

Mathematische Grundlagen

Hans-Peter Beise

Wintersemester 2024/2025

Inhaltsverzeichnis

1	Mengen und Abbildungen	5
2	Aussagenlogik	21
3	Relationen	34
4	Algebraische Strukturen	39
5	Beweisen mit vollständiger Induktion	50
6	Komplexe Zahlen	57
7	Folgen und Reihen	66
8	Exponentialfunktion, Logarithmus	84
A	Intervall-Notation	92
B	Quantoren	92
C	Erweiterter Euklidischer Algorithmus	93
D	Aufgabensammlung	I
D.1	Mengen und Abbildungen	I
D.2	Logik	VIII
D.3	Algebra und Relationen	X
D.4	Gleichungen, Ungleichungen und Induktion	XVIII
D.5	Komplexe Zahlen	XXII
D.6	Folgen und Reihen	XXVI

Einleitung

In der gesamten Mathematik wird mit dem grundlegenden Konzept von Abbildungen zwischen Mengen gearbeitet, also einer Vorschrift, die den Elementen einer ersten Menge jeweils ein Element einer zweiten Menge zuordnet. Dieses Vorgehen ist bereits aus der Schulmathematik bekannt, wo man meist Abbildungen (auch Zuordnung oder Funktion genannt) von reellen Zahlen auf reelle Zahlen betrachtet.

Eine solche Abbildung ist beispielsweise durch die Vorschrift $f(x) = x^2$ beschrieben, wobei x , das Argument, eine reelle Zahl, und $f(x)$ der Bildpunkt, wiederum eine reelle Zahl ist. Der sogenannte Graph dieser Abbildung zeigt hier die bekannte Parabel. Durch solche grundlegenden Funktionen, die eine Zahl auf eine Zahl abbilden, lassen sich bereits einige Zusammenhänge der realen Wirklichkeit modellieren:

1. Zusammenhang von Stromverbrauch und Stromrechnung (linear affin)
2. Zusammenhang von Seitenlänge eines Quadrats und Fläche des Quadrats (quadratische Funktion)
3. Zusammenhang von Geschwindigkeit und zurückgelegtem Weg
4.

Das Konzept der Abbildung ist jedoch sehr viel weitreichender anwendbar und taucht quasi überall in der Informatik und Mathematik auf, insbesondere auch dort, reale Zusammenhänge (technische, physikalische, biologische, wirtschaftliche, ...) beschrieben werden:

1. Algorithmen, etwa zur Bestimmung kürzester Wege.
2. Erzeugen von Computergrafiken: z.B. Bewegen von Objekten in einer virtuellen 3D-Welt, Projektion auf einen 2D-Bildschirm,
3. Künstliche Intelligenz: z.B. Erkennen von Wörtern im Sprachsignal mittels neuronaler Netze (Deep Learning),
4. Medizinische Bildgebung: z.B. Der Zusammenhang von Körperbeschaffenheit und gemessenem Signal (Röntgen) wird durch mathematische Abbildungen modelliert.

5. Komplexere physikalische Vorgänge: z.B. Verformung von Objekten durch Einwirkung von Kraft, Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Raum,
6. Statistik: z.B. Gewinnvorhersagen anhand historischer Unternehmensdaten,
7. Kryptographie: z.B. Zur Verschlüsselung werden nicht- (oder fast nicht-) umkehrbare Abbildungen angewendet (Public-Key-Kryptographie).

Als Grundlage für das weitere Arbeiten mit mathematischen Werkzeugen und das Vertiefen hin zu komplexeren mathematischen Anwendungen bedarf es somit der Einführung grundlegender Operationen und Strukturen auf Mengen und Abbildungen.

1 Mengen und Abbildungen

Wir starten mit der grundlegenden Definition einer Menge.

Definition 1.1 Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Ein solches Objekt x heißt **Element** der Menge M , Schreibweise:

$$x \in M.$$

Ist x nicht Element von M , so schreiben wir

$$x \notin M.$$

Die Menge ohne Elemente heißt die **leere Menge**, Schreibweise:

$$\emptyset \text{ oder } \{\}.$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Darstellung von Mengen, etwa die aufzählende Schreibweise

$$M := \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

wobei $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ die Elemente von M sind. Oder die beschreibende Schreibweise, also eine Charakterisierung der Elemente. Die beschreibende Schreibweise hat allgemein die Form

$$M := \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\},$$

wobei E irgendeine „Eigenschaft“ ist. Alternativ schreibt man statt $x :$ auch $x|$.

Beispiel 1.2

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$M = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 4\}.$$

Wir setzen die Kenntnis der folgenden üblichen Zahlenmengen voraus.

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{x : x \text{ natürliche Zahl}\} \\
\mathbb{N}_0 &:= \{x : x \text{ natürliche Zahl oder } x = 0\} \\
\mathbb{Z} &:= \{x : x \text{ ganze Zahl}\} \\
\mathbb{Q} &:= \{x : x \text{ rationale Zahl}\} \\
\mathbb{R} &:= \{x : x \text{ reelle Zahl}\}.
\end{aligned}
\tag{1.1}$$

Definition 1.3 Es seien A, B Mengen.

1. A heißt **Teilmenge** von B , falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt. Schreibweise:

$$A \subset B \text{ oder auch } A \subseteq B$$

2. A und B heißen **gleich**, falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt. Schreibweise

$$A = B$$

3. Die Menge

$$B \setminus A := \{x : x \in B \text{ und } x \notin A\}$$

heißt **Differenz** von B und A . Ist $A \subset B$, so heißt

$$A^c := A^{c(B)} := B \setminus A$$

Komplement von A bezüglich B . Die Bezeichnung $A^{c(B)}$ wird jedoch nur verwendet, wenn Uneindeutigkeit bezüglich der Grundmenge B besteht.

4. Die Menge

$$B \cap A := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

heißt **Schnitt** oder **Schnittmenge** von B und A .

5. Die Menge

$$B \cup A := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

heißt **Vereinigung** von B und A .

Bemerkung 1.4 Komplemente von Mengen treten auch in folgender Form auf:

Es sei A eine Menge, dann gilt für alle $x \in A$, dass $x \notin A^c$.

Hierbei ist nicht direkt klar bezüglich welcher Menge das Komplement gebildet werden soll. Im Allgemeinen wird hier dann von einer Menge M ausgegangen, die die Eigenschaft $A \subset M$ erfüllt, sonst aber nicht weiter beschrieben ist.

Dieses Vorgehen setzt sich fort. So ist beispielsweise mit $A^c \cap B^c \cap C^c$ gemeint $A^{c(M)} \cap B^{c(M)} \cap C^{c(M)}$ für eine Menge M mit den Eigenschaften $A \subset M$, $B \subset M$ und $C \subset M$.

Bemerkung 1.5 Für Mengen M_1, M_2, \dots, M_n verwendet man die folgende Notation

$$\bigcap_{j=1}^n M_j = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

und

$$\bigcup_{j=1}^n M_j = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

für Schnitt und Vereinigung. Diese Notation kann auch auf unendlich viele Mengen erweitert werden.

Beispiel 1.6

$$\{1, 2\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 5\}$$

$$\{1, 2\} \cap \{2, 5\} = \{2\}$$

$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

Das folgende Ergebnis fasst grundlegende Rechenregeln für die oben eingeführten Mengenoperationen zusammen.

