

Lista de exercícios

1 Introdução

Exercício 1.1

(Solução 1.1)

Assista ao vídeo “*What’s an algorithm?*” (David J. Malan).

⇒ <https://youtu.be/6hfOvs8pY1k>

Exercício 1.2

(Solução 1.2)

Assista ao vídeo “*Top 7 Data Structures for Interviews*”.

⇒ <https://youtu.be/cQWr9DFE1ww>

2 Complexidade de algoritmos

Exercício 2.1

(Solução 2.1)

Desenhe o gráfico das funções $8n$, $4n \log n$, $2n^2$, n^3 e 2^n usando uma escala logarítmica para os eixos x e y , isto é, se o valor da função $f(x)$ é y , desenhe esse ponto com a coordenada x em $\log x$ e a coordenada y em $\log y$.

Exercício 2.2

(Solução 2.2)

O número de operações executadas por dois algoritmos A e B é $40n^2$ e $2n^3$, respectivamente. Determine n_0 tal que A seja melhor que B para $n \geq n_0$.

Exercício 2.3

(Solução 2.3)

O número de operações executadas por dois algoritmos A e B é $8n \log n$ e $2n^2$, respectivamente. Determine n_0 tal que A seja melhor que B para $n \geq n_0$.

Exercício 2.4

(Solução 2.4)

Ordene as funções a seguir por sua taxa assintótica de crescimento.

- $4n \log n + 2n$
- 2^{10}
- $3n + 100 \log n$
- $4n$
- 2^n
- $n^2 + 10n$
- n^3
- $n \log n$

Exercício 2.5

(Solução 2.5)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de \mathcal{O}) do algoritmo abaixo?

```
1  /** Returns the sum of the integers in given array. */
2  public static int alg1(int[] arr) {
3      int n = arr.length, total = 0;
4      for (int j=0; j < n; j++)
5          total += arr[j];
6      return total;
7  }
```

Exercício 2.6

(Solução 2.6)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de \mathcal{O}) do algoritmo abaixo?

```
1  /** Returns the sum of the integers with even index in given array. */
2  public static int alg2(int[] arr) {
3      int n = arr.length, total = 0;
4      for (int j=0; j < n; j += 2)
5          total += arr[j];
6      return total;
7  }
```

Exercício 2.7

(Solução 2.7)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de \mathcal{O}) do algoritmo abaixo?

```
1  /** Returns the sum of the prefix sums of given array. */
2  public static int alg3(int[] arr) {
3      int n = arr.length, total = 0;
4      for (int j=0; j < n; j++)
5          for (int k=0; k <= j; k++)
6              total += arr[k];
7      return total;
8  }
```

Exercício 2.8

(Solução 2.8)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de \mathcal{O}) do algoritmo abaixo?

```
1  /** Returns the sum of the prefix sums of given array. */
2  public static int alg4(int[] arr) {
3      int n = arr.length, prefix = 0, total = 0;
4      for (int j=0; j < n; j++) {
5          prefix += arr[j];
6          total += prefix;
7      }
8      return total;
9  }
```

Exercício 2.9

(Solução 2.9)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de \mathcal{O}) do algoritmo abaixo?

```
1  /** Returns the number of times second array stores sum of prefix sums from first. */
2  public static int alg5(int[] first, int[] second) {
3      int n = first.length, count = 0;
4      for (int i=0; i < n; i++) {
5          int total = 0;
6          for (int j=0; j < n; j++)
7              for (int k=0; k <= j; k++)
8                  total += first[k];
9          if (second[i] == total) count++;
10     }
11     return count;
12 }
```

Exercício 2.10

(Solução 2.10)

O algoritmo A executa uma computação em tempo $\mathcal{O}(\log n)$ para cada entrada de um arranjo de n elementos. Qual o pior caso em relação ao tempo de execução de A?

Exercício 2.11

(Solução 2.11)

Dado um arranjo X de n elementos, o algoritmo B escolhe $\log n$ elementos de X, aleatoriamente, e executa um cálculo em tempo $\mathcal{O}(n)$ para cada um. Qual o pior caso em relação ao tempo de execução de B?

