

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رَامَى

پایہ ہشتم

دورہ اول متوسطہ

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی



ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه - ۸۰۵

نام کتاب :

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
پدیدآورنده :

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف :

حیدرضا امیری، علی ایرانیشن، سوسن پناهنده، طبیه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمدقاسم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی، مریم شکری کهنه، میرشهرام صدر، محمدصادق عسگری، دیانا فردین، محمد مقاصدی، زهرا نیکام و محبوبه یعقوبی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حیدرضا امیری، زهرا بندی، حسین خسرو‌آبادی، خسرو داودی، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سیدصالحی و میرشهرام صدر (اعضای گروه تألیف) - افسانه حجتی طباطبایی و محمد داشنگر (ویراستار)

مدیریت آماده‌سازی هنری :

احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) - ندا عظیمی (نگاشتارگر اطراح گرافیک) - ندا عظیمی، زهرا بهشتی شیرازی (صفحه آرا) - طاهره حسن‌زاده (طراح جلد) - فاطمه رئیسانیان فیروزآباد، مریم هدفان‌زاده (رسام) - فاطمه باقری مهر، کبری اجاتی، علی نجمی، سیف‌الله بیک محمد دلیوند، زینت بهشتی شیرازی، راحله زاده فتح‌الله، سیده شیوا شیخ‌الاسلامی (امور آماده‌سازی)

نشانی سازمان :

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی- ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۰۹۱۶۱۳۳۱۱۶۱-۰۹۲۶۶، دورنگار : ۰۹۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

ویگاه : www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir

ناشر :

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج -

خیابان ۶۱ (دارویخن) تلفن : ۰۹۹۸۵۱۶۱-۰۹۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۰۹۹۸۵۱۶۰-۰۴۹۹۸۵۱۶۰، صندوق

پستی : ۳۷۵۱۵-۱۳۹

چاپخانه :

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهیمانی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ ششم ۱۳۹۸

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در یا بگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



روح‌آمیز

- انسان عصاره همه موجودات عالم است.
- با تربیت صحیح ممکن نیست که یک مملکتی تحت تأثیر استعمار باشد.
- اگر ملتی بخواهد به طرف سعادت پرواز کند باید با دو بال تهذیب نفس و علم باشد.

امام خمینی(رحمۃ اللہ علیہ)

فهرست

۱ فصل عدددهای صحیح و گویا

۱	درس اول : یادآوری عدددهای صحیح
۲	درس دوم : معرفی عدددهای گویا
۶	درس سوم : جمع و تفریق عدددهای گویا
۱۰	درس چهارم : ضرب و تقسیم عدددهای گویا
۱۴	مرور فصل ۱

۲ فصل عدددهای اول

۱۹	درس اول : یادآوری عدددهای اول
۲۰	درس دوم : تعیین عدددهای اول
۲۴	مرور فصل ۲

۳ فصل چندضلعی‌ها

۲۹	درس اول : چندضلعی‌ها و تقارن
۳۰	درس دوم : توازی و تعامد
۳۴	درس سوم : چهارضلعی‌ها
۳۸	درس چهارم : زاویه‌های داخلی
۴۲	درس پنجم : زاویه‌های خارجی
۴۶	مرور فصل ۳

فصل ۲ جبر و معادله

۵۱

درس اول : ساده کردن عبارت های جبری ۵۲
درس دوم : پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری ۵۶
درس سوم : تجزیه عبارت های جبری ۶۰
درس چهارم : معادله ۶۴
مرور فصل ۴ ۶۸

فصل ۵ بردار و مختصات

۶۹

درس اول : جمع بردارها ۷۰
درس دوم : ضرب عدد در بردار ۷۴
درس سوم : بردارهای واحد مختصات ۷۸
مرور فصل ۵ ۸۲

فصل ۶ مثلث

۸۳

درس اول : رابطه فیثاغورس ۸۴
درس دوم : شکل های همنهشت ۸۸
درس سوم : مثلث های همنهشت ۹۲
درس چهارم : همنهشتی مثلث های قائم الزاویه ۹۶
مرور فصل ۶ ۱۰۰

فصل ۷ توان و جذر

۱۰۲	درس اول : توان
۱۰۶	درس دوم : تقسیم اعداد توان دار
۱۱۰	درس سوم : جذر تقریبی
۱۱۴	درس چهارم : نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد
۱۱۵	درس پنجم : خواص ضرب و تقسیم رادیکال ها
۱۱۸	مرور فصل ۷

فصل ۸ آمار و احتمال

۱۲۰	درس اول : دسته بندی داده ها
۱۲۴	درس دوم : میانگین داده ها
۱۲۸	درس سوم : احتمال یا اندازه گیری شанс
۱۳۲	درس چهارم : بررسی حالت های ممکن
۱۳۶	مرور فصل ۸

فصل ۹ دایره

۱۳۸	درس اول : خط و دایره
۱۴۲	درس دوم : زاویه های مرکزی
۱۴۶	درس سوم : زاویه های محاطی
۱۵۰	مرور فصل ۹

سخنی با معلم

کتاب ریاضی هشتم در راستای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب درسی هفتم تألیف شده است. یکی از اهداف مهم و اصلی این کتاب درگیر شدن دانشآموزان در فرایند حل مسئله است. فعالیت‌های کتاب به طور عمده به این منظور طراحی شده‌اند. به طور معمول دانشآموزان در این فعالیت‌ها با دشواری و چالش رو به رو خواهند شد و این موضوع نه تنها نگران‌کننده نیست بلکه هنگامی که با کمک و راهنمایی معلم همراه باشد، نتیجه‌ای مناسب به دنبال دارد. مواجه کردن دانشآموزان با مسئله، امری هدفمند و آگاهانه در این کتاب به شمار می‌رود. کمک به دانشآموز باید با دراختیار گذاشتن حل مسئله یکسان تلقی شود. کمک‌ها و راهنمایی‌ها باید تا جایی باشد که شوق کشف و لذت حل کردن را از دانشآموز نگیرد. در طی این مسیر، گفت‌وگوی دانشآموزان با معلم و نیز با یکدیگر، توضیح افکار و دفاع از آنها، قضاوت در مورد افکار ریاضی دیگر دانشآموزان، بررسی و آزمایش حدسهای و نقد راه حل‌ها جزئی از فرایند یادگیری ریاضی است. در این راستا معلم ریاضی به یقین می‌تواند نقشی بی‌بدیل ایفا کند. معلم در گفت‌وگوی ریاضی وار در کلاس درس، که از آن به گفتمان ریاضی نیز یاد می‌شود با سیاری از دیدگاه‌ها، افکار و مشکلات و بدفهمی‌های دانشآموزان درباره مفاهیم درسی آشنا می‌شود و امکان برطرف کردن آنها را در کلاس و احتمالاً با مشارکت دیگر دانشآموزان پیدا می‌کند. این کار، مستلزم تمرکز و بازتاب بر فرایند حل مسئله و به ویژه پس



از ارائهٔ پاسخ از سوی دانشآموزان است. به همین دلیل حجم زیاد و فراوانی مسائل، خود، مانعی به شمار می‌آید. تعداد مسائلی که در بیشتر کتاب‌های کمک‌آموزشی مطرح است به طور معمول از نیاز دانشآموزان بیشتر است. اگر تعداد کمتری مسئلهٔ ولی با عمق بیشتر در کلاس درس و با مشارکت دانشآموزان حل و بررسی شود، نسبت به حالتی که تعداد زیادی مسئلهٔ ولی به شیوهٔ تکرار و تمرین حل شود، نتیجهٔ به مراتب بهتری به دست می‌آید. در ادبیات پژوهشی این فکر با عنوان «کم بیشتر است!» ذکر می‌شود.

در حالی که امروزه بر یادگیری مفهومی به ظاهر تأکید زیادی می‌شود، پژوهش‌ها بر رعایت تعادل و توازن بین آموزش مفهومی و آموزش روش‌ها و قواعد تکیه دارند. در این کتاب نیز سعی شده است این تناسب و هماهنگی رعایت شود. مؤلفان اطمینان دارند که بدون تلاش، اراده و همت همکاران عزیز اهداف کتاب برآورده نخواهد شد و صد البته، پشتیبانی و آموزش معلمان برای ما وظیفه و برای آنان حق است. در این راستا مؤلفان از طریق واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری و نیز ارائهٔ بسته‌های آموزشی پشتیبان کلاس درس، آمادگی همکاری با جامعهٔ محترم معلمان ریاضی کشور را دارند.

با توجه به رویکرد آموزشی کتاب‌های ریاضی، استفاده از ماشین حساب توسط دانشآموزان مجاز است؛ اما هیچ‌گونه اجباری در استفاده یا عدم استفاده از ماشین حساب در ارزشیابی، وجود ندارد و تشخیص استفاده از آن به عهدهٔ دیر محترم است.

۱ فصل عددهای صحیح و گویا



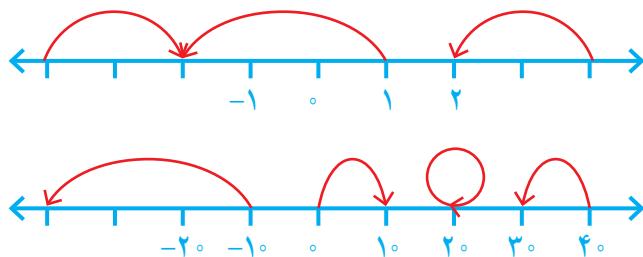
عددهای گویا در زندگی واقعی و نیز در علومی چون ریاضیات و فیزیک کاربردهای زیادی دارند. ما بسیاری از اندازه‌ها را با عددهای کسری و اعشاری بیان می‌کنیم.

فعالیت



با انجام دادن تمرین های زیر، آنچه را در سال گذشته درباره عددهای صحیح یادگرفته اید، مرور کنید.

۱- برای هر حرکت روی محور، یک عدد بنویسید.



۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

عدد صحیح	۶	-۴	$-(-7)$	۰			۳
قرینه آن					-۸	۵	-۲

۳- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$-16+12 = \quad \quad \quad 8-12 = \quad \quad \quad -3+9 = \quad \quad \quad -4-8 =$$

$$-3 \times 7 = \quad \quad \quad -8 \div (-4) = \quad \quad \quad -12 \div 2 = \quad \quad \quad -4 \times (-3) =$$

۴- حاصل عبارت ها را با توجه به ترتیب عملیات به دست آورید.

$$-8-3 \times 5 = -8-15 = \quad \quad \quad -16 \div 2 \times 3-4 =$$

$$1-2 \times (1-(8-9)) = \quad \quad \quad -4 \div 4-4 \times 3 =$$

۵- عبارت $-43+37-29$ را چهار دانش آموز محاسبه کرده‌اند. راه حل هر یک را توضیح دهید.

$$-43+37-29 = -43-29+37 = -72+37 = -35$$

راه حل علی :

$$-43+37-29 = -43+8 = -35$$

راه حل مجتبی :

$$-43+37-29 = -6-29 = -35$$

راه حل مرتضی :

	د	ی
-	۴	۳
+	۳	۷
-	۲	۹

$$\begin{array}{r} -40 -3 \\ +30 +7 \\ \hline -20 -9 \\ \hline -30 -5 = -35 \end{array}$$

راه حل مصطفی :

توضیح :

شما کدام راه حل را می‌پسندید؟ چرا؟

آیا راه حل دیگری برای پیدا کردن حاصل این عبارت سراغ دارد؟



کار در کلاس

۱- حاصل عبارت‌های زیر را با روش مورد نظر خود به دست آورید.

$$-(-17)+14-13-19 =$$

$$-(-7)-2+(-9) =$$

$$-18-(-4)-(-19) =$$

$$-24-97+100-223 =$$

۲- حاصل عبارت $-2-7-10+3+1$ را به دو روش حساب کرده‌ایم. کدام درست و کدام نادرست

است؟ توضیح دهید.

$$10+3-7-2 = 13-5 = 8$$

$$10+3-7-2 = 13-9 = 4$$

۳- قبل از انجام دادن محاسبات در عبارت‌های داده شده خوب دقت، و با دسته‌بندی مناسب، راه ساده‌ای پیدا کنید. راه حل خود را با راه حل‌های دوستانتان مقایسه کنید و آن‌گاه با ماشین حساب، درستی پاسخ‌های خود را برسی کنید.

$$-40+35+80-17-40 =$$

$$-32-21+12+3\times 7 =$$

۴- یکی از ریاضی‌دانان بزرگ در کودکی جمع عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را با روشی ابتکاری محاسبه کرد.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 =$$

چند جفت عدد با هم جمع شده‌اند؟

حاصل جمع هر جفت عدد چند است؟

حاصل عبارت چند می‌شود؟

۵- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. روش کار را توضیح دهید.

$$-2+4-6+8-10+12=$$

$$(10-1)(9-1)(8-1)\dots(-9-1)(-1)=$$

۶- ابتدا در مربع‌های خالی علامت‌های «+» یا «-» بگذارید؛ سپس، عبارت داده شده را محاسبه کنید و همهٔ عددهای صحیح ممکن را که به دست می‌آیند از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$-3 \boxed{} (+7) \boxed{} 2$$



در جاهای خالی علامت «+» یا «-» را طوری قرار دهید که حاصل عبارت زیر، بزرگ‌ترین مقدار ممکن شود.

$$-5 \boxed{} (-6) \boxed{} (+3) \boxed{} (-9)$$

در زیر، چهار پاسخ به این مسئله داده شده که فقط یکی از آنها درست است. آن را مشخص کنید و دلیل نادرست بودن پاسخ‌های دیگر را هم توضیح دهید.

$$-5 \boxed{+} (-6) \boxed{+} (+3) \boxed{+} (-9) = -5 - 6 + 3 - 9 = -11 - 6 = -17 \quad \text{پاسخ اول :}$$

$$-5 \boxed{+} (-6) \boxed{-} (+3) \boxed{+} (-9) = -5 - 6 - 3 - 9 = -23 \quad \text{پاسخ دوم :}$$

$$-5 \boxed{-} (-6) \boxed{+} (+3) \boxed{-} (-9) = -5 + 6 + 3 + 9 = 1 + 12 = 13 \quad \text{پاسخ سوم :}$$

$$-5 \boxed{+} (-6) \boxed{+} (+3) \boxed{-} (-9) = -5 - 6 + 3 + 9 = -11 + 12 = 1 \quad \text{پاسخ چهارم :}$$

تمرین



۱- عددهای خواسته شده را بنویسید.

الف) عددهای صحیح بین ۳ و -۵ را بنویسید.

ب) عددهای صحیح کوچک‌تر از -۴ را بنویسید.

ج) عددهای صحیح بزرگ‌تر از -۳ را بنویسید.

۲- مانند نمونه، جدول را کامل کنید.

عدد	+۳	۰	۵۳	$\sqrt{۴}$	$\frac{۳}{۱}$	-(-۲)	$-\frac{۲}{۳}$	$۰/۷$
طبيعي	✓							
صحیح	✓							

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$-8+6-12+14-20+22=$$

$$-8+7-6+8-7+6=$$

$$12-22+32-42=$$

$$3-(2-(1-7)-1)=$$

$$3-4 \times 5=$$

$$-8-4 \div 2=$$

۴- هریک از عبارت‌های زیر چه عددی را نشان می‌دهد؟

کوچک‌ترین عدد طبیعی :

بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی :

کوچک‌ترین عدد زوج طبیعی :

کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت :

بزرگ‌ترین عدد فرد طبیعی دو رقمی :

کوچک‌ترین عدد فرد طبیعی سه رقمی :

۵- جدول زیر را کامل کنید؛ طوری که حاصل جمع عددهای هر ردیف با مجموع عددهای

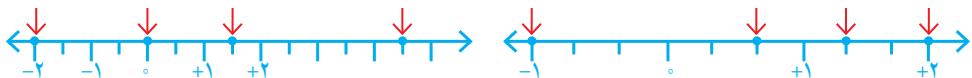
هر ستون و هر قطر مساوی باشد.

-۸		
	-۲	-۶
		۴

معرفی عددهای گویا



۱- نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نشان می‌دهند؟



۲- قرینه هر عدد را روی محور پیدا، و تساوی‌ها را مانند نمونه، کامل کنید.



$$\frac{1}{2} = \text{قرینه } -\frac{1}{2}$$



$$\frac{2}{3} = \text{قرینه } -\frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \text{قرینه } -\frac{4}{3}$$

۳- به این ترتیب، می‌توانید قرینه همه کسرهایی را که با آنها آشنا شده‌اید بنویسید :

$$= \text{قرینه صفر}$$

$$\frac{1}{5} = \text{قرینه } -\frac{1}{5}$$

$$-\frac{9}{10} = \text{قرینه } \frac{9}{10}$$

$$0/0 = \text{قرینه } 1$$

۴- کسرها را به عدد مخلوط و عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید.

$$+3\frac{1}{4} =$$

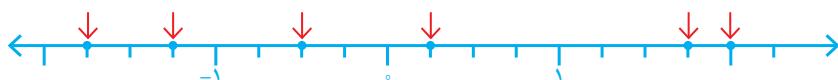
$$-\frac{7}{5} =$$

$$+\frac{14}{3} =$$

$$-2\frac{1}{3} =$$

۵- نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نمایش می‌دهند؟ از این عددها،

کدام صحیح و کدام غیرصحیح‌اند؟



عددهای صحیح :

عددهای غیرصحیح :

۶- الف) نقطه های مشخص شده روی محورها چه کسرهایی را نشان می دهند؟ آیا این سه کسر با هم مساوی اند؟ نتیجه را به صورت تساوی کسرها بنویسید.



$$= = =$$



$$-\frac{3}{7} = -\frac{12}{x}$$

ب) تساوی کسرهای زیر را روی محور نمایش دهید.
 $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{3}{6}$
 ۷- مقدار x را به دست آورید.

$$-\frac{4}{6} = -\frac{x}{15}$$

کار در کلاس



۱- کسرهای زیر را تاحد آمکان ساده کنید.

$$-\frac{108}{6} =$$

$$+\frac{66}{42} =$$

$$-\frac{90}{126} =$$

۲- عقریه چه عددی را نشان می دهد؟ بنویسید.



۳- به کمک محور، عددهای زیر را از کوچک به بزرگ و از چپ به راست مرتب کنید.

$$\frac{3}{5}, \frac{1}{10}, 0, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}$$

۴- در جای خالی علامت مناسب < یا > یا = بگذارید.

$$\frac{3}{5} \bigcirc 0^{\circ}/25$$

$$-\frac{1}{7} \bigcirc -\frac{11}{5}$$

$$-\frac{3}{6} \bigcirc -0^{\circ}/5$$

۵- هریک از عددها را در جدول زیر در جای خود قرار دهید و جدول را کامل کنید.

$$\frac{17}{7}, \frac{1}{15}, -1\frac{2}{5}, -3\frac{3}{5}, -\frac{25}{6}, +3\frac{5}{7}, 2\frac{7}{10}, -3\frac{1}{17}, -7\frac{2}{10}$$

بزرگ تر از ۲	۱<x<۲	۰<x<۱	بین ۰ و ۱	بین -۱ و ۰	بین -۲ و -۳	کوچک تر از -۳

فعالیت



۱- روی محور روبه رو فاصله بین عددهای ۱ و ۲



را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده ایم.

نقطه مشخص شده چه عددی را نشان می دهد؟

۲- اگر فاصله عددهای ۱ و ۲ را به ۳ قسمت

مساوی تقسیم کنیم، نقطه های مشخص شده

چه عددهایی را نشان می دهند؟

۳- در شکل زیر، فاصله بین دو عدد ۱ و ۲ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده ایم اما آن را بزرگ تر رسم کرده ایم تا شما نقطه ها را بهتر بینید. اکنون مانند نمونه مشخص کنید که هر نقطه چه عددی را نشان می دهد.



در تساوی زیر، عدد اعشاری $1/2$ را به صورت کسری نوشتیم. شما هم در محور بالا عددهای اعشاری را به صورت کسری نشان دهید.

$$1/2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

۴- چگونه می توانیم بین دو عدد ۱ و ۲، تعداد بیشتری عدد کسری بنویسیم؟ توضیح دهید.

۵- آیا می توانیم بگوییم بین دو عدد ۱ و ۲ کسرهای بی شماری وجود دارد؟

آیا همین نتیجه را می توان برای عددهای ۱-۰-۲ نیز تکرار کرد؟

بین هر دو عدد صحیح چند عدد کسری هست؟

کار در کلاس



با توجه به محورهای روبه رو و تقسیم شدن فاصله

بین دو عدد ۰ و ۱- کسرهای مختلفی بین این دو

عدد بنویسید.



با توجه به محورهای روبه رو و تقسیم شدن فاصله

بین دو عدد ۰ و ۱- کسرهای مختلفی بین این دو

عدد بنویسید.



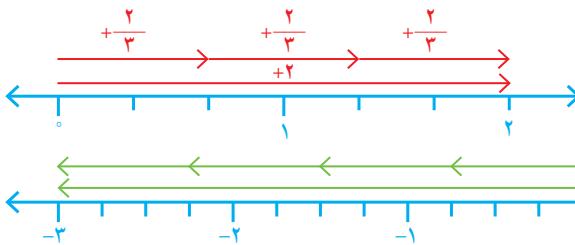
توضیح دهید چگونه بین هر دو عدد کسری هم می توانیم کسرهای بی شماری پیدا کنیم.

فعالیت



۱- چگونه می‌توانیم به کمک بردارهایی که در شکل نمایش داده شده‌اند، درستی

تساوی‌ها را نتیجه بگیریم؟ توضیح دهید.



$$+2 \div 3 = \frac{+2}{3} = +\frac{2}{3}$$

$$-3 \div 4 = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

۲- مانند نمونه، کسر مساوی هر کسر را بنویسید.

$$\frac{-2}{3} = -2 \div 3 = -(2 \div 3) = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$-\frac{-4}{7} =$$

$$\frac{-3}{-4} =$$

به هر عدد، که بتوان به صورت کسر $\frac{a}{b}$ که در آن a و b عده‌های صحیح باشند و $b \neq 0$ نوشت، عدد گویا می‌گوییم.

تمرین



۱- آیا می‌توان گفت هر عدد صحیح و هر عدد طبیعی نیز عدد گویاست؟ چرا؟

۲- هریک از کسرهای سطر اول را به کسر مساوی اش در سطر دوم وصل کنید.

$$\frac{-3}{5}$$

$$\frac{-3}{-5}$$

$$\frac{-3}{-4}$$

$$\frac{-3}{-4}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{-5}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{-4}$$

۳- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

نوع	عدد	گویا	صحیح	طبیعی	
	$\frac{12}{-4}$				
	$\frac{-1}{5^3}$				
	$\frac{-4}{-2}$				
	$\frac{-8}{-3}$				
	$\frac{3}{5}$				
	۰				
	$-2/3$				
	$\sqrt{9}$				
	$-\frac{6}{2}$				
	$-(+4)$				

۴- ابتدا علامت هر عبارت را تعیین، و سپس آن را ساده کنید.

۹

$$\frac{-8 \times (-18)}{12 \times 16} =$$

$$\frac{8 \times 18}{12 \times 16} =$$

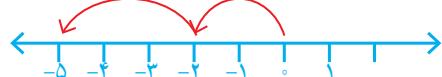
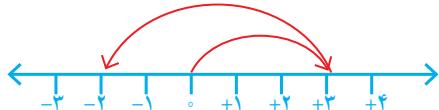
$$-\frac{1 \times (-2)}{-7 \times 25} =$$

جمع و تفریق عدددهای گویا

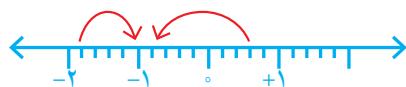
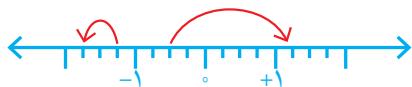
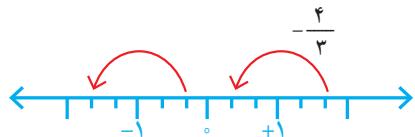
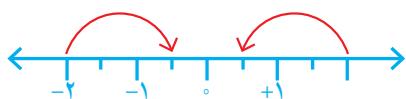
فعالیت



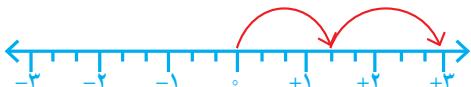
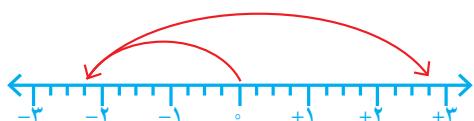
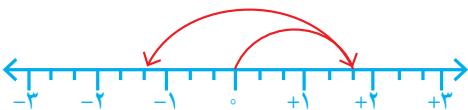
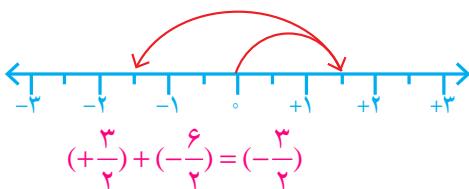
- ۱- با توجه به درس سال گذشته برای حرکت‌های روی محور، یک جمع عدددهای صحیح بنویسید.



- ۲- با توجه به سؤال ۱، برای هر حرکت روی محور، عددی متناظر بنویسید.



- ۳- برای محورهای زیر مانند نمونه، یک جمع با عدددهای گویا بنویسید.



۴- عبارت‌های زیر را مانند نمونه به صورت جمع دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{8} =$$

$$-\frac{5}{8} - \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{5} =$$

$$-\frac{3}{5} - \left(+\frac{4}{5}\right) =$$

$${}^{\circ}/5 - {}^{\circ}/85 =$$

$$-2/3 - 5/8 =$$

$$-12/3 - (-7) =$$

$$25 - 18/4 =$$

۵- مانند نمونه، عددهارا ابتدا به طور تقریبی به نزدیک ترین عدد صحیح گرد کنید؛ سپس، حاصل

عبارت را به دست آورید.

$$-17/9 - (-8/{}^{\circ} 1) + 12/87 = -18 - (-8) + 13 = -18 + 8 + 13 =$$

$$-1\frac{14}{15} + 2\frac{1}{17} - 3\frac{2}{19} =$$

کار در کلاس



به کمک محور، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. ابتدا تفاضل‌ها را به صورت جمع بنویسید.

$$-\frac{4}{3} - \left(+\frac{5}{3}\right) =$$



$$\left(+\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{9}{5}\right) =$$



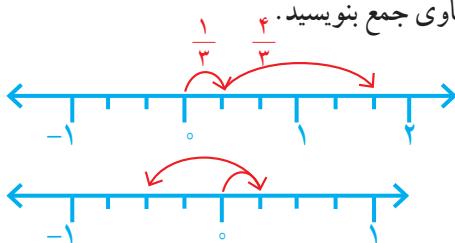
$$-\frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) =$$



فعالیت



۱- برای هر کدام از محورها یک تساوی جمع بنویسید.



$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = -$$

$$- + (-) = -$$

حاصل عبارت رو به رو را به دست آورید و با حاصل جمع بالا مقایسه کنید.

$$\frac{1+(-2)}{4} =$$

با توجه به تساوی‌های زیر، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم حاصل جمع و تفریق دو عدد گویا را با استفاده از جمع و تفریق دو عدد صحیح به دست آوریم.

$$-\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{-3+2}{5}$$

$$-\frac{3}{7} - (-\frac{4}{7}) = \frac{-3-(-4)}{7} = \frac{-3+4}{7}$$

۲- مانند نمونه، ابتدا مخرج‌ها را یکی کنید؛ سپس، جمع و تفریق‌ها را انجام دهید.

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{4} = \frac{20}{28} - \frac{21}{28} = \frac{20-21}{28} = -\frac{1}{28}$$

$$\frac{6}{5} + \frac{7}{5} =$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{2}{3} =$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$-\frac{2}{5} - \frac{-2}{3} =$$

کار در کلاس



۱- مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌ها را به دست آورید.

$$(+\frac{7}{9}) + (-\frac{4}{9}) = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$(-\frac{7}{9}) - (-\frac{4}{9}) =$$

$$(-\frac{6}{11}) + (+\frac{8}{11}) =$$

$$(-\frac{6}{11}) - (+\frac{8}{11}) =$$

$$-\frac{6}{11} - \frac{8}{11} =$$

$$(-\frac{6}{5}) + (-\frac{12}{25}) = \frac{-30-12}{25} =$$

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} =$$

$$(-\frac{4}{7}) - (-\frac{5}{9}) =$$

$$-\frac{4}{5} + \frac{4}{5} =$$

$$-\frac{3}{4} - \frac{15}{8} =$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4 + \frac{3}{7} =$$

$$4 + (-\frac{3}{7}) =$$

$$-4 + (-\frac{3}{7}) =$$

$$-4 + \frac{3}{7} =$$

$$4 - \frac{3}{7} =$$

$$-4 - \frac{3}{7} =$$

حالا مانند نمونه، هر عدد مخلوط را به صورت دو عدد صحیح و کسری درآورید و با هم جمع کنید.

$$-2\frac{1}{2} = -2 + (-\frac{1}{2})$$

$$-3\frac{3}{4} =$$

$$+4\frac{1}{3} =$$



تمرین

۱- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

$$-\frac{4}{15} + \frac{4}{5} =$$

$$-\frac{3}{8} - \frac{5}{12} =$$

$$-2 - \frac{5}{3} =$$

$$-2 + \frac{3}{5} =$$

$$-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} =$$

$$-4\frac{1}{5} - 2\frac{1}{2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} - 1\frac{1}{4} =$$

۲- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

$$\begin{cases} -25 + 75 = \\ -\circ/25 + \circ/75 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 + 3 = \\ -\circ/9 + \circ/3 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 12 = \\ \circ/7 - 1/2 = \end{cases}$$

بین این تساوی‌ها چه رابطه‌ای می‌بینید؟

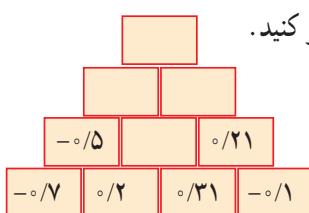
۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$12/8 - 15/4 =$$

$$-25 + 7/2 =$$

$$-4/1 - 3/7 =$$

۴- به کمک الگویابی، جاهای خالی شکل را پر کنید.



ضرب و تقسیم عدددهای گویا



۱- مانند نمونه، ضرب عدددهای گویا را به ضرب عدددهای صحیح تبدیل کنید. با توجه به حاصل عبارت‌ها، جدول را برای ضرب دو عدد گویا کامل کنید.

$$-\frac{2}{3} \times \left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{-2}{3} \times \frac{+3}{4} = \frac{(-2) \times (+3)}{3 \times 4} = -\frac{2 \times 3}{3 \times 4} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{4} \times \left(+\frac{5}{7}\right) =$$

$$-\frac{2}{9} \times \left(-\frac{4}{7}\right) =$$

$$\frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{9}\right) =$$

$$\frac{4}{3} \times \left(-\frac{9}{4}\right) =$$

	\times	$+$	$-$
$+$			
$-$			

۲- با توجه به جدول بالا، ابتدا علامت حاصل ضرب را تعیین کنید؛ سپس، مانند نمونه با ضرب کسرها حاصل را پیدا کنید.

$$-\frac{3}{4} \times \left(-\frac{8}{15}\right) = +\frac{3}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{3 \times 8}{4 \times 15} = \frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{2} \times \left(+\frac{2}{3}\right) =$$

$$+\frac{3}{4} \times \left(-\frac{3}{5}\right) =$$

کار در کلاس



با توجه به نتیجه‌ای که از فعالیت قبل گرفته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(+\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{7}\right) =$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) =$$

$$\left(-\frac{6}{35}\right) \times \left(-\frac{21}{8}\right) =$$

$$-\frac{4}{7} \times \left(+12\right) =$$

$$\left(-\frac{3}{11}\right) \times \left(+\frac{11}{6}\right) =$$

$$-1/2 \times (-1/1) =$$

$$-1\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} =$$

$$-2\frac{1}{4} \times \left(-1\frac{1}{3}\right) =$$

۵ فعالیت

۱- معکوس کسر $\frac{2}{3}$ برابر با $\frac{3}{2}$ است. معکوس عدهای گویای زیر را بنویسید.

$$-\frac{3}{5} \rightarrow -\frac{5}{3}$$

$$+\frac{2}{7} \rightarrow$$

$$-3 \rightarrow$$

$$+\frac{7}{3} \rightarrow$$

$$-2\frac{1}{3} \rightarrow$$

$$0/1 \rightarrow$$

$$+1\frac{1}{4} \rightarrow$$

$$-1 \rightarrow$$

مانند نمونه هر عدد بالا را در معکوس خود ضرب کنید و حاصل را به دست آورید.

$$-\frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) =$$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲- همان طور که می‌دانید، تقسیم را می‌توانیم به ضرب تبدیل کنیم؛ پس، مانند نمونه ابتدا علامت حاصل تقسیم را بگذارید و سپس آن را به ضرب دو عدد تبدیل کنید.

$$\left(+\frac{2}{3}\right) \div \left(-\frac{5}{7}\right) = -\left(\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}\right) = -\left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}\right) =$$

$$-\frac{6}{35} \div \left(-\frac{8}{21}\right) =$$

$$-\frac{15}{12} \div \left(+\frac{10}{18}\right) =$$

۳- جاهای خالی را با کسر مناسب پر کنید.

$$-2\frac{1}{2} \times \underline{\quad} = 1$$

$$-\frac{3}{5} \times \underline{\quad} = 1$$

$$+1\frac{1}{4} \times \underline{\quad} = 1$$

$$+\frac{1}{4} \times \underline{\quad} = 1$$

صفر تنها عددی است که معکوس ندارد؛ چون کسری که مخرج آن صفر باشد تعريف نشده است.

کار در کلاس



۱- حاصل تقسیم‌های زیر را حساب کنید.

$$-\frac{8}{9} \div (-\frac{8}{9}) =$$

$$-\frac{4}{7} \div (-\frac{5}{7}) =$$

$$-\frac{3}{8} \div (-\frac{3}{8}) =$$

$$1 \div (-\frac{2}{3}) =$$

$$(+\frac{1}{4}) \div (-\frac{5}{8}) =$$

$$-\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} =$$

۲- طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.

$$1 \div \frac{3}{5} =$$

$$1 \div (-\frac{3}{4}) =$$

$$1 \div (-\frac{7}{2}) =$$

$$\frac{3}{5} = \text{معکوس}$$

$$-\frac{3}{4} = \text{معکوس}$$

$$-\frac{7}{2} = \text{معکوس}$$

حاصل تقسیم عدد یک بر هر عدد غیر صفر چیست؟ توضیح دهید.

