· Fragen?

· Komplexe Zahlen

7.1.1 In den Komplexen Zahlen gilt per Definition: $i^2 = \ldots -1$

7.1.2 Für was steht das i bei Komplexen Zahlen? imaginäre Einheit

7.1.3 Wie ist die Menge der Komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$) mittels der Reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) definiert? $\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y : x, y \in \mathbb{R}\}$

7.1.4 Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wie sind $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ definiert?
· $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$
· $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

7.1.5 Wie ist die **Addition** zweier Komplexer Zahlen $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiert? $z + w = \ldots (a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = (a + c) + i \cdot (b + d)$

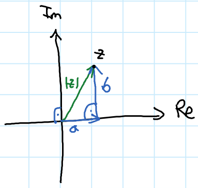
7.1.6 Wie ist die **Multiplikation** zweier Komplexer Zahlen $z = a+ib, w = c+id \in \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiert? $z \cdot w = \ldots (a + ib) \cdot (c + id) = a \cdot c + a \cdot i \cdot d + i \cdot b \cdot c + i \cdot b \cdot i \cdot d$
$= a \cdot c + i \cdot (a \cdot d + b \cdot c) - b \cdot d$

7.1.7 Wie sind die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation des Körpers der Komplexen Zahlen $(C, +, \cdot)$ definiert? $\oplus: 0 + 0i$
$\odot: 1 + 0i$

7.1.8 Wie sind die inversen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation für Elemente ($z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$) des Körpers der Komplexen Zahlen $(C, +, \cdot)$ definiert?
$\oplus: (-z) = (-a) - ib$
$\odot: z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

7.1.9 Wie ist das **konjugiert komplexe** einer Komplexen Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ definiert? $\bar{z} = a - i \cdot b$

7.1.10 Wie ist der **Betrag** einer Komplexen Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ definiert? $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



7.1.11 Wie ist eine **Polynomfunktion** definiert?

7.1.12 Wie ist eine **Nullstelle** einer Polynomfunktion definiert?

7.1.13 Was besagt der **Fundamentalsatz der Algebra** (Definition)?

7.1.14 Was ist die **Vielfachheit** einer Nullstelle einer Polynomfunktion? Was gilt für die Summe aller Vielfachheiten aller Nullstellen einer Polynomfunktion?

7.1.15 Welche Besonderheit gilt für die Nullstellen von Polynomfunktionen die lediglich reelle Koeffizienten haben ($\forall_{a_v} : a_v \in \mathbb{R}$)?

7.2.1 Seien:

- $z_1 = 3 + i \cdot 2$
- $z_2 = -\frac{3}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$
- $z_3 = i \cdot 3$

Berechnen Sie:

- $z_1 + z_2$
- $z_1 + z_3$
- $z_2 + z_3$
- $|z_1| + z_3$
- $z_2 + |z_3|$
- $z_1 \cdot z_2$
- $z_1 \cdot z_3$
- $z_2 \cdot z_3$
- $|z_2| \cdot z_1$
- $(|z_2| + z_1) \cdot z_3$
- $\frac{1}{z_1} + z_3$
- $\frac{|z_2|}{z_3} + z_2$

· $z_1 + z_2 = (3 + i \cdot 2) + (-\frac{3}{2} - i \cdot \frac{1}{2}) = 3 - \frac{3}{2} + i \cdot 2 - i \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + i \cdot \frac{3}{2}$

· $z_2 + |z_3| = -\frac{3}{2} - i \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3^2 + 0^2} = -\frac{3}{2} - i \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{3}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$

· $z_1 \cdot z_2 = -\frac{9}{2} + i \cdot (\frac{3}{2} + -3) - 1 = -\frac{11}{2} - i \cdot \frac{3}{2}$

· $|z_2| \cdot z_1 = \sqrt{(-\frac{3}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} \cdot (3 + i \cdot 2) = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} \cdot (3 + i \cdot 2) = \sqrt{\frac{10}{4}} \cdot (3 + i \cdot 2)$
$= \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot (3 + i \cdot 2) = \sqrt{10} \cdot \frac{3}{2} + \sqrt{10} \cdot i$

