Recherche opérationnelle et aide à la décision

Cours du Cycle Probatoire

Cours dispensé par Anne-Marie BACHAS.
CNAM Aix-en-Provence 2001-2002

INTRODUCTION

PROGRAMMATION LINEAIRE

PROBLEMES DE TRANSPORT

LES GRAPHES

CHEMIN DE VALEUR OPTIMALE

ORDONNANCEMENT

PROCESSUS STOCHASTIQUES

FIABILITÉ

INTRODUCTION

INTRODUCTION

INTRODUCTION

1. Présentation de la Recherche Opérationnelle

La recherche opérationnelle est une méthode d'analyse scientifique d'un problème. Cette méthodologie est une mélange d'analyse et de méthodes mathématique réunies pour aider un décideur à prendre une décision. Crée en Angleterre durant la seconde guerre mondiale, elle servait à résoudre les problèmes militaires (placements de radar, gestion des convois, etc.).
Elle consiste à recevoir un maximum d'information sur le problème afin de proposer des solutions mais surtout pas de décider laquelle est la meilleure. La solution choisie dépend surtout des intérêts du décideur.

2. Domaines d'application

La recherche opérationnelle a maintenant de nombreux domaines d'application dont:

2.1) Les problèmes combinatoires

Essentiellement lorsque l'on a trop de combinaisons pour les traiter cas par cas. Par exemple 20! Pour un ordinateur qui traite 1M/sec, cela mettrai 77 096 ans!!! C'est le premier domaine application avec l'utilisation des graphes et de la programmation linéaire.

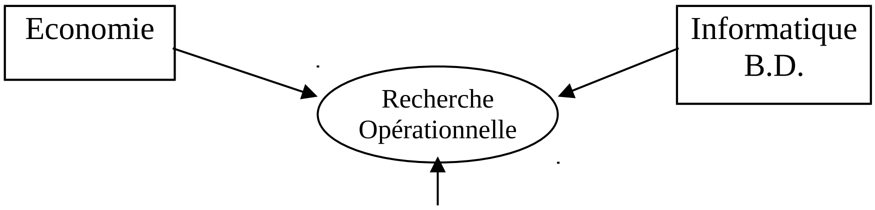
2.2) Les problèmes aléatoires

Notamment la gestion de files d'attente. Par exemple: un guichet supporte une arrivée de personne toutes les 4 minutes en moyenne et la sert en 3 minutes. On pourrait croire qu'un seul employé suffit mais un modèle mathématique pourra démontrer qu'il faut en fait 2 employés (pour gérer les heures de pointes).

2.3) Les problèmes de concurrence

Notamment tout ce qui concerne la théorie des jeux.

3. Propriétés de la R.O. interdisciplinaire



Outils mathématique

Programmation Linéaire

PROGRAMMATION LINEAIRE

PROGRAMMATION LINEAIRE

I. Problématique de la programmation linéaire

1.1) Introduction

Un programme linéaire est un programme mathématique, i.e. problème consistant à trouver un extremum (maximum ou minimum) d'une fonction à plusieurs variables, vérifiant en outre un système d'équations ou d'inéquations, ces fonctions étant *linéaires*.

1.2) Exemple

a) Agriculteur

Un agriculteur possède 40ha, 63 000 FF et 840 jours de travail. Il désire semer du maïs, du blé et du soja qui ont les coûts et les rapport suivants:

	Prix (FF/ha)	**Temps (jour)**	**Rapports (FF/ha)**
Maïs	1500	18	420
Blé	1800	27	510
soja	1050	15	360

On peut synthétiser les contraintes de cette façon:

$$\begin{cases} 1500\ x_1 + 1800\ x_2 + 1050\ x_3 \leq 63\,000 \\ 18\ x_1 + 27\ x_2 + 15\ x_3 \leq 840 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{IR}^+ \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

et la fonction économique max $z = 420\ x_1 + 510\ x_2 + 360\ x_3$

b) Usine

De la même façon, une usine produit du "A" et du "B" avec du "M1" et du "M2" avec les caractéristiques suivantes:

	A	B	Stocks
M1	2	1	8
M2	1	2	7
M3	0	1	3
gains	4	5	

Mise en équations avec x_1 le nombre de "A" et x_2 le nombre de "B" sachant que $x_1$et $x_2 \geq 0$

Bilan de M1: $2\ x_1 + x_2 \leq 8$

Bilan de M2: $x_1 + 2\ x_2 \leq 7$

Bilan de M3: $x_2 \leq 3$

Le critère étant un max $z = 4\ x_1 + 5\ x_2$

1.3) Forme canonique

Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique, c'est à dire un système avec un ensemble d'inéquation et une fonction à optimiser.

$$\boxed{\begin{array}{l} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \leq b_i, \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0, \qquad\qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq n \end{array}}$$

Fonction économique

m: contraintes

n: nbre de variables $x_1,\ldots,x_n$

Il y a m contraintes propres et n contraintes impropres (de positivité), et n variables naturelles. Une solution admissible est un n-uplet qui vérifie toutes les contraintes ; parmi ces solutions admissibles celle(s) pour la(les)quelle(s) la fonction économique est maximale, s'appelle(nt) solution(s) optimale(s).

Propriété : Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique.

$$\text{Min}(z) = -\max(-z)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) . x_j \leq -b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) . x_j \leq -b_i \end{cases}$$

$x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0 \Rightarrow$ changement de variable $x'_j = -x_j$ dans le PL si certaines variables n'ont pas de condition de signe, on pose $x_i = x'_i - x''_i$, avec $x'_i \geq 0$ et $x''_i \geq 0$.

Remarque: $2 x_1^2 + x_2 \leq 12$ est impossible à résoudre avec cet outil.

1.4) Formulation générale

$$(P)\ \begin{cases} \max Z(x) = \langle c, x\rangle \\ \left.\begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \ \Omega \end{cases}$$

Remarques:

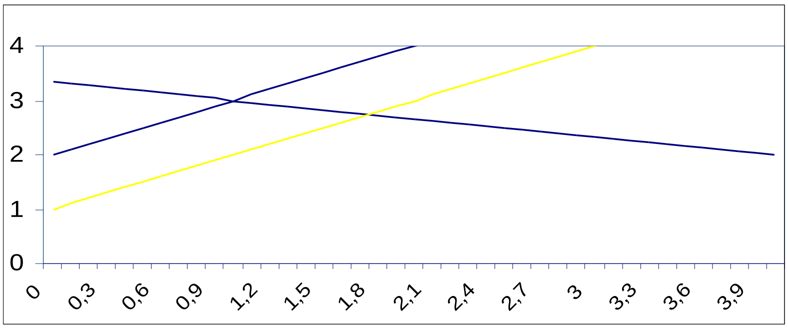
- $\langle c, x\rangle = {}^{+}c.x$
- $A \in IR_{mxn}$ $b \in IR^m$, $c \in IR^n$, $x \in IR^n$
- $x \geq 0 \Leftrightarrow \forall i \quad x_i \geq 0$
- $\Omega = \{x \in IR^n \ / \ x \geq 0 \ \ Ax \leq b\}$ ensemble des solutions réalisables
- On ne suppose pas à priori qu'il existe un maximum

- $\Omega = 0$ le problème n'a pas de solution réalisable
  exemple: Max Z(x) = x
  $\Omega = \{x \ / \ x \geq 0 \ \ x \leq -1\}$
- $\Omega = 0$ le problème a une solution optimale
  exemple: Max Z(x) = x
  $\Omega = \{x \ / \ x \leq 0\}$
- $\Omega = 0$ Z(x) non borné sur Ω
  exemple: Max Z(x) = x
  $\Omega = \{x \ / \ x \geq 0\}$

1.5) Interprétation géométrique

Le système : $\boxed{\begin{array}{l} \max z = -x_1 + x_2 \\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 4 \end{cases} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}}$ (PL1) est associé à la représentation graphique suivante.

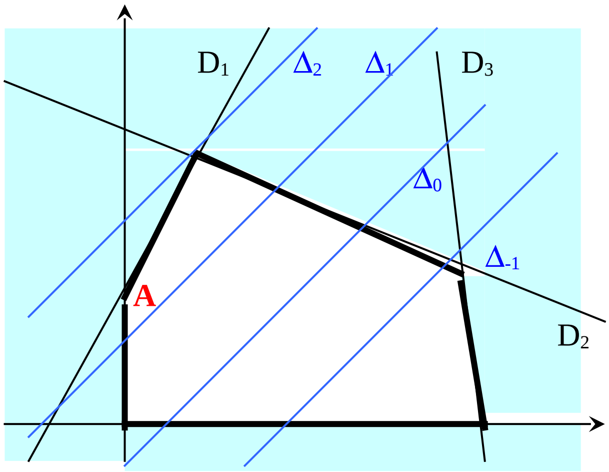
Dans cet exemple, la solution optimale est $x_1=1$, $x_2 = 3$, $z = 2$



4
3
2
1
0
0
0,3
0,6
0,9
1,2
1,5
1,8
2,1
2,4
2,7
3
3,3
3,6
3,9

Soit le système:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \le 4 \\ \max z = -x_1 + x_2 \end{cases}$$



D_1 $-2x_1 + x_2 = 1$

$x_2 = 2x_1 + 1$

D_2 $3x_2 = 10 - x_1$

$x_2 = 10/3 - (1/3)x_1$

D_3 $x_1 \le 4$

$x_2 = 2x_1 + 1$

Δ_k $x_2 - x_1 = k$

$x_2 = x_1 + k$

z a pour maximum 2 atteint en $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

A $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + t_1 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + t_2 &= 10 \\ x_1 \qquad + t_3 &= 4 \end{aligned}$$

t_1: variable d'écart

1.6) Forme standard

On introduit des variables dites d'écart. La **forme standard** d'un PL est telle que :

- On maximise une fonction économique linéaire des variables
- Les variables sont assujetties à des contraintes :
  - Propres : équations linéaires (en introduisant des variables d'écart, positives)
  - Impropres : conditions de positivité (des variables naturelles et des variables d'écart)

Théorème : tout programme linéaire peut être écrit sous forme canonique ou sous forme standard.

$$\boxed{\begin{array}{l} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j + x_{n+i} = b_i, \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le m \\ x_j \ge 0, \qquad \text{pour} \quad 1 \le j \le n \\ x_{n+i} \ge 0, \qquad \text{pour} \quad 1 \le i \le m \end{array}}$$

Ecriture matricielle :

$$\begin{cases} \max\ ({}^t c\, x) \\ Ax=b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec :

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $x, c \in \mathbb{R}^{n+m}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n+m}(\mathbb{R})$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^m$

2. Convexité

$C \subset IR^n$ est convexe SSI $\forall x \in C$, et $\forall y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C$
L'intersection d'un nombre fini de convexes est convexe. Un polyèdre convexe est l'intersection d'un nombre fini d'ensembles du type A_α , B_α , C_α.

Théorème : L'ensemble Ω des solutions réalisables d'un programme linéaire est convexe.

x est un point extrémal d'un convexe (ou point anguleux, ou sommet) SSI il n'existe pas:
$x', x^2 \in C$ $x' \neq x^2$ tels que $x = \alpha x' + (1-\alpha)x^2$ avec $\alpha \in]0,1[$

Théorème : Tout point x d'un polyèdre convexe borné $\Omega \subset IR^n$ est combinaison linéaire convexe de points extrêmes de Ω.

Remarque : Dans le cas où Ω est un polyèdre non borné, il existe un théorème analogue utilisant la notion de rayons extrémaux.

3. Méthode du simplexe

3.1) Exemple avec deux variables

Soit le système S1:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + t_1 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + t_2 = 10 \\ x_1 + t_3 = 4 \\ x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \\ \max z = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

Ici, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ est une solution de base admissible avec $z = 0$, c'est à dire qu'elle fait partie de la zone graphique concernée et qu'elle répond à toutes les conditions posées.

On a les variables hors base: x_1 , x_2 et les variables en base: t_1 , t_2 , t_3
Essayons de faire croître x_2 , avec $x_1 = 0$

$t_1 = 1 - x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_2 \leq 1$
$t_2 = 10 - 3x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_2 \leq 10/3$
$t_3 = 4 \quad \rightarrow \quad$ pas de contrainte

On trouve donc une deuxième solution admissible: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$,
$t_1 = 0$, $t_2 = 7$, $t_3 = 4$

$z = 1 = x_2 - x_1$

hors base base

On veut écrire tout le monde en fonction de x_1 et de t_1.

Donc le système S2:

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 2x_1 - t_1 \\ t_2 = 10 - x_1 - 3(1 + 2x_1 - t_1) = 7 - 7x_1 + 3t_1 \\ t_3 = 4 - x_1 \\ x_1 , x_2 , t_1, t_2 , t_3 \geq 0 \\ z = 1 + 2x_1 - t_1 - x_1 = 1 + x_1 - t_1 \end{cases}$$

<u>2ième étape:</u>

Faisons croître x_1 (avec $t_1 = 0$):

S2 devient donc avec $t_1 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 2x_1 \geq 0 & \rightarrow & x_1 \geq -1/2 \\ t_2 = 7 - 7x_1 \geq 0 & \rightarrow & x_1 \leq 1 \\ t_3 = 4 - x_1 \geq 0 & \rightarrow & x_1 \leq 4 \end{cases}$$

On fait rentrer x_1 dans la base en posant $x_1 = 1$, et on a donc hors base: $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ et en base $x_2 = 3$, $t_3 = 3$, $z = 2$

Donc le système S3:

$$\begin{cases} x_1 = 1/7\ (7 + 3t_1 - t_2) \\ x_2 = 1 + 2/7\ (7 + 3t_1 - t_2) - t_1 \\ t_3 = 4 - 1/7\ (7 + 3t_1 - t_2) \\ x_1 , x_2 , t_1, t_2 , t_3 \geq 0 \\ z = 1 + 1 + 3/7\ t_1 - 1/7\ t_2 - t_1 = 2 - 4/7\ t_1 - 1/7\ t_2 \end{cases}$$

Et ici la solution optimale est donc maximum !!!

3.2) Méthode des tableaux

a) PL1 sous forme standard

$$\max z = -x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_5 = 4 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Sous forme de tableau :

coef	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
1	1	–2	1	1	0	0
10/3	10	1	3	0	1	0
∝	4	1	0	0	0	1
	Z	–1	1	0	0	0

La solution admissible de base (solution initiale) est:

$x_1=x_2=0$ (donc ce sont les variables Hors Base)
et $t_1 =1$, $t_2= 10$, $t_3= 4$ (en base) avec $z = 0$.

Comme le coefficient de x_2 est le plus petit positif, on va faire entrer x_2 en base:

coef	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3		
-1/2	1	-2	1	1	0	0	x_2	
1	7	7	0	-3	1	0	t_2	$L_2 - 3L_1$
4	4	1	0	0	0	1	t_3	
	Z - 1	1	0	-1	0	0		$L_4 - L_1$

on va faire entrer x_1 en base et en sortir t_2:

b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	
3	0	1	1/7	2/7	0	x_2
1	1	0	-3/7	1/7	0	x_1
3	0	0	3/7	-1/7	1	t_3
Z – 2	0	0	-4/7	-1/7	0	

On a obtenu la solution optimale , puisque les coefficients de la fonction économique sont tous négatifs ou nuls, une augmentation de t_2 ou de t_1, variables hors base entraînerait une diminution de la valeur de Z.

Conclusion : solution optimale : x_1=1, x_2=3, z =2

b) Exercice 1

Soit le programme linéaire suivant sous sa forme canonique:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ \max z = x_1 + 3x_2 \end{cases} \qquad \text{avec } x_1, x_2 \geq 0$$

1. Mettre sous forme standard

On introduit donc les variables d'écart t_1, t_2 et t_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + t_1 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 + t_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + t_3 = 12 \\ \max z = x_1 + 3x_2 \end{cases} \qquad \text{avec } x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

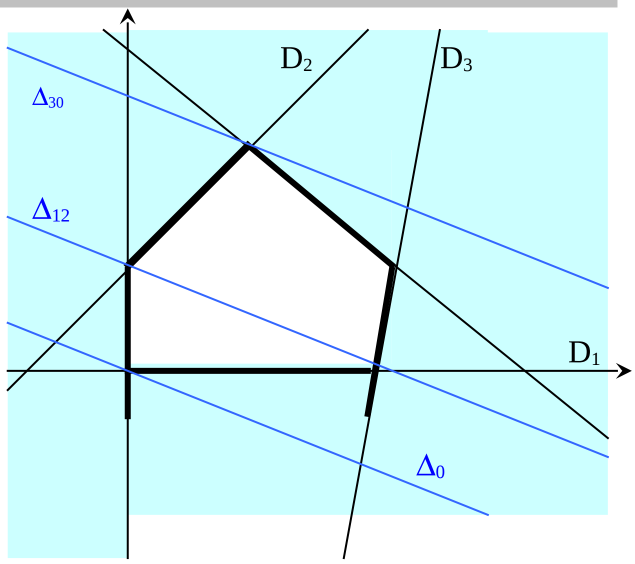
2. Proposer une résolution graphique

D_1 $x_1 + x_2 = 14$
$x_2 = 14 - x_1$

D_2 $x_2 = 2/3\ x_1 + 4$

D_3 $x_2 = 2\ x_1 - 12$

si $x_1 = 0$ et $k = 0$ alors $x_2 = 0$
car $x_2 = (k - x_1) / 3$
donc Δ_0 $x_2 = -(1/3)\ x_1$
Δ_{12} $x_2 = 4 = (1/3)\ k$
Δ_{30} $x_2 = 8$ $x_1 = 6$



$$Z = 30 \text{ pour } x_1 = 6 \text{ et } x_2 = 8$$

3. Trouver une solution optimale par la méthode des tableaux

coef(b_i/a_{i1})	**b_i**	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**définit**
14	14	1	1	1	0	0	t_1
4	12	-2	3	0	1	0	t_2
-2	2	2	-1	0	0	1	t_3
	Z	1	3	0	0	0	

Solution de base admissible: $x_1 = x_2 = 0$ | $t_1 = 14$
$t_2 = 12$
$t_3 = 2$

On prend celui qui fait augmenter le plus Z donc ici on choisit de faire rentrer x_2 en base car son coeff sur Z est de 3.

coef		**b_i**	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**définit**
10*3/5	6	10	5/3	0	1	-1/3	0	t_1 $L_1 - L_2$
4*(-3/2)	-6	4	-2/3	1	0	1/3	0	x_2 $L_2/3$
16*3/4	12	16	4/3	0	0	1/3	1	t_3 $L_3 + L_2$
		Z-12	3	0	0	-1	0	$L_Z - 3L_2$

L_1 : t_1 en fonction de x_1, x_2
L'_2 : x_2 en fonction de t_2
L'_1 : t_1 en fonction de t_2, x_2

L_1	14	1	1	1	0	0
L'_2	4	-2/3	1	0	1/3	0
L'_1	10	5/3	0	1	-1/3	0

L'_3 : t_3 en fonction de t_2, x_2

L_3	12	2	-1	0	0	1
L'_2	4	-2/3	1	0	1/3	0
L'_3	16	4/3	0	0	1/3	1

Donc $x_1 = 0 = t_2$; $x_2=4$; $t_1=10$; $t_3=16$; $z=12$

On fait maintenant sortir t_1 de la base, et donc rentrer x_1:

b_i	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**définit**
6	1	0	3/5	-1/5	0	x_1
8	0	1	2/5	1/5	0	x_2
16-(4/3)*6 = 8	0	0	-4/5	3/5	1	t_3
Z-12-18	0	0	-9/5	-2/5	0	

$z=30$; $x_1 = 6$; $x_2=8$; $t_1=t_2=0$; $t_3=8$

c) Exercice 2

Soit le programme linéaire suivant sous sa forme canonique:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ \max z = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \text{avec } x_1, x_2 \ge 0$$

1. Mettre sous forme standard

On introduit donc les variables d'écart t_1 et t_2:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + t_1 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + t_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + t_3 = 9 \\ \max z = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \text{avec } x_i, t_i \ge 0$$

2. Trouver une solution optimale par la méthode des tableaux

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	définit
~~8/3~~	~~8~~	~~3~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	t_1
6	6	1	2	0	1	0	t_2
9/3	9	3	2	0	0	1	t_3
	Z	1	1	0	0	0	

Solution de base admissible: $x_1 = x_2 = Z = 0$

$$\begin{cases} t_1 = 8 \\ t_2 = 6 \\ t_3 = 9 \end{cases}$$

On choisit alors celui qui a le coefficient le plus important pour faire augmenter Z. Ici, Coef x_1 = Coef x_2 = 1 donc on le choisit au hasard.

