

• Fragen?

• „Element“ oder „Teilmenge“

Sei $M = \{1, \{2, 3\}\}$.

$$1 \in M$$

$$2 \notin M$$

$$\{1\} \subset M$$

$$\{2\} \notin M$$

$$\{2, 3\} \subset M$$

$$3 \notin M$$

$$\emptyset \subset M$$

• Potenzmenge

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.1.3 Wie ist die **Potenzmenge** einer Menge M definiert?

$$\mathcal{P}(M) = \{N : N \subset M\}$$

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.2.3 Seien $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3, 4\}$. Berechnen Sie $\mathcal{P}(M_1)$, $\mathcal{P}(M_2)$, $\mathcal{P}(M_1^2)$, $\mathcal{P}(M_1 \times M_2)$.

$$\mathcal{P}(M_1) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$\mathcal{P}(M_2) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M_1^2) &= \mathcal{P}(M_1 \times M_1) = \mathcal{P}(\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}) \\ &= \{\emptyset, \{(1, 1)\}, \{(1, 2)\}, \{(2, 1)\}, \{(2, 2)\}, \\ &\quad \{(1, 1), (1, 2)\}, \{(1, 1), (2, 1)\}, \{(1, 1), (2, 2)\}, \\ &\quad \{(1, 2), (2, 1)\}, \{(1, 2), (2, 2)\}, \{(2, 1), (2, 2)\}, \\ &\quad \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}, \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}, \\ &\quad \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}, \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}, \\ &\quad \emptyset, \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(M_1 \times M_2) = \dots$$

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.1.4 Wie ist die **Mächtigkeit** einer Menge M definiert?

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.1.5 Welche zwei unterschiedlichen Typen von unendlichen Mengen haben Sie kennen gelernt (bezogen auf die Mächtigkeit)?

1.1.6 Wie ist eine **höchstens abzählbare** Menge M definiert?

Definition 1.29 Es seien M und N zwei Mengen, dann heißen diese **gleichmächtig**, falls eine bijektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ (oder äquivalent $f : N \rightarrow M$) existiert.

1. Wenn M und $\{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig sind, dann heißt M **endliche Menge** und man sagt, dass M die **Kardinalität** n hat (gleichbedeutend $|M| = n$).
2. Wenn M und \mathbb{N} gleichmächtig sind, dann heißt M **abzählbar unendlich** oder kurz **abzählbar**.
3. Wenn M endlich oder abzählbar unendlich ist, dann sagt man auch M ist **höchstens abzählbar**.
4. Wenn M nicht höchstens abzählbar ist, dann heißt M **überabzählbar**.

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.2.4 Seien $M_1 = \{0, 1, 2\}$, $M_2 = \{2, 3\}$. Berechnen Sie $|M_1|$, $|M_2|$, $|M_1 \cup M_2|$, $|M_1 \cap M_2|$, $|M_1 \times M_2|$, $|M_1^2 \times M_2^2|$.

$$|M_1| = 3$$

$$|M_2| = 2$$

$$|M_1 \cup M_2| = |\{0, 1, 2, 3\}| = 4$$

$$|M_1 \cap M_2| = |\{2\}| = 1$$

$$|M_1 \times M_2| = |\{(0, 2), (0, 3), \dots, (2, 2), (2, 3)\}| = 6 \quad |M_1 \times M_2| = |M_1| \cdot |M_2|$$

$$|M_1^2 \times M_2^2| = |(M_1 \times M_1) \times (M_2 \times M_2)|$$

$$= |M_1 \times M_1| \cdot |M_2 \times M_2|$$

$$= (|M_1| \cdot |M_1|) \cdot (|M_2| \cdot |M_2|)$$

$$= (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2)$$

$$= 9 \cdot 4 = 36$$

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 32 Es sei M die Menge aller Bilder mit 10000 Pixeln, wobei jedes Pixel durch drei Farbkanäle (RGB) dargestellt wird, und die Intensität eines jeden Farbkanals durch ganzzahlige Werte von 0 bis 255 kodiert ist. Stellen Sie M als kartesisches Produkt geeigneter Mengen dar und geben Sie eine Formel zur Berechnung von $|M|$ an.