فعالیت



۱- کسرهای زیر را مانند نمونه و به کمک ماشین حساب به عده‌های اعشاری تبدیل کنید.

$$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0.\overline{4}$$

$$\frac{1}{3} \approx$$

$$\frac{3}{7} \approx$$

$$\frac{1}{8} =$$

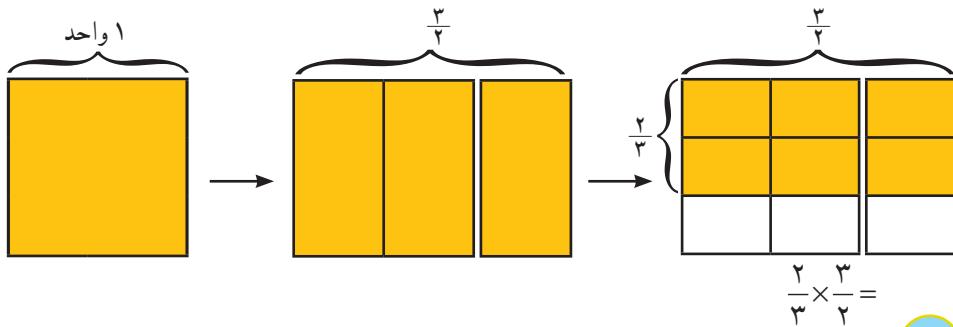
$$\frac{5}{4} =$$

$$\frac{5}{6} \approx$$

بین عده‌های حاصل چه تفاوتی مشاهده می‌کنید؟ آیا می‌توانید کسرها را طبقه‌بندی کنید؟

۲- مانند نمونه، ضرب یک کسر در معکوسش را روی شکل نشان دهید. چگونه می‌توانیم از

روی شکل نشان دهیم که حاصل ضرب کسر در معکوسش، یک می‌شود؟



تمرین



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(-\frac{6}{17}\right) + \left(-\frac{-8}{17}\right) =$$

$$\left(-\frac{12}{35}\right) - \left(+\frac{11}{42}\right) =$$

$$\left(-\frac{2}{63}\right) - \left(-\frac{5}{72}\right) =$$

$$-\frac{7}{12} + (-3) =$$

$$\left(+\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{6}{9}\right) =$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right) \times \left(+\frac{8}{12}\right) =$$

$$-8 \div (+5) =$$

$$(-12) \div (-28) =$$

$$\left(-\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{28}{27}\right) =$$

$$-2/4 \div 1/2 =$$

۲- عدهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$-(-\frac{5}{8}) =$$

$$-(\frac{14}{-19}) =$$

$$-(\frac{-5}{-13}) =$$

$$-\frac{3}{5} =$$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(\frac{3}{5} - \left(+\frac{2}{5}\right)\right) \times \frac{5}{12} =$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right) =$$

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5} - \frac{7}{5} + \frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) =$$

$$\left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{6} - \frac{8}{9}\right) \div \frac{-7}{24} =$$

$$(-2 + 3 - 7) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15}\right) =$$

$$-1\frac{1}{3} \times \left(-3\frac{1}{3}\right) =$$

$$-4\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{4} =$$

$$-1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} \times \frac{-8}{5} =$$

مرور فصل ۱

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- عددهای طبیعی
 - عددهای صحیح
 - عددهای گویا
 - معکوس عدد گویا
- در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود، خلاصه درس مربوط به آن را بنویسید.

- محاسبه حاصل یک عبارت، شامل عددهای صحیح با رعایت ترتیب عملیات
- پیدا کردن راه حل مناسب برای محاسبه یک عبارت
- پیدا کردن عددهای گویای مساوی
- نمایش جمع و تفریق عددهای گویا روی محور
- محاسبه جمع و تفریق دو عدد گویا
- محاسبه ضرب و تقسیم دو عدد گویا
- پیدا کردن معکوس یک عدد گویا
- محاسبه حاصل یک عبارت، شامل عددهای گویا با رعایت ترتیب عملیات

کاربرد

محاسبه عددهای گویا در محاسبات عبارت‌های جبری و حل معادله‌ها کاربرد دارد.

تمرین‌های ترکیبی

۱- عددهای گویا را روی محور نمایش دهید.

$$-(-\frac{2}{3})$$

$$-1\frac{1}{4}$$

$$-\frac{-5}{-2}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

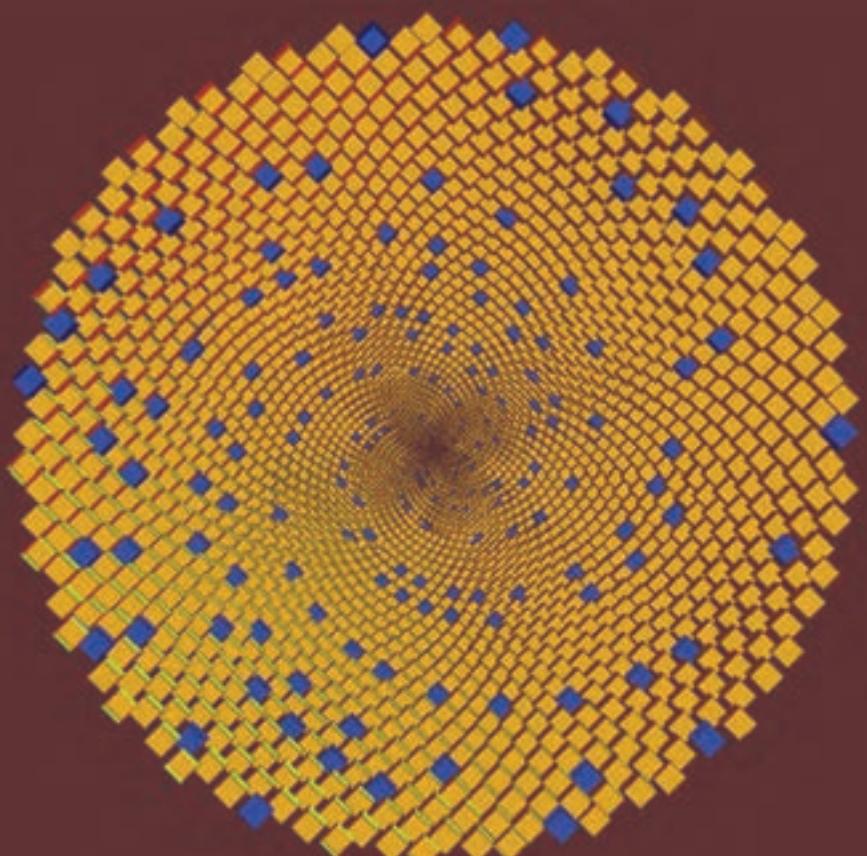
$$(-2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}) \div (-1\frac{1}{4} \times \frac{-2}{5}) =$$

$$1 - \frac{1\frac{1}{2}}{-1 + 1\frac{1}{2}} =$$

۲

فصل

عددهای اول



در این مخروط اعداد طبیعی به ترتیب از نوک مخروط چیده شده‌اند. اعداد اول به رنگ آبی هستند.

شمارنده‌های اول یک عدد مانند ماده اولیه کارخانه عدسانسازی هستند. همه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از یک و غیر اول را می‌توانیم با ضرب شمارنده‌های اول بدست آوریم. امروزه از عددهای اول، که تجزیه و شکسته نمی‌شوند برای رمزگذاری و رمزگشایی استفاده می‌شود.

فعالیت



۱- می خواهیم ۱۹ نفر از دانش آموزان را برای کارهای مختلف به گروه هایی

تقسیم کنیم. آیا می توانیم این تعداد را به گروه های مساوی تقسیم کنیم؟

اگر تعداد دانش آموزان ۷ نفر باشد، چه گروه هایی را می توانیم تشکیل دهیم؟ همه حالت های

ممکن را بنویسید.

اگر تعداد آنها ۱۵ نفر باشد، چه گروه هایی را می توانیم تشکیل دهیم؟



۲- تعدادی از سربازان می خواهند رژه بروند. فرمانده آنها آرایش های مستطیلی مختلف برای گروه های ۶ نفره را روی کاغذ کشیده است.



$$1 \times 6$$



$$2 \times 3$$



$$3 \times 2$$



$$6 \times 1$$

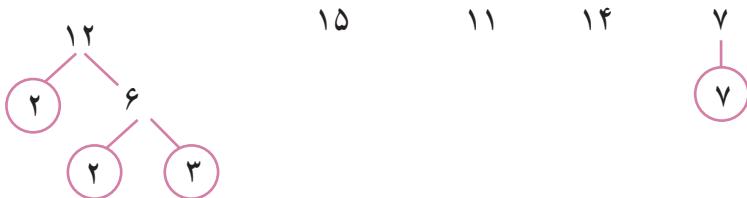
شما هم برای ۸ نفر، آرایش های مستطیلی مختلف رسم کنید.

برای ۵ نفر هم آرایش های ممکن را رسم کنید.

کدام عددها فقط ۲ آرایش مستطیلی دارند؟

۳- مانند نمونه ها با رسم نمودارهای درختی، عددهای داده شده را به صورت ضرب شمارنده های

اول بنویسید (تجزیه کنید).



$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

هر عدد طبیعی و بزرگ تر از یک، که هیچ شمارنده طبیعی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می شود.

کار در کلاس



اگر بتوانیم عددی طبیعی را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسیم، عدد مورد نظر، اول نخواهد بود و به چنین عددی، **عدد مرکب** می‌گویند؛ برای مثال؛ ۲۴ عددی مرکب است؛ چون: $24 = 6 \times 4$

همه عدهای مرکب بین ۱۵ و ۳۰ را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسید.

فعالیت ۵

۱- عدهای طبیعی از ۱ تا ۲۰ را بنویسید و دور عدهای اول خط بکشید. آیا

عدد ۱ است؟ چرا؟

آیا عدد ۱ مرکب است؟ چرا؟

۲- با توجه به سؤال بالا، عدهای طبیعی را به سه دسته تقسیم کنید و ویژگی‌های هر کدام را بنویسید.

۳- مضرب‌های طبیعی عدد ۲ در زیر نوشته شده است. در صورت امکان، آنها را مانند نمونه به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بنویسید.

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

\downarrow \downarrow
 2×2 2×3

به همین ترتیب، مضرب‌های طبیعی عدهای ۳ و ۴ را بنویسید و در صورت امکان آنها را به صورت ضرب دو عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ بنویسید.

: مضرب‌های طبیعی عدد ۳

: مضرب‌های طبیعی عدد ۴

۴- با توجه به سؤال بالا، آیا می‌توانیم بگوییم که همه مضرب‌های یک عدد طبیعی مرکب‌اند؟ چرا؟

عدد ۱ نه اول است نه مرکب؛ به این ترتیب، عدهای طبیعی را می‌توان به سه بخش تقسیم کرد:

عدهای اول، عدهای مرکب و عدد یک

کار در کلاس



۱- در بین اعداد زیر، اعداد مرکب را مشخص کنید.

۲۱ ۳۱ ۳۵ ۴۷ ۴۹

۲- کدام عددهای طبیعی را می‌شناسید که همهٔ مضرب‌هایشان عددهای مرکب باشند؟

چند تا از مضرب‌های آن عدد اول هستند؟

۳- عدد ۱۷ چند مضرب دارد؟

۴- اگر a یک عدد اول باشد، آیا همهٔ مضرب‌هایش مرکب‌اند؟



۱- ب.م.م جفت عددهای داده شده را بنویسید.

$$(15, 6) = 3$$

$$(2, 8) =$$

$$(3, 9) =$$

$$(1, 4) =$$

$$(18, 12) =$$

$$(5, 12) =$$

$$(15, 4) =$$

$$(3, 5) =$$

$$(24, 25) =$$

$$(18, 25) =$$

$$(7, 8) =$$

$$(3, 3) =$$

اگر ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه [شمارنده] مشترک) دو عدد برابر یک باشد، می‌گوییم آن دو عدد نسبت به هم اول هستند؛ برای مثال، عددهای ۸ و ۹ هر دو مرکب‌اند اما چون $1 = (8, 9)$ می‌گوییم این دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

۲- دو عدد اول متفاوت انتخاب کنید و ب.م.م آنها را بنویسید.

آیا می‌توان گفت هر دو عدد اول نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟

۳- یک عدد اول و یک عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.

۴- دو عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.

۵- آیا دو عدد طبیعی متولی نسبت به هم اول می‌شوند؟

۶- اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها چگونه به دست می‌آید؟

تمرین



۱- برای تساوی رو به رو، چهار پاسخ مختلف به دست آورید. $1 = (4 \text{ و } \square)$

۲- عدهای اول بین دو عدد 4° و 6° را بنویسید.

۳- تعداد عدهای اول کمتر از 2° ، هشت عدد است، تعداد عدهای مرکب کوچک‌تر از 2° چندتاست؟ چرا؟

۴- آیا جمله زیر درست است؟ چرا؟

«هر عدد طبیعی دست کم ۲ شمارنده دارد.»

۵- مجموع دو عدد اول ۹۹ است. آن دو عدد را مشخص کنید و توضیح دهید که چگونه آنها را پیدا کردید.

۶- پنج عدد بنویسید که غیر از ۲ و ۳ شمارنده اول دیگری نداشته باشند.

۷- عددی درنظر بگیرید که ۴ و ۹ دو شمارنده آن باشند. حال شش عدد دیگر پیدا کنید که شمارنده‌های عدد مورد نظر باشند.

خواندنی

دو عدد اول که با هم دو واحد اختلاف دارند را یک جفت عدد اول **دو قلو** می‌نامند، مانند $(3, 5)$ یا $(11, 13)$ یا $(1, 3)$. ریاضیدانان براین باورند (حدس می‌زنند) که برای دوقلوهای اول پایانی وجود ندارد.

همچنین هر سه عدد فرد و متوالی را، که هر سه اول نیز باشند، اعداد اول سه **قلو** می‌نامند که فقط یک سه قلوی اول در بین اعداد طبیعی وجود دارد؛ یعنی $(3, 5, 7)$ و سه قلوی دیگری یافت نمی‌شود! چرا؟

فعالیت



می خواهیم عدههای اول از ۱ تا ۵ را تعیین کنیم.

ابتدا عدههای ۱ تا ۵ را می نویسیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰

– حالا عدههای غیراول را خط می زنیم تا عدههای اول باقی بمانند.

۱– آیا عدد ۱ را خط زدید؟ چرا؟

۲– آیا مضربهای عدد ۲ را خط می زنید؟ چرا؟

– مضربهای مرکب عدد ۲ را به صورت / خط بزنید.

– مضربهای مرکب عدد ۳ را خط بزنید.

۳– آیا لازم است مضربهای عدد ۴ را خط بزنیم؟ خیر چرا؟ زیرا اگر عددی مضرب ۴ باشد، پیش از آن به عنوان مضرب ۲ خط خورده است.

۴– آیا مضربهای عدد ۵ را خط می زنید؟ چرا؟

مضربهای مرکب عدد ۵ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۵، که برای اولین بار خط می خورد، کدام است؟

۵– آیا مضربهای عدد ۶ را خط می زنید؟ چرا؟

۶– آیا مضربهای عدد ۷ را خط می زنید؟ چرا؟

۷– مضربهای مرکب عدد ۷ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۷، که برای اولین بار خط می خورد، کدام است؟

۸– آیا مضربهای اعداد ۸ و ۹ و ۱۰ را خط می زنید؟ چرا؟

۹- اگر بخواهیم مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم، کدام مضرب ۱۱ برای اولین بار خط خواهد خورد؟

۱۰- به این ترتیب، آیا لازم است مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم؟

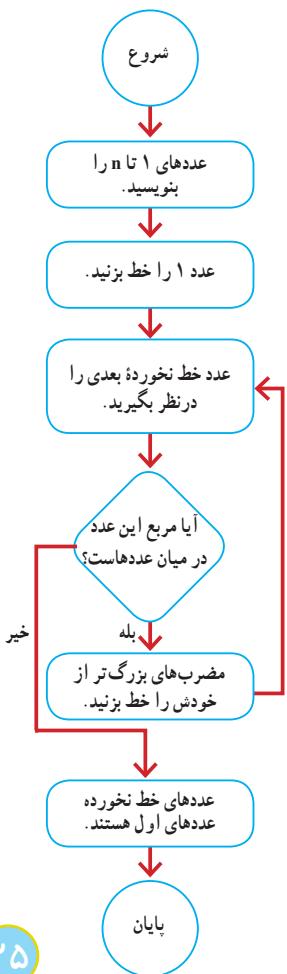
۱۱- آیا عده‌های باقیمانده، اول هستند؟

برای تعیین عده‌های اول، عدد بک و مضرب‌های مرکب اعداد اول را خط می‌زنیم و خط زدن را تا عدد اولی ادامه می‌دهیم که مربع آن، بین عده‌های نوشته شده نباشد.



کار در کلاس

نتایج فعالیت قبل، که به آن **روش غربال** می‌گویند در نمودار زیر خلاصه شده است.



این نمودار را برای $n = 40$ دنبال کنید و همه مرحله‌ها را یک به یک انجام دهید. هر مرحله از نمودار را برای خود توضیح دهید؛ برای مثال، جمله «عددهای ۱ تا n را بنویسید» را بخوانید و عده‌های ۱ تا 40 را در کادر زیر بنویسید. عدد ۱ را خط بزنید. عدد خط‌نخورده بعدی را، که عدد ۲ است در نظر بگیرید. آیا مربع عدد ۲ بین عده‌های هست؟ مضرب‌های مرکب آن را خط بزنید. دوباره به مرحله قبلی برگردید و به همین ترتیب کار را ادامه دهید.

۵ فعالیت

می خواهیم مشخص کنیم ۴۷ اول است یا نه. مانند روش غربال، که در صفحهٔ قبل توضیح داده شد، فرض کنید عدهای ۱ تا ۴۷ نوشته شده‌اند.

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۲ خط می‌خورد؟
با انجام دادن چه عملی می‌توانید به این سؤال پاسخ دهید؟

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۳ خط می‌خورد؟
چرا؟

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۵ خط می‌خورد؟
چرا؟

آیا لازم است بررسی کنیم که عدد ۴۷ با مضرب‌های ۷ خط می‌خورد یا نه؟
چرا؟

آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که عدد ۴۷ را فقط بر عدهای اول تقسیم می‌کنیم؟
چرا؟

چرا تقسیم کردن را تا عدد اولی که مربع آن از ۴۷ بزرگ‌تر شود ادامه می‌دهیم؟ توضیح دهید.



مانند نمونه، بررسی کنید که عدهای داده شده (۹۷، ۹۱، ۱۳۱ و ۱۴۳) اول یا مرکب هستند.

$\sqrt{97} \approx 9$ → پس باید آن را به عدهای اول ۵، ۳، ۲ و ۷ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} 97 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ | \\ 97 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ | \\ 97 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ | \\ 97 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ | \\ 97 \\ \hline \end{array}$$

چون تمام تقسیم‌ها باقیانده دارند، ۹۷ مضرب هیچ‌کدام نیست؛ یعنی عددی اول است.

$$\sqrt{131} \approx \rightarrow$$

$$\sqrt{143} \approx \text{_____} \rightarrow$$

تمرین



- ۱- از روش غربال برای عده‌های ۱ تا ۶۰ استفاده و عده‌های اول کمتر از ۶۰ را پیدا کنید.
- ۲- مشخص کنید که عده‌های ۱۰۷ و ۲۵۱ اول اند یا مرکب.
- ۳- «برای اینکه بفهمیم عده‌های کمتر از ۱۰۰ اول اند یا نه، کافی است آنها را به عده‌های ۵، ۳، ۲ و ۷ تقسیم کنیم.» آیا این جمله درست است؟ چرا؟
- ۴- عددی از ۱۲۰ کوچک‌تر و از ۱۰۰ بزرگ‌تر است. برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا نه، حداکثر چند تقسیم انجام می‌دهیم؟ چرا؟
- ۵- عده‌های ۱ تا ۱۰۰ را بنویسید و غربال کنید؛ سپس به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.
- اولین عددی که خط خورد.
 - در مرحله حذف مضرب‌های ۷، اولین مضرب ۷ که به عنوان مضرب‌های سایر عددها خط نخورد.
 - عددی که با مضرب‌های آن عدد ۲۴ خط خورد.
 - تمام مضرب‌های ۵ که در مرحله حذف مضرب‌های ۵ برای اولین بار خط خوردن.

خواندنی

توزيع و نوع قرار گرفتن اعداد اول بین اعداد طبیعی بسیار نامنظم است و از قانون خاصی پیروی نمی‌کند ولی همین اعداد اول که به صورتی نامنظم در بین اعداد طبیعی روییده‌اند، می‌توانند هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک را بسازند و به عنوان بلوک‌های ساختمانی برای اعداد طبیعی به کار بروند.

$$26 = 2^2 \times 3^2$$

$$27 = 3^3$$

$$, \quad 5 = 5^1$$

$$, \quad 12 = 2^2 \times 3$$

۲ مرور فصل

مفاهیم و مهارت‌ها

اصطلاحات زیر در این فصل به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- نمودار درختی
 - عدد مرکب
 - نسبت به هم اول
 - روش غربال
- روش‌های اصلی زیر در این فصل مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و خلاصه درس را در دفتر خود بنویسید.

- پیدا کردن عده‌های اول با روش‌های تقسیم، ضرب و بخش‌پذیری
- تشخیص عده‌های اول و مرکب
- تعیین عده‌های اول به کمک روش غربال
- دنبال کردن یک دستورالعمل و نمودار
- تعیین اینکه یک عدد، اول یا مرکب است.

کاربرد

این درس در فصل مربوط به توان و جذر کاربرد دارد. از تبدیل پایه‌های مرکب به پایه‌های عدد اول برای ساده کردن عبارت‌های توان دار استفاده می‌شود.

تمرین‌های ترکیبی

۱- یک عدد مرکب بنویسید که شمارنده‌های اول غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد. آیا این عدد و عددی که شمارنده‌های اول آن ۲ و ۵ است، نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟

۲- با روش غربال، عده‌های اول بین 2^0 و 4^0 را پیدا کنید. در این روش، کار را از خط‌زدن مضرب‌های کدام عدد شروع می‌کنید و با مضرب‌های کدام عدد پایان می‌دهید؟

۳- آیا عدد ۱۳۷ اول است؟ چرا؟

۴- ۲ عدد مرکب بنویسید که نسبت به هم اول باشند.

۳

فصل

چند ضلعی ها

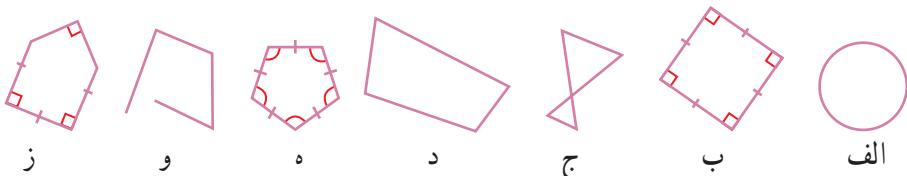


طی هزاران سال گذشته در آثار هنری گوشه و کنار کشور پر افتخارمان، نقش مؤثر استفاده از هندسه و شکل های هندسی و نیز مفاهیم مهم آن همچون انتقال، تقارن و دوران به وضوح قابل مشاهده است.

فَعَالِيَّةٌ



- ۱- در صفحه به هر خط شکسته بسته، چندضلعی گفته می‌شود به شرط اینکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند.
- شکل «ج» چندضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند.
- شکل «و» چندضلعی نیست؛ چرا؟
- شکل «الف» هم چندضلعی نیست؛ چرا؟



- ۲- اگر در یک چندضلعی همه ضلع‌ها با هم و همه زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منتظم است.

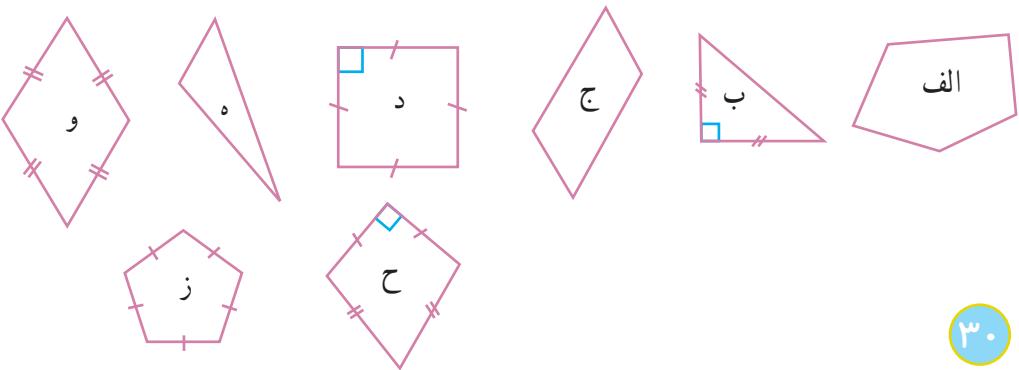
از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چندضلعی منتظم‌اند؟

- ۳- یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید؛ سپس درباره تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها و... توضیح دهید تا دوستان شکلی را پیدا کند که انتخاب کرده‌اید.
- سپس به توضیحات دوستان گوش کنید و شکلی را پیدا کنید که او انتخاب کرده است.

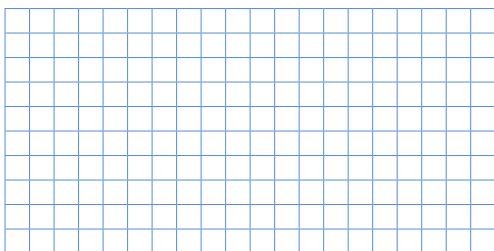
کار در کلاس



- ۱- هر یک از عبارت‌های زیر به کدام چندضلعی‌ها مربوط است؟
- لوزی با زاویه قائمه
 - پنج ضلعی غیرمنتظم
 - چندضلعی منتظم
 - مثلث با زاویه باز



۲- چندضلعی های زیر را در صفحهٔ شطرنجی رسم کنید.



الف) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین

ب) مستطیلی با ضلع های مساوی

ج) یک ذوزنقهٔ قائم الزاویه

د) یک شش ضلعی با دقیقاً سه زاویهٔ قائم

۳- در سال گذشته با خط تقارن شکل آشنا شدید.

الف) تعداد خطوط تقارن هر یک از چندضلعی های منتظم زیر را پیدا کنید.



ب) به نظر شما نه ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ده ضلعی منتظم چطور؟

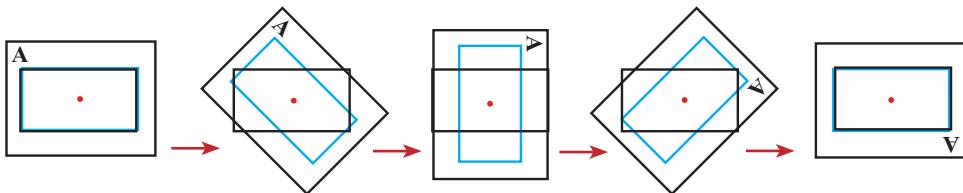


۱- یک ورق کاغذ پوستی روی مستطیل رو به رو قرار دهید

و تصویر مستطیل را روی آن رسم کنید.

نوك مدادتان را روی مرکز دوران بگذارید و مانند شکل های زیر،

کاغذ پوستی را 180° درجه حول مرکز دوران بچرخانید.



بعد از 45° درجه چرخش

بعد از 90° درجه چرخش

بعد از 135° درجه چرخش

بعد از 180° درجه چرخش

آیا تصویر، روی شکل منطبق می شود؟

اگر شکلی را حول یک نقطه، 180° درجه دوران دهیم و نتیجه دوران، روی خودش منطبق شود، می‌گوییم شکل **مرکز تقارن** دارد و نقطهٔ مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.



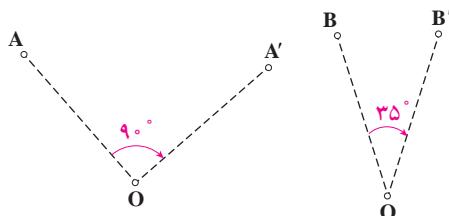
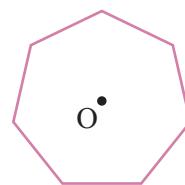
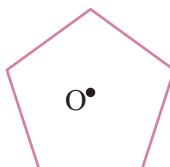
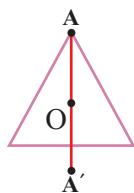
۲- شکل روبرو مثلثی متساوی‌الاضلاع است. یک ورق کاغذ پوستی روی آن قرار دهید و مراحل فعالیت (۱) را تکرار کنید. آیا تصویر، روی شکل منطبق می‌شود؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳- در کدام یک از چندضلعی‌های منتظم زیر، نقطهٔ مشخص شده مرکز تقارن است؟



به نظر شما نهضلعی منتظم مرکز تقارن دارد؟
ده ضلعی منتظم چطور؟ از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴- یکی از راه‌های تشخیص اینکه نقطهٔ O در مثلث متساوی‌الاضلاع مرکز تقارن نیست، این است که می‌توان روی شکل، نقطه‌ای پیدا کرد که قرینهٔ آن نسبت به نقطهٔ O روی خود شکل قرار نگرفته باشد. مانند نمونه، نشان دهید که نقطهٔ O در دو شکل دیگر هم، مرکز تقارن نیست.



۵- شکل‌های مقابل چگونگی پیدا کردن دوران یافته نقاط A و B حول مرکز O را به اندازهٔ 90° و 35° در جهت عقربه‌های ساعت نشان می‌دهد.

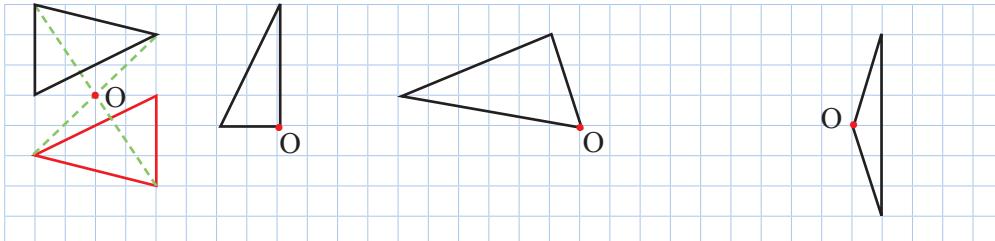
کدام یک از شکل‌های فعالیت (۳) با

دوران 90° حول نقطهٔ مشخص شده در جهت عقربه‌های ساعت روی خودش می‌افتد؟

کار در کلاس



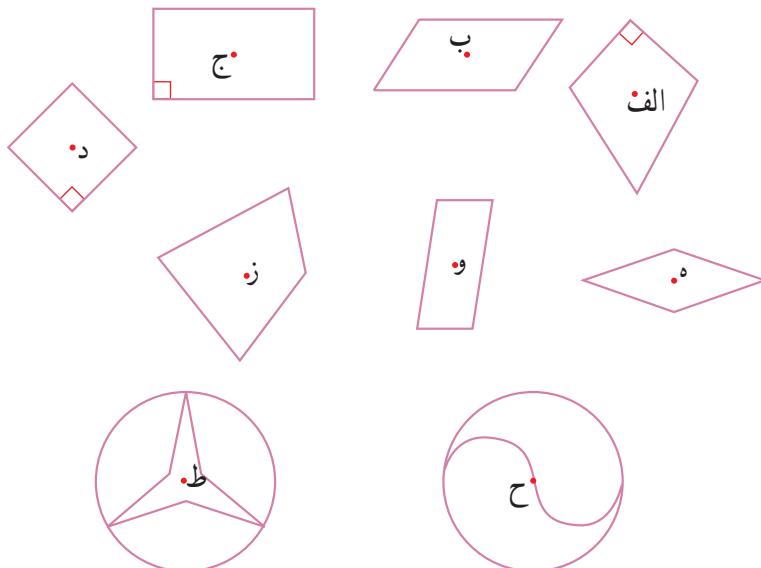
مانند نمونه هر شکل را طوری کامل کنید که نقطه O مرکز تقارن باشد.



تمرین



در هر شکل، بررسی کنید که نقطه مشخص شده، مرکز تقارن شکل هست یا نه.



فعالیت ۵

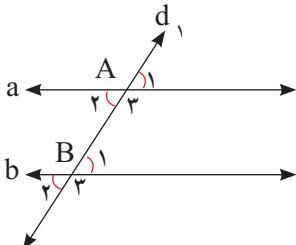


اگر خطی مانند d_1 ، خطوط a و b را مانند شکل با زاویه‌های مساوی قطع کرده باشد، خط‌های a و b با هم موازیند.

به خط d_1 ، **خط مورب** می‌گویند.

موازی بودن خط‌های a و b را به صورت $a \parallel b$ نمایش می‌دهند.

هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها زاویه‌های مساوی می‌سازد.



۱- اگر $\hat{A}_1 = 60^\circ$ باشد، زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

$$\hat{A}_3 = \underline{\hspace{10cm}} \quad \text{چون مکمل زاویه } A_1 \text{ است.}$$

$$\hat{B}_1 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\hat{B}_2 = \underline{\hspace{10cm}} \quad \text{چون با زاویه } B_1 \text{ متقابل به رأس است.}$$

$$\hat{B}_3 = \underline{\hspace{10cm}}$$

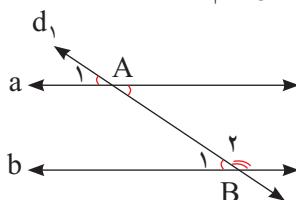
۲- خط d_1 را بر a عمود کنید و ادامه دهید تا خط b را قطع کند. چرا d_1 بر b هم عمود است؟

۳- خط d_1 با خط b زاویه 70° ساخته است. خط d_1 با خط a چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۴- دو خط a و b با هم موازی‌اند و خط d_1 مورب است؛ پس زاویه‌های A_1 و B_1 با هم مساوی‌اند. این

مطلوب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$(a \parallel b \text{ و } d_1 \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$



چرا A_1 و B_2 مکمل اند؟

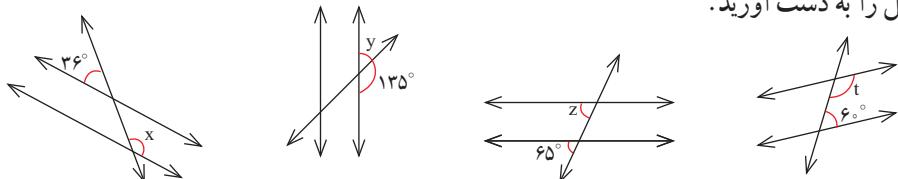
اگر خط a را روی صفحه انتقال دهیم تا روی خط b قرار گیرد و نقطه A روی B بیفتد، زاویه A_1 روی کدام زاویه قرار می‌گیرد؟

چگونه از این طریق می‌توان توجیه کرد که زاویه A_1 و زاویه B_2 مکمل یکدیگرند؟ توضیح دهید.

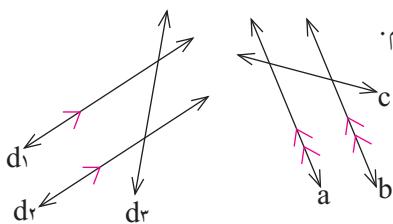
کار در کلاس



۱- در هر شکل یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کرده است. اندازه زاویه‌های مجهول را به دست آورید.



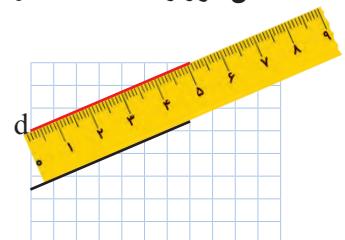
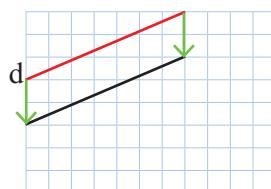
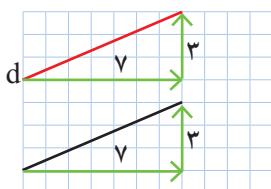
۲- موازی بودن دو خط را مانند شکل با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم. عبارت «خط d_1 با خط d_2 موازی نیست» را به صورت $d_1 \not\parallel d_2$ می‌نویسیم.
الف) عبارت‌های $a \parallel b$ و $a \parallel c$ را بخوانید.
ب) زاویه‌های مساوی را در شکل‌ها با علامت گذاری مشخص کنید.



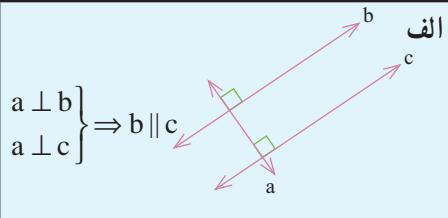
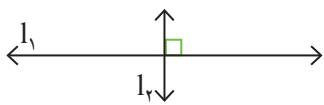
فعالیت



۱- می‌خواهیم در صفحه شطرنجی خطی موازی خط d رسم کنیم. راه حل سه داش آموز را مشاهده کنید و توضیح دهید هر کدام از آنها چگونه خط موازی را رسم کرده است.