Satz 1.7 Es seien A, B, C Mengen, dann gilt:

1. $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetze)
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Assoziativgesetze)
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivgesetze)

Beweis. Wir zeigen hier nur exemplarisch $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dabei meint das Symbol \Leftrightarrow die Äquivalenz zweier Aussagen (Eine formale Einführung folgt später). Die Klammerung bedeute wie üblich, dass der Ausdruck in der Klammer zuerst ausgewertet wird.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 & x \in A \cap (B \cup C) \\
 \Leftrightarrow & \quad x \in A \text{ und } x \in (B \cup C) \\
 \Leftrightarrow & \quad x \in A \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C) \\
 \Leftrightarrow & \quad (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\
 \Leftrightarrow & \quad (x \in A \cap B) \text{ oder } (x \in A \cap C) \\
 \Leftrightarrow & \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
 \end{aligned}$$

Damit ist ein beliebiges Element x in der Menge $A \cap (B \cup C)$ enthalten genau dann, wenn es in der Menge $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ enthalten ist, wodurch die Gleichheit dieser Mengen bewiesen ist. \square

Satz 1.8 (*De Morgansche Gesetze*) Es seien A, B Mengen, dann gilt

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ und
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Für die üblichen Zahlenmengen aus (1.1) sind höherdimensionale Konstrukte der Form (x_1, x_2) , (x_1, x_2, x_3) , beispielsweise mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, möglicherweise schon bekannt. In der nächsten Definition führen wir diese sogenannten geordneten Tupel für allgemeine Mengen ein.

Definition 1.9 Es seien M_1, M_2 zwei nichtleere Mengen, dann heißt

$$M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$$

(Menge der geordneten 2-Tupel) das **kartesische Produkt** von M_1 und M_2 . Seien allgemeiner mehrere nichtleere Mengen $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ gegeben, dann heißt

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in M_j, j = 1, \dots, n\}$$

das **kartesische Produkt** der Mengen $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$.

Gilt weiter $M := M_1 = M_2 = \dots = M_n$, so schreibt man auch

$$M^n = \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n\text{-mal}}.$$

Beispiel 1.10 1. Für $\{1, 3\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (3, 3), (3, 4)\}$.

2. Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}.$$

3. Für $M = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ ist $M^2 = M \times M$ die Menge der geordneten zwei-Tupel negativer ganzer Zahlen.

4. Für $\{1, 3\} \times \{3, 4\} \times \{(\pi, \frac{1}{3})\} = \{(1, 3, (\pi, \frac{1}{3})), (1, 4, (\pi, \frac{1}{3})), (3, 3, (\pi, \frac{1}{3})), (3, 4, (\pi, \frac{1}{3}))\}$.

Ähnlich wie bei der obigen Einführung von Mengen wollen wir auf eine eher intuitive Definition des zweiten grundlegenden Begriffes der Mathematik zurückgreifen, nämlich den einer Abbildung (oder Funktion).

Dieser Begriff wird später im Zusammenhang mit Relationen noch einmal formaler definiert.

(Im Zusammenhang mit Abbildungen sind hier die Variablennamen X, Y, Z für Mengen bevorzugt)

Definition 1.11 Es seien X und Y nichtleere Mengen. Eine **Abbildung** (oder **Funktion**) f von X nach Y ist eine „Vorschrift“, die jedem $x \in X$ *genau ein* Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Dabei heißen

X der **Definitionsbereich**

und

Y der **Zielbereich**

von f .

Man schreibt

$$f : X \rightarrow Y$$

und formuliert die Vorschrift f häufig durch mathematische Formeln oder Algorithmen, an manchen Stellen aber auch durch eine wörtliche Beschreibung. Alternativ schreibt man zur Formulierung der Vorschrift auch

$$x \mapsto f(x).$$

Bemerkung 1.12 An anderer Stelle (z.B. theoretische Informatik) betrachtet man Abbildungen

$$f : X \rightarrow Y,$$

die unter Umständen nicht auf der gesamten Menge X ausgewertet werden können. In diesem Fall ist der Definitionsbereich eine Teilmenge von X , nämlich der Bereich wo die Funktion ausgewertet werden kann. Dies kann zum Beispiel dann sinnvoll sein, wenn f einen Algorithmus beschreibt, der für manche Eingabedaten nicht zum Ende kommt und daher hierfür keine definierte Ausgabe erzeugt. Eine solche Eingabe wäre dann ein Element außerhalb des Definitionsbereichs.

Definition 1.13 Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in X\} (\subset X \times Y)$$

der **Graph** der Abbildung f .

Beispiel 1.14 Es sei $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 2$, dann ist der Graph von f die folgende Menge:

$$\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}.$$

Definition 1.15 Es $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Die Abbildung heißt dann

1. **monoton fallend**, falls $\forall x, y \in X, x < y : f(x) \geq f(y)$,
2. **streng monoton fallend**, falls $\forall x, y \in X, x < y : f(x) > f(y)$,
3. **monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in X, x < y : f(x) \leq f(y)$,
4. **streng monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in X, x < y : f(x) < f(y)$.

Allgemeiner heißt f **(streng) monoton**, wenn f (streng) monoton fallend oder (streng) monoton wachsend ist.

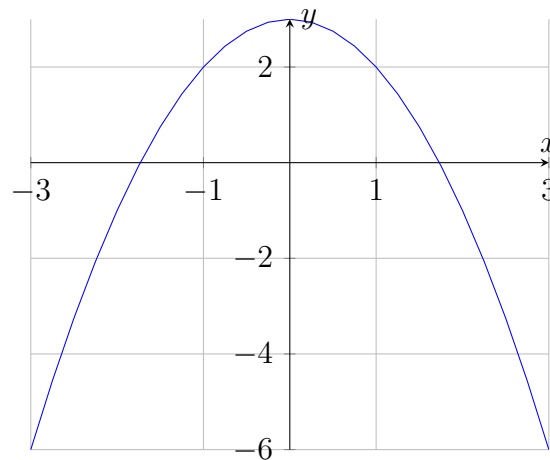


Abbildung 1: Graph der Abbildung $f(x) = -x^2 + 3$

Definition 1.16 Sind $f, g : X \rightarrow Y$ zwei Abbildungen, so heißen f und g **gleich**, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Im Weiteren verwenden wir oft die Schreibweise $(x \in X)$ anstelle von „für alle $x \in X$ “.

Beispiel 1.17 Es seien $\mathcal{L} := \{L_1, \dots, L_n\}$ eine Menge von Buslinien und $\mathcal{H} := \{H_1, \dots, H_m\}$ eine Menge von Haltestellen, wobei $n, m \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}^{10}$ ordne jeder Buslinie ein Tupel von 10 Haltestellen zu, welches der Route der Linie entspricht. Somit fährt in diesem Beispiel jede Linie genau 10 Haltestellen an.