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 30 Zeigen Sie, dass folgende Mengen abzählbar sind:

- a) die Menge der geraden natürlichen Zahlen

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{n}{2} \in \mathbb{N} \right\},$$

- b) die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} .

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.3.1 Skizzieren Sie die Beweise für die Abzählbarkeit der Mengen \mathbb{Z} und \mathbb{Q} .

1.3.2 Skizzieren Sie den Beweis für die Überabzählbarkeit der Menge \mathbb{R} .

• Minimum, Maximum, Supremum und Infimum

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.1.9 Wie sind (a) **Maximum** und (b) **Minimum** einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert? (c) Gibt es diese immer? (d) Warum ist es für die Definition relevant, dass $M \subset \mathbb{R}$?

1.1.10 Wie sind (a) **Supremum** und (b) **Infimum** einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert? (c) Gibt es diese immer? (d) Wie ist der Zusammenhang mit dem Maximum und Minimum?

(Skript Kapitel 1: Mengen und Abbildungen)

Definition 1.36 Es sei $M \subset \mathbb{R}$.

Gibt es ein $y \in M$ mit $y \geq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Maximum** von M . Schreibweise:

$$y = \max M$$

Gibt es ein $y \in M$ mit $y \leq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Minimum** von M . Schreibweise:

$$y = \min M$$

Gibt es ein **kleinstes** $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Supremum** von M . Schreibweise:

$$y = \sup M$$

Gibt es ein **größtes** $y \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Infimum** von M . Schreibweise:

$$y = \inf M$$

(Hilf: Definitionen lesen, v3)

- Der „Hauptteil“
ist der zum **Rechnen** oder **Anwenden** interessante Teil. Hier stehen häufig irgendwelche Symbole und Funktionen, die bereits definiert wurden. (Diese Definitionen kann man im Zweifelsfall auch nochmal lesen)
- Die „Bedingungen“
ist der Teil, in denen verwendete Symbole **genau festgelegt** werden. Falls hier so etwas wie $x \in \mathbb{R}$ steht, wissen wir, dass x ein Vektor mit n -Komponenten im reellenwertigen Bereich ist.
- Die „definierten Begriffe“
in diesem Bereich werden **Schlüsselwörter** eingeführt, die später in anderen Definitionen wieder aufgreifen können.

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.2.5 Seien $M_1 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $M_2 = [-1, 3]$, $M_3 = (-1, 3)$, $M_4 = (-1, 3]$, $M_5 = [-1, 3)$ Mengen. Geben Sie für alle M_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jeweils das (a) Maximum und (b) Minimum der Menge an, sofern es existiert. Geben Sie weiter für alle Mengen das (c) Supremum und (d) Infimum an.

M	$\max(M)$	$\min(M)$	$\sup(M)$	$\inf(M)$
M_1				
M_2				
M_3				
M_4				
M_5				

Nebenrechnung:

Abbildungen

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

- 2.1.1 Wie ist eine **Abbildung** f definiert?
- 2.1.2 Wie ist der **Graph** einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ definiert?
- 2.1.3 Wann sind zwei Abbildungen $f(x)$ und $g(x)$ **gleich**?
- 2.1.4 Wie ist eine **Urbildmenge** einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ definiert?
- 2.1.5 Wie ist eine **Bildmenge** einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ definiert?
- 2.1.6 Was ist der **Wertebereich** einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$?

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 21 Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f((x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2.$$

Bestimmen und skizzieren Sie $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}(\{2\})$.

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

- 2.2.1 Sei $f : [0, 2] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = -x + 1$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Bildmengen der Mengen $M_1 = [0, 1]$ und $M_2 = [1, 2]$, also $f([0, 1])$ bzw. $f([1, 2])$.
- 2.2.2 Sei $f : [-2, 0] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = -\frac{x}{2}$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Urbildmengen der Mengen $M_1 = \{\frac{1}{2}\}$, $M_2 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ und $M_3 = (0, -1]$, also $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$, $f^{-1}([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$ bzw. $f^{-1}((0, -1])$.
- 2.2.3 Sei $f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow [0, 25]$, $f(x) = x^2$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Menge Y so, dass die folgende Gleichung korrekt ist: $f^{-1}(Y) = \{-5, -3, 3, 5\}$.
- 2.2.5 Sei $f_{a,b} : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} a \cdot x & , \text{ falls } x \geq 0 \\ b \cdot x & , \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

eine Funktion. Skizzieren sie jeweils den Graphen der Funktionen:

- $f_{-1,1}$ • $f_{1,2}$ • $f_{2,-1}$ • $f_{-1,-2}$ • $f_{2,-2}$

Abbildungen: Komposition / Verkettung

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

- 2.1.10 (a) Wie müssen die beiden Funktionen f und g definiert sein, damit die **Komposition** $(g \circ f)(x)$ möglich ist, aber $(f \circ g)(x)$ nicht? (b) Wie kann $(g \circ f)(x)$ noch geschrieben werden?

(a)

(b)

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 20 Es seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad g(x) = 5x^2 + x.$$

Bestimmen Sie $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ und $f \circ g$.

$$f \circ f =$$

$$g \circ g =$$

$$g \circ f =$$

$$f \circ g =$$

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.2.6 Gegeben seien die Funktionen

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin(2x)$
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{x+1}{2}$

Berechnen Sie:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| • $(f \circ g)(x)$ | • $(g \circ f)(x)$ | • $(f \circ f)(x)$ |
| • $(f \circ h)(x)$ | • $(h \circ g)(x)$ | • $(g \circ g)(x)$ |
| • $(g \circ h)(x)$ | • $(h \circ h)(x)$ | • $(h \circ f)(x)$ |

- Abbildungen: Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.1.7 Was muss eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ erfüllen, damit sie **surjektiv** ist?

2.1.8 Was muss eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ erfüllen, damit sie **injektiv** ist?

2.1.9 Was muss eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ erfüllen, damit sie **bijektiv** ist?

- surjektiv :

- injektiv:

oder äquivalent

- bijektiv:

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.2.4 Sei $f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow X, f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & , \text{falls } x \leq 0 \\ 4 \cdot x & , \text{falls } 0 < x \end{cases}$. Bestimmen Sie $X \subset \mathbb{R}$ so, dass f bijektiv ist.

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 17 a) Finden Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

b) Finden Sie eine injektive Abbildung $g : \{0, 2\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

a)

b)

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 18 Es seien

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -2x + 4$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

- a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.
- b) Zeigen Sie, dass g nicht injektiv und nicht surjektiv ist.
- c) Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 27 Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Aussage in Satz 1.24(1) auch richtig sein kann, wenn g nicht injektiv ist.

Satz 1.24 Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

1. Sind f, g injektiv, dann ist auch die Komposition $g \circ f : X \rightarrow Z$ injektiv.
2. Sind f, g surjektiv, dann ist auch die Komposition $g \circ f : X \rightarrow Z$ surjektiv.

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 22 Ist die folgende Abbildung injektiv?

$$\varphi : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \varphi((p, q)) = \frac{p}{q}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

• Abbildungen: identische Abbildung und Umkehrabbildung

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.1.11 (a) Wie ist die **identische Abbildung** auf einer Menge X definiert? (b) Welche zusätzliche Bedingung wird an die Menge X gestellt?

2.1.12 (a) Wie ist die **Umkehrabbildung** für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ definiert? (b) Welchen anderen Namen für die Umkehrabbildung haben Sie kennen gelernt?

2.1.13 Existiert zu jeder Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine Umkehrabbildung? Begründen Sie ihre Antwort!

11. (a)

(b)

12. (a)
(b)

13.

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.2.7 Gegeben seien die Funktionen:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x - 7$
- (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) := 2x + 3$
- (c) $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ mit $h := \frac{3}{x^2}$

Bestimmen Sie jeweils die Umkehrfunktionen (Zeigen Sie auch, dass Ihre Umkehrfunktion die Umkehrfunktion ist).

Definition 1.25 Für eine nichtleere Menge X heißt $\text{id}_X : X \rightarrow X$, definiert durch $\text{id}_X(x) := \text{id}_X(x) := x$ ($x \in X$), die **identische Abbildung** auf X .

Definition 1.26 Es seien X, Y Mengen und es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Die Abbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ heißt **Umkehrabbildung** von f oder **inverse Abbildung** (bezüglich \circ) von f , falls

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \text{ und } f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

gilt.