۲- عمود بودن دو خط را با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم و عبارت «خط l_1 بر خط l_2 عمود است» را به صورت $l_1 \perp l_2$ می‌نویسیم.



مانند نمونه برای هر کدام شکل بکشید و جاهای خالی را پر کنید.

دو خط عمود بر یک خط

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel e \\ d \parallel f \end{array} \right\} \Rightarrow$$

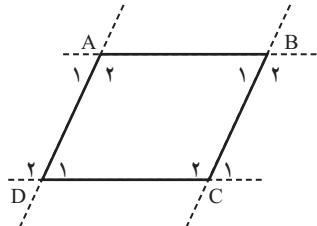
ج

$$\left. \begin{array}{l} g \parallel h \\ k \perp h \end{array} \right\} \Rightarrow$$

ب

دو خط موازی با یک خط

اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود



۳- در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های رو به رو باهم موازی‌اند. چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است.

(الف) ضلع‌های موازی را با علامت گذاری مشخص کنید.

(ب) جاهای خالی را در رابطه‌های زیر کامل کنید.

$$(AB \parallel DC) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1, \hat{A}_2 = \hat{D}_2$$

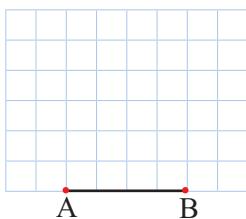
$$(BC \parallel AD) \Rightarrow$$

$$(AD \parallel BC) \Rightarrow$$

$$(AB \parallel CD) \Rightarrow$$



کار در کلاس

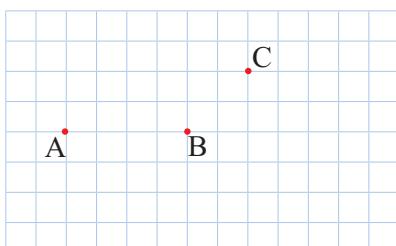


۱- الف) یک مثلث متساوی الساقین بکشید؛ طوری که پاره خط AB قاعده آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانان مقایسه کنید.

ب) خط تقارن مثلث را رسم کنید.

ج) آیا دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند؟

د) آیا خط تقارن، عمودمنصف قاعده و نیمساز زاویه مقابل آن است؟



۲- متوازی الاضلاعی رسم کنید که نقاط A، B

و C سه تا از رأس‌های آن باشند.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانان مقایسه

کنید.

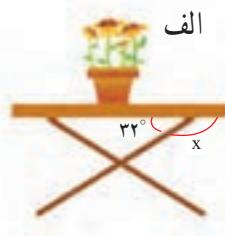
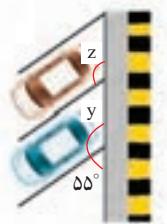
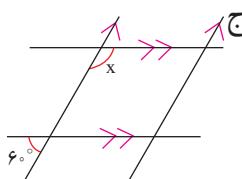
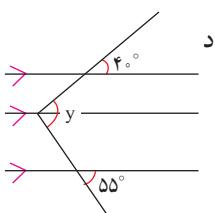
برای این سؤال چند پاسخ مختلف می‌توانید پیدا

کنید؟

تمرین



۱- در هر قسمت، اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



۲- مانند نمونه با تشکیل معادله، مقدار x را پیدا کنید.

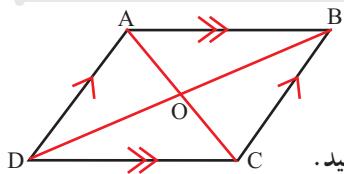
$$2x + 3^\circ + 12^\circ = 180^\circ$$

$$155^\circ + 2x - 25^\circ = 180^\circ$$

$$6^\circ + x + 4^\circ = 180^\circ$$

چهار ضلعی‌ها

فعالیت



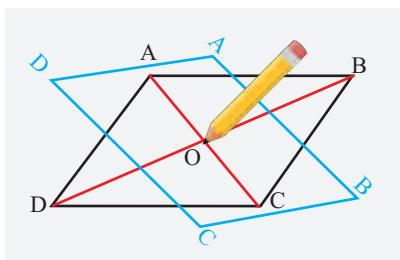
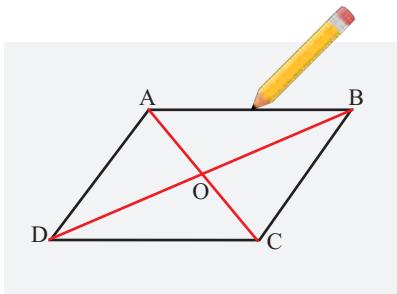
۵ چهارضلعی‌ای که ضلع‌های روبروی آن دو به دو با هم موازی‌اند، موازی‌الاضلاع نام دارد.

۱- متوازی‌الاضلاعی را رسم، و مانند شکل نام‌گذاری کنید.

یک ورق کاغذ پوستی روی آن بگذارید و تصویر متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

نوك مدادتان را روی نقطه O (محل برخورد قطرها و مرکز تقارن شکل) قرار دهید و مانند

شکل‌های زیر، تصویر را 180° درجه حول این نقطه بچرخانید تا بر شکل منطبق شود.



۲- با توجه به اضلاع شکل و تصویر، تساوی‌ها را کامل کنید.

$$\hat{A} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\hat{B} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$$

هر یک از عبارت‌های زیر، یکی از خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع را بیان می‌کند. با توجه به تساوی‌های بالا، این دو عبارت را کامل کنید.

در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های رو به رو

در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های رو به رو

در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور

۳- پاره خط OA بر کدام پاره خط منطبق شده است؟

پاره خط OB چطور؟

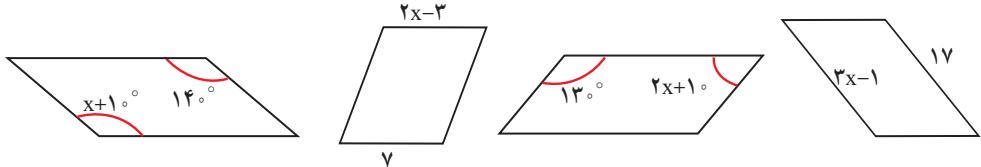
با توجه به پاسخ این دو پرسش، یک خاصیت دیگر متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید و بنویسید.

در هر متوازی‌الاضلاع،

کار در کلاس



۱- شکل‌های زیر متوازی الاضلاع‌اند. با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید.

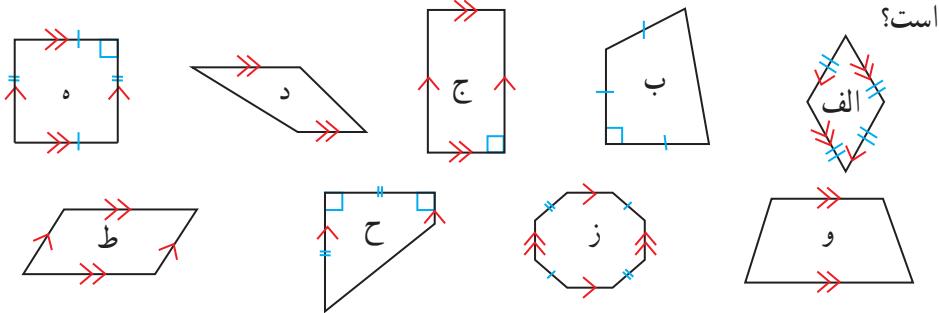


۲- در صفحهٔ شطرنجی متوازی الاضلاع‌ی رسم کنید
که یکی از زاویه‌هایش قائمه (90° درجه) باشد.
چرا زاویه‌های دیگر آن هم حتماً قائمه‌اند؟ توضیح دهید.

فعالیت ۵



۱- با توجه به تعریف متوازی الاضلاع، کدام یک از شکل‌های زیر متوازی الاضلاع است؟



۲- در اینجا چند چهارضلعی دیگر هم تعریف شده است. هر تعریف را بخوانید و از میان چهارضلعی‌های فعالیت قبل، مثال‌هایی برای هر یک پیدا کنید.

مستطیل متوازی الاضلاعی است که زاویه‌های قائمه دارد.

لوزی متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند.

مربع متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زاویه‌های قائمه دارد.

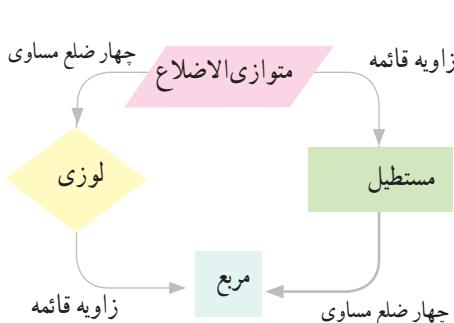
۳- می‌دانیم که «در هر متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند».

آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که «در هر لوزی هم قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند»؟ چرا؟

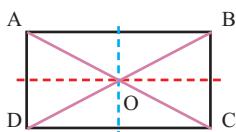
کار در کلاس



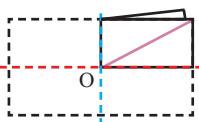
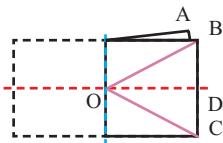
۱- با توجه به نمودار رو به رو در جدول زیر، جاهای خالی را پر کنید.



متوازی الاضلاع	لوزی	مستطیل	مربع	
✓	-	-	-	



۲- روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور آن را بیرید. مستطیل را مانند شکل نامگذاری کنید؛ سپس آن را ابتدا روی یکی از خطوط تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر تا کنید.



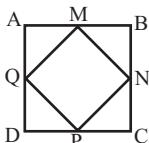
مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به دست آمده چگونه هر یک از خصیت‌های مستطیل را نشان می‌دهد.

● در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون $OA = OC$ و $OB = OD$ قرار گرفته است.

الف) همه زاویه‌ها در مستطیل با هم برابرند؛ چون

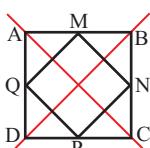
ب) ضلع‌های رو به رو در مستطیل مساوی‌اند؛ چون

ج) قطرها در مستطیل با هم برابرند؛ چون

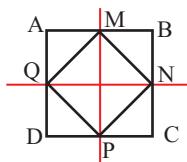


۳- در یک طرح کاشی کاری، مربع ABCD دیده می شود.
چهارضلعی MNPQ هم با وصل شدن وسط ضلع های
این مربع تشکیل شده است.

دو دانش آموز توضیح داده اند که MNPQ چه نوع چهارضلعی ای است. نظر این دو دانش آموز در اینجا آمده است.

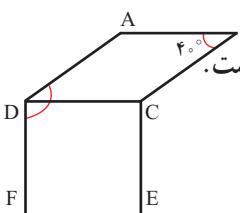


هادی
مربع ABCD است.
این مربع را روی دو قطر آن،
که محور تقارن نیز هستند، تا می کنیم.
همه زاویه های چهارضلعی MNPQ روی هم
می افتد؛ پس با هم برابرند. چون مجموع آنها
 360° است؛ پس هر کدام 90° می شوند.
درنتیجه این چهارضلعی مستطیل است.



مبین
مربع ABCD است.
این مربع را روی دو خط
تقارنی، که موازی ضلع های
آن هستند، تا می کنیم.
همه ضلع های چهارضلعی MNPQ روی هم
می افتد.
پس، این چهارضلعی لوزی است.

دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می توانیم نتیجه بگیریم که MNPQ مربع است.



تمرین



- ۱- چهارضلعی ABCD لوزی و چهارضلعی DCEF مربع است.
 الف) چرا $\overline{AD} = \overline{CE}$ ؟ ب) چرا $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ ؟
 ج) زاویه ADF چند درجه است؟
- ۲- روی کاغذ، لوزی دلخواهی بکشید و دور آن را بیرید.
این لوزی کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به دست آمده چه نتایجی در
موردن قطراهای لوزی به دست می آید.

۳- وسط ضلع های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می کنیم. چهارضلعی به دست آمده
چه نوع چهارضلعی ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

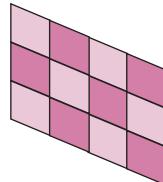
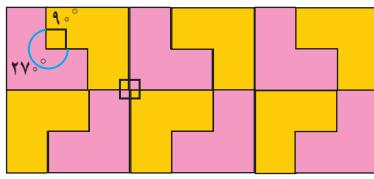
۴- درستی یا نادرستی هر یک از جمله های زیر را بررسی کنید.

- الف) قطراهای هر مستطیل با هم مساوی اند.
 ب) قطراهای هر لوزی با هم مساوی اند.
 د) قطراهای هر مستطیل بر هم عمودند.
 ج) قطراهای هر مستطیل با هم متساوی اند.

زاویه‌های داخلی

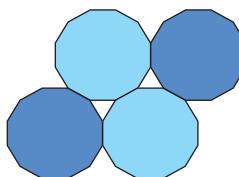
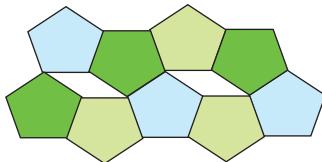
فعالیت ۵

۱- در کاشی کاری، کاشی‌ها را طوری کنار هم قرار می‌دهند که روی هم نیافتدند و جای خالی هم بین آنها نباشد. در اینجا چند نمونه کاشی کاری را مشاهده می‌کنید که هر کدام تنها با یک نوع کاشی انجام شده است.

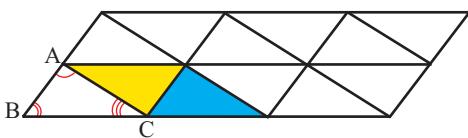


حالا به شکل‌های زیر توجه کنید. در هر مورد توضیح دهید، چرا کاشی کاری با یک نوع کاشی

انجام نمی‌شود؟



۲- سطح زیر با مثلث‌هایی هم نهشت با مثلث ABC کاشی کاری شده است.



مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است،

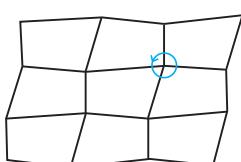
مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.

زاویه‌های متناظر با هر یک از زاویه‌های مثلث ABC را در این دو مثلث مشخص کنید.
در کاشی کاری بالا، قسمتی را که نشان می‌دهد $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ پیدا کنید.

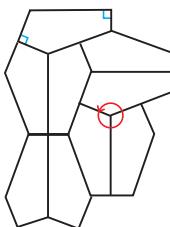
کار در کلاس



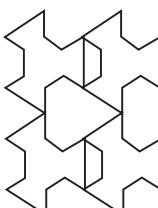
در کدام شکل، کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است؟



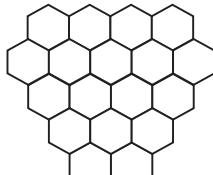
الف



ب



ج



د

فعالیت



۵ زاویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، **زاویه‌های داخلی** آن چندضلعی نامیده می‌شوند. مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° درجه است.

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶
شکل				
تعداد مثلث‌ها	۱	۲	—	—
مجموع زاویه‌های داخلی	$1 \times 180^\circ = 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$\dots \times 180^\circ = \dots$	$\dots \times 180^\circ = \dots$

جدول بالا نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی با مجموع زاویه‌های داخلی دو تا مثلث برابر است؛ پس **مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360°** می‌شود.

(الف) با کامل کردن جدول، مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های دیگر را به دست آورید.

(ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک هفت‌ضلعی چند درجه است؟
یک هشت‌ضلعی چطور؟ چرا؟

(ج) عبارت جبری زیر اطوری کامل کنید که نشان‌دهنده مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی باشد.

$$(\text{_____} - \text{_____}) \times 180^\circ = \text{مجموع زاویه‌های داخلی یک } n \text{ ضلعی}$$

اکنون با کامل کردن جدول زیر اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنید.

تعداد ضلع‌ها	مجموع زاویه‌های داخلی	اندازه هر زاویه
۳	180°	$\frac{180}{3} = 60^\circ$
۴	360°	
۵		
۶		$\frac{720}{6} = 120^\circ$

یک عبارت جبری بنویسید که نشان‌دهنده اندازه هر یک از زاویه‌های یک n ضلعی منتظم باشد.

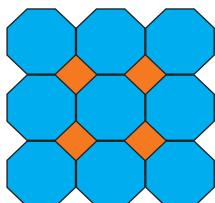
کار در کلاس



۱- مجموع زاویه‌های هریک از چندضلعی‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) هفت ضلعی منتظم

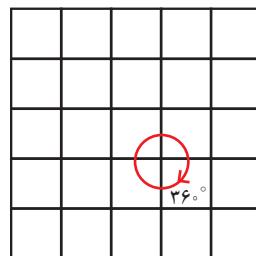
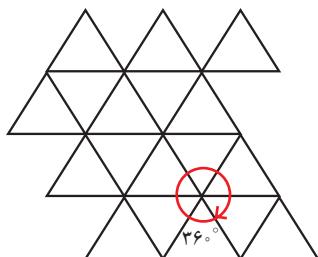
۲- به کمک جواب قسمت (ب) سؤال قبل، اندازه هر یک از زاویه‌های دوازده ضلعی منتظم را حساب کنید.



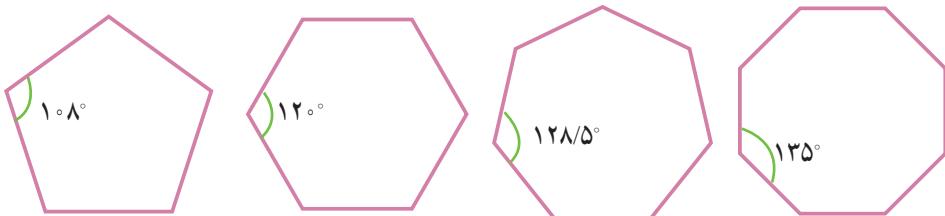
۳- سطح رو به رو با دو نوع کاشی منتظم، کاشی کاری شده است.

اندازه زاویه‌های هر دو نوع کاشی را محاسبه کنید.

۴- کاشی‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم داریم و می‌خواهیم سطحی را فقط با یک نوع از آنها کاشی کاری کنیم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که با سه ضلعی و چهارضلعی منتظم (یعنی مثلث متساوی الاضلاع و مربع) می‌توان کاشی کاری کرد.



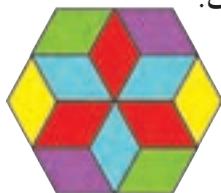
یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی کاری کرد.



تمرین



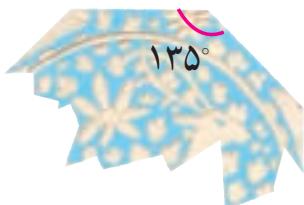
۱- اندازه هر یک از زاویه های یک بیست ضلعی منتظم را پیدا کنید.



۲- در کاشی کاری رو به رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است.

الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی ای است؟

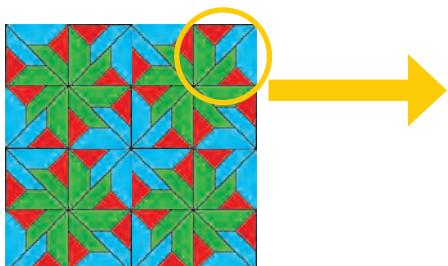
ب) اندازه هر یک از زاویه های آن چقدر است؟



۳- شکل رو به رو قسمتی از یک بشقاب قدیمی است.

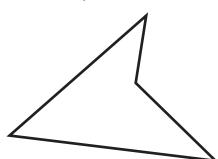
حدس می زنید این بشقاب چندضلعی بوده است؟ چرا؟

۴- به کاشی کاری زیر توجه کنید. این کاشی کاری با سه نوع کاشی مختلف انجام شده است.
شکل سمت راست، قسمتی از این طرح را به صورت بزرگ تر نمایش داده است. اندازه زاویه های مشخص شده را به دست آورید.

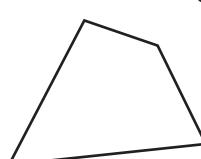


شکل سمت راست مربع است
و کاشی ها متساوی الساقین هستند.

۵- مجموع زاویه های داخلی هر شکل را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.



(ب)

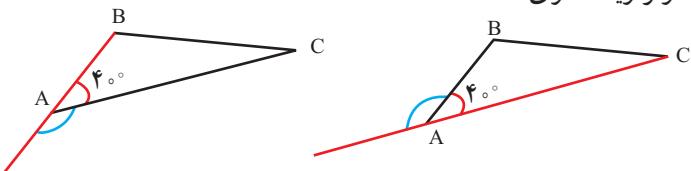


(الف)

فعالیت



در شکل سمت چپ، زاویه خارجی رأس A از مثلث ABC از امتداد یافتن ضلع AB تشکیل شده است. در شکل سمت راست، زاویه خارجی رأس A از امتداد یافتن ضلع AC تشکیل شده است. چرا این دو زاویه مساوی‌اند؟

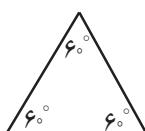
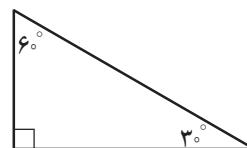
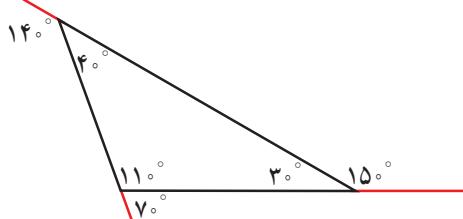


زاویه‌ای که در هر رأس یک چندضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود، **زاویه خارجی** آن رأس نامیده می‌شود.

کار در کلاس

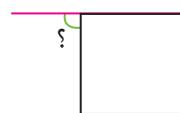
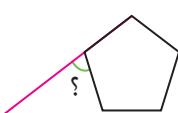


۱- (الف) مانند نمونه در هر یک از مثلث‌های زیر، زاویه خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه هر کدام را بنویسید.

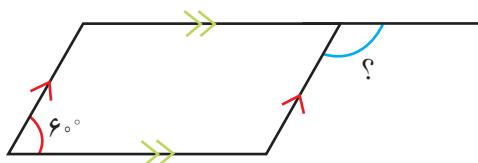
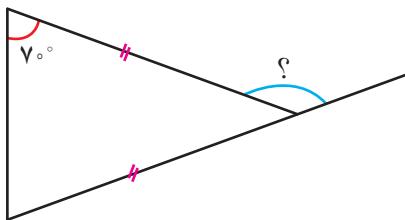


۲- (ب) مجموع زاویه‌های خارجی هریک از مثلث‌های پیدا کنید. چه رابطه‌ای میان آنها دیده می‌شود؟

۳- چندضلعی‌های زیر منتظم‌اند. اندازه زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید.



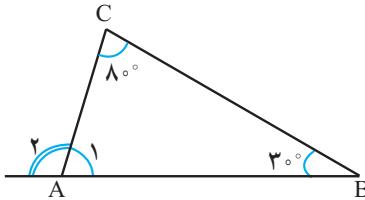
۴- با توجه به شکل، اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



فعالیت

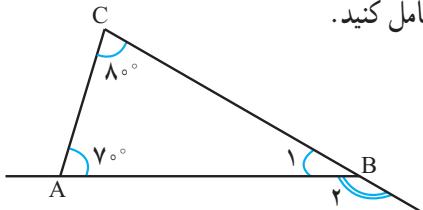


هدی برای یافتن زاویه خارجی یکی از رأس‌های مثلث به ترتیب زیر عمل کرد. راه حل او را کامل کنید.



$$\hat{A}_1 = 18^\circ - (3^\circ + 8^\circ) = 18^\circ - 11^\circ = 7^\circ$$

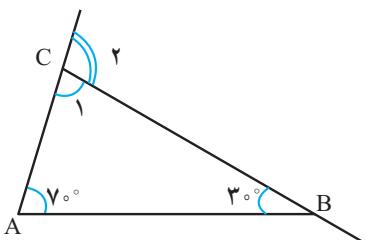
$$\hat{A}_2 = 18^\circ - 7^\circ = 11^\circ$$



$$\hat{B}_1 = 18^\circ - (\underline{\quad} + \underline{\quad}) = 18^\circ - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\hat{B}_2 = 18^\circ - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

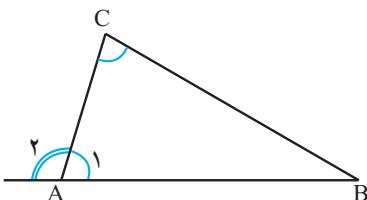
او رابطه جالبی را مشاهده کرد. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای؟ هدی با خودش فکر کرد: «آیا هر زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن مثلث است؟» با یک مثال دیگر حدس خود را بررسی کرد.



$$\hat{C}_1 = 18^\circ - (\underline{\quad} + \underline{\quad}) = 18^\circ - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\hat{C}_2 = 18^\circ - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

این آزمایش نیز حدس او را تأیید کرد. آیا حدس زدن و آزمایش کردن کافی است؟ چرا؟ یکی از دوستان هدی راه حل او را به صورت کلی و بدون درنظر گرفتن مثال نوشت تا به این ترتیب، درستی حدس او را اثبات کند.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 18^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 18^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

بنابراین در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است.

کار در کلاس



۱- مثالی بیاورید که نشان دهد جمله زیر، نادرست است.

«هر زاویه خارجی یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر آن است.»

۲- اندازه دو زاویه یک مثلث را می‌دانیم؛ پس می‌توانیم اندازه زاویه سوم آن را پیدا کنیم.
(چگونه؟)

برای اینکه بتوانیم اندازه همه زاویه‌های هر یک از شکل‌های زیر را پیدا کنیم، دست کم چندتا از آنها باید معلوم باشند؟
الف) لوزی ب) چهارضلعی با ضلع‌های نامساوی

فعالیت



۳۶° است.

سطر اول جدول زیر، نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر

تعداد ضلع‌ها	شکل	مجموع زاویه‌های داخلی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های خارجی
۳		$1 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$\underline{\quad} \times 180^\circ = 360^\circ$
۴		$2 \times 180^\circ$	$\underline{\quad} \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = \underline{\quad}$
۵		$\underline{\quad} \times 180^\circ$	$\underline{\quad} \times 180^\circ$	$\underline{\quad} \times 180^\circ = \underline{\quad}$
۶		$\underline{\quad} \times 180^\circ$	$\underline{\quad} \times 180^\circ$	$\underline{\quad} \times 180^\circ = \underline{\quad}$
n		$\underline{\quad} \times 180^\circ$	$\underline{\quad} \times 180^\circ$	$\underline{\quad} \times 180^\circ = \underline{\quad}$

- الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به دست آورید.
ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت‌ضلعی چند درجه است؟
یک هشت‌ضلعی چطور؟

کار در کلاس



۱- مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی‌های زیر را حساب کنید.

الف) هشت ضلعی منتظم

۲- به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل،

الف) اندازه هر زاویه خارجی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

ب) اندازه هر زاویه داخلی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

تمرین

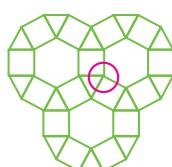
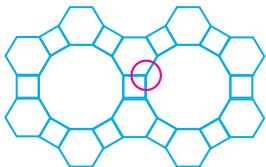


۱- زاویه‌های خارجی یک متوازی الاضلاع

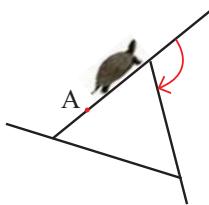
در شکل نشان داده شده‌اند.

زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

۲- هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه مشخص شده در هر شکل 36° درجه است.



۳- لاک پشتی روی لبه باغچه‌ای حرکت می‌کند. او در هر گوشه می‌چرخد و روی لبه بعدی قرار می‌گیرد.

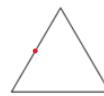


الف) این لاک‌پشت در هر گوشه به اندازه زاویه داخلی می‌چرخد یا زاویه خارجی؟

ب) او حرکتش را از نقطه A شروع کرده است.

تا وقتی دوباره به A برگردد، روی هم چند درجه می‌چرخد؟

ج) این لاک‌پشت برای یمودن محیط هر یک از باغچه‌های منتظم زیر با شروع از نقطه مشخص شده چند درجه می‌چرخد؟



د) در پاسخ قسمت قبل، چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید.

۳ مرور فصل

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- چندضلعی محدب
- چندضلعی مقعر
- مرکز تقارن
- چندضلعی منتظم
- زاویه داخلی
- زاویه خارجی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- پیدا کردن زاویه‌های مساوی و مکمل در خط‌های موازی و مورب
- بررسی مرکز تقارن یک شکل
- تعريف متوازی‌الاضلاع
- تعريف مستطیل
- تعريف لوزی
- تعريف مربع
- رابطه چهارضلعی‌ها
- خاصیت‌های چهارضلعی‌ها
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه خارجی یک رأس مثلث

کاربرد

این درس به شما در درک بهتر شکل‌های هندسی و رابطه بین آنها کمک می‌کند. ما در انواع صنایع دستی و آثار معماری کشور خود شکل‌های مختلف هندسی را می‌توانیم بینیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- هر خانه جدول زیر را با علامت \times یا \checkmark کامل کنید.

قطراها برابر	قطراها منصف	زاویه‌های رو به رو موازی	ضلع‌های رو به رو موازی	ضلع‌های رو به رو برابر	متوازی‌الاضلاع
					مستطیل
					لوزی
					مربع

۲- اندازه زاویه‌های داخلی و خارجی یک هشت ضلعی منتظم را پیدا کنید.

٤ فصل

جبر و معادله



اگر دو کفه یک ترازو روبروی هم قرار گیرند، می‌گویند ترازو در حال تعادل است. اگر از یک کفه ترازو چیزی را برداریم یا به آن چیزی اضافه کنیم، همین کار را باید در کفه دیگر نیز انجام دهیم تا جبران شود و ترازو در حالت تعادل بماند. کلمه جبر هم خانواده جبران نیز هست و معادله به معنی برقرار ماندن تعادل در دو طرف تساوی است.

ساده کردن عبارت‌های جبری



فعالیت

- ۱- در سال گذشته با درس توان آشنا شدید. عبارت‌های کلامی را به صورت جبری و عبارت‌های جبری را به صورت کلامی بنویسید.
- هر عدد به توان یک، برابر خود عدد می‌شود. $a^1 = a$
 - یک به توان هر عدد، برابر یک می‌شود. $1^a = 1$
 - در ضرب دو عبارت توان دار با پایه‌های مساوی، یک پایه را می‌نویسیم و توانها را با هم جمع می‌کنیم.
 - مرجع یا مجدد عدد $b^a \times c^a = (bc)^a$

۲- الف) در عبارت جبری $1 - 2n$ به جای n عده‌های طبیعی ($1, 2, 3, \dots$) قرار دهید و الگوی عددی متناظر را بنویسید.

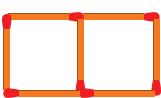
ب) در عبارت جبری $1 + 2m$ به جای m عده‌های حسابی ($1, 2, 3, \dots$) قرار دهید و الگوی عددی متناظر را بنویسید.

آیا دو الگوی عددی با هم تفاوت دارند؟

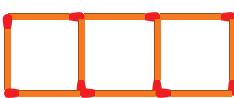
۳- شکل‌های زیر با چوب کبریت و با الگویی مشخص ساخته شده‌اند. شکل n ام با چند چوب کبریت ساخته می‌شود؟



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

در اینجا پاسخ چهار داش آموز را می‌بینید. توضیح دهید هر کدام از آنها پاسخ خود را چگونه به دست آورده است؛ سپس مانند نمونه‌ها، شکل‌هایی رسم کنید که روش ماهنوش را مشخص کند و بین شکل‌ها و عبارت‌های جبری رابطه برقرار کنید.

$$3n+1 : \text{پاسخ ماهرخ}$$

$$(n-1) \times 3 + 4 : \text{پاسخ ماهنوش}$$

$$1 + n + n + n : \text{پاسخ ماهرو}$$

$$n+1+(n \times 2) \leftarrow 2+(1 \times 2), 3+(2 \times 2), 4+(3 \times 2), 5+(4 \times 2) : \text{پاسخ مهتاب}$$

پاسخ‌های ماهنوش، ماهرخ و مهتاب را ساده کنید. آیا با پاسخ ماهرخ یکی هستند؟

آیا شما هم روشی برای شمارش چوب کبریت‌ها و یافتن جمله n ام دارید؟

کار در کلاس



۱- در سال گذشته، ضرب یک عدد را در پراتر با شکل زیر یاد گرفتید.

۵

$$5(a+b) = 5a + 5b$$

این تساوی چگونه به کمک شکل به دست آمده است؟ توضیح دهید.
عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$3(2x-1) + 2(x+3) = 6x - 3 + \underline{\quad} + \underline{\quad} =$$

$$-2(y-1) + 3(1-y) =$$

$$-(a-b+1) + 2(2a+b-3) =$$

۲- شما همچنین جمع و تفریق جمله‌های متشابه (جمله‌هایی که همه قسمت‌های حرفی آنها یکی هستند) را یاد گرفتید. جمله‌های متشابه را پیدا کنید.

$$3x^3y \quad 7yx^4 \quad 2yx \quad -5x \quad +5y \quad -3xy \quad +4x \quad y$$



۱- حاصل ضرب دو جمله را مانند نمونه به دست آورید. از کدام قانون ساده کردن عبارت‌های توان دار استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

$$(-3ba)(2a^3b^2) = -6a^4b^3 \quad axa^2=a^3 \quad bx^2=b^3$$

$$2a \times 3b = \quad -6a \times 2a^2 = \quad 4ba \times 3b^2 =$$

۲- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت‌ها در دو قسمت، یک تساوی جبری نتیجه بگیرید.

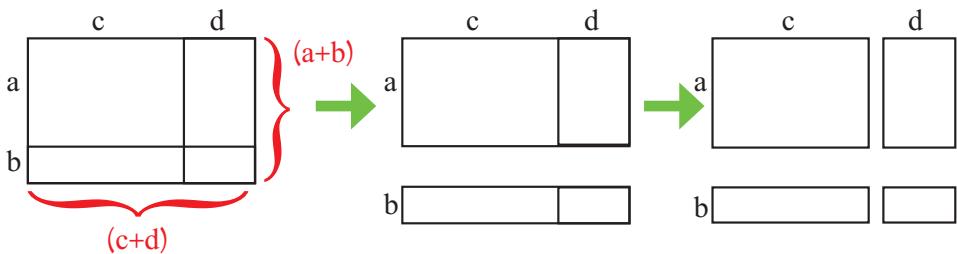
$$a(b+c) = \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

با توجه به نتیجه‌ای که گرفته‌اید، ضرب‌های زیر را انجام دهید.

$$2a(a+b) =$$

$$3x(2x-1) =$$

۳- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت‌ها در دو قسمت، تساوی جبری را کامل کنید.



$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

$$(a+b)(c+d) = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

برای یافتن حاصل ضرب دو عبارت جبری، باید جمله‌های دو عبارت را درهم ضرب و سپس ساده کنید.

$$(x+y)(x-y) =$$

$$(x-1)(x+1) =$$

$$(3x-2)(2x-3) =$$

کار در کلاس



۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$4ax+a^2+ax=$$

$$3ab+b^2-a^2-5ab=$$

$$2a-8xy+2xy=$$

$$9x+7x-8x-3+11x+5=$$

$$5(-2a)=$$

$$\frac{3}{2} (4b)=$$

$$(-7)(-4x)=$$

$$(-\frac{4}{5})(2y)=$$

$$3a(-5x)=$$

$$-\frac{1}{2} a(3b)=$$

$$(-a)(-b)=$$

$$(-a)(-a)=$$

$$7x(3a-b)=$$

$$3y(2x-5y)=$$

$$(x+2)(x+1)=$$

$$(a+6)(a-6)=$$

۲- عدد ۴۷ را می‌توان به صورت $40+7$ یا $10+7$ نوشت؛ به همین ترتیب، عده‌های زیر را

به صورت گسترده بنویسید.

$$92=$$

$$75=$$

$$33=$$

$$\overline{ab} = 10a + b$$

عدد دورقیم ab را با نماد \overline{ab} نمایش می‌دهیم؛ بنابراین :



تمرین

۱- عبارت جبری جمله n ام هریک از الگوهای عددی زیر را بنویسید.

