

Complexidade de Algoritmos

Análise e notação assintótica

Prof. Marcelo de Souza

45RPE – Resolução de Problemas com Estruturas de Dados
Universidade do Estado de Santa Catarina



Leitura principal:

- ▶ Capítulo 4 de [Goodrich e Tamassia \(2013\)](#)¹ – Ferramentas de análise.

Leitura complementar:

- ▶ Capítulos 1 a 3 de [Toscani e Veloso \(2012\)](#)².
- ▶ Capítulos 2 e 3 de [Preiss \(2001\)](#)³.

¹Michael T Goodrich e Roberto Tamassia (2013). *Estruturas de Dados & Algoritmos em Java*. 5ª ed. Bookman Editora.

²Laira Vieira Toscani e Paulo A. S. Veloso (2012). *Complexidade de Algoritmos*. 3ª ed. Vol. 13. Bookman: Porto Alegre.

³Bruno R Preiss (2001). *Estruturas de dados e algoritmos: padrões de projetos orientados a objetos com Java*. Campus.



Um **problema** é caracterizado pela descrição da sua **entrada** e **saída**.



Um **problema** é caracterizado pela descrição da sua **entrada** e **saída**.

Exemplo:

Problema da ordenação (não decrescente)

Entrada: uma sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ de n números.

Saída: uma permutação dos números $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$.

Um **problema** é caracterizado pela descrição da sua **entrada** e **saída**.

Exemplo:

Problema da ordenação (não decrescente)

Entrada: uma sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ de n números.

Saída: uma permutação dos números $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$.

Exemplo concreto do problema da ordenação

Entrada: 7 8 1 4 6 3 9 → **instância**

Saída: 1 3 4 6 7 8 9 → **solução/resultado**



Dado um problema:

- ▶ Como saber se um algoritmo é bom para resolvê-lo?
- ▶ Como saber qual é o melhor algoritmo entre duas opções?



Dado um problema:

- ▶ Como saber se um algoritmo é bom para resolvê-lo?
- ▶ Como saber qual é o melhor algoritmo entre duas opções?

Qual medida usar para definir **bom** ou **melhor**?

- ▶ Correção;
- ▶ Simplicidade;
- ▶ Facilidade em codificar;
- ▶ Facilidade em manter;
- ▶ Tempo de processamento;
- ▶ Consumo de memória.



Dado um problema:

- ▶ Como saber se um algoritmo é bom para resolvê-lo?
- ▶ Como saber qual é o melhor algoritmo entre duas opções?

Qual medida usar para definir **bom** ou **melhor**?

- ▶ Correção;
- ▶ Simplicidade;
- ▶ Facilidade em codificar;
- ▶ Facilidade em manter;
- ▶ **Tempo de processamento;**
- ▶ **Consumo de memória.**

Análise de algoritmos (complexidade)

Como medir a complexidade de um algoritmo?



Análise de algoritmos

Como medir a complexidade?

Podemos executar o(s) algoritmo(s) e medir/plotar os resultados. Problemas:

- ▶ Sensível às entradas escolhidas, ao *software* e ao *hardware* usados;
- ▶ Comparação prejudicada;
- ▶ Necessário implementar e executar todos os algoritmos.



Análise de algoritmos

Como medir a complexidade?

Podemos executar o(s) algoritmo(s) e medir/plotar os resultados. Problemas:

- ▶ Sensível às entradas escolhidas, ao *software* e ao *hardware* usados;
- ▶ Comparação prejudicada;
- ▶ Necessário implementar e executar todos os algoritmos.

Solução: métodos analíticos.

- ▶ Definem a complexidade como uma função $f(n)$ do tamanho n da entrada.



Análise de algoritmos

Como medir a complexidade?

Podemos executar o(s) algoritmo(s) e medir/plotar os resultados. Problemas:

- ▶ Sensível às entradas escolhidas, ao *software* e ao *hardware* usados;
- ▶ Comparação prejudicada;
- ▶ Necessário implementar e executar todos os algoritmos.

