Math 110 : ANALYSE ALGEBRE 1

Chapitre 2

Relations binaires entre ensembles

Chapitre 2

Relations binaires entre ensembles

I Relations

On se donne deux ensembles E et F.

DÉFINITION 2.1 (RELATION BINAIRE, GRAPHE). *On dit que :*

- *l'on a défini une* relation binaire $\mathcal{R}$ *entre ces deux ensembles lorsque l'on s'est donné une partie* G *de l'ensemble produit* $E \times F$ $(G \subset E \times F)$.
- *Cette partie est appelée* graphe de la relation binaire.
- *Si* x *dans* E *et* y *dans* F *sont tels que* $(x, y) \in G$, *on dit que* x *est* en rela tion avec y *par la relation* $\mathcal{R}$ *et on note* $x\mathcal{R}y$ $\diamondsuit$

Exercice 2.1. *On se place dans l'ensemble* $E = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. *Représenter, dans le plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires, les graphes des relations binaires sur* E *dont les définitions suivent :*

- $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \leqslant y$.
- $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x|y$: x *divise* y.
- $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \equiv y[3]$: x *est congru à* y *modulo 3.*
- $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y = x^2$.

REMARQUE 2.1. Lorsque $E = F$, on parle de relation binaire définie dans l'ensemble E. Son graphe est une partie de E^2.

REMARQUE 2.2. Il est possible que $x\mathcal{R}y$ sans que $y\mathcal{R}x$.

Exercice 2.2. *A-t-on $y\mathcal{R}x$ quand $x\mathcal{R}y$, dans les relations binaires définies dans l'exercice précédent ?*

Exercice 2.3. *Sur l'ensemble des mots de la langue française, on définit la relation : « le mot M est lié au mot N s'ils coïncident quand on écrit M à l'envers ». Déterminer quelques couples de mots en relation, ainsi que des mots en relation avec eux-mêmes. Comment appelle-t-on de tels mots ?*

II Relations d'ordre

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas où $E = F$. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie dans un ensemble E, de graphe G.

II.1 Réflexivité, antisymétrie, transitivité

DÉFINITION 2.2 (RÉFLEXIVITÉ). $\mathcal{R}$ *est dite* réflexive *quand tout élément de* E *est en relation avec lui-même :* $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x.$ ♢

DÉFINITION 2.3 (ANTISYMÉTRIE). $\mathcal{R}$ *est dite* antisymétrique *si, lorsque* x *est en relation avec* y*, alors* y *ne peut pas être en relation avec* x *(sauf si* $x = y$*) :* $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow\ x = y$ ♢

DÉFINITION 2.4 (TRANSITIVITÉ). $\mathcal{R}$ *est dite* transitive *lorsque, si* x *est en relation avec* y*, et si* y *l'est avec* z*, alors* x *est en relation avec* z *:* $\forall x \in E,\ \forall y \in E, \forall z \in E,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z.$ ♢

Exercice 2.5. *Les relations suivantes sont-elles réflexives, antisymétriques ou transitives ?*

1. $A = \mathbb{R}$ *et* $x\mathcal{R}y$ *si* $|x| = |y|$.
2. $A = \mathbb{R}$ *et* $x\mathcal{R}y$ *si* $sin^2 x + \cos^2 y = 1$.
3. $A = \mathbb{N}$ *et* $x\mathcal{R}y$ *s'il existe* p *et* q *entiers tels que* $y = px^q$.
4. A *est l'ensemble des points du plan, et* $x\mathcal{R}y$ *si la distance de* x *à* y *est inférieure à 52,7 km.*

Exercice 2.6. *Sur $\mathbb{N}^*$ on définit la relation $a\mathcal{R}b$ si et seulement si $a^b \leq b^a$.*

1. *Vérifier que cette relation est réflexive et transitive.*
2. *Comparer 2 et 4. La relation est-elle antisymétrique ?*

II.2 Relation d'ordre

DÉFINITION 2.5 (RELATION D'ORDRE). *$\mathcal{R}$ est une* relation d'ordre *lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.* ♢

EXEMPLE 2.8 (EXEMPLES DE RELATIONS D'ORDRE). Quelques relations d'ordre :
- $(\mathbb{R}, \leqslant)$
- $(\mathcal{P}(E), \subset)$

EXEMPLE 2.9 (RELATION DE DIVISIBILITÉ). On note $a|b$ si et seulement si b est un multiple de a ($\exists k \in \mathbb{N}^*, b = ka$). C'est une relation d'ordre définie dans $\mathbb{N}^*$. En effet, elle est

reflexive : $a = 1a$, donc $a|a$ est vrai,

antisymétrique : si $a|b$ et $b|a$, alors $\exists k, k' \in \mathbb{N}^*, a = kb$ et $b = k'a$. Donc $a = kk'a$. Comme $a \neq 0$, $kk' = 1$. Mais $k, k' \in \mathbb{N}^*$, donc $k = k' = 1$, et $a = b$.

transitive : si $a|b$ et $b|c$, alors alors $\exists k, k' \in \mathbb{N}^*, a = kb$ et $b = k'c$. Donc $a = kk'c$: il existe $k'' \in \mathbb{N}^*$ ($k'' = kk'$) tel que $a = k''c$: $a|c$.

