب داستان ایرانی، سه کتاب شعر و پنج کتاب معما دارد. مهدی یکی از این کتاب‌ها را با چشم بسته انتخاب می‌کند. احتمال اینکه، این کتاب، کتاب داستان باشد چقدر است؟

۹. دو جسم سه بعدی با رنگ های زرد و صورتی داریم که هریک، از مکعب های به طول واحد تشکیل شده اند. در زیر، شکل سمت چپ، نمای بالا و رو به روی جسم زرد، و شکل سمت راست، نمای بالا و رو به روی جسم صورتی است.



- الف) چقدر احتمال دارد که حجم جسم صورتی برابر 10° باشد؟
- ب) چقدر احتمال دارد که حجم جسم زرد برابر 9° نباشد؟
- ج) چقدر احتمال دارد که مجموع حجم این دو جسم برابر 20° باشد؟
۱۰. یک عدد صحیح به تصادف انتخاب کرده ایم و آن را a نامیده ایم. «صفر»، «۱» یا «بین صفر و ۱» بودن احتمال هریک از اتفاق های زیر را مشخص کنید.
- الف) a عددی مثبت باشد. ب) a برابر 14° باشد.
- ب) $-a$ عددی مثبت باشد. ج) a - برابر صفر باشد.

۱۱. در کلاه یک شعبده باز 6 موش و چند خرگوش وجود دارد. اگر احتمال بیرون آوردن یک خرگوش از این کلاه $\frac{3}{7}$ باشد، تعداد خرگوش ها چقدر است؟



۱۲. پنج جفت جوراب در یک کیسه وجود دارد. دو لنگه به تصادف از این کیسه بیرون می کشیم. احتمال اینکه این جوراب ها لنگه به لنگه باشند، چقدر است؟



احتمال و تجربه

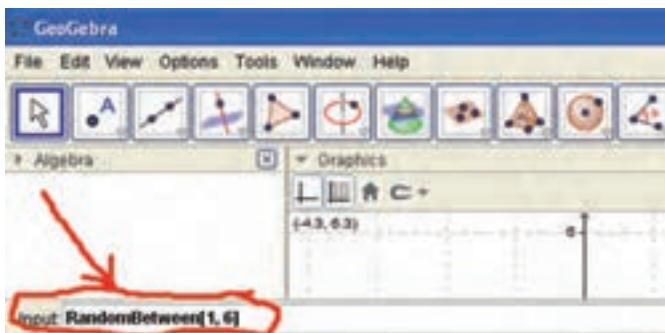
لطفاً نرم افزار جئوجبرا را از www.geogebra.org دانلود کنید.

۱. الف) با سیب زمینی یک تاس بسازید و آن را صدبار بیندازید. تعداد ۶ های آمده را یادداشت کنید.

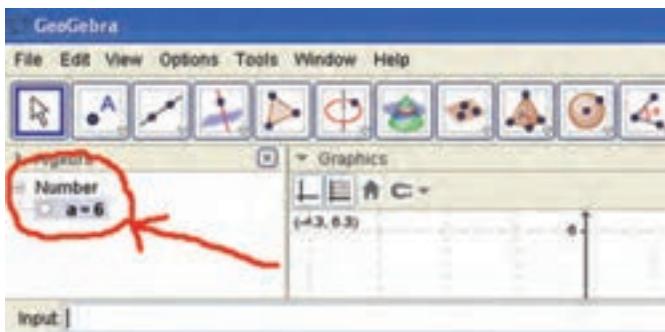
ب) نرم افزار جئوجبرا را اجرا کنید. در نوار مقابل Input، عبارت

`RandomBetween[1, 6]`

را وارد کنید (تصویر زیر را ببینید).



سپس کلید Enter را فشار دهید. جئوجبرا یک عدد تصادفی از اعداد ۱ تا ۶ انتخاب و آن عدد را در نوار سمت چپ، چاپ می کند (تصویر زیر را ببینید).



