Parameter

ausmultiplizieren — Scheitelpunkt — Quadratische Ergänzung

ausmultiplizieren — Produkt

Nullstellen berechnen:
- abc-Formel
- pq-Formel

abc-Formel

Jede quadratische Gleichung der Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

lässt sich allgemein lösen zu

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}\right\} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pq-Formel

Jede quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

lässt sich allgemein lösen zu

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}\right\} \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Herleitung der pq-Formel aus der abc-Formel

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad \left| \cdot \frac{1}{a} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \left| \ \underline{\text{Definiere}} \ p := \frac{b}{a}, \ q := \frac{c}{a} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \cdot x^2 + p x + q = 0$$

$$\overset{\text{abc}}{\Leftrightarrow} \quad x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q}}{2 \cdot 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad \left| \ \text{mit } 2 = \sqrt{2^2} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{\sqrt{2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2^2} - \frac{4q}{2^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}}$$

Beispiel pq-Formel:

$$2x^2 - 4x - 10 = 2 \quad | -2$$
$$2x^2 - 4x - 12 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$
$$x^2 - 2x - 6 = 0$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-2)}{2}\right)^2 - (-6)}$$
$$= 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 6}$$
$$= 1 \pm \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 + \sqrt{7}$$
$$x_2 = 1 - \sqrt{7}$$

---

abc-Formel herleiten:

$$a x^2 + bx + c = 0 \quad | -c$$
$$\Leftrightarrow \quad a x^2 + bx = -c \quad | \cdot \frac{1}{a}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a} x = -\frac{c}{a}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2 \cdot a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} \quad \left| + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right.$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$a^2 + 2 \cdot a \quad b \quad + \quad b^2$$

1 binom. F.

$$(a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad \left| \sqrt{\boxed{}}\right.$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Fallunterscheidung

$$\Leftrightarrow \quad \pm\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$$
$$= \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{2^2 \cdot a^2} - \frac{4}{4} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{c}{a}}$$
$$= \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2^2 \cdot a^2}}$$
$$= \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Binomische Formeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad || \quad (a + (-b))^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Geht das auch in Komplizierter für z.B. $(a+b)^3$ oder $(a+b+c)^2$? Ja klar :)

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

wobei $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ } Binomialkoeffizient

Englisch: "n choose k" Deutsch: "n über k"

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$

$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

n\k	0	1	2	3	4	
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Quadratische Ergänzung **Allgemein:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(1 \cdot x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2 \cdot a} \cdot x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\hat{=}\,+0} + \frac{c}{a}\right)$$

$\hat{=} \cdot 1$

$a^2 + 2 \cdot b \cdot a + b^2$

$(a+b)^2$

$$= a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{2^2a^2}\right)$$

$$= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= a \cdot \left(x - \underbrace{\left(-\frac{b}{2a}\right)}_{x\text{-Wert}}\right)^2 + \underbrace{\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)}_{y\text{-Wert}}$$

x-Wert, y-Wert des Scheitelpunkts

das wollen wir lernen/verstehen und selbst können

Beispiel 1: $f_1(x) = 1 \cdot x^2 + 4x - 5$

$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$= \underbrace{1 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2}_{} - 2^2 - 5 \quad = \left(x - (-2)\right)^2 - 9$$

$$= (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$$

$$= (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S_1(-2 \mid -9)$

Beispiel 2:

$$f_2(x) = 2 \cdot x^2 + 4x - 4$$

$$= 2 \cdot (x^2 + 2x - 2)$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$= 2 \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 2)$$

$$= 2 \cdot ((x+1)^2 - 1 - 2) = 2 \cdot (x+1)^2 - 6$$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S_2(-1 \mid -6)$

Beispiel 3:

$$f_3(x) = x^2 + x$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S_3\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{4}\right)$

Beispiel 4:

$$f_4(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$= x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + \underbrace{(1+3)}_{=4 = 2^2} - 1 \quad \Bigg\| \; \underbrace{x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2}_{= (x-2)^2} \underbrace{- 2^2 + 3}_{\underbrace{-4+3}_{-1}} \; = (x-2)^2$$

$$= (x-2)^2 - 1$$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S_4(2 \mid -1)$

Bemerkung: Quadratische Ungleichungen:

Bsp

$$x^2 - 1 \leq 0 \quad | +1$$

$$x^2 \leq 1 \quad | \sqrt{\square}$$

$$|x| \leq \sqrt{1} = 1 \quad | \text{ Fallunterscheidung}$$

$$+(x) \leq 1 \qquad\qquad -(x) \leq 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \geq -1$$

$$L = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$$