Formal ausgedrückt:

$$f(L) = (H_{i_1}, \dots, H_{i_{10}})$$

wobei L eine Buslinie ist und i_1, \dots, i_{10} Indizes von Haltestellen sind, die zu dieser Buslinie gehören. Dies könnte konkret wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} f(L_1) &= (H_3, H_{15}, H_{22}, H_{35}, H_{41}, H_{12}, H_{48}, H_7, H_{19}, H_{50}) \\ f(L_2) &= (H_1, H_8, H_{14}, H_{27}, H_{33}, H_{40}, H_5, H_{18}, H_{26}, H_{49}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(Übung) Seien nun weiter $\mathcal{T} := \{T_1, \dots, T_k\}$ feste Zeiten, an denen Busse an den Haltestellen halten. Wie sähe formal eine Abbildung aus, die jeder Linie die Haltestellen und die entsprechenden Zeiten, an denen die Linie die jeweilige Haltestelle anfährt, zuordnet?

Definition 1.18 Sind X, Y Mengen und ist $f : X \rightarrow Y$, so heißt für $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \quad (\subset X)$$

Urbildmenge von B unter f , und für $A \subset X$

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in A\} \quad (\subset Y)$$

Bildmenge von A unter f . Speziell heißt

$$W(f) := f(X)$$

Wertebereich von f . Ist $W(f)$ einpunktig, so heißt f **konstant**.

Beispiel 1.19 Es seien $X := Y := \mathbb{N}$, und es sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 2x, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Dann gilt

$$f^{-1}(\{2, 4, 6\}) = f^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

und

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{2, 6\}.$$

Außerdem ist $W(f) = \{y \in \mathbb{N} : y \text{ gerade}\}$.

Satz 1.20 Sind $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildungen und $B_1, \dots, B_n \subset Y$. Dann gelten folgende

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right) &= \bigcap_{k=1}^n f^{-1}(B_k), \\ f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) &= \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(B_k). \end{aligned}$$

Zum Beweis der ersten Aussage beginne man mit

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{k=1}^n B_k \dots$$

und zeigt, dass dies schließlich äquivalent dazu ist, dass x in der rechten Menge enthalten ist (Übung). Die zweite Identität wird analog gezeigt.

Für die Bildmenge gilt diese sogenannte Schnitt- und Vereinigungs-Stabilität nicht!

Definition 1.21 Es seien X, Y Mengen. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt

1. **surjektiv**, falls für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ so existiert, dass $f(x) = y$ (d.h. $W(f) = Y$)
2. **injektiv**, falls gilt: sind $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, so ist $f(x_1) \neq f(x_2)$,
3. **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

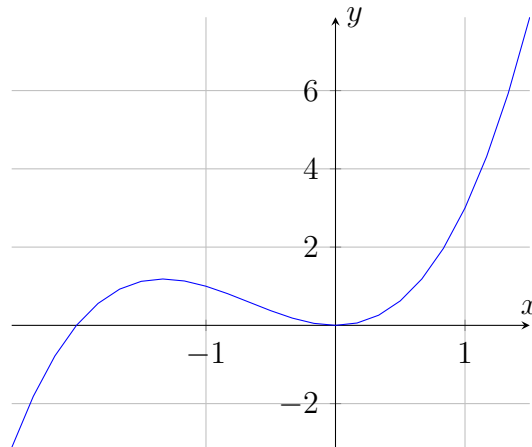


Abbildung 2: Graph der Abbildung $f(x) = x^3 + 2x^2$, f ist nicht injektiv. (Woran kann man das erkennen?)

Definition 1.22 Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$ sowie $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f : X \rightarrow Z$, definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (x \in X)$$

Komposition (oder **Hintereinanderausführung** oder **Verkettung**) von g und f .

Beispiel 1.23 Sind $X = Y = Z = \mathbb{N}$ und $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x) := x^2, \quad g(x) := x + 1 \quad (x \in \mathbb{N}),$$

so ist $g \circ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Man beachte: Hier ist auch $f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert und es gilt

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2 \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Dabei ist $g \circ f \neq f \circ g$ (da etwa $(g \circ f)(1) = 2 \neq 4 = (f \circ g)(1)$).

Satz 1.24 Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

1. Sind f, g injektiv, dann ist auch die Komposition $g \circ f : X \rightarrow Z$ injektiv.
2. Sind f, g surjektiv, dann ist auch die Komposition $g \circ f : X \rightarrow Z$ surjektiv.

Beweis. Zu 1.: Es seien $x_1, x_2 \in X$ und $x_1 \neq x_2$. Dann folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$ da f injektiv ist. Daraus folgt weiter

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$$

da g injektiv ist.

Zu 2.: Es sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist gibt es ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$, und da f surjektiv ist gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, sodass folgt

$$z = g(f(x)) = g \circ f(x).$$

□

Definition 1.25 Für eine nichtleere Menge X heißt $\text{id}_X : X \rightarrow X$, definiert durch $\text{id}(x) := \text{id}_X(x) := x$ ($x \in X$), die **identische Abbildung** auf X .

Definition 1.26 Es seien X, Y Mengen und es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Die Abbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ heißt **Umkehrabbildung** von f oder **inverse Abbildung** (bezüglich \circ) von f , falls

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \text{ und } f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

gilt.

Beispiel 1.27 Sei $f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$. Dann gilt $f^{-1} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$.

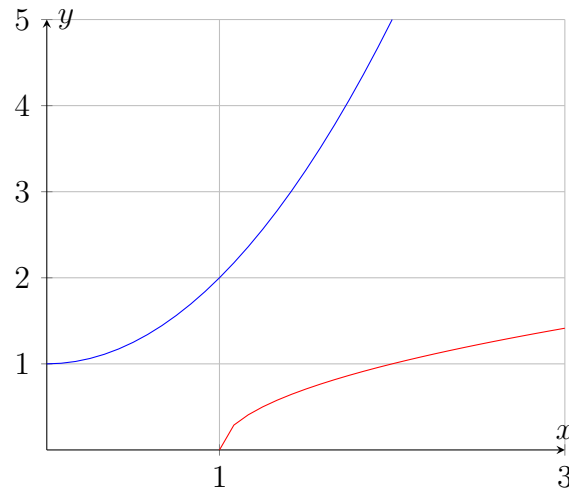


Abbildung 3: Graph der Abbildung $f(x) = x^2 + 1$ (blau), $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ (rot)

Satz 1.28 *Es seien X, Y Mengen und es sei $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Damit ergibt sich die inverse Abbildung durch*

$$f^{-1}(y) := x \quad (y \in Y),$$

wobei $y = f(x)$.

Für endliche Mengen ist es offensichtlich, dass die Anzahl der Elemente Auskunft über die „Größe“ der Menge gibt.

Für eine Menge $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) setzen wir

$$|M| := n.$$

Betrachten wir jedoch zwei Mengen mit unendlich viele Elemente, so ist nicht klar wie man allgemein die „Größe“ solcher Mengen vergleichen kann. In der Mathematik gibt es hierzu einige Zugänge, die jeweils in ihrer Hinsicht etwas über die „Größe“ aussagen. Wir werden hier nur den elementaren Begriff der Mächtigkeit einführen.

Definition 1.29 Es seien M und N zwei Mengen, dann heißen diese **gleichmächtig**, falls eine bijektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ (oder äquivalent $f : N \rightarrow M$) existiert.

1. Wenn M und $\{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig sind, dann heißt M **endliche Menge** und man sagt, dass M die **Kardinalität** n hat (gleichbedeutend $|M| = n$).
2. Wenn M und \mathbb{N} gleichmächtig sind, dann heißt M **abzählbar unendlich** oder kurz **abzählbar**.
3. Wenn M endlich oder abzählbar unendlich ist, dann sagt man auch M ist **höchstens abzählbar**.
4. Wenn M nicht höchstens abzählbar ist, dann heißt M **überabzählbar**.