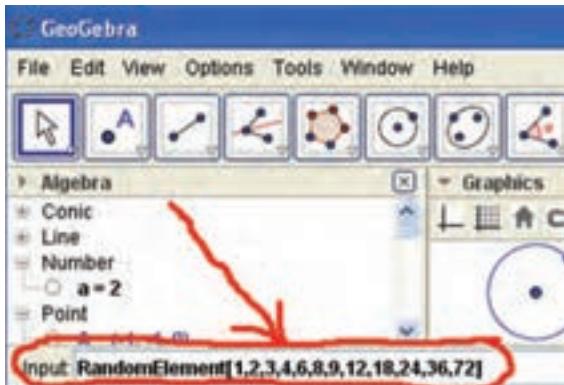
با هر بار فشار دادن کلید F9، جئو جبرا یک عدد تصادفی دیگر (بین ۱ تا ۶) را مقابل حرف a چاپ می‌کند. صدبار کلید F9 را فشار دهید و تعداد «۶»‌های ظاهر شده مقابل حرف a را یادداشت کنید.

ج) اگر پانصدبار تاس سیب زمینی را بیندازید (یا کلید F9 را فشار دهید) انتظار دارید، چندبار عدد ۶ ظاهر شود؟

د) کدام عدد به پاسخ شما در قسمت «ج» نزدیک‌تر است: تعداد «۶»‌های آمده در پرتاب تاس سیب زمینی یا تعداد «۶»‌های ظاهر شده در جئو جبرا؟

۲. الف) سعی کنید با سیب زمینی یک دوازده‌وجهی منتظم بسازید. روی هر وجه آن یکی از شمارنده‌های عدد ۷۲ حک کنید. دوازده‌وجهی را صدبار بیندازید و تعداد ۲۴ های آمده را یادداشت کنید.

ب) نرم افزار جئو جبرا را اجرا کنید. در نوار مقابل Input، عبارت RandomElement[1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72]
را وارد کنید (تصویر زیر را ببینید).

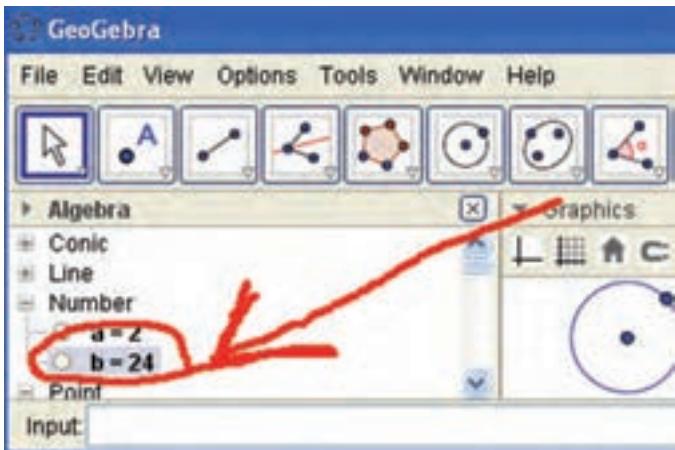


سپس کلید Enter را فشار دهید. جئو جبرا یک عدد تصادفی از اعداد شمارنده‌های عدد ۷۲ انتخاب می‌کند و آن عدد را در نوار سمت چپ، چاپ می‌کند (تصویر صفحه بعد را ببینید).

با هر بار فشار دادن کلید F9، جئو جبرا یک عدد تصادفی دیگر (از شمارنده‌های ۷۲) را مقابل حرف b چاپ می‌کند. صدبار کلید F9 را فشار دهید و تعداد ۲۴ های ظاهر شده مقابل حرف b را یادداشت کنید.

ج) اگر پانصدبار دوازده‌وجهی سیب زمینی را بیندازید (یا کلید F9 را فشار دهید) انتظار دارید، چندبار عدد ۲۴ ظاهر شود؟

د) کدام عدد به پاسخ شما در قسمت «ج» نزدیکتر است: تعداد ۲۴ های آمده در پرتاب دوازدهوچهی سیبزمینی یا تعداد ۲۴ های ظاهر شده در جنوبرا؟



خواندنی

یک سکه را ده بار می اندازیم. هر ده بار شیر می آید. شما انتظار دارید در پرتاب یازدهم شیر بیاید یا خط؟

استدلال استقرایی و نظریه احتمال می گوید دو حالت وجود دارد:

۱. ایراد از سکه است و باید انتظار داشت که بار یازدهم نیز شیر بیاید.
۲. این ده بار به طور اتفاقی شیر آمده و بنابراین احتمال شیر یا خط آمدن در بار یازدهم یکسان است.

اما عدهای از مردم انتظار دارند که در پرتاب یازدهم خط بیاید. آنها چنین استدلال می کنند: «احتمال یازده بار شیر آمدن خیلی کمتر از ده بار شیر آمدن است؛ پس در پرتاب یازدهم خط می آید».