Exercício 2.12

(Solução 2.12)

Dado um arranjo X de n elementos inteiros, o algoritmo C executa uma computação em tempo $\mathcal{O}(n)$ para cada número par de X e uma computação em tempo $\mathcal{O}(\log n)$ para cada elemento ímpar de X. Qual o melhor caso e o pior caso em relação ao tempo de execução de C?

Exercício 2.13

(Solução 2.13)

Dado um arranjo X de n elementos, o algoritmo D chama o algoritmo E para cada elemento X[i]. O algoritmo E executa em tempo $\mathcal{O}(i)$ quando é chamado sobre um elemento X[i]. Qual o pior caso em relação ao tempo de execução do algoritmo D?

Exercício 2.14

(Solução 2.14)

Implemente os algoritmos `disjoint1` e `disjoint2` (apresentados nos materiais de aula), e execute uma análise experimental dos seus tempos de execução. Visualize seus tempos de execução como uma função do tamanho da entrada usando um gráfico *di-log*.

Exercício 2.15

(Solução 2.15)

Execute uma análise experimental para testar a hipótese de que o método da biblioteca Java, `java.util.Arrays.sort` executa em um tempo médio $\mathcal{O}(n \log n)$.

Exercício 2.16

(Solução 2.16)

Execute uma análise experimental para determinar o maior valor de n para os algoritmos `unique1` e `unique2` (apresentados nos materiais de aula), de modo que o algoritmo execute em um minuto ou menos.

3 Estruturas de dados fundamentais

Exercício 3.1

(Solução 3.1)

O método `removeFirst` da classe `SinglyLinkedList` inclui um caso especial para redefinir o campo `tail` para `null` na remoção do último elemento da lista. Quais são as consequências de remover essas linhas de código? Explique por que a classe não funcionaria com essa modificação.

Exercício 3.2

(Solução 3.2)

Forneça uma implementação para o método `size()` da classe `SinglyLinkedList`, considerando que a mesma não mantenha o tamanho armazenado em uma variável. Qual a implicação dessa modificação na complexidade assintótica do método?

Exercício 3.3

(Solução 3.3)

Proponha um algoritmo para encontrar o penúltimo nodo em uma lista simplesmente encadeada na qual o último nodo possui uma referência nula no campo `next`.

Exercício 3.4

(Solução 3.4)

Forneça a implementação do método `removeLast` para a classe `SinglyLinkedList`, para remover o último elemento da lista.

Exercício 3.5

(Solução 3.5)

Considere o método `addFirst` da classe `CircularlyLinkedList`. O corpo do `else` depende de uma variável local `newest`. Projete um novo código para esta cláusula sem o uso de nenhuma variável local.

Exercício 3.6

(Solução 3.6)

Descreva um método para encontrar o nodo central de uma lista duplamente encadeada com nodos sentinelas, sem o uso de informações sobre o tamanho da lista. No caso de um número par de nodos, o método deve devolver o nodo à esquerda do ponto central. Qual a complexidade deste algoritmo?

Exercício 3.7

(Solução 3.7)

Forneça uma implementação para o método `size()` da classe `CircularlyLinkedList`, considerando que a mesma não mantenha o tamanho armazenado em uma variável. Qual a implicação dessa modificação na complexidade assintótica do método?

Exercício 3.8

(Solução 3.8)

Forneça uma implementação para o método `size()` da classe `DoublyLinkedList`, considerando que a mesma não mantenha o tamanho armazenado em uma variável. Qual a implicação dessa modificação na complexidade assintótica do método?

Exercício 3.9

(Solução 3.9)

Implemente o método `equals()` para a classe `CircularlyLinkedList`, assumindo que duas listas são iguais se elas possuem a mesma sequência de elementos, com os elementos correspondentes no início da lista.

Exercício 3.10

(Solução 3.10)

Descreva um algoritmo para concatenar duas listas simplesmente encadeadas L e M , em uma lista única L' que contém todos os nodos de L seguido de todos os nodos de M .

