

ALGORITMOS APROXIMATIVOS

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 15 de maio de 2024

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação



Um algoritmo aproximativo é uma heurística "diferente"

Ele **garante** uma boa solução

- É possível ter uma análise formal da qualidade das soluções geradas através dele

Como qualquer heurística, algoritmos aproximativos são rápidos

- Tempo polinomial

É possível ter, ao menos, 5 diferentes medidas de aproximação

1. Aproximação absoluta
2. Fator de aproximação
3. Esquemas de aproximação
4. Fator de aproximação assintótico
5. Fator de aproximação probabilístico

APROXIMAÇÃO ABSOLUTA

Dado um algoritmo aproximativo **A** e uma instância qualquer **I**

- $OPT(I)$ é o valor da solução ótima
- $A(I)$ é o valor da solução gerada pelo algoritmo A

Uma aproximação absoluta com fator k é tal que

$$|A(I) - OPT(I)| \leq k, \quad \forall I$$

COLORAÇÃO DE VÉRTICES EM UM GRAFO PLANAR

Grafo planar: um grafo que pode ser desenhado em um plano de forma que nunca vão existir duas arestas se cruzando

Problema da coloração de vértices: Atribuir uma cor a cada vértice de tal forma que vértices vizinhos sempre tenham cores diferentes

- NP-Completo

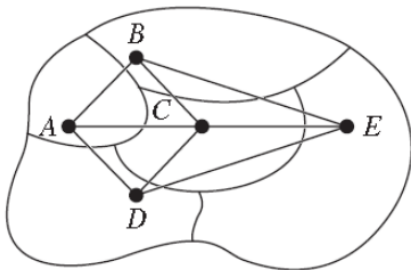
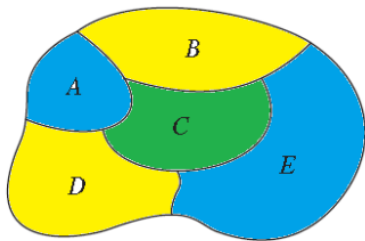
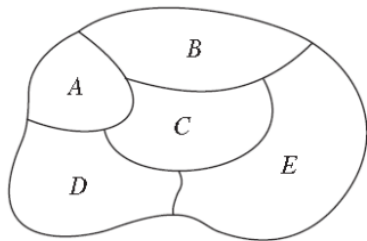
Coloração de vértices de um grafo planar: Sempre é possível colorir os vértices de um grafo planar com 4 ou menos cores

- Aplicações: Coloração de mapas

Existe um algoritmo polinomial de 1-aproximação absoluta

- Garante a coloração de qualquer grafo planar com 5 cores

COLORAÇÃO DE VÉRTICES EM UM GRAFO PLANAR



FATOR DE APROXIMAÇÃO

Dado um algoritmo aproximativo **A** e uma instância qualquer **I**

- $OPT(I)$ é o valor da solução ótima
- $A(I)$ é o valor da solução gerada pelo algoritmo A