مردم با همین استدلال، گاهی اوقات زیر درختان صاعقه زده پناه می برند و گمان می کنند که صاعقه به ندرت دو بار بر یک جا اصابت می کند. در بمباران ها نیز بعضی اشخاص داخل گودال های بمب خورده می نشینند و تصور می کنند که احتمال دو بار اصابت بمب در یک مکان بسیار کم است.

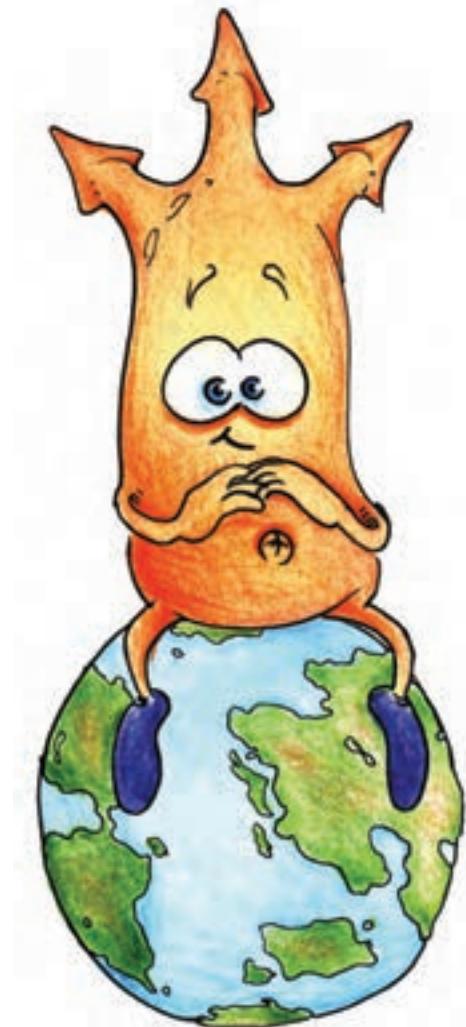
روان شناسانی که شیوه استدلال اشخاص درباره احتمالات را بررسی می کنند، می گویند: «تقریباً هر کس در معرض این نوع اشتباہ قرار دارد. این استدلال اگرچه درست نیست؛ اما با عادت ذهنی آدمی مطابقت دارد».

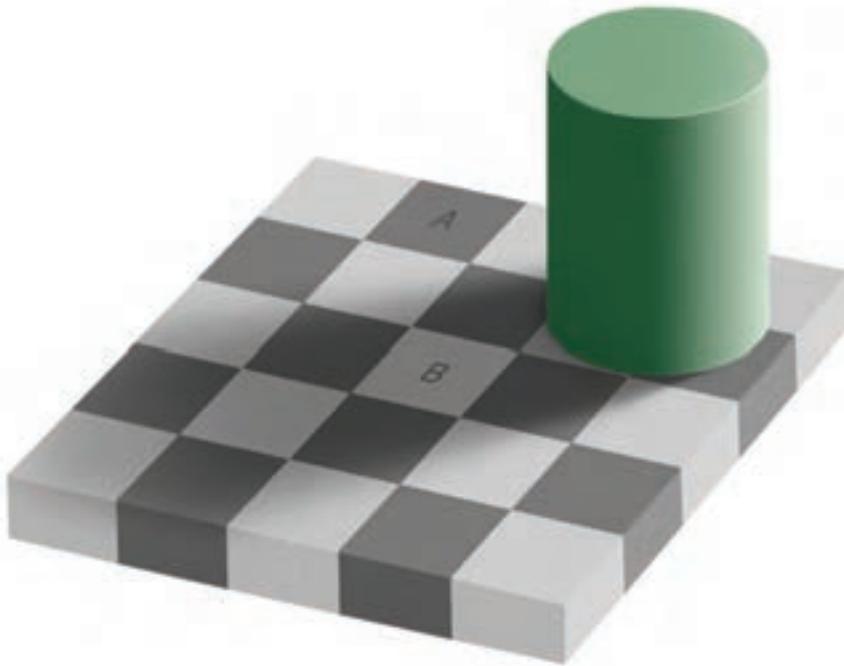
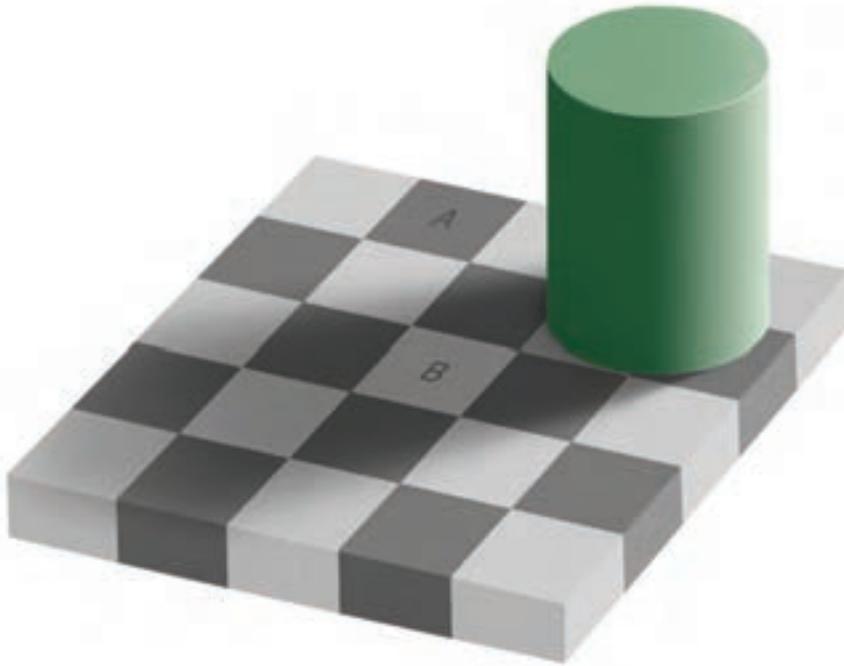
ادم. مورتون، فلسفه در عمل، ترجمه فربیز مجیدی.