Exercício 3.11

(Solução 3.11)

Descreva um algoritmo para concatenar duas listas duplamente encadeadas L e M com sentinelas, em uma lista única L' .

Exercício 3.12

(Solução 3.12)

Descreva em detalhes como trocar dois nodos x e y de posição (não apenas seu conteúdo) em uma lista simplesmente encadeada L , dadas as referências para x e y somente. Repita este exercício para o caso em que L é uma lista duplamente encadeada. Qual algoritmo possui maior complexidade?

Exercício 3.13

(Solução 3.13)

Descreva em detalhes um algoritmo para reverter uma lista simplesmente encadeada L usando somente uma quantidade constante de espaço adicional.

4 Pilhas, Filas e Deques

Exercício 4.1

([Solução 4.1](#))

Suponha que inicialmente uma pilha vazia *S* tenha realizado um total de 25 operações *push*, 12 operações *top* e 10 operações *pop*, 3 das quais retornaram *null*, indicando uma pilha vazia. Qual é o tamanho atual de *S*?

Exercício 4.2

([Solução 4.2](#))

Sendo a pilha do exercício anterior uma instância da classe `ArrayStack`, qual o valor final da variável *t*?

Exercício 4.3

([Solução 4.3](#))

Quais valores são retornados durante as seguintes operações, se executadas em uma pilha inicialmente vazia? *push*(5), *push*(3), *pop*(), *push*(2), *push*(8), *pop*(), *pop*(), *push*(9), *push*(1), *pop*(), *push*(7), *push*(6), *pop*(), *pop*(), *push*(4), *pop*(), *pop*().

Exercício 4.4

([Solução 4.4](#))

Implemente um método com a assinatura `transfer(S, T)` que transfere todos os elementos da pilha *S* para a pilha *T*, de modo que o elemento que iniciou no topo de *S* é o primeiro elemento a ser inserido em *T*, e o último elemento de *S* termina no topo de *T*.

Exercício 4.5

([Solução 4.5](#))

Apresente um método recursivo que remove todos os elementos de uma pilha.

Exercício 4.6

([Solução 4.6](#))

Suponha que uma fila vazia *Q* realizou um total de 32 operações de *enqueue*, 10 operações *first* e 15 operações *dequeue*, 5 das quais retornaram *null*, indicando uma fila vazia. Qual é o tamanho atual de *Q*?

Exercício 4.7

([Solução 4.7](#))

Sendo a fila do exercício anterior uma instância da classe `ArrayQueue` com uma capacidade de 30 elementos nunca excedida, qual o valor final da variável *f*?

Exercício 4.8

([Solução 4.8](#))

Quais são os valores retornados após as seguintes operações, se executadas em uma fila inicialmente vazia? *enqueue*(5), *enqueue*(3), *dequeue*(), *enqueue*(2), *enqueue*(8), *dequeue*(), *dequeue*(), *enqueue*(9), *enqueue*(1), *dequeue*(), *enqueue*(7), *enqueue*(6), *dequeue*(), *dequeue*(), *enqueue*(4), *dequeue*(), *dequeue*().

Exercício 4.9

([Solução 4.9](#))

Faça um adaptador simples (classe) que implemente uma pilha usando uma instância de deque para armazenamento.

Exercício 4.10

([Solução 4.10](#))

Faça um adaptador simples (classe) que implemente uma fila usando uma instância de deque para armazenamento.

Exercício 4.11

(Solução 4.11)

Quais são os valores retornados após as seguintes operações, se executadas em um deque inicialmente vazio? `addFirst(3)`, `addLast(8)`, `addLast(9)`, `addFirst(1)`, `last()`, `isEmpty()`, `addFirst(2)`, `removeLast()`, `addLast(7)`, `first()`, `last()`, `addLast(4)`, `size()`, `removeFirst()`, `removeFirst()`.

Exercício 4.12

(Solução 4.12)

Suponha que você tenha um deque `D` contendo os números (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), nessa ordem. Supondo que além disso você tenha uma fila `Q` inicialmente vazia. Apresente um pseudocódigo que utilize somente `D` e `Q` (mais nenhuma variável) e resulte em `D` armazenando os elementos na ordem (1, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 8).