Bemerkung 1.30 Mit Hilfe von Satz 1.24 folgt leicht das Folgende. Sind M_1, M_2, M_3 Mengen so, dass M_1, M_2 gleichmächtig sind und M_2, M_3 gleichmächtig sind, dann sind auch M_1, M_3 gleichmächtig.

Beispiel 1.31 Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar. Wir definieren dazu die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ wie folgt:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es gilt dann

$$\begin{array}{cc} n & f(n) \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 6 & 3 \\ & \vdots \end{array}$$

Diese Abbildung ordnet jeder natürlichen Zahl n genau eine ganze Zahl zu, und jede ganze Zahl wird von dieser Abbildung getroffen. Mit anderen Worten f ist bijektiv.

Beispiel 1.32 Es sei M die Menge aller 0,1-Folgen, formaler $M := \{a : a : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$. Dann ist M überabzählbar. Wir betrachten dazu eine beliebige Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow M$, und konstruieren eine neue 0,1-Folge b , die sich von allen Folgen $f(n)$ unterscheidet. Wir setzen dazu:

$$b(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } (f(n))(n) = 0 \\ 0, & \text{falls } (f(n))(n) = 1. \end{cases}$$

Also gilt $(f(n))(n) \neq b(n)$ und daher $b \neq f(n)$. Dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit folgt $b \notin f(\mathbb{N})$. Damit ist f nicht surjektiv. Da f beliebig war folgt, dass es keine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ geben kann.

Satz 1.33 *Es seien M_1, \dots, M_n endliche Mengen, dann gilt*

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n| = \prod_{j=1}^n |M_j|.$$

Definition 1.34 Es sei M eine Menge, dann heißt

$$\mathcal{P}(M) := 2^M := \{N : N \subset M\}$$

die **Potenzmenge** von M .

Betrachten wir $M = \{1, \dots, n\}$ und $N \subset M$, dann definiert

$$\varphi_N : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\varphi_N(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in N \\ 0 & \text{falls } x \notin N \end{cases}$$

eine eindeutige Zuordnung $N \mapsto (\varphi_N(1), \varphi_N(2), \dots, \varphi_N(n)) \in \{0, 1\}^n$. Diese Zuordnung definiert eine bijektive Abbildung

$$f : \{N : N \subset M\} \rightarrow \{0, 1\}^n, \quad N \mapsto (\varphi_N(1), \dots, \varphi_N(n)),$$

und somit gilt

$$|\{N : N \subset M\}| = |\{0, 1\}^n| = 2^n.$$

Dieser Sachverhalt für endliche Mengen ist der Grund für die Namensgebung in der nächsten Definition.

Satz 1.35 Es sei M eine Menge mit $|M| = n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^n.$$

Zum Abschluss liefern wir noch eine wichtige Definition für Teilmengen der reellen Zahlen.

Definition 1.36 Es sei $M \subset \mathbb{R}$.

Gibt es ein $y \in M$ mit $y \geq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Maximum** von M , Schreibweise:

$$y = \max M$$

Gibt es ein $y \in M$ mit $y \leq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Minimum** von M , Schreibweise:

$$y = \min M$$

Gibt es ein **kleinstes** $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Supremum** von M , Schreibweise:

$$y = \sup M$$

Gibt es ein **größtes** $y \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Infimum** von M , Schreibweise:

$$y = \inf M$$

Im Weiteren verwenden wir oft die Schreibweise $(x \in X)$ anstelle von „für alle $x \in X$ “.

Beispiel 1.37 1. $4 = \max[1, 4]$, $1 = \min[1, 4]$

2. $5 = \sup[1, 5)$, aber die Menge $[1, 5)$ hat kein Maximum.

3. $-1 = \inf(-1, 5)$, aber die Menge $(-1, 5)$ hat kein Minimum.

4. $\sqrt{2} = \inf([\sqrt{2}, 9] \cap \mathbb{Q})$, aber die Menge $[\sqrt{2}, 9] \cap \mathbb{Q}$ hat kein Minimum.

Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen:

Ist $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, dann existiert $\sup M \in \mathbb{R}$.

Übung: Warum gilt das Vollständigkeitsaxiom in \mathbb{Q} nicht?

2 Aussagenlogik

In diesem kurzen Kapitel werden wir (u. a. mit Hilfe der Begriffe aus dem ersten Kapitel) die Grundlagen der sogenannten Aussagenlogik einführen.

Einige Beispiele von Aussagen:

a 7 ist kleiner als 10

b 7 ist kleiner als 4

c Mein Auto ist kaputt.

d Ich fahre mit dem Bus.

e Heute räume ich auf.

Die Aussagenlogik bietet einen formalen Rahmen, um mit solchen Aussagen mathematisch zu arbeiten. Anwendungen der Aussagenlogik finden sich zum Beispiel in der Analyse von Hardware und Software.

Vorab sei bemerkt, dass die Aussagenlogik keine semantische Bedeutung der Aussagen berücksichtigt. Aussagen werden als Variablen (oder sogenannte Atome) betrachtet und gemäß der im Folgenden eingeführten Regeln verwendet.

In der Aussagenlogik stellt man sich auf den Standpunkt, dass gewisse Aussagen, hier mit

$$A, B, C, \dots$$

bezeichnet, vorliegen, die entweder *wahr* oder *falsch* sein können. Es handelt sich aus formaler Sicht um sogenannte **Aussagenvariablen**, die Werte in der Menge

$$\{\text{wahr}, \text{falsch}\}$$

annehmen. Diese Menge werden wir der Kürze halber mit

$$\{w, f\}$$

identifizieren, also

$$w \text{ steht für } \textit{wahr}$$

und

f steht für *falsch*.

Die Aussagenlogik gibt erstmal keine Auskunft über die Gültigkeit elementarer Aussagen, sondern betrachte diese als eine Variable, die entweder wahr oder falsch ist. Vielmehr dient sie als formales Werkzeug allgemeine Aussagen nach gewissen Gesetzen miteinander zu verknüpfen. Dabei werden die folgenden Operation verwendet.