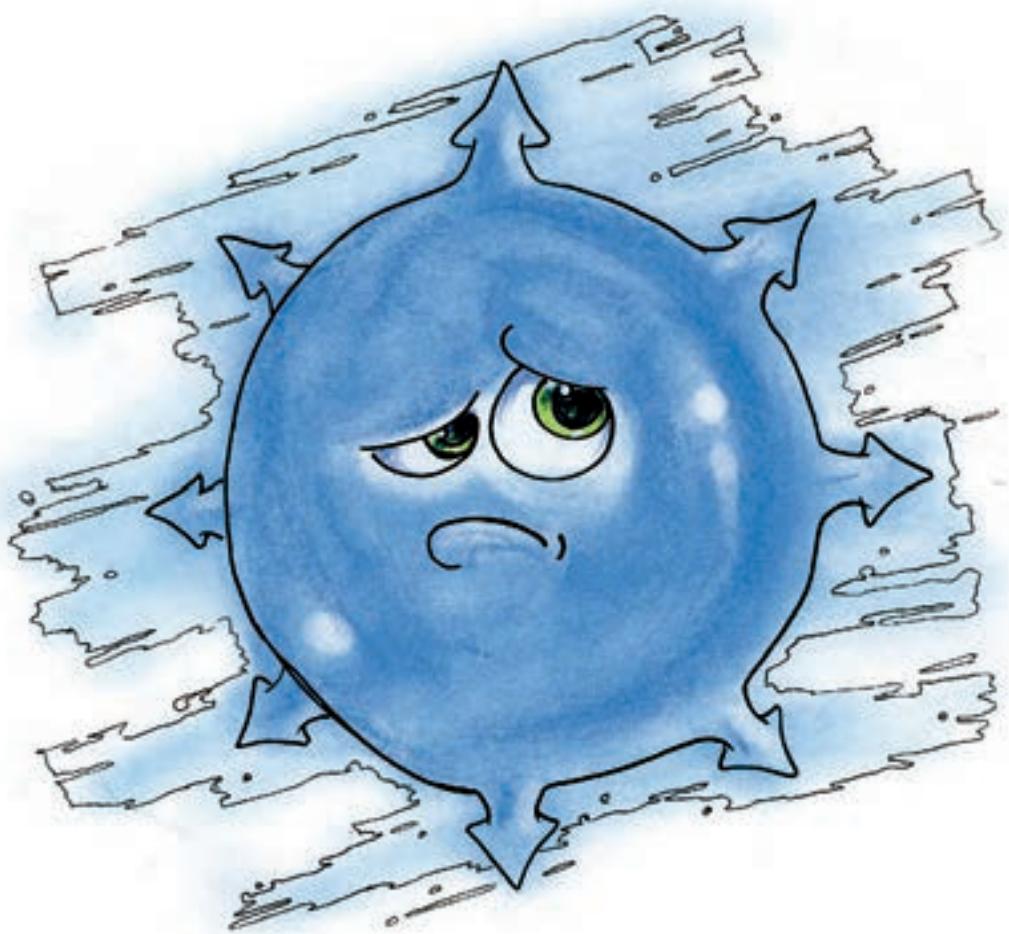
کتاب‌نامه

- [۱] آیزاك آسیموف، عدد، ترجمه ایرج جهانشاهی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۶۹.
- [۲] محمد حسین احمدی و نرگس اخلاقی‌نیا، خودآموز هندسه ۱، جلد اول، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۹۲.
- [۳] ریاضیات کائگورو ۷ و ۸، ترجمه مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی با همکاری انتشارات باشگاه دانشپژوهان جوان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۴] محمد حسین احمدی، سعید صدری و علی‌ضا تاج‌بخش، ریاضی تكمیلی سال اول دوره راهنمایی، سازمان ملی پژوهش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۵] شهپان النسکی، در پی فیثاغورث، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۴.
- [۶] اویستن اور، گزیده‌هایی از نظریه اعداد، ترجمه منوچهر وصال، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹.
- [۷] هاوارد ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، جلد اول، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۶.
- [۸] دیوبید برتن، نظریه مقدماتی اعداد، ترجمه محمد صادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۱.
- [۹] اریک تمپل بل، ریاضی‌دانان نامی، ترجمه حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۲.
- [۱۰] واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف، مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه پرویز شهریاری، نشر نی، تهران، ۱۳۷۴.
- [۱۱] ریاضیات کائگورو ۹ و ۱۰، ترجمه بردیا حسام، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۰.
- [۱۲] خسرو داویدی، از توان بیشتر بدانیم، انتشارات مدرسه، تهران، ۱۳۷۷.
- [۱۳] عبدالرضا زارع شحنه، ریاضی تکمیلی سال دوم دوره راهنمایی، سازمان ملی پژوهش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۱۴] واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف، مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه پرویز شهریاری، نشر نی، تهران، ۱۳۷۴.