Faisons rentrer x_1 en base:

$$\begin{cases} 3x_1 + t_1 = 8 \\ x_1 + t_2 = 6 \\ 3x_1 + t_3 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 8 - 3x_1 \geq 0 \\ 6 - x_1 \geq 0 \\ 9 - 3x_1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8/6 \geq x_1 \\ 6 \geq x_1 \\ 3 \geq x_1 \end{cases}$$

+ contraignante donc on fait sortir t_1

et on fait sortir t_1 de la base:

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	définit
8	8/3	1	1/3	1/3	0	0	x_1 $L_1/3$
2	10/3	0	5/3	-1/3	1	0	t_2 L_2-L'_1
1	1	0	1	-1	0	1	t_3 L_3-$3L'_1$
	Z-8/3	0	2/3	-1/3	0	0	

L_2	6	1	2	0	1	0
$-L'_1$	-8/3	-1	-1/3	-1/3	0	0
L'_2	10/3	0	5/3	-1/3	0	0

L_3	9	3	2	0	0	1
$-3L'_1$	-8	-3	-1	-1	0	0
L'_3	1	0	1	-1	0	1

L_z	Z	1	1	0	0	0
$-L'_1$	-8/3	-1	-1/3	-1/3	0	0
L'_z	Z-8/3	0	2/3	-1/3	0	0

$Z-8/3 = 2/3\, x_2 - 1/3\, t_1$

Ici, la solution est donc $x_1 = 8/3$ $t_2 = 10/3$ $t_3 = 1$ $x_2 = t_1 = 0$ $\boxed{Z = 8/3}$

Ce n'est pas la solution optimale. On fait donc rentrer x_2 en base et sortir t_3

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	définit	
7/2	7/3	1	0	2/3	0	-1/3	x_1	L'$_1$-1/3L"$_3$
5/4	5/3	0	0	4/3	1	-5/3	t_2	L'$_2$-5/3L"$_3$
-1	1	0	1	-1	0	1	x_2	
	Z-10/3	0	0	1/3	0	-2/3		L$_z$-2/3L"$_3$

L'$_1$	8/3	1	1/3	1/3	0	0
1/3L"$_3$	1/3	0	1/3	-1/3	0	1/3
L'$_1$-1/3L"$_3$	7/3	1	0	2/3	0	-1/3

L'$_2$	10/3	0	5/3	-1/3	1	0
5/3L"$_3$	5/3	0	5/3	-5/3	0	5/3
L'$_2$ – 5/3 L"$_3$	5/3	0	0	4/3	1	5/3

L'$_z$	Z – 8/3	0	2/3	-1/3	0	0
2/3L"$_3$	2/3	0	2/3	-2/3	0	2/3
L'$_z$-2/3L"$_3$	Z –10/3	0	0	1/3	0	-2/3

Solution: $x_1 = 7/3$; $x_2 = 1$; $t_2 = 5/3$; t_1, $t_3=0$ $\boxed{Z = 10/3}$

Faisons rentrer t_1 et sortir t_2 de la base (on fait sortir t_2 car il a le coefficient le plus petit positif).

b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	définit	
3/2	1	0	0	-1/2	1/2	x_1	L"$_1$-1/3L"$_3$
5/4	0	0	1	¾	-5/4	t_1	L'$_2$-5/3L"$_3$
9/4	0	1	0	¾	-1/4	x_2	
Z-15/4	0	0	0	-1/4	-1/4		L$_z$-2/3L"$_3$

L"$_1$	7/3	1	0	2/3	0	-1/3
L"'$_2$	5/4	0	0	1	¾	-5/4
L"$_1$-2/3L"$_2$	3/2	1	0	0	-1/2	1/2

L"$_2$	-1	1	0	1	-1	0
L"'$_2$	5/4	0	0	1	¾	-5/4
L"$_3$ – L"$_2$	9/4	0	1	0	¾	-1/4

L"$_z$	Z-10/3	0	0	1/3	0	-2/3
L"'$_2$	5/4	0	0	1	¾	-5/4
L"$_z$+1/3L"$_2$	Z-15/4	0	0	0	-1/4	-1/4

Ici, on a la solution optimale car les coefficients de la fonction économique sont tous négatifs.

$Z = 15/4$ pour $x_1 = 3/2$; $x_2 = 9/4$; $t_1 = 5/4$; t_2, $t_3 = 0$

d) Exercice 3

Soit le programme linéaire suivant sous sa forme canonique:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ \max z = x_1 + \tfrac{1}{2} x_2 \end{cases} \qquad \text{avec } x_1, x_2 \geq 0$$

1. Mettre sous forme standard

On introduit donc les variables d'écart t_1 et t_2:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + t_1 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + t_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + t_3 = 8 \\ \max z = x_1 + \tfrac{1}{2} x_2 \end{cases} \qquad \text{avec } x_i, t_i \geq 0$$

2. Trouver une solution optimale par la méthode des tableaux

coef (b_i/a_{i1})	**b_i**	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**définit**
3	3	1	-1	1	0	0	t_1
-4	4	-1	2	0	1	0	t_2
4	8	2	1	0	0	1	t_3
	Z	1	1/2	0	0	0	

Solution de base admissible: $x_1 = x_2 = Z = 0$ | $t_1 = 3$, $t_2 = 4$, $t_3 = 8$

On fait rentrer x_1 en base et sortir t_1:

coef (b_i/a_{i1})	**b_i**	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**définit**
-3	3	1	-1	1	0	0	x_1
7	7	0	1	1	1	0	t_2
2/3	2	0	3	-2	0	1	t_3
	Z-3	0	3/2	-1	0	0	

On fait rentrer x_2 en base et sortir t_3:

b_i	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**définit**	
11/3	1	0	1/3	0	1/3	x_1 $L_{1}+L'_3$	
19/3	0	0	5/3	1	-1/3	t_2 $L_2-L'_3$	**B**
2/3	0	1	-2/3	0	1/3	x_2 L'_3	
Z-4	0	0	0	0	-1/2		

Mais on voit que ce n'est pas la seule solution (notamment grâce au graphique) et on peut donc continuer en faisant rentrer t_1 et sortir t_2.

b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	définit
12/5	1	0	0	-5	2	x_1
19/5	0	0	1	3/5	-1/5	t_1
16/5	0	1	0	2/5	1/5	x_2
Z-4	0	0	0	0	-1/2	

A

En fait, il y a une infinité de solutions optimales sur le segment [AB].

e) Exercice 4

Soit le programme linéaire suivant sous sa forme canonique:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 5 \\ x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 = 7 \qquad \text{avec } x_i \geq 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 4 \\ \max z = 13x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 10x_4 \end{cases}$$

1. Mettre sous forme standard

On introduit donc une seule variable d'écart t_1:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 - t_1 = 5 \\ x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 \qquad = 7 \qquad \text{avec } x_i, t_i \geq 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 \qquad = 4 \end{cases}$$

2. Trouver une solution optimale par la méthode des tableaux

b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1
5	-1	1	5	-2	-1
7	1	0	-3	1	0
4	1	1	4	-3	0
Z	13	6	-2	-10	0

Si l'on veut que L_1 définisse x_2: on aura L_2 ; $L'_3 \leftarrow L_3 - L_1$; $L'_4 \leftarrow L_4 - 6L_1$

b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	définit
5	-1	1	5	-2	-1	x_2
7	1	0	-3	1	0	
-1	2	0	-1	-1	1	
Z-30	19	0	-32	2	6	

Si l'on veut que L_2 définisse x_1:

on aura $L'_1 \leftarrow L_3 + L_2$; $L'_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$; $L'_4 \leftarrow L_4 - 19L_2$

b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	définit
12	0	1	2	-1	-1	x_2
7	1	0	-3	1	0	x_1
-15	0	0	5	-3	1	
Z-163	0	0	25	-17	6	

Si l'on veut que L_3 définisse x_4 (car le second membre est négatif donc x_4 ayant un coefficient négatif, cela se simplifie): on aura $L'_3 \leftarrow L_3/-3$.

b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	définit
17	0	1	1/3	0	-4/3	x_2
2	1	0	-4/3	0	1/3	x_1
5	0	0	-5/3	1	-1/3	x_4
Z-78	0	0	-10/3	0	1/3	

On arrive donc ici à un simplexe et maintenant, on peut chercher à optimiser z. Pour cela, on fait rentrer t_1 en base et on sort x_1:

on a donc $L'_1 \leftarrow L_1 + 4/3\ L_2$; $L'_2 \leftarrow 3L_2$; $L'_3 \leftarrow L_3 + 1/3\ L_2$; $L'_4 \leftarrow L_4 - 1/3\ L_2$

b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	définit
25	4	1	-5	0	0	x_2
6	3	0	-4	0	1	t_1
7	1	0	-3	1	0	x_4
Z-80	-1	0	-2	0	0	

Et on obtient donc la solution optimale pour $x_2 = 25$, $x_4 = 7$, $x_1 = x_4 = 0$ ($t_1 = 6$)

$$z = 80$$

Sinon en passant par le système:

$$\begin{cases} 1/3\ x_3 - 4/3\ t_1 + x_2 = 17 \\ -4/3\ x_3 + 1/3\ t_1 + x_1 = 2 \\ -5/3\ x_3 - 1/3\ t_1 + x_4 = 5 \\ \max z = 78 + (-10/3\ x_3 + 1/3\ t_1) \end{cases}$$

Et si $x_1 = x_4 = x_2 = 0$, on a donc:

$$\begin{cases} 1/3\ x_3 - 4/3\ t_1 \leq 17 \\ -4/3\ x_3 + 1/3\ t_1 \leq 2 \\ -5/3\ x_3 - 1/3\ t_1 \leq 5 \\ \max z = 18 - 10/3\ x_3 + 1/3\ t_1 \end{cases}$$

3.3) Méthode des 2 phases et méthode M

Ces méthodes sont à utiliser si les second membres ne sont pas tous positifs.

a) Exemple 1 :

Soit le Programme Linéaire dont la forme canonique est la suivante :
$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -2x_1 - x_2 \leq -4 \\ -2x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

En le mettant sous la forme standard :
$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 = -4 \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = -2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

La difficulté de cette étude provient du fait que l'on n'a pas une solution admissible initiale, en fixant $x_1=x_2=0$ (variables hors-base) car on aurait alors $x_3=6 \geq 0$ (valable), mais $x_4=-4 \leq 0$ (non valable) et $x_5 = -2 \leq 0$ (non valable). Il faut donc commencer par chercher une première solution admissible. On pourrait essayer se ramener au simplexe.
Ou alors, on introduit des variables artificielles : x_6 et x_7, associées à un coefficient de la fonction économique négatif, (pour que la solution optimale du PL avec ces deux variables artificielles soit obtenue avec x_6 et x_7 nulles, c'est-à-dire la solution optimale du nouveau PL est la même que celle du PL sans ces deux variables artificielles).
Le Programme Linéaire devient :
$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - Mx_6 - Mx_7$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 - x_6 = -4 \\ -2x_1 + x_2 + x_5 - x_7 = -2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$
On a alors une solution initiale admissible: $x_3 = 6$, $x_6 = 6$, $x_7 = 2$, donc z = 0 (x_1 , x_2 , x_4 , x_5 sont hors base).

b) Méthode des 2 phases :

Pour la suite de l'exemple, on utilisera les noms de variables suivants:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + t_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - t_2 + V_1 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - t_3 + V_2 = 2 \end{cases} \qquad \text{avec } x_{i,}\ t_i \geq 0$$

- ***1ère phase:***

Cherchons dans le système à maximiser une nouvelle fonction économique $z' = -V_1 - V_2$

$V_1 = 4 - 2x_1 - x_2 + t_2$

$V_2 = 2 - 2x_1 + x_2 + t_3$

$z' = -4 + 2x_1 + x_2 - t_2 - 2 + 2x_1 - x_2 - t_3 = -6 + 4x_1 - t_2 - t_3$

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	V_1	V_2	définit
6	6	1	1	1	0	0	0	0	t_1
2	4	2	1	0	-1	0	1	0	V_1
1	2	2	-1	0	0	-1	0	1	V_2
	Z'+6	4	0	0	-1	-1	0	0	
	Z	2	3	0	0	0	0	0	

Ici, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	V_1	V_2	définit
10/3	5	0	3/2	1	0	½	0	-1/2	t_1
1	2	0	2	0	-1	1	1	-1	V_1
-2	1	1	-1/2	0	0	-1/2	0	½	x_2
	Z'+2	0	2	0	-1	1	0	-2	
	Z-2	0	4	0	0	1	0	-1	

V_2 étant devenu nul, on élimine sa colonne du tableau.

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	V1	définit
14/3	7/2	0	0	1	¾	-¼	-¾	t_1
-2	1	0	1	0	-½	½	½	x_2
-6	3/2	1	0	0	-¼	-¼	¼	x_1
	Z'	0	0	0	0	0	-1	
	Z-6	0	0	0	2	-1	-2	

Fin de la première phase: solution initiale de (S): $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1$, $t_1 = 7/2$, $z = 6$

- ***2ième phase: simplexe classique sur (S)***

On a hors base: t_2 et t_3 , et en base: x_1 , x_2 et t_1.

b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	définit
14/3	0	0	4/3	1	-1/3	t_2
10/3	0	1	2/3	0	1/3	x_2
8/3	1	0	1/3	0	-1/3	x_1
Z –46/3	0	0	-8/3	0	-1/3	

La solution optimale est donc pour $x_1 = 8/3$, $x_2 = 10/3$, $t_2 = 14/3$, et $z = 46/3$

c) Méthode M ou des perturbations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + t_1 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + t_2 - V_1 = -4 \quad \text{avec } x_i, t_i \geq 0 \\ -2x_1 + x_2 + t_3 - V_2 = -2 \\ \max z = 2x_1 + 3x_2 - MV_1 - MV_2 \quad \text{avec } M > 0 \text{ aussi grand} \end{cases}$$

coef (b_i/a_{i1})	**b_i**	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**V_1**	**V_2**	**définit**
6	6	1	1	1	0	0	0	0	t_1
4	4	2	1	0	-1	0	1	0	V_1
-2	2	2	-1	0	0	-1	0	1	V_2
	Z	2	3	0	0	0	-M	-M	

Ici, nous n'avons pas tout à fait un tableau du simplexe car les coefficients de z ne sont pas nul pour V_1 et V_2. On fait rentrer x_2 dans la base et sortir V_1: $L'_1 \leftarrow L_1 - L_2$

b_i	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**V_1**	**V_2**	**définit**
2	-1	0	1	1	0	-1	0	t_1
4	2	1	0	-1	0	1	0	x_2
6	4	0	0	-1	-1	1	1	V_2
Z-12	-4	0	0	3	0	-M-3	-M	

On fait rentrer t_2 dans la base et sortir t_1.

b_i	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**V_2**	**définit**
2	-1	0	1	1	0	0	t_2
6	1	1	1	0	0	0	x_2
8	3	0	1	0	-1	1	V_2
Z-18	-1	0	-3	0	0	-M	

<u>Erreur de raisonnement</u>: Le premier tableau n'est pas un tableau du simplexe, il aurait donc fallu commencer par le ramener à une forme de vrai tableau du simplexe.

- ***<u>Méthode correcte:</u>***

Il faut modifier la ligne "z" pour obtenir un vrai tableau du simplexe:

b_i	**x_1**	**x_2**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**V_1**	**V_2**	**définit**
6	1	1	1	0	0	0	0	t_1
4	2	1	0	-1	0	1	0	V_1
2	2	-1	0	0	-1	0	1	V_2
Z+4M	2+2M	3+M	0	-M	0	0	-M	$L'_4 \leftarrow L_4 + ML_2$
Z+6M	2+4M	3	0	-M	-M	0	0	$L'_4 \leftarrow L_4 + ML_3$

Le tableau initial du simplexe est donc:

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	V_1	V_2	définit
6	6	1	1	1	0	0	0	0	t_1
2	4	2	1	0	-1	0	1	0	V_1
1	2	2	-1	0	0	-1	0	1	V_2
	Z+6M	2+4M	3	0	-M	-M	0	0	

On fait rentrer x_1 dans la base et sortir V_2.

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	V_1	V_2	définit
10/3	5	0	3/2	1	0	½	0	-½	t_1
1	2	0	2	0	-1	1	1	-1	V_1
-2	1	1	-½	0	0	-½	0	½	x_1
	Z+2M-2	0	4+2M	0	-M	1+M	0	-1-2M	

On fait rentrer x_2 dans la base et sortir V_1.

b_i	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	V1	définit
7/2	0	0	1	¾	-¼	-3/4	t_1
1	0	1	0	-½	½	½	x_2
3/2	1	0	0	-¼	-¼	¼	x_1
Z-6	0	0	0	2	-1	-2-M	

3.4) Paramétrisation des coeff. de la fn éco.

Pour moduler les résultats obtenus par la méthode du simplexe, on peut paramétrer certains des coefficients.

