I Limites Continuités

Exercice 1 :

Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

Déterminer les limites de f, si elle existent, en 0 et en $+\infty$.

Exercice 2 :

Déterminer les limites suivantes

$$a) \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \; ; \qquad b) \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2} \; ;$$

$$c) \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)} \; ; \qquad d) \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

Exercice 3 :

Calculer

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{E(\ln(x))}{x}$$

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Exercice 5 :

Calculer si elles existent

1.
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x}$$

2.
$$\lim_{x\to 0} x^{-\frac{7}{2}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Exercice 6

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f_n(x) = \ln(1+x^n) + x - 1$$

1. Montrer qu'il existe $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.
2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, en déduire que c_n est unique.

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$, avec $n \geq 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et quelle converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Exercice 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n une fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^n$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0,1]$ telle que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) > 0$,
3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et qu'elle converge vers une limite l.
4. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq x_n \leq M < 1$
   a. Calculer la limite de x_n^n lorsque n tend vers l'infini.
   b. Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$