Fonctions dérivables

Soient $f : A \to R$ une fonction et $a \in A$.

Définition 4.4.1 *On dit que f est* dérivable *en a si la limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (dans $\mathbb{R}$). On note $f'(a)$ cette limite.

Exemples.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = 1$$

   et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = -1$$

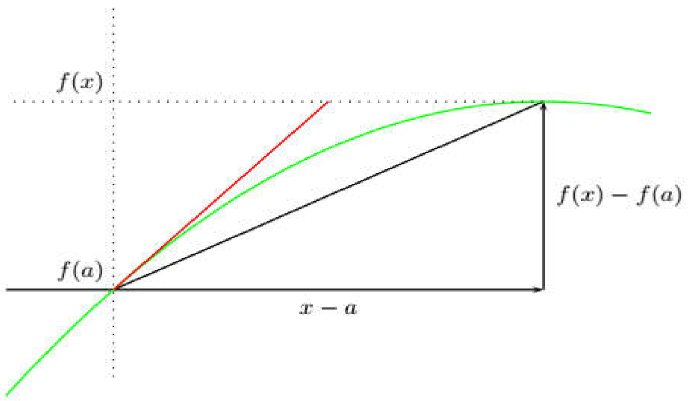
   Donc f n'est pas dérivable en 0. Par contre f est dérivable en tout point $a \neq 0$.

2. Les fonctions classiques
   - trigonométriques : $\sin, \cos, \tan, \ldots$
   - polynomiales : $ax^2 + bx + c, \ldots$
   - exponentielles : e^x
   - rationnelles : $\frac{ax+b}{cx+d}, \ldots$

   sont dérivables sur leurs domaines de définition.

Interprétation géométrique.

La dérivée $f'(a)$ de f en a donne la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de f.



Proposition 4.4.1 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Soit $\ell = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Comme la fonction x est continue en a, on a $\lim_{x \to a}(x - a) = 0$. D'où en utilisant la propriété des limites par rapport au produit (proposition 4.2.1(3))

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) &= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] \\ &= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \lim_{x \to a}(x - a) = \ell.0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et f est bien continue en a. ∎

Remarque.

1. La réciproque n'est pas toujours vraie, comme le prouve l'exemple $f(x) = |x|$ en $x = 0$.
2. Il existe même des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de leur domaine de définition.

Proposition 4.4.2 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local en a. Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

Définition 4.4.2 (fonction dérivée) *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de A, alors f est dérivable sur A et on définit sa fonction dérivée f' par*

$$\begin{array}{rcl} f' : A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

Proposition 4.4.3 *1. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur A, alors $f+g$ et fg sont dérivables sur A et*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \text{et} \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$

2. Si f ne s'annule pas sur A, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur A et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Démonstration. 1. Le cas de l'addition résulte facilement du résultat concernant l'addition des limites.

Pour le produit, on écrit

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a)).$$

On divise par $(x-a)$ et on passe à la limite quand x tend vers a ce qui donne le résultat grâce aux propriétés des limites de produit et de sommes (proposition 4.2.1). De plus on sait que $g(x)$ tend vers $g(a)$ par la continuité de g.

2. Pour l'inverse, on écrit :

$$\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right)\frac{1}{x-a} = -\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\frac{1}{f(x)}\frac{1}{f(a)}$$

qui a un sens pour $|x-a|$ assez petit.

Quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers $f(a)$, car f est continue. On obtient alors la formule désirée. ∎

Proposition 4.4.4 (Dérivée de la composée de deux fonctions) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$ (pour tout $x \in A$ on a $f(x) \in B$). Si f est dérivable en $a \in A$ et g est dérivable en $f(a) \in B$, alors la composée $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

Proposition 4.4.5 (Dérivée de la fonction réciproque) *Soit $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction réciproque $g : B \to A$, c'est-à-dire que*

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \qquad \text{et} \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors g est dérivable en $f(a)$ et on a

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. On admet l'existence de $g'(f(a))$. On dérive la formule $g(f(x)) = x$. En appliquant la proposition qui donne la dérivée de la composée (proposition 4.4.4) on obtient

$$1 = (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

D'où la formule de la proposition. ∎

Propriétés des fonctions dérivables

Théorème 4.5.1 (théorème de Rolle) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 4.5.2 (théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition 4.5.1 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle A. Alors :*

1. *f est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in A$.*
2. *f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in A$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in A$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).*

Théorème 4.6.1 (théorème du point fixe) *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons qu'il existe un* point fixe *$\ell \in A$ pour f, c'est-à-dire un point ℓ tel que*

$$f(\ell) = \ell,$$

et qu'il existe un intervalle $I = [\ell - a, \ell + a]$ et un réel $\lambda < 1$ tels que pour tout $x \in I$

$$|f'(x)| \leq \lambda.$$

Alors la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers ℓ.

Exemple.

Prenons $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Soit $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, c'est-à-dire le réel positif satisfaisant l'équation $\ell^2 = \ell + 1$, qui est équivalente à $\ell = f(\ell)$. Donc l est un point fixe.

On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $|f'(x)| < 1$ pour $x > 1$. Ainsi on peut prendre comme intervalle $I = [\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$. Le théorème du point fixe implique alors que la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ converge vers ℓ.