Exemple : *(Faure : Guide de la R.O., T.2 : les applications)*

Un agriculteur veut mettre en valeur un espace de 40 hectares, il dispose d'un montant annuel de 63 000 u.m.(unités monétaires), de 840 journées de travail et se propose de semer du maïs, du blé et du soja. La préparation à la culture coûte 1500 u.m. par ha pour le maïs, 1800 u.m. par ha pour le blé et enfin 1050 u.m. par ha pour le soja. La culture d'un ha nécessite : 18 journées de travail pour le maïs, 27 journées pour le blé et 15 journées pour le soja. Les rapports espérés sont respectivement proportionnels à : 420 u.m. pour le maïs, 510 u.m. pour le blé et 360 u.m. (compte tenu d'une prime d'encouragement) pour le soja.

a. Quels sont les choix de l'agriculteur ?

b. L'agriculteur apprend que la prime d'encouragement à la culture du soja est susceptible d'être modifiée. Il désire savoir à quel taux de prime il devrait changer la distribution des cultures révélées par le P.L.

c. Supposons maintenant que les moyens sous la forme du travail humain se trouvent soumis à une limitation variable. Quelle est alors la meilleure occupation des sols ?

o ***a. Forme Canonique :***

$$\max z = 420x_1 + 510x_2 + 360x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ 1500x_1 + 1800x_2 + 1050x_3 \leq 63000 \\ 18x_1 + 27x_2 + 15x_3 \leq 840 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

On introduit les variables d'écarts et on simplifie:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + t_1 = 40 \\ 10x_1 + 12x_2 + 7x_3 + t_2 = 420 \qquad \text{avec } x_i, t_i \geq 0 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + t_3 = 280 \\ \max z = 420x_1 + 510x_2 + 360(1+\lambda)x_3 \end{cases}$$

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	définit
40	40	1	1	1	1	0	0	t_1
60	420	10	12	7	0	1	0	t_2
280/5=56	280	6	9	5	0	0	1	t_3
	Z	420	510	360+360λ	0	0	0	

Si $360(1+\lambda) \geq 510 \Leftrightarrow 1+\lambda \geq 510/360 = 17/12$

$\Leftrightarrow \lambda \geq 5/12$

On fait rentrer x_3 dans la base et sortir t_1:

b_i	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	définit
40	1	1	1	1	0	0	x_3
140	3	5	0	-7	1	0	t_2
80	1	4	0	-5	0	1	t_3
Z-40(360+360λ)	60-360λ	150-360λ	0	-360-360λ	0	0	

Si $\lambda > 5/12$, la solution optimale est 40 ha de soja

Si $\lambda = 5/12$:

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	définit
40	40	1	1	1	1	0	0	t_1
35	420	10	12	7	0	1	0	t_2
280/9	280	6	9	5	0	0	1	t_3
	Z	420	510	510	0	0	0	

coef (b_i/a_{i1})	b_i	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	définit
80/4=20	80/9	1/3	0	4/9	1	0	-1/9	t_1
140	140/3	2	0	1/3	0	1	-4/3	t_2

280/5=56	280/9	2/3	1	5/9	0	0	1/9	x_2
	Z-510*210/9	80	0	680/3	0	0	-510/9	

b_i	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	définit
20	3/4	0	1	9/4	0	-1/4	x_3
40	7/4	0	0	-¾	1	-5/4	t_2
80/9	1/4	1	0	-5/4	0	1/4	x_2
Z - 49300/3	-120	0	0	-510	0	0	

Si $\lambda < 5/12$ … même démarche…

En divisant la première ligne par 30, la troisième par 150 et la dernière par 3, on trouve le tableau suivant :

Z	14	17	12	0	0	0
40	1	1	1	1	0	0
420	10	12	7	0	1	0
280	6	9	5	0	0	1

Z	420	510	360	0	0	0
40	1	1	1	1	0	0
63000	1500	1800	1050	0	1	0
840	18	27	15	0	0	1

z	14	17	12	0	0	0	Cff
40	1	1	1	1	0	0	40
420	10	12	7	0	1	0	35
280	6	9	5	0	0	1	31,11

z–4760/9	2 2/3	0	2 5/9	0	0	–1 8/9	Cff
8 8/9	1/3	0	4/9	1	0	– 1/9	26,666
46 2/3	2	0	1/3	0	1	–1 1/3	23,33
31 1/9	2/3	1	5/9	0	0	1/9	46,666

z–5320/9	0	0	2 1/9	0	–1 1/3	– 1/9	cff
1 1/9	0	0	2/5	1	– 1/6	1/9	2,8571
23 1/3	1	0	1/6	0	1/2	– 2/3	140
15 5/9	0	1	4/9	0	– 1/3	5/9	35

z–4180/7	0	0	0	–38/7	– 3/7	– 5/7
20/7	0	0	1	18/7	– 3/7	2/7
160/7	1	0	0	– 3/7	4/7	– 5/7
100/7	0	1	0	–8/7	– 1/7	3/7

Solution optimale : z = 4180/7, c'est-à-dire 4180/7*60 u.m ;

$x_1 = 160/7 \approx 22{,}85$ ha, $x_2 = 100/7 \approx 14{,}28$ ha , $x_3 = 20/7 \approx 2{,}85$ ha

Rq : dans cet exemple, toutes les ressources sont épuisées (crédit, journées de travail) et la terre est intégralement occupée. Cela provient du fait que le premier P.L. mis sous forme d'égalité est un système de Cramer.
b. Pour paramétrer alors suivant la valeur de la prime accordée au soja, remplaçons dans la **matrice optimale** le coefficient de x_3 de la fonction économique par $12(1+\lambda)$, avec $\lambda \geq -1$.
Le nouveau tableau est :

Z–4180/7–240/7 λ	0	0	0	–38/7–216/7 λ	–3/7+36/7 λ	–5/7–24/7 λ
20/7	0	0	1	18/7	–3/7	2/7
160/7	1	0	0	–3/7	4/7	–5/7
100/7	0	1	0	–8/7	–1/7	3/7

La solution avant paramétrage était $x_1 = 160/7$, $x_2 = 100/7$, $x_3 = 20/7$. Cette solution n'est optimale que si tous les coefficients de la fonction économique sont négatifs :

- $\delta_1 = -\,38/7 - 216/7\ \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq -\,19/108$
- $\delta_2 = -3/7 + 36/7\ \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1/12$
- $\delta_3 = -5/7 -24/7\ \lambda \leq 0 \Leftrightarrow -5/24 \geq \lambda$

Bilan :

	–1	–5/2	–19/108	1/12
δ_1	+	+	–	–
δ_2	–	–	–	+
δ_3	+	–	–	–

On va donc garder la solution précédente si $\lambda \in \ ]-19/108, 1/12[$

Si $\lambda \leq -19/108$, δ_1 est le plus coefficient positif de la fonction économique, donc on fait rentrer x_4 dans la base.

Z–4180/7–240/7 λ	0	0	0	–38/7–216/7 λ	–3/7+36/7 λ	–5/7–24/7 λ	Coeff
20/7	0	0	1	18/7	–3/7	2/7	10/9
160/7	1	0	0	–3/7	4/7	–5/7	–6400/21
100/7	0	1	0	–8/7	–1/7	3/7	–25/2

On fait donc sortir x_3 et entrer x_4.

Z–5320/9	0	0	19/9+12 λ	0	–4/3	–1/9
10/9	0	0	7/18	1	–1/6	1/9
70/3	1	0	1/6	0	½	–2/3
140/9	0	1	4/9	0	–1/3	5/9

Cette solution est stable si $19/9 + 12\lambda \leq 0$, c'est–à–dire si $\lambda \leq -19/108$, ce qui est justement le cas. Donc si $\lambda \leq -19/108$, la solution optimale consiste à cultiver 70/3 ha de maïs et 140/9 ha de blé, il reste alors 10/9 ha non cultivés. Le profit est alors de 5320/9 u.m., indépendant de λ, mais c'est un hasard.

Si $\lambda \geq 1/12$,

Z–4180/7–240/7 λ	0	0	0	–38/7–216/7 λ	–3/7+36/7 λ	–5/7–24/7 λ	Coeff
20/7	0	0	1	18/7	–3/7	2/7	–20/3
160/7	1	0	0	–3/7	4/7	–5/7	40
100/7	0	1	0	–8/7	–1/7	3/7	v1/100

On va faire sortir x_5 et rentrer x_1.

Z–580/7–240 λ	¾ – 9 λ	0	0	– 23/4 – 27 λ	–3/7+36/7 λ	–5/7–24/7 λ
20	¾	0	1	9/4	0	–1/4
40	7/4	0	0	–3/4	1	–5/4
20	¼	1	0	–5/4	0	1/4

Les coefficients de la fonction économique sont négatifs si :

- $3/4 - 9\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 1/12$ vrai
- $-23/4 - 27\lambda \leq 0$ vrai car $\lambda \geq 0$
- $-5/4 + 3\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 5/12$

Donc la solution pour $\lambda \in [1/12, 5/12]$ est 20 ha de soja et 20 ha de blé, pour un gain de $580+240\lambda$

Si $\lambda \geq 5/12$, on fait rentrer x_6, puisque le coefficient $-5/4 + 3\lambda$ est positif, et on fait sortir x_2.

Z–680	2–12 λ	5–12 λ	0	–12–12 λ	0	0
40	1	1	1	1	0	0
140	3	5	0	–7	1	0
80	1	4	0	–5	0	1

Cette fois, les coefficients de la fonction économique sont tous négatifs et la solution optimale dans ce cas est de cultiver 40 ha de soja, pour un gain de 480+480 λ u.m.

<u>Bilan :</u>

		–19/108		1/12		5/12	

Maïs	70/3	160/7	0	0
Blé	140/9	100/7	20	0
Soja	0	20/7	20	40
Gain	5320/9	4180/7+240/7 λ	580+240 λ	480+480 λ

Remarque : si λ prend exactement les valeurs limites : –19/108, 1/12, 5/12, les solutions optimales sont les mêmes par les deux procédés de calcul, pour les valeurs plus grandes et plus petites que la limite.

4. Dualité :

Reprenons l'exemple ci-dessus :

$$\max z = 14x_1 + 17x_2 + 12x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 40 \\ 10x_1 + 12x_2 + 7x_3 \le 420 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \le 280 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Le dual du 1[er] PL est obtenu à partir du tableau suivant :

	X_1	X_2	X_3	Min
Y_1	1	1	1	40
Y_2	10	12	7	420
Y_3	6	9	5	280
max	14	17	12	

C'est-à-dire :

$$\min z' = 40y_1 + 420y_2 + 280y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + 10y_2 + 6y_3 \ge 14 \\ y_1 + 12y_2 + 17y_3 \ge 17 \\ y_1 + 7y_2 + 5y_3 \ge 12 \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\min z' = 40y_1 + 420y_2 + 280y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + 10y_2 + 6y_3 - y_4 = 14 \\ y_1 + 12y_2 + 17y_3 - y_5 = 17 \\ y_1 + 7y_2 + 5y_3 - y_6 = 12 \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|l|} \hline \min z' = 40y_1 + 420y_2 + 280y_3 + My_7 + My_8 + My_9 \\ \begin{cases} y_1 + 10y_2 + 6y_3 - y_4 + y_7 = 14 \\ y_1 + 12y_2 + 9y_3 - y_5 + y_8 = 17 \\ y_1 + 7y_2 + 5y_3 - y_6 + y_9 = 12 \end{cases} \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9 \geq 0 \\ \hline \end{array}$$

On introduit des variables d'écart, sinon on n'a pas de solution initiale admissible : $y_1=0$, $y_2=y_3=0$ et $y_4 = -14$ et $y_5 = -17$ et $y_6 = -12$. Le coefficient M représente ici une valeur très grande (plus grande que toutes les valeurs numériques apparaissant dans les calculs, et $M\neq\infty$)
On a alors une solution admissible du nouveau PL : $y_1= \dots = y_6 = 0$, $y_7=14$, $y_8= 17$, $y_9 = 12$.
On cherche à minimiser z' ou à maximiser z''=–z'

Z''	–40	–420	–280	0	0	0	–M	–M	–M
14	1	10	6	–1	0	0	1	0	0
17	1	12	9	0	–1	0	0	1	0
12	1	7	5	0	0	–1	0	0	1

Ce tableau n'est pas encore un tableau du simplexe car les variables de la base sont y_7, y_8 et y_9 et la fonction économique z'' dépend de ces variables ! ! !
1ère transformation : (la ligne de z'' est remplacée par L_1+ML_2)

Z'' +14M	–40 +M	–420 +10M	–280 +6M	0–M	0	0	0	–M	–M
14	1	10	6	–1	0	0	1	0	0
17	1	12	9	0	–1	0	0	1	0
12	1	7	5	0	0	–1	0	0	1

2ème transformation : (la ligne de z'' est remplacée par $L_1+ML_3+ML_4$)

Z'' +43M	–40 +3M	–420 +29M	–280 +20M	–M	–M	–M	0	0	0
14	1	10	6	–1	0	0	1	0	0
17	1	12	9	0	–1	0	0	1	0
12	1	7	5	0	0	–1	0	0	1

Rq : comme M est très grand, –420+29M > 0 et est le plus grand de tous les coefficient. Donc on fait rentrer y_2 dans la base. Pour voir quelle variable sort de la base, déterminons la colonne des coefficients relatifs :

Coeff
14/10=1,4
17/12≈1,4166
12/7≈1,7142

Donc il faut faire sortir y_7 de la base. Le tableau résultant est :

Z'+588 +12/5M		2 +M/10	0	–28+13/5M	–42+19/10M	–M	–M	42–29/10M	0	0	*coeff*
y_2	7/5	1/10	1	3/5	–1/10	0	0	1/10	0	0	*7/3*
y_8	1/5	–1/5	0	9/5	6/5	–1	0	–6/5	1	0	*1/9*

y_9	11/5	3/10	0	4/5	7/10	0	–1	–7/10	0	1	*11/4*

On élimine la colonne de y_7 puisque la variable est maintenant hors base.

on élimine

Z'' +5320/9+19/9M	–10/9+7M/18	0	0	–70/3+1/6M	–140/9+4/9M	–M		140/9–13/9M	M		*coeff*
y_2	4/3	1/6	1	0	–1/2	1/3	0		–1/3	0	*1/8*
y_3	1/9	–1/9	0	1	2/3	–5/9	0		5/9	0	*–1/1*
y_9	19/9	7/18	0	0	1/6	4/9	–1		–4/9	1	*7/38*

Pour éliminer y_9, on va choisir une variable HB ayant un coefficient dans la fonction économique positif

	Z'' +4180/7	0	0	0	–160/7	–100/7	–20/7		
y_2	3/7	0	1	0	–4/7	1/7	3/7		
y_3	5/7	0	0	1	5/7	–3/7	–2/7		
y_1	38/7	1	0	0	3/7	8/7	–18/7		

On a donc obtenu une solution de base admissible : y_1= 38/7, y_2= 3/7, y_3=5/7, y_4, y_5, y_6 étant des variables HB.
De plus cette solution est optimale (ce ne sera pas toujours le cas), car tous les coefficients de la fonction économique sont négatifs.

<u>**Pr. :**</u> les solutions optimales du dual et les solutions optimales du primal sont associées :

n° primal		**colonnes**						sol. primal		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
Lignes	x_1	1	0	0	–3/7	4/7	–5/7	160/7	y_4	**colonnes**
	x_2	0	1	0	–8/7	–1/7	3/7	100/7	y_5	
	x_3	0	0	1	18/7	–3/7	2/7	20/7	y_6	
	x_4	0	0	0	–1	0	0	0	y_1	
	x_5	0	0	0	0	–1	0	0	y_2	
	x_6	0	0	0	0	0	–1	0	y_3	
coeff primal		0	0	0	–38/7	–3/7	–5/7			
		y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3		n° dual	
		lignes								

NB : on aurait pu ne prendre qu'une seule variable artificielle en transformant la matrice initiale du problème :

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 9x_3 - x_5 = 17 \\ -x_1 - 10x_2 - 6x_3 + x_4 = -14 \end{cases} \Rightarrow 0x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \qquad (L_2 - L_1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 9x_3 - x_5 = 17 \\ -x_1 - 7x_2 - 5x_3 + x_6 = -12 \end{cases} \Rightarrow 0x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_5 + x_6 = 5 \ (L_2 – L_3)$$

Le tableau ne nécessite alors plus qu'une variable artificielle :

z	40	40	280	0	0	0	M
17	1	12	9	0	–1	0	1
3	0	2	1	1	–1	0	0
5	0	5	4	0	–1	1	0

Problèmes de TRANSPORT

PROBLEMES DE TRANSPORT

PROBLEMES DE TRANSPORT

I. Exemple de l'usine

m usines fournissent n clients : l'usine i ($1 \leq i \leq m$) produit a_i unités, le client j réclame b_j unités. On suppose que le coût de transport de l'usine i au client j est proportionnel à la quantité transportée et que le coût unitaire de ce transport est c_{ij}, la quantité transportée de i vers j étant l'inconnue x_{ij}.

1.1) Problème : répartition des expéditions

Objectif: Il faut trouver la répartition des expéditions qui écoule la production et satisfait la demande, tout en rendant le coût total du transport minimal.

Le problème n'admet des solutions que si la demande totale égale la production totale c'est-à-dire si $\sum_i a_i = \sum_i b_i$. Si cette condition n'est pas vérifiée initialement, on cherchera à satisfaire au mieux les exigences de chacun, en créant, soit un client fictif qui réclamerait le surplus de la production, soit une usine fictive qui fournirait la quantité manquante.

	Client	disponibilité
Usine	c_{ij}	a_j
Demande	b_j	

Avec $\sum_i a_i = \sum_i b_i$

Exemple : grille des coûts

On essaye de répartir les transports pour un coût minimal en tenant compte de la grille des coûts:

	Clients				Disponibilité des usines
Usine	8	11	2	8	9
	3	7	1	4	10
	2	0	10	5	7
Demande des clients	6	9	8	3	26

1.2) Modélisation du problème

x_{ij} = quantité fournie par l'usine i pour le client j
C_{ij} = coût de transport d'une unité de l'usine vers le client j

min z = $c_{11}\, x_{11} + c_{12}\, x_{12} + \ \ldots\ + c_{34}\, x_{34}$

min $\sum_{i,j} c_{ij}.x_{ij}$

contraintes de production : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ pour $1 \leq i \leq m$

contraintes de consommation : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ pour $1 \leq j \leq n$

contraintes de signe : $x_{ij} \geq 0$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 9 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 10 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 7 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} = 6 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} = 9 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} = 8 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} = 3 \end{cases}$$

(pour l'usine 1)
(pour l'usine 2)
(pour l'usine 3)

Dans cet exemple, il y a 7 (=n+m) contraintes propres avec 12 inconnues.
Le tableau pourrait donc devenir un tableau du simplexe :

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	b_i
1	1	1	1									9
				1	1	1	1					10
								1	1	1	1	7
1				1				1				6
	1				1				1			9
		1				1				1		8
			1				1				1	3
8	11	2	8	3	7	1	4	2	0	10	5	

Mais $\sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_j \sum_i x_{ij} = \sum_i a_i = \sum_j b_j$

Donc on peut éliminer une des contraintes, d'où il y a m+n-1 équations indépendantes, m+n-1 variables dans une base et une solution de base comportera au plus m+n-1 variables non nulles.