Exercício 4.13

(Solução 4.13)

Repita o exercício anterior usando o deque `D` e uma pilha `S`, inicialmente vazia.

5 Listas dinâmicas

Exercício 5.1

(Solução 5.1)

A complexidade dos métodos utilizados pela `LinkedList` se origina no procedimento `searchNode`, responsável por buscar o nodo da posição que se deseja acessar. O desempenho dessa estrutura de dados pode ser melhorado inibindo essa busca quando se tratar de acesso ao início ou fim da lista. Implemente essa estratégia.

Exercício 5.2

(Solução 5.2)

Outra forma de melhorar o desempenho de uma `LinkedList` é fazer com que a busca implementada no procedimento `searchNode` seja feita “de trás para frente”, quando conveniente. Implemente essa estratégia. Qual o impacto na complexidade do procedimento de busca?

Exercício 5.3

(Solução 5.3)

Crie um método `toArray` na classe `LinkedList` que retorne um *array* com os elementos da lista encadeada. Implemente a operação inversa na classe `ArrayList`.

Exercício 5.4

(Solução 5.4)

Forneça uma representação de uma lista `L`, inicialmente vazia, após realizar as seguintes operações: `add(0, 4)`, `add(0, 3)`, `add(0, 2)`, `add(2, 1)`, `add(1, 5)`, `add(1, 6)`, `add(3, 7)`, `add(0, 8)`.

Exercício 5.5

(Solução 5.5)

Implemente uma pilha usando um `ArrayList` para armazenamento dos dados.

Exercício 5.6

(Solução 5.6)

O `java.util.ArrayList` possui um método `trimToSize` que substitui o *array* de dados por um com capacidade equivalente ao número de elementos atuais da lista. Implemente tal método na classe `ArrayList`.

Exercício 5.7

(Solução 5.7)

Considere uma implementação de um `ArrayList` usando um *array* dinâmico, mas em vez de copiar os elementos para um *array* com o dobro do tamanho (isto é, de N para $2N$) quando sua capacidade é atingida, copiamos os elementos para um *array* com $\lceil N/4 \rceil$ células adicionais, indo da capacidade N para

$N + \lceil N/4 \rceil$. Mostre experimentalmente que ao realizar uma sequência de n operações **add** (i.e., inserindo no fim), a estrutura ainda opera em tempo $\mathcal{O}(n)$.

Exercício 5.8

(Solução 5.8)

Supondo que estamos mantendo uma coleção **C** de elementos de tal modo que, cada vez que adicionamos um novo elemento na coleção, copiamos o conteúdo de **C** em um novo **ArrayList** do tamanho exato ao necessário. Qual o tempo de processamento de adição de n elementos em uma coleção **C** inicialmente vazia?

Exercício 5.9

(Solução 5.9)

O método **add** para um *array* dinâmico tem a seguinte ineficiência: no caso em que um redimensionamento ocorre, a operação correspondente leva tempo para copiar todos os elementos do antigo *array* para o novo, e então o laço subsequente muda alguns deles para dar espaço para o novo elemento. Modifique o método **add** para, no caso de redimensionamento, os elementos copiados fiquem na sua posição final do novo *array* (ou seja, nenhuma realocação deve ser feita).

Exercício 5.10

(Solução 5.10)

Reimplemente a classe **ArrayStack** usando *arrays* dinâmicos para suportar uma capacidade ilimitada.

Exercício 5.11

(Solução 5.11)

A interface `java.util.Collection` inclui um método **contains(o)**, que retorna **true** se a coleção possui um objeto que é igual a `Object o`. Implemente tal método na classe **ArrayList**.

Exercício 5.12

(Solução 5.12)

A interface `java.util.Collection` inclui um método **clear()**, que remove todos os elementos de uma coleção. Implemente tal método na classe **ArrayList**.

