4.1 Limite et continuité

Définition 4.1.1 *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.*
On appelle A le domaine de définition *de la fonction f.*
On dit que f est
- minorée *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $f(x) \geq m$.*
- majorée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $f(x) \leq M$.*
- bornée *si f est majorée et minorée.*

Si f est majorée, on appelle borne supérieure *de f le nombre réel*

$$\sup_A f = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

On définit de même la borne inférieure.

On dit que f admet un maximum *en $a \in A$ si $f(a)$ est le maximum de la partie $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.*

On dit que f admet un maximum local *en $a \in A$ s'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de $f(A \cap I)$.*

On définit de même la notion de minimum *et de* minimum local.

Un extremum *(local) est un maximum (local) ou un minimum (local).*

Remarque.

Une fonction bornée possède toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais pas forcément un maximum et un minimum.

Exemples.

1. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors f est bornée. On a $\sup_{]0,1[} f = 1$, mais $\max_{]0,1[} f$ n'existe pas.
   On a $\inf_{]0,1[} f = 0$, mais $\min_{]0,1[} f$ n'existe pas.
2. Une fonction peut admettre un maximum en plusieurs points. Ainsi $f(x) = \sin x$ admet un maximum en les points $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans la suite on prendra comme domaine de définition A des intervalles de la forme
- $A =]x, y[$, $[x, y[$, $]x, y]$, ou $[x, y]$ avec $x < y$. On notera alors $\overline{A} = [x, y]$.
- $A =]-\infty, x]$ ou $]-\infty, x[$. On notera alors $\overline{A} =]-\infty, x]$.

- $A = [x, +\infty[$ ou $]x, +\infty[$. On notera alors $\overline{A} = [x, +\infty[$.
- $A =]-\infty, +\infty[$ alors $\overline{A} =]-\infty, +\infty[$.

On dit que $\overline{A}$ est l'adhérence de A.

On généralise la notion de limite d'une suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ à la limite d'une fonction $f(x)$ quand x tend vers a.

(limite d'une fonction)

Définition 4.1.2 (limite d'une fonction) *Soient A un intervalle et $\overline{A}$ son adhéren $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{A}$.*

1. *On dit que f admet ℓ comme limite en a si*
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
   On note $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.
2. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si*
   $$\forall K \in \mathbf{R} \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > K$$
   On note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.
3. *On dit que f admet ℓ comme limite quand x tend vers $+\infty$ si*
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \text{ tel que } \forall x \in A, x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
   On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
4. *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si*
   $$\forall K \quad \exists M \text{ tel que } \forall x \in A, x > M \Rightarrow f(x) > K$$
   On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On définit de même $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

(continuité)

Définition 4.1.3 (continuité) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$. On dit que f est* continue *en a si f admet $f(a)$ comme limite en a. Autrement dit*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur *a si f est continue en tout point de a.*

Exemples.

1. Les fonctions exponentielles et trigonométriques sont continues sur leurs domaines de définition.
2. Soit $E(x)$ le plus grand entier $\leq x$. C'est la partie entière de x. On montre que la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Définition 4.1.4 (Prolongement par continuité) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : B \to \mathbb{R}$ avec $A \subset B$. On dit que g est un* prolongement par continuité *de f si*

1. *g est un prolongement de f (c'est-à-dire que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$).*
2. *g est continue en tout point de B.*

Exemple.

Prenons $A =]0, 1]$ et $B = [0, 1]$. Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Alors la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

est un prolongement par continuité de f.

4.2 Propriétés de la limite d'une fonction

Les propriétés des limites de suites se généralisent facilement au cas des fonctions.

Proposition 4.2.1 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions.*

1. *Si f admet une limite ℓ en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que f soit bornée sur $A \cap I$. Si f admet une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ alors il existe un intervalle $I =]b, +\infty[$ tel que f soit bornée sur $A \cap I$.*
2. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et si g est bornée sur un intervalle ouvert contenant a alors $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.*
3. *Si f et g ont une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors*
$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$
et
$$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x))(\lim_{x \to a} g(x))$$
4. *Si f ne s'annule pas sur A, et*
   (a) *si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors*
   $$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$$
   (b) *si $\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, alors*
   $$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$
   (c) *si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et si $f(x) \geq 0$ sur un intervalle ouvert contenant a, alors*
   $$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

5. *Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle ouvert contenant a alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

6. **(gendarmes)** *Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur un intervalle ouvert contenant a et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.*

Démonstration. Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas des suites. Démontrons par exemple le théorème des gendarmes. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $|x-a| < \alpha$ implique $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, d'où $\ell - \varepsilon < f(x)$. De même il existe $\alpha' > 0$ tel que $|x-a| < \alpha'$ implique $|h(x) - \ell| < \varepsilon$, d'où $h(x) < \ell + \varepsilon$. Donc si $|x-a| < \min(\alpha, \alpha')$ alors $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$. ∎

Proposition 4.2.2 (Composée de deux fonctions continues) *Soient deux fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ avec $f(A) \subset B$. Si f est continue en $a \in A$ et si g est continue en $b = f(a) \in B$, alors la composée $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. On veut $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$. Comme g est continue en $b = f(a)$ il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| < \alpha$ implique $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$. Comme f est continue en a il existe $\beta > 0$ tel que $|x - a| < \beta$ implique $|f(x) - f(a)| < \alpha$. ∎

Proposition 4.2.3 (Critère séquentiel de continuité) *Soient une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue en a.*
2. *pour toute suite (u_n) à valeurs dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.*

Démonstration. Supposons f continue en a. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Comme (u_n) tend vers a, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - a| < \alpha$. Mais alors $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$. Donc la suite $(f(u_n))$ a pour limite $f(a)$.

Pour montrer la réciproque, nous allons prouver la contraposée : en supposant que f n'est pas continue en a il s'agit de trouver une suite (u_n) qui converge vers a et telle que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq f(a)$.

Dire que f n'est pas continue en a est la négation de $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire

$$\text{non}(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[\quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

qui équivaut à

$$(*) \qquad \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[\quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

On a le droit de choisir α. Prenons par exemple $\alpha = \frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$. La relation $(*)$ implique alors qu'il existe $u_n \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[$ tel que $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Alors $|u_n - a| < \frac{1}{2^n}$, donc (u_n) tend vers a et comme $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ la suite $(f(u_n))$ ne tend pas vers $f(a)$. ∎

4.3 Propriétés des fonctions continues

Théorème 4.3.1 (théorème des valeurs intermédiaires)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \leq f(b)$. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ il existe $x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = y.$$

Théorème 4.3.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur un segment[1]. Alors f a un maximum et un minimum sur $[a, b]$.*