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$1, 8, 27, 64, 125, \dots$$

۲- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+3)(a+3)$$

$$(a-b)(a-b) =$$

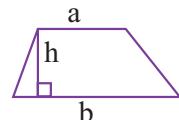
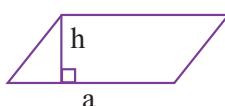
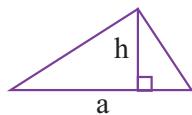
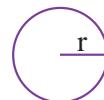
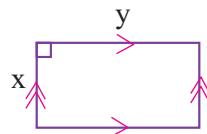
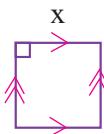
$$(a+3)(a-3) =$$

$$(a+b)(a-b) =$$

$$(x+y)(x+y) =$$

$$(2x-3y)(2x-3y) =$$

۳- مساحت هر شکل را با یک عبارت جبری بیان کنید.

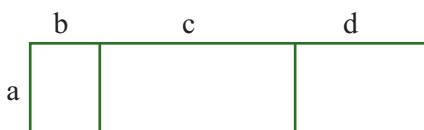


۴- دانش آموزی، عبارت‌های جبری زیر را نادرست ساده کرده است. اشتباه او را پیدا کنید.

$$\text{الف } a(b+c) = ab + c$$

$$\text{ب } 2x + 3y - (2x - y) = 2x + 3y - 2x - y = 2y$$

۵- با توجه به شکل، یک تساوی جبری بنویسید.



پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

فعالیت



۱- ماشین عددساز عدد ورودی را در عدد داخل ماشین ضرب می‌کند.
ماشین عددساز عدد ورودی را با عدد داخل ماشین جمع می‌کند. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید یا عدد داخل ماشین را بنویسید.

$$\text{خروجی} \rightarrow \times \quad \text{ورودی} : 4 \rightarrow \text{خروجی} : -21 \quad a + 4 = -21 \rightarrow \text{ورودی} : 7$$

$$\text{خروجی} \rightarrow \times \quad \text{ورودی} : 4 \rightarrow \text{خروجی} : -5 \quad \text{ورودی} : 0$$

$$\text{خروجی} \rightarrow \times \quad \text{ورودی} : b \rightarrow \text{خروجی} : 0 \quad \text{ورودی} : c$$

$$\text{خروجی} \rightarrow \times \quad \text{ورودی} : 8 \rightarrow \text{خروجی} : 13 \quad \text{ورودی} : 0$$

۲- خروجی یک ماشین را به ورودی یک ماشین می‌بندیم و یک ماشین ترکیبی می‌سازیم. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید.

$$\text{خروجی} : -5 \rightarrow \times \quad \text{ورودی} : x \rightarrow \text{خروجی} : 3x - 5 \quad \text{ورودی} : 3$$

$$\text{خروجی} : 8 \rightarrow \times \quad \text{ورودی} : x \rightarrow \text{خروجی} : -x \quad \text{ورودی} : 8$$

$$\text{خروجی} : 3 \rightarrow \times \quad \text{ورودی} : x \rightarrow \text{خروجی} : 3x \quad \text{ورودی} : 5$$

به این ترتیب، می‌توانیم عملکرد هر ماشین ترکیبی را به شکل خلاصه، مانند مثال زیر، بنویسیم:

$$\text{خروجی} : 4 \rightarrow \times \quad \text{ورودی} : x$$

عملکرد ماشین ترکیبی

$$y = 7x + 4$$

کار در کلاس



۱- عدد x به ماشین‌های زیر وارد، و عدد y از آنها خارج می‌شود. با توجه به کاری که

این ماشین‌ها انجام می‌دهند، عددهای خروجی را بنویسید.

$$-2 \longrightarrow \boxed{3x - 1} \longrightarrow$$

$$4 \longrightarrow \boxed{-2x + 1} \longrightarrow$$

$$\circ \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}x + 1} \longrightarrow$$

$$\frac{4}{\sqrt{ }} \longrightarrow \boxed{-\sqrt{x} + 2} \longrightarrow$$

۲- با توجه به جدول‌های زیر و رابطه x و y ، جاهای خالی جدول‌ها را پر کنید:

$$y = 3x + 1$$

x	y
1	
2	
5	

$$y = 5x$$

x	y
3	
-2	
-4	25

$$y = x - 7$$

x	y
4	
-2	
.	-14

$$y = 2x - 3$$

x	y
4	
-2	
.	5

۳- با توجه به عددهای ورودی و خروجی در هر ردیف، کاری را که ماشین انجام می‌دهد

حدس بزنید.

$$3 \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow 6 \text{ و } -7 \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow -14 \text{ و } 5 \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow 10 \quad y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow 8 \text{ و } 11 \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow 14 \text{ و } -4 \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow -1 \quad y = \underline{\hspace{2cm}}$$



۱- به عددهای زوج زیر توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید، هر عدد زوج را می‌توان

به صورت $n \times 2$ نشان داد.

2

4

6

8

10

↓

↓

↓

↓

↓

$$2 \times 1$$

$$2 \times 2$$

$$2 \times 3$$

$$2 \times \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2 \times \underline{\hspace{2cm}}$$

۲- عددهای زیر را به صورت $2n$ (یک عدد طبیعی باشد) نشان دهید.

۴۴

۸۰

۷۰۰

۱۰۰۰۰

۲۰۰۰

۳- در عبارت های زیر به جای حروف k , m و a عددهای طبیعی مختلفی قرار دهید. آیا

عددهای حاصل، زوج اند؟

$$2a$$

2×5

$$2m$$

$2 \times m$

$$2k$$

$2 \times k$

۴- a , b و c را عددهای طبیعی در نظر بگیرید و به سؤال های زیر پاسخ دهید :

- آیا عبارت $2b$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟

- آیا عبارت $4c$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟

- آیا عبارت $2ab$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟

۵- آیا حاصل ضرب هر دو عدد زوج عددی زوج است؟

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا مانند نمونه چند مثال بزنید.

$$4 \times 2 = 8$$

$$8 \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

برای اینکه بدون مثال و در حالت کلی اثبات کنیم که جمله بالا درست است، دو عدد زوج را

به صورت $2n$ و $2m$ در نظر می گیریم و حاصل ضرب آنها را می نویسیم.

$$2m \times 2n = 2(m \times 2 \times n)$$

چگونه این تساوی ثابت می کند که حاصل ضرب دو عدد زوج عددی زوج است؟ توضیح دهید.



مانند سؤال ۵ فعالیت بالا، ثابت کنید که حاصل ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی زوج است.

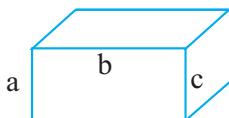
(الف) چند مثال بزنید.

$$2n = \text{عدد زوج}$$

$$1 - 2m = \text{عدد فرد}$$

$$2n \times (2m-1) = \text{حاصل ضرب عدد زوج در عدد فرد}$$

تمرین



۱- مساحت کل مکعب مستطیل روبه رو را به صورت جبری بنویسید.

اگر $a = 2$, $b = 6$ و $c = 3$ باشند، مساحت کل چقدر می شود؟

۲- مساحت قاعده منشوری 20 و ارتفاع آن 4 است. حجم این منشور را با نوشتن رابطه جبری حجم منشورها به دست آورید.

۳- قاعده های ذوزنقه ای 4 و 7 سانتی متر و ارتفاع آن 2 سانتی متر است. مساحت این ذوزنقه را پس از نوشتن رابطه جبری مساحت ذوزنقه حساب کنید.

۴- آیا $x = 2$ و $-2 = x$ پاسخ معادله $4x^2 = -2$ هستند؟ چرا؟

۵- طول یک لوله x متر است. طول لوله دیگر، y برابر لوله اول است. طول لوله دوم را به صورت جبری بنویسید.



۶- یک زمین والیبال مستطیل شکل، دارای x متر عرض و $2x$ متر طول است. مساحت این زمین را به صورت جبری نشان دهید. اگر عرض این زمین 9 متر باشد، مساحت آن چند متر مربع است؟

۷- در درس علوم یاد می گیرید که انرژی پتانسیل ذخیره شده در هر جسم از رابطه $U = mg \cdot h$ به دست می آید که در آن، U انرژی پتانسیل، m جرم جسم، g شتاب زمین و h ارتفاع جسم است. در صورتی که جسمی به جرم 25 کیلوگرم تا ارتفاع 4 متر بالا برود، مقدار انرژی پتانسیل آن را پیدا کنید. (شتاب زمین 10 فرض کنید).

۸- با توجه به رابطه x و y ، مقدار y را برای x های مختلف پیدا کنید.

$$y = x - 3$$

x	y
1	
.	
2	
-1	

$$y = -2x + 1$$

x	y
1	
.	
2	
-1	

$$y = x^2$$

x	y
2	
-2	
.	
-1	

فعالیت



۱- در دوره دستان یاد گرفتید که با تبدیل صورت و مخرج کسر به ضرب عدددها، می‌توان کسر را ساده کرد.

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

کسرهای زیر را مانند نمونه ساده کنید.

$$\frac{12}{18} =$$

$$\frac{15}{35} =$$

۲- بعضی از عبارت‌های جبری را نیز می‌توان به صورت ضرب دو یا چند عبارت نوشت:

$$a(b+c) = ab+ac$$

خاصیت توزیع پذیری

$$ab + ac = a(b + c)$$

تبدیل به ضرب) تجزیه کردن

با توجه به تساوی بالا، عبارت‌ها را به ضرب تبدیل کنید.

$$5ab + 8ac = a(\quad + \quad)$$

$$x + xy =$$

$$5ab + 3b =$$

$$3a + ab =$$

۳- برای تجزیه یک عبارت جبری، عامل یا بخش مشترک دو یا چند جمله را پیدا می‌کنیم و بیرون بر انتز می‌نویسیم. برای تشخیص قسمت مشترک، می‌توان عبارت‌ها را به صورت ضرب نوشت:

$$\begin{aligned} 6a^2b^3 + 9a^3b^2 &= 2 \times 3 \times a \times a \times b \times b \times b + 3 \times 3 \times a \times a \times a \times b \times b \\ &= 2 \times 3 \times a^1 \times b^1 \times b + 3 \times 3 \times a^1 \times b^1 \times a \end{aligned}$$

با توجه به تساوی بالا، عامل مشترک دو جمله عبارت جبری چیست؟

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله اول عبارت ساخته می‌شود؟

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله دوم عبارت ساخته می‌شود؟

حالا این تساوی را کامل کنید.

$$6a^2b^3 + 9a^3b^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

۴- با توجه به سؤال صفحه قبل، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$ab+ac=$$

$$ab-ac=$$

$$5ab+3abc=$$

$$6ab+3a^2=$$

$$4x^2y+6xy^2=$$

$$8x^2y^2-4xy^2=$$

۵- ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه و سپس آن را ساده کنید.

$$\frac{ab+ac}{ab-ac}=$$

($a \neq 0$, $b \neq c$)

$$\frac{a^2-a}{ab-b}=$$

($a \neq 1$, $b \neq 0$)

کار در کلاس



۱- عبارت‌های زیر را به ضرب تبدیل کنید.

$$x \times 2^a - y \times 2^a =$$

$$42xy^2 - 35x^2y^2 =$$

$$2^x \times 2^y - 2^x \times 2^z =$$

$$-a^2 + 2a^2 =$$

۲- با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج کسر را ساده کنید. ($a \neq b$, $ab \neq 0$)

$$\frac{a^2b - ab^2}{a^2b^2 - a^2b^3} =$$

۳- آیا تساوی $a-b = -(a+b)$ همواره برقرار است؟

۴- چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج می‌شود؟

$2n$: عدد زوج

$2m$: عدد زوج دیگر

$2n + 2m$: مجموع دو عدد زوج

خواندنی

خوارزمی در کتاب جبر و مقابله خود برای عده‌های علامت‌دار اصطلاحاتی به کار برده است؛ برای مثال ۵- را «پنج ناقص» و $+5$ را «پنج زاید» خوانده است. با اینکه در زمان خوارزمی کاربرد حروف متداول نبوده است، او در حل معادله‌های جبری، مجھول را «شیئی» و مجدور مجھول را «مال» نامیده است.

فَعْالِيَّةٌ



۱- تفاوت x^r و $2x$ چیست؟

$$x^r =$$

$$2x =$$

۲- مانند نمونه، طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.

$$3^r = 3 \times 3$$

$$(-5)^r = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$

$$a^r = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$

$$\square^r = \square \times \square$$

$$\triangle^r = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$

$$(a+b)^r = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$

۳- جدول زیر را برای مقدارهای مختلف a و b کامل کنید.

a	۱	۲	۰	۲	-۱
b	۱	۰	-۳	۴	-۲
$(a+b)^r$					
$a^r + b^r$					

از مقایسه دو ردیف آخر، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴- مانند نمونه، عبارت‌ها را ساده کنید.

$$(a+b)^r = (a+b)(a+b) = a^r + ab + ab + b^r = a^r + 2ab + b^r$$

$$(x-y)^r =$$

$$(2x+1)^r =$$

کار در کلاس



۱- مانند نمونه، تساوی‌ها را کامل کنید.

$$x^r = x \times x \times x$$

$$-x^r =$$

$$(-x)^r =$$

$$(a-b)^r =$$

$$(a+b)^r =$$

$$(x+1)^r =$$

۲- چرا $ba = ab$ است؟ (از کدام خاصیت ضرب استفاده می‌شود؟)

۳- عبارت زیر را ساده کنید.

$$-(a+b)^r =$$

آیا منفی به توان ۲ می‌رسد؟ چرا؟



تمرین

۱- آیا $b-a = -(a-b)$ است؟ چرا؟

۲- چرا مجموع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود؟

۳- مجموع دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد، زوج می‌شود یا فرد؟ چرا؟

۴- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+3)^2 =$$

$$(2x-3y)^2 =$$

$$(x+7)(x-7) =$$

$$a^2+b^2-(a-b)^2 =$$

۵- با توجه به پیکان‌های رسم شده، عبارت را ساده کنید.

$$(x-1)(x^2+x+1)$$

۶- نشان دهید که تفاضل هر عدد دو رقمی از مقلوبش، مضرب ۹ است.

۷- اگر دو پرانتز زیر را در هم ضرب کنیم، چند جمله خواهیم داشت؟ چرا؟

$$(a+b+c)(z+y+x)$$

خواندنی

خوارزمی

ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی حدود سال ۱۳۵ هجری قمری در شهر خوارزم (که امروز خیوه نامیده می‌شود) متولد شد. وی یکی از مفاخر علمی ایران و جهان و از بزرگ‌ترین دانشمندان مسلمان در قرن‌های گذشته است.

یکی از آثار خوارزمی کتاب جبر و مقابله است. این کتاب نخستین کتابی است که نام جبر را بر خود دارد. نام جبر به عنوان بخشی از ریاضی از نام این کتاب گرفته شده است. از این نظر، خوارزمی را می‌توان یکی از بنیان‌گذاران علم جبر دانست. امروز جبر به شاخه‌ای مهم از ریاضی گفته می‌شود.

کتاب حساب خوارزمی در قرن دوازدهم هجری به زبان‌های اروپایی ترجمه شد و به «الخورسیمی» یا «الگوریسمی» که از نام «الخوارزمی» گرفته شده بود، شهرت یافت. بعدها الگوریسم یا الگوریتم (Algorithm) به معنای فن محاسبه (یعنی حساب) به کار رفت. امروزه الگوریتم به روشهای محاسبه گفته می‌شود که در آن محاسبه مرحله به مرحله انجام می‌گیرد و محاسبه هر مرحله به مراحل قبلی بستگی دارد.

فعالیت

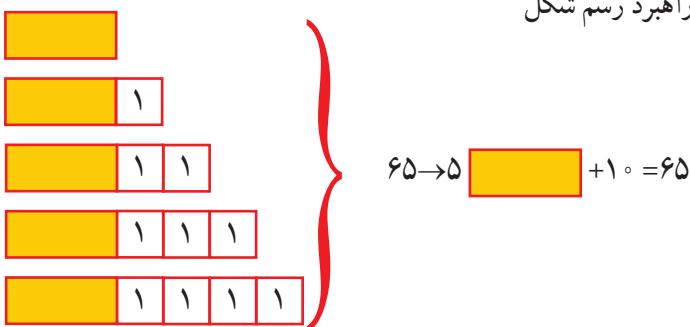


۱- حاصل جمع پنج عدد متوالی طبیعی ۶۵ شده است. عدد وسط چه عددی است؟
پنج دانش آموز این مسئله را با راهبردهای مختلف حل کرده اند. راه حل هر کدام را کامل کنید و توضیح دهید.

راه حل سمیه: راهبرد حدس و آزمایش

حاصل جمع	عدد پنجم	عدد چهارم	عدد سوم	عدد دوم	عدد اول
۲۵	۹	۸	۷	۶	۵
۴۵	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
۶۵	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱

راه حل فریده: راهبرد رسم شکل



راه حل فهیمه: راهبرد روش های نمادین

$$\textcircled{O} + (\textcircled{O} + 1) + (\textcircled{O} + 2) + (\textcircled{O} + 3) + (\textcircled{O} + 4) = 65$$

عدد وسطی را در تساوی بالا مشخص کنید.

راه حل مهدیه: راهبرد تشکیل معادله

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 65$$

$$5x + 10 = 65$$

راه حل فرشته: راهبرد تشکیل معادله

$$(x-2) + (x-1) + x + (x+1) + (x+2) = 65$$

تفاوت راه حل های فرشته و مهدیه را توضیح دهید.

۲- مهدیه با توجه به آنچه سال گذشته آموخته بود، معادله خود را به صورت زیر حل کرد:

$$\begin{aligned}
 & 5x + 1 = 65 \\
 -1 & \downarrow \\
 & 5x + 1 - 1 = 65 - 1 \\
 & 5x = 64 \\
 \times \frac{1}{5} & \downarrow \\
 & \frac{1}{5} \times 5x = \frac{1}{5} \times 64 \\
 & x = 11
 \end{aligned}$$

علم راه حل مهدیه را به صورت زیر خلاصه کرد. توضیح دهید در این روش معنی پیکان‌ها

چیست؟

$$5x + 1 = 65$$

$$5x = 65 - 1$$

$$5x = 64 \rightarrow x = \frac{64}{5} = 11$$

۳- با توجه به سؤال بالا، روش حل معادله را توضیح دهید؛ سپس معادله‌های دیگر را به همین

ترتیب حل کنید.

$$2x - 3 = x + 5$$

$$3x - 1 = x - 7$$

$$2(x-1) = 3(x+4)$$

$$2x - x = 5 + 3$$

$$x = 8$$

کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

$$5(x-2) = 8$$

$$x + 4 = 16$$

$$4x - 3 = 2x - 1 + 5x$$

$$1 - 2x = -(x-1) + 2$$

$$2(x-1) = 3(1-x)$$

$$2x - 3(1-x) = 0$$

فعالیت



۱- معادله زیر را دو دانش آموز حل کرده اند. راه حل آنها را توضیح دهید. ویژگی های هر کدام از روش هارا بگویید و در کلاس با یکدیگر در این باره گفت و گو کنید.

راه حل یگانه

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{6}$$

$$x = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{14}{6}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

راه حل یکتا

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$6 \times \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \right) = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$6 \times \frac{1}{2}x - 6 \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$3x - 2 = 5$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

چرا یکتا عدد ۶ را برای ضرب کردن انتخاب کرده است؟

۲- دو دانش آموز کسر $\frac{x+3}{2}$ - را به صورت زیر در ۶ ضرب کرده اند. کدام یک اشتباه کرده است؟ اشتباه او را توضیح دهید.

$$6 \times \left(-\frac{x+3}{2} \right) = -3x - 9$$

$$6 \times \left(-\frac{x+3}{2} \right) = -3x + 9$$

کار در کلاس



معادله های زیر را حل کنید.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$-\frac{6}{25}x - \frac{4}{15} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x+2}{3}$$

تمرین



۱- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$-\frac{3}{8}x + 5 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{12}x - \frac{7}{18} = 2$$

$$4x + \frac{2}{7} = \frac{3}{2}x$$

$$2x - \frac{2}{3} = 5x + 3$$

$$1 - \frac{x+1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2x-1}{4} = \frac{3}{4}$$

۲- عرض مستطیلی ۵ سانتی متر و محیط آن ۲۴ سانتی متر است. طول این مستطیل چقدر است؟

۳- هفت برابر عددی به اضافه ۴ مساوی ۵۸ است. آن عدد چند است؟

۴- حاصل جمع سه عدد متولی طبیعی ۲۷ شده است. کوچک‌ترین این عددها را پیدا کنید.

۵- از پنج برابر عددی ۳ تا کم کردیم، عدد ۱۷ به دست آمد. آن عدد چند است؟

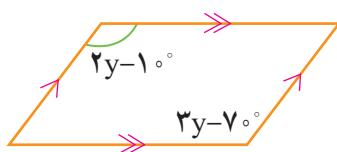
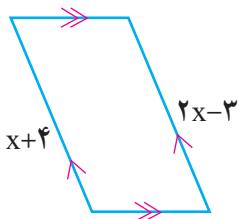
۶- اگر مربع عددی به آن عدد اضافه شود، عدد حاصل، ۴۲ خواهد بود. کدام یک از اندازه‌های زیر می‌تواند مقدار آن عدد باشد؟

الف) ۴۲ ب) ۱۴ ج) ۶ د) ۷ ه) ۵

۷- پدری ۴۵ سال دارد. دو فرزند او ۹ و ۱۴ ساله‌اند. پس از چند سال سن پدر با مجموع سن فرزندانش برابر می‌شود؟

۸- در درس علوم یاد گرفتید که کار انجام شده با مقدار نیرو در اندازه جابه‌جایی برابر است. این رابطه را با تساوی $W=F.d$ نشان می‌دهیم. اگر کار انجام شده ۱۲ و مقدار نیرو ۴ باشد، مقدار جابه‌جایی را حساب کنید.

۹- با توجه به شکل، معادله تشکیل دهید و مقدار مجھول را بیابید.



مرور فصل ۴

مفهوم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- جمله‌های متشابه
- معادله
- تجزیه کردن (تبديل به ضرب)

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند، با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- تبدیل عبارت جبری به عبارت کلامی و برعکس
- ساده کردن یک عبارت جبری با جمع جمله‌های متشابه
- ضرب جمله در پرانتز
- پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت
- تبدیل یک عبارت به ضرب
- بیان رابطه جبری برای الگوهای مساحت و محیط و...
- ضرب جمله در جمله
- ضرب پرانتز در پرانتز
- حل معادله‌های کسری

کاربرد

موضوعاتی این فصل علاوه بر کاربردهایی که در ریاضی دارد به شما در حل مسئله‌های روزمره نیز کمک می‌کند. شما با تشکیل معادله و حل آن می‌توانید مسائل زیادی را حل کنید؛ به همین ترتیب، می‌توانید در سایر درس‌ها، مثل علوم، نیز از رابطه‌ها و معادله‌های جبری استفاده کنید.

تمرین ترکیبی

۱- عبارت جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 =$$

مقدار عددی عبارت حاصل را به ازاء $a=2$ و $b=-2$ بدست آورید.

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$2x-1 = 3(x-1)$$

۵

فصل

بردار و مختصات



مقدمه
نحوه
۱۱

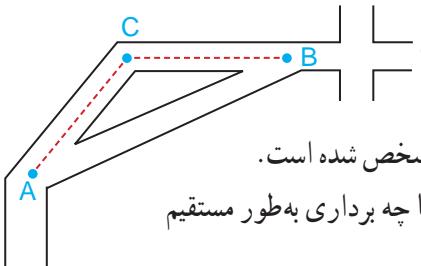
شتاب حرکت هر جسم در هر لحظه، همواره در جهت بردار برآیند نیروهای وارد بر آن است؛ برای مثال وقتی یک موشک شلیک می‌شود، نیروهای وارد بر آن عبارت اند از، نیروی وزن، نیروی پیشران، نیروی مقاوم هوا در راستای حرکت موشک (بسار) و نیروی برآر (عمود بر راستای حرکت) بهطوری که برآیند این نیروها باعث حرکت موشک می‌شود.

جمع بردارها

فعالیت



۱- شخصی در نقطه A استاده است.



مسیر حرکت او برای رسیدن به نقطه B در شکل مشخص شده است.

این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به طور مستقیم به نقطه B می‌رسد؟ آن را رسم کنید.

۲- روباتی فقط به صورت افقی یا عمودی حرکت می‌کند.



این روبات اکنون روی نقطه A است. با فرمان [۴۲] ابتدا

واحد به سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می‌کند. نقطه جدید را B نام‌گذاری کنید.

روبات ما با فرمان [۳۲] از B به نقطه C می‌رسد.

با چه فرمانی به طور مستقیم از نقطه A به C می‌رسد؟

۳- نقطه A ابتدا با بردار انتقال a به نقطه B و سپس با بردار انتقال b به نقطه C منتقل شده است. نقطه A با چه برداری به طور مستقیم به نقطه C منتقل می‌شود؟

نام آن را بردار c بگذارید. آیا می‌توانیم بگوییم بردار c کارِ دو بردار انتقال a و b را انجام می‌دهد؟
به بردار c بردار **برایند** یا **حاصل جمع** می‌گویند.

۴- مختصات بردارهای a و b و c را بنویسید. آیا بردار c با جمع دو بردار a و b برابر است؟ به ابتدا و انتهای بردارهای a و b توجه کنید.
برداری که از ابتدای a به انتهای b رسم می‌شود (بردار c) برابر است با.....

در فعالیت ۲ مشاهده کردید که نتیجه جمع دو بردار a و b، بردار c است؛ بنابراین، می‌توان یک

تساوی برداری به صورت $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ را نوشت.

با توجه به تساوی $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ می‌توان مختصات بردار c را از **تساوی مختصاتی** زیر به دست

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+t \end{bmatrix}$$

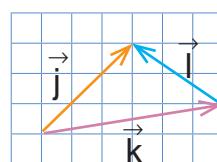
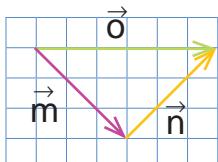
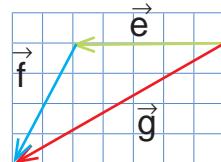
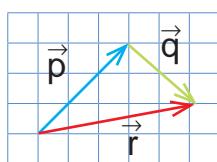
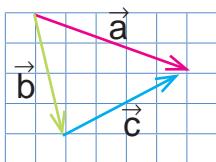
آورد:

کار در کلاس



در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد برای رسم حاصل جمع یا برایند این دو بردار می‌توانیم برداری از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کنیم.

ابتدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل جمع دو بردار دیگر است؛ سپس برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



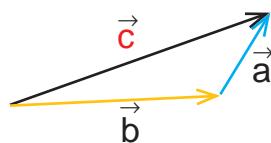
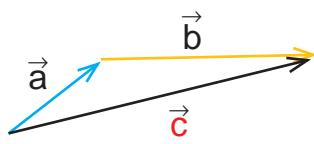
فعالیت ۵



- چهار بردار مساوی بردار a رسم کنید و مختصات همه بردارها را بنویسید.



- با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان از نقطه‌های شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل جمع بردارهای a و b را رسم کنیم. راه حل‌های این دو دانش آموز را توضیح دهید.



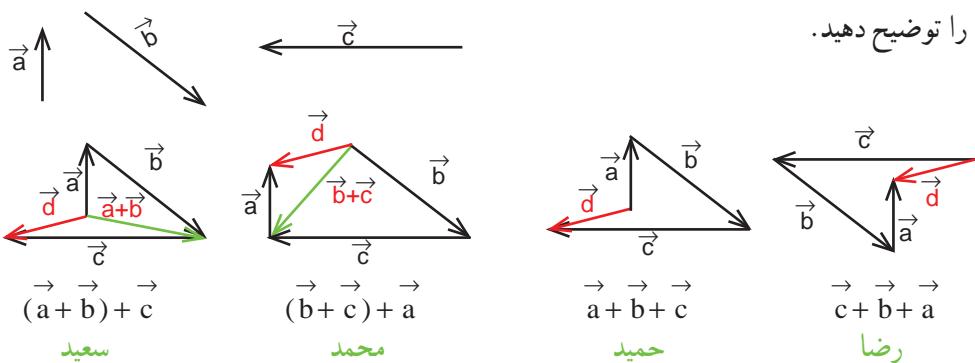
امیر

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

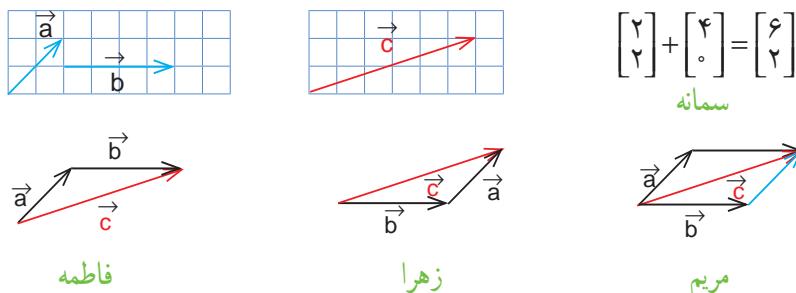
رضاء

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

۳- داش آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار، راه حل های زیر را ارائه کرده اند. هر کدام را توضیح دهید.



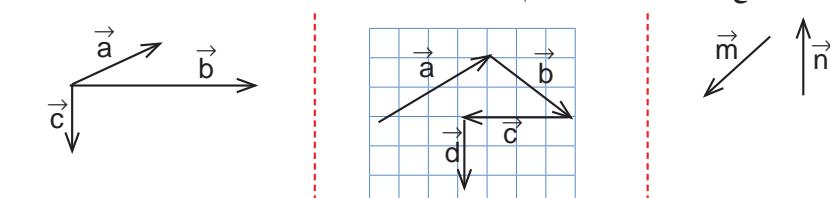
۴- راه حل های داش آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار a و b را مشاهده و مقایسه کنید.



کار در کلاس



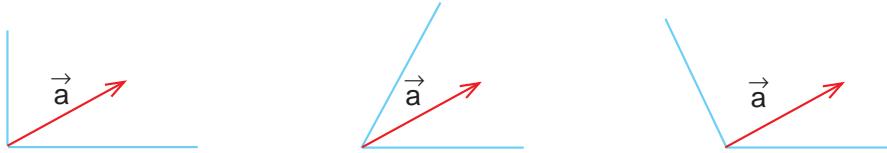
۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



۲- جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است.
بردار صفر را به صورت $\vec{0}$ نشان می دهیم و مختصات آن $[0, 0]$ است.
حاصل جمع بردارهای a , b و c چیست؟ چرا؟

۵ فعالیت

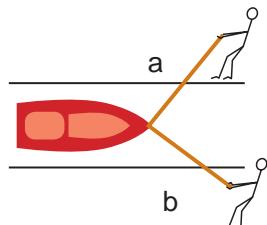
۱- دو بردار در راستاهای آبی رنگ رسم کنید که جمع آنها بردار a باشد. به این کار تجزیه بردار می‌گویند. چند پاسخ مختلف می‌توان به دست آورد؟ چرا؟



۲- مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، بنویسید.
پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر بنویسید. فکر می‌کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟

$$\boxed{\quad} + \boxed{\quad} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

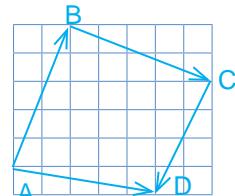
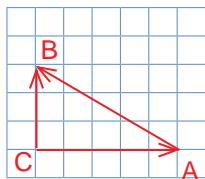
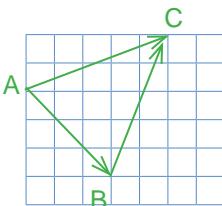
تمرین



- ۱- دو نفر در کتار رودخانه با دو طناب، قایقی را در خلاف جهت آب می‌کشند. (الف) قایق به کدام سمت حرکت می‌کند؟
ب) اگر نیروی a بیشتر باشد، قایق به کدام طرف متمایل می‌شود؟



۲- در هر شکل یکی از بردارها، حاصل جمع بردارهای دیگر است. برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



۳- در هر تساوی، x و y را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در بردار



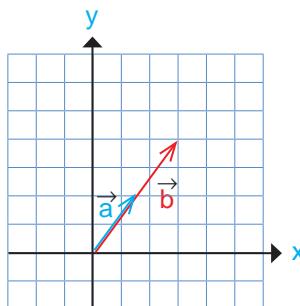
۱- در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده

رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کند،
بردار حرکت جدید را رسم کنید.



- ۲- دو نفر سعی می‌کنند جعبه روبه‌رو را بکشند
و به جای دیگری ببرند. نیروی که نفر اول وارد می‌کند با
بردار a و نیروی نفر دوم با بردار b نمایش داده شده است.
با توجه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول
است؟ چرا؟

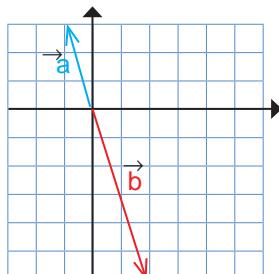
- ۳- در فعالیت‌های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازه آن،
چه نکاتی را رعایت کردید؟



- ۴- در هر شکل، مختصات بردارهای a و b را بنویسید.
رابطه دو بردار a و b را با یک تساوی برداری و یک تساوی
مختصاتی نشان دهید.

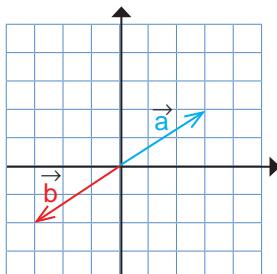
$$\vec{b} = 2\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$[\] = 2 \times [\]$$



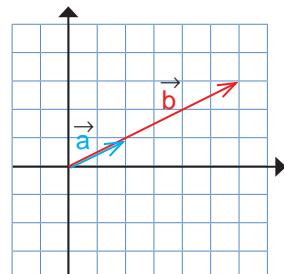
$$\vec{b} = -2\vec{a}$$

$$[\] = -2[\]$$



$$\vec{b} =$$

$$[\] = [\]$$



$$\vec{b} =$$

$$[\] = [\]$$

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.

بنابراین، می‌توانیم بنویسیم :

$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = -\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{b} = (-1)\vec{a}$$

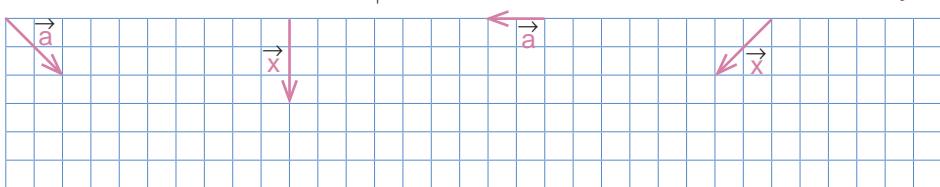
اگر بردار \vec{b} قرینه بردار \vec{a} باشد، می‌نویسیم :

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = -\vec{a} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

کار در کلاس



با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



$$\vec{b} = 3\vec{a}$$

$$\vec{y} = -2\vec{x}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

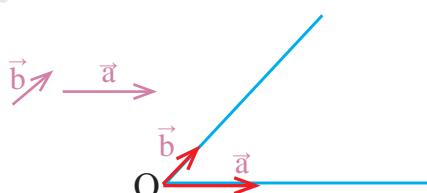
$$\vec{y} = -\frac{3}{2}\vec{x}$$

فعالیت ۵



۱- بردارهای \vec{a} و \vec{b} مفروض اند.