La structure algébrique constituée par l'ensemble E, muni de la relation d'ordre $\mathcal{R}$, (c'est-à-dire : le couple $(E, \mathcal{R})$) est celle d'*ensemble ordonné*.

II.3 Ordre partiel, ordre total

Une relation d'ordre définie dans un ensemble E peut posséder une propriété supplémentaire, celle selon laquelle tous les éléments de E sont comparables entre eux. On formalise comme suit :

DÉFINITION 2.6 (RELATION D'ORDRE TOTALE). *Une relation d'ordre qui possède cette dernière propriété est dite relation d'*ordre total*, et la structure algébrique correspondante est celle d'*ensemble totalement ordonné. ◊

REMARQUE 2.3. Cette propriété est aussi équivalente à :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x$$

ou encore : « si x n'est pas en relation avec y, alors y est en relation avec x ».

DÉFINITION 2.7 (RELATION D'ORDRE PARTIEL). *Dans le cas contraire, il existe des éléments qui ne sont pas comparables : on parle alors d'*ordre partiel . ◊

EXEMPLE 2.10. $\leqslant$ est une relation d'ordre totale dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.11. *On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ ssi $x^2 + y^2 < x'^2 + y'^2$ ou ($x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ et $x \leq x'$).*

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre totale

II.4 Éléments maximaux

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné et A une partie de E. Quelques définitions…

DÉFINITION 2.8 (MAJORANT). *On appelle* majorant *de A tout élément M de E tel que, quel que soit $a \in A$, $a\mathcal{R}M$.* ♢

DÉFINITION 2.9 (PARTIE MAJORÉE). *La partie A de E est dite* majorée *s'il existe un majorant de A.* ♢

DÉFINITION 2.10 (MINORANT). *On appelle* minorant *de A tout élément m de E tel que, quel que soit $a \in A$, $m\mathcal{R}a$.*

On parle aussi de partie minorée. ♢

DÉFINITION 2.11 (ÉLÉMENT MAXIMUM). *On appelle* élément maximum *de A un élément de A qui est majorant de A.* ♢

Exercice 2.14 (Relations d'ordre en Algèbre de Boole). *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole.*

On considère la relation binaire, de symbole $<$, définie par

$$a < b \Leftrightarrow a + b = b.$$

1. *Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.*
2. *Montrer que $a < b \ \Leftrightarrow \ a \cdot b = a$.*
3. *Montrer que, $\forall (a, b, c) \in \mathcal{A}^3,\ b \cdot c < a \cdot b + \overline{a} \cdot c$.*
4. *On définit la relation binaire $\subset$ par : $a \subset b$ si et seulement si $a \cdot \overline{b} = 0$; montrer que c'est une relation d'ordre.*
5. *Comparer $<$ et $\subset$.*
6. *En utilisant l'une ou l'autre des définitions ci-dessus pour la relation d'ordre, trouver $\mathrm{Max}\,\mathcal{A}$ et $\mathrm{Min}\,\mathcal{A}$.*

Exercice 2.15 (Diagrammes de transitivité). *On considère...*

1. *$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ dans E par son graphe $G = \{$ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (2,2), (2,3), (2,4), (2,6), (2,8), (2,9), (3,3), (4,3), (4,4), (4,6), (4,8), (4,9), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (5,7), (5,8), (5,9), (6,6), (6,8), (6,9), (7,7), (7,8), (7,9), (8,8), (9,9) $\}$ (c'est-à-dire : $1\mathcal{R}1$, etc...). Montrer que cette relation est une relation d'ordre. E est-il totalement ordonné par cette relation ?*
2. *Mêmes questions pour $E' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $G' = \{$ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,6), (4,4), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6)$\}$.*

III Relations d'équivalence

DÉFINITION 2.13 (RELATION SYMÉTRIQUE). *$\mathcal{R}$ est dite* symétrique *si, dès que x est en relation avec y, alors y est en relation avec x*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, (x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G$$

On se place encore dans ce paragraphe dans le cas où $E = F$. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie dans un ensemble (non vide) E, de graphe G.

REMARQUE 2.5. Ou encore : $\forall x \in E, \forall y \in E,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Exercice 2.16. *Est-ce qu'une relation sur un ensemble A dont le graphe est constitué uniquement de couples (x, x) est symétrique ? transitive ?*

DÉFINITION 2.14 (RELATION D'ÉQUIVALENCE). *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence lorsqu'elle est* réflexive, symétrique *et* transitive. $\diamondsuit$

EXEMPLE 2.17. L'égalité est une relation d'équivalence.

