Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Beispielklausur 1
90 min

Mathematische Grundlagen/Grundlagen der Mathematik

Bitte lesen Sie die folgenden Hinweise sorgfältig durch:

1. Prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.
2. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf dem zur Aufgabe gehörigen Blatt. Wenn nötig, dürfen Sie auch die Rückseite verwenden. Dies ist dann auf dem entsprechenden Aufgabenblatt deutlich kenntlich zu machen.
3. Geben Sie numerische Ergebnisse stets ganzzahlig beziehungsweise durch Brüche an (keine Dezimalzahlen). Eventuell auftretende Wurzeln sollen nur aufgelöst werden, wenn dies ganzzahlig möglich ist.
4. Die Klausur ist geheftet, in geordneter Reihenfolge wie bei der Ausgabe und vollständig (samt Deckblatt) abzugeben.
5. Die Klausur ist mit einem dokumentenechten Stift zu bearbeiten.
6. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
7. Lösungen, die nicht lesbar sind können nicht gewertet werden.
8. Tragen Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer leserlich in der folgenden Tabelle ein:

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	

Dies ist eine Beispielklausur, es entstehen hieraus keine Ansprüche bezüglich des Stoffs und der Art der Aufgaben in der eigentlichen Klausur.

Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Beispielklausur 1
90 min

Aufgabe 1 Mengen:

Es seien $M_1 = \{0, 1\}$, $M_2 = \{1, 2, 3\}$, $M_3 = \{-3, 1\}$.

a) Schreiben Sie folgende Menge durch Aufzählen all ihrer Elemente $M_1 \times M_2$

b) Schreiben Sie folgende Menge durch Aufzählen all ihrer Elemente $\mathcal{P}(M_1) \cap \mathcal{P}(M_3)$

c) Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(M_1^2)|$.

d) Schreiben Sie folgende Menge in der Mengenschreibweise (d.h. Mengenklammern, etc.): Die Menge aller Teilmengen der Menge der rationalen Zahlen, die die Null nicht enthalten.

Aufgabe 2 Abbildungen:

Es seien a, b reelle Zahlen, und $f_{a,b} : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} ax \ , & \text{falls } x \leq 0 \\ bx \ , & \text{falls } x > 0 \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie den Graph von $f_{1,2}$ (d.h. $a = 1$, $b = 2$).

b) Bestimmen Sie das Urbild $f_{-1,1}^{-1}([-2, 0])$.

c) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von $f_{2,\frac{1}{2}} : [-2, 2] \to [-4, 1]$.

Aufgabe 3 Aussagenlogik/Beweisen

a) Zeigen Sie, dass $F_1(A,B,C) := A \Rightarrow (B \vee C)$ und $F_2(A,B,C) := \neg\,(A \wedge \neg(B \vee C))$ gleichwertig sind, indem Sie folgende Wahrheitstabelle ausfüllen:

A	B	C	$B \vee C$	F_1	$\neg(B \vee C)$	$A \wedge \neg(B \vee C)$	F_2	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
w	w	w						
w	w	f						
w	f	w						
w	f	f						
f	w	w						
f	w	f						
f	f	w						
f	f	f						

b) Nehmen Sie an, sie möchten das Folgende mittels Beweis durch Widerspruch beweisen: *Zu jeder Primzahl p gibt es eine Primzahl b mit $b > p$* . Formulieren Sie die Annahme, die dazu zu widerlegen ist.

Aufgabe 4 Rechnen mit Restklassen:

Berechnen Sie folgende Aufgaben, und geben Sie das Ergebnis jeweils in Standardrepräsentanten an (Zwischenergebnisse müssen nicht angegeben werden).

a) $[7]_3 + [-4]_3 =$

b) $([10]_{13} \cdot [3]_{13}) \cdot [2]_{13} =$

c) $([5]_{11} + \left([7]^{11}\right) + [2]_{11}\right)^{-1} =$

d) $([7]_7 \cdot [4]_7^{-1}) + ([23]_7 \cdot [23]_7^{-1}) =$

Aufgabe 5 Induktion:

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ Folgendes gilt:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}.$$

Aufgabe 6 Komplexe Zahlen

a) Es seien $z = 3 - 4i$ und $w = 2 + 7i$. Berechnen Sie das Folgende:

$z + \overline{w} =$

$\frac{z}{w} =$

$\frac{z}{|z|} =$

b) Skizzieren Sie die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{i}{2} \right| \leq 2 \text{ und } \left| z + \frac{i}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

in der komplexen Ebene.

c) Es seien $z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ so, dass $\sum_{k=1}^{n} w_k \neq 0$. Lösen Sie die folgende Gleichung nach z_1 auf

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} w_k \, z_\nu \, i \, \nu \right) = 1$$

Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Aufgabe 7 Folgen:

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_n := \frac{2^{n-1}}{n!}$. Zeigen Sie, dass diese Folge monoton fallend ist.

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4$. mit $a_1 := 0$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Berechnen Sie den Grenzwert.

c) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n+1}{1}}.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Aufgabe 8 Wissen:
Vervollständigen Sie die Aussagen, so dass ein korrekte (sinnvolle) mathematische Aussage entsteht.

1. Es sei A eine Menge, dann ist die Potenzmenge definiert als

2. Zu einer Abbildung $f : X \to Y$ (mit X, Y zwei Mengen) und surjektiv, wenn gilt:

3. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt für $M = \{z \in \mathbb{C} : z^8 + z^3 - 3 = 0\}$:

$$|M|$$

4. Für $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ lautet die geometrische Summenformel wie folgt:

5. Eine komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), wenn

6. Die Anzahl an Möglichkeiten ungeordnete Stichproben vom Umfang $k \in \{0, ..., n\}$ ohne Zurücklegen aus n-nummerierten Kugeln zu ziehen beträgt:

7. Es gilt $e^{ix} = -1$ genau dann, wenn