Definition 2.1 Für Aussagen A, B bezeichnet

$$A \wedge B$$

die **Konjunktion** oder „**und**“-Verknüpfung, die durch folgende Wahrheitstabelle (oder Wahrheitstafel) definiert ist

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
f	w	f
w	f	f
f	f	f

Definition 2.2 Für Aussagen A, B bezeichnet

$$A \vee B$$

die **Disjunktion** oder „**oder**“ -Verknüpfung, die durch folgende Wahrheitstabelle definiert ist

A	B	$A \vee B$
w	w	w
f	w	w
w	f	w
f	f	f

Definition 2.3 Für eine Aussage A bezeichnet

$$\neg A$$

die **Negation** von A , also „**nicht**“ A , welche durch folgende Wahrheitstabelle definiert ist

A	$\neg A$
w	f
f	w

Die oben definierten Verknüpfungen lassen sich auch sehr einfach als Abbildungen ausdrücken, was zeigt, dass der im ersten Abschnitt eingeführte generische Kontext von Mengen und Abbildungen auch Grundlage für die Aussagenlogik ist. Zum Beispiel ist die Konjunktion mathematisch nichts anderes als eine Abbildung

$$\varphi_{\wedge} : \{w, f\} \times \{w, f\} \rightarrow \{w, f\}$$

mit

$$\varphi_{\wedge}(A, B) := \begin{cases} w, & \text{falls } A = w \text{ und } B = w \\ f, & \text{ansonsten} \end{cases}.$$

Definition 2.4 Für Aussagen A, B bezeichnet

$$A \Rightarrow B$$

die **Implikation** oder „**wenn - dann**“ -Verknüpfung, die durch folgende Wahrheitstabelle definiert ist

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
f	w	w
w	f	f
f	f	w

Diese Verknüpfung ist auch in einfacher Weise durch eine Wahrheitstabelle definiert. Die Namensgebung kann jedoch zu Verwirrungen führen, da der Sprachgebrauch bei Implikation eine Art kausalen Zusammenhang unterstellt. Dies ist hier aber formal nicht wichtig, die Implikation ist eine Verknüpfung, die durch die obige Definition festgelegt ist.

Definition 2.5 Für Aussagen A, B bezeichnet

$$A \Leftrightarrow B$$

die **Äquivalenz** oder „**genau dann, wenn**“-Verknüpfung, die durch folgende Wahrheitstabelle definiert ist

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
f	w	f
w	f	f
f	f	w

Die oben eingeführten logischen Operationen werden auch *Junktoren* genannt. In der Literatur, die sich vornehmlich auf Logik konzentriert, werden häufig die Symbole \rightarrow und \leftrightarrow anstelle von \Rightarrow und \Leftrightarrow verwendet. Jedoch sind letztere Symbole bereits für den Kontext der Abbildungen reserviert.

Durch Komposition dieser Verknüpfungen kann man nun komplexere Ausdrücke zusammenbauen. Hierbei setzt man folgende Konventionen:

\wedge und \vee werden vor \Rightarrow , \Leftrightarrow angewendet,

\neg wird vor \wedge und \vee angewendet,

Ausdrücke in $()$ -Klammern werden vor allen anderen ausgewertet.

Somit lassen sich für Aussagen A, B, C zum Beispiel (analog zu Termen wie $2 \cdot x + 3 + y$) Ausdrücke wie

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= \neg(A \wedge B) \Rightarrow C \\ F(A, B) &= \neg(A \wedge B) \vee B \\ F(A, B) &= \neg A \Leftrightarrow B \end{aligned} \tag{2.2}$$

erstellen.

Ausdrücke, die aus Aussagenvariablen und den oben eingeführten Verknüpfungen erzeugt werden, wie zum Beispiel in (2.2), werden als *Aussageformeln* bezeichnet. Eine solche Aussageformel ist selbst wieder eine Aussage und kann als Teil weiterer Aussageformeln verwendet werden.

Formaler heißt das:

Definition 2.6 Eine Abbildung $F : \{w, f\}^n \rightarrow \{w, f\}$, deren Abbildungsvorschrift sich als Ausdruck logischer Operatoren (Junktoren) darstellen lässt, heißt **Aussageformel**.

Zusammenfassung der logischen Operationen:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	f	w	w
f	w	f	w	w	w	f
w	f	f	w	f	f	f
f	f	f	f	w	w	w

Definition 2.7 Zwei Aussageformeln F_1, F_2 heißen **gleichwertig**, wenn für alle möglichen Besetzung von Wahrheitswerten in F_1, F_2 die Aussage

$$F_1 \Leftrightarrow F_2$$

immer wahr ist.

Der folgende Satz führt grundlegende gleichwertige Aussageformeln auf.

Satz 2.8 *Es seien A, B, C Aussagen (Aussagenvariablen), dann gelten (das heißt die Äquivalenzen sind stets wahr)*

1. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ und $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ (Kommutativgesetze)
2. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ und $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (Assoziativgesetze)
3. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ und $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributivgesetze)
4. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ und $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (De Morgansche Gesetze)

Diese letzten Regeln entsprechend den Aussagen aus Satz 1.7 und Satz 1.8 für Mengenoperationen, hierbei entsprechen sich \cap und \wedge , \cup und \vee , sowie „Komplement“ und \neg .

Beweis. Wir zeigen hier nur das De Morgansche Gesetz $F_1(A, B) := \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B =: F_2(A, B)$ mithilfe einer Wahrheitstabelle:

A	B	$A \wedge B$	F_1	$\neg A$	$\neg B$	F_2	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

□

Beispiel 2.9 Wir nehmen an wir haben die Aufgabe einen digitalen Schaltkreis für eine einfache Türsteuerung zu implementieren. Die Tür soll sich öffnen, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: Ein Schalter ist aktiviert und ein bestimmter Zugangscode wurde eingegeben.

Um dieses Problem mit Hilfe der Aussagenlogik zu modellieren, können wir die folgenden Aussagen einführen:

- S : Der Schalter ist aktiviert.
- C : Der Zugangscode wurde eingegeben.

- O : Die Tür wird geöffnet.

Die Bedingungen für das Öffnen der Tür können dann in Form von Aussagenlogik ausgedrückt werden:

- Die Tür wird geöffnet, wenn sowohl der Schalter aktiviert ist als auch der Zugangscode eingegeben wurde. Dies wird durch die Aussage $(S \wedge C)$ repräsentiert. Die Logik lässt sich jedoch **nicht** wie folgt zusammenfassen

$$(S \wedge C) \implies O.$$

Übung: Warum nicht? Wie lautet die korrekte Aussageformel?

Beweisprinzipien

Mit Hilfe der Aussagenlogik können typische Prinzipien beim Beweisen mathematischer Sätze aus formaler Perspektive beschrieben werden.

Direkter Beweis

Wir nehmen an, ein mathematischer Satz behauptet die Gültigkeit einer Implikation $B \Rightarrow C$, wobei B und C zwei Aussagen sind. B könnte beispielsweise die Voraussetzungen des Satzes enthalten. Im Sinne der Aussagenlogik bedeutet das, dass $(B \Rightarrow C)$ wahr ist.

Um die Gültigkeit dieser Implikation zu beweisen, genügt es, den Fall zu betrachten, in dem B wahr ist. Denn ansonsten ist die Implikation immer wahr. Wir fordern also $B = \text{wahr}$ und leiten daraus eine neue Aussage A_1 her, die aus B folgt, also $(B \Rightarrow A_1)$ im Sinne der Aussagenlogik wahr ist. Eine solche Implikation muss dabei mathematisch direkt einsehbar sein (was dabei als *direkt einsehbar* gilt, ist natürlich eine Frage der Interpretation und hängt insbesondere von der Expertise der Leser des Beweises ab). Auf diese Weise fahren wir fort, bis wir schließlich zu einer Aussage A_n gelangen, von der wir nachvollziehbar behaupten können, dass $(A_n \Rightarrow C)$ wahr ist.

Am Ende haben wir dann gezeigt, dass die folgenden Implikationen wahr sind:

$$B \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow C.$$

Es sei nochmals erwähnt, dass dabei die Richtigkeit jeder einzelnen Implikation jeweils direkt einsehbar sein muss.

Hierzu das folgende Beispiel:

Satz: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist n gerade, dann ist auch n^2 gerade.

