

# PARADIGMAS DE PROJETO DE ALGORITMOS

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 12 de março de 2024

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação



Projeto de algoritmos é um método específico para criar um processo matemático na resolução de problemas.

- Quando aplicado, da-se origem a engenharia de algoritmos

Existem diversas formas de se realizar o projeto de algoritmos

- Cada *forma de pensamento* constitui um diferente paradigma
  - Recursividade
  - Força bruta
  - Guloso
  - **Divisão e conquista**
  - **Programação dinâmica**

# DIVISÃO E CONQUISTA

Um algoritmo de divisão e conquista é baseado em três passos básicos

1. Dividir o problema em subproblemas menores (**Divisão**)
2. Resolver cada subproblema separadamente (**Conquista**)
3. Recombinar as soluções dos subproblemas em uma solução global

Na grande maioria das vezes, algoritmos de divisão e conquista são baseados em recursão

- Se a entrada é muito grande, divide-se em partes menores e as resolve de forma recursiva
- Se a entrada já é pequena o suficiente, então ela é resolvida

Existem alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando este paradigma

Ordenação de números

- Mergesort
- Quicksort

Computação da sequência de Fibonacci

- Implementação recursiva

Busca binária

Encontrar a maior subsequência de elementos em um vetor

# QUANDO UTILIZAR DIVISÃO E CONQUISTA

Existem quatro condições para a eficiente utilização deste paradigma

1. Deve-se ser possível dividir o problema em subproblemas menores
2. A combinação dos resultados deve ser eficiente
3. Subproblemas devem ter tamanhos parecidos
  - Sempre que estiverem no mesmo nível de recursão
4. A solução dos subproblemas deve ser simples
  - Operações repetidas ou correlacionadas

**D&CGenerico**( $x$ )

**Entrada:** (sub)problema  $x$

**se**  $x$  *é o caso base* **então**

    | **retorna** *resolve*( $x$ );

**senão**

    | **Divida**  $x$  em  $n$  subproblemas  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ ;

    | **para**  $i \leftarrow 0$  **até**  $n - 1$  **faça**

        |  $y_i \leftarrow$  **D&CGenerico**( $x_i$ );

    | **fim**

    | **Combine**  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  em  $y$ ;

    | **retorna**  $y$ ;

**fim**

A complexidade de algoritmos construídos utilizando este paradigma deve ser analisada como equações de recorrência

Mergesort e Quicksort:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \forall n > 1;$$

Busca em árvore binária:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

## DIVISÃO E CONQUISTA - VANTAGENS

Problemas muito grandes, quando divididos, tornam-se exponencialmente mais simples

Tendência a complexidade logaritmica

Algoritmos altamente paralelizáveis na *conquista*

Maior precisão numérica

- Caso seja necessário realizar calculos matemáticos extremamente precisos (muitas casas decimais) é mais interessante realizar diversos calculos em separado e depois agrupa-los



## DIVISÃO E CONQUISTA - DESVANTAGENS

Número de chamadas recursivas pode ser inconveniente

- Pilha de execução muito grande
- Grande uso de memória

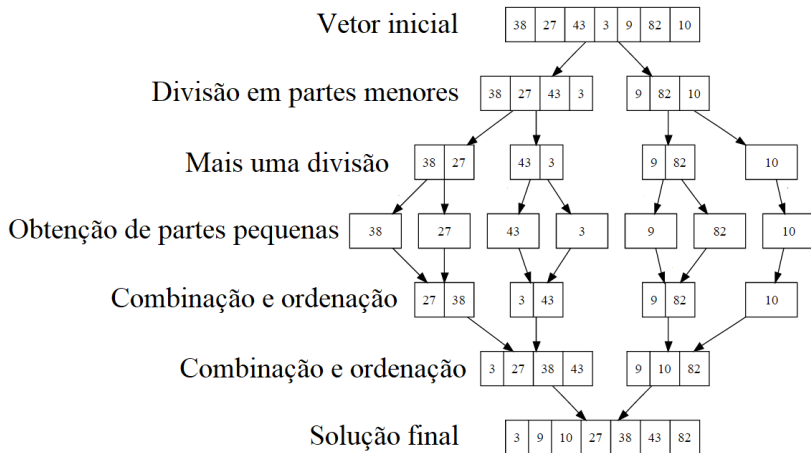
Eventual dificuldade para definir o caso base

- Quando eu paro de dividir e começo a conquistar?

Rendundância na resolução de subproblemas repetidos

- Semelhante ao que acontece ao resolvermos a sequência de Fibonacci

# MERGESORT



# PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

É um nome *chique* para algoritmos recursivos utilizando uma tabelinha

- Cada subproblema recursivo é resolvido e guardado em uma tabela
- Subproblemas são resolvidos sequencialmente
  - Em ordem crescente de tamanho
- Subproblemas salvos são utilizados na resolução de problemas maiores

Quando um algoritmo recursivo tem complexidade exponencial, a programação dinâmica pode levar a um algoritmo mais eficiente

Caso a soma dos tamanhos dos subproblemas seja igual a  $O(n)$ , é possível obter algoritmos eficientes

Caso sejam obtidos  $n$  subproblemas de tamanho  $n - 1$ , a tendência é gerar um algoritmo exponencial

# RECURSIVIDADE PARA COMPUTO DE TABELA VERDADE

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

A = 0



A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0

A = 1



A	B	C	D	F
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Algoritmos por Programação Dinâmica são quase sempre recursivos

