Développements limités, équivalents et calculs de limites

Exercice 1.

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$ $n = 2$
2. $g(x) = \frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}$ $n = 3$
3. $h(x) = e^{\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}}$ $n = 1$
4. $i(x) = \sin(x^2)$ $n = 6$

Exercice 2.

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
3. Soit $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de f pour $x \to +\infty$.

Exercice 3.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de :
$$f(x) = \ln(1+x)\sin(x)$$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, de :
$$f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$$

Exercice 4.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \arctan(x)$$
En calculant le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction dérivée f', en déduire le développement limité de f à l'ordre 5.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction g définie par
$$g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

Exercice 5.

Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction :
$$f(x) = \arccos(x^2)$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \arctan(x+1)$$
1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction dérivée f' au voisinage de 0.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0.

Exercice 7.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)\ln(1+x)}{\cos(x)}$$

Exercice 8.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 1 de la fonction
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2}$$

Exercice 9.

1. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de :
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$
2. En déduire qu'on peut prolonger cette fonction par continuité en $x = 0$ et que la fonction ainsi prolongée admet une dérivée première en $x = 0$.
3. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x = 0$ de :
$$g(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

Exercice 10.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :
$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{x\ln(1-x)}$$

Exercice 11.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction
$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{\ln(1+x)\,\mathrm{sh}(x)}$$

Exercice 12.

Soit f la fonction réelle définie par :
$$f(x) = 9\sin(x) - 11x\cos(x) + 2x\cos(2x)$$
1. Donner les développements limités en 0, à l'ordre 5, des fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\cos(2x)$.
2. En déduire la limite, lorsque x tend vers 0 ($x \neq 0$), de l'expression $\frac{f(2x)}{f(x)}$.

Exercice 13.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de la fonction définie par $g(x) = \ln(1+x^3)$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction définie par $h(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$
3. En déduire le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
4. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est dérivable, on donnera $f'(0)$.
5. Déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Exercice 14.

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1+\sin(x)) - x}.$$