In der Sprache der Aussagenlogik bedeutet das:

$$B := (n \text{ ist gerade}) \Rightarrow (n^2 \text{ ist gerade}) =: C.$$

Beweis. Es gilt:

$$B \Rightarrow (\text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 2k = n) =: A_1.$$

Damit ist $n^2 = 4k^2$, und daher gilt

$$n^2/2 = 2k^2.$$

Das heißt aber

$$A_1 \Rightarrow (n^2/2 \in \mathbb{N}) =: A_2.$$

Per Definition gilt weiter:

$$A_2 \Rightarrow C.$$

□

Das folgende Beispiel zeigt einen direkten Beweis zu Satz 1.24 (1)), der hier nochmal kurz formuliert wird:

Satz: (Sind $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ injektiv) \Rightarrow ($g \circ f : X \rightarrow Z$ ist injektiv).

In dem Oberen heißt das dann:

$$B = (f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z \text{ sind injektiv}),$$

und

$$C = (g \circ f : X \rightarrow Z \text{ ist injektiv}).$$

Der Satz besagt damit kurz: $B \Rightarrow C$ ist wahr.

Beweis. Sei B wahr, dann sind folgende Implikationen wahr:

$$B \Rightarrow A'_1 := (\text{für } x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \text{ beliebig gilt } f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$B \Rightarrow A''_1 := (\text{für } y_1, y_2 \in Y y_1 \neq y_2 \text{ beliebig gilt } g(y_1) \neq g(y_2))$$

und somit ist Folgendes wahr:

$$B \Rightarrow A_1 := (A'_1 \wedge A''_1).$$

Weiter gilt damit, dass folgende Implikation wahr ist:

$$A_1 \Rightarrow A_2 := (\text{für } x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \text{ beliebig, gilt } g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)).$$

Nach Definition ist $A_2 \Leftrightarrow C$ wahr, also insbesondere

$$(A_2 \Rightarrow C) = \text{wahr}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$B \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow C$$

wahr ist. □

Äquivalenzbeweis

Wir nehmen an ein mathematischer Satz behaupte die Gültigkeit einer Äquivalenz $B \Leftrightarrow C$ (B, C zwei Aussagen).

Der Äquivalenzbeweis ist eine Variante des direkten Beweises. Es werden entweder die Implikationen $B \Rightarrow C$ und $C \Rightarrow B$ analog zum Obigen separat bewiesen. Oder man leitet direkt äquivalente Aussagen her so, dass am Ende gilt

$$B \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_n \Leftrightarrow C$$

ist wahr. Dabei muss die Gültigkeit jeder einzelnen Äquivalenz jeweils direkt einsehbar sein.

Beweis durch Widerspruch

Wir nehmen an ein mathematischer Satz behaupte die Gültigkeit einer Aussage A .

A könnte beispielsweise wie oben eine Implikation sein $A = (B \Rightarrow D)$ sein.

Beim Beweis durch Widerspruch nimmt man an, dass $\neg A$ wahr ist und leitet dann, wie im direkten Beweis, neue Aussagen daraus ab, so dass man schließlich bei einer Aussage C landet, die sicher falsch ist:

$$\neg A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow C.$$

Dabei muss die Gültigkeit jeder einzelnen Implikation jeweils direkt einsehbar sein. Da C sicher falsch ist, kann $\neg A$ nicht wahr sein, denn ansonsten wäre ja die (als wahr erkannte) Implikation $\neg A \Rightarrow C$ falsch. Man erhält somit den Widerspruch zur Annahme ($\neg A = \text{wahr}$). Es muss also $A = \text{wahr}$ gelten.

Hierzu das folgende Beispiel:

Satz: Es gibt keine größte Primzahl.

Hier ist

$$A = (\text{es gibt keine größte Primzahl}),$$

und

$$\neg A = (\text{es gibt eine größte Primzahl})$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $\neg A = \text{wahr}$ gilt. Sei p diese größte Primzahl und seien weiter $1 < p_1 < p_2 < \dots < p_n = p$ alle Primzahlen. Dann ist $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ eine Primzahl (dies könnte man genau genommen wiederum detailliert beweisen. Wir betrachten das hier als mathematisch direkt einsehbar). Wenn also $\neg A = \text{wahr}$ gilt,

folgt

$$C = (q \leq p) = \text{wahr}.$$

Da aber sicher gilt $C = \text{falsch}$, haben wir den Widerspruch erzeugt, und es muss somit $\neg A = \text{falsch}$ gelten. \square

Beweis durch Kontraposition

Beweisen durch Kontraposition beruht auf der folgenden Äquivalenz

$$(B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg B \Leftarrow \neg C). \quad (2.3)$$

Wie beim direkten Beweis nehmen wir an ein mathematischer Satz behaupte die Gültigkeit einer Implikation $B \Rightarrow C$ (B, C zwei Aussagen). Man beweist aber stattdessen die Gültigkeit von $\neg B \Leftarrow \neg C$. Dazu geht man wie beim direkten Beweis vor. Man leitet also Implikationen

$$\neg C \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow \neg B$$

her. Dabei muss die Gültigkeit jeder einzelnen Implikation jeweils direkt mathematisch einsehbar sein. Damit gilt dann im Sinne der Aussagenlogik

$$(\neg B \Leftarrow \neg C) = \text{wahr},$$

und mit der obigen Äquivalenz (2.3) ist damit auch $B \Rightarrow C$ wahr.

Hierzu als Beispiel die umgekehrte Implikation des ersten Beispiels zum direkten Beweis:

Satz: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

In der Sprache der Aussagenlogik heißt das

$$B := (n^2 \text{ ist gerade}) \Rightarrow (n \text{ ist gerade}) =: C.$$

Beweis. Es gilt

$$\neg C \Rightarrow (\text{es gibt ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 2k + 1 = n) =: A_1$$

Damit ist $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ und daher

$$n^2/2 = 2k^2 + 2k + 1/2,$$

und damit gilt

$$A_1 \Rightarrow (n^2/2 \notin \mathbb{N}) =: A_2.$$

Per Definition gilt weiter

$$A_2 \Rightarrow \neg B.$$

□

3 Relationen

Definition 3.1 Es seien M_1, M_2 nichtleere Mengen und $R \subset M_1 \times M_2$, dann heißt R **Relation** oder auch **binäre Relation**. Für Elemente $(x, y) \in R$ schreibt man auch

$$xRy.$$

Gilt dabei $M_1 = M_2$, so wird R auch **homogene Relation** genannt.

Der Begriff Relation wird an anderer Stelle auch allgemeiner, über den binären Fall hinausgehend, eingeführt. Für unsere Zwecke ist die obige Definition jedoch ausreichend.

Beispiel 3.2 Es sei M eine der Zahlenmengen aus (1.1) und

$$R_{<} := \{(x, y) \in M \times M : x < y\},$$

dann ist $R_{<}$ eine Relation. Dies ist die sogenannte **Ordnungsrelation**, die wir nachher in einem allgemeineren Rahmen definieren.