بردار $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ را رسم کنید.



از نقطه دلخواه O بردارهای $2\vec{a}$ و $3\vec{b}$ را رسم کنید؛ سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.

۲- بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

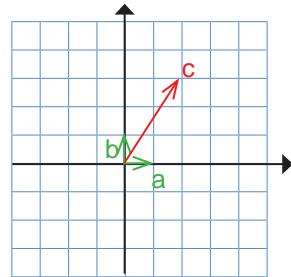
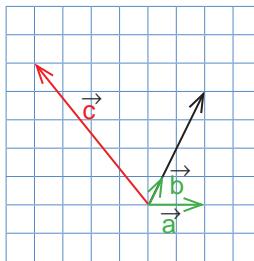
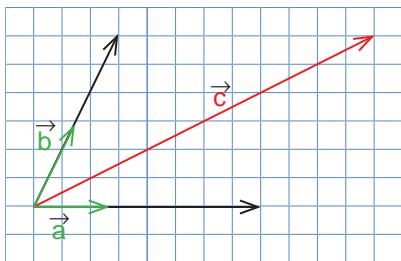
$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{a} + (-3\vec{b})$$

$$\vec{x} \quad \vec{y} \quad \vec{z} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$$

کار در کلاس

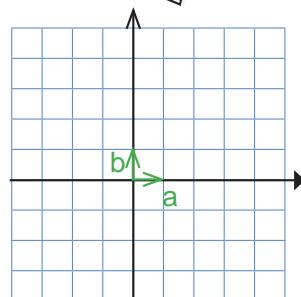
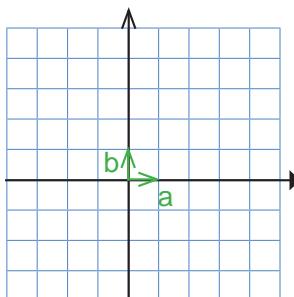
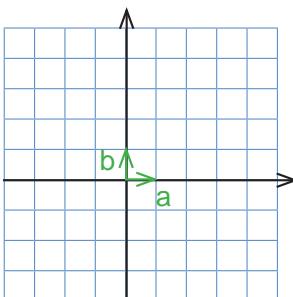


در هر شکل، بردار c را برحسب بردارهای a و b بنویسید.



تمرین

۱- با توجه به بردارهای a و b ، بردارهای c و d را رسم کنید.



$$\vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{d} = (-2)\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -4\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -\vec{a} + 5\vec{b}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-1)\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$(-4)\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

۳- معادله‌های مختصات زیر را حل کنید.

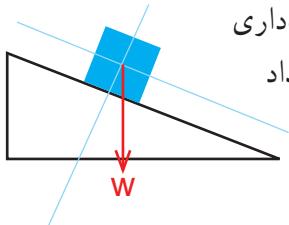
$$4x = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$-3x = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

۴- در شکل رو به رو، نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم شده تجزیه کنید.



۵- با توجه به بردارهای a و b ، مختصات بردار c را به دست آورید.

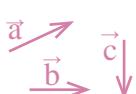
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$$

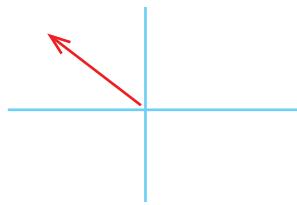
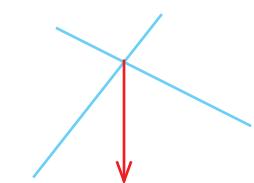
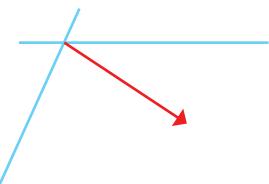
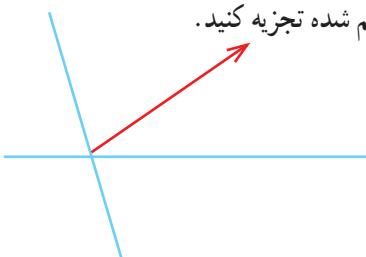
۶- با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$

۷- بردارهای داده شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.



فعالیت



۱- برای اندازه‌گیری هر یک از مقدارهای زیر از چه واحدی استفاده می‌کنیم؟



زمان :



زاویه :



دما :



جرم :

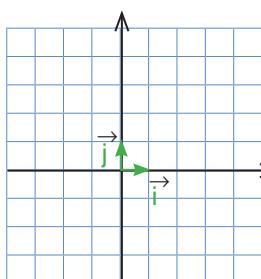


طول :

۲- در محور زیر، واحد را نشان داده‌ایم. عددهای ۲ و ۱- را روی محور مشخص کنید.



۳- همان‌طور که ملاحظه کردید برای اندازه‌گیری و نمایش عده‌ها روی محور به واحد نیاز داریم. برای نمایش بردار نیز به واحد نیازمندیم. این واحد باید از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه مختصات با دو محور نمایش داده می‌شود به واحد روی هر دو محور نیاز داریم. در شکل رویه‌رو، **بردارهای واحد** روی هر دو محور مشخص شده‌اند.



- مختصات بردارهای واحد را بنویسید.
- بردار $\vec{j} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ را رسم کنید.

- مختصات بردار a را بنویسید.

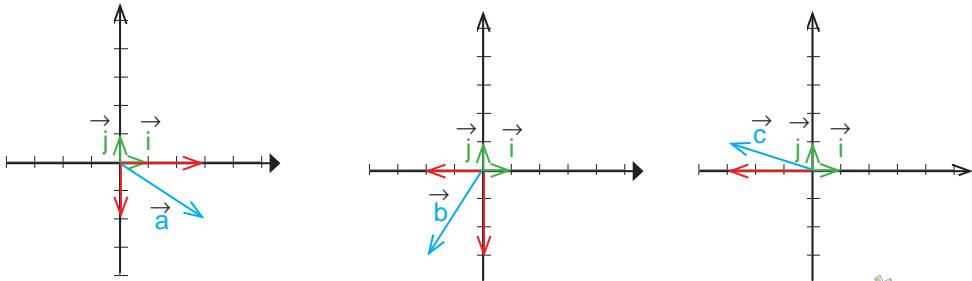
- مختصات بردار a را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 4 \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} =$$

کار در کلاس



در هر قسمت، بردار داده شده را بر حسب \vec{i} و \vec{j} و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.



فعالیت



۱- طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} =$$

$$2\vec{i} - 3\vec{j} =$$

$$3\vec{i} =$$

۲- دو دانشآموز، معادله برداری زیر را حل کرده‌اند. مراحل را هم مقایسه کنید.

راه حل حمید

$$\vec{2i} + \vec{j} + \vec{2x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{i} + \vec{j} + \vec{2x} = -5\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{2x} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{2x} = -8\vec{i}$$

$$\vec{x} = -4\vec{i}$$

راه حل سعید

$$3\vec{i} + \vec{j} + \vec{2x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{2x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{2x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{2x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳- معادله‌های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

$$\vec{2i} - \vec{j} + \vec{3x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \vec{2x} = \vec{i} - \vec{j}$$

کار در کلاس



اگر $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای x و y را به دست آورید.

$$\vec{x} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{y} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$$

تمرین

۱- طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} -5 \\ \circ \end{bmatrix} =$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = -2\vec{j}$$

۲- دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.

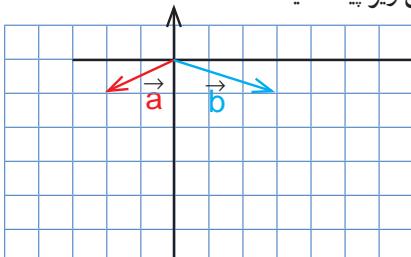
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۳- با توجه به شکل زیر، مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید.



الف) رسم شکل و نوشتن مختصات \vec{c} از روی شکل

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ب) پیدا کردن مختصات \vec{a} و \vec{b} و قرار دادن آنها در
تساوی زیر.

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های هر روش را بیان کنید.

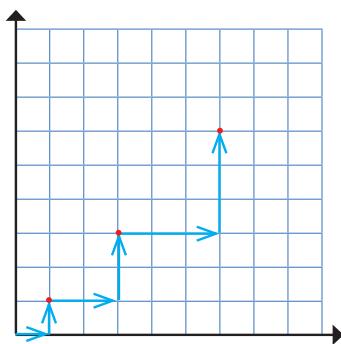
کدام روش برای رایانه‌ای شدن مناسب‌تر است؟ چرا؟

۴- با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

طول	+	-	+	-
عرض	+	+	-	-
شکل تقریبی				

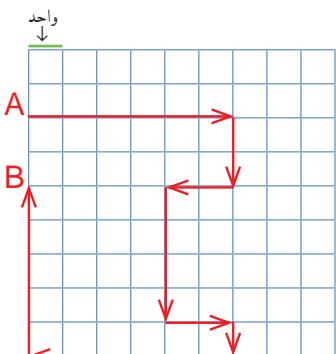
۵- اگر $\vec{j} = \vec{a} - \vec{b}$ باشد، بردار x را از معادله زیر پیدا کنید.

$$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b}$$



۶- یک روبات برنامه‌ریزی شده به صورت زیر از مبدأ مختصات حرکت می‌کند.
با مشاهده سه حرکت اول این روبات، الگویی برای حرکت آن کشف کنید و توضیح دهید. روبات پس از حرکت پنجم به کدام نقطه می‌رسد؟

۷- حمیده با خود فکر می‌کرد که اگر چند بردار با هم جمع شوند، بردار حاصل جمع از همه آنها بزرگ‌تر است. آیا او درست فکر کرده است؟ با کشیدن شکل توضیح دهید.



۸- در صفحه شطرنجی زیر، یک خودرو با نقطه A مشخص شده است. این خودرو مسیری را طی کرده است تا به نقطه B برسد؛ در کل به اندازه چند واحد حرکت کرده است؟

خودرو از نقطه A به B در راستای عمودی چند واحد جابه‌جا شده است؟

مرور فصل ٥

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود آنها را توصیف کنید و برای هریک مثالی بزنید.

- جمع (پرایند) بردارها
 - تجزیه بردار
 - ضرب عدد در بردار
 - پردازهای واحد مختصات

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه‌ای از درس را بنویسید.

- پیدا کردن جمع دو بردار
 - نوشتن جمع برداری و جمع مختصاتی
 - رسم بردارهای ترکیبی که شامل حاصل جمع مضرب های دو بردارند.
 - پیدا کردن مختصات بردارهای ترکیبی
 - نوشتن مختصات بردار با بردارهای واحد مختصات
 - تجزیه یک بردار روی دو امتداد
 - نمایش بردارهای واحد مختصات به صورت مختصاتی
 - حل کردن معادله های شامل بردار

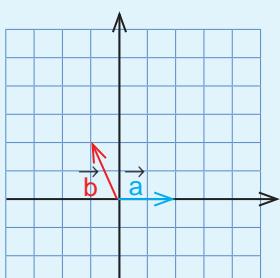
کاربرد

موضوعات این فصل در درس‌های علوم (فیزیک – مکانیک) شما کاربرد زیادی دارد؛ ضمن آینکه در شاخه‌ای از ریاضیات به نام «جبر خطی و فضای برداری» نیز مطرح می‌شود و به کمک آن می‌توانید مسائل مختلف ریاضی و فیزیک را حل کنید.

تمرین‌های ترکیبی

- ۱- با توجه به بردارهای a و b ، بردار $d = 2a - b + 3c$ را رسم کنید.

۲- اگر $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار $x = i - j$ را پیدا کنید.



$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

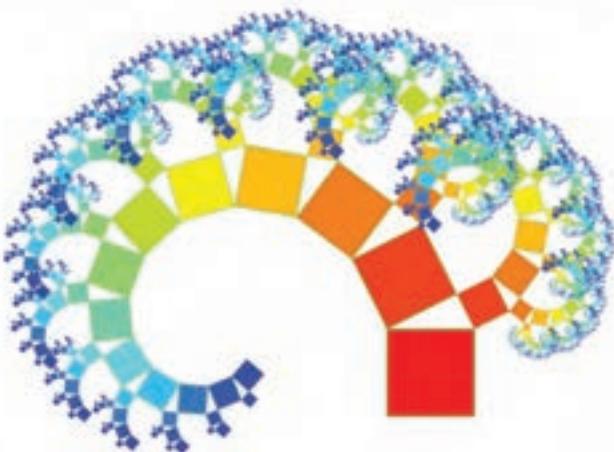
۳- با توجه به شکا، مختصات پرداز، اسدا کند.

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

٦ فصل

مثلث

قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقُ .. (سورة عنکبوت، آیه ۲۰)

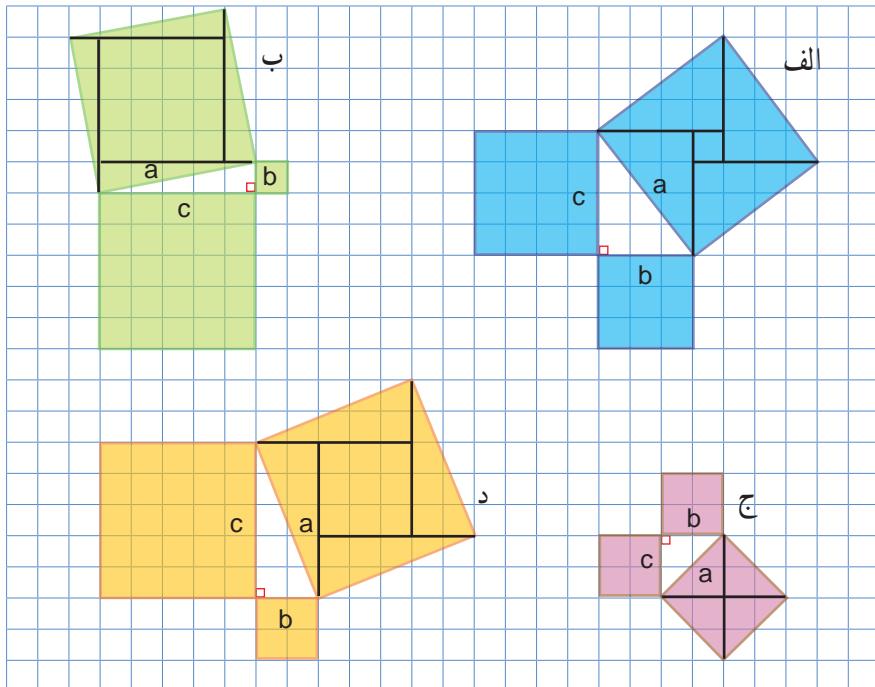


خداؤند در جهان هستی، نشانه‌هایی آفریده، و همواره تفکر و تعقل درباره آنها را از انسان خواسته است.

فعالیت



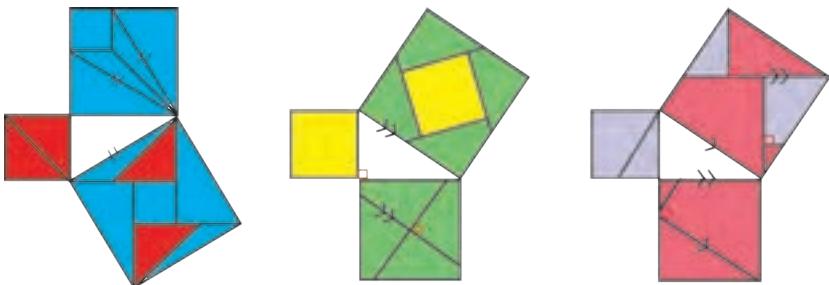
۱- روی هر ضلع مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر یک مربع رسم کرده‌ایم. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع‌های ساخته شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.



مساحت مربع ساخته شده روی ضلع $c^2 : c^2$	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع $b^2 : b^2$	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع a^2 (وتر)	
۱۶	۹	۲۵	الف
			ب
			ج
			د

چه ارتباطی بین عددهای هر سطر می‌بینید؟

۲- به هر یک از شکل‌های زیر با دقت نگاه کنید. در هر شکل، روشی برای نمایش دادن رابطه میان مساحت مربع‌های تشکیل شده روی ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه آمده است. شما هم روی کاغذ، یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی تشکیل دهید؛ سپس با استفاده از یکی از این روش‌ها مربع‌های ساخته شده روی دو ضلع کوچک آن را طوری به قطعه‌های کاغذی تقسیم کنید که بتوان با این قطعه‌ها مربع روی وتر را کاملاً پوشاند.

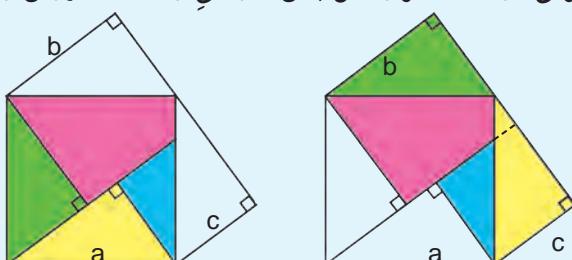


رابطه میان مجذور (مربع) اندازه ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه به رابطه **فیثاغورس** معروف است. این رابطه بیان می‌کند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

عکس این رابطه هم درست است یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

خواندنی ابوالعباس نیریزی، ریاضی‌دان ایرانی در حدود هزار سال پیش، درستی رابطه فیثاغورس را به صورت زیر نشان داد.

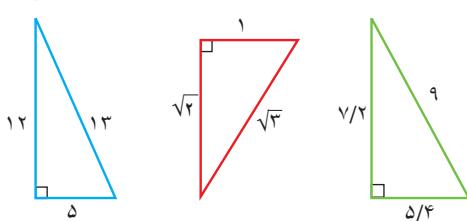


در شکل، چهار مثلث قائم‌الزاویه هم نهشت^۱ دیده می‌شود.

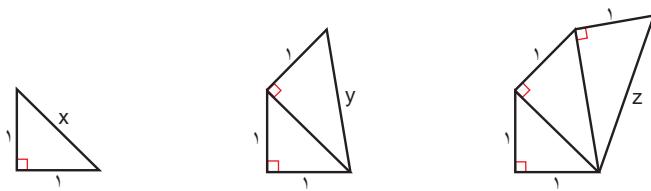
در سمت راست، مساحت دو مربعی را که روی ضلع‌های زاویه قائمه مثلث ساخته شده‌اند و در سمت چپ، مربعی را که روی وتر ساخته شده است، رنگ کرده‌ایم. چرا مساحت ناحیه رنگی در این دو شکل برابر است؟

۱- تعریف هم نهشتی در صفحه ۸۸ داده شده است.

کار در کلاس



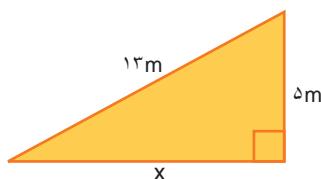
۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه رو به رو بررسی کنید.



فعالیت



۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را مانند نمونه پیدا کنید.



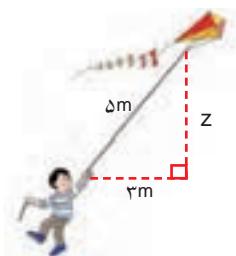
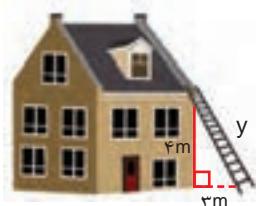
$$13^2 = x^2 + 5^2$$

$$169 = x^2 + 25$$

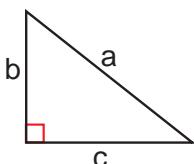
$$x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$x = \sqrt{144}$$

$$x = 12$$



۲- تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید.

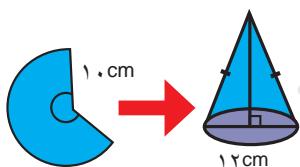


$$a^2 = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b^2 = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c^2 = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}$$

کار در کلاس



۱- علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع 10° سانتی‌متر، مخروطی به قطر قاعدة 12 سانتی‌متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

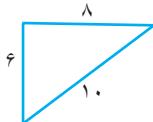
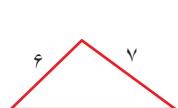


۲- معلم ریاضی از داشن آموزان خواست پاره خطی به طول $\sqrt{10}$ سانتی‌متر رسم کند. در اینجا پاسخ سه داشن آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و درباره ویژگی‌های آنها گفت و گو کنید. کدام داشن آموز از روش هندسی و کدام یک از روش حسابی استفاده کرده است؟

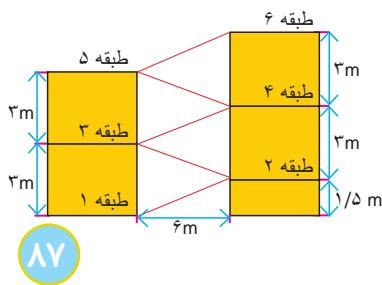
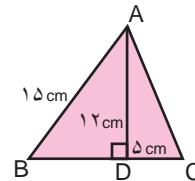
مهسا :	سیما :	زهرا :
به کمک ماشین حساب $\sqrt{10} = 3.16$ را حساب می‌کنم. حالا به کمک خط کشی یک پاره خط به طول تقریباً $\frac{3}{10}$ سانتی‌متر رسم می‌کنم.	مشابه قائم الزاویه با ضلع‌های 1 و 3 سانتی‌متر رسم می‌کنم. $1^2 + 3^2 = 10$. سپس وتر آن 10° سانتی‌متر خواهد شد.	به همین ترتیب، ساختن مثلث‌های قائم الزاویه را ادامه می‌دهم تا 10° ساخته شود.

تمرین

۱- کدام مثلث قائم الزاویه است؟



۲- محیط مثلث ABC را حساب کنید.



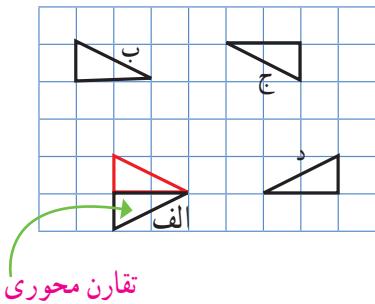
۳- شکل رو به رو نمایی از یک توقفگاه طبقاتی را نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه بعدی می‌رساند، چقدر است؟

شکل‌های همنهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بیوشناند، می‌توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر **هم‌نهشت**‌اند.



فعالیت ۵

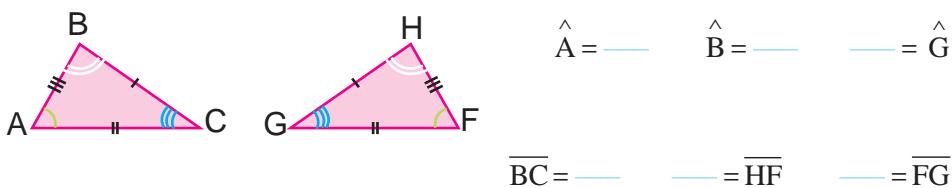


تقارن محوری

- در شکل روبرو، مثلث‌های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده‌اند و با آن هم‌نهشت‌اند. مانند نمونه مشخص کنید از کدام یک تبدیل‌های انتقال، تقارن یا دوران استفاده شده است. ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی در این پنج مثلث را با علامت گذاری روی شکل نشان دهید.

$$\triangle ABC \cong \triangle GHF$$

- این دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند: پس اجزای متناظر آنها نیز با هم مساوی هستند. با توجه به علامت‌های روی شکل‌ها، تساوی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر این دو مثلث را کامل کنید.

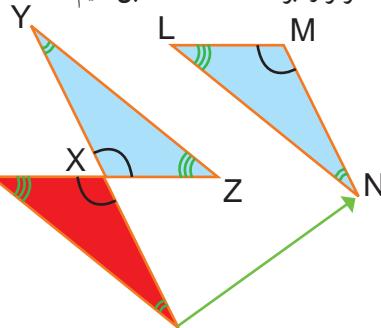


- مثلث‌های XYZ و LMN با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. می‌خواهیم بینیم مثلث XYZ با چه تبدیل یا تبدیل‌هایی بر مثلث LMN منطبق می‌شود. راه حل دو داش آموز در اینجا آمده است.

شما هم راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید و آن را توضیح دهید؛ سپس راه حل خود را با راه حل‌های دوستانتان مقایسه کنید. خوب است بدانید که راه حل‌های درست‌بی‌شماری برای این مسئله وجود دارد.

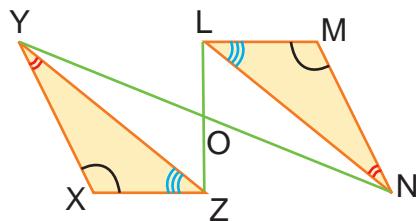
راه حل حامد:

با یک دوران 180° حول نقطه X می‌توانیم مثلث XYZ را بر مثلث قرمز رنگ منطبق کنیم و سپس با یک انتقال، مثلث قرمز را بر مثلث LMN منطبق کنیم.

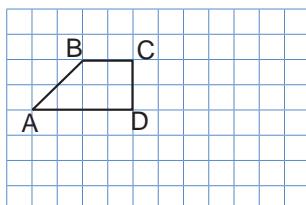


راه حل محمد:

با یک دوران 180° حول نقطه O می‌توان مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کرد.



کار در کلاس



۱- تصویر ذوزنقه ABCD را پس از دوران 180° حول

نقطه D رسم کنید و آن را $A_1B_1C_1D_1$ بنامید.

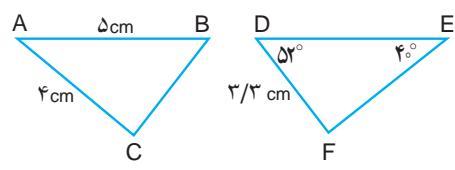
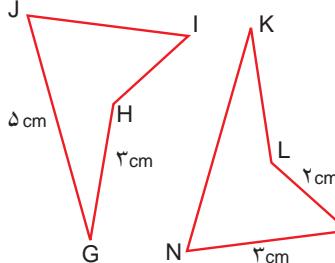
سپس آن را با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ انتقال دهید.

شکل جدید را نام‌گذاری کنید و عبارت همنهشتی شکل‌ها را کامل کنید.

$$ABCD \cong \underline{\hspace{2cm}} \cong \underline{\hspace{2cm}}$$

۲- با توجه به همنهشتی شکل‌های هر قسمت در صورت امکان اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر

را پیدا کنید و بنویسید.

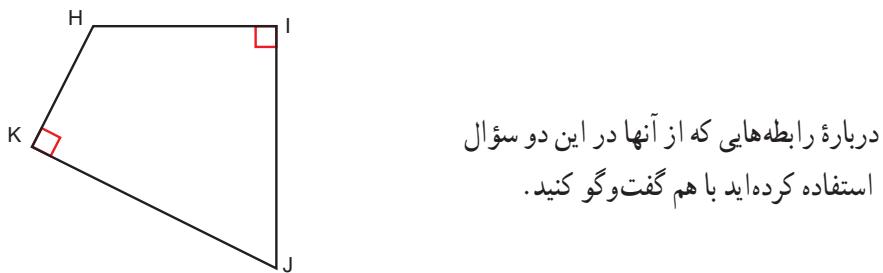
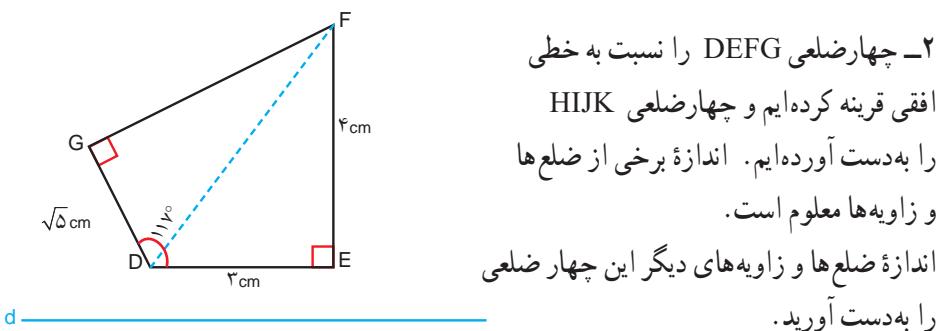
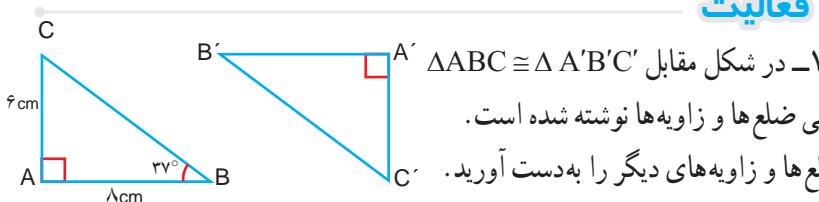


۳- دیوارهای کنار پل از مثلث‌های قائم الزاویه همنهشت ساخته شده‌اند.

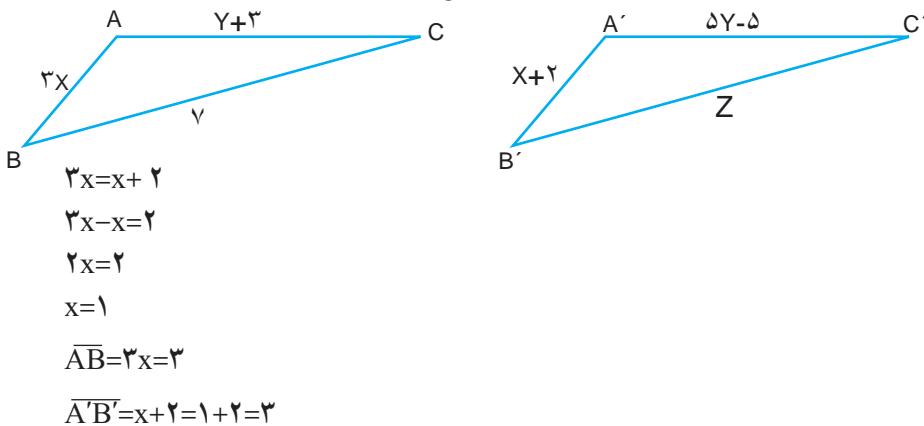


زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید و اندازه هر یک از زاویه‌های یکی از مثلث‌ها را بنویسید.

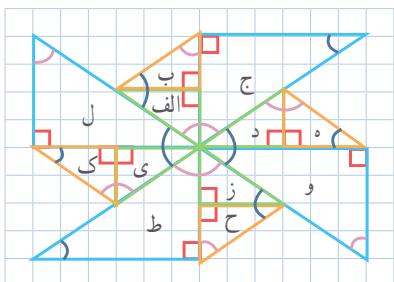
فعالیت



۳- مثلث ABC را می توان با انتقال بر مثلث $A'B'C'$ منطبق کرد.
مانند نمونه با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع های مثلث ها را به دست آورید.



تمرین



دوران 180°
(الف) \leftarrow (د)

تقارن (ب) \leftarrow (د)
(الف) \leftarrow (ب)

۲- سازه‌های مثلثی که در این پل به کار رفته‌اند، توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری



زیادی را دارند و مانع خمیدگی پل می‌شوند.

می‌دانیم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$
الف) کدام زاویهٔ مثلث ABC رویه روی ضلع BC است؟

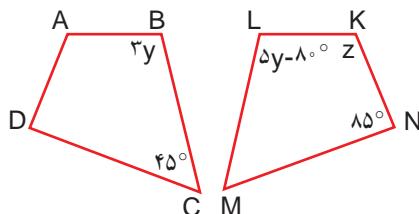
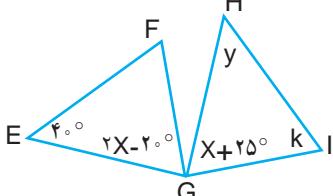
ب) کدام زاویهٔ مثلث BCD رویه روی ضلع BC است؟

ج) مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق می‌کنیم. کدام زاویهٔ این مثلث با زاویهٔ A متناظر است؟

۳- زاویه‌های مجھول را بیابید.

الف) مثلث HIG حاصل دوران 90° درجهٔ EFG حول نقطه G است.

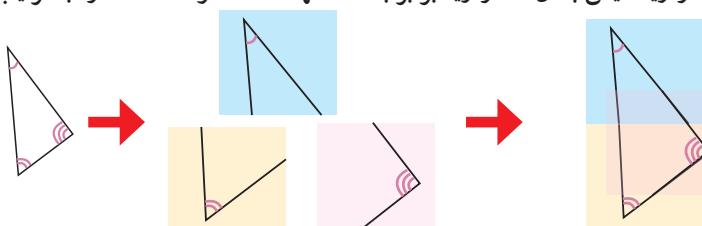
ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



۵- مثلث های هم نهشت



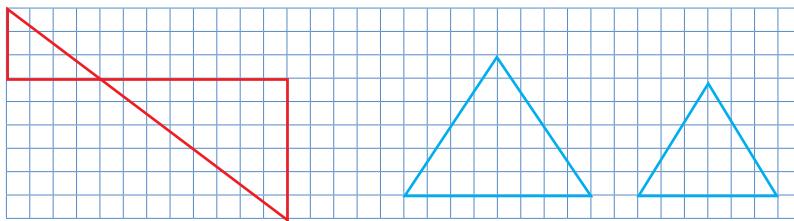
آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت‌های هندسه بودند. معلم ریاضی، مثلث روی کاغذ رسم کرد؛ سپس، تصویر **زاویه‌های آن** را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به کمک هم مثلثی بسازند که زاویه‌هایش با آن سه زاویه برابر باشد. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب رویه رو ساختند.



فکر می‌کنید مثلثی که آنها ساخته‌اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم نهشت است؟ آیا آنها می‌توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم نهشت باشد؟



۱- زاویه‌های مساوی را در هر قسمت علامت‌گذاری کنید.



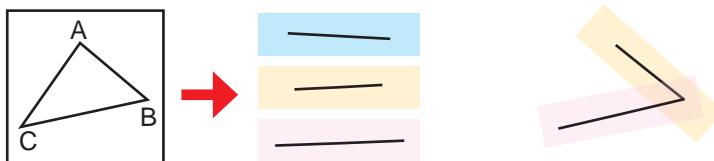
این دو مثلث قائم الزاویه‌اند.

این دو مثلث متساوی الاضلاع‌اند.

۲- شکل‌های سوال قبل را نام‌گذاری کنید و تساوی زاویه‌ها را بنویسید.

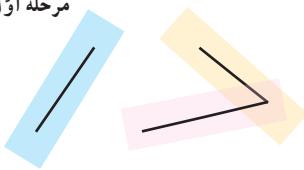


۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر **ضلع‌های آن** را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن گاه از بچه‌ها خواست مثلثی بسازند که ضلع‌هایش با این سه ضلع برابر باشد.

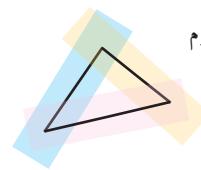


سامان مثلث مورد نظر را به این ترتیب ساخت:

مرحله اول



مرحله دوم

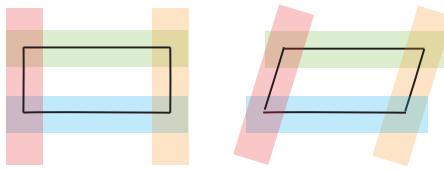


آرمان مطمئن بود مثلثی که سامان ساخته با مثلث معلم ریاضی هم نهشت است. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره آن فکر کنید.