· $\frac{1}{z_1} \cdot z_3 = \left(\frac{3}{3^2+2^2} + i \cdot \frac{-2}{3^2+2^2}\right) \cdot (i \cdot 3) = \frac{9i}{9+4} + i^2 \cdot \frac{-2 \cdot 3}{9+4} = i \cdot \frac{9}{13} - \frac{-6}{13} = \frac{6}{13} + i \cdot \frac{9}{13}$

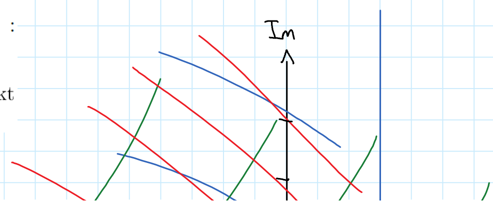
8.1.1 Welche Form hat die folgende Menge in der Komplexen Ebene $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$?

8.1.2 Welche Form hat die folgende Menge in der Komplexen Ebene $M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 1\}$?

8.1.3 Welche Form hat die folgende Menge in der Komplexen Ebene $M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 1\}$?

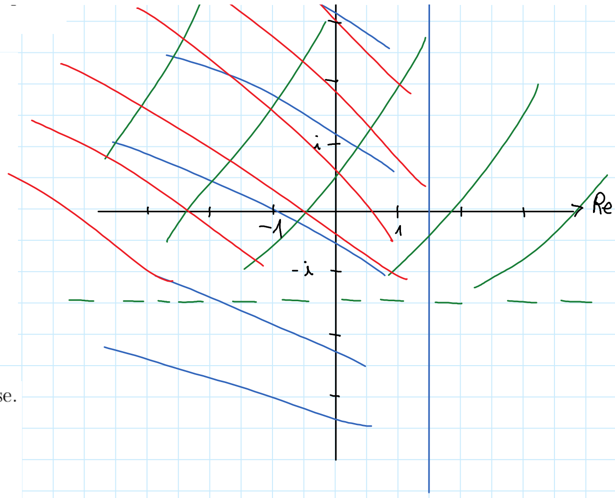
8.1.4 Wo in der Komplexen Ebene liegt der Mittelpunkt der Kreisscheibe $M = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + i \cdot 1)| \leq 1\}$?

8.1.5 Wie lautet die allgemeine Formel für eine Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt $a + ib$ in der Komplexen-Ebene?



8.2.1 Zeichnen Sie die folgende Menge in der Komplexen Ebene:

$a + ib$ in der Komplexen-Ebene?



8.2.1 Zeichnen Sie die folgende Menge in der Komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : 2 \cdot \mathrm{Re}(z) \leq 3 \wedge \mathrm{Im}(z) > -\frac{3}{2}\}$$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \leq \frac{3}{2}$

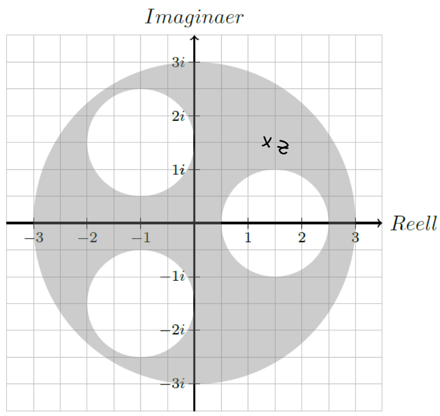
8.2.2 Zeichnen Sie die folgende Menge in der Komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 1 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq -1 \wedge |z + i| < 3\}$$