EXEMPLE 2.18 (RELATION DE CONGRUENCE MODULO n DANS $\mathbb{Z}$). Par définition :

$$x \equiv y\ [n](\text{lire : « } x \text{ est congru à } y \text{ modulo } n \text{ » }) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = k \cdot n$$

.

- réflexivité : $x \equiv x[n]$: en effet, $x - x = 0 \cdot n$, et $0 \in \mathbb{Z}$.
- symétrie : si $x \equiv y\ [n]$, $\exists k \in \mathbb{Z}$, $x - y = k \cdot n$; alors $y - x = (-k) \cdot n$; or, si $k \in \mathbb{Z}$, $(-k) \in \mathbb{Z}$, donc $y \equiv x\ [n]$.
- transitivité : si $x \equiv y\ [n]$ et $y \equiv z\ [n]$, $\exists k \in \mathbb{Z}$, $x - y = k \cdot n$ et $\exists l \in \mathbb{Z}$, $y - z = l \cdot n$. En aditionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient $x - z = (k + l) \cdot n$, or $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, donc $k + l \in \mathbb{Z}$, donc $x \equiv z\ [n]$.

C'est bien une relation d'équivalence.

Exercice 2.20. *Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation « $x\mathcal{R}y$ quand $\cos(2x) = \cos(2y)$ ». Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

III.1 Classes d'équivalence

DÉFINITION 2.15 (CLASSE D'ÉQUIVALENCE). *Soit x un élément de E, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On appelle* classe d'équivalence *de cet élément l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x (on dit encore : « qui sont équivalents à x »).* ♢

NOTATION : On note $\dot{x}$ la classe de l'élément x : $\dot{x} = \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}$.

Exercice 2.21. *Dans* $\mathbb{R}$, *on considère la relation binaire* $\mathcal{R}$ *définie par :* $x\mathcal{R}y$ *ssi* $x^2 - y^2 = x - y$.

1. *Vérifier que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*
2. *Pour tout réel* x, *déterminer* $\dot{x}$.

Exercice 2.22. *Dans* $\mathbb{R}$, *on considère la relation binaire* $\mathcal{R}$ *définie par :* $x\mathcal{R}y$ *ssi* $x.e^y = y.e^x$.

1. *Vérifier que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*
2. *Pour tout réel* x, *déterminer le nombre d'éléments de* $\dot{x}$.

PROPRIÉTÉ 2.1 : L'intersection de deux classes d'équivalence distinctes est vide.

Exercice 2.24. *Soit* $\mathcal{R}$ *la relation d'équivalence suivante dans l'ensemble* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *:*

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$

Trouver la partition de A *induite par* $\mathcal{R}$, *c'est-à-dire trouver les classes d'équivalence de* $\mathcal{R}$.

III.2 Ensemble-quotient

DÉFINITION 2.17 (ENSEMBLE-QUOTIENT). *Il s'agit de l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E.* $\diamondsuit$

NOTATION : $E/\mathcal{R}$.

Pour parler aisément d'une classe, on choisit un de ses éléments, et cet élément, surmonté d'un point, sert à représenter la classe en question. Une fois que ce choix est fait, il est définitif, et il n'est plus question d'évoquer les autres éléments de cette classe, il faut se tenir, sous peine d'incohérence, au choix qui a été fait.

EXEMPLE 2.27 (CONGRUENCE MODULO 4). On choisit pour représentants les entiers < 4, donc 0, 1, 2 et 3. L'ensemble-quotient est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$.

IV Compatibilité entre une opération et une relation binaire

DÉFINITION 2.18. *La relation binaire (dans E) de symbole $\mathcal{R}$ est dite* compatible avec l'opération *(définie dans E) de symbole $\circ$ lorsque, quels que soient les éléments x, x', y* et *y' de E : si $x\mathcal{R}x'$ et si $y\mathcal{R}y'$*, alors $(x \circ y)\mathcal{R}(x' \circ y')$ $\diamondsuit$

Autrement dit, l'opération conserve la relation.

EXEMPLE 2.28. On considère la relation classique d'inégalité dans $\mathbb{R}$: si on a $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$, on peut écrire $x + x' \leqslant y + y'$.

Ce résultat est bien connu : on a le droit « d'additionner des inégalités membre à membre ». En d'autres termes, l'addition des réels est compatible avec l'inégalité.

Mais, de $-2 \leqslant 1$ et de $-3 \leqslant -1$, on ne peut pas déduire que $6 \leqslant -1$… On n'a pas le droit de « multiplier des inégalités membre à membre ».

La multiplication des réels, quant a elle, n'est donc pas compatible avec l'inégalité.

Exercice 2.29 (Congruences modulo n). *Montrer que la relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$ définie en cours est compatible avec addition et multiplication.*

Établir les tables des opérations que l'on peut alors définir dans les ensembles $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Lorsqu'une relation d'équivalence est compatible avec une opération, on peut définir dans l'ensemble-quotient une opération, dite *induite* de celle qui existe dans l'ensemble d'origine.

Fin du Chapitre