۲- سامان پرسید: «فکر می کنی اگر ضلع های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل حتماً با یکدیگر هم نهشتند؟»

آرمان گفت: «نه، من می گویم اگر ضلع های دو مثلث با هم مساوی باشند، آن دو مثلث حتماً با یکدیگر هم نهشتند؛ مثلاً این دو چهارضلعی را ببین؛ با اینکه ضلع هایشان مساوی است با یکدیگر هم نهشت نیستند.»

سپس با کاغذ بسته، دو چهارضلعی زیر را ساخت و به سامان نشان داد.

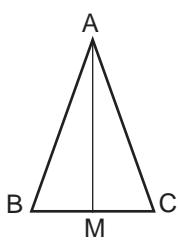


کار در کلاس



۱- در شکل زیر نقطه M وسط BC است. مثلث ABC متساوی الساقین است. پاره خطی مانند AM را، که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می کند، میانه می نامیم. عبارت های زیر را کامل کنید و نشان دهید چرا ضلع های دو مثلث ایجاد شده با هم برابرند.

چون ساق های مثلث متساوی الساقین ABC هستند.



$\overline{BM} = \overline{CM}$

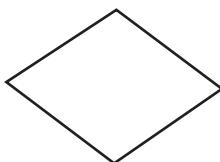
هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید.

۲- (الف) لوزی مقابل را نام گذاری، و یکی از قطرهای آن را رسم کنید.

(ب) دلیل تساوی ضلع های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید.

(ج) زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.



فعالیت ۵



مثلثی رسم کنید.

سپس دو ضلع آن و زاویه

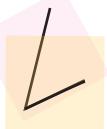
بین آن دو ضلع را روی سه برگ
کاغذ پوستی بکشید.

اکنون سعی کنید مثلثی بسازید که دو ضلع آن با این
دو ضلع برابر باشد و زاویه بین این دو ضلع هم
برابر زاویه رسم شده باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

آیا با این شرایط می توانید مثلثی بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

مرحله اول



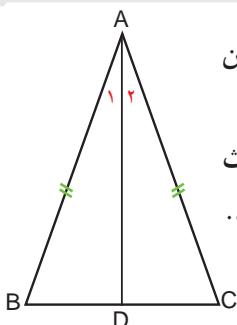
مرحله دوم



کار در کلاس



در شکل مقابل، نیمساز زاویه روبرو به قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین
ABC را رسم کرده‌ایم.



عبارت‌های زیر را کامل کنید و به کمک آنها نشان دهید دو مثلث
WDC با هم هم نهشت هستند و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند.

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 ; \text{ چون } AD \text{ نیمساز است.}$$

AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید.

فعالیت ۵

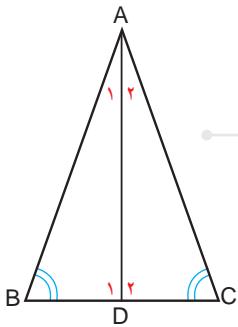


مثلثی رسم کنید و این بار دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید.

سعی کنید مثلثی بسازید که دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در آن با مثلث اولیه مساوی باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

آیا می توانید مثلثی با همین شرایط بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟



کار در کلاس



در شکل مقابل، زاویه‌های B و C با هم برابرند و نیمساز زاویه A را رسم کرده‌ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم نهشت هستند و دو ضلع AB و AC با هم برابرند.

(راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن $\hat{A}D_1$ و \hat{D}_2C دلیل بیاورید.)

نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، آن مثلث است.

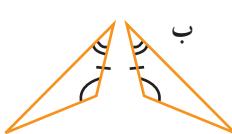
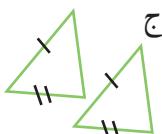
سه حالت هم نهشتی دو مثلث :

- برابری سه ضلع ● برابری دو ضلع و زاویه بین
یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ض ز ض)

تمرین



۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت هم نهشتی را بنویسید.



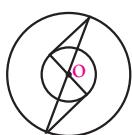
۲- در هر شکل، مساوی بودن برخی از اجزای دو مثلث را می‌توان از روابط میان پاره خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص نتیجه گرفت. اجزاء مساوی را پیدا، و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید؛ سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.



الف) هر دو مثلث متساوی الاضلاع‌اند.



ب) قطر متوازی الاضلاع رسم شده است.



ج) دو قطر یکدیگر را در مرکز مشترک دو دایره قطع کرده‌اند.

۳- از شکل زیر کدام یک از موارد زیر را می‌توان نتیجه گرفت؟
اگر دو زاویه و یک ضلع غیر بین از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیر بین از مثلثی دیگر برابر باشند،
الف) دو مثلث با یکدیگر هم نهشتند.



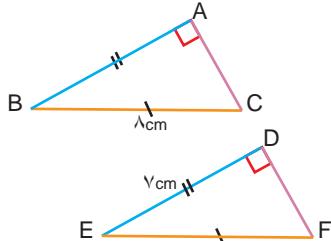
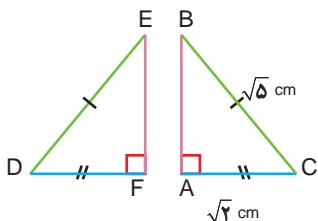
ب) ممکن است دو مثلث هم نهشت نباشند.

هم نهشتی مثلث‌های قائم الزاویه

فعالیت



- ۱- در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.



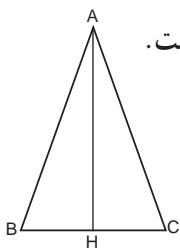
اندازهٔ ضلع سوم هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، سه ضلع مثلث ABC با سه ضلع مثلث DEF مساوی است؟

آیا این دو مثلث با یکدیگر هم نهشتند؟ در چه حالتی؟

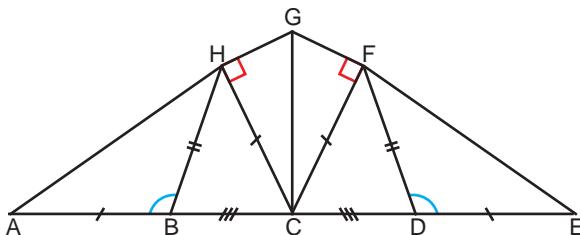
- ۲- می‌دانیم وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشتند؟ چرا؟ توضیح دهید.

کار در کلاس



- ۱- پاره خط AH، ارتفاع وارد بر قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین ABC است.
چرا مثلث‌های ایجاد شده با یکدیگر هم نهشتند؟

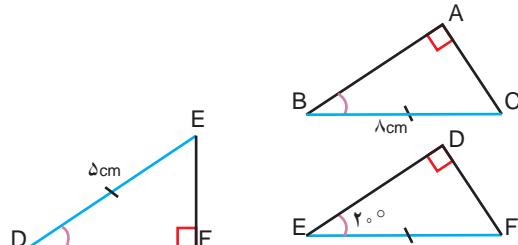
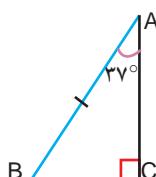
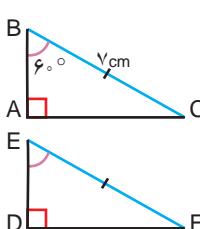
- ۲- با توجه به علامت‌های شکل زیر، مثلث‌های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت هم نهشتی هر جفت مثلث را بیان کنید.



فعالیت



- ۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.



زاویه دیگر هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟

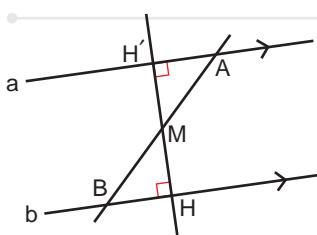
- ۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید.

دو حالت دیگر برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه :

- برابری وتر و یک زاویه تند
- یا به اختصار (و ز)

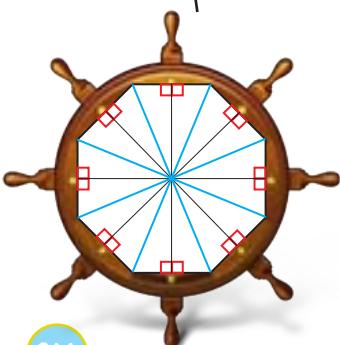
● برابری وتر و یک ضلع
یا به اختصار (و ض)

کار در کلاس



- ۱- از نقطه M، وسط پاره خط AB بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده‌ایم.

دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم نهشت‌اند؟

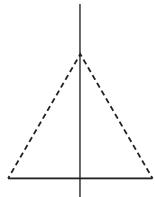


- ۲- در شکل رو به رو، هر شانزده زاویه کوچک وسط شکل با هم مساوی و هشت پاره خط آبی نیز با هم مساوی‌اند.
شانزده مثلث قائم الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم نهشت‌اند؟

فعالیت



شادی و مهتاب داشتند یک کتاب هندسه را مطالعه می کردند که به این جمله بخوردند :



«هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»

۱- مهتاب پرسید : «چرا این جمله درست است؟»

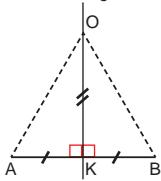
شادی سعی کرد مثالی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او پاره خطی کشید و عمودمنصف آن را رسم کرد. نقطه‌ای را روی آن در نظر گرفت و فاصله آن نقطه را از دو سر پاره خط اندازه گرفت؛ فاصله‌ها مساوی بود.

(یادآوری : فاصله دو نقطه از هم برابر طول پاره خطی است که آن نقاط را به هم وصل می کند.)

فکر می کنید شادی توانسته است دلیلی برای درستی جمله مورد نظر بیاورد؟

۲- مهتاب گفت : «از کجا بفهمیم این جمله در مورد همه نقاط روی عمودمنصف درست است؟»



شادی سعی کرد دلیلی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او به شکلی که کشیده بود نگاه کرد. آن را مانند

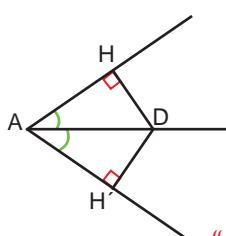
شکل رو به رو علامت‌گذاری کرد و گفت : «برای همه نقاط روی عمودمنصف AB، مانند نقطه O، زاویه K زاویه‌ای قائم است. (چرا؟)»

همچنین $AK=KB$ (چرا؟) هم ضلع مشترک دو مثلث است؛ پس $\triangle AOK \cong \triangle BOK$ (در چه حالتی؟)

و در نتیجه $OA=OB$ (چرا؟)

فکر می کنید این بار شادی توانسته است برای درستی جمله مورد نظر دلیلی بیاورد؟

۳- برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید :



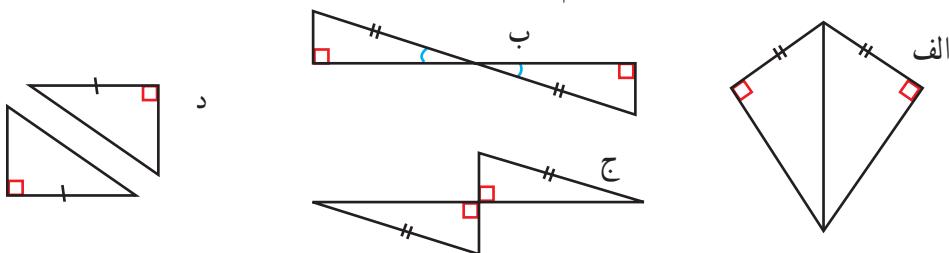
«هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

(یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط، برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه برآن خط عمود می شود.)

تمرین

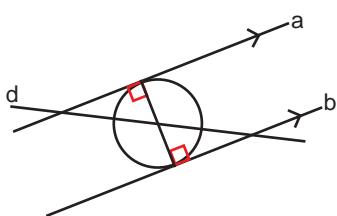


۱- در هر شکل، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم نهشتند.

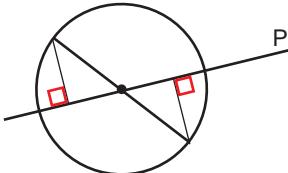


۲- در هر شکل از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعريف دایره یا چهارضلعی‌های خاص می‌توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزاء دو مثلث با هم مساوی‌اند. اجزاء مساوی را پیدا، و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید؛ سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.

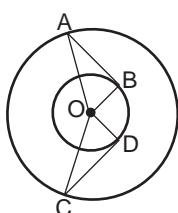
الف) خط d از مرکز دایره می‌گذرد و دو خط a و b بر قطر دایره عمودند.



ب) خط p از مرکز دایره گذشته است.



ج) نقطه O مرکز مشترک دو دایره و پاره‌خط‌های AB و CD به ترتیب بر OB و OD عمودند.



۳- در هریک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید هر مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث دیگر منطبق کرد.

مرور فصل ۶

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

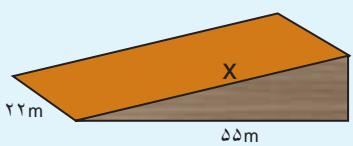
• اجزای متناظر
• هم نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه
در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- پیدا کردن ضلع مجھول مثلث قائم‌الزاویه
- بررسی قائم‌الزاویه بودن مثلث با داشتن سه ضلع آن
- نوشتن اجزای متناظر دو شکل هم نهشت
- هم نهشتی دو مثلث در حالت سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین و حالت دو زاویه و ضلع بین
- هم نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت وتر و یک زاویه و حالت وتر و یک ضلع
- حل مسئله‌های مربوط به هم نهشتی مثلث‌ها به کمک حالات‌های بالا

کاربرد

در نقشه‌های مهندسی و برای پیدا کردن اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های مجھول از هم نهشتی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر استفاده می‌کنیم.

تمرین‌های ترکیبی



۱- در شکل رویه رو، سطح شیب‌داری را می‌بینید.
طول این سطح شیب‌دار را به دست آورید.

۲- الگوی زیر با مثلث‌های هم نهشت ساخته می‌شود.

الف) دو شکل بعدی را رسم کنید.

ب) محیط هر شکل را پیدا کنید.

ج) محیط شکل شماره ۶ چقدر می‌شود؟

د) محیط شکل شماره ۷ چقدر می‌شود؟



شکل شماره ۱



شکل شماره ۲

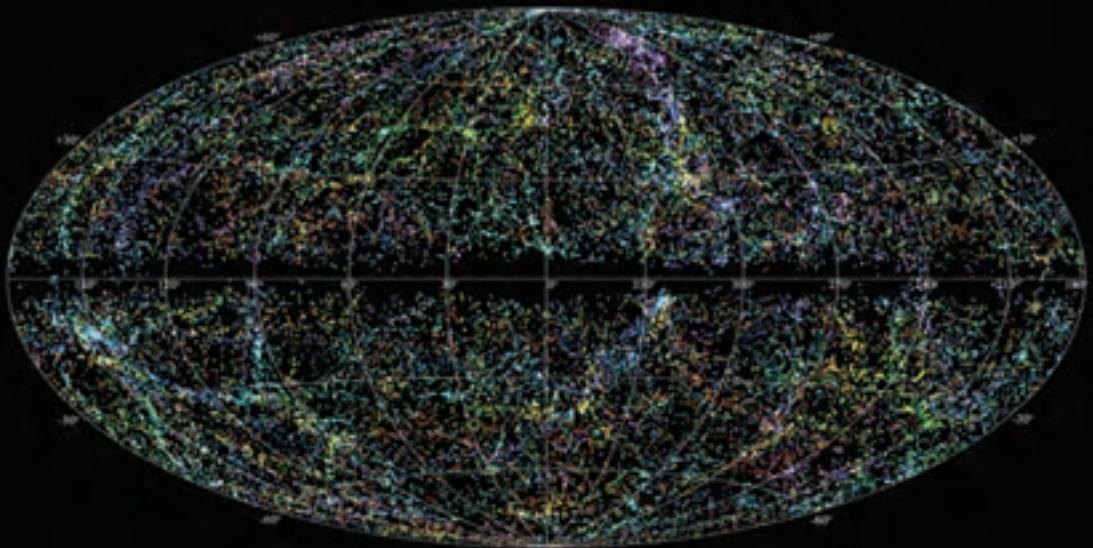


شکل شماره ۳

۷

فصل

توان و جذر



اندازه تقریبی شعاع منظومه شمسی 10^{13} متر است. اندازه تقریبی شعاع جهان قابل مشاهده توسط انسان 10^{13} برابر بیشتر است. تصویر بالا شامل ۴۳ هزار کهکشان است. اگر می خواهید بدانید ما کجا هستیم، باید بدانید که کهکشان راه شیری تقریباً یک نقطه کوچک در وسط های نقشه به شمار می رود. فکر منظومه شمسی را هم نکنید؛ چون خیلی کوچکتر از آن است که در این تصویر قابل دیدن باشد.

یادآوری در سال گذشته، ضرب دو عدد توان دار با پایه های مساوی و نیز توان های مساوی را یاد گرفتید. این قواعد را با نمادهای ریاضی به صورت زیر می نویسیم.
اگر عدد a دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ و $a^m \cdot b^m = (ab)^m$) : **یا برای سادگی :**

برای آمادگی بیشتر، تمرین های زیر را انجام دهید.

۱- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$2^6 \times 2^3 = \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \quad 8^3 \times 2^3 = \quad (-6)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$2^5 \times 3^2 \times 6^5 \times 4^1 = \quad 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^9 \times 81 = \quad 36 \times 144 = \quad 2^3 \times 8^5 \times 4^3 =$$

۲- حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان دار بنویسید.

$$a^r \times a^s = \quad x^t \times y^u = \quad (ab)^v \times a^w \times b^x =$$

$$(xy)^y \times (xy)^y = \quad 125 \times 18^3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \quad 8a \times (2a)^3 \times 2a^3 =$$

۳- حجم مکعبی به ضلع $2a$ چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است ؟

۴- جاهای خالی را با عددها و حرف های مناسب پر کنید.

$$18^5 = (6 \times \bigcirc)^5 \quad a^s = a^r \times a^{\bigcirc} \quad 7^{\bigcirc} \times 4^5 = 4^5$$

$$\left(-\frac{v}{z}\right)^{\bigcirc} \times \left(-\frac{v}{z}\right)^2 = \left(-\frac{v}{z}\right)^9 \quad (4 \times 3)^c = \bigcirc^e \times \bigcirc^e$$

فعالیت



حاصل عبارت $2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$ را به دو روش زیر می‌توان نشان داد.

$$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12} \quad 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = (2^3)^4$$

با مقایسه تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت: $(2^3)^4 = 2^{12}$

اکنون، درستی تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید.

$$(7^3)^5 = 7^{\square}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]^4 = \left(\frac{1}{2} \right)^{12}$$

$$\left[(-2)^3 \right]^4 = (-2)^{\square}$$

$$(a^r)^s = a^{\square}$$

آنچه را فراگرفته‌اید به صورت قانون کلی بیان کنید.

اگر a عددی دلخواه و m و n عددهای طبیعی باشند، آن‌گاه:

$$(a^m)^n = a^{\square}$$

کار در کلاس



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت توان دار بنویسید.

$$(5^7)^4 =$$

$$\left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]^r =$$

$$\left[(-6)^2 \right]^5 =$$

$$\left[\left(-\frac{1}{V} \right)^3 \right]^4 =$$

$$(18^r)^s =$$

$$(x^r)^s =$$

$$\left[(ab)^r \right]^s =$$

$$(xy^r)^s =$$

$$(2^m)^n =$$

۲- کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

$$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^4$$

$$3^5 \times 3^5 = (3^5)^2$$

$$(3^2)^3 = 3^8$$

$$(3^2)^2 = 3^1$$

$$(5^2)^3 = 5^9$$

$$3^2 \times 3^2 = 9^4$$

$$3^5 \times (2^2)^5 = 12^5$$

$$a^r \cdot a^s = 1$$

$$((-2)^3)^2 = 2^6$$

$$(-4^6) = 4^6$$

۳- حاصل عبارت $(-5)^2 \times (-5)^2$ برابر کدام یک از اندازه‌های زیر است؟

(الف) -5^8

(ب) -5^4

۴- در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$$9^5 = (3^{\bigcirc})^5 = 3^{\bigcirc}$$



۱- حجم مکعبی به ضلع ۸cm را به صورت یک عدد توان دار بنویسید که پایه آن عدد ۲ باشد.

۲- بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۳- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$$[(-3)^2]^3 = \quad [(3^2)]^3 =$$

$$2^5 \times 2^2 \times 3^7 \times 6^3 = (-\frac{5}{6})^3 \times (\frac{7}{5})^3 \times (\frac{3}{7})^3 =$$

$$2^{4^{\circ}} \times 2^{4^{\circ}} \times 2^{4^{\circ}} = (x^2)^5 \cdot (y^3)^2 \cdot x^3 y^4 =$$

۴- کدام عددهای طبیعی را می‌توان به جای \square نوشت تا نامساوی زیر درست باشد؟

$$(-2) \quad \square > 15$$

۵- حاصل $2^7 + 2^7$ و حاصل $3^5 + 3^5$ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۶- عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را طوری در جاهای خالی قرار دهید که یک تساوی درست به دست آید. (از هر چهار عدد استفاده کنید).

$$\square \times (\square)^3 = 5^2 - (\square) \quad \square$$

۷- مقدار عددی عبارت‌های زیر را به ازای $a=6$ و $b=-2$ و $c=-4$ به دست آورید.

$$\underline{-2(a+b^2) + \frac{c^2}{b}}$$

(الف)

$$(b) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 + bc - 10$$

تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی

فعالیت



دما^۷ مرکز خورشید حدود 1° درجه سانتی گراد است. این دما چند برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید؟ پاسخ را ضمن کامل کردن جاهای خالی به صورت یک عدد توان دار بیان کنید و مراحل حل مسئله را نیز توضیح دهید.

حل: آب در 1° درجه سانتی گراد به جوش می آید و داریم: $1^{\circ} = 1^{\circ \cdot 2}$

$$1^{\circ \cdot 7} \div 1^{\circ \cdot 2} = \frac{1^{\circ \cdot 7}}{1^{\circ \cdot 2}} = \frac{1^{\circ} \times 1^{\circ} \times 1^{\circ} \times 1^{\circ} \times 1^{\circ} \times 1^{\circ} \times 1^{\circ}}{1^{\circ} \times 1^{\circ} \times 1^{\circ} \times 1^{\circ}} = \boxed{}$$

$$1^{\circ \cdot 7} \div 1^{\circ \cdot 2} = \boxed{} \quad \text{بنابراین:}$$

عنی دما^۷ مرکز خورشید $\boxed{}$ برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید.
آیا تقسیم بالا را به شکل زیر نیز می توانیم انجام دهیم؟

$$\frac{1^{\circ \cdot 7}}{1^{\circ \cdot 2}} = \frac{1^{\circ \cdot 2} \times 1^{\circ \cdot 5}}{1^{\circ \cdot 2}} = \boxed{}$$

اکنون، حاصل هر یک از تقسیم های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-9)^5 \div (-9)^3 = \boxed{} = (-9)^{\boxed{}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \boxed{} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\boxed{}}$$

با استفاده از نمونه های داده شده برای محاسبه تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی قانونی بنویسید.

اگر a عددی دلخواه و مخالف صفر و m, n عددهایی طبیعی باشند:

$$a^m \div a^n = a^{\boxed{}}$$

کار در کلاس



۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$8^6 \div 8^5 =$$

$$\frac{3^7}{3^3} =$$

$$6^3 \div 6 =$$

$$(-\frac{3}{5})^5 \div (-\frac{3}{5})^2 =$$

$$\frac{(-2)^9}{(-2)^2} =$$

$$(\frac{8}{9})^4 \div (\frac{8}{9}) =$$

$$(4/5)^6 \div (4/5)^3 =$$

$$(-0/3)^5 \div (-0/3)^2 =$$

$$\frac{7^5}{7} =$$

۲- جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$\frac{2^{15}}{(2^3) \bigcirc} = 1$$

$$35 \div 3 \bigcirc = 3^4$$

$$14^5 \div (\quad)^2 = 14^3$$

$$\frac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[5]{v}} = \frac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[3]{v} \times \sqrt[2]{v}} = \frac{1}{\bigcirc}$$

۳- حاصل را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$$a^{12} \div a^5 =$$

$$(xy)^7 \div (xy)^4 =$$

$$(-x)^7 \div (-x)^3 =$$

تقسیم دو عدد توان دار با توان‌های مساوی



۵- مثال‌های داده شده را مطالعه کنید و با پر کردن جاهای خالی توضیح دهید که پاسخ هر یک از تقسیم‌ها چگونه به دست آمده است.

$$12^4 \div 6^4 = \frac{12^4}{6^4} = \frac{12 \times 12 \times 12 \times 12}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} = (\quad)^4 = 2^4$$

$$35 \div 7^5 = \frac{3^5}{7^5} = \frac{\quad}{7^5} = (\frac{3}{7})^{\bigcirc}$$

$$(-4)^3 \div 6^3 = \frac{(-4)^3}{6^3} = \frac{(-4) \times (-4) \times (-4)}{6 \times 6 \times 6} = (-\frac{2}{3})^3$$

$$12^4 \div 6^4 = \frac{12^4}{6^4} = \frac{2^4 \times 6^4}{6^4} = 2^{\bigcirc}$$

با توجه به مثال‌های صفحه قبل، توضیح دهید تساوی $4^5 = 2^5 \times 2^5$ چگونه به دست آمده است.
اکنون، برای تقسیم دو عدد توان دار با توان‌های مساوی، قانون زیر را کامل کنید.

در تقسیم اعداد توان دار با توان‌های مساوی

به کمک قانونی که نوشته‌اید، حاصل تقسیم‌های زیر را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$6^8 : 3^8 = (-2)^4 : (-3)^4 =$$

اکنون قانون فوق را با نمادهای ریاضی هم نشان دهید.

$$a^m : b^m = ()^{\circ} \quad a \text{ و } b \text{ دو عدد طبیعی و } m \neq 0$$

کار در کلاس



۱- حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$5^7 : 3^7 = 14^3 : 7^3 =$$

$$(-8)^5 : (-2)^5 = 9^2 : 27^2 =$$

۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید و در صورت امکان، پاسخ را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$5^7 \times 3^4 \times 2^7 \times 3^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^8 : \left(\frac{2}{3}\right)^5 =$$

$$\frac{3^{0.7} \times 3^{0.5}}{6^{1.0} \times 5^{1.0}} = \frac{(a^{\frac{3}{4}})^4}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{(x^{\frac{1}{2}})^5 \times x^{\frac{1}{4}}}{x^{11}} =$$

تمرین



۱- هر یک از عده‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$81 = -8 = 1024 = -\frac{125}{729} = \frac{1}{512} = -\frac{1}{32} =$$

۲- کدام عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4} \quad \left(\frac{5}{11}\right)^0 = 0 \quad \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{2}{7}\right)^9 \quad 10^2 \times 10^4 = 10^{14} \quad (-2)^3 \times (-2) = 16$$

۳- حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times 3^1 =$$

$$\frac{5^6 \times 6^3}{5^4 \times 6^5} =$$

$$\frac{x^7 \times y^4}{x^5 \times y^2} =$$

۴- در جاهای خالی عدد مناسب بگذارید.

$$3^5 \times 3^{\textcolor{red}{\bigcirc}} = 3^9$$

$$(7^4) \textcolor{red}{\bigcirc} = 7^8$$

$$\frac{7^{\textcolor{red}{\bigcirc}} \times 7^2}{7^3} = 7^5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\textcolor{red}{\bigcirc}} \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{(-6)^8}{(-6)^{\textcolor{red}{\bigcirc}}} = (-6)^3$$

۵- عددهای زیر را از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید.

$$6^5, 1^{12}, -4^3, (-1)^5, 0, \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

۶- کدام تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

$$(\sqrt{5})^2 = 25$$

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

$$(\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})^2$$

$$+\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-1^{\circ})^3 =$$

$$[(-1^{\circ})^2]^3 =$$

$$(x^7y^3)^4 =$$

$$\left(\frac{x^7}{x^3}\right)^5 =$$

$$[3^6 \div (-3)^5] \div [(-2)^5 \times (-3)^5] =$$

۸- نصف 2^1 و ربع 4^7 را به صورت عددهای توان دار بنویسید.

خواندنی

رشد باکتری‌ها به شرایط مناسب محیطی و وجود مواد غذایی بستگی دارد. باکتری‌ها در وضعیت مطلوب در هر 2^0 دقیقه به دو نیم تقسیم می‌شوند، سپس در 2^0 دقیقه دیگر رشد می‌کنند و دوباره هر کدام به دو قسمت تقسیم می‌شوند. تکثیر باکتری‌ها تا جایی ادامه پیدا می‌کند که مواد غذایی لازم موجود باشد؛ برای مثال اگر در حال حاضر 2 باکتری داشته باشیم در 2^0 دقیقه دیگر $2^1 = 2^2 = 4$ باکتری و در 2^1 دقیقه دیگر $2^2 = 16$ باکتری خواهیم داشت. به نظر شما اگر مواد غذایی لازم موجود باشد، پس از گذشت 2^4 ساعت چند باکتری خواهیم داشت؟

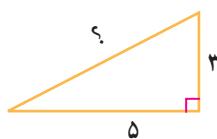


آزاده، نرگس و نسیم هنگام گردش علمی به یک آب‌گذر (کانال) به عرض ۵ متر رسیدند. در طرف دیگر آب‌گذر دیوارهای به ارتفاع ۳ متر وجود داشت. آنها می‌خواهند بدانند اگر پلی برای رفتن به طرف دیگر آب ساخته شود، طول آن چقدر خواهد بود؟

در ادامه، گفت‌و‌گوی این سه دانش‌آموز را می‌خوانید که برای حل این مسئله صورت

گرفته است. با دقت در این گفت‌و‌گو سعی کنید نظر هر دانش‌آموز را توضیح دهید.

آزاده: به نظر من این مسئله مانند آن است که یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۳ و ۵ متر داشته باشیم و بخواهیم وتر آن را به دست آوریم.



نرگس: پس می‌توانیم از رابطه فیثاغورس استفاده کنیم.

نسیم: یعنی رابطه مقابله داریم: $۳^۲ + ۵^۲ = ۹ + ۲۵ = ۳۴$ مرربع وتر

آزاده: درست است. اکنون برای به دست آوردن طول وتر باید جذر عدد ۳۴ را به دست آوریم.

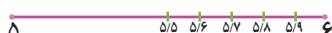
نرگس: چون $\sqrt{۳۶} < \sqrt{۳۴} < \sqrt{۴۹}$ بین دو عدد ۵ و ۶ قرار دارد.



یعنی داریم: $5 < \sqrt{۳۴} < 6$

نسیم: اگر فاصله ۵ تا ۶ را روی محور نصف کنیم، عدد $5/5$ به دست می‌آید و چون $۳^{\circ} = (5/5)^2$ ، پس حتماً جذر ۳۴ از $5/5$ بیشتر است.

آزاده: می‌توانیم چند عدد بزرگ‌تر از $5/5$ را بررسی کنیم؛ مثلاً $5/7$ و $5/8$ و $5/9$.



سپس آنها به کمک ماشین حساب جدول زیر را تکمیل کردن.

عدد	$5/7$	$5/8$	$5/9$	۶
مجدور	$۳۲/۴۹$	$۳۳/۶۴$	$۳۴/۸۱$	۳۶

در نتیجه با توجه به جدول بالا، مقدار $\sqrt{34}$ تقریباً برابر $5/8$ است.

آخرین جمله فعالیت بالا را معمولاً به شکل رو به رو می‌نویسیم: $\sqrt{34} = 5/8$
اگر این دانش‌آموزان بخواهند به کمک روش بالا مقدار $\sqrt{34}$ را تا دو رقم اعشار حساب کنند، چگونه باید این کار را انجام دهن؟

مقدار $\sqrt{34}$ تا پنج رقم اعشار به کمک ماشین حساب چنین به دست می‌آید:

$$\sqrt{34} \approx 5.83095$$

کار در کلاس



۱- با پرکردن جاهای خالی، مقدار $\sqrt{2}$ و $\sqrt{200}$ را به صورت تقریبی تا یک رقم اعشار به دست آورید. نتیجه را با آنچه ماشین حساب به دست می‌آورد، مقایسه کنید.

$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$$

(الف)

$$1 < \sqrt{2} < \textcircled{O}$$

پس:

اگر ۰ با نصف کردن فاصله ۱ تا ۲ روی محور، عدد $1/5$ را آزمایش می‌کنیم.

چون $= 2/25 = 1/5^2$ ، پس مقدار $\sqrt{2}$ حتماً کمتر از \textcircled{O} است.

عدد	$1/3$	$1/4$	$1/5$
مجدور	$1/69$	$1/96$	$2/25$

به کمک جدول بالا می‌توان نوشت:

$$\sqrt{196} < \sqrt{200} < \textcircled{O}$$

$$\textcircled{O} < \sqrt{200} < 15$$

اکنون با نصف کردن فاصله تا ۱۵ روی محور اعداد، عدد $\frac{14}{5}$ را آزمایش می‌کنیم. چون $\sqrt{25} = 5$ است، بنابراین $\sqrt{200}$ حتماً کمتر از $\frac{14}{5}$ است.

$$\sqrt{200} \approx \text{بنابراین}$$

عدد	۱۴/۱	۱۴/۲	۱۴/۳	۱۴/۴
مجدور	۱۹۸/۸۱	۲۰۱/۶۴		

۲- ابتدا مقدار تقریبی هر عددی را که در جدول آمده است، حدس بزنید؛ سپس به کمک ماشین حساب، حاصل را تا دو رقم اعشار پیدا کنید و با مقداری که حدس زده اید، مقایسه کنید.

عدد	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10/3}$	$\sqrt{18/5}$	$\sqrt{68}$	$\sqrt{99}$	$\sqrt{140}$
مقدار حدس زده شده							
ماشین حساب							



۱- به کمک روشی که در درس یاد گرفته اید، مقدار هر یک از عددهای زیر را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

$$\sqrt{19}, \sqrt{40}, \sqrt{150}, \sqrt{385}$$

۲- در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید. از ماشین حساب کمک بگیرید.

$$\sqrt{11} \bigcirc 3\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{17} \bigcirc 4\cdot 03$$

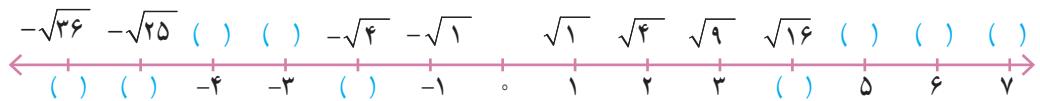
$$\sqrt{6/25} \bigcirc 2\frac{1}{2}$$

$$1 + \sqrt{15} \bigcirc 4$$

$$\sqrt{20} - 2 \bigcirc \sqrt{18}$$

$$(\sqrt{3})^2 \bigcirc 3$$

۳- جاهای خالی روی محور را با عددهای مناسب پرکنید.

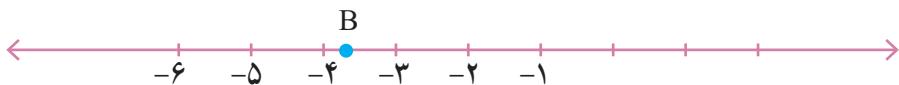


۴- در هر یک از تمرین‌های زیر، یک محور اعداد رسم، و نقطه‌ای روی آن مشخص شده است (نقاط A,B,C). نقطه مشخص شده روی محور به کدام یک از عددهای داده شده تزدیک‌تر است؟ دلیل بیاورید.



