Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Beispielklausur 3
90 min

Mathematische Grundlagen/Grundlagen der Mathematik

Bitte lesen Sie die folgenden Hinweise sorgfältig durch:

1. Prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.
2. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf dem zur Aufgabe gehörigen Blatt. Wenn nötig, dürfen Sie auch die Rückseite verwenden. Dies ist dann auf dem entsprechenden Aufgabenblatt deutlich kenntlich zu machen.
3. Geben Sie numerische Ergebnisse stets ganzzahlig beziehungsweise durch Brüche an (keine Dezimalzahlen). Eventuell auftretende Wurzeln sollen nur aufgelöst werden, wenn dies ganzzahlig möglich ist.
4. Die Klausur ist geheftet, in geordneter Reihenfolge wie bei der Ausgabe und vollständig (samt Deckblatt) abzugeben.
5. Die Klausur ist mit einem dokumentenechten Stift zu bearbeiten.
6. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
7. Lösungen, die nicht lesbar sind können nicht gewertet werden.
8. Tragen Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer leserlich in der folgenden Tabelle ein:

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	

Dies ist eine Beispielklausur, es entstehen hieraus keine Ansprüche bezüglich des Stoffs und der Art der Aufgaben in der eigentlichen Klausur.

Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Aufgabe 1 Mengen:

Es seien $M = \{-1, 7\}$, $N = \{2, 3\}$.

a) Schreiben Sie folgende Menge durch Aufzählen all ihrer Elemente

$$M \times N = \{$$

b) Schreiben Sie folgende Menge durch Aufzählen all ihrer Elemente

$$M^2 \cup N^2 = \{$$

c) Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(N)|$.

d) Schreiben Sie folgende Menge in der Mengenschreibweise (d.h. Mengenklammern, etc.): *Die Menge aller Teilmengen der reellen Zahlen, die alle negativen Zahlen enthalten.*

Aufgabe 2 Abbildungen:

Es sei $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x + 1, g(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

a) Skizzieren Sie die Graphen von f, g und $g \circ f$ jeweils für die Eingabewerte $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b) Es sei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = -2x^2$. Bestimmen Sie folgende Urbilder $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}([-8, -2])$, $f^{-1}([0, 1])$.

Aufgabe 3 Logik

a) Zeigen Sie, dass $F_1(A,B,C) := A \Rightarrow (B \vee C)$ und $F_2(A,B,C) := \neg\,(A \wedge \neg(B \vee C))$ gleichwertig sind, indem Sie folgende Wahrheitstabelle ausfüllen:

A	B	C	$B \vee C$	F_1	$\neg(B \vee C)$	$A \wedge \neg(B \vee C)$	F_2	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
w	w	w						
w	w	f						
w	f	w						
w	f	f						
f	w	w						
f	w	f						
f	f	w						
f	f	f						

Die zweite Tabelle nur verwenden, falls Ihre obere Lösung nicht mehr lesbar ist !!!

A	B	C	$B \vee C$	F_1	$\neg(B \vee C)$	$A \wedge \neg(B \vee C)$	F_2	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
w	w	w						
w	w	f						
w	f	w						
w	f	f						
f	w	w						
f	w	f						
f	f	w						
f	f	f						

b) Nehmen Sie an, sie möchten das Folgende für stetige Funktionen mittels Beweis durch Widerspruch beweisen: *Für alle stetigen Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) > 0$*, für alle* $x \in \mathbb{Q}$*, gilt auch* $f(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.* Formulieren Sie die Annahme, die dazu zu widerlegen ist.

Aufgabe 4 Rechnen mit Restklassen

Berechnen Sie folgende Aufgaben und geben Sie das Ergebnis jeweils in Standardrepräsentanten an (Zwischenergebnisse müssen nicht angegeben werden).

a) $[7]_3 + [-4]_3 =$

b) $[7]_{13} \cdot [3]_{13} \cdot [12]_{13} =$

c) $[5]_{11} + ([7]_{11} + [7]_{11})^{-1} =$

d) $[3]_7 \cdot [3]_7^{-1} \cdot [23]_7 \cdot [23]_7^{-1} =$

Aufgabe 5 Induktion:

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$\prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n(n+1)}.$$

Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Beispielklausur 3
90 min

Aufgabe 6 Komplexe Zahlen

a) Es seien $u = 3 + 2i$ und $w = 2 + i$. Berechnen Sie das Folgende:

$|\overline{u} \cdot w| =$

$\frac{wu+\overline{u}}{u} =$

b) Skizzieren Sie die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \geq 1 \text{ und } |z| \leq 2\}$$

in der komplexen Ebene.

c) Es seien $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq -1$ und $\sum_{k=2}^{n} z_k \neq 0$. Lösen Sie die folgende Gleichung nach z_1 auf

$$\frac{1}{1+z_1}\left(\sum_{k=2}^{n} z_1 z_k + \sum_{k=2}^{n} z_1^2 \, z_k\right) = 9.$$

Aufgabe 7 Folgen u. Reihen

a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ streng monoton fallend ist .

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_{n+1} = \frac{3^n+4n^2-1}{(4^n+2)^2}$ Berechnen Sie den Grenzwert.

c) Zeigen Sie, dass folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{3^v + 4}.$$

Prof. Dr. Hans-Peter Beise | Beispielklausur 3
Fachbereich Informatik | 90 min
Hochschule Trier

Aufgabe 8 Wissen:

Vervollständigen Sie die Aussagen, so dass ein korrekte (sinnvolle) mathematische Aussage entsteht.

1. Es seien A, B zwei Aussagenvariablen. Nach den De Morganschen Gesetzen gilt

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow$$

2. Eine Abbildung $f : X \to Y$ (mit X, Y zwei Mengen) ist injektiv, wenn gilt:

3. Ein Polynom ist eine Funktion der Form

$$P(z) =$$

4. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt nach dem binomischen Satz

$$(a+b)^n =$$

5. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert c, wenn gilt:

6. Die Exponentialfunktion ist definiert durch

$$e^z =$$