Um fator de aproximação α é tal que

$$A(I) \leq \alpha OPT(I), \quad \forall I \quad (\text{minimização})$$

$$A(I) \geq \alpha OPT(I), \quad \forall I \quad (\text{maximização})$$

Definição do problema: Encontrar um ciclo em um grafo de custo mínimo

- Ciclo passando por todos os vértices do grafo

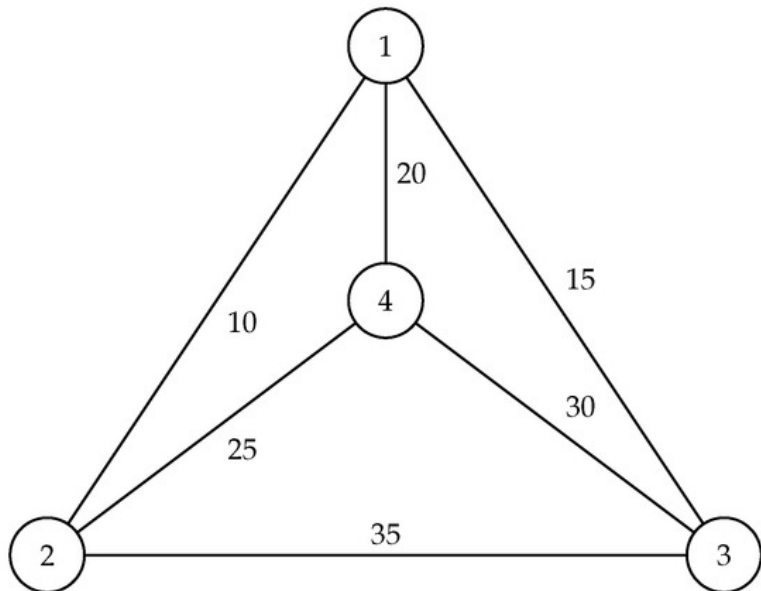
Algoritmo 2-aproximativo: Baseado no algoritmo de Prim

1. Construa uma AGM utilizando o algoritmo de Prim a partir do vértice a qualquer
2. Faça o caminho na árvore em pré-ordem
3. Adicione a novamente ao fim deste caminho

Caminho pré-ordem

1. Visitar a raiz
2. Caminhar na subárvore à esquerda, seguindo este caminho
3. Caminhar na subárvore à direita, seguindo este caminho

CAIXEIRO VIAJANTE



ESQUEMAS DE APROXIMAÇÃO

Fator de aproximação está inbutido no tempo de execução do algoritmo

- Quanto maior a complexidade do algoritmo, melhor é a garantia da solução
- Controlado por um fator $\epsilon > 0$

Esquema de aproximação de tempo polinomial (PTAS)

Esquema de aproximação de tempo polinomial completo (FPTAS)

- Complexidade é limitada em $\frac{1}{\epsilon}$

$(1 + \epsilon)$ -aproximação para um problema de minimização

$(1 - \epsilon)$ -aproximação para um problema de maximização

PTAS

- $O(n^{\frac{1}{\epsilon}})$
- $O(n^2 5^{\frac{1}{\epsilon}})$
- $O(\frac{1}{\epsilon} n^3)$

FPTAS

- $O(\frac{1}{\epsilon} n^2)$
- $O(\frac{1}{\epsilon^3} n^5)$

FATOR DE APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICO

Dado um algoritmo aproximativo **A** e uma instância qualquer **I**

- $OPT(I)$ é o valor da solução ótima
- $A(I)$ é o valor da solução gerada pelo algoritmo A

Um fator de aproximação assintótico α é tal que

$$A(I) \leq \alpha OPT(I) + \beta, \quad \forall I \quad (\text{minimização})$$

$$A(I) \geq \alpha OPT(I) + \beta, \quad \forall I \quad (\text{maximização})$$

para alguma constante $\beta > 0$

FATOR DE APROXIMAÇÃO PROBABILÍSTICO

Imagine uma função $rand(0, 1)$

- Ela retorna 1 com probabilidade ρ
- Ela retorna 0 com probabilidade $1 - \rho$

Um algoritmo probabilístico é aquele que faz uso desta função $rand(0, 1)$

Um algoritmo probabilístico é polinomial se

- O número de chamadas a função $rand(0, 1)$ é polinomial
- A complexidade do algoritmo também é polinomial

FATOR DE APROXIMAÇÃO PROBABILÍSTICO

Dado um algoritmo aproximativo **A** e uma instância qualquer **I**

- $OPT(I)$ é o valor da solução ótima
- X_I é uma variável aleatória que representa o valor da solução ao aplicar o algoritmo **A** na instância **I**

Um fator de aproximação probabilístico α é tal que

$$\mathbf{E}[X_I] \leq \alpha \, OPT(I), \quad \forall I \quad (\text{minimização})$$

$$\mathbf{E}[X_I] \geq \alpha \, OPT(I), \quad \forall I \quad (\text{maximização})$$