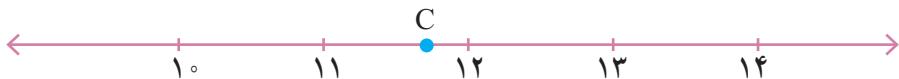
$$\sqrt{79}, \sqrt{98}, \sqrt{81}, \sqrt{85}$$

دلیل:



$$-\sqrt{12}, -\sqrt{17}, -\sqrt{15}, -\sqrt{28}$$

دلیل:



$$\sqrt{140}, \sqrt{116}, \sqrt{121}, \sqrt{126}$$

دلیل:

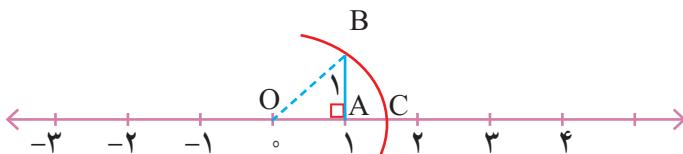
نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

فعالیت

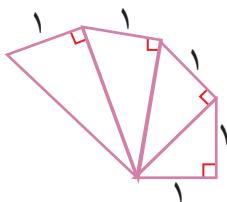


۵ در درس گذشته مقدار $\sqrt{2}$ را هم به صورت تقریبی و هم به کمک ماشین حساب محاسبه کردید.

در این فعالیت با نمایش $\sqrt{2}$ روی محور اعداد آشنا می‌شویم. محور عددهای زیر را در نظر بگیرید. مثلث OAB یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به ضلع ۱ است. به مرکز O و شعاع OB کمانی می‌زنیم تا محور اعداد را در نقطه C قطع کند. طول پاره خط OC چقدر است؟ _____ چرا نقطه C، عدد $\sqrt{2}$ را نمایش می‌دهد؟



به همین روش، نقطه‌ای را روی محور بالا معین کنید که عدد $\sqrt{2}$ – را نمایش دهد. در شکل زیر، تعدادی مثلث قائم الزاویه رسم شده است. در هر یک از این مثلث‌ها طول یک ضلع زاویه قاتمه ۱ واحد است. طول وترهای این مثلث‌ها به ترتیب $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ است. چرا؟



آیا می‌توانید به همین ترتیب پاره‌خطی به طول $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ رسم کنید؟ چگونه؟

از شکل داده شده استفاده کنید. دهانه پرگار را به اندازه $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ باز کنید و عددهای $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ و $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.



کار در کلاس



عدد $2 - \sqrt{3}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

برای نمایش عدد $2 - \sqrt{3}$ روی محور از تساوی $2 - \sqrt{3} = -2 + \sqrt{3}$ استفاده کنید.

خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

فعالیت



با توجه به عددهای داده شده a و b ، مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید. با مقایسه

دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

a	\sqrt{a}	b	\sqrt{b}	ab	\sqrt{ab}	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
۴	۲	۹	۳	۳۶	۶	۶
۹		۱۶				
۴		۱۶				
۲۵		۴				

آیا می‌توانید حدس خود را به صورت یک عبارت کلامی بیان کنید؟

اگر b و a دو عدد مثبت باشند، داریم:

به کمک جدول بالا، درستی یا نادرستی رابطه را بررسی کنید.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

کار در کلاس



۱- در تساوی‌های زیر، جاهای خالی را پر کنید.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \boxed{}$$

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \boxed{}$$

$$\sqrt{14} = \sqrt{7} \times \boxed{}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100} \times \boxed{}$$

$$\sqrt{16 \times 25} = \sqrt{16} \times \sqrt{25} = \boxed{} \times \boxed{}$$

۲- کدام یک از عبارت‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟

$$\sqrt{5^2} = 25$$

$$\sqrt{5^2} = 5 \times \sqrt{5}$$

۳- مانند نمونه، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{8} =$$

$$\sqrt{18} =$$

$$\sqrt{12} =$$

$$\sqrt{75} =$$

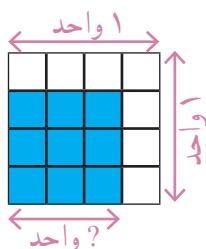
فعالیت



۵ جدول زیر را برای عددهای مثبت a و b کامل کنید. مقدارهای دو سطر آخر را با هم مقایسه کنید و تساوی به دست آمده را به شکل یک قانون کلی بنویسید.

a	۱۶	۲۵	۱	
b	۹	۳۶	۱۰۰	
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$			$\sqrt{\frac{49}{64}}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$			

کار در کلاس



۱- با استفاده از شکل رو به رو، درستی رابطه

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

۲- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید.

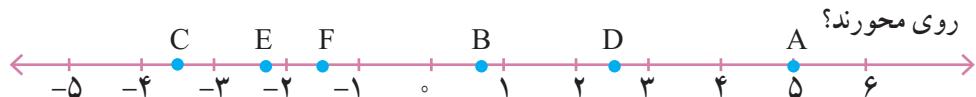
$$-\sqrt{\frac{1}{144}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{\frac{49}{16}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{\underline{\hspace{2cm}}} = \frac{3}{5}$$

$$-\sqrt{\underline{\hspace{2cm}}} = -\frac{1}{\sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}}$$

۳- به صورت تقریبی مشخص کنید که عددهای داده شده نظیر کدام یک از نقاط مشخص شده



روی محور نزد؟

$$\sqrt{6/25}$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$\sqrt{25}$$

$$-\sqrt{5}$$

$$-\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$-\sqrt{12/5}$$

تمرین



۱- تزدیک ترین عدد طبیعی به هر یک از عدهای زیر را پیدا کنید.

$$\sqrt{401}$$

$$\sqrt{310}$$

$$\sqrt{9999}$$

$$\sqrt{280}$$

$$\sqrt{175}$$

درستی پاسخ خود را به کمک ماشین حساب بیازمایید.

۲- یک محور اعداد رسم کنید و عدهای زیر را به صورت تقریبی روی آن مشخص کنید.

$$\sqrt{14}, \sqrt{10}, \sqrt{24}, -\sqrt{3}, -\sqrt{8}, -\sqrt{17}$$

۳- مجموع عدهای واقع بر هر سطر، هر ستون و نیز هر قطر مربع زیر است.

جاهای خالی را با چه عدهایی می‌توان پر کرد؟

	$-(\sqrt{4} + \sqrt{2})$	-5°
$-\sqrt{2}$		5°
$-\sqrt{9}$	$15+12$	

۴- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(a^5 \times a^3) \times (b^{17} \div b^3) =$$

$$\sqrt{\frac{49 \times 25}{36}}$$

۵- جذر 70° را تا یک رقم اعشار به دست آورید و نتیجه را به کمک ماشین حساب بررسی کنید.

۶- دو عدد طبیعی بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ پیدا کنید.

۷- پنج عدد بین $\sqrt{3}$ و $\sqrt{8}$ پیدا کنید.

۸- اعداد رادیکالی زیر را به صورت ضرب یک عدد طبیعی در یک رادیکال بنویسید.

$$\sqrt{27}$$

$$\sqrt{5}^\circ$$

$$\sqrt{20}^\circ$$

۷ مرور فصل

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

• توان • جذر تقریبی • ریشه‌های دوم یک عدد • جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم
در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- محاسبه حاصل یک عدد توان دار به توان عدد دیگر
- محاسبه تقسیم دو عدد توان دار با پایه‌های مساوی
- محاسبه تقریبی تقسیم دو عدد توان دار با نماهای مساوی
- محاسبه جذر یک عدد
- ساده کردن یک عبارت توان دار
- محاسبه جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم

کاربرد

کاربرد این درس علاوه بر درس‌های دیگر ریاضی مثل جبر در بیان عده‌های بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک است. نماد علمی نحوه‌ای از بیان این عده‌ها به صورت توان دار است.

تمرین‌های ترکیبی

$$1 - \text{حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.}$$

$$\frac{(-3)^5 \times 2^4 \times 8}{-2^7 \times (-9)^2 \times 18}$$

$$2 - \text{حاصل تقسیم مقابل را به دست آورید.}$$

$$\left[3^1 \times \left(\frac{1}{27} \right)^3 \right]^2 \div \left[5^4 \times \left(\frac{1}{25} \right)^2 \right]$$

$$3 - \text{با تهیه جدول مناسب، جذر عدد } 93 \text{ را تا دور قم اعشار به دست آورید.}$$

$$4 - \text{عددهای زیر را به ترتیب صعودی و از چپ به راست مرتب کنید.}$$

$$-2^4 \text{ و } \sqrt{25} \text{ و } \sqrt{47} \text{ و } 6 \text{ و } \frac{2}{5} \text{ و } -\frac{2}{5}$$

5 - به کمک رسم، مکان متناظر با عده‌های زیر را روی محور اعداد مشخص کنید.

$$\sqrt{16} - \sqrt{13} \text{ و } \sqrt{20}$$

6 - مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $x = -2$ و $y = 6$ و $a = -1$ و $b = \frac{1}{2}$ به دست آورید.

$$\frac{ax^2 - b(x - y^2)}{2axy + (\frac{y}{x})^3 - \frac{3}{b^2}}$$

۸

فصل

آمار و احتمال



بررسی خواص هر گاز با استفاده از آمار و احتمال، هم کاری ساده است و هم به نتایج قابل قبول و عملی منجر می‌شود؛ مثلاً با استفاده از آمار و احتمال می‌توان تعداد دفعاتی را برآورد کرد که باید مقداری گاز دارای اورانیوم را غنی کنیم تا به درجه خلوص مورد نیاز برسد.

دسته‌بندی داده‌ها

در سال‌های پیش با **علم آمار**، که علم جمع‌آوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده‌ها) است، آشنا شدید. **داده‌ها** را با چوب خط، سرشماری و در جدول سازماندهی کردید؛ سپس، با توجه به موضوع و هدف آمارگیری، نمودار آن اطلاعات را رسم کردید. در زیر، چهار نوع نمودار و کاربرد هر کدام یادآوری شده است.



اگر داده‌های جمع‌آوری شده زیاد و پراکنده باشند، بررسی آنها طولانی می‌شود. برای اینکه بتوانیم آسان‌تر و بهتر نتیجه بگیریم، داده‌ها را مناسب با موضوع آماری **دسته‌بندی** و سازماندهی می‌کنیم.

فعالیت



در زیر، داده‌های جمع‌آوری شده درباره اندازه قد ۴۰ نفر از مردان ساکن یک

شهر کوچک بر حسب سانتی‌متر مشخص شده است. (n=۴۰)

۱۶۴ ۱۶۸ ۱۷۲ ۱۸۵ ۱۵۳ ۱۷۴ ۱۹۲ ۱۵۰ ۱۷۵ ۱۶۷ ۱۸۴ ۱۴۷ ۱۸۱
۱۵۱ ۱۶۲ ۱۷۳ ۱۴۲ ۱۶۳ ۱۳۸ ۱۶۵ ۱۳۷ ۱۷۱ ۱۹۳ ۱۶۸ ۱۷۰ ۱۳۰
۱۶۵ ۱۴۳ ۱۷۳ ۱۹۰ ۱۵۸ ۱۵۷ ۱۷۹ ۱۵۹ ۱۷۰ ۲۰۵ ۱۸۳ ۱۵۷

کمترین و بیشترین داده را مشخص کنید.

به فاصله بین این دو عدد **دامنه تغییرات** می‌گویند. دامنه تغییرات داده‌ها را پیدا کنید.

در یک تولیدی شلوار مردانه می‌خواهیم با توجه به داده‌های جمع‌آوری شده بالا اندازه‌های مختلف را طراحی کنیم. برای این کار، داده‌هارا دسته‌بندی می‌کنیم. هر دسته یک معنای مشخصی دارد؛ برای مثال، افراد مختلف را می‌توانیم به صورت زیر تقسیم‌بندی کنیم :

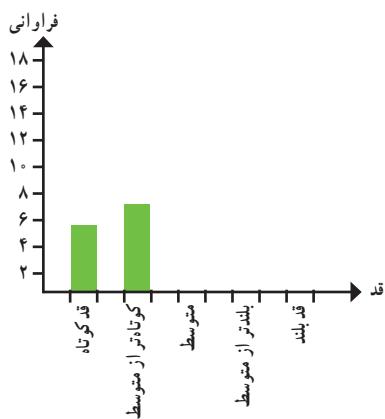
قد بلند، بلندتر از متوسط، متوسط، کوتاهتر از متوسط و قد کوتاه

به این ترتیب، داده‌های ما به ۵ دسته تقسیم می‌شوند. می‌توانیم طول این دسته‌ها را مساوی درنظر بگیریم؛ به همین دلیل، برای رسیدن به حدود دسته‌ها دامنه تغییرات را بر ۵ تقسیم می‌کنیم تا طول دسته‌ها به‌طور تقریبی معلوم شود. به این ترتیب، می‌توانیم محدوده دسته‌هارا مشخص کنیم و در یک جدول بنویسیم.

در جدول زیر معنای $145 \leq x < 13^{\circ}$ را توضیح دهید. < و > چه تفاوتی دارند؟

با توجه به حدود دسته‌ها با استفاده از چوب خط، تعداد داده‌های هر دسته را که به آن **فراوانی**

می‌گویند، تعیین کنید.



حدود دسته‌ها	چوب خط	فراوانی
$13^{\circ} \leq x < 145$		
$145 \leq x < 16^{\circ}$		
$16^{\circ} \leq x < 175$		
$175 \leq x < 19^{\circ}$		
$19^{\circ} \leq x \leq 20^{\circ} ۵$		

با توجه به فعالیت صفحهٔ قبل به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱- قد بیشتر افراد در چه محدوده‌ای است؟

۲- با توجه به نمودار میله‌ای، متوجه چه چیزی می‌شوید؟

۳- فکر می‌کنید میانگین قد مردان این شهر در کدام دسته قرار می‌گیرد؟

۴- به نظر شما این آمار و اطلاعات و نمودار چه کاربردهای دیگری دارد؟

کار در کلاس



۱- میانگین دمای هوا در روزهای مختلف یک منطقه به صورت زیر گزارش شده است.

+2	+2	+4	+5	+6	.	-1	-2	.	-3	-7	-2	-1	.	.
-1	-3	-6	-7	-8	+8	+7	+8	+7	+6	+3	+1	+2	+3	+4
+2	+2	-4	-2	-1	.	-5	-3	.	.	+1	+1	+4	+6	+7

جدول فراوانی داده‌ها را براساس سؤال‌های زیر مشخص، و نموداری میله‌ای رسم کنید.

● دامنهٔ تغییرات چقدر است؟

● داده‌ها را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم؛ طول هر دسته چقدر است؟

۲- نمره‌های ریاضی دانشآموزان یک کلاس به صورت زیر است. با توجه به دامنهٔ تغییرات،

آنها را به ۵ دسته با طول مساوی دسته‌بندی کنید. پس از رسم جدول، نمودار میله‌ای را رسم کنید و با توجه به نمودار، وضعیت این کلاس را توصیف کنید.

۱۶	۱۸	۱۵	۹/۵	۱۲/۵	۱۳	۱۲	۱۲/۵	۱۴	۱۱	۱۳	۹	۸		
۱۵	۱۴	۱۹	۱۸/۵	۱۷	۱۵/۵	۱۶/۵	۱۱	۸/۵	۷	۵	۱۳	۱۵		
۱۴	۱۰/۵	۱۱/۵	۱۵	۱۸	۱۷	۱۴	۶	۱۲/۵	۲۰					

تمرین

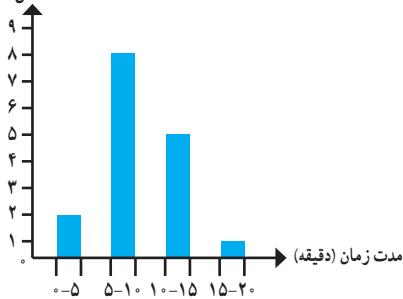


۱- در یک کارگاه تولید لامپ، ۳۰ لامپ به صورت تصادفی انتخاب، و طول عمر

آنها بر حسب ساعت اندازه‌گیری شده است. داده‌ها را به ۵ دسته تقسیم، و جدول فراوانی و نمودار میله‌ای آن را رسم کنید.

۱۵۶	۱۵۹	۱۶۰	۱۶۳	۱۶۱	۱۵۷	۱۵۴	۱۵۷	۱۶۸	۱۷۲	۱۶۳	۱۵۸	۱۵۷	۱۶۱	۱۷۱
۱۶۳	۱۶۸	۱۶۷	۱۵۹	۱۵۲	۱۵۳	۱۵۸	۱۵۷	۱۶۹	۱۷۰	۱۵۳	۱۶۹	۱۵۸	۱۶۵	۱۵۶

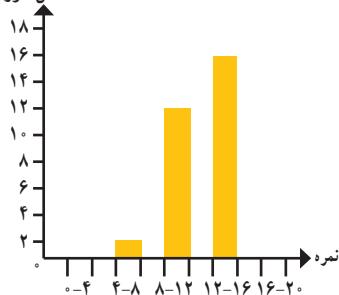
تعداد دانشآموزان



۲- از دانشآموزان یک کلاس درباره مدت

زمانی که طول می‌کشد تا آنها از خانه به مدرسه بروند، سؤال شده و پس از دسته‌بندی این داده‌ها نمودار میله‌ای مقابل، رسم شده است. چند دانشآموز فاصله خانه تا مدرسه را در ۱۰ یا بیشتر از ۱۰ دقیقه طی می‌کنند؟ این کلاس چند دانشآموز دارد؟

تعداد دانشآموزان



۳- در اینجا نمودار نمره‌های دانشآموزان یک

کلاس را می‌بینید.

- این کلاس چند دانشآموز دارد؟

- آیا این دسته‌بندی مناسب است؟ چرا؟

- آیا این کلاس وضعیت خوبی دارد؟ چرا؟

میانگین داده‌ها

پس از اینکه داده‌های آماری در جدول سازماندهی می‌شوند و به کمک نمودارها درک بهتری از داده‌ها به دست می‌آید، می‌توان از میانگین داده‌ها نیز برای کامل‌تر شدن نتایج داده‌ها و تحلیل و تفسیر بهتر آنها استفاده کرد. شما در دوره ابتدایی با میانگین گرفتن آشنای شده‌اید. میانگین تعدادی عددی از تقسیم مجموع آنها بر تعدادشان به دست می‌آید.



۱- نمره‌های ریاضی یک دانش‌آموز ۱۷، ۱۸، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ است. میانگین نمره‌های او را حساب کنید.

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \text{میانگین} \quad \text{یا به صورت جبری} \quad \bar{x} = \frac{S}{n}$$

۲- نمره‌های یک دانش‌آموز به صورت زیر است:

۱۶/۵ ۱۷/۵ ۱۴ ۱۹ ۱۸/۵ ۱۴ ۱۵ ۱۷ ۱۶ ۱۵/۵

میانگین نمره‌های او را پیدا کنید. چند نمره بالاتر از میانگین و چند نمره پایین‌تر از میانگین قرار می‌گیرند؟ آیا این دو تعداد مساوی است؟

اختلاف نمره‌های بالای میانگین را با میانگین حساب کنید. حاصل جمع آنها را پیدا کنید؛ به همین ترتیب، مجموع اختلاف نمره‌های پایین‌تر از میانگین با میانگین را هم پیدا کنید. نتایج بالا را با هم مقایسه کنید.

۳- میانگین نمره‌های ۷ درس یک دانش‌آموز ۱۶/۵ است. اگر نمره‌های دو درس دیگر او، که ۱۷ و ۱۵ است به این داده‌ها اضافه شود، میانگین جدید را پیدا کنید.

آیا می‌توان میانگین دو نمره ۱۵ و ۱۷ را پیدا کرد (۱۶ می‌شود) و سپس میانگین ۱۶ و ۱۶/۵ را حساب کرد؟ چرا؟

۴- میانگین نمره‌های زیر را به دست آورید. بین این عددها چه رابطه‌ای وجود دارد؟ فاصله هر عدد تا میانگین چقدر است؟

۱۱ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۳ ۱۳ ۱۴ ۱۴ ۱۵

کار در کلاس



با توجه به رابطه‌ای که پیدا کرده‌اید، میانگین عددهای زیر را به دست آورید.

۱۷ ۱۴ ۱۳ ۱۶ ۱۵ ۱۲ ۱۹ ۱۸ ۱۳ ۱۱

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد و داده‌ها دسته‌بندی شده باشند، می‌توان میانگین داده‌ها را با تقریب بسیار خوب به دست آورد.

فعالیت



۱- به کمک ماشین حساب، میانگین قد 40° نفر را که در درس قبل مطرح شده است، پیدا کنید.

۲- برای به دست آوردن مرکز دسته‌ای مانند دسته $145^\circ < x \leq 130^\circ$ ، ابتدا مجموع عددهای 145° را به دست می‌آوریم و سپس، حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

۳- اکنون تمام داده‌ها را در این قسمت می‌بینید. مرکز هر دسته را به جای داده‌های آن دسته قرار دهید؛ برای مثال، چون عدد 192° در دسته $20^\circ \leq x \leq 20^\circ$ قرار دارد به جای آن عدد $197/5$ را، که مرکز این دسته است، قرار دهید.

$\frac{197}{5}$

۱۶۴ ۱۶۸ ۱۷۳ ۱۸۵ ۱۵۳ ۱۷۴ ۱۷۸ ۱۵۰ ۱۷۵ ۱۶۷ ۱۸۴ ۱۴۷ ۱۸۱
۱۵۱ ۱۶۸ ۱۷۰ ۱۷۳ ۱۶۷ ۱۷۳ ۱۴۲ ۱۶۳ ۱۳۸ ۱۶۵ ۱۳۷ ۱۷۱ ۱۹۳ ۱۶۲ ۱۳۰
۱۶۵ ۱۴۳ ۱۹۰ ۱۷۳ ۱۵۸ ۱۷۰ ۲۰۵ ۱۵۹ ۱۷۶ ۱۷۹ ۱۵۷ ۱۸۳ ۱۴۳

۴- چرا در عددهای تغییر یافته $197/5$ تا $197/5$ وجود دارد؟

۵- با توجه به عددهای بالا، میانگین 40° عدد جدید را پیدا کنید.

چگونه برای پیدا کردن مجموع داده‌ها از ضرب استفاده می‌کنید؟ این ضرب‌ها چه رابطه‌ای با فراوانی‌های جدول دارند؟

۶- میانگین به دست آمده را با میانگین واقعی، که با ماشین حساب پیدا کردید، مقایسه کنید. مقدار خطای این روش چقدر است؟

کار در کلاس



با توجه به فعالیت صفحهٔ قبل با کامل کردن جدول زیر، میانگین داده‌ها را دوباره محاسبه کنید.

حدود دسته‌ها	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته × فراوانی
$13^\circ \leq x < 145^\circ$			
$145^\circ \leq x < 160^\circ$			
$160^\circ \leq x < 175^\circ$			
$175^\circ \leq x < 190^\circ$			
$190^\circ \leq x \leq 205^\circ$			
مجموع			

$$= \text{میانگین} = \text{-----} = \text{-----}$$

تمرین



- ۱- میانگین دمای هوا مربوط به کار در کلاس صفحهٔ ۱۲۲ و میانگین ساعت‌های عمر لامپ مربوط به تمرین ۱ صفحهٔ ۱۲۳ را به دست آورید. از جدول فراوانی استفاده کنید.
۲- جدول زیر را کامل و میانگین را حساب کنید.

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی	مرکز دسته	مرکز × فراوانی
$^\circ \leq x < 4$	/			
$4 \leq x < 8$				
		۸	۱۰	
$12 \leq x < 16$				
	/		۱۸	
جمع		۴۴		

۳- میانگین نمره‌های ریاضی دانشآموزان یک کلاس 30 نفره $\frac{17}{25}$ شده است. یکی از دانشآموزان در این امتحان نمره $\frac{3}{5}$ گرفته است؛ در حالی که بقیه آنها نمره بالای 15 گرفته‌اند.

(الف) اگر نمره این دانشآموز را از کلاس کنار بگذاریم، حدس می‌زنید معدل کلاس کمتر می‌شود یا بیشتر؟ حال با محاسبه معدل کلاس پس از حذف نمره این دانشآموز حدس خود را بررسی کنید.

ب) حالا فرض کنید همه دانشآموزان کلاس نمره کمتر از 14 گرفته‌اند؛ به جز یک نفر که 20 گرفته است، معدل این کلاس 30 نفره $\frac{10}{25}$ شده است. اگر دانشآموزی را که نمره 20 گرفته است کنار بگذاریم، حدس می‌زنید معدل کلاس کمتر می‌شود یا بیشتر. معدل کلاس پس از حذف نمره این دانشآموز را به دست آورید و حدس خود را بررسی کنید.

خواندنی

فکر اولیه احتمال بر بازی‌های شناسی مبتنی است. این گونه بازی‌ها از زمان‌های بسیار قدیم رایج بوده‌اند؛ زیرا در حفاری‌های باستان‌شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شناسی مشاهده شده‌اند؛ از جمله مکعبی استخوانی که روی وجه‌های آن عددهایی از 1 تا 6 نقش شده است.

در روزگار کنونی در مواردی که به راحتی نتوان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد از شناس استفاده می‌شود؛ برای مثال در شروع بازی فوتبال از پرتاب سکه استفاده می‌کنند یا برای قبول یا رد یک موضوع از قرعه کمک می‌گیرند. همچنین بانک‌ها برای اختصاص دادن جایزه به مشتریان دارای حساب قرض‌الحسنه از قرعه‌کشی استفاده می‌کنند.

احتمال یا اندازه‌گیری شанс

فعالیت



۱- ده کارت هم اندازه و هم شکل داریم و روی آنها عددهای ۱۱ تا ۲۰ را نوشته‌ایم.

کارت‌ها را به پشت روی میز قرار می‌دهیم و به طور تصادفی، یکی از آنها را بر می‌داریم.

احتمال اینکه روی این کارت عددی اول باشد بیشتر است یا احتمال اینکه عددی مرکب باشد؟ چرا؟

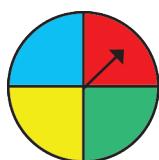


وقتی یک سکه را می‌اندازیم، قبل از اینکه به زمین بر سردنمی‌دانیم چه پیش می‌آید؛ یعنی روی سکه می‌آید یا پشت آن! اما می‌دانیم که دو حالت ممکن است پیش آید: روی سکه یا پشت سکه؛ از آنجا که این دو حالت مشابه‌اند، امکان اینکه روی سکه یا پشت آن بیاید، برابر است و چون در یک حالت از این دو حالت ممکن، روی سکه می‌آید، پس احتمال اینکه روی آن بیاید $\frac{1}{2}$ است؛ به همین ترتیب، احتمال اینکه پشت سکه هم بیاید، $\frac{1}{2}$ است.

۲- در هر یک از موارد زیر، حالت‌های هم‌شанс را بنویسید.

الف) عقرهٔ چرخنده را می‌چرخانیم.

ب) تاسی را می‌اندازیم.



۳- معلم از دانش‌آموزان پرسید: «یک مهره را به طور تصادفی از کيسه‌ای که در آن سه مهره سبز و یک مهره سفید است، بیرون می‌آوریم. چند حالت هم‌شанс می‌تواند رخ دهد؟»



پلا فاصله شایان پاسخ داد: «دو حالت: سبز، سفید»

سپس علی برای اینکه بتواند پاسخ سؤال را بدهد،

مهره‌های سبز را شماره‌گذاری کرد و پاسخ داد:

«چهار حالت: سبز ۱، سبز ۲، سبز ۳، سفید»

به نظر شما چرا پاسخ علی درست است؟

۴- در آزمایش مربوط به فعالیت ۱ با توجه به اینکه ۱۰ کارت داریم، بیرون آمدن هر یک از عددهای روی کارت‌ها هم شانس هستند؛ حالا به سؤال‌ها پاسخ دهید :

الف) در چند تا از آنها عدد روی کارت، اول است؟

ب) در چند تا از آنها عدد روی کارت، مرکب است؟

ج) احتمال هر یک از اتفاق‌ها (پیشامد)‌های زیر را پیدا کنید :

—= احتمال اینکه عدد روی کارت، اول باشد. —= احتمال اینکه عدد روی کارت، مرکب باشد.

برای اینکه احتمال رخ دادن هر پیشامد را بیابیم، تعداد حالت‌های منجر به آن اتفاق را بر تعداد کل حالت‌ها تقسیم می‌کنیم :

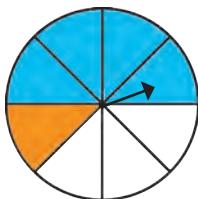
$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}} = \text{احتمال رخ دادن هر پیشامد}$$



- ۱- پنج توپ کوچک با شماره‌های ۱ تا ۵ را داخل یک جعبه ریخته‌ایم. احمد یکی از آنها را به طور تصادفی از جعبه خارج می‌کند. قرار است اگر عدد توپ زوج بود، جایزه بگیرد. احتمال اینکه احمد جایزه بگیرد چقدر است؟
- ۲- حمید می‌داند دوستش در خرداد به دنیا آمده است اما نمی‌داند چه روزی! احتمال اینکه دوست حمید در روز ۱۵ خرداد به دنیا آمده باشد، چقدر است (خرداد ۳۱ روز دارد)؟
- ۳- برای هر یک از موارد زیر یک مثال بنویسید.
- الف) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن آن صفر باشد.
- ب) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن از $\frac{1}{3}$ کمتر باشد.
- ج) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن از $\frac{1}{2}$ باشد.
- د) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن از $\frac{1}{2}$ بیشتر باشد.
- ه) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن یک باشد.
- عبارت زیر را بخوانید؛ درستی یا نادرستی آن را مشخص کنید و دلیل این تشخیص را در چند جمله بنویسید.
- «احتمال رخ دادن یک پیشامد برابر با صفر، یک یا عددی بین صفر و یک است.»

۵ فعالیت

۱- (الف) عقریه چرخنده زیر را می‌چرخانیم. احتمال هریک از حالت‌های زیر را پیدا کنید و در جدول بنویسید.

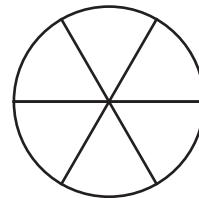
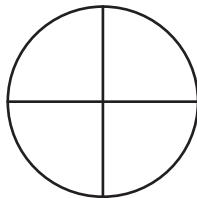
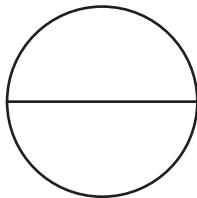


نایستد	بایستد	
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	عقریه روی نارنجی
		عقریه روی آبی
		عقریه روی سفید

ب) حاصل جمع دو عدد هر سطر جدول را به دست آورید. چرا حاصل جمع‌ها با هم برابرند؟

ج) احتمال رخ دادن یک پیشامد $\frac{3}{10}$ است. احتمال رخ ندادن آن چقدر است؟ چرا؟

۲- (الف) هر یک از چرخندهای زیر را طوری رنگ کنید که احتمال ایستادن عقریه روی رنگ سفید برابر $\frac{1}{3}$ باشد.

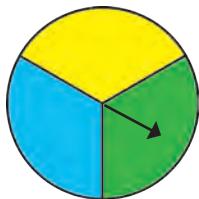


ب) بین این فعالیت و تساوی کسرها چه ارتباطی وجود دارد؟

۳- از یک کيسه حاوی 5° مهره، مهره‌ای را به طور تصادفی بیرون می‌آوریم. احتمال سبز بودن مهره، $\frac{3}{10}$ است.

چند تا از مهره‌ها سبزند؟

تمرین



۱- اگر عقربه شکل چرخنده رویه را 300 بار بچرخانیم.
عبارت‌های درست را با ✓ و عبارت‌های نادرست
را با ✗ مشخص کنید.

الف) عقربه 100 بار روی زرد می‌ایستد.

ب) انتظار داریم عقربه تقریباً 100 بار روی آبی باشد.

ج) تعداد دفعاتی که عقربه روی هر یک از این سه رنگ می‌ایستد، حتماً برابر است.

۲- تاسی را می‌اندازیم؛ احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) مضرب 5 باید.

ب) شمارنده 6 باید.

ج) 7 یا بیشتر باید.

۳- سی مهره با شماره‌های 1 تا 30 را در گردونه‌ای ریخته‌ایم. مهره‌ای را به‌طور تصادفی از گردونه خارج می‌کنیم. احتمال هر یک از حالت‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) فرد بودن عدد روی مهره

ب) مضرب 5 بودن عدد روی مهره

ج) اول بودن عدد روی مهره

۴- احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را با توجه به چرخنده زیر به‌دست آورید.

الف) عقربه چرخنده روی سبز باشد.

ب) عقربه چرخنده روی آبی باشد.

ج) عقربه چرخنده روی قرمز باشد.

۵- در یک کيسه تعدادی مهره رنگی وجود دارد. می‌خواهیم مهره‌ای را به‌طور تصادفی از آن بیرون بیاوریم. می‌دانیم احتمال سبز بودن مهره $\frac{3}{8}$ است.

الف) احتمال سبز نبودن مهره را حساب کنید.

ب) آیا می‌توانید تعداد مهره‌های درون پاکت را پیدا کنید؟ چرا؟

۶- یک سکه در چهار پرتاب پشت سر هم، رو آمده است. فکر می‌کنید اگر بار پنجم آن را بیندازیم، چه می‌آید؟ چرا؟

فعالیت



۱- سارا، ستاره و محدثه یک بازی طراحی کرده‌اند. آنها دو سکه را هم زمان می‌اندازنند.
اگر هر دو، رو آمد، سارا امتیاز می‌گیرد و اگر هر دو، پشت آمد، ستاره. اگر هم، یکی رو و یکی پشت آمد، محدثه امتیاز می‌گیرد.

فکر می‌کنید این بازی عادلانه است؟ یعنی شانس امتیاز گرفتن بازیکن‌ها با هم مساوی است؟

	هر دو، پشت	هر دو، رو	یکی رو، یکی پشت
در ۲۰ آزمایش			
در ۸۰ آزمایش			

۲- دو سکه بردارید و ۲۰ بار آزمایش کنید.

نتایج ۲۰ آزمایش را با رسم چوب خط در جدول ثبت کنید.

نتایج آزمایش خودتان را با نتایج سه هم گروهی تان جمع کنید و با استفاده از نتایج مربوط به ۸۰ آزمایش، درستی فکرتان را بررسی کنید.

آیا نتیجه آزمایش‌ها، پاسخ شما به فعالیت ۱ را تأیید می‌کند؟

۳- در جدول زیر، حالت‌های ممکن در پرتاب دو سکه نشان داده شده است. با توجه به این جدول، احتمال امتیاز گرفتن هر کدام از بازیکن‌ها را محاسبه کنید.

سکه دوم سکه اول		
	رو - رو	رو - پشت
	پشت - رو	پشت - پشت

= احتمال اینکه یک سکه رو بیايد و یک سکه پشت.

= احتمال اینکه هر دو سکه رو بیايند.

= احتمال اینکه هر دو سکه پشت بیايند.

حالا دوباره به سؤال فعالیت ۱ پاسخ دهید و برای پاسختان دلیل بیاورید.

کار در کلاس



محمد می‌خواست یک شاخه گل رز برای مادرش و یک شاخه هم برای پدرش بخرد. در گل فروشی تعداد زیادی گل رز به رنگ‌های سفید، قرمز و صورتی بود.

او دو شاخه گل را به طور تصادفی و به ترتیب برای مادر و پدرش برداشت.

الف) همه حالت‌های ممکن را به کمک جدول پیدا کنید.

