

Betragsfunktion: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , \text{sonst} \end{cases}$, $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Regeln für Betragsgleichungen

▲ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

▲ $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

▲ Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$

▲ Beträge auflösen: $|x| = y \Leftrightarrow \begin{cases} +x = y \\ \text{und} \\ -x = y \end{cases}$

erhalte zwei Gleichungen,
somit auch möglicherweise
zwei Lösungen.

Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} + \quad \quad \quad - \end{array} & \\ & \begin{array}{c} \swarrow \quad \quad \searrow \end{array} & \\ \begin{array}{l} + \left(\frac{5}{2} - x_1 \right) = 2 \\ \frac{5}{2} - x_1 = 2 \quad | - \frac{5}{2} \\ -x_1 = \frac{4}{2} - \frac{5}{2} \\ \quad \quad \quad | \cdot (-1) \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{l} - \left(\frac{5}{2} - x_2 \right) = 2 \\ (-1) \cdot \left(\frac{5}{2} - x_2 \right) = 2 \\ -\frac{5}{2} + x_2 = 2 \quad | + \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{4}{2} + \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{9}{2} \end{array} & \\ & \begin{array}{c} \searrow \quad \quad \swarrow \end{array} & \\ & \text{Lösung: } x \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right\} & \end{array}$$

Allgemeiner Lösungsweg für Betragsgleichungen:

1. Betrag auf einer Seite isolieren
2. Betrag auflösen: Fallunterscheidung
 - a. Positiver Fall
 - b. Negativer Fall
3. Beide Gleichungen lösen
4. Ergebnis zusammenfassen
 - a. Bei Betragsungleichungen aufpassen