Solução: métodos analíticos.

- ▶ Definem a complexidade como uma função $f(n)$ do tamanho n da entrada.

Ideia geral (complexidade de tempo):

- ▶ Contar o número de operações primitivas executadas pelo algoritmo;
- ▶ Cada operação primitiva executa em um tempo constante;
- ▶ Quanto menor o número de operações, mais eficiente é o algoritmo.



Operações primitivas são passos básicos do algoritmo

- ▶ Atribuição de valores;
- ▶ Operações aritméticas ou lógicas;
- ▶ Comparação de valores;
- ▶ Acesso a um elemento de um vetor;
- ▶ Recuperar a referência de um objeto;
- ▶ Chamada de um método;
- ▶ Retorno de um método.

Exemplos

```
int a = 10;  
int b = a - 7  
if (b < 5)  
    int c = v[3];  
Object x = this;  
this.compute();  
return result;
```



Análise de algoritmos

Exemplo I

Algoritmo arrayMax(A, n):

```
1  // Entrada: um vetor A com  $n \geq 1$  elementos inteiros.  
2  // Saída: o maior elemento de A.  
3  
4  currentMax  $\leftarrow$  A[0]  
5  for i  $\leftarrow$  1 to n - 1 do  
6      if currentMax < A[i] then  
7          currentMax  $\leftarrow$  A[i]  
8  
9  return currentMax
```

Análise de algoritmos

Exemplo I

Algoritmo arrayMax(A, n):

```
1 // Entrada: um vetor A com  $n \geq 1$  elementos inteiros.
2 // Saída: o maior elemento de A.
3
4 currentMax  $\leftarrow$  A[0]
5 for i  $\leftarrow$  1 to n - 1 do
6   if currentMax < A[i] then
7     currentMax  $\leftarrow$  A[i]
8
9 return currentMax
```

Linha	Operações	
4	1 acesso ao vetor + 1 atribuição	2
5	1 inicialização + n comparações + $2(n - 1)$ incrementos	$3n - 1$
6	1 acesso ao vetor + 1 comparação, repetidos $n - 1$ vezes $\rightarrow 2(n - 1)$	$2n - 2$
7	0 [cond. nunca satisfeito] a $2(n - 1)$ [cond. sempre satisfeito]	$[0, 2n - 2]$
9	1 retorno	1

Exemplo I

Complexidade de tempo no **melhor caso** ($A[0]$ é o maior elemento):

► $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 1 = 5n.$

Complexidade de tempo no **pior caso** ($A[n - 1]$ é o maior elemento):

► $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 2n - 2 + 1 = 7n - 2.$

Complexidade de tempo no **caso médio**:

► Depende da distribuição das entradas e do uso de teoria de probabilidades.

Análise de algoritmos

Exemplo I



Complexidade de tempo no **melhor caso** ($A[0]$ é o maior elemento):

► $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 1 = 5n.$

Complexidade de tempo no **pior caso** ($A[n - 1]$ é o maior elemento):

► $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 2n - 2 + 1 = 7n - 2.$

Complexidade de tempo no **caso médio**:

- Depende da distribuição das entradas e do uso de teoria de probabilidades.

Normalmente se considera a complexidade no **pior caso**, pois fornece um limite superior do tempo de execução. Logo:

- O algoritmo arrayMax executará no máximo $7n - 2$ operações para cumprir sua tarefa;
- Seja α o tempo gasto na operação primitiva mais complexa sob determinados *hardware* e *software*, o tempo de execução do algoritmo arrayMax será de, no máximo, $\alpha(7n - 2).$

Exemplo II

Qual a complexidade de tempo (operações) no pior caso do algoritmo abaixo?

```
1  for(int i = 0; i < n; i++) {  
2      for(int j = 0; j < n; j++) {  
3          if(matriz[i][j] != 0)  
4              // Operação com complexidade 1  
5      }  
6  }
```



Qual a complexidade de tempo (operações) no pior caso do algoritmo abaixo?

```
1  for(int i = 0; i < n; i++) {  
2      for(int j = 0; j < n; j++) {  
3          if(matriz[i][j] != 0)  
4              // Operação com complexidade 1  
5      }  
6  }
```

- ▶ O laço externo executa $3n + 2$ operações.
 - ▶ Inicialização (1), comparações ($n + 1$) e incremento ($2n$).
- ▶ Mesma complexidade do laço interno, que repete n vezes. Logo, $n(3n + 2) = 3n^2 + 2n$.
- ▶ O condicional é executado n^2 vezes. Logo, $2n^2$.
- ▶ A operação interna é executada n^2 vezes, no pior caso.
- ▶ $T(n) = 3n + 2 + 3n^2 + 2n + 2n^2 + n^2 \quad \therefore \quad T(n) = 6n^2 + 5n + 2$.

Análise de algoritmos

Taxa de crescimento



Note que $T(n) = 7n - 2$ é uma função linear.

- ▶ O tempo de processamento cresce na mesma proporção do tamanho da entrada (n);
- ▶ A complexidade tempo desse algoritmo é **linear**.



Note que $T(n) = 7n - 2$ é uma função linear.

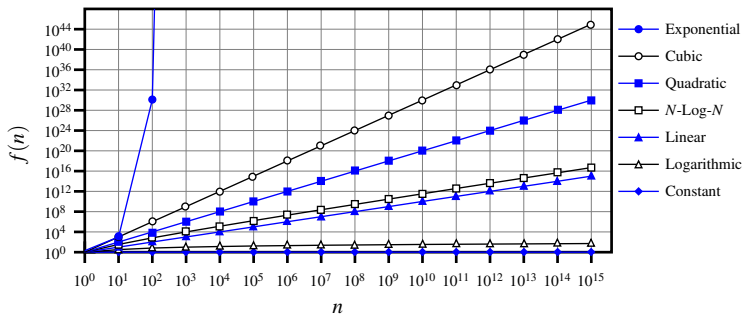
- ▶ O tempo de processamento cresce na mesma proporção do tamanho da entrada (n);
- ▶ A complexidade tempo desse algoritmo é **linear**.

A complexidade $T(n)$ pode ser definida por funções com diferentes taxas de crescimento:

- ▶ constante ≈ 1
- ▶ logarítmica $\approx \log n$
- ▶ linear $\approx n$
- ▶ n-log-n $\approx n \log n$
- ▶ quadrática $\approx n^2$
- ▶ cúbica $\approx n^3$
- ▶ polinomial $\approx n^k$
- ▶ exponencial $\approx a^n \quad (a > 1)$

Análise de algoritmos

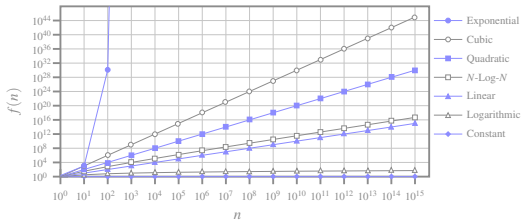
Taxa de crescimento das funções de complexidade





Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade



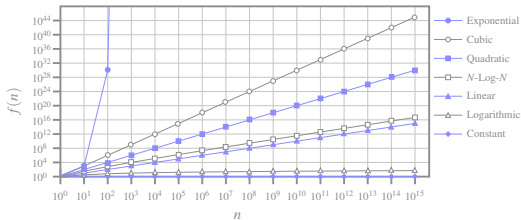
Número de operações

n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n
8	3	8	24	64	512	256
16	4	16	64	256	4 096	65 536
32	5	32	160	1 024	32 768	$4,3 \times 10^9$
64	6	64	384	4 096	262 144	$1,8 \times 10^{19}$
128	7	128	896	16 384	$2,1 \times 10^6$	$3,4 \times 10^{38}$
256	8	256	2 048	65 536	$1,7 \times 10^7$	$1,2 \times 10^{77}$
512	9	512	4 608	262 144	$1,3 \times 10^8$	$1,3 \times 10^{154}$



Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade



Número de operações

n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n
8	3	8	24	64	512	256
16	4	16	64	256	4 096	65 536
32	5	32	160	1 024	32 768	$4,3 \times 10^9$
64	6	64	384	4 096	262 144	$1,8 \times 10^{19}$
128	7	128	896	16 384	$2,1 \times 10^6$	$3,4 \times 10^{38}$
256	8	256	2 048	65 536	$1,7 \times 10^7$	$1,2 \times 10^{77}$
512	9	512	4 608	262 144	$1,3 \times 10^8$	$1,3 \times 10^{154}$

Tempo de processamento

n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n
100	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s	10^{13} anos
1000	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s	1s	10^{284} anos
10000	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s	16 min	10^{2993} anos
100000	< 1s	< 1s	< 1s	10 s	12 dias	—
1000000	< 1s	< 1s	< 1s	16 min	32 anos	—



Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade

Exemplo: em um jogo existem 70 itens para compra (e.g., materiais, poderes e armas). Cada item tem um custo e fornece algum benefício. Itens combinados fornecem benefícios diferenciados. A fim de tomar a melhor decisão possível, queremos avaliar toda combinação possível de compra de itens, verificando o custo total e os benefícios esperados.

- ▶ Podemos representar uma compra usando um vetor binário $V \in \{0, 1\}^{70}$, onde o valor de uma posição $i \in [0, 70]$ indica se o item i será comprado ou não.
- ▶ Devemos avaliar toda combinação possível de valores a V .

Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade



Exemplo: em um jogo existem 70 itens para compra (e.g., materiais, poderes e armas). Cada item tem um custo e fornece algum benefício. Itens combinados fornecem benefícios diferenciados. A fim de tomar a melhor decisão possível, queremos avaliar toda combinação possível de compra de itens, verificando o custo total e os benefícios esperados.

- ▶ Podemos representar uma compra usando um vetor binário $V \in \{0, 1\}^{70}$, onde o valor de uma posição $i \in [0, 70]$ indica se o item i será comprado ou não.
- ▶ Devemos avaliar toda combinação possível de valores a V .

Resultado: o algoritmo de avaliação terá complexidade de tempo **exponencial** $\rightarrow 2^n$.

Análise de algoritmos



Taxa de crescimento das funções de complexidade

Um algoritmo com complexidade 2^n , para $n = 70$, executando em um computador capaz de processar 10^9 operações por segundo, demoraria **37 436** anos para terminar sua execução!



Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade

Um algoritmo com complexidade 2^n , para $n = 70$, executando em um computador capaz de processar 10^9 operações por segundo, demoraria **37 436** anos para terminar sua execução!

E se usarmos um computador mais rápido?

- ▶ 100× mais rápido → 374 anos;
- ▶ 1 000× mais rápido → 37 anos;
- ▶ 1 000 000× mais rápido → 136 dias;
- ▶ 100 000 000× mais rápido → 1 dia.
 - ▶ Para $n = 80$, demoraria 140 dias;
 - ▶ Para $n = 100$, demoraria 401 969 anos.



Análise de algoritmos

Taxa de crescimento das funções de complexidade

Um algoritmo com complexidade 2^n , para $n = 70$, executando em um computador capaz de processar 10^9 operações por segundo, demoraria **37 436** anos para terminar sua execução!

E se usarmos um computador mais rápido?

- ▶ 100× mais rápido → 374 anos;
- ▶ 1 000× mais rápido → 37 anos;
- ▶ 1 000 000× mais rápido → 136 dias;
- ▶ 100 000 000× mais rápido → 1 dia.
 - ▶ Para $n = 80$, demoraria 140 dias;
 - ▶ Para $n = 100$, demoraria 401 969 anos.

Moral da história

Um algoritmo melhor executando em um computador mais lento **ganhará sempre** de um algoritmo pior em um computador mais rápido, para instâncias suficientemente grandes.



A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.



A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Além disso, o que importa na prática é a **taxa de crescimento** da função de complexidade!



A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Além disso, o que importa na prática é a **taxa de crescimento** da função de complexidade!

A **análise assintótica** foca em descrever a taxa de crescimento da complexidade de um algoritmo em função do tamanho n da entrada.

Análise assintótica



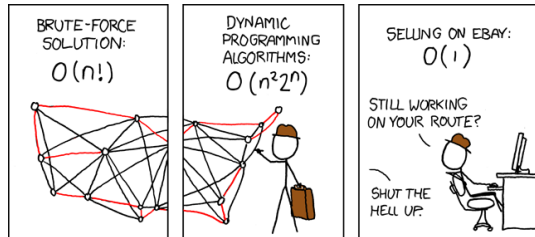
A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Além disso, o que importa na prática é a **taxa de crescimento** da função de complexidade!

A **análise assintótica** foca em descrever a taxa de crescimento da complexidade de um algoritmo em função do tamanho n da entrada.

Para isso, usaremos a notação \mathcal{O} (*big-oh*).

- Bem como as notações Θ e Ω .



Análise assintótica

Exemplo concreto



Qual a complexidade assintótica do algoritmo arrayMax?

```
1  // Entrada: um vetor A com  $n \geq 1$  elementos inteiros.  
2  // Saída: o maior elemento de A.  
3  
4  currentMax  $\leftarrow$  A[0]  
5  for i  $\leftarrow$  1 to n - 1 do  
6      if currentMax < A[i] then  
7          currentMax  $\leftarrow$  A[i]  
8  
9  return currentMax
```

Análise assintótica

Exemplo concreto



Qual a complexidade assintótica do algoritmo arrayMax?

```
1  // Entrada: um vetor A com  $n \geq 1$  elementos inteiros.  
2  // Saída: o maior elemento de A.  
3  
4  currentMax  $\leftarrow$  A[0]  
5  for i  $\leftarrow$  1 to n - 1 do  
6    if currentMax < A[i] then  
7      currentMax  $\leftarrow$  A[i]  
8  
9  return currentMax
```

Sabemos que, no pior caso, são executadas $7n - 2$ operações. Logo, esse algoritmo tem complexidade $\mathcal{O}(n)$. Isto é, complexidade linear.

- ▶ Não precisamos contar todas as operações. Basta identificarmos o termo de maior complexidade (neste caso, n), pois é quem define a taxa de crescimento da função!

Análise assintótica

Notação \mathcal{O}



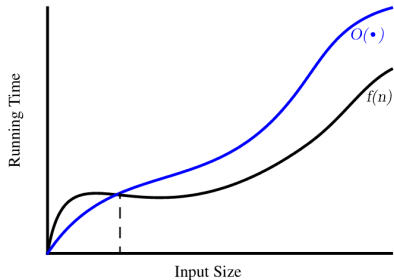
Usamos a **notação \mathcal{O}** para descrever a **taxa de crescimento** da função de complexidade.

Análise assintótica

Notação \mathcal{O}



Usamos a **notação \mathcal{O}** para descrever a **taxa de crescimento** da função de complexidade.



Em particular, a complexidade \mathcal{O} é um **majorante** para a função de complexidade do algoritmo, i.e.

- ▶ Fornece um **limite superior** para a complexidade.
- ▶ A complexidade do algoritmo é menor ou igual à complexidade \mathcal{O} .
- ▶ O desempenho do algoritmo **nunca será pior** que sua complexidade \mathcal{O} .



Função polinomial: sempre considerar o maior grau.

▶ $5n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 4n + 1$ é $\mathcal{O}(n^4)$ $n^3 + 600n$ é $\mathcal{O}(n^3)$.

Constantes e multiplicadores são eliminados.

▶ $2^{n+2} + 4$ é $\mathcal{O}(2^n)$ $4n^3$ é $\mathcal{O}(n^3)$.

Função mista: sempre considerar o termo de maior complexidade.

▶ $5n^2 + 3n \log n + 2n + 5$ é $\mathcal{O}(n^2)$ $2n + 100 \log n$ é $\mathcal{O}(n)$.

Sempre considerar a menor complexidade possível.

▶ É verdade que $4n^2 + 10$ é $\mathcal{O}(n^4)$, mas é melhor dizer que é $\mathcal{O}(n^2)$ [limite mais ajustado].

Sempre considerar a representação mais simples.

▶ $4n^2 + 2 \log n$ é $\mathcal{O}(n^2)$, o que é melhor que $\mathcal{O}(n^2 + \log n)$.

Análise assintótica

Exemplo I

Algoritmo sumNumbers(n1, n2):

```
1  // Soma dois números inteiros.  
2  public static int sumNumbers(int n1, int n2) {  
3      int result = n1 + n2;  
4      return result;  
5  }
```

Análise assintótica

Exemplo I

Algoritmo sumNumbers(n1, n2):

```
1 // Soma dois números inteiros.  
2 public static int sumNumbers(int n1, int n2) {  
3     int result = n1 + n2;  
4     return result;  
5 }
```

Análise:

- ▶ Linhas 3 e 4 executam operações de tempo constante;
- ▶ Complexidade **constante**: $\mathcal{O}(1)$;
- ▶ Algoritmo de tempo constante.

Análise assintótica

Exemplo II



Algoritmo disjoint1(int[] vA, int[] vB, int[] vC):

```
1 // Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2 // Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3 public static boolean disjoint1(int[] vA, int[] vB, int[] vC) {
4     for (int a : vA)
5         for (int b : vB)
6             for (int c : vC)
7                 if ((a == b) && (b == c))
8                     return false;
9     return true;
10 }
```




Algoritmo disjoint1(int[] vA, int[] vB, int[] vC):

```
1  // Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2  // Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3  public static boolean disjoint1(int[] vA, int[] vB, int[] vC) {
4      for (int a : vA)
5          for (int b : vB)
6              for (int c : vC)
7                  if ((a == b) && (b == c))
8                      return false;
9      return true;
10 }
```

Análise:

- ▶ A operação constante da linha 7 é repetida $n \times n \times n = n^3$ vezes;
- ▶ Complexidade **cúbica**: $\mathcal{O}(n^3)$;
- ▶ Algoritmo de tempo cúbico.

Análise assintótica

Exemplo III



Algoritmo disjoint2(int[] vA, int[] vB, int[] vC):

```
1  // Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2  // Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3  public static boolean disjoint2(int[] vA, int[] vB, int[] vC) {
4      for (int a : vA)
5          for (int b : vB)
6              if (a == b)
7                  for (int c : vC)
8                      if (a == c) return false;
9      return true;
10 }
```



Algoritmo disjoint2(int[] vA, int[] vB, int[] vC):

```
1 // Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2 // Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3 public static boolean disjoint2(int[] vA, int[] vB, int[] vC) {
4     for (int a : vA)
5         for (int b : vB)
6             if (a == b)
7                 for (int c : vC)
8                     if (a == c) return false;
9     return true;
10 }
```

Análise:

- ▶ Os laços das linhas 4 e 5 sempre são executados – $\mathcal{O}(n^2)$;
- ▶ No máximo n pares são iguais (lin. 6), então o laço da linha 7 executa no máximo n vezes;
- ▶ Complexidade **quadrática**: $n^2 + n^2 \iff \mathcal{O}(n^2)$.



Algoritmo repeat1(char c, int n):

```
1 // Compõe uma String com o caractere c repetido n vezes.
2 public static String repeat1(char c, int n) {
3     String answer = "";
4     for (int j = 0; j < n; j++)
5         answer += c;
6     return answer;
7 }
```



Algoritmo repeat1(char c, int n):

```
1 // Compõe uma String com o caractere c repetido n vezes.
2 public static String repeat1(char c, int n) {
3     String answer = "";
4     for (int j = 0; j < n; j++)
5         answer += c;
6     return answer;
7 }
```

Análise:

- ▶ Strings são imutáveis em Java: o comando `answer += c` implica em criar uma nova String, copiar cada caractere da String antiga para ela, e acrescentar o caractere `c`;
- ▶ A linha 5 executa operações conforme o tamanho de `answer`: $1 + 2 + \dots + n - 1$;
- ▶ Logo, sua complexidade é $\sum_{j=0}^{n-1} j = n(n+1)/2$;
- ▶ Complexidade **quadrática**: $\mathcal{O}(n^2)$.



Algoritmo repeat2(char c, int n):

```
1 // Compõe uma String com o caractere c repetido n vezes.
2 public static String repeat2(char c, int n) {
3     StringBuilder sb = new StringBuilder();
4     for (int j = 0; j < n; j++)
5         sb.append(c);
6     return sb.toString();
7 }
```



Algoritmo repeat2(char c, int n):

```
1 // Compõe uma String com o caractere c repetido n vezes.
2 public static String repeat2(char c, int n) {
3     StringBuilder sb = new StringBuilder();
4     for (int j = 0; j < n; j++)
5         sb.append(c);
6     return sb.toString();
7 }
```

Análise:

- ▶ A classe `StringBuilder` implementa uma lista dinâmica, que permite executar a operação `sb.append(c)` em tempo constante;
- ▶ Complexidade **linear**: $\mathcal{O}(n)$;
- ▶ O algoritmo é o mesmo, o que muda é a estrutura de dados.

Algoritmo unique1(int[] data):

```
1 // Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
2 public static boolean unique1(int[] data) {
3     int n = data.length;
4     for (int j = 0; j < n - 1; j++)
5         for (int k = j + 1; k < n; k++)
6             if (data[j] == data[k])
7                 return false;
8     return true;
9 }
```




Algoritmo unique1(int[] data):

```
1 // Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
2 public static boolean unique1(int[] data) {
3     int n = data.length;
4     for (int j = 0; j < n - 1; j++)
5         for (int k = j + 1; k < n; k++)
6             if (data[j] == data[k])
7                 return false;
8     return true;
9 }
```

Análise:

- ▶ O laço interno é executado $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1$ vezes;
- ▶ Complexidade **quadrática**: $\mathcal{O}(n^2)$.



Algoritmo unique2(int[] data):

```
1  // Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
2  // O vetor é ordenado para verificar apenas elementos subsequentes.
3  public static boolean unique2(int[] data) {
4      int n = data.length;
5      Arrays.sort(data); // Operação  $O(n \log n)$ 
6      for (int j = 0; j < n - 1; j++)
7          if (data[j] == data[j+1])
8              return false;
9      return true;
10 }
```



Algoritmo unique2(int[] data):

```
1 // Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
2 // O vetor é ordenado para verificar apenas elementos subsequentes.
3 public static boolean unique2(int[] data) {
4     int n = data.length;
5     Arrays.sort(data); // Operação  $\mathcal{O}(n \log n)$ 
6     for (int j = 0; j < n - 1; j++)
7         if (data[j] == data[j+1])
8             return false;
9     return true;
10 }
```

Análise:

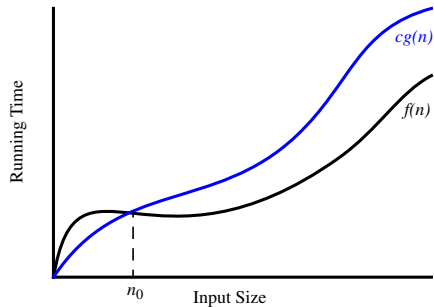
- ▶ A ordenação custa $n \log n$ e percorrer o vetor custa n ;
- ▶ Complexidade **$n \log n$** : $n \log n + n \iff \mathcal{O}(n \log n)$.

Apêndices

Apêndice I

Definição formal da notação \mathcal{O}

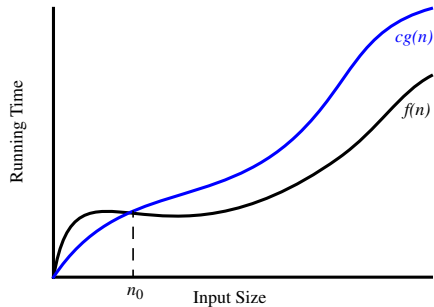
Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções que mapeiam o tamanho da entrada no tempo de processamento, dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se existe uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.



Apêndice I

Definição formal da notação \mathcal{O}

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções que mapeiam o tamanho da entrada no tempo de processamento, dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se existe uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.



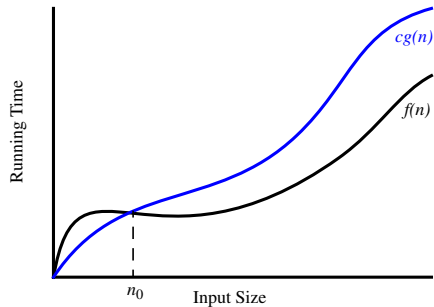
Na prática:

- ▶ Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $f(n)$ é “menor ou igual” a $g(n)$ a medida que n cresce.
- ▶ Com isso, $g(n)$ é um limite superior para $f(n)$.
- ▶ Ou seja, $f(n)$ é tão boa quanto $g(n)$.

Apêndice I

Definição formal da notação \mathcal{O}

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções que mapeiam o tamanho da entrada no tempo de processamento, dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se existe uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.



Na prática:

- ▶ Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $f(n)$ é “menor ou igual” a $g(n)$ a medida que n cresce.
- ▶ Com isso, $g(n)$ é um limite superior para $f(n)$.
- ▶ Ou seja, $f(n)$ é tão boa quando $g(n)$.

Exemplo: a função $T(n) = 7n - 2$ é $\mathcal{O}(n)$.

- ▶ Para $c = 7$ e $n_0 = 1$, temos que $7n - 2 \leq cn$, para todo $n \geq n_0$. Logo $T(n)$ é $\mathcal{O}(n)$.

Apêndice II

Notações \mathcal{O} , Θ e Ω



Notação \mathcal{O} (majorante)

Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é pior** que $cg(n)$.

Apêndice II

Notações \mathcal{O} , Θ e Ω



Notação \mathcal{O} (majorante)

Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é pior** que $cg(n)$.

Notação Ω (minorante)

Se $f(n)$ é $\Omega(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite inferior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é melhor** que $cg(n)$.

Apêndice II

Notações \mathcal{O} , Θ e Ω



Notação \mathcal{O} (majorante)

Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é pior** que $cg(n)$.

Notação Ω (minorante)

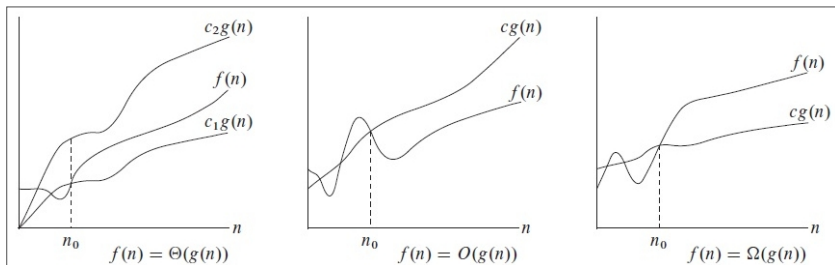
Se $f(n)$ é $\Omega(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite inferior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é melhor** que $cg(n)$.

Notação Θ (limite “apertado” – majorante e minorante)

Se $f(n)$ é $\Theta(g(n))$, então $c_1g(n)$ é um **limite inferior** para $f(n)$ e $c_2g(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **é igual** a $cg(n)$.

Apêndice III

Notações e suas relações



Detalhes:

- ▶ $f(n)$ é $\Theta(g(n)) \iff f(n)$ é $O(g(n))$ e $f(n)$ é $\Omega(g(n))$.
- ▶ $f(n)$ é $\Theta(g(n)) \iff g(n)$ é $\Theta(f(n))$.
- ▶ $f(n)$ é $O(g(n)) \iff g(n)$ é $\Omega(f(n))$.

45RPE – Resolução de Problemas com Estruturas de Dados
Prof. Marcelo de Souza