ب) در چند تا از این حالت‌ها دست کم یکی از گل‌ها سفید است؟

گل مادر گل پدر	سفید	قرمز	صورتی
سفید	س - س	ق - س	
قرمز	س - ق		
صورتی	س - ص		

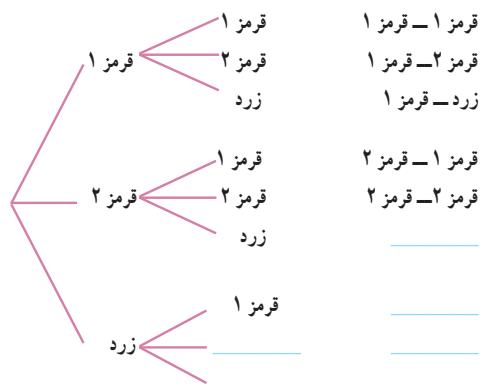
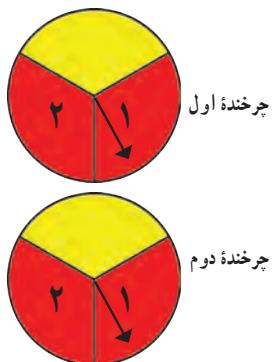
۵- فعالیت



۱- می خواهیم عقربه های دو چرخنده زیر را بچرخانیم و رنگی را که عقربه ها روی آن می بایستند، یادداشت کنیم.

الف) با کامل کردن نمودار درختی، همه حالت های ممکن را پیدا کنید.

حالت های ممکن



ب) احتمال اینکه هر دو عقربه روی رنگ قرمز باشند، چقدر است؟

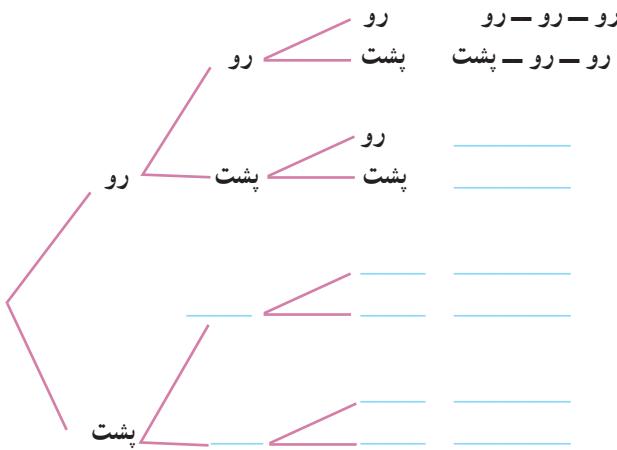
۲- سه سکه را هم زمان انداختیم. پارسا و عرفان هر کدام با یک روش، همه حالت های ممکن را نوشتند، و تعداد حالت ها را یافته اند.

الف) راه حل هر دو را کامل کنید.

راه حل عرفان

	سکه اول	سکه دوم	
رو - رو - رو رو - رو - پشت	رو	رو - رو	
	پشت	رو - پشت	
	پشت - رو	پشت - پشت	

حالات های ممکن سکه اول سکه دوم سکه سوم



ب) شما کدام راه حل را بیشتر دوست دارید؟

ج) آیا می توانید روش دیگری برای یافتن تعداد حالات های ممکن پیشنهاد کنید؟

د) تعداد حالات های ممکن چند تاست؟

ه) احتمال اینکه هر سه سکه رو بیايد، چقدر است؟

و) احتمال اینکه دقیقاً دو سکه رو و یکی پشت بیايد، چقدر است؟

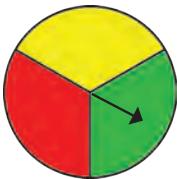
تمرین



۱- در یک کارخانه دوچرخه سازی دو مدل دوچرخه تولید می شود : دوچرخه جاده و دوچرخه کوهستان. در این کارخانه هر نوع دوچرخه در سه رنگ زرد، قرمز و آبی و دو اندازه ۲۴ و ۲۶ تولید می شود.

الف) چند نوع دوچرخه مختلف در این کارخانه تولید می شود؟

ب) در نشریه تبلیغاتی این کارخانه، در هر صفحه عکس یکی از این دوچرخه ها آمده است. علی یکی از صفحه ها را به طور تصادفی انتخاب می کند. احتمال اینکه در این صفحه دوچرخه کوهستان آبی رنگ اندازه ۲۶ دیده شود، چقدر است؟



۲- عقریهٔ چرخندهٔ مقابل را می‌چرخانیم و تاسی را می‌اندازیم.
 الف) با کامل کردن جدول، همهٔ حالت‌های ممکن را پیدا کنید.

تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
چرخنده						
سبز						
قرمز						
زرد						

ب) در چند حالت عقریهٔ روی قرمز ایستاده است و تاس عددی زوج را نشان می‌دهد؟

۳- قفلی داریم که رمز آن عددی یک رقمی است. (این رقم می‌تواند $^{\circ} ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸$ یا ۹ باشد.)

الف) احتمال اینکه با یک حدس بتوانیم رمز قفل را پیدا کنیم، چقدر است؟

ب) اگر رمز دو رقمی شود، این احتمال چه تغییری می‌کند؟



۴- دو تاس را می‌اندازیم:

الف) با رسم جدول مناسب، همهٔ ۳۶ حالت ممکن را پیدا کنید.

ب) احتمال اینکه یکی از تاس‌ها ۳ و تاس دیگر ۵ بیاید، چقدر است؟

ج) احتمال اینکه هر دو تاس ۵ بیاید، چقدر است؟

د) پاسخ قسمت‌های ب و ج را با هم مقایسه کنید و دلیل تفاوت‌شان را بنویسید.

۵- دو سکه را می‌اندازیم. احتمال اینکه دست کم یکی از آنها رو بیاید، چقدر است؟

۶- لوله‌های انتساب آب به هر قسمت که برستند، دوشاخه می‌شوند.

پس از طی کردن 5 قسمت، چند خروجی خواهیم داشت؟ با عدد توان دار نشان دهید.



مرور فصل ۸

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- دسته‌بندی داده‌ها
- میانگین
- فراوانی
- مرکز دسته
- آمار
- حالت‌های هم‌شانس
- احتمال
- جدول حالت‌های ممکن
- نمودار درختی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

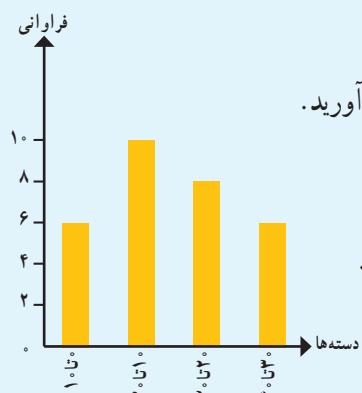
- دسته‌بندی داده‌های زیاد و پراکنده
- محاسبه میانگین داده‌های دسته‌بندی شده
- پیدا کردن احتمال یک پیشامد
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک جدول
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک نمودار درختی

کاربرد

آمار و احتمال در زندگی روزمره کاربرد وسیعی دارد. به کمک اطلاعات آماری و با درک مفهوم احتمال می‌توانیم وقوع رخدادهایی چون بارندگی، سیل و بارش برف را پیش‌بینی کیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- با توجه به نمودار مقابل، میانگین داده‌ها را به دست آورید.



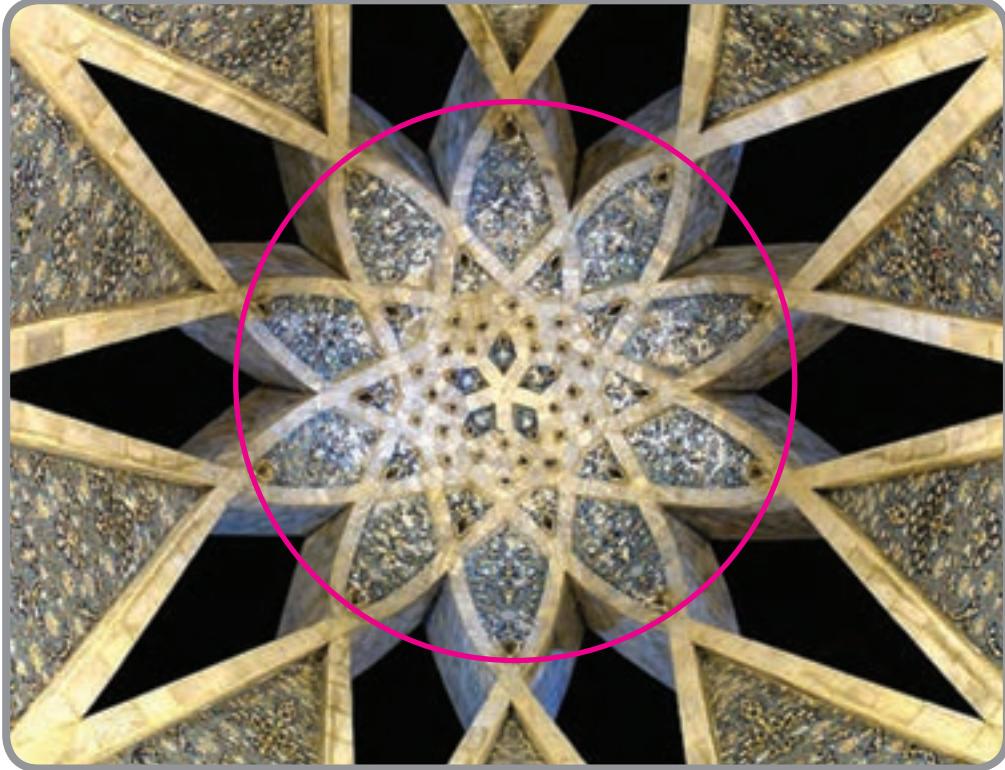
۲- دو تاس را می‌اندازم.

الف) تعدادی از حالت‌های هم‌شانس ممکن را بنویسید.

ب) احتمال اینکه هر دو تاس ۱ بیايد، چقدر است؟

۹ فصل

دایره



زاویه های محاطی و مرکزی و ارتباط آنها با کمان ها در دایره، کاربرد بسیاری در طراحی نقش فرش ها و دیگر صنایع دستی و معماری دارد.

در تصویر بالا نمای داخلی سقف آرامگاه حکیم خیام نیشابوری را مشاهده می کنید. خیام، فیلسوف، ریاضی دان، ستاره شناس و رباعی سرای ایرانی قرن پنجم هجری شمسی است. یکی از برجسته ترین کارهای وی اصلاح گاهشماری ایران در زمان وزارت خواجہ نظام الملک در دوره سلجوقی است.

خط و دایره

فعالیت

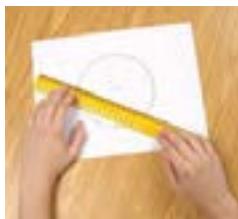


.O

- ۵** - پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه O، ۲ سانتی متر باشد.

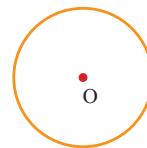
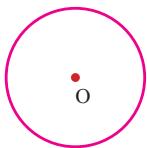
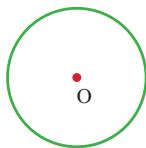
اگر این نقطه ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می شود؟

- ۶ - دو خط متمایز در صفحه، یا موازی اند یا متقاطع؛ یعنی یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه، یکدیگر را قطع می کنند.



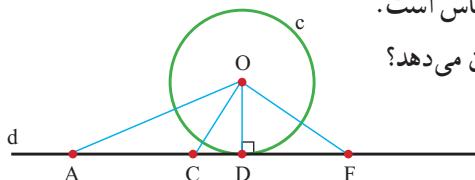
حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید

و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.

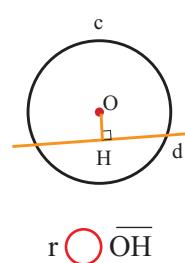
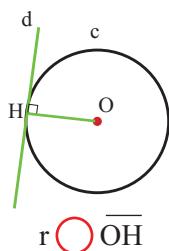
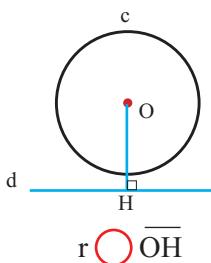


در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، می گوییم خط بر دایره مماس است.

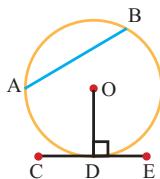
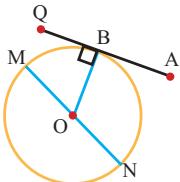
- ۷ - فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه ترین پاره خطی است که آن نقطه را به خط وصل می کند. خط d بر دایره c به مرکز O و شعاع r مماس است.
کدام پاره خط فاصله مرکز دایره از خط d را شان می دهد؟
اندازه این پاره خط را با r مقایسه کنید.



- ۸ - در هر یک از شکل های زیر، دایره ای به شعاع r رسم کرده ایم. فاصله مرکز دایره از خط d را OH بنامید و بدون اندازه گیری، رابطه های زیر را با علامت >، = یا < کامل کنید.



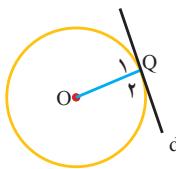
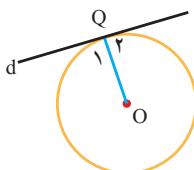
شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.



کار در کلاس

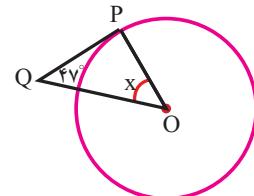
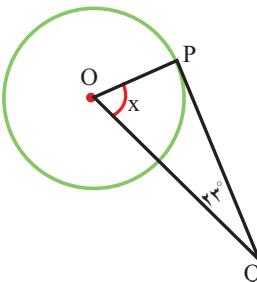
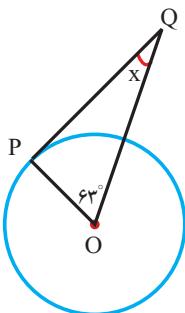


۱- در هر شکل، کدام پاره خط
بر دایره مماس است؟

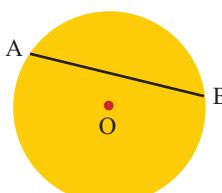


۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است.
زاویه Q چه نوع زاویه‌ای است؟

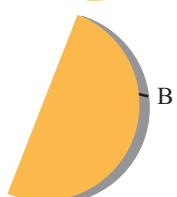
۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



فعالیت

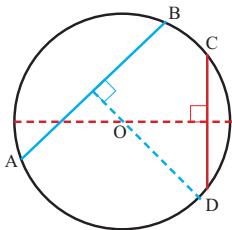


۵- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره‌ای رسم کنید؛ سپس، صفحه دایره‌ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید.
A را به B وصل کنید. این پاره خط **وتر دایره** نامیده می‌شود.
دایره را طوری تا کنید که نقاط A و B روی هم قرار بگیرند.
تای کاغذ را باز کنید.



روی خط تارا با مداد پرنگ کنید. در هندسه به این پاره خط چه می‌گویند؟
روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید.
دو پاره خط رسم شده، یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟

۲- نتیجهٔ فعالیت (۱) را به کمک شکل رویه‌رو توضیح دهید.



۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است.

تصویر آن را در شکل رویه‌رو می‌بینند.

با توجه به فعالیت‌های قبل، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم اندازهٔ قطر این بشقاب را مشخص کنیم.

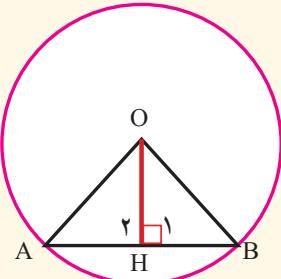
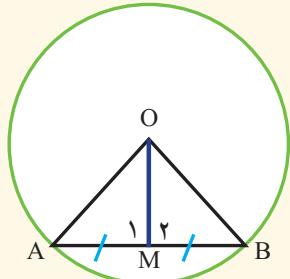


۴- دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجهٔ هر یک از آنها را کامل کنید.

این دو چه تفاوتی دارند؟ درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

خطی از O بر AB عمود می‌کنیم و پای M را به AB می‌نامیم و O را به M وصل می‌کنیم.
و سطح AB را به M می‌نامیم. دو مثلث AOM و BOM در $\overline{AM} = \overline{BM}$ ؛ پس دو مثلث AOM و BOM متساوی هستند؛ پس دو مثلث قائم الزاویه $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ هستند؛ پس دو زاویه $\angle AOH$ و $\angle BOH$ متساوی هستند؛ پس $\angle AOB = \angle BOA$ در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛

و $\overline{AH} = \overline{BH}$ در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛

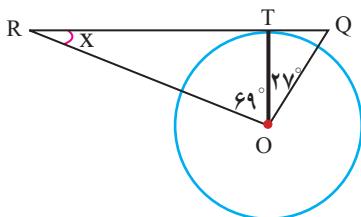


نتیجه: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را برعکس، پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند،

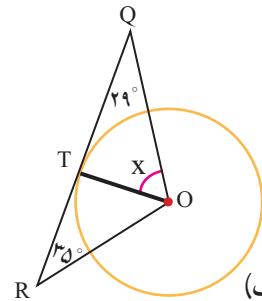
کار در کلاس



۱- در هر شکل، RQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.

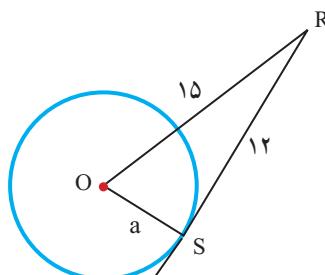
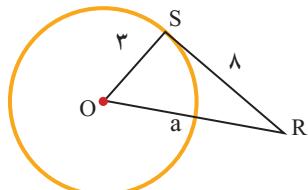


(ب)

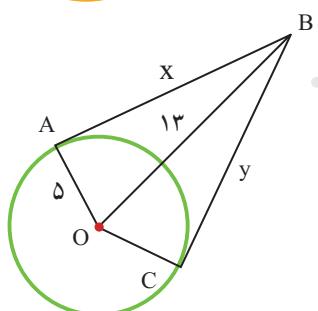


(الف)

۲- در هر شکل، SR بر دایره مماس است. مقدار a را به دست آورید.



تمرین



۱- نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری مرکز دایره ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد. از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده ایم. فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

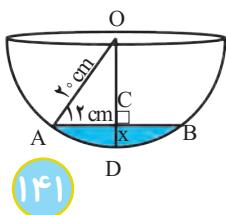
۲- از نقطه O' خارج دایره ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B بنامید. شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

الف) چرا $\overline{O'A} = \overline{O'B}$ ؟

ب) چرا $\hat{O}O'$ نیمساز \hat{O}' است؟

۳- در کاسه کروی رو به رو مقداری آب ریخته ایم،

\overline{AB} برابر ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟



زاویه های مرکزی

فعالیت ۵



۱- ساعت های رو به رو چه زمانی را نشان می دهند؟

پنج دقیقه بعد، هر یک از ساعت ها چه زمانی را نشان می دهد؟

در این مدت، عقربه دقیقه شمار چند درجه حرکت کرده است؟

در هر یک از ساعت ها مسیر حرکت عقربه دقیقه شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر

طولانی تری را طی کرده است؟

۲- (الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده اند.

کمان کوچک تر را با \widehat{AB} نمایش می دهیم و آن را کمان AB می نامیم.

آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.

ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه $\angle AOB$ زاویه مرکزی رو به رو به کمان AB نامیده می شود.

کمان AB نیز رو به رو به زاویه مرکزی $\angle AOB$ است.

۳- شکل رو به رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.

زاویه O_1 چه کسری از 36° درجه است؟

کمان رو به رو به O_1 در دایره c_1 چه کسری از دایره c_1 است؟

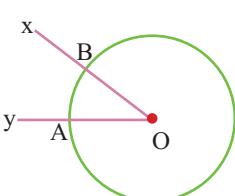
کمان رو به رو به O_1 در دایره c_2 چه کسری از دایره c_2 است؟

آیا این دو کسر با هم مساوی اند؟

آیا طول این دو کمان مساوی است؟

اندازه کمان AB ؛ با اندازه زاویه مرکزی رو به رو به آن برابر است؛ بنابراین، ممکن است دو

کمان با اندازه های مساوی، طول های متفاوتی داشته باشند.



۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان رو به رو به O_1 در هر یک

از دایره های c_1 و c_2 برابر 36° درجه است؟

۵- در شکل رو به رو زاویه xOy برابر 36° درجه است.

کمان AB چند درجه است؟

طول کمان AB چه کسری از دایره است؟

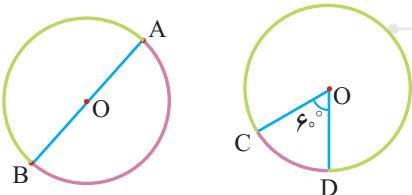
برای پاسخ دادن به این پرسش از تساوی رو به رو کمک بگیرید.

$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{36^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

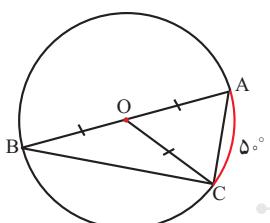
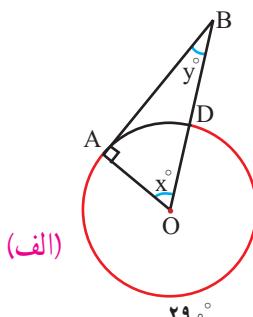
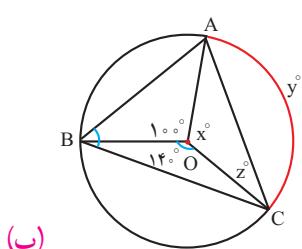
کار در کلاس



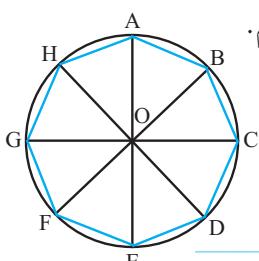
- ۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است.
اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.



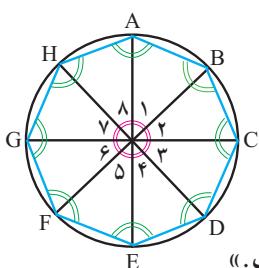
۲- اندازه کمان و زاویه های مجھول را پیدا کنید.



- ۳- در شکل رو به رو، AB قطر دایره است.
زاویه B چند درجه است؟



- ۱- محیط دایره روبرو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده ایم.
می خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.
رضای برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می کند :
« مثلث های COD، BOC، AOB و ... متساوی الساقین اند.
چرا؟



- و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots = \hat{O}_8$ ، پس همه زاویه های سبز رنگ با هم برابرند.
چرا؟
پس همه زاویه های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟
آرش می گوید : « ولی این تنها برابری زاویه ها را نشان می دهد
و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع های هشت ضلعی
پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است. »

بعد ادامه می دهد : «مثلث های $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ و ... هم نهشت اند؛ در چه حالتی؟

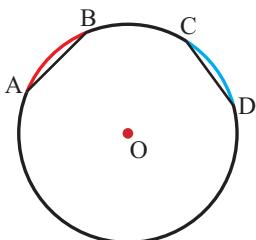
پس ... $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ ؛ یعنی ضلع های هشت ضلعی هم مساوی اند.»

هر جا لازم است، توضیحاتی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منظم بودن هشت ضلعی کامل شود.

۲- برای هر مورد دلیل بیاورید.

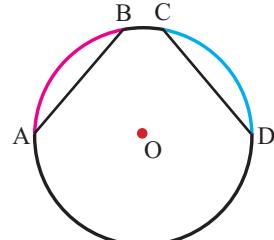
ب) فرض کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$.

? $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ چرا



الف) فرض کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$.

? $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ چرا



نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.

اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد،

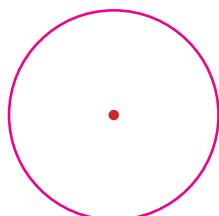
به عکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد،

کار در کلاس

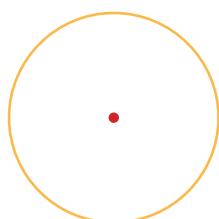


۱- با استفاده از خط کش و نقاله در دایره رو به رو

یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید.



۲- الف) دهانه پرگار را به اندازه شعاع دایره زیر باز کنید. از یک نقطه دایره، شروع کنید و بی دربی کمان بزنید.



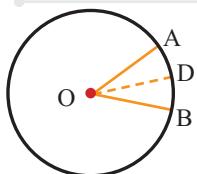
ب) بدین ترتیب، دایره به چند کمان تقسیم می شود؟

ج) چرا این کمانها با هم مساوی اند؟

د) هر کمان چند درجه است؟

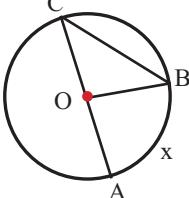
ه) چند کمان 120° درجه در شکل دیده می شود؟

تمرین



۱- $\hat{AOB} = 36^\circ$ نیمساز زاویه مرکزی AOB است و .

اندازه هریک از کمان های AD و BD چند درجه است؟



۲- کمان AB برابر x درجه است.

اندازه زاویه AOB را بحسب x به دست آورید.

اندازه زاویه ACB را بحسب x به دست آورید.

۳- متحرکی از نقطه A روی دایره ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می کند. در هر شکل، کمان طی شده مشخص شده است. جدول را کامل کنید.

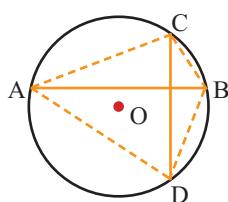
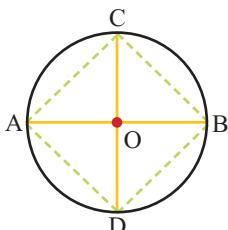
شکل	کسر طی شده از دایره	اندازه کمان طی شده	طول تقریبی کمان طی شده
		180°	
			90°
			$\frac{2\pi}{3}$
			$\frac{\pi}{4}$
			2π

۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند.

الف) چرا کمان های AC ، BD ، CB ، DA با هم مساوی اند؟

ب) آیا وترهای AC ، BD ، CB ، DA نیز با هم مساوی اند؟

ج) آیا زاویه های چهارضلعی $ADBC$ با هم مساوی اند؟ چرا؟



۵- در شکل رو به رو، وترهای AB و CD بر هم عمودند.

الف) آیا کمان های AC ، CB ، DA با هم مساوی اند؟

ب) پاسختان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.

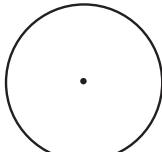
این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟

زاویه‌های محاطی

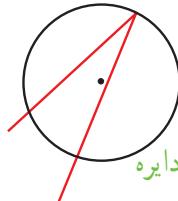
فعالیت ۵



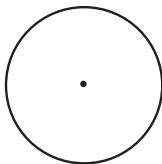
۱- مانند نمونه رسم شده (الف) در شکل‌های زیر نمونه‌ای از هر یک از وضعیت‌های مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.



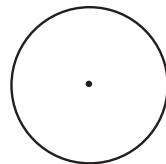
ب) رأس زاویه خارج دایره



الف) رأس زاویه روی دایره



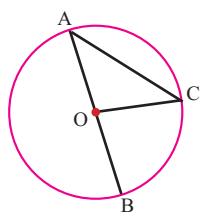
د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه‌ای غیر از مرکز



ج) رأس زاویه در مرکز دایره

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟

به زاویه‌ای که در شکل «الف» مشاهده می‌کنید، **زاویه محاطی** گفته می‌شود. رأس این زاویه روی دایره است و ضلع‌های آن، دایره را قطع کرده‌اند.

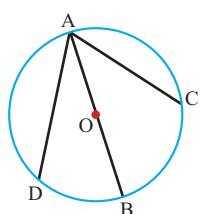


$$\hat{B}OC = \hat{B}C \text{ بتوسید:}$$

چرا زاویه‌های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟

چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟

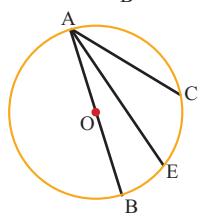
اندازه زاویه محاطی BAC را بحسب $\hat{B}C$ بتوسید.



۳- با توجه به فعالیت قبل با پر کردن جاهای خالی

اندازه زاویه محاطی DAC را بحسب \hat{DC} بتوسید.

$$\hat{D}AC = \hat{D}AB + \hat{B}AC = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



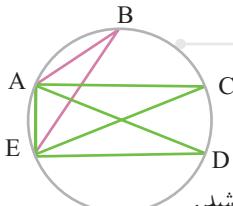
۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی

را هم بحسب \hat{EC} بتوسید.

$$\hat{E}AC = \hat{B}AC - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید. آیا در این سه فعالیت، همه حالت‌های زاویه محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید.

اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با

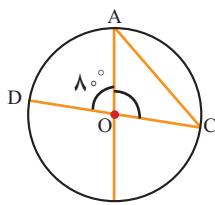


کار در کلاس



۱- با توجه به شکل رویه‌رو،

الف) زاویه‌های محاطی مقابل به \widehat{AE} را پیدا کنید.



۲- در شکل رویه‌رو، اندازهٔ زاویهٔ محاطی C را تعیین کنید.

دو داش آموز به این سؤال جواب داده‌اند.

راه حل‌های آنها را توضیح دهید.

$$\hat{O} = 18^\circ \longrightarrow \hat{AD} = 18^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\hat{AD}}{2} = \frac{18^\circ}{2} = 9^\circ$$

$$\hat{O}_1 = 18^\circ - 18^\circ = 0^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 18^\circ - 0^\circ = 18^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{C} = \frac{18^\circ}{2} = 9^\circ$$

زهرا

فاطمه

فعالیت

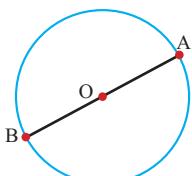
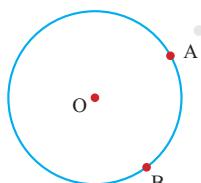


۱- یک زاویهٔ محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

سه زاویهٔ محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

فکر می‌کنید چند زاویهٔ دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

آیا همهٔ این زاویه‌های رسم شده با هم برابرند؟ چرا؟



۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازهٔ هر کمان چند درجه است؟ چرا؟

چند زاویهٔ محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

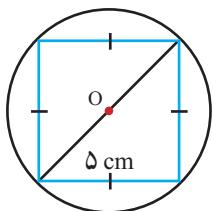
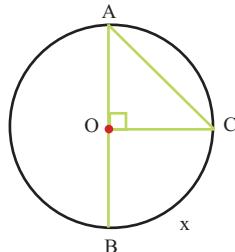
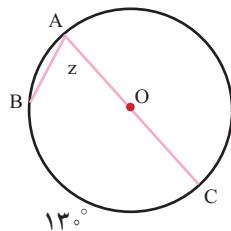
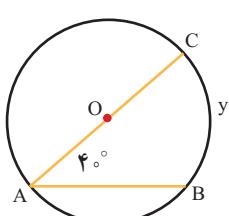
چند زاویهٔ محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

اندازهٔ این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

کار در کلاس



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را پیدا کنید.

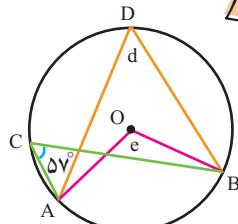
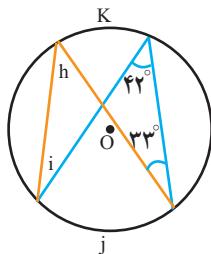


۲- در شکل رویه‌رو، همه رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر روی دایره قرار دارد.

چرا این لوزی، مربع است؟
قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

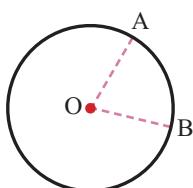


۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.

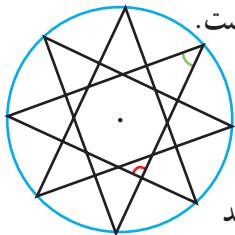


۲- در شکل زیر زاویه مرکزی $\angle AOB$ برابر با 72° درجه است. اندازه کمان AB چند درجه است؟

اگر، دهانه پرگار را به اندازه AB باز کنیم و با شروع از نقطه B ، پی دربی کمان‌هایی بزنیم، چند کمان مساوی روی دایره جدا می‌شود؟



۳- در شکل رویه‌رو، دایره‌ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.



الف) شکل چند خط تقارن دارد؟

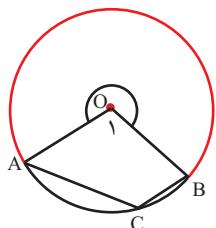
ب) اندازه دو زاویه مشخص شده را روی شکل پیدا کنید و بنویسید.

۴- دایره‌ای بکشید. سپس، چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید

که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

چرا مجموع دو زاویه رویه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر 180° درجه است؟

۵- در شکل رویه‌رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.



الف) اندازه زاویه O را برحسب x بنویسید.

ب) اندازه کمان قمز رنگ را برحسب x بنویسید.

ج) اندازه زاویه C را برحسب x بنویسید.

۶- در شکل زیر، پره‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخ ایجاد کرده‌اند.

شعاع چرخ 30° سانتی‌متر است.

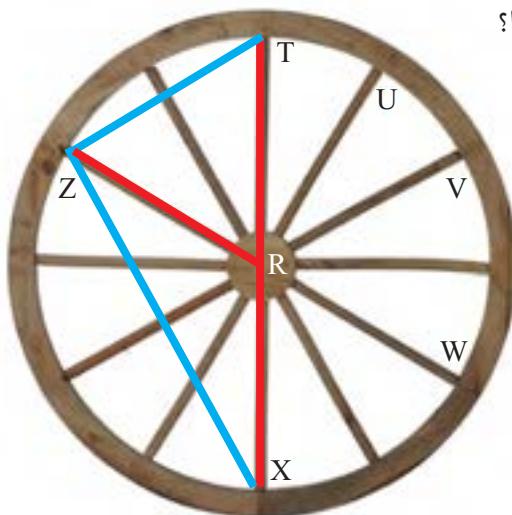
الف) طول TX چقدر است؟

ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

ج) طول ZT چقدر است؟

د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

ه) طول ZX چقدر است؟



مرور فصل ۹

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند، مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- خط مماس • زاویه مرکزی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند، با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

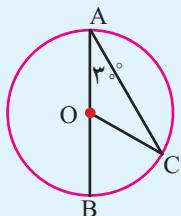
- پیدا کردن مرکز دایره
- تساوی کمان‌ها و وترهای متناظر
- رسم خط مماس بر دایره
- رسم چندضلعی منتظم به کمک زاویه مرکزی
- پیدا کردن زاویه محاطی با توجه به کمان رو به روی آن

کاربرد

رسم چندضلعی‌های منتظم به کمک مفاهیم زاویه مرکزی یکی از کاربردهای مهم این درس در طراحی شکل‌های تزیینی و معماری است.

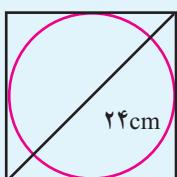
تمرین‌های ترکیبی

۱- با توجه به شکل رو به رو، اندازه زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.

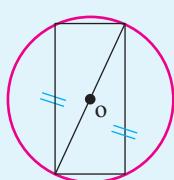


$$\hat{C} = \dots, \hat{COB} = \dots, \hat{BC} = \dots$$

۲- کاغذی مربعی شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید.



۳- (الف) در شکل زیر، ضلع‌های رو به رو به هم در چهارضلعی با هم برابرند.
چرا چهارضلعی مستطیل است؟



(ب) شعاع دایره برابر ۵ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{19}$ سانتی‌متر است.
طول مستطیل را به دست آورید.



علیان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیاسی آمان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطلب

این کتاب از طریق نامه برگشتنی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴ - گروه دسی مریوط و یا پایام نگار (Email)

ارسال نمایند.

و منتایف کتاب های درسی بموی و تقویت نظری

ردیف	واژه بیگانه	معادل در کتاب	معادل مصوب فرهنگستان
۱	graphist	طراح گرافیک	نگاشتارگر
۲	enciphering, encryption	رمزگذاری	
۳	drag	پسا	پسار
۴	lift	برآ	برآر
۵	parking	پارکینگ	توقفگاه
۶	bar chart, bar graph, bar diagram	نمودار ستونی	نمودار میله‌ای