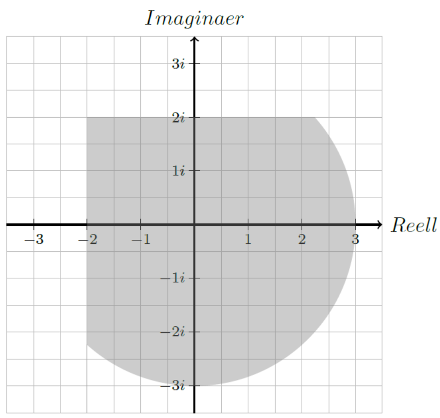
8.2.3 Zeichnen Sie die folgende Menge in der Komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : (\,|z - (1 + i)| < 3 \vee |z + (1 + i \cdot 2)| < 2\,) \wedge |z - \frac{1}{2}| > 1\}$$

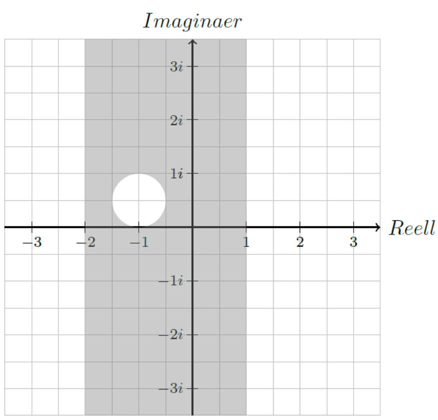
8.2.4 Beschreiben Sie die im folgenden Skizzierte Menge mittels der Mengenschreibweise.



8.2.5 Beschreiben Sie die im folgenden Skizzierte Menge mittels der Mengenschreibweise.



8.2.6 Beschreiben Sie die im folgenden Skizzierte Menge mittels der Mengenschreibweise.



Aufgabe 92 Schreiben Sie folgenden Mengen in der beschreibenden Mengenschreibweise

a) Die Menge aller komplexen Zahlen mit Betrag 1 und positivem Realteil.

b) Die Menge aller Folgen von $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, bei denen alle Folgenglieder ungleich 0 sind, und die einen Grenzwert mit Betrag gleich 1 haben.

zur Visualisierung von Funktionen auf den komplexen Zahlen: https://samuelj.li/complex-function-plotter/

7.2.2 Schreiben Sie das folgende Polynom in Summen-Form um:

$$f(z) = (z - (1+i))^2(z - (-1+i)) = z^3 + (-4+2i) \cdot z + (2+2i)$$

7.2.3 Schreiben Sie das folgende Polynom in Summen-Form um:

$$f(z) = (z - (2-i))(z - (2+i))(z - (-2))$$

7.2.4 Welchen Grad hat das folgende Polynom?

$$f(z) = (z+i)^3(z-2)^2(z-(3+i))^1(z-(2-2i))^2$$

$d = 3+2+1+2 = 8$

7.2.5 Betrachten Sie das Polynom $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - 8z^2 + 16z$, mit den Nullstellen $n_0 = 0, n_1 = 1-i, n_2 = -2+2i$. Wie lauten die beiden Fehlenden Nullstellen n_3 und n_4?

Satz 6.14 *Es sei*

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu z^\nu$$

ein Polynom mit $a_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 0, ..., d$. Dann gilt $P(z) = 0$ genau dann, wenn $P(\overline{z}) = 0$ gilt.

Definition 6.9 Eine **Polynomfunktion** (oder kurz **Polynom**) ist eine Funktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu z^\nu$$

mit $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{C}$. Ist $a_d \neq 0$, so heißt $\deg(P) := d$ der **Grad** von P, und $a_0, \ldots, a_d$ sind die **Koeffizienten** von P. Ein $z \in \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von P, falls $P(z) = 0$ gilt.

Satz 6.10 *(Fundamentalsatz der Algebra und Faktorisierungssatz) Es sei*

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu z^\nu$$

ein Polynom vom Grad $d > 0$. Dann existieren $z_1, ..., z_k \in \mathbb{C}$ und zugehörige $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$P(z) = a_d(z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{\alpha_k}$$

gilt. Dabei gilt $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = d$.

Definition 6.11 Die $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ in Satz 6.10 heißen **Vielfachheiten** der Nullstellen $z_1, z_2, ..., z_k$.