- [۱۵] پرویز شهریاری، ۹۹ مسئله ریاضی، موسسه چاپ سوره، تهران، ۱۳۷۹.
- [۱۶] دمیتری فومین، سرگی گنکین و ایلیا ایتنبرگ، مخالف ریاضی (تجربه روس‌ها)، ترجمه ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۶.

- [۱۷] بوریس آناستاسیویچ کوردمسکی، اندیشه ریاضی، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۱.
- [۱۸] سرژ لانگ و جین مورو، هنسه، ترجمه محمدعلی رضوانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۷.
- [۱۹] مارتین گاردن، معماهای ابواللهول، ترجمه حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰.
- [۲۰] ادوین مویز و فلوبید دانز، هنسه، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۲۱] راجر نلسن، اثبات بدون کلام، ترجمه سپیده چمن آرا، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۲۲] تارل هاف، چگونه با آمار دروغ می‌گویند، ترجمه مهدی تقی، نشر آفتاب، تهران، ۱۳۷۱.







تا به حال به فرش‌های ایرانی توجه کرده‌اید؟!

گلیم یا پالاس یکی از انواع صنایع دستی، زیراندازی و پوششی است که از ابریشم، موی بز، پشم گوسفند و یادیگر چارپایان اهلی بافته می‌شود. گلیم به شکل ستی اش، معمولاً برای پوشاندن زمین، دیوار و یا رواندازی برای حیوانات باربر استفاده می‌شود ولی امروزه به عنوان یک پوشش مدرن برای خانه‌های شهری نیز خریداری می‌شود.^۱

طرح روی جلد این کتاب قسمتی از نقشهٔ یک گلیم است که از ویگاه «www.picnama.com» انتخاب شده است. در زیر، طرح کامل این گلیم زیبا را می‌بینید.



معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به شانی تهران - خیابان پسبد قرنی - بخش سیه - وزارت آموزش و پرورش - ساختمان مرحوم علامه مندان - طبقه هفتم - کد پستی ۱۵۹۹۹-۵۸۱۱۱ و یاری ای نامه به شانی sampad@medu.ir ارسال نمایند.

مرکز علمی پژوهش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان