Développements limités

1 **Théorème 5.2.1 (formule de Taylor-Lagrange)** *Soient $f \in C^{n+1}(I)$ et $a, b \in I$ avec $a < b$ et $[a, b] \subset I$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Remarque.
Si $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis (théorème 4.5.2).

Application.
Prenons $f(x) = \cos x$. Alors f est dans $C^\infty(\mathbb{R})$, donc dans $C^7(\mathbb{R})$.
Écrivons la formule de Taylor au point $a = 0$ pour $n = 6$. On pose $b = x > 0$. Les dérivées de f sont :

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= -\sin x = f^{(5)}(x), \\ f^{(2)}(x) &= -\cos x = f^{(6)}(x), \\ f^{(3)}(x) &= +\sin x = f^{(7)}(x), \\ f^{(4)}(x) &= +\cos x. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + f^{(7)}(c)\frac{x^7}{7!}.$$

Si on suppose que $x \in [0, \pi]$ on a $f^{(7)} = \sin t \geq 0$ pour tout $t \in [0, \pi]$. On en déduit que pour tout $x \in [0, \pi]$

$$\cos x \geq 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6.$$

2 **Définition 5.2.2 (développement limité)**
Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. On dit que f admet un développement limité *d'ordre n au voisinage de a s'il existe $n+1$ réels $b_0, b_1, \ldots, b_n$ tels que pour tout $x \in A$*

$$\begin{cases} f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + r(x) \\ r(x) = o((x-a)^n) \end{cases}$$

Remarque.

1. Admettre un développement limité d'ordre 0 en a est équivalent à avoir une limite finie en a.
2. Un développement limité d'ordre n est unique, s'il existe.

3 **Théorème 5.2.2 (formule de Taylor-Young)** *Soient $f \in C^n(A)$ et $a \in A$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n).$$

Application.

1. Trouver le développement limité d'ordre n en 0 de $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
   Il suffit de calculer les dérivées successives. On a
   $$f^k(x) = k!(1-x)^{-1-k}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   donc $f^k(0) = k!$ et
   $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$
2. Trouver le développement limité d'ordre n en 0 de $f(x) = e^x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^{(k)}(x) = e^x$, donc $f^{(k)}(0) = 1$. D'où
   $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Proposition 5.3.1 (somme et produit de développements limités) *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n en a alors $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n en a. Plus précisément si*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k+o((x-a)^n)$$

et

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k+o((x-a)^n)$$

alors

$$(f+g)(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(x-a)^k+o((x-a)^n)$$

et

$$(fg)(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)(x-a)^k+o((x-a)^n).$$

Démonstration. L'assertion concernant l'addition est évidente.

Pour le produit on multiplie les polynômes en $(x-a)$ venant de f et g en négligeant les termes de degré $>n$ qui sont des $o((x-a)^n)$. Pour calculer le produit des polynômes on commence par calculer le terme contant, puis le coefficient de $(x-a)$ puis celui de $(x-a)^2$,...

$$(fg)(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)(x-a)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)(x-a)^2+\cdots$$

Proposition 5.3.2 (composition de développements limités) *Soient f et g deux fonctions ayant des développements limités d'ordre n en 0. On suppose que $g(0)=0$. Alors $f\circ g$ a un développement d'ordre n en 0 qui s'obtient en remplaçant dans le développement de f la variable x par le développement de g et en négligeant les termes de degré $>n$.*

Exemple.

Calcul du développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3. On a

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3).$$

On a $\cos 0=1\neq 0$. Mais on peut écrire $\cos x=1+u(x)$ avec $u(0)=0$. Alors $e^{\cos x}=e^{1+u(x)}=ee^{u(x)}$. On a

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3).$$

Comme $u(x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, u^2 va commencer par x^4 et on peut donc négliger toutes les puissances u^k pour $k\geq 2$. Finalement, il reste

$$e^{\cos x}=e(1-\frac{x^2}{2})+o(x^3).$$

*

Proposition 5.3.3 (développement limité de la fonction inverse) *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Si $g(0)\neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

Démonstration. Il suffit par la propriété multiplicative (proposition 5.3.1) des développements limités de montrer que $\frac{1}{g}$ a un développement limité à l'ordre n en 0. Écrivons le développement limité de g à l'ordre n en 0

$$g(x)=b_0+\sum_{k=1}^{n} b_kx^k+o(x^n)$$

avec $b_0\neq 0$.Alors

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{b_0+\sum_{k=1}^{n} b_kx^k+o(x^n)}=\frac{1}{b_0(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{b_0}x^k+o(x^n))}=\frac{1}{b_0}\frac{1}{1-u}$$

avec $u=-(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{b_0}x^k)+o(x^n)$.

On sait que (voir application 2 de la formule de Taylor-Young)

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n).$$

Par composition on a un développement limité d'ordre n de la fonction $\frac{1}{1-u}$. La proposition est donc démontrée. ∎

Exemple.

Calcul du développement limité de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5.

On a
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$
et
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Il suffit d'avoir le développement à l'ordre 5 de $\frac{1}{\cos x}$.

On a
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u}$$
avec $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$.

On a aussi
$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o(u^5).$$

Comme le premier terme (par ordre croissant des puissances de x) du développement limité de u est en x^2, le premier terme du développement limité de u^2 est en x^4. Celui de u^4 est en x^6, donc négligeable à l'ordre 5, ainsi que celui de u^5. En d'autres mots $u^4 = o(x^5)$ et $u^5 = o(x^5)$.

Il reste donc
$$\frac{1}{1-u} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

En multipliant on obtient
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right)$$
et après simplification
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$