Nachfolgend werden nun einige grundlegende Eigenschaften von Relationen definiert:

Definition 3.3 Es seien M_1, M_2 nichtleere Mengen und $R \subset M_1 \times M_2$ eine Relation. Dann heißt R

1. **linkstotal** wenn gilt: $\forall x \in M_1 \exists y \in M_2 : (x, y) \in R$
2. **rechtstotal** wenn gilt: $\forall y \in M_2 \exists x \in M_1 : (x, y) \in R$
3. **rechtseindeutig** wenn gilt: $\forall x \in M_1$ und $\forall y, z \in M_2$ gilt $(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \Rightarrow y = z$
4. **linkseindeutig** wenn gilt: $\forall y \in M_2$ und $\forall x, z \in M_1$ gilt $(x, y) \in R \wedge (z, y) \in R \Rightarrow x = z$

Wir können nun den Begriff der **Abbildung** aus Definition 1.11 etwas allgemeiner auf Basis der Relationen definieren:

Definition 3.4 Es seien X und Y nichtleere Mengen und $R_f \subset X \times Y$ eine linkstotale und rechtseindeutige Relation. Dann heißt die Zuordnung

$$f(x) = y :\Leftrightarrow (x, y) \in R_f$$

Abbildung (Funktion) von X nach Y , Notation $f : X \rightarrow Y$. Die Menge R_f heißt **Graph** von f .

Es ergeben sich hieraus folgende Fragen (Übungen)

- Wie würden auf Grundlage von Definition 3.4, der Wertebereich, Urbild und Bildmenge definiert werden?
- Wie würde man mit Hilfe der Begriffe in Definition 3.3 die Injektivität oder Surjektivität einer Abbildung definieren?

Bemerkung 3.5 In einigen Teilgebieten der Informatik und Mathematik, insbesondere im Bereich der *Berechenbarkeitstheorie*, werden partiell definierte Funktionen untersucht. Diese können als rechtseindeutige Relationen charakterisiert werden, die nicht notwendigerweise *linkstotal* im Sinne von Definition 3.4 sein müssen. Die Betrachtung partiell definierter Funktionen ist von zentraler Bedeutung, da es Algorithmen gibt, die für bestimmte Eingaben nicht terminieren und somit kein Ergebnis liefern. In solchen Fällen existiert für einige Eingabewerte, d.h., die linke Komponente im Tupel der Relation, kein korrespondierender Ausgabewert, also keine rechte Komponente im Tupel.

Für homogene Relationen definieren wir das Folgende:

Definition 3.6 Es sei R eine (homogene) Relation auf einer Menge M . Dann heißt R

1. **reflexiv**, wenn für alle $x \in M$ gilt: $(x, x) \in R$,
2. **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$,
3. **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$,
4. **irreflexiv**, wenn für alle $x \in M$ gilt: $(x, x) \notin R$,
5. **konnex**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x \neq y \Rightarrow (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$
6. **antisymmetrisch** (oder identitiv), wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$,
7. **asymmetrisch** wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$,
8. **total** wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$,
9. **trichotom**, wenn für alle $x, y \in M$ genau eine der folgenden Aussagen gilt: $(x, y) \in R$, $(y, x) \in R$. $x = y$.

Satz 3.7 Es sei R eine (homogene) Relation auf der Menge M . Dann gilt folgendes:

1. R ist asymmetrisch $\Leftrightarrow R$ ist antisymmetrisch und irreflexiv,
2. R ist trichotom $\Leftrightarrow R$ ist asymmetrisch und konnex,
3. R ist total $\Leftrightarrow R$ ist konnex und reflexiv,
4. falls zusätzlich $R \neq \emptyset$: R ist symmetrisch $\Rightarrow R$ ist nicht asymmetrisch,
5. falls zusätzlich $R \neq \emptyset$: R ist asymmetrisch $\Rightarrow R$ ist nicht symmetrisch,
6. falls zusätzlich $M \neq \emptyset$: R ist reflexiv $\Rightarrow R$ ist nicht irreflexiv,
7. falls zusätzlich $M \neq \emptyset$: R ist irreflexiv $\Rightarrow R$ ist nicht reflexiv.

An dieser Stelle führen wir mit Hilfe der oben definierten Begriffe nur zwei spezielle Arten von Relationen ein:

Definition 3.8 Es sei $M \neq \emptyset$ und R eine Relation auf M .

1. Dann heißt R eine **schwache Totalordnung**, wenn sie antisymmetrisch, transitiv, total und reflexiv ist.
2. Dann heißt R eine **starke Totalordnung**, wenn sie trichotom und transitiv ist.

Weitere Kombinationen der Eigenschaften aus Definition 3.6 führen zu weiteren „Arten“ von Relationen. Allen mit *Ordnung* im Namen ist dabei gemein, dass sie transitiv sind.

Wir kommen nun zu einer weiteren wichtigen Relation.

Definition 3.9 Es sei M eine Menge. Eine **Äquivalenzrelation** auf M ist eine Relation $R \subset M \times M$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Die Idee der Äquivalenzrelation, wie sich bereits in der Namensgebung andeutet, ist es eine irgendwie geartete Äquivalenz zwischen Elementen einer Menge zu definieren.

Beispiel 3.10 Es sei P die Menge aller Computerprogramme, welche Eingaben einer festen Eingabemenge verarbeiten können und dazu eine Ausgabe in einer festen Ausgabemenge liefern. Es sei weiter $R \subset P \times P$ eine Relation definiert durch funktionale Äquivalenz: Zwei Programme p und q sind funktional äquivalent, wenn sie bei gleicher Eingabe immer die selbe Ausgabe liefern. Also $(p, q) \in R$ genau dann, wenn p, q funktional Äquivalent sind. Übung: Verifizieren Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Ein wichtiger Vertreter einer Äquivalenzrelation ist die Folgende.

Bemerkung und Definition 3.11 Es sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann heißt

$$R_m := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x - y \text{ ist ohne Rest durch } m \text{ teilbar}\}$$

die **Kongruenz-Relation modulo** m . Wie sich relativ einfach zeigen lässt, ist R_m eine Äquivalenzrelation. Man schreibt für $(x, y) \in R_m$

$$x \equiv y \pmod{m},$$

und sagt x ist **kongruent** y **modulo** m .

Zu einem gegebenen $x \in \mathbb{Z}$ ist

$$\{y \in \mathbb{Z} : (x, y) \in R_m\} = \{y \in \mathbb{Z} : y = x + k m, k \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.4)$$

Man kann also hier durch Festsetzung eines Elements x mit Hilfe der Äquivalenzrelation die gesamte Menge auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung ausdrücken. Diese Idee lässt sich auf allgemeine Äquivalenzrelationen erweitern und rechtfertigt den folgenden Begriff:

Definition 3.12 Es sei M eine nichtleere Menge und R ein Äquivalenzrelation auf M . Für ein $x \in M$ setzen wir

$$[x]_R := \{y \in M : (x, y) \in R\}.$$

Die Menge $[x]_R$ wird **Äquivalenzklasse** von x genannt. Für die Äquivalenzklassen bezüglich die Kongruenz-Relation modulo m , R_m ($m \in \mathbb{Z}$) aus Definition 3.11 schreiben wir der Kürze halber auch

$$[x]_m := [x]_{R_m}.$$

Satz 3.13 Es sei M eine nichtleere Menge und R ein Äquivalenzrelation auf M . Dann gilt für zwei Äquivalenzklassen $[x]_R, [y]_R$

$$\text{entweder } [x]_R = [y]_R \text{ oder } [x]_R \cap [y]_R = \emptyset.$$

Beweis: Siehe Übung.