1.3) Représentation graphique

On va rechercher une solution initiale:

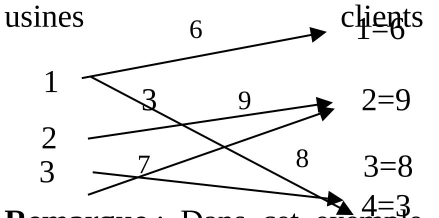
6	3	/	/
/	6	4	/
/	/	4	3
6	9	8	3

9
10
7

On met le maximum dans la case et on annule ensuite les lignes et les colonnes suivantes…

Ici le coût est de $6x8 + 3x11 + 6x7 + 4x1 + 4x10 + 3x5 = 182$ mais on ne sait pas s'il s'agit de la solution optimale…

Sous forme d'un arbre, on peut représenter autre solution



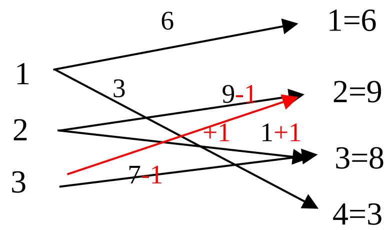
6			3
	9	1	
		7	
6	9	8	3

9
10
7

Remarque : Dans cet exemple, m=3, n=4, toute solution de base comportera au plus 6 variables non nulles. Cette solution est une solution admissible. Pour cette distribution, le coût est 206. Cette solution de base comporte sept variables nulles. Pour avoir une autre solution de base, on doit garder hors base 6 de ces variables et mettre la 7ème en base.

On doit exprimer la fonction économique en fonction des variables hors base :
Min $z - \delta = \sum_{i,j} \overline{c_{ij}}.x_{ij}$ où $\overline{c_{ij}}$ est la variation du coût total , résultant d'une modification d'une unité de la quantité transportée sur la route hors base. Si cette variation est positive, on a intérêt à ne rien transporter sur cette route (x_{ij} reste Hors Base), sinon on peut transporter une quantité aussi grande que possible, le coût total diminuant proportionnellement (à x_{ij}).

<u>Ex. :</u>



route (3, 2) : incidence sur le coût total de l'envoi d'une unité supplémentaire sur (3, 2) : la production de l'usine 3 est inchangée donc le transport (3, 3) doit décroître d'une unité donc le transport (2, 3) croît d'une unité et le transport (2,2) décroît d'une unité.
D'où $\overline{c_{32}} = 1c_{32} - 1c_{33} - 1c_{22} + 1c_{23} = -16$.

On appelle $\overline{c_{32}}$ la somme des regrets. On gagne ici 16 unités, la démarche consiste donc à essayer toutes les possibilités pour diminuer les coûts. Pour cela, on interprète ces coefficients en posant $c_{ij} = u_i + v_j$ (d'où $\overline{c_{32}} = -c_{22} + c_{23} - c_{33} + c_{32}$). On va poser ces équations sur des chemins non nuls (autrement dit, hors bases).
Cette méthode permet pour chaque variable de déterminer un cycle de rééquilibrage si c'est possible.

1.4) Méthode plus rapide (des regrets)

Décomposons c_{ij} en somme $u_i + v_j$.
Dans notre exemple, on cherche u_i, v_j pour $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 4$.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = c_{11} \\ u_1 + v_3 = c_{13} \\ u_1 + v_4 = c_{14} \\ u_2 + v_2 = c_{22} \\ u_2 + v_3 = c_{23} \\ u_3 + v_2 = c_{32} \end{cases}$$

Il y a donc 6 équations et 7 inconnues. Ce système a donc une infinité de solutions. On peut trouver une de ces solutions en choisissant une des inconnues au hasard ($u_1 = 0$)
Alors $\overline{c_{12}} = c_{12} - (u_1 + v_3) + (u_2 + v_3) - (u_2 + v_2) = c_{12} - (u_1 + v_2)$, …
Plus généralement, $\overline{c_{ij}} = c_{ij} - (u_i + v_j)$, pour (i,j) HB
Effectuons ces calculs grâce à des tableaux.

<u>Regrets pour la solution initiale :</u>

8		2	8	8
	7	1		7
	10			16

.	3	.	.	8
4	0	.	3	7
-14	-16	.	-11	16

0	0	- 6	0

0	0	- 6	0

$\overline{c_{11}} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 0$

$\overline{c_{32}} = c_{32} - (u_3 + v_2) = c_{32} - 0 - 16 = -16$

Ici plusieurs coefficients sont négatifs, donc plusieurs routes permettent d'optimiser le transport. La solution n'est donc pas optimale (la solution optimale sera trouvé lorsque le tableau des regrets ne contiendra que des coefficients positifs). Améliorons-la en faisant entrer en base la variable x_{32} (car c'est celle qui rapporte la plus grande diminution). Autrement dit, on fait passer le maximum par le chemin (3,2).

1.5) Changement de base

Faisons donc entrer x32 : on choisit, tant que cela est possible, de n'utiliser qu'un nouveau chemin, ici (3,2) et donc de faire décroître des chemins existants.

6		0	3
	9- θ	1+θ	
	θ	7-θ	

nouvelle grille des transports:

6		0	3
	2	8	
	7		

Prenons θ maximum : θ = 7. Le coût de cette répartition est 206 – 7x16 = 94.

Déterminons le **tableau des regrets** pour savoir si cette solution est optimale :

8	3	0	8		8
-4	7	1	-3		7
2	0	16	5		0
0	0	- 6	0		

En grisé, apparaît le calcul des u et v

Comme un regret est encore négatif, la solution n'est pas optimale : elle peut être améliorée en utilisant le chemin (1,2). On fait alors la recherche du **nombre maximal d'unités** de transport qui peuvent transiter par ce chemin. Dans ce cas, on ne peut utiliser que des chemins existants sauf (1,2), donc on va comparer les diverses solutions:

6-θ		θ	3
θ	2	8-θ	
	7		

Ou

6-θ	θ		3
θ	2-θ	8	
	7		

Dans la première solution, prenons le θ maximum (θ = 6).

Le gain est de 6x3 - 6x8 + 6x2 - 6x1= 6x(-4) = -24

Dans la seconde solution, prenons le θ maximum (θ = 2).

Le gain est de : 2x(3 – 8 + 11 - 7) = 2x(-1) = -2, ce qui est plus faible que dans le premier cas. Continuons donc avec la première solution. On a donc une nouvelle **grille des transports** :

		6	3
6	2	2	
	7		

Pour cette répartition, le coût est de 94 – 24 = **70**

La solution est-elle optimale ? Pour le savoir, on réalise le **tableau des regrets**:

4	3	2	8		4
3	7	1	-3		3
6	0	16	5		-4
0	4	-2	4		

Comme un coefficient est encore négatif, on peut encore optimiser la solution en faisant entrer (2,4) dans les chemins utilisés. Ce qui donne la **grille des transports** suivante:

		6+θ	3-θ
6	2	2-θ	θ
	7		

donc θ = 2

		8	1
6	2		2
	7		

Le coût de cette répartition est de 64.

Le **tableau des regrets** est :

1	0	2	8		7
3	7	3	4		3
6	0	19	8		-4
0	4	-5	4		

Cette fois-ci, on a atteint la solution optimale puisque tous les regrets sont positifs. Cependant, cette solution n'est pas unique car certains regrets sont nuls. En effet, on ne changerait rien en utilisant le chemin (1,2) plutôt que (2,4).

1.6) Cas de dégénérescence

Au cours d'un changement de base, il peut arriver que plusieurs variables s'annulent simultanément. Une seule de ces variables sortant de base, les autres restent en base avec une valeur nulle ; la nouvelle solution est alors dégénérée. Dans ce cas, on a le choix de la variable sortante, on préfère en général faire sortir celle qui correspond au coût le moins élevé.

<u>Exemple</u> : On vient de trouver une solution dans laquelle un des regrets est nul. Cela signifie que si le chemin (1,2) était utilisé, le gain serait nul.

	θ	8	$1-\theta$
6	$2-\theta$		$2+\theta$
	7		

$\theta = 1$

	1	8	
6	1		3
	7		

Le coût de cette nouvelle solution est 70. C'est également une solution optimale.

2. Recherche d'une solution initiale

2.1) Règle du coin Nord-Ouest ("hasard")

							Quantité disponible
	12	27	61	49	83	35	18
	23	39	78	28	65	42	32
	67	56	92	24	53	54	14
	71	43	91	67	40	49	9
Quantité demandé par les clients	9	11	28	6	14	5	73

La méthode consiste à choisir de partir en haut à gauche (nord ouest donc).

9	9	/	/	/	/	~~18~~, ~~9~~
/	2	28	2	/	/	~~32~~, ~~30~~, ~~2~~
/	/	/	4	10	/	~~14~~, ~~10~~
/	/	/	/	4	5	~~9~~
~~9~~	~~11~~	~~28~~	~~6~~, ~~4~~	~~14~~, ~~4~~	~~5~~	

Ici, on a 9 équations avec 24 inconnues dont 9 sont hors base et 15 en base. Le coût est de:

9x12 + 9x27 + 2x39 + 28x78 + 2x28 + 4x24 + 10x53 + 4x40 + 5x49 = **3 700**

Ce n'est pas la solution optimale!

2.2) Règle de Balas-Hammer :

12	27	61	49	83	35	18
23	39	78	28	65	42	32
67	56	92	24	53	54	14
71	43	91	67	40	49	9
9	11	28	6	14	5	

On choisit le chemin ayant le coût le plus faible et on l’utilise pour faire transiter le maximum de marchandises : ici, c’est le chemin (1,1), on y fera passer 9 unités de marchandises.

9						18-9=9
						32
						14
						9
0	11	28	6	14	5	

Donc le premier client (c’est-à-dire la première colonne) est servi.

12	27	61	49	83	35	18
23	39	78	28	65	42	32
67	56	92	24	53	54	14
71	43	91	67	40	49	9
9	11	28	6	14	5	

On recommence avec le plus faible coût de transport restant, c’est-à-dire 24 et le chemin (3,4) est utilisé pour faire transiter 6 unités, la quatrième colonne est alors saturée.

9						9
						32
			6			14-6=8
						9
0	11	28	0	14	5	

12	27	61	49	83	35	18
23	39	78	28	65	42	32
67	56	92	24	53	54	14
71	43	91	67	40	49	9
9	11	28	6	14	5	

Puis le chemin (1,2) (coeff. 27) pour faire passer 9 unités et saturer la première ligne, puis le chemin (2,2) (coeff. 39) pour faire passer 2 unités et saturer la deuxième colonne , puis le chemin (4,5) (coeff. 40) pour faire passer 9 unités et saturer la quatrième ligne; puis le chemin (2,6) (coeff. 42) pour faire passer 5 unités et saturer la dernière colonne, puis le chemin (3,5) (coeff. 53) pour faire passer 5 unités et saturer la cinquième colonne, puis le chemin (2,3) (coeff. 78) pour faire passer 25 unités et saturer la deuxième ligne ; enfin, le chemin (3,3) pour faire passer les trois unités restantes.

9	9					0
	2	25			5	32-2=30 ; 30-5=25 ; 25-25=0
		3	6	5		14-6=8 ; 8-5=3 ; 3-3=0
				9		9-9=0
0	0	28-25=3 3-3=0	0	14-9=5 ; 5-5=0	0	

12	27	61	49	83	35	18
23	39	78	28	65	42	32
67	56	92	24	53	54	14
71	43	91	67	40	49	9
9	11	28	6	14	5	

La solution obtenue a un coût de 3634.

Regrets :

12	27	-5	51	56	5	12
-1	39	78	18	26	42	24
29	3	92	24	53	-2	38
46	3	12	56	40	6	25
0	15	54	-14	15	18	

Coût de cette solution : 3634 – 5*9= 3589

12	5	61	56	61	10	12
-6	39	78	18	26	42	29
24	3	92	24	53	-2	43
41	3	12	56	40	6	30
0	10	49	-19	10	13	

Cette solution n'est pas optimale.

Coût de cette solution : 3589 – 6*9 = 3535

6	9	61	56	61	10	6
23	39	78	18	26	42	23
30	3	92	24	53	-2	37
47	3	12	56	40	6	24
0	16	55	-13	16	19	

Cette solution n'est pas optimale.

Coût de cette solution : 3535 – 3*2= 3529

6	5	61	54	59	10	6
23	39	78	16	24	42	23
32	5	2	24	53	54	35
49	5	14	56	40	8	22
0	16	55	-11	18	19	

Cette solution est optimale.

Grille des transports :

9	9- θ	θ				18
	2+θ	25-θ			5	32
		3	6	5		14
				9		9
9	11	28	6	14	5	

θ = 9, donc :

9		9				18
	11	16			5	32
		3	6	5		14
				9		9
9	11	28	6	14	5	

9-θ		9+θ				18
θ	11	16-θ			5	32
		3	6	5		14
				9		9
9	11	28	6	14	5	

θ=9, donc :

		18				18
9	11	7			5	32
		3	6	5		14
				9		9
9	11	28	6	14	5	

		18				18
9	11	7+θ			5-θ	32
		3-θ	6	5	θ	14
				9		9
9	11	28	6	14	5	

θ=3, donc :

		18				18
9	11	10			2	32
			6	5	3	14
				9		9
9	11	28	6	14	5	

LES GRAPHES

LES GRAPHES

RECHERCHE OP. – CNAM AIX 2001-2002

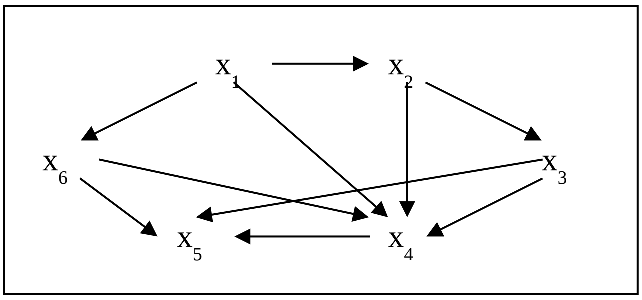
LES GRAPHES

Ces méthodes utilisant les graphes permettent, en général, de trouver le chemin le plus court, ou de faire passer le maximum par un chemin (d'eau par exemple). Les cas concret d'utilisation sont évidents…

I. Définition – vocabulaire

1.1) Graphe

Définition : Soit X un ensemble fini et dénombrable : X = $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit Γ une application de X dans lui-même (Γ est l'ensemble des arcs ou trajets existants = $\{(x_1,x_2), (x_1,x_3), (x_1,x_6), (x_2,x_3), (x_2,x_4), (x_3,x_4), (x_3,x_5), (x_4,x_5), (x_6,x_5), (x_6,x_5)\}$.
On appelle l'ensemble (X, Γ) un *graphe* d'ordre n (n est le nombre de *sommets* = card X). Un graphe est donc un ensemble de liaisons entre des points.
Représentation sagittale :



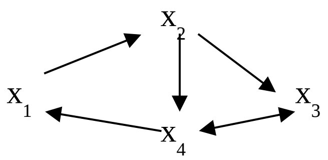
On peut noter Γ^+ l'application « successeur » : $\Gamma^+ : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X). *Par exemple,* $\Gamma^+(x_1) = \{x_2, x_4, x_6\}$. De même, on peut définir Γ^-, l'application « prédécesseur », : $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. *Ex. :* $\Gamma^-(x_2)=\{x_1\}$

	Précédents	Suivants
x_1		x_2, x_4, x_6
x_2	x_1	x_3, x_4
x_3	x_2	x_4, x_5
x_4	x_1, x_2, x_3, x_6	x_5
x_5	x_3, x_4, x_6	
x_6	x_1	x_4, x_5

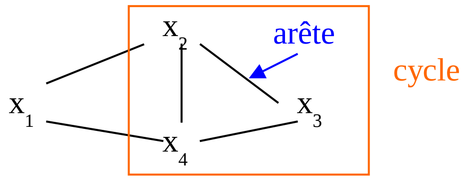
Deux sommets reliés s'appellent *sommets adjacents*.

1.2) Chemins

Un graphe peut être orienté ou non orienté.
Ex. :

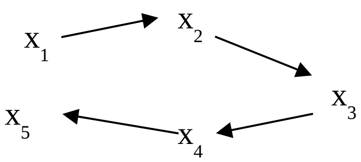


Graphe orienté

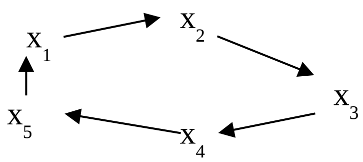


graphe non orienté

Dans un <u>graphe orienté</u>, on parle *d'arcs* reliant deux sommets.
On appelle *chemin* une suite ordonnée d'arcs dans lesquels l'extrémité terminale d'un arc coïncide avec l'extrémité initiale du suivant : $[x_1x_2]$, $[x_2\ x_3]$ = $x_1\ x_2\ x_3$ (chaîne si non orienté).
Un chemin pour lequel $u_1 = u_P$ s'appelle *circuit.*

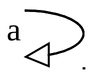


Chemin

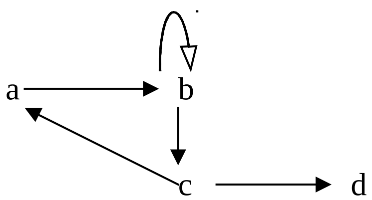


circuit

Longueur d'un chemin = nombre d'arcs du chemin
Boucle = chemin de longueur 1



Un chemin est *simple* lorsqu'il ne passe qu'une seule fois par chacun de ses arcs
Un chemin est *élémentaire* s'il ne rencontre pas plus d'une seule fois chaque sommet.



(abcd) = chemin élémentaire
(abbcd) = chemin non élémentaire
(bb) = boucle et circuit élémentaire
(abca) =circuit élémentaire
(abcabc) = circuit non élémentaire

Un chemin qui passe une fois **exactement** par chaque sommet est ***hamiltonien***

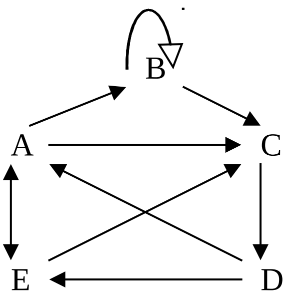
Ex. : (a,b,c,d) est un chemin hamiltonien. Mais il n'y a pas de circuit hamiltonien : il faudrait que $d \mapsto a$
NB : dans un graphe d'ordre n, un circuit hamiltonien est de longueur n, un chemin est de longueur n – 1.

Dans un graphe non orienté :
On appelle un arc non orienté une *arête.* Le chemin devient *chaîne*, le circuit *cycle.*

2. Matrices associées à un graphe

On écrit tous les chemins possibles d'un graphe pour trouver les chemins hamiltoniens.

2.1) Matrice latine



	A	B	C	D	E
A		AB	AC		AE
B		BB	BC		
C				CD	
D	DA				DE
E	EA		EC		

Pour trouver les chemins de longueur 2, on calcule M^2 ; pour les chemins de longueur 3, on calcule M^3 et ainsi de suite.

$M^2 =$

AEA	ABB	ABC AEC	ACD	
	BBB	BBC	BCD	
CDA				CDE
DEA	DAB	DAC DEC		DAE
	EAB	EAC	ECD	EAE

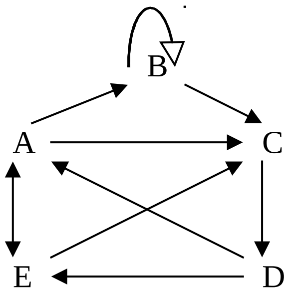
Recherche des chemins élémentaires : avec la multiplication latine, il suffit de ne considérer que les chemins de M^{n-1} qui n'ont pas de répétition de lettres ; dans l'exemple, matrice des chemins élémentaires de longueur 4, ici chemins hamiltoniens.

$M^2 =$

AEAEA ABCDA AECDA ACDEA	AEABB ABBBB ACDAB	AEABC AEAEC ABBBC ACDAC ACDEC	AEACD ABBCD	ABCDE AECDE ACDAE
BBCDA BCDEA	BBBBB BCDAB	BBBBC BCDAC BCDEC	BBBCD	BBCDE BCDAE
CDAEA	CDABB CDEAB	CDABC CDAEC CDEAC	CDACD CDECD	CDEAE
DEAEA DACDA DECDA	DEABB DABBB DAEAB	DEABC DEAEC DABBC DAEAC	DEACD DABCD DAECD	DACDE DAEAE DECDE
EACDA ECDEA	EABBB ECDAB EAEAB	EABBC ECDAC ECDEC EAEAC	EABCD EAECD	EACDE ECDAE EAEAE

2.2) Matrices booléenne et arithmétique

a) Matrice arithmétique :



M =

0	1	1	0	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0

M² =

1	1	2	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	2	0	1
0	1	1	1	1

Si M est symétrique, le graphe est symétrique.
Si dans M², il y a un 1 (ex. : (A,B)) alors: il y a un chemin de longueur 1 de A à B, s'il y a un 2 (ex. : (A,C)), il y a un chemin de longueur 2, etc.
On peut connaître l'existence et le nombre de chemin d'une longueur donnée mais on ne peut pas préciser s'il est hamiltonien, simple ou autre…

Rappel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 26 \\ 36 & 38 \end{pmatrix}$$

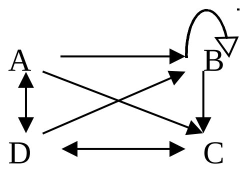
$$\begin{array}{c|c} & B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \\ \hline A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 26 & 26 \\ 36 & 38 \end{pmatrix} \end{array}$$

1x2 + 3x8 = 26
1x5 + 3x7 = 26
2x2 + 4x8 = 36
2x5 + 4x7 = 38

N'oublions pas que BA $\neq$ AB !

$$\begin{array}{c|c} & A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 22 & 52 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Matrice booléenne :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ici, la présence d'un 1 représente l'existence d'un chemin. Dans M², s'il y a un 1 cela signifie qu'il existe un chemin de longueur au plus 2 entre les deux sommets.
Les matrices booléennes permettent d'aider lors de la recherche des composantes connexes.

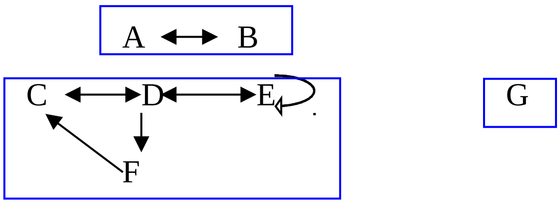
Remarque : si le graphe a une entrée (point de début, c'est à dire que les arcs partent de ce sommet mais aucun n'y arrive), il y a une **colonne de 0** associée à ce sommet ; et si le graphe a une sortie, il a une **ligne de 0**.

3. Connexité – forte connexité

3.1) Connexité

Un graphe est dit *connexe* s'il existe au moins un chemin entre toute paire de sommets.

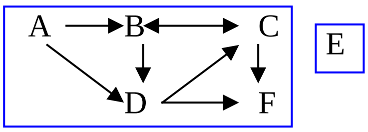
Exemple :



Ce graphe est non connexe, mais il a 3 composantes connexes.

Déf. de composante connexe :
On définit une relation d'équivalence ~ par $x_i \sim x_j$ si x_i et x_j (confondus ou non) sont reliés par une chaîne (On a évidemment : $x_i \sim x_i$)

Ex :

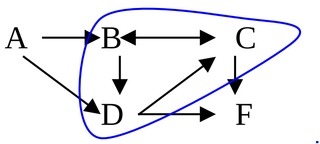


X= {A, B, C, D, E, F}
Ce graphe contient deux composantes connexes :
{E} et {A, B, C, D, F}

Démo : Cette relation est bien une relation d'équivalence :
A ~ A donc la relation est réflexive.
A ~ B et B ~ A : car il existe une chaîne de A vers B ou de B vers A (l'ordre ne compte pas), donc la relation est symétrique
A ~ B et B ~ C $\Rightarrow$ A ~ C, donc la relation est transitive
On parle alors des classes d'équivalence de cette relation : la classe de x est l'ensemble des sommets équivalents à x, on l'appelle *composante connexe de x*.
Remarque: un sommet est toujours lié à lui-même.

3.2) Forte connexité

Un graphe est dit *fortement connexe* si entre toute paire de sommets, il existe un chemin de A vers B et un chemin de B vers A.
Soit G =(X, U) un graphe. Si quels que soient A, B $\in$ X, il existe un chemin de A vers B et un chemin de B vers A, alors le graphe est *fortement connexe*. Sinon on définit des composantes fortement connexes.
Exemple : dans l'exemple précédent, il y a quatre composantes fortement connexes qui sont : {A}, {B, C, D}, {F} et {E}. Dans la suite, on a une composante fortement connexe.



B -> C B -> D
C -> B D -> C -> B

Remarque : on définit là encore une relation d'équivalence (en admettant que A est en relation avec lui-même).

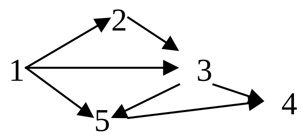
3.3) Fermeture transitive

Fermeture transitive d'un sommet x : {ensemble des sommets reliés à x par un chemin de longueur $\leq n - 1$} = $\{x\} \cup \{t(x)\} \cup \ldots \cup \{t^{n-1}(x)\}$, où $t^k(x) = t(t^{k-1}(x))$.

A partir d'un graphe G, on définit une matrice booléenne M, puis on calcule les puissances M^k. Entre x_I et x_j, il existe au moins un chemin de longueur k si le terme (i,j) de la matrice M^k vaut 1. Alors dans $M+M^{[2]} + \ldots + M^{[k-1]}$, on trouvera 1 en place (i,j) s'il existe un chemin de longueur $\leq k-1$ entre x_i et x_j

La fermeture transitive de l'ensemble X des sommets du graphe G est obtenue en calculant $I+M+\ldots+M^{[n-1]} = (I+M)^{[n-1]}$

Exemple :

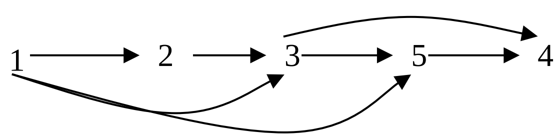


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I+M=A= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$A^3 = A^2 = A^k$ pour $k \geq 2$

La fermeture transitive du graphe est donc obtenue en permutant lignes et colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

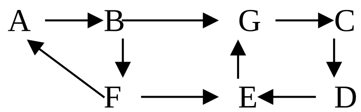


et le graphe a cinq composantes fortement connexes.

Remarque : on n'est pas toujours obligé de calculer jusqu'à $(I+M)^{(n-1)}$, on peut s'arrêter dès que $(I+M)^{(k-1)} = (I+M)^{(k)}$

3.4) Recherche des classes fortement connexes, des circuits hamiltoniens

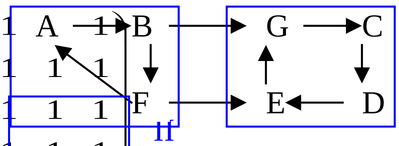
Soit le graphe d'ordre 7 suivant :



$$M=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad (I+M)^6 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&0&1 \end{pmatrix}$$

Après réorganisation des lignes et des colonnes, on détermine les classes fortement connexes :

$$\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ F\\ C\\ D\\ E\\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} c_1 & c_2 & c_6 & c_3 & c_4 & c_5 & c_7 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$



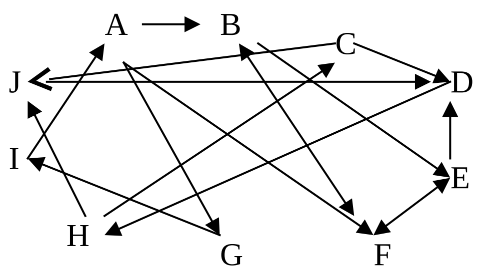
I II

Recherche des chemins hamiltoniens :

La classe II n'a que des arcs incidents intérieurement. Donc s'il existe un ou plusieurs chemins hamiltoniens, leur origine doit se trouver dans la classe I et leur extrémité dans la classe II.

FABGCDE ; ABFEGCD sont les deux chemins hamiltoniens de ce graphe.

3.5) Méthode de Georges DEMOUCRON



On va essayer de déterminer les successeurs et prédécesseurs de A par des chemins de longueur quelconque: $t^-(A)$ et $t^+(A)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		$t^-(A)$	
A		1				1	1					0	
B					1	1							
C				1						1			
D								1					
E				1		1							
F		1			1								
G									1			2	1 chemin de long. 2 de G à A
H			1							1			
I	1											1	1 chemin de long. 1 de I à A
J				1									

$t^+(A)$	0	1	5	3	2	1	1	4	2	5

A est le point de départ de chemin qui vont vers tous les points: $t^+(A) = \{A\ B\ C \ldots J\}$
A est l'arrivée de chemin qui proviennent de G et de I: $t^-(A) = \{A, I, G\}$
A n'est lié "dans les 2 sens" qu'avec I, G et A: 1ère composante fortement connexe: (A, I,G)

$t^+(A) \cap t^-(A)$= classe d'équivalence ou composante fortement connexe du graphe

Arcs dont l'extrémité initiale est A : AB, AF, AG : 1
Arcs dont l'extrémité initiale est B, F, G : B**E**, BF, FB, F**E**, G**I** : 2 (si non marqués)
Arcs dont l'extrémité initiale est E ou I : E**D**, EF, IA : 3
Arcs dont l'extrémité initiale est D : DH : 4
Arcs dont l'extrémité initiale est H : HC, HJ : 5

Pour $t^-(A)$, même travail sur les colonnes, c'est-à-dire recherche des extrémités initiales des arcs finissant en A, puis en I, puis en G.
$t^+(A) \cap t^-(A) = \{A, G, I\}$

Pour B :

$t^-(B)$	
X (1)	A
0	B
	C
	D
2	E
1	F
X (3)	G
	H
X (2)	I
	J

Pour C :

$t^-(C)$	
X (5)	A
X (4)	B
0	C
2	D
X (3)	E
X (4)	F
X (7)	G
1	H
X (6)	I
3	J

$t^+(B)$	X	0	4	2	1	1	X	3	X	4

Composante connexe de B: $t^+(B) \cap t^-(B) = \{B, E, F\}$
$t^-(B) = \{A, B, E, F, G, I\}$ $t^+(B) = \{B, C, D, E, F, H, J\}$

Pour C : $t^+(C) \cap t^-(C) = \{C, D, H, J\}$

$t^+(C)$	X	X	0	1	X	X	X	2	X	3

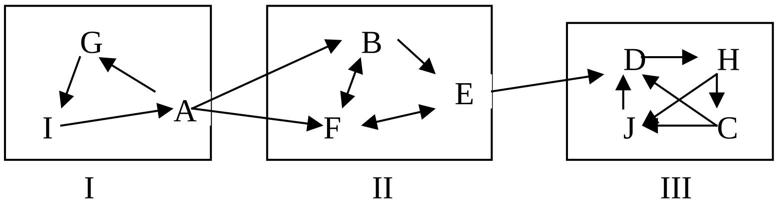
$t^+(C) \cap t^-(C) = \{C, D, H, J\}$

Conclusion :
Il y a deux chemins hamiltoniens :

GIABFEDHCJ
GIAFBEDHCJ

NB : s'il y avait un circuit hamiltonien, il n'y aurait qu'une seule classe d'équivalence.

Graphique :



CHEMIN de VALEUR OPTIMALE

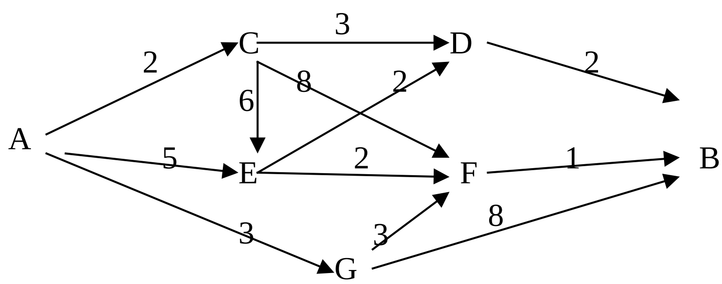
CHEMIN DE VALEUR OPTIMALE

RECHERCHE OP. – CNAM AIX 2001-2002

CHEMIN DE VALEUR OPTIMALE

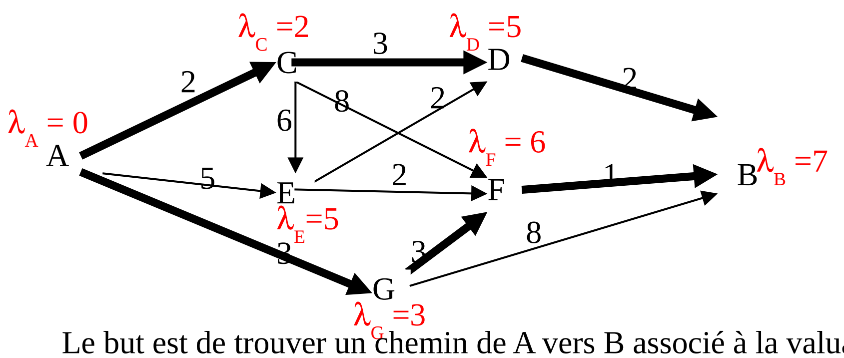
I. Algorithme de Ford

On a un graphe quelconque, valué par des grandeurs positives.
Problème du voyageur de commerce : aller de A à B en passant par un certain nombre d'autres villes, en effectuant un minimum de km.



Algorithme :

1. On numérote les sommets dans un ordre quelconque (sauf le x_1 et x_n)
2. $\lambda_i = +\infty$ sauf $\lambda_1 = 0$
3. pour tout sommet x_j pour lequel $\lambda j - \lambda_i > V(x_i, x_j)$, V représentant la valuation de l'arc, remplacer λ_j par $\lambda_i + V(x_i, x_j)$
4. s'arrêter lorsque aucun λ_i ne peut plus être modifié.



Le but est de trouver un chemin de A vers B associé à la valuation totale la plus faible.

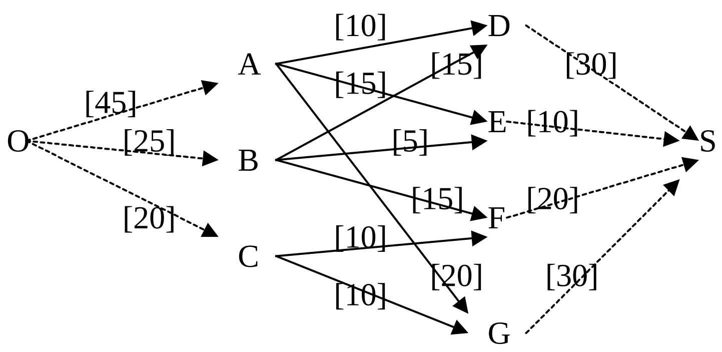
ACDB = 2+3+2=7
AEDB = 5+8+2=15
AEFB = 5+2+1=8
…

Chemins de valeur minimale : ACDB, ou AGFB, coût : 7

2. Algorithme de Ford-Fulkerson

2.1) flot à travers un réseau

Trois châteaux d'eau A, B, C alimentent quatre villages D, E, F, G.
Le château d'eau A dispose d'un débit de 45 litres/sec
Le château d'eau B dispose d'un débit de 25 litres/sec
Le château d'eau C dispose d'un débit de 20 litres/sec
Le village D aurait besoin d'un débit de 30 litres/sec
Le village E aurait besoin d'un débit de 10 litres/sec
Le village F aurait besoin d'un débit de 20 litres/sec
Le village G aurait besoin d'un débit de 30 litres/sec
Dans la canalisation entre le château A et le village D, le débit maximum est : 10 litres/sec
Dans la canalisation entre le château A et le village E, le débit maximum est : 15 litres/sec
Dans la canalisation entre le château A et le village G, le débit maximum est : 20 litres/sec
Dans la canalisation entre le château B et le village D, le débit maximum est : 15 litres/sec
Dans la canalisation entre le château B et le village E, le débit maximum est : 5 litres/sec
Dans la canalisation entre le château B et le village F, le débit maximum est : 15 litres/sec
Dans la canalisation entre le château C et le village F, le débit maximum est : 10 litres/sec
Dans la canalisation entre le château C et le village G, le débit maximum est : 10 litres/sec.



On appelle *réseau de transport* tout graphe fini, sans boucle, avec une source (ou point de départ) et un puits (ou point d'arrivée), où tout arc est valué par un entier positif c(u), nommé *capacité de l'arc.*
Source = entrée, sommet sans prédécesseur (ou ajouté)
Puits = sortie, sommet sans successeur (ou ajouté)
On appelle *flux de l'arc u* la quantité $\varphi(u)$ (entier naturel) telle que $0 \leq \varphi(u) \leq c(u)$

<u>Loi de Kirchoff :</u> $\sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) = \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u)$ pour tout sommet x différent de l'entrée et de la sortie
Où U_x^- est l'ensemble des arcs incidents intérieurement à x et U_x^+ est l'ensemble des arcs incidents extérieurement à x.

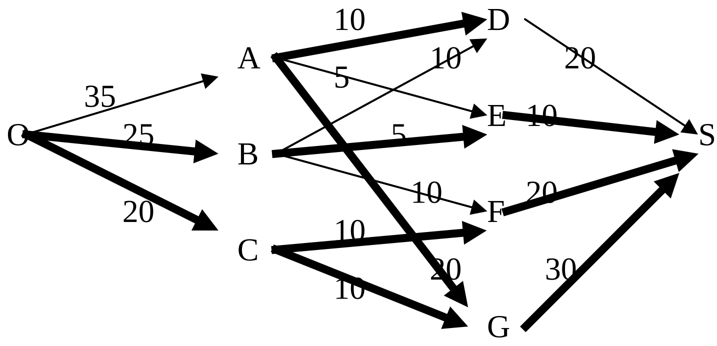
On appelle *flot* : Σflux émis par la source = $\sum_{u \in U_{x_0}^+} \varphi(u)$

= Σflux recueillis par le puits = $\sum_{u \in U_{x_n}^-} \varphi(u)$

2.2) Procédure

1. **Trouver un *flot complet*** : flot dont tous les chemins menant de x_0 à x_n ont au moins un arc saturé.

Exemple :



OCGX_n : O $\mapsto$ C $\rightarrow$ G $\rightarrow$ X_n CG = 10 saturé
≤20 ≤10 ≤30 OC = GX_n =10

OCFX_n : CF saturé puis OC saturé (CF=10, donc OC = 10+10=20)

OBFX_n : O $\mapsto$ B $\rightarrow$ F $\rightarrow$ X_n FX_n = 10 saturé
≤25 ≤15 ≤10 OB = BF = 10

OBEX_n : O $\rightarrow$ B $\rightarrow$ E $\rightarrow$ X_n BE = 5
≤15 ≤ 5 ≤10 OB = (10+)5=15, EX_n = 5

OBDX_n : O $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ X_n OB = (25+)10
≤ 10 ≤15 ≤ 30 BD=DX_n= 10

OAGX_n : O $\rightarrow$ A $\rightarrow$ G $\rightarrow$ X_n AG = GX_n = 20
≤45 ≤20 ≤(30-10)=20 OA = 20

OAEX_n : O $\rightarrow$ A $\rightarrow$ E $\rightarrow$ X_n EX_n= 5
≤25 ≤15 ≤10-5 OA = AE = 5

OADX_n : O $\rightarrow$ A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ X_n AD = 10
≤ 20 ≤ 10 ≤ 20 OA = DX_n = 10

(Selon la principe du bas vers le haut)
On a déterminé un flot complet dont la valeur est V(φ) = 80 (*mais n'est pas maximale*).

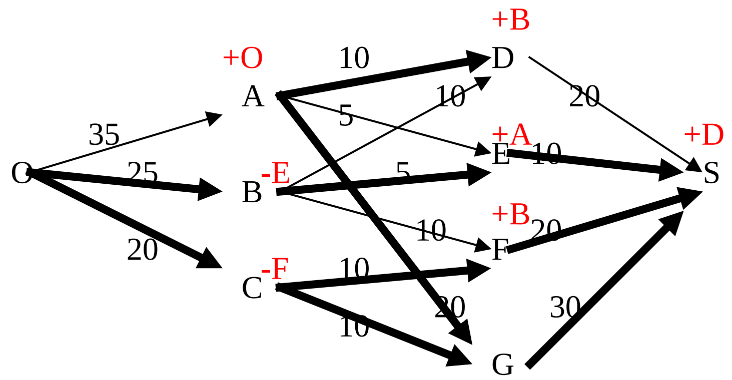
2. **Marquage** : on va chercher si ce flot est maximal ou non.

- Marquer l'entrée du réseau : +O
- Marquer toute extrémité terminale J d'un arc non saturé (I, J) dont l'extrémité initiale I est marquée. On écrira +I à côté de J.
- Marquer l'extrémité initiale K de tout arc (K, L) transportant un flot non nul dont l'extrémité finale L est marquée. On écrira –L à côté de K

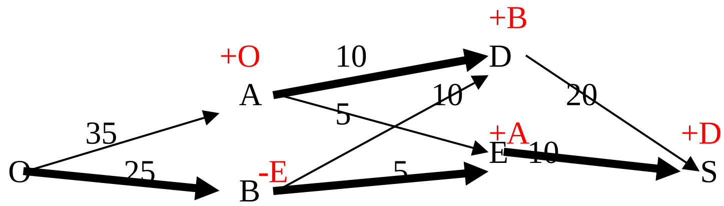
Si on n'arrive pas à marquer la sortie du réseau, le flot est maximal. Si on arrive à marquer la sortie du réseau, le flot n'est pas maximal. Dans ce cas, il faut considérer une suite de sommets marquées, formant une chaîne entre l'entrée et la sortie et améliorer le flot en augmentant le flux des arcs joignant les sommets de la suite, en respectant la loi de Kirchoff.

- Recommencer tant qu’il sera nécessaire pour qu’on ne puisse plus marquer la sortie.

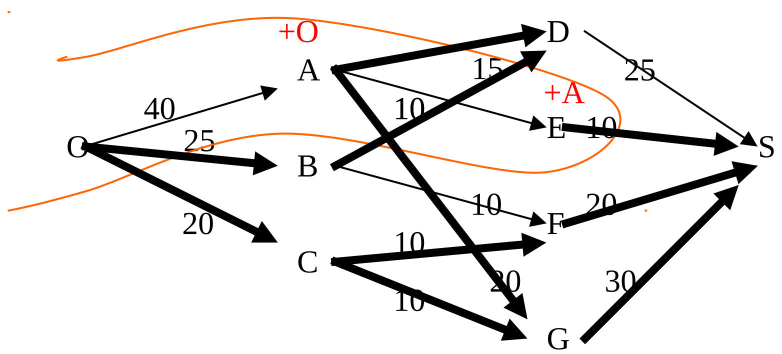
Exemple :



On fait partir de O: 80 et sortir de S: 80. Comme le sommet S est marqué, le flot n'est pas maximal. Isolons une chaîne de sommets marqués pour essayer d'augmenter le flot allant de O à S.



En augmentant l'arc BD de 10 à 15, on augmentera DS de 20 à 25, mais il faut annuler le flot entre B et E et donc pour équilibrer E, augmenter AE puis OA.
D'où voilà une meilleure solution :



Les antécédents par un arc nul ne peuvent pas être marqués. Les sommets marqués sont reliés aux autres par des arcs saturés ou nuls.

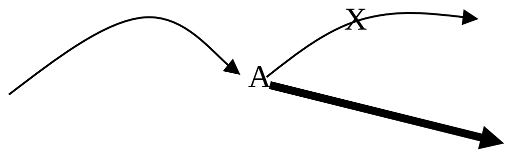
2.3) Recherche d'un flot complet initial

procédure de Manuel Bloch (cf. Raynaud)

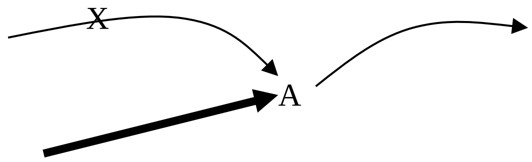
Cette méthode est plus mécanique, donc plus facile à programmer!

arcs bloqués :

- on doit bloquer tout arc incident intérieurement à un sommet si tous les arcs incidents extérieurement à ce sommet sont saturés ou bloqués :



- on doit bloquer tout arc incident extérieurement à un sommet si tous les arcs incidents extérieurement à ce sommet sont saturés ou bloqués :



<u>Procédure de la recherche :</u>

Posons $\rho(i,j) = c(i,j) - \varphi(i,j)$, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, où $c(i,j)$ est la capacité de l'arc x_ix_j et $\varphi(i,j)$ le flux de ce même arc. ρ_{ij} est appelé *capacité résiduelle* de (i,j)

Au départ $\varphi(i,j) = 0$

- on détermine dans la liste des arcs praticables celui qui a la plus faible capacité résiduelle, soit (i_0, j_0) (s'il y en a plusieurs, on ordonne les arcs soit par l'ordre lexicographique, soit par l'ordre numérique croissant et on choisit le premier de ces arcs)
- on détermine un chemin simple (sans répétition d'arcs) passant par (i_0, j_0) formé d'arcs praticables (càd arcs de capacité résiduelle au moins égale à $\rho_{i0,j0}$.

❖ Si c'est un chemin élémentaire (sans répétition de sommets), on fait passer le flux $\varphi_{i,j} = \rho_{i0,\ j0}$ sur tous les arcs (i,j) de ce chemin et on remplace $\rho_{i,j}$ par $\rho'_{i,j} = \rho_{i,j} - \rho_{i0,j0}$ (les arcs de capacité résiduelle nulle devenant des arcs saturés)

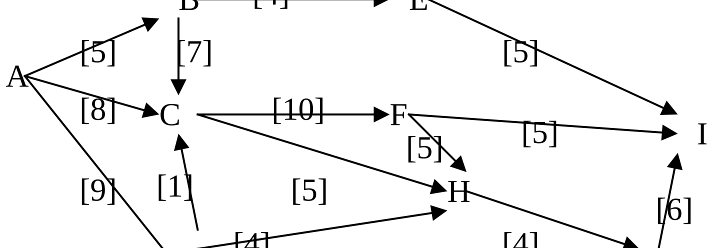
❖ si ce chemin n'est pas élémentaire, on bloque les arcs de capacité la plus faible du circuit et on recommence.

- Pour tous les sommets, il faut ensuite examiner s'il reste encore des blocages à effectuer, les effectuer et revenir au début.

<u>Arrêt de la procédure :</u> la procédure est terminée lorsque tous les arcs incidents extérieurement à l'entrée du réseau (ou incidents intérieurement à la sortie du réseau) sont saturés ou bloqués.

<u>Remarque</u> : on obtient souvent le flot optimal.

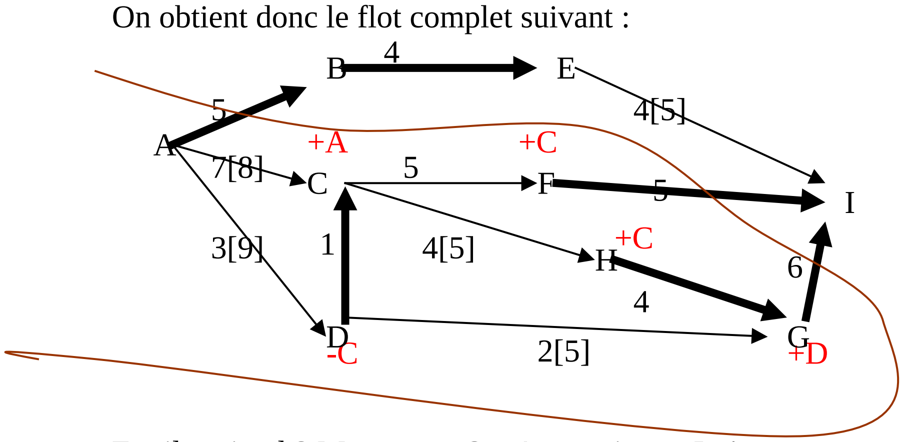
<u>Exemple</u>:



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AB	5	5	5	5	5	5	1	0	0	0	0
AC	8	8	5	5	5	5	5	5	5	1	X
AD	9	8	8	8	6	6	X	X	X	X	X
BC	7	7	7	7	7	7	7	6	X	X	X
BE	4	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
CF	10	9	9	9	9	9	9	8	8	4	X
CH	5	5	2	X	X	X	X	X	X	X	X
DC	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DG	5	5	5	5	3	X	X	X	X	X	X
DH	4	4	4	X	X	X	X	X	X	X	X
EI	5	5	5	5	5	5	1	X	X	X	X
FH	5	4	4	X	X	X	X	X	X	X	X
FI	5	5	5	5	5	5	5	4	4	0	0
GI	6	5	2	2	0	0	0	0	0	0	0
HG	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

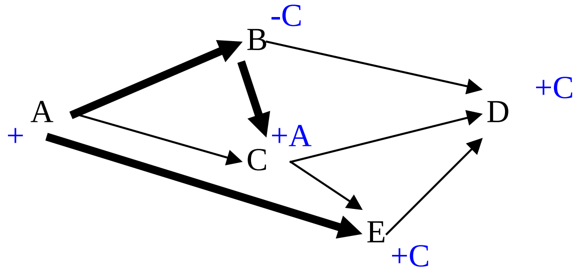
Col. 1 : situation initiale ; DC est saturé et laisse passer 1.
Col. 2 : chemin ADCFHGI ; on refait passer 3 unités dans HG
Col. 3 : chemin ACHGI.
Col. 4 : HG saturé, donc tous les arcs se terminant par H sont bloqués : CH, DH, FH ; on fait encore passer 2 unités par GI
Col. 5 : chemin ADGI.
Col. 6 : comme GI est saturé, tous les arcs se terminant par G sont bloqués : DG ; comme tous les arcs issus de D sont soit bloqués, soit saturés, tous les arcs se terminant en D sont bloqués : AD; BE est saturé à 4
Col. 7 : chemin ABEI ; AB reçoit encore 1 unité et est saturé.
Col. 8 : chemin ABCFI. Comme BE est saturé, tous les arcs menant à E sont bloqués ou saturés et les arcs issus de E doivent l'être aussi : EI
Col. 9 : les arcs menant à B (AB) sont saturés, donc les arcs issus de B sont saturés ou bloqués : BC ; FI reçoit encore 4 unités et est saturé
Col. 10 : chemin ACFI.
Col. 11 : tous les arcs sont bloqués ou saturés. Fin de la procédure.

On obtient donc le flot complet suivant :

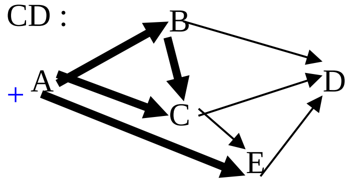


Est-il optimal ? Marquage. On s'aperçoit que I n'est pas marqué donc le flux est maximal.

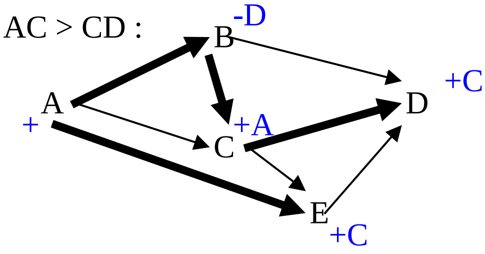
Exemple de marquage:



Si AC < CD :



Si AC > CD :



2.4) Exercices

a) Exercice n°1: Plus court chemin

b) Exercice n°2: Chemin de longueur minimale

c) Exercice n°3: Flot maximal

3. Problème d'affectation

Exemple : une administration désire procéder aux mutations de 5 personnes : A, B, C, D et E et leur offre les postes a, b, c, d et e. Ces fonctionnaires désirant maximiser leur satisfaction décident d'effectuer chacun un classement des postes offerts (de 1 : très bien à 5 : peu souhaité).

	a	b	c	d	e
A	1	2	3	4	5
B	1	4	2	5	3
C	3	2	1	5	4
D	1	2	3	5	4
E	2	1	4	3	5

On ne change pas le problème en soustrayant ligne par ligne, puis colonne par colonne, le plus petit élément de la ligne ou de la colonne.
S'il y avait un zéro par ligne et par colonne, on aurait une solution optimale immédiate. Mais dans ce cas, ce n'est pas le cas :

0	1	2	3	4
0	3	1	4	2
2	1	0	4	3
0	1	2	4	3
1	0	3	2	4

0	1	2	1	2
0	3	1	2	0
2	1	0	2	1
0	1	2	2	1
1	0	3	0	2

<u>Essai</u> : affection A à a (0 en (A,a)), B à e (O en (B,e), C en c (0 en (C,c)) et E en b (0 en (E,b)), alors il faut aussi affecter D à d (ce qui est le choix qui lui déplaît le plus)
Peut-on affecter les postes de façon à satisfaire mieux les désirs des cinq fonctionnaires ?
Avec l'essai ci-dessus, l'indice de satisfaction est : 1 + 3 + 1 + 5 + 1 = 11 (s'il y avait une solution qui rende tous les fonctionnaires pleinement satisfaits, cet indice vaudrait 5)

<u>Méthode hongroise (d'affectation) :</u>

0				
Ø				0
		0		
Ø				
	0		Ø	

On encadre un zéro par ligne et par colonne, tant qu'on le peut.

a. Marquons toute ligne sans zéro encadré
b. marquons toute colonne ayant un zéro barré sur une ligne marquée
c. marquons toute ligne ayant un zéro encadré dans une colonne marquée et revenons à b jusqu'à ce que le marquage soit impossible.

On barre alors les lignes non marquées et les colonnes marquées :

On encadre un zéro par ligne et par colonne, tant qu'on le peut.

d. Marquons toute ligne sans zéro encadré
e. marquons toute colonne ayant un zéro barré sur une ligne marquée
f. marquons toute ligne ayant un zéro encadré dans une colonne marquée et revenons à b jusqu'à ce que le marquage soit impossible.

On barre alors les lignes non marquées et les colonnes marquées :

Soit le plus petit nombre du tableau restant
On le retranche à tous les éléments non rayés et on l'ajoute aux éléments barrés deux fois.

0	1	2	1	2	X3
~~0~~	~~3~~	~~1~~	~~2~~	~~0~~	
~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~2~~	~~1~~	
0	1	2	2	1	X1
~~1~~	~~0~~	~~3~~	~~0~~	~~2~~	
X2					

0	0	1	0	1
~~1~~	~~3~~	~~1~~	~~2~~	~~0~~
~~3~~	~~1~~	~~0~~	~~2~~	~~1~~
0	0	1	1	0
~~2~~	~~0~~	~~3~~	~~0~~	~~2~~

On recommence alors le marquage. Voici les zéros qu'il faut obligatoirement encadrer :

0	0	1	0	1
1	3	1	2	0
3	1	0	2	1
0	0	1	1	0
2	0	3	0	2

Mais on peut avoir les affectations suivantes :

0	Ø		Ø	
				0
		0		
Ø	0			Ø
	Ø		0	

Ø	0		Ø	
				0
		0		
0	Ø			Ø
	Ø		0	

Ø	Ø		0	
				0
		0		
0	Ø			Ø
	0		Ø	

Dont les indices de satisfactions sont les suivants :
1+3+1+2+3=10 2+3+1+1+3=10 4+3+1+1+1=10

Comme on trouve cette fois-ci un zéro par ligne et par colonne, (et même de plusieurs manières différentes), on a obtenu une affectation optimale.

3.1) Exercices

ORDONNANCEMENT

ORDONNANCEMENT

ORDONNANCEMENT

Il s'agit de l'utilisation des graphes pour optimiser les enchaînements (le chemin critique dans l'organisation des tâches).

I. Introduction

Un décideur a un projet à réaliser, il le décompose en macro-tâches, puis chacune de ces tâches est décomposée en tâches élémentaires. Ces dernières sont articulées entre elles par des *contraintes :*

Contraintes potentielles :

- **Contraintes *de succession*** : telle chose doit se faire complètement ou partiellement avant une autre.
  - ✓ la tâche i précède la tâche j = *succession totale ;*
  - ✓ la tâche i doit être aux 2/3 commencée avant que j commence = *succession partielle*
- ***Localisation temporelle*** : disponibilité dans le temps. Si par exemple, un équipement n'est disponible qu'entre les instants t_1 et t_2

Formalisation :

Soit	d_i :	la durée de la tâche i	données
	d_j :	la durée de la tâche j	
	t_i :	la date de début de la tâche i	inconnues
	t_j :	la date de début de la tâche j	

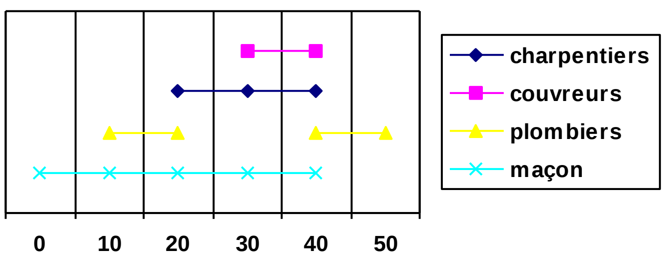
Contraintes : si i précède j, $t_i + d_i \le t_j \Leftrightarrow d_i \le t_j - t_i$

si 2/3 i précède j, $t_i + 2/3\ d_i \le t_j \Leftrightarrow 2/3\ d_i \le t_j - t_i$

d'une manière générale, $\alpha_{ij}\ d_i \le t_j - t_i$ càd $\beta_{ij} \le t_j - t_i$ (où β_{ij} est une donnée)

- contraintes disjonctives *:* exclusion mutuelle car les tâhces ne peuvent pas se faire en même temps (exemple : les tâches i et j utilisent une même ressource : une seule machine, …). $[t_i, t_i + d_i] \cap [t_j, t_j + d_j] = \varnothing$
- contraintes cumulatives *:* les moyens sont limités, en main d'œuvre, en équipement, en budget

Pour illustrer une solution, on peut utiliser un *diagramme de GANT* :



2. Méthodes d’ordonnancement

Deux méthodes sont principalement utilisées pour résoudre les problèmes d’ordonnancement à contraintes potentielles : les méthodes MPM (française) et PERT (américaine). Leurs buts sont :

1. d’établir un _ordonnancement_, i.e. un calendrier si les contraintes sont compatibles en déterminant pour chaque tâche la date t_i de début de la tâche i
2. de minimiser la durée totale du projet.
3. d’énumérer les _tâches critiques_, (ce sont celles qui, si elles subissent un retard, décalent la fin prévue du projet) et d’évaluer les marges des tâches non critiques.

2.1) Méthode MPM

MPM = méthode des Potentiels Métra, du Professeur B. Roy

On la représente grâce à un graphe G=(X,U) où les sommets représentent les tâches (auxquelles on a ajouté une tâche de début α et une tâche de fin ω) et les arcs traduisent les contraintes.

Si deux sommets sont liés par un arc, cela signifie que l’opération associée à l’extrémité initiale de l’arc doit être commencée pour que puisse débuter l’opération liée à l’extrémité terminale de l’arc.

$\boxed{a} \xrightarrow[4]{} \boxed{b}$ Succession de deux opérations : a de durée 4, b de durée inconnue, b ne pouvant débuter qu’une fois a achevée.

Si b ne peut débuter que deux unités de temps après le début de a, on représentera les deux tâches ainsi :

$\boxed{a} \xrightarrow[2]{} \boxed{b}$

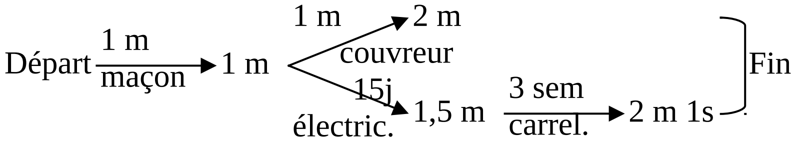
Ainsi, sur un graphe MPM, la valeur numérique associée à l’arc (i,j) est le délai minimum après le début de la tâche i au bout duquel peut démarrer la tâche j.

Le sommet du graphe représente le début de la tâche a dans un graphe MPM.

a) Exemple des tâches du bâtiment

La construction d'un bâtiment nécessite les interventions des personnes suivantes:

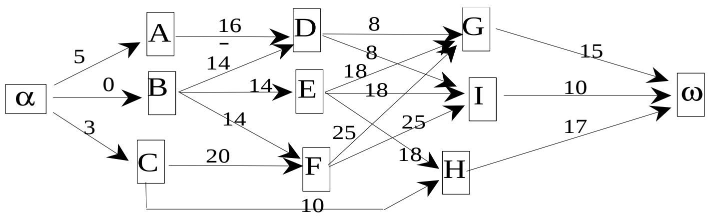
Maçons-platriers: 1 mois
Couvreur: 1 mois
Electricien: 15 jours
Carreleur: 3 semaines



b) Exemple: travail de graphe

Dans cette organisation, certaines tâches ont de la marge, d'autres non. Le chemin critique α–C-F-G-ω ne doit pas connaître de retard car c'est lui qui impose sa durée. Cette méthode peut être complétée par des tableaux (qui marcherait aussi avec la méthode PERT).

Tâches	Contraintes	Durée
A	Peut débuter 5 jours après l'origine	16 j
B	Peut débuter dès l'origine	14 j
C	Peut débuter 3 jours après l'origine	20 j
D	Ne peut débuter que quand A et B sont finis	8 j
E	Quand B est fini	18 j
F	Quand B et C sont finis	25 j
G	Quand D, E, F sont finis	15 j
H	Quand E est fini et que la moitié de C est réalisée	17 j
I	Quand D, E, F sont finis	10 j



De plus en α, $\mathbf{t_\alpha = 0}$, $t_A = 5$, $t_B = 0$, $\mathbf{t_C = 3}$, t_D = max (16+5, 14+0)=21, t_E= max(14+0)=14,
$\mathbf{t_F}$= max(14+0, **20+3**)=**23**, $\mathbf{t_G}$= max (t_D+8, t_E+18, $\mathbf{t_F+25}$)=max(21+8, 14+18, **23+25**)=48,
t_I= max (t_D+8, t_E+18, t_F+25)=max(21+8, 14+18, 25+23)=48
t_H= max (t_E+18, t_C+10) = 32
$\mathbf{t_\omega}$ = max($\mathbf{t_G+15}$, t_I+10, t_H+17)= max(**48+15**, 48+10, 32+17)=**63**

Alors le chemin critique est α C F G ω, il y a trois tâches critiques, le projet durera au minimum 63 jours.
$t_\omega^* = t_\omega$,
t_H^* = max(32, 63-17)= 46, la tâche H doit et peut commencer entre le 32ème jour et le 45ème j.
t_I^*= max (48, 63-10)=53
$t_G^* = t_G$ = 48, $t_F^* = t_F$= 23 (ce sont des tâches critiques), $t_C^* = t_C$
t_E^* = min (t_G^*-18, t_I^* - 18, t_H^* -18)=28
t_D^*= min (t_G^* - 8, t_I^*-8)= 40
t_B^* = min (t_D^* -14, t_E^* -14, t_F^* -14) = 9
t_A^* = min (t_D^* -16)= 26

On peut également calculer les dates au plus tôt et les dates au plus tard par les tableaux suivants :
Dates au plus tôt :

0	α	5	A	0	B	**3**	**C**	21	D	14	E	**23**	**F**	**48**	**G**	32	H	48	I	**63**	**ω**
		5	α : 0	0	α :0	3	**α :0**	16 14	A :5 B :0	14	B : 0	14 20	B : 0 **C : 3**	8 18 25	D : 21 E : 14 **F : 23**	10 18	C : 3 E : 14	8 18 25	D : 21 E : 14 F : 23	15 17 10	**G : 48** H : 32 I : 48

—— Chemin critique

Chaque colonne de ce tableau est constituée :

Date au plus tôt de X_i	Nom du sommet : X_i
Durée de la tâche X_jX_i	Prédécesseur X_j: date au plus tôt de X_j

On retrouve le chemin critique en repartant de ω et en déterminant le chemin qui a permis de trouver la date au plus tôt de ce sommet final.(en gras et souligné dans le tableau)

Dates au plus tard :

α	**0**	A	24	B	9	**C**	**3**	D	40	E	28	**F**	**23**	**G**	**48**	H	46	I	53	**ω**	**63**
A : B : **C :3**	5 0 **3**	D :40	16	D :40 E :28 F :23	14 14 14	**F :23** H :46	20 10	G :48 I :53	8 8	G: 48 H: 46 I: 53	18 18 18	**G: 48** I: 53	**25** 25	**ω :63**	15	ω :63	17	ω: 63	10		

On remplit ce tableau après le précédent en partant du sommet final ω et de la date minimale de fin du projet : 63, puis en remontant les calculs. Pour cela, dans chaque colonne de ce tableau, on a inscrit :

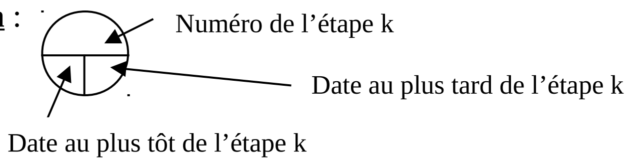
Nom du sommet : X_i	Date au plus tard de X_i
Successeur X_j: date au plus tard de X_j	Durée de la tâche X_iX_j

2.2) Méthode PERT

PERT= Program Evaluation Research of Tascks

Dans cette méthode, on représente aussi les tâches et les contraintes qu'elles subissent à travers un graphe G = (X, U), mais les sommets représentent des étapes de la réalisation du projet et les arcs les tâches.

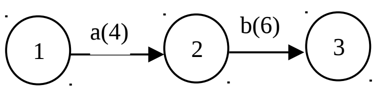
Notation :



L'opération est donc représentée par un arc auquel on associe une valeur numérique, durée de l'opération.

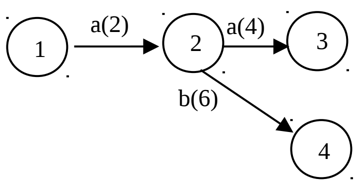
Les sommets sont les aboutissements des opérations, ou représentent la réalisation de certaines étapes ou objectifs partiels du programme (opérations fictives parfois).

Si on veut représenter la succession de deux opérations a et b, a durant 4 unités de temps et b 6, on tracera :

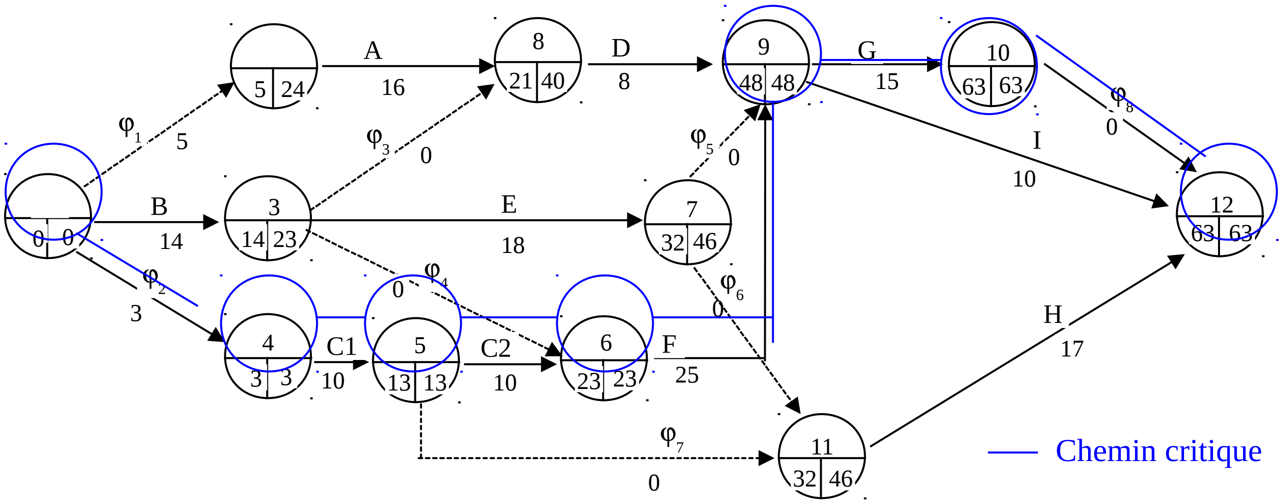


b ne peut débuter que quand a est achevé, mais il n'est pas obligé de commencer immédiatement après. Le moment 1 est le démarrage de a, l'instant 2 est l'achèvement de a et le moment où b peut commencer, l'instant 3 est l'achèvement de b.

En revanche, si b peut commencer dès que deux unités de temps ont été consacrées à a, il faut introduire un autre sommet :



Pour le même exemple que plus haut, on obtient le graphe suivant :



On retrouve que les tâches critiques sont C, F et G.

Marges pour l'étape 10 par exemple : il y a quatorze jours de marge entre la fin de l'opération qui mène à 11 et le début de l'opération H pour ne pas retarder l'achèvement des travaux

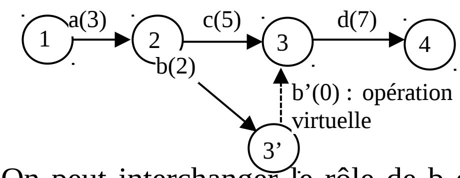
2.3) Comparaison des deux méthodes

a) Opérations parallèles

Soient deux opérations b et c devant satisfaire aux conditions suivantes : s'effectuer en même temps, succéder à une même opération a, précéder une opération d.

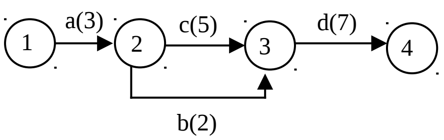
Les durées respectives de a, b, c,d sont : 3, 2, 5, 7.

PERT :

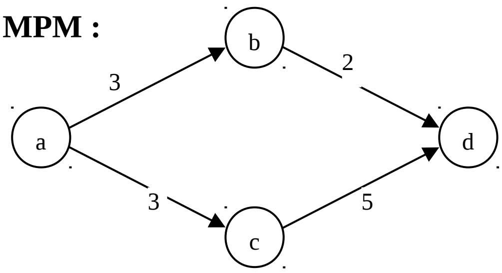


On peut interchanger le rôle de b et c par symétrie.

Remarque : on ne peut pas tracer ce style de graphe, car il ne serait pas simple :



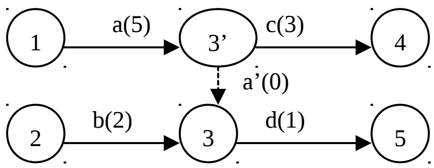
MPM :



b) Opérations dépendantes et indépendantes

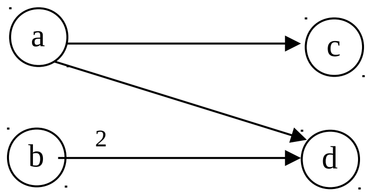
Soient a et b deux opérations de durée respectives 5 et 2 indépendantes, et c et d de durées respectives 3 et 1 indépendantes, telles que c succède à a sans succéder à b et d succède à la fois à a et à b.

PERT :



Attention : cette fois, c et d n'ont pas des rôles symétriques

MPM :



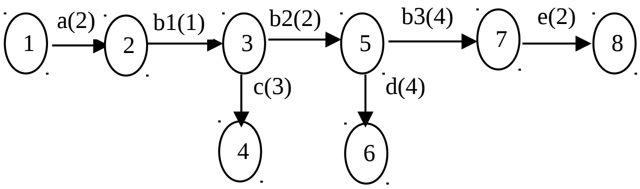
c) Opérations composées (successions avec recouvrement)

Situation : certaines opérations peuvent débuter avant l'achèvement complet d'une opération :

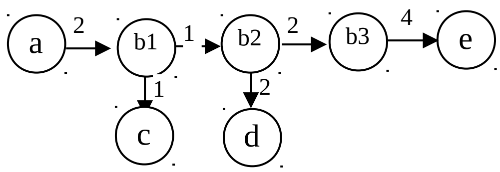
Exemple : a dure 2 jours ; b, qui dure 7 jours, succède à a ; e, qui dure 2 jours, succède à b ; c, qui dure 3 jours, peut débuter 1 jour après le début de b ; d ; qui dure 4 jours, peut débuter 3 jours après le début de b.

PERT :

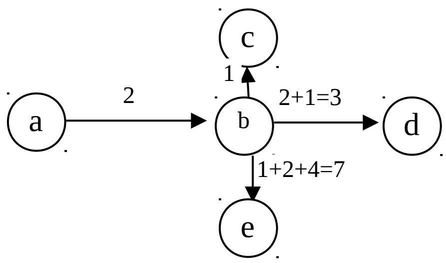
Il faut fractionner l'opération en plusieurs sous-opérations successives :



MPM :
deux solutions, l'une en fractionnant, l'autre non.



Ou :



3. Exercices

PROCESSUS STOCHASTIQUES

PROCESSUS STOCHASTIQUES

RECHERCHE OP. – CNAM AIX 2001-2002

PROCESSUS STOCHASTIQUES

I. INTRODUCTION

On appelle processus stochastique tout problème qui dépend du hasard.

1.1) Historique

La première idée de la théorie des processus se trouve chez Einstein en 1905 dans l'étude du mouvement brownien. Puis, vers 1910, Markov décrit l'alternance des voyelles et des consonnes dans "Eugène Ouéguine" de Pouchkine à l'aide d'une chaîne de Markov.

En 1910, le danois Erlang crée la théorie des files d'attente pour l'aider à résoudre des problèmes de dimensionnement de standards téléphoniques. En 1933, Kolmogorov rédige la formalisation des processus stochastiques. Depuis, Kendall, Levy, Khintchine, Feller, Dood ont développé cette théorie.

1.2) Définition d'un Processus Stochastique

Un **processus stochastique** est une famille de variables aléatoire X_t, $t \in T$ (T représentant le plus souvent le temps). La variable X_t représente **l'état** du processus au temps t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable s'appelle espace des **états du processus**.

Elle est noté ε.

- Si $T = IR^+$, temps continu, on parle de processus stochastique
- Si $T = IN$, temps discret, on parle de suite stochastique

Si X_t prend des valeurs finies ou dénombrables, on dit que le processus est à **espace d'états discret**, sinon, on parle de processus à **espace d'états continu**.

- Si ε est fini ou dénombrables, on parle de **chaîne**.

Un processus est **Markovien** s'il est sans mémoire (c'est à dire qu'il ne dépend pas de ce qui s'est passé avant). A tous instants u et t avec t>u , la probabilité que $X_t = y$ ne dépend pas de X_s pour s<u et de X_u mais seulement de X_u:

$$\boxed{P(X_t = y \,/\, X_s \text{ pour } s<u \text{ et } X_u = x) = P(X_t = y \,/\, X_u = x)}$$

II. Les Chaînes de Markov à espace d'états discret

En recherche opérationnelle, les processus étudies sont **homogènes**. P $(X_{t+u} = s / X_t = x)$ ne dépend pas de t mais seulement de u (et de x et s…).

Soit une chaîne de Markov à espace d'états discret

$T = \{ t_0, t_1, \ldots , t_n, \ldots\}$ (souvent confondu avec IN)

$\mathcal{E} = \{ E_1, E_2, \ldots , E_n, \ldots\}$

La probabilité de transition est: $P(X_n = E_j / X_m = E_i)$ pour n>m

Il s'agit de passer de l'état E_i à l'état E_j en un temps n-m, soit:

$$P_{ij} = P(X_n = E_j / X_{n-1} = E_i) = P(X_1 = E_j / X_0 = E_i)$$

Remarque: le plus souvent, en pratique, $\mathcal{E}$ est fini.

2.1) Probabilités et matrice de transition

On pose $P_{ij} = P(X_1 = j / X_0 = i)$ pour $(i, j) \in \mathcal{E}^2$

(nombre d'élément de $\mathcal{E}$)

En supposant que $\mathcal{E}$ est fini, on pose $r = \text{card } \mathcal{E}$ et on peut définir une matrice P appelé **matrice de transition**.

Avec $\begin{cases} P_{ij} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{r} P(X_1 = Ej / Xo = Ei) = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{matrix} P_{11} & \cdots\cdots & P_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ P_{r1} & \cdots\cdots & P_{rr} \end{matrix}} = M$$

(matrice des transitions)

Remarque: Toute matrice de transition est stochastique.

Définition: Une matrice carrée $P = (P_{ij})$ est **stochastique** si ses éléments sont positifs ou nuls: $\forall i,j \ , P_{ij} \geq 0$. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1:

$\sum_{j=1}^{r} P\ ij = 1$ pour tout i.

2.2) Probabilités de transition en m étapes

La probabilité d'aller de i à j en m étapes exactement est $P_{ij}^{(m)} = P(X_m = j / X_0 = i)$ et s'appelle **probabilité de transition en m étapes** de i à j.

Convention: $P^{(0)} = I$. On a clairement $P^{(0)} = P^0$ et $P^{(1)} = P$

Propriété: . $P^{(m)} = P^m$ pour tout $m \in$ IN .

En effet, $P_{ij}^{(m)} = P\,(X_m=j \,/\, X_0=i)$

$$= \sum_{k=1}^{r} P\,(X_m = j \,/\, X_{m-1} = k)\;\; P\,(X_{m-1} = k \,/\, X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} P_{kj}^{(1)}\;\; P_{ik}^{(m-1)} = \text{terme (ij) de } P.P^{m-1} = P^{m}$$ par déf. des produits matriciels

Conclusion de la récurrence: $P^{(m)} = P^{m}$ pour tout $m \in$ IN .

Propriété: équation de Chapman-Kolmogorov:

$$.\ P^{(n+m)} = P^{(n)}\;\; P^{(m)} \quad \text{pour tout } n, m \in \text{IN} .$$

$$\text{ou}\;\; P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^{r} P_{kj}^{(m)}\;\; P_{ik}^{(n)} \quad \text{pour } i, j \in \mathcal{E},\ n, m \in \text{IN}$$

III. Graphe des transitions – Classification des chaînes

3.1) Exemple sur les processus aléatoires

Dans la cour de récréation d'une école, des enfants s'exercent au ballon. La matrice de transition décrit le comportement de tout élève. Ainsi l'élève A, dès qu'il détient le ballon, le garde encore trois seconde avec la probabilité 0,1 ou bien l'envoie avec la probabilité 0,5 à l'élève B, ce qui prend encore trois seconde, ou bien l'envoie avec la probabilité 0,4 à l'élève H, la durée de la transition étant encore de trois seconde. D'autres élèves ont des comportements plus simples, par exemple, l'élève C s'il reçoit le ballon le renvoie toujours à F, la durée de la transition tant aussi de trois secondes, etc. Le surveillant donne un ballon à l'élève A et un ballon à l'élève I. que deviennent ces ballons au bout d'un temps assez long?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0.1	0.5						0.4				
B		0.2						0.5			0.3	
C						1						
D				0.3	0.7							
E				0.4	0.2						0.4	
F							1					
G			1									
H		0.6	0.3								0.1	
I									0.2			0.8
J										1		
K				0.4	0.5						0.1	
L									0.8	0.1		0.1

Si P (X_0 = A) = 1 alors P (X_1 = C) = 0 et P (X_1 = B) = 0.5

Si $\begin{cases} P(X_0 = A) = 0.1 \\ P(X_0 = B) = 0.8 \\ P(X_0 = C) = 0.1 \end{cases}$

Alors $P(X_1 = A) = P(X_0 = A) \times P(X_1 = A / X_0 = A) = 0.1 \times 0.1$

$$P(X_1 = B) = \sum_{k=1}^{r} P(X_0 = Ej)\ P(X_1 = B / X_0 = Ej)$$ *(formule des probabilités totales)*

$$= 0.1 \times 0.5 + 0.8 \times 0.2 + 0 \times 0.6 = 0.21$$

<u>Mathématiquement</u>:

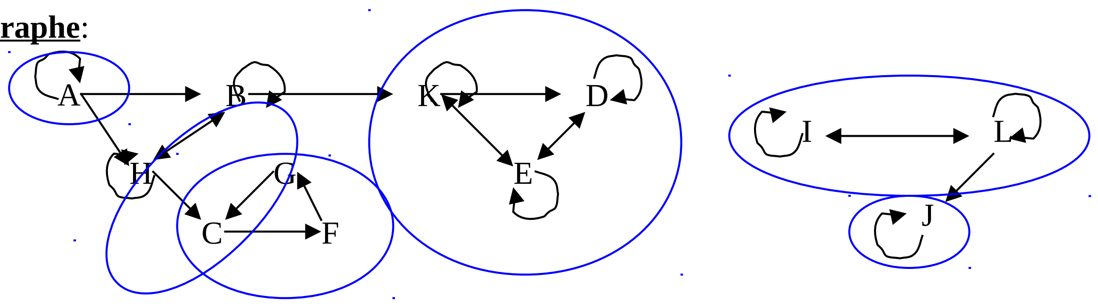
$\prod_{(0)} = (\ P(X_0{=}E_1), P(X_0{=}E_2), \ldots, P(X_0{=}E_r)\ )$ *(distribution initiale des probabilités des états)*

$$.\ \prod_{(1)} = \prod_{(0)} .\ M\ .$$

ligne *matrice carrée*

de même $\prod_{(2)} = \prod_{(1)} .\ M = \prod_{(0)} .\ M^2$ d'où $\prod_{(n)} = \prod_{(0)} .\ M^n$

<u>Graphe</u>:



IV. Distribution des états d'une chaîne

V. Etude des chaînes réductibles

VI. Les chaînes de Markov à temps continu

VII. Comportement asymptotique des chaînes

VIII. Processus de naissance et de mort

FIABILITE

FIABILITÉ

RECHERCHE OP. – CNAM AIX 2001-2002

FIABILITÉ

I. INTRODUCTION

La fiabilité est l'aptitude d'un système, d'un matériel à fonctionner sans incident pendant un temps donné. Pour l'AFNOR c'est la caractéristique d'un dispositif qui s'exprime par la probabilité pour ce dispositif d'accomplir la fonction requise, dans des conditions déterminées, pendant une période donnée. Prévoir la fiabilité est essentiel pour des raisons de sécurité (systèmes de freinage, systèmes nucléaires, systèmes informatiques, …). La quasi impossibilité de réparer certains matériels, (satellites), les problèmes économiques (coûts de défaillances, gestion du personnel de maintenance, maintenance des stocks de pièces de rechange, ...) rendent nécessaire la connaissance de la fiabilité des systèmes utilisés. On ne considérera ici que des situations simples.

2. GENERALITES - TERMINOLOGIE

2.1) Fonction de défaillance et fn de fiabilité

On considère dans un premier temps un dispositif unique ou un groupe de dispositifs identiques de même provenance utilisés dans des conditions semblables, dont les propriétés sont susceptibles de se modifier au cours du temps. Au bout d'un certain temps appelé **durée de vie**, le système cesse de satisfaire aux conditions d'utilisation. On considérera soit un groupe de dispositifs identiques, on relèvera alors les **temps jusqu'à la défaillance**, soit un dispositif unique réparé après chaque panne, en supposant que la réparation n'influe pas sur les conditions initiales de fonctionnement du dispositif, on relève alors les **temps entre défaillance**. Cette durée de vie permet de définir une variable aléatoire T, absolument continue à valeur dans $\mathbf{R}^+$. Sa fonction de répartition F, appelée **fonction de défaillance** est donc la probabilité pour que le système soit en panne avant l'instant t. $F(t) = P(T < t)$. On considère également la fonction de fiabilité R qui donne la probabilité pour que le système fonctionne après un temps d'utilisation t.

$$R(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t).$$

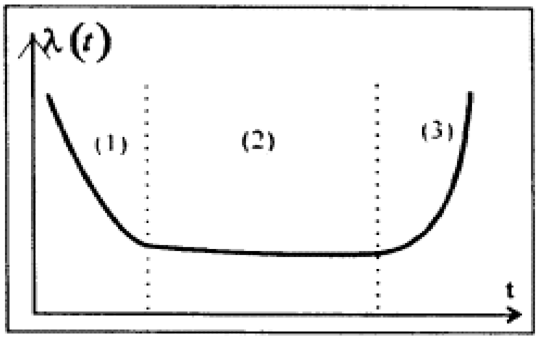
2.2) Taux d'avarie ou taux de défaillance

Considérons un ensemble de systèmes identiques, tous mis en service à l'instant t, on peut relever le nombre N(t) de systèmes en état de marche. Le taux de défaillance moyen dans un intervalle de temps $[t, t_1]$, rapporté au nombre de systèmes encore en vie au début de cet intervalle s'exprime par :

$$(N(t) – N(t_1)) / N(t)(t_1 - t)$$

Par analogie, si la fonction de fiabilité R est dérivable, on définit le taux instantané d'avarie par la fonction λ définie par

$$\lambda(t) = \lim_{t_1 \to t} (R(t) – R(t_1)) / R(t)(t_1 – t) = - R'(t) / R(t).$$



On constate expérimentalement que la courbe représentative de cette fonction est, pour de nombreux systèmes, une courbe en baignoire.

Trois périodes sont à distinguer, notées (1), (2) et (3). Durant la première période, le taux de défaillance décroît, il correspond à des fautes de jeunesse. Durant la seconde, qualifiée de vie utile, il reste à peu près constant, les pannes semblent seulement dues au hasard. Durant la troisième période, le taux d'avarie croît rapidement, les pannes sont alors due aux défauts causés par l'usure.
Pour un système dont la fonction de fiabilité est R, désignons par p(h) la probabilité pour que le système tombe en panne entre les instants t et t + h sachant qu'il n'y a pas eu de défaillance pendant l'intervalle [0, t] où t est fixé. Le taux instantané de défaillance est :

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0} p(h) / h.$$

Soit E1, respectivement E2, les évènements "le système fonctionne après le un temps d'utilisation t" et "le système tombe en panne entre les instants t et t + h".

On a $p(h) = P(E2|E1) = P(E1 \cap E2) / P(E1)$.

Par ailleurs

$$P(E1) = R(t) = 1 – F(t) \text{ et } P(E1 \cap E2) = P(t \le T \le t + h) = F(t + h) – F(t).$$

Il en résulte que

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0} (F(t + h)-F(t)) / h (1 - F(t)) = F'(t) / (1 - F(t)) = - R'(t) / R(t)$$

On supposera que R est partout non nulle et continûment dérivable sur $[0, +\infty[$, ce qui implique que λ est continue sur $[0, +\infty[$.

MTBF *(Mean Time Between Failure):* moyenne des temps entre deux défaillance à ne pas confondre avec la moyenne des temps de bon fonctionnement. La MTBF est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T représentant la durée de vie du système, si f est la densité de probabilité de T, alors :

$$MTBF = E(T) = \int_0^{+\infty} tf(t)dt$$

a) Relations fondamentales

$$Ln(R(t)) = \int_0^t \lambda(u)du$$

$$F(t) = 1 - \exp(-\int_0^t \lambda(u)du)$$

b) Estimation des fonctions R et F

Une estimation de R(t) est fournie par le pourcentage de dispositifs n'ayant pas subi de défaillance dans l'intervalle de temps [0, t].

Exemple :

L'étude de la fiabilité de pièces mécaniques a conduit à étudier la durée de vie de 9 de ces pièces. Les temps de bon fonctionnement en heures jusqu'à défaillance sont :

Pièce n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	90	350	950	1660	530	1260	2380	230	720

On estime R(t) par le quotient par 9 du nombres de système en état de marche à l'instant t. On obtient ainsi le tableau suivant :

t	90	230	530	720	950	1260	1660	2380	
N(t)	8	7	6	5	4	3	2	1	0
R(t)	8/9	7/9	6/9	5/9	4/9	3/9	2/9	1/9	0
F(t)	1/9	2/9	3/9	4/9	5/9	6/9	7/9	8/9	1

Cette méthode d'estimation est acceptable si le nombre des systèmes mis en service à l'instant t = 0 est suffisamment grand. Pratiquement si N désigne ce nombre de systèmes, on estime F(t) à l'instant de la i-ème défaillance par :

- i / N si N > 50 (méthode des rangs bruts)
- i / (N + 1) si 20 < N <= 50 (méthode des rangs moyens)
- (i - 0,3) / (N + 0,4) si N <= 20 (méthode des rangs médians)

Par exemple, dans le cas précédent, on obtient en utilisant les rangs médians:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t	90	230	530	720	950	1260	1660	2380	
F(t)	0,07	0,18	0,29	0,39	0,5	0,61	0,72	0,82	0,93
R(t)	0,93	0,82	0,71	0,61	0,5	0,39	0,28	0,18	0,07

3. LOIS UTILISEES

3.1) Loi exponentielle

Si on considère des systèmes ne présentant pas de phénomènes d'usure (semi-conducteurs,…) et pour lesquels les défauts de jeunesse sont inexistants, il faut envisager une loi dont le taux d'avarie est constant. On alors $\lambda(t) = \lambda$

On a alors

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{si } t \in [0, +\infty[\quad \text{et} \quad R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$MTBF = E[T] = 1 / \lambda$$

La probabilité pour que le système fonctionne après un temps d'utilisation égal à la MTBF est $R(1/\lambda) = 1 / e \approx 0{,}368$, soit 36,8%.

Dans l'exemple ci-dessus, on peut approximer la loi par une loi exponentielle de paramètre $\lambda \approx 1 / 1060 \approx 0{,}00094$. On en déduit que la probabilité pour que la pièce fonctionne au moins 2000 heures est $R(2000) = \exp(-2000/1060) \approx 0{,}15$

3.2) Loi de Weibull

On se place dans le cas de système ne tombant pas en panne avant l'instant g et dont le taux d'avarie n'est pas constant après cet instant mais est une fonction puissance du temps, on a ainsi :

$$\lambda(t) = \beta / \eta \,.\, [(t - \gamma) / \eta]^{\beta - 1}, \text{ si } t > \gamma, 0 \text{ sinon.}$$

- Si $0 < \beta < 1$, alors le taux d'avarie est décroissant,
- Si $\beta = 1$, le taux d'avarie est constant
- Si $\beta > 1$, le taux d'avarie est croissant.

La fonction de fiabilité est donc :

$$R(t) = 1 \text{ si } t \leq \gamma, \quad \exp(-[(t - \gamma)/\eta]^{\beta}) \text{ si } t > \gamma.$$

$$F(t) = 0 \text{ si } t \leq \gamma, \quad 1 - \exp(-[(t - \gamma)/\eta]^{\beta}) \text{ si } t > \gamma.$$

On obtient la densité de probabilité de T,

$$f(t) = \beta / \eta \,.\, [(t - \gamma) / \eta]^{\beta-1} \exp[-[(t - \gamma) / \eta]^{\beta}] \text{ si } t \geq \gamma, \quad 0 \text{ si } t < \gamma$$

γ : paramètre de position,

η : paramètre de dispersion,

β : paramètre de forme.

On montre que la MTBF est :

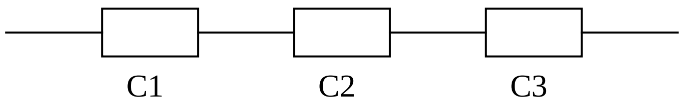
$$\text{MTBF} = E(T) = \eta\Gamma(1 + 1 / \beta) + \gamma.$$

Le calcul pratique se fait grâce à la formule $E(T) = \eta A + \gamma$, où le nombre A est donné par une table de Weibull. De même $V(T) = B\eta^2$ où B est donné également par la table.

4. Fiabilité d'un système et de ses composants

4.1) Système à structure en série

Un système présente une structure série si la défaillance d'un seul de ses composants entraîne celle du système. Il est souvent représenté par le schéma :



La durée de vie du système S est définie par la donnée de la fonction R. Les évènements "Ti > t" étant indépendants, on a :

$$P(T > t) = P(T_1 > t \text{ et } T_2 > t \text{ et } \ldots \text{ et } T_n > t)$$
$$= P(T_1 > t) . P(T_2 > t) \ldots P(T_n > t)$$

D'où

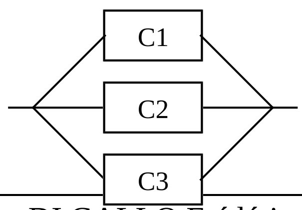
$$R(t) = \Pi_{1 \le i \le n} R_i(t)$$

Exemple :

Si les composants suivent des lois exponentielles de paramètre λi, R suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

4.2) Système à structure parallèle

Un système présente une structure parallèle si l'état de marche d'un seul de ses composants entraîne celle du système. Le système est défaillant si chacun des composants est défaillant.



La fonction de défaillance F est définie par

$$F(t) = P(T \le t) = P(T_1 \le t \text{ et } \ldots \text{ et } T_n \le t)$$
$$= P(T_1 \le t). \ldots .P(T_n \le t)$$

D'où

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \Pi_{1 \leq i \leq n} (1 - R_i(t))$$

<u>Exemple :</u>

Un système à structure série est constitué de n composants Ci indépendants dont la durée de vie Ti suit une loi exponentielle de paramètre li. Calculons la MTBF de ce système.

Pour chaque composant Ci, nous avons $R_i\,(t) = \exp(\lambda_i\, t)$ si $t \geq 0$, 0 sinon.
La fonction de fiabilité de ce système est définie par le produit de ces fonctions d'où,

$$R(t) = \exp(\lambda_1 t + \ldots + \lambda_n t) \text{ si } t \geq 0, \text{ 0 sinon.}$$

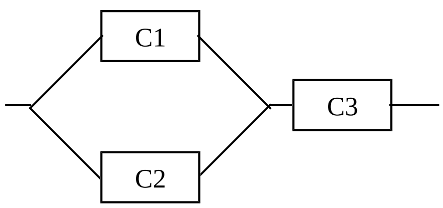
On en déduit que le système suit une loi exponentielle de paramètre, $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

D'où, $\quad MTBF = 1 / (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$

<u>4.3) Systèmes à structure mixte</u>

Si le système n'est ni à structure série ni à structure parallèle, on peut en général le décomposer en sous-systèmes qui sont soit en série, soit en parallèle.

<u>Exemple :</u>



Le système est une structure série du composant C3 et du sous-système noté C1,2 lui-même à structure parallèle. La durée de vie de ce sous-système est:

$R_{1,2}(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))$
$\qquad = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t).R_2(t)$

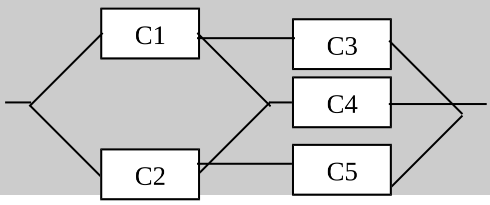
Par la suite :

$$R(t) = R_3(t).(\, R_1(t) + R_2(t) - R_1(t).R_2(t)).$$

5. EXERCICES

<u>5.1) Exercice n° 1</u>

Soit un système S constitué de 5 composants suivant le schéma ci-dessous, de fonction de fiabilité respective Ri. Déterminer la fonction de fiabilité R de ce système.



5.2) Exercice n° 2

La fiabilité d'un type de machines a été ajustée par une loi de Weibull de paramètres $\gamma = 40$, $\eta = 60$ et $\beta = 1.1$.

1) Déterminer la MTBF et calculer le temps de bon fonctionnement pour une défaillance admise de 50%.
2) Calculer le taux d'avarie pour les valeurs t = 45, 75, 105, 135 et 165.

5.3) Exercice n° 3

La fiabilité d'un portail automatique suit une loi exponentielle de paramètre λ =1.52 . 10-3. Quelle est la MTBF ? Calculer la probabilité de voir le système tomber en panne pendant la première année de fonctionnement.