Continuité dérivabilité

Exercice 1

Les fonctions f, g et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = x|x|; \qquad g(x) = x^{\frac{3}{5}}; \qquad h(x) = \cos\left(\sqrt{|x|}\right)$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ telle que $f'(c) = 0$. (on ne demande pas la valeur de c).

Exercice 3. .

Soit $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{x^e}$$

1. Etudier les variations de f.
2. Comparer les réels e^π et π^e.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \neq 0$ calculer $f'(x)$.
3. Calculer

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$$

Que peut-on en déduire ?

4. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
5. Dresser le tableau de variation de f et tracer sommairement son graphe.

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \ln(e^x)\,; \;\; g(x) = \ln(\sin^2(x))\,; \;\; h(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

Montrer aussi que

$$h'(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 6 :

Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1\colon x \mapsto \ln(3 + \sin(x))$
2. $f_2\colon x \mapsto \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$
3. $f_3\colon x \mapsto \ln\left(\frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right)$
4. $f_4\colon x \mapsto x^{x+1}$
5. $f_5\colon x \mapsto \sin((e^x)^2)$
6. $f_6\colon x \mapsto x^{\frac{\sin(x)}{x}}$

Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.

Exercice 7

Soit f la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $c \in]02[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$

Déterminer les valeurs possible de c.

Exercice 8

Soit f une application de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, que $f(0) = 0$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a $f'(x) \neq 0$.

Montrer que f conserve un signe constant sur $]0,1[$.

Exercice 9 :

Soit p un entier, $p \geq 2$.

1. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel c dans l'intervalle $]0,1[$ tel que :

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) = \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)}$$

2. En déduire l'inégalité :

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) < \frac{1}{p\ln(p)}$$

3. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{3\ln(3)} + \cdots + \frac{1}{n\ln(n)} \right) = +\infty$$

Exercice 10 :

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ telle que :

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

Exercice 11 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et pour tout $x \in]a,b[$, $f''(x) \leq 0$. Montrer que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.