- De certa forma, lembram algoritmos de divisão e conquista

Um possível defeito na busca recursiva é a computação redundante de subproblemas, ou a exploração redundante do espaço de busca

- Para contornar esta situação, podemos armazenar os resultados dos subproblemas já resolvidos
  - Para cada subproblema inédito, o resolvemos e armazenamos o resultado
  - Para os subproblemas repetidos, apenas consultamos o resultado

# CARACTERIZAÇÃO DOS PROBLEMAS

Programação dinâmica é aplicável a problemas que possuem as seguintes propriedades

**Formulação recursiva bem definida:** Caso a formulação seja recursiva, esta não deve possuir ciclos

**Subestrutura ótima:** A combinação de soluções ótimas de subproblemas também é ótima

**Superposição de subproblemas:** O espaço de subproblemas é pequeno e eles se repetem com frequência durante a solução do problema original.



# TABELA DA PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A definição da estrutura desta tabela é de extrema importância para a eficiência do algoritmo

- Quais serão as dimensões da tabela?
- O que significa cada dimensão da tabela
- Como determinar os índices de entrada da tabela?
- O que será salvo em cada entrada da tabela?
  - Valor da solução?
  - Componentes da solução?

Nesta abordagem *top-down* é utilizada recursão

Problema original é decomposto em subproblemas menores que são resolvidos recursivamente

- Logo após, são combinados em uma solução global

As entradas da tabela são preenchidas conforme necessário

- Pode ser que a tabela não seja completamente preenchida

Algoritmos que não utilizam recursão

- Subproblemas são resolvidos e combinados sucessivamente de maneira a construir a solução do problema original

A tabela é completamente preenchida

- Preenchida em ordem, dos subproblemas menores para os maiores

# VANTAGENS E DESVANTAGENS

A programação dinâmica realiza um *trade-off* entre tempo de computação e espaço de memória

## Vantagens

- Economiza a computação de soluções de subproblemas repetidos
  - Superposição de problemas
  - Subestrutura ótima

## Perigos

- Tabela pode crescer exponencialmente
  - Grande gasto de memória

Qual é a melhor maneira de se fazer a multiplicação de  $n$  matrizes?

- O produto de uma matriz  $p \times q$  por outra  $q \times r$  requer  $\mathcal{O}(pqr)$  operações

Considere o produto:

$$M = M_1[10, 20] \times M_2[20, 50] \times M_3[50, 1] \times M_4[1, 100]$$

- O produto  $M = M_1 \times (M_2 \times (M_3 \times M_4))$  tem 125 mil operações
- O produto  $M = (M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4$  tem somente 2200 operações

## EXEMPLO

Seja  $m_{ij}$  o menor custo para computar o produto  $M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_j$ , para  $1 \leq i \leq j \leq n$

Podemos definir um algoritmo de programação dinâmica como

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ \min_{i \leq k \leq j} (m_{ik} + m_{k+1,j} + b_{i-1}b_kb_j), & \text{se } j > i \end{cases}$$

- $m_{ik}$  é o custo mínimo para computar  $M' = M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_k$
- $m_{k+1,j}$  é o custo mínimo para computar  $M'' = M_{k+1} \times M_{k+2} \times \dots \times M_j$
- $b_{i-1}b_kb_j$  representa o custo para multiplicar as matrizes  $M'[b_{i-1}, b_k]$  e  $M''[b_k, b_j]$

# EXEMPLO

Os valores  $m_{ij}$  são calculados em ordem crescente

- Algoritmo *bottom-up*
- Não utiliza recursão

O algoritmo se inicia computando  $m_{ii}$  para todo  $i$

- Depois computa  $m_{i,i+1}$  para todo  $i$
- Depois computa  $m_{i,i+2}$  para todo  $i$
- ...

## EXEMPLO

$m_{11} = 0$	$m_{12} = 10.000$	$m_{13} = 1.200$	$m_{14} = 2.200$
	$m_{22} = 0$	$m_{23} = 1.000$	$m_{24} = 3.000$
		$m_{33} = 0$	$m_{34} = 5.000$
			$m_{44} = 0$



# EXEMPLO

```
1  #define Maxn 10
2  int main(int argc, char *argv[]) {
3      int i, j, k, h, n, temp;
4      int b[Maxn+1];
5      int m[Maxn][Maxn];
6      printf("Numero de matrizes n: ");
7      scanf("%d", &n);
8      getchar();
9      printf("Dimensoes das matrizes: ");
10     for (i = 0; i <= n; i++) {
11         scanf("%d", &b[i]);
12     }
13     for (i = 0; i < n; i++) {
14         m[i][i] = 0;
15     }
16     for (h = 1; h <= n-1; h++) {
17         for (i = 1; i <= n-h; i++) {
18             j = i+h;
19             m[i-1][j-1] = INT_MAX;
20             for (k = i; k <= j-1; k++) {
21                 temp = m[i-1][k-1] + m[k][j-1] + b[i-1] * b[k] * b[j];
22                 if (temp < m[i-1][j-1]) {
23                     m[i-1][j-1] = temp;
24                 }
25             }
26             printf("m[%d][%d] = %d\n", i-1, j-1, m[i-1][j-1]);
27         }
28         putchar("\n");
29     }
30     return 0;
31 }
```