4 Algebraische Strukturen

Indem wir Addition und Multiplikation anwenden, bedienen wir uns bereits seit unserer Schulzeit bestimmter algebraischer Strukturen auf den gewöhnlichen Zahlenmengen (1.1). Hierbei fällt auf, dass die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} beispielsweise nicht ausreicht, um eine Gleichung wie

$$2 \cdot x = 1$$

zu lösen. Stattdessen benötigen wir eine reichhaltigere Menge wie \mathbb{Q} . Andererseits genügen die ganzen Zahlen für Gleichungen wie

$$2 + x = 0$$

was wiederum auf den natürlichen Zahlen nicht möglich ist. Allerdings lassen sich algebraische Operationen auch weit über die üblichen Zahlenmengen hinaus verallgemeinern. Ein Beispiel hierfür wäre das Addieren zweier Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

In der Mathematik strebt man stets danach, solche Strukturen in einem möglichst allgemeinen und natürlichen Rahmen zu definieren. Ergebnisse und Zusammenhänge, die in einem solchen generellen Kontext hergeleitet werden, lassen sich somit auf eine Vielzahl konkreter Anwendungsfälle übertragen. In diesem Kapitel werden wir solche grundlegenden Strukturen einführen und ihre ersten Eigenschaften herleiten.

Wir beginnen mit einer zentralen Struktur auf Mengen, die uns ein wichtiges Anwendungsbeispiel für allgemeinere algebraische Strukturen liefern wird.

Gruppen

Algebraische Strukturen werden typischerweise mittels sogenannter Verknüpfungen definiert.

Es sei M eine Menge, dann nennen wir eine Abbildung der Form

$$* : M \times M \rightarrow M$$

auch **Verknüpfung**, und anstelle von $*(x, y)$ schreiben wir dann $x * y$.

Man denke bei einer solchen Verknüpfung zum Beispiel an die Addition $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ oder die Multiplikation $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$. Der obige Begriff der Verknüpfung wird an anderer Stelle auch allgemeiner verwendet.

Definition 4.1 Es sei G eine Menge und $*: G \times G \rightarrow G$ eine Verknüpfung auf G . Dann heißt $(G, *)$ **Gruppe**, wenn gilt:

1. Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$ (Assoziativgesetz).
2. Es existiert ein **neutrales Element** $e \in G$ mit $e * x = x$ für alle $x \in G$.
3. Zu jedem $x \in G$ gibt es ein **inverses Element** $x^{-1} \in G$ mit $x^{-1} * x = e$.

Weiter heißt $(G, *)$ **abelsche Gruppe** oder **kommutative Gruppe**, wenn zusätzlich gilt:

4. $x * y = y * x$ für alle $x, y \in G$.

Beispiel 4.2 1. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

3. $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}_0, +)$ sind keine Gruppen.

Satz 4.3 Es sei $(G, *)$ eine Gruppe, dann gilt:

1. Für jedes $x \in G$ gilt $x * x^{-1} = x^{-1} * x$.
2. Es gibt genau ein neutrales Element e und es gilt

$$e * x = x * e = x$$

für alle $x \in G$.

3. Für jedes $x \in G$ gibt es genau ein inverses Element x^{-1} und es gilt

$$x = (x^{-1})^{-1}.$$

Beweis. Im folgenden werden ausschließlich die Axiome in Definition 4.1 und die jeweils bereits bewiesenen Punkte angewendet. Zu (1):

$$\begin{aligned} e &= (x^{-1})^{-1} * x^{-1} = (x^{-1})^{-1} * e * x^{-1} = (x^{-1})^{-1} * (x^{-1} * x) * x^{-1} \\ &= ((x^{-1})^{-1} * x^{-1}) * x * x^{-1} = e * x * x^{-1} = x * x^{-1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Zu (2): Es gilt mit $e = x * x^{-1}$

$$e * x = (x * x^{-1}) * x = x * (x^{-1} * x) = x * e.$$

Sei nun \tilde{e} ebenfalls ein neutrales Element, d.h. es gilt $\tilde{e} * x = x \forall x \in G$. Dann gilt

$$\tilde{e} = \tilde{e} * e = e.$$

Zu (3): Zu einem beliebigen $x \in G$ sei $b \in G$ mit $b * x = e$. Dann gilt

$$b = b * e = b * (x * x^{-1}) = (b * x) * x^{-1} = e * x^{-1} = x^{-1}$$

womit die Eindeutigkeit von x^{-1} gezeigt ist. Da nach (1) gilt $e = x * x^{-1}$, muss wegen der gerade gezeigten Eindeutigkeit des Inversen $x = (x^{-1})^{-1}$ gelten.

□

Folgerung 4.4 Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann gilt:

1. für alle $x, y \in G$ gilt $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
2. die Gruppe ist genau dann kommutativ, wenn für alle $x, y \in G$ gilt $x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$.

Beweis: Übung.

Definition 4.5 Eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

heißt **Permutation** (von $\{1, \dots, n\}$). Weiter setzen wir

$$S_n := \{\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} : \sigma \text{ ist bijektiv}\},$$

die Menge aller Permutationen (von $\{1, \dots, n\}$).

Für $\sigma \in S_n$ hat sich die folgende definierende Schreibweise etabliert:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Satz 4.6 Mit \circ , der Komposition von Abbildungen, ist (S_n, \circ) eine Gruppe.

Ringe und Körper

Auf einer Gruppe hat man nur eine Verknüpfung. Es sind jedoch auf vielen Fällen in natürlicher Weise zwei Verknüpfungen geben (zum Beispiel Addition und Multiplikation), die miteinander in Beziehung stehen. Eine wichtige algebraische Struktur, die diesen Fall berücksichtigt, wird in der folgenden Definition eingeführt.

Definition 4.7 Es sei R eine Menge und $\oplus : R \times R \rightarrow R$ und $\odot : R \times R \rightarrow R$ zwei Verknüpfungen. Dann ist (R, \oplus, \odot) ein **Ring**, wenn gilt:

1. (R, \oplus) ist eine abelsche Gruppe.
2. Für alle $x, y, z \in R$ gilt $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$ (Assoziativität).
3. Für alle $x, y, z \in R$ gelten $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$ und $(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$ (Distributivgesetze).

Weiter heißt (R, \oplus, \odot) **kommutativer Ring**, wenn zusätzlich gilt

4. $x \odot y = y \odot x$ für alle $x, y \in R$.

Ein wichtiges Beispiel eines Rings ist auf den Äquivalenzklassen der in (3.11) eingeführten Kongruenz-Relation definiert.

Bemerkung und Definition 4.8 Es sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und R_m die Kongruenz-Relation modulo m (vgl. 3.11). Dann heißt

$$\mathbb{Z}_m := \{[x]_m : x \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge der **Restklassen** modulo m . Nach (3.4) ist

$$[x]_m := \{y \in \mathbb{Z} : y = x + k m, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Auf \mathbb{Z}_m definieren wir zwei Verknüpfungen wie folgt. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sei die Addition der zugehörigen Äquivalenzklassen definiert durch

$$[x]_m + [y]_m = [x + y]_m$$

und die Multiplikation sei definiert durch

$$[x]_m \cdot [y]_m = [x \cdot y]_m.$$

Damