Suites réelles et complexes

Limite d'une suite réelle

Définition 3.1.1 *Un suite réelle est une famille à valeurs dans $\mathbb{R}$ indexée par les entiers naturels. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n).*

Parfois on prend comme ensemble d'indices les entiers naturels non nuls $\mathbb{N}^*$.

Exemples.

1. $u_n = \sin n$, $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$, $u_n = e^n$.
2. Suites récurrentes.
   (a) La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et
   $$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$
   Elle est liée au nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et apparaît dans le best seller actuel "Da Vinci code".
   (b) Plus généralement on a les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 définies par la formule
   $$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$$
   avec u_0 et u_1 donnés.
   (c) Suites arithmétiques $u_{n+1} = u_n + a$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé. Une récurrence facile montre que pour tout n on a $u_n = na + u_0$.
   (d) Suites géométriques $u_{n+1} = au_n$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé. On montre par récurrence que pour tout n on a $u_n = a^n u_0$.
3. Plus généralement $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, par exemple $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$ comme dans la preuve de la proposition 1.2.1
4. Plus "bizarre".
   (a) $u_n = n$-ième décimale de π.
   (b) $u_n = 0$ si n premier et $u_n = 1$ sinon.

Définition 3.1.2 *Soit (u_n) une suite réel. On dit que (u_n) est*
- majorée *s'il existe un réel K tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq K$.*
- minorée *s'il existe un réel k tel que pour tout n on a $k \leq u_n$.*
- bornée *si elle est majorée et minorée.*

- croissante *si pour tout n on a $u_{n+1} \geq u_n$.*
- strictement croissante *si pour tout n on a $u_{n+1} > u_n$.*
- monotone *si elle est croissante ou décroissante.*
- périodique *s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout n on a $u_{n+p} = u_n$. L'entier p est la période de la suite.*

On définit de même une suite décroissante, strictement décroissante.

Il arrive qu'une propriété ne soit pas vraie pour tous les premiers termes d'une suite mais seulement à partir d'un certain rang. Par exemple, (u_n) est croissante à partir d'un certain rang s'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemples.

1. $u_n = \sin n$ est majorée.
2. $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ est strictement décroissante et bornée.
3. $u_n = e^n$ est croissante, minorée mais pas majorée.
4. On suppose que $u_0 > 0$ et $a > 0$, la suite géométrique $u_n = a^n u_0$ est croissante non majorée si $a > 1$, décroissante et bornée si $a < 1$, constante si $a = 1$.
5. La suite $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$ est périodique de période 17.

Proposition 3.1.1 *La suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.*

Démonstration. Supposons la suite (u_n) bornée, elle est donc majorée. Par définition il existe $K > 0$ tel que pour tout n on a $u_n \leq K$. Elle est aussi minorée, donc il existe $L < 0$ tel que pour tout n on a $L \leq u_n$. Soit $M = \max(K, -L)$. Alors pour tout n, on a $-M \leq L \leq u_n \leq K \leq M$, ce qui est équivalent à $|u_n| \leq M$.

Réciproquement supposons que la suite $(|u_n|)$ est majorée. On a un réel M tel que pour tout n on a $|u_n| \leq M$ qui est équivalent à $-M \leq u_n \leq M$. Alors M est un majorant et $-M$ est un minorant de la suite (u_n). ∎

Définition 3.1.3 (limite d'une suite) *On dit qu'une suite (u_n) admet le réel ℓ pour* limite *ou que (u_n)* converge *vers ℓ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \text{ on a } |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a } u_n \geq K.$$

On dit qu'une suite (u_n) diverge si elle ne converge pas, c'est-à-dire si elle n'admet pas de limite dans $\mathbb{R}$.

On note suivant les cas

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Remarques.

1. En particulier une suite qui tend vers $+\infty$ diverge.
2. On définit de même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples.

1. La suite constante $u_n = a$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé converge vers a. Choisissons un $\varepsilon > 0$. Il faut trouver un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - a| < \varepsilon$. Comme $|u_n - a| = 0$ cette inégalité est toujours vraie et il suffit de prendre $N = 0$.
2. La suite définie par $u_n = n$ tend vers $+\infty$. Il faut montrer que pour tout $K \in \mathbb{R}$ il existe un entier N tel que pour tout n tel que $n \geq N$ on a $u_n \geq K$. Il suffit de prendre pour N le plus petit entier $\geq K$.

Propriétés de la limite

Théorème 3.2.1 *Si une suite (u_n) de réels admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors cette limite est unique.*

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il y a deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$. Prenons $\varepsilon = \frac{\ell'-\ell}{2} > 0$. Comme ℓ est limite de la suite (u_n) il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$, de même comme ℓ' est limite on a un entier N' tel que pour tout $n \geq N'$ on a $|u_n - \ell'| < \varepsilon$. Alors si $n \geq \max(N, N')$ on peut écrire en utilisant l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue :

$$\ell' - \ell = |\ell' - \ell| \leq |\ell' - u_n| + |u_n - \ell| < \varepsilon + \varepsilon = \ell' - \ell,$$

ce qui est absurde. ∎

Proposition 3.2.1 *Si une suite (u_n) de réels converge, alors elle est bornée.*

Démonstration. Commençons par le cas particulier où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Par définition on a

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \; |u_n - 0| < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq 1$. Soit $K = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1\}$, on a alors $|u_n| \leq K$ pour tout n, donc (u_n) est bornée.
Dans le cas général, on pose $v_n = u_n - \ell$ si ℓ est la limite de (u_n). Alors (v_n) a pour limite 0, donc d'après le cas particulier la suite (v_n) est bornée : il existe M et m tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout n. Alors $m + \ell \leq u_n \leq M + \ell$, ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée. ∎

Remarque.
La réciproque est fausse. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée et diverge (pour une preuve de la divergence voir la remarque suivant la proposition 3.2.9).

Proposition 3.2.2 *Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.*

Démonstration. Comme (u_n) est bornée, la suite $(|u_n|)$ est majorée (proposition 3.1.1). Donc il existe un réel K tel que $|u_n| \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Fixons $\varepsilon > 0$. Comme (v_n) converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| < \varepsilon/K$ pour tout $n \geq N$. Alors $|u_n v_n| = |u_n|.|v_n| < K.\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. ∎

Proposition 3.2.3 (suite "somme") *Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant comme limites respectives les réels ℓ et ℓ'. Alors la suite "somme" (w_n), définie par*

$$w_n = u_n + v_n,$$

tend vers $\ell + \ell'$.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. On écrit la convergence de (u_n) avec $\frac{\varepsilon}{2}$: il existe un N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même la convergence de (v_n) donne un M tel que si $n \geq M$ alors $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On en déduit que pour $n \geq K = \max(M, N)$ on a $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|w_n - (\ell + \ell')| = |u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve que (w_n) tend vers $l + l'$. ∎

Remarque.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

Par contre si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, on a une forme indéterminée qui nécessite une étude plus approfondie pour conclure.

Proposition 3.2.4 (suite "produit") *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles admettant les nombres réels ℓ et ℓ' comme limites. Alors la suite "produit" (w_n) définie par*

$$w_n = u_n v_n$$

tend vers $\ell \cdot \ell'$.

Démonstration. Montrons que la suite (ℓv_n) tend vers $\ell\ell'$. En effet, la suite constante ℓ est bornée et la suite $(v_n - \ell')$ tend vers 0. D'après la proposition 3.2.2 la suite $\ell(v_n - \ell')$ converge vers 0. Donc la suite (ℓv_n) tend vers $\ell\ell'$.

De même, la suite (u_n) tend vers ℓ, donc la suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0. La suite (v_n) est convergente donc bornée, donc la suite $v_n(u_n - \ell)$ converge vers 0, à nouveau à cause de la proposition 3.2.2. En écrivant $u_n v_n = (u_n v_n - \ell v_n) + \ell v_n = v_n(u_n - \ell) + \ell v_n$, on voit que la suite $(u_n v_n)$ tend vers $\ell\ell'$. ∎

Proposition 3.2.5 (suite des inverses) *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Si (u_n) tend vers $\ell > 0$, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Comme (u_n) a pour limite ℓ qui est strictement positif, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$. On a donc $u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$. On en déduit que $\frac{1}{u_n} < \frac{2}{\ell}$ pour $n \leq N$, donc (u_n) est majorée, donc bornée puisqu'elle est minorée par 0.

Ainsi la suite $(\frac{1}{u_n}(u_n - \ell))$ est le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0, c'est donc une suite qui tend vers 0 (proposition 3.2.2).

Comme $\frac{1}{u_n}(u_n - \ell) = 1 - \frac{\ell}{u_n}$, on en déduit que la suite $\frac{\ell}{u_n}$ tend vers 1. Comme $\frac{1}{u_n} = (\frac{1}{\ell})(\frac{\ell}{u_n})$, d'après la limite d'un produit on a que la suite $(\frac{1}{u_n})$ tend vers $\frac{1}{\ell}$. ∎

Proposition 3.2.6 *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.*

a) *Si u_n tend vers $+\infty$, alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0.*

b) *Si u_n tend vers 0, alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration. a) Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc $0 < \frac{1}{u_n} < \varepsilon$ ce qui prouve que $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0.

b) Fixons $K \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour tout n, on sait qu'il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $0 < u_n < \frac{1}{K}$. Donc $u_n > K$, ce qui prouve que u_n tend vers $+\infty$. ∎

Remarque.

La condition $u_n > 0$ est essentielle. Par exemple, si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, la suite (u_n) tend vers 0 mais la suite $(\frac{1}{u_n})$ n'a pas de limite.

Proposition 3.2.7 (passage à la limite des inégalités)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. On suppose que

$$u_n \leq v_n$$

à partir d'un certain rang. Alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration. Par l'absurde. Supposons que $\ell > \ell'$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant l'inégalité $\varepsilon < \frac{\ell-\ell'}{2}$.

La convergence de (u_n) vers ℓ dit qu'il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors

$$|u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{1}$$

La convergence de (v_n) vers ℓ' dit qu'il existe un entier N' tel que si $n \geq N'$ alors

$$|v_n - \ell'| < \varepsilon. \tag{2}$$

Enfin il existe M tel que si $n \geq M$ alors

$$u_n \leq v_n. \tag{3}$$

Donc pour $n \geq \max(N, N', M)$ les trois inégalités sont vraies. On en déduit que

$$v_n < \ell' + \varepsilon < \ell - \varepsilon < u_n.$$

Remarquons que la deuxième inégalité est équivalente à $\varepsilon < \frac{\ell-\ell'}{2}$. Ceci donne une contradiction avec (3). ∎

Remarque.

La proposition n'est plus vraie si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Prenons par exemple $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a $u_n < v_n$, mais les deux suites ont la même limite 0.

Proposition 3.2.8 (théorème des gendarmes)

a) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang on ait les inégalités*

$$u_n \leq x_n \leq v_n.$$

Alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

b) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang. Alors (v_n) tend vers $+\infty$.*

c) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang. Alors (v_n) tend vers $-\infty$.*

Démonstration. a) Fixons $\varepsilon > 0$. La convergence de (u_n) vers ℓ dit qu'il existe un N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$$

La convergence de (v_n) vers ℓ dit qu'il existe un N' tel que si $n \geq N$ alors $|v_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon.$$

Il existe aussi M tel que si $n \geq M$ alors $u_n \leq x_n \leq v_n$. Donc si $n \geq \max(N, N', M)$ on a

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq x_n \leq v_n < \ell + \varepsilon.$$

On déduit que $|x_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui prouve que la suite (x_n) tend vers ℓ.

b) Par définition $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie que pour un réel K donné il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $u_n \geq K$. D'autre part on sait qu'il existe un entier M tel que si $n \geq M$ alors $u_n \leq v_n$. Donc si $n \geq \max(M, N)$ on a $v_n \geq u_n \geq K$, ce qui prouve que v_n tend vers $+\infty$.

c) On fait de même. ∎

Définition 3.2.1 (sous-suite) *Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (v_n) est une* sous-suite *ou une* suite extraite *de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout n on a*

$$v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemples.

1. Prenons la suite définie par $u_n = (-1)^n$. L'application $\varphi : n \mapsto 2n$ donne la sous-suite $v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$. Cette sous-suite est une suite constante. De même $\varphi : n \mapsto 2n+1$ donne la sous-suite $v_n = u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$. Cette sous-suite est aussi une suite constante.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$. Elle est périodique de période 17. L'application $\varphi : n \mapsto 17n$ donne la sous-suite $v_n = u_{17n} = \sin(2\pi n) = 0$. L'application $\varphi : n \mapsto 17n+1$ donne $v_n = u_{17n+1} = \sin(\frac{2\pi}{17}) \neq 0$.

Proposition 3.2.9 *Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) tend vers ℓ si et seulement si toute sous-suite de (u_n) tend vers ℓ.*

Démonstration. $\Leftarrow$ C'est évident puisque la sous-suite (v_n) obtenue en prenant pour φ l'identité de $\mathbb{N}$ est la suite (u_n) elle-même.

$\Rightarrow$ Soit (v_n) la sous-suite associée à l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Montrons d'abord que pour tout n on a l'inégalité

$$\varphi(n) \geq n.$$

On procède par récurrence. On a $\varphi(0) \geq 0$ puisque $\varphi(0) \in \mathbb{N}$. Supposons que $\varphi(n) \geq n$. On a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ puisque φ est strictement croissante. Donc $\varphi(n+1) > n$, soit $\varphi(n+1) \geq n+1$ puisque $\varphi(n+1)$ est un entier.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite (u_n) tend vers ℓ, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Comme $\varphi(n) \geq n$, on a $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq N$, ce qui prouve que (v_n) tend vers ℓ. ∎

Remarque.

On utilise cette proposition pour montrer qu'une suite diverge : si l'on trouve deux sous-suites de (u_n) qui tendent vers deux limites distinctes alors (u_n) diverge.

Exemples.

Si $u_n = (-1)^n$, on a trouvé deux sous-suites constantes égales à 1 et -1. Donc (u_n) diverge.

La suite définie par $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$ diverge car on a trouvé deux sous-suites (constantes) ayant pour limite 0 et $\sin(\frac{2\pi}{17})$.

Proposition 3.2.10 *Une suite réelle qui est croissante et majorée converge vers $\ell = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$.*

Démonstration. La partie A de $\mathbb{R}$ formée des u_n pour $n \in \mathbb{N}$ est non vide et majorée. On a admis au chapitre 1 qu'une telle partie a une borne supérieure (théorème 1.2.3). Soit ℓ cette borne supérieure, c'est un majorant de A et c'est le plus petit des majorants de A.

Puisque ℓ est un majorant on a $u_n \leq \ell$ pour tout n.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme ℓ est le plus petit majorant le nombre $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc il existe un élément u_N de A tel que $\ell - \varepsilon < u_N$. Comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_N$ pour $n \geq N$. On a donc pour $n \geq N$:

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$

On a donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. ∎

De même on a

Proposition 3.2.11 *Une suite de réels qui est décroissante et minorée converge vers* $\ell = \inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 3.2.12 *Une suite* (u_n) *de réels qui est croissante et non majorée tend vers* $+\infty$.

Démonstration. L'assertion "(u_n) est majorée" s'écrit

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq K$$

en français : il existe un majorant K de la suite (u_n)

La négation de cette assertion est

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > K$$

en français : quel que soit K le nombre K n'est pas un majorant de la suite (u_n). Changeons de notations en échangeant les rôles de n et N :

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad u_N > K$$

Comme (u_n) est croissante on a alors $u_n \geq u_N > K$ pour tout $n \geq N$, c'est la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ∎

De même on a

Proposition 3.2.13 *Une suite* (u_n) *de réels qui est décroissante et non minorée tend vers* $-\infty$.