Exercício 5.13

(Solução 5.13)

Desenvolva um experimento para testar a eficiência de n chamadas sucessivas ao método **add** de um **ArrayList** para vários n diferentes, e analise os resultados empíricos sob os seguintes cenários:

- Cada **add** acontece no índice 0.
- Cada **add** acontece no índice `size()/2`.
- Cada **add** acontece no índice `size()`.

Soluções dos exercícios

Importante: as informações apresentadas neste documento visam conduzir o estudante na resolução dos exercícios da disciplina. Na maioria dos casos, são apresentados apenas os direcionamentos da solução esperada. Cabe ao estudante o desenvolvimento completo da solução.

1 Introdução

Solução 1.1

([Exercício 1.1](#))

Assista ao vídeo sugerido.

Solução 1.2

([Exercício 1.2](#))

Assista ao vídeo sugerido.

2 Complexidade de algoritmos

Solução 2.1

([Exercício 2.1](#))

Gráfico disponível [aqui](#).

Solução 2.2

([Exercício 2.2](#))

Igualando as equações, temos que $40n^2 = 2n^3$ para $n' = 0$ e $n'' = 20$. Logo, $40n^2 \leq 2n^3$ para $n \geq 20$. Veja a representação gráfica em [aqui](#).

Solução 2.3

([Exercício 2.3](#))

Por inspeção, assumindo $n_0 = 10$, temos que $8n \log n \leq 2n^2$ para todo $n \geq n_0$. Veja a representação gráfica em [aqui](#).

Solução 2.4

([Exercício 2.4](#))

$2^{10} \ll 3n + 100 \log n = 4n \ll n \log n = 4n \log n + 2n \ll n^2 + 10n \ll n^3 \ll 2^n$.

Solução 2.5

([Exercício 2.5](#))

$\mathcal{O}(n)$.

Solução 2.6

([Exercício 2.6](#))

$\mathcal{O}(n)$.

Solução 2.7

([Exercício 2.7](#))

$\mathcal{O}(n^2)$.

Solução 2.8

([Exercício 2.8](#))

$\mathcal{O}(n)$.

Solução 2.9

(Exercício 2.9)

$\mathcal{O}(n^3)$.

Solução 2.10

(Exercício 2.10)

$\mathcal{O}(n \log n)$.

Solução 2.11

(Exercício 2.11)

$\mathcal{O}(n \log n)$.

Solução 2.12

(Exercício 2.12)

Melhor caso: $\mathcal{O}(n \log n)$, quando todos os elementos são ímpares. Pior caso: $\mathcal{O}(n^2)$, quando todos os elementos são pares.

Solução 2.13

(Exercício 2.13)

O tempo de execução é proporcional a $\sum_{i=1}^n i = n(n-1)/2 = \mathcal{O}(n^2)$.

Solução 2.14

(Exercício 2.14)

Exercício de análise experimental.

Solução 2.15

(Exercício 2.15)

Exercício de análise experimental.

Solução 2.16

(Exercício 2.16)

Exercício de análise experimental.

3 Estruturas de dados fundamentais

Solução 3.1

(Exercício 3.1)

Modifique o código e teste as alterações. Não há consequências negativas em remover essas linhas (na verdade, isso deve produzir uma leve melhoria na eficiência). Enquanto o estado interno está inconsistente com o `tail` referenciando um nó “inexistente”, a referência `tail` nunca é acessada em uma lista vazia, então a inconsistência não tem efeito.

Solução 3.2

(Exercício 3.2)

Uma possível solução é percorrer a estrutura, contando a quantidade de nodos. Isso implica em um aumento na complexidade assintótica de constante para linear, i.e. $\mathcal{O}(1)$ para $\mathcal{O}(n)$.

```
1 public int size(){
2     int count = 0;
3     Node<E> walk = head;
4     while(walk != null){
5         count++;
6         walk = walk.getNext();
7     }
8     return count;
9 }
```

Solução 3.3

(Exercício 3.3)

Uma possível solução consiste em um algoritmo linear simples.

```
1 private Node<E> penultimate(){
2     if(size<2) throw new IllegalStateException("list must have 2 or more entries");
3     Node<E> walk = head;
4     while(walk->next->next != null)
5         walk = walk->next;
6     return walk;
7 }
```

Solução 3.4

(Exercício 3.4)

Dica: use o método `penultimate` do exercício anterior para atualizar a referência do atributo `tail`.

Solução 3.5

(Exercício 3.5)

Existe uma solução de linha única.

```
1 tail.setNext(new Node<>(e, tail.getNext()));
```

Solução 3.6

(Exercício 3.6)

Considere uma busca combinada de ambas extremidades. Lembre-se que um *link hop* é uma atribuição do formato `p = p.getNext()`; ou `p = p.getPrev()`; . O método a seguir executa em tempo $O(n)$.

```
1 private Node<E> middle(){
2     if(size == 0) throw new IllegalStateException("list must be nonempty");
3     Node<E> moddle = header->next
4     Node<E> partner = trailer->prev;
5     while(middle != partner && middle->next != partner){
6         middle = middle.getNext();
7         partner = partner.getPrev();
8     }
9     return middle;
10 }
```

Solução 3.7

(Exercício 3.7)

Uma possível solução é percorrer a estrutura, contando a quantidade de nodos. Isso implica em um aumento na complexidade assintótica de constante para linear, i.e. $O(1)$ para $O(n)$.

```
1 public int size(){
2     if(tail == null)
3         return 0;
4     Node<E> wal = tail->next;
5     int count = 1;
6     while(walk != tail){
7         count++;
8         walk = walk.getNext();
9     }
10    return count;
11 }
```

Solução 3.8

(Exercício 3.8)

Uma possível solução é percorrer a estrutura, contando a quantidade de nodos. Isso implica em um aumento na complexidade assintótica de constante para linear, i.e. $O(1)$ para $O(n)$.

```
1 public int size(){
2     int count = 0;
3     Node<E> walk = header->next;
4     while(walk != trailer){
5         count++;
6         walk = walk.getNext();
7     }
8     return count;
9 }
```

```
9 } }
```

Solução 3.9

(Exercício 3.9)

Dica: você pode contar com a variável **size** para definir o número de passos corretos ao percorrer a estrutura.

Solução 3.10

(Exercício 3.10)

A operação de concatenação não precisa procurar tudo em L e M . Use um nodo temporário para caminhar até o final da lista L . Então, faça o último elemento de L apontar para o primeiro elemento de M como seu próximo nodo. O número de passos é proporcional ao tamanho de L .

```
1 Concatenate(L,M):  
2   Create a node v  
3   v = L.getHead()  
4   while v.getNext() != null do  
5       v = v.getNext()  
6   v.setNext(M.getHead())  
7   return L
```

Solução 3.11

(Exercício 3.11)

Junte o final de L no começo de M . Use dois nodos temporários, **temp1** e **temp2**. Inicialize **temp1** como o **trailer** de L e **temp2** como o **header** de M . Atribua **temp2** como o próximo elemento de **temp1** e **temp1** como o elemento anterior de **temp2**. Faça $L' \leftarrow L$ e atribua o **trailer** de M como **trailer** de L' .

Solução 3.12

(Exercício 3.12)

Realizar uma troca (*swap*) em uma lista simplesmente encadeada levará mais tempo do que em uma lista duplamente encadeada. Essa implementação requer muito cuidado, especialmente quando x e y são vizinhos um do outro. A dificuldade na eficiência ocorre porque para trocar x e y em uma lista simplesmente encadeada devemos localizar os nodos imediatamente anteriores a x e y percorrendo a estrutura, e não tem uma maneira rápida de fazer isso.

Solução 3.13

(Exercício 3.13)

Dica: considere mudar a orientação das ligações enquanto faz uma única passagem pela lista. Tal método da classe **SinglyLinkedList** poderá ser implementado da seguinte forma (observe que esta implementação funciona mesmo para listas triviais).

```
1 public void reverse(){  
2     Node<E> prev = null;  
3     Node<E> walk = head;  
4     while(walk != null){  
5         Node<E> adv = walk.getNext();  
6         walk.setNext(prev);  
7         prev = walk;  
8         walk = adv;  
9     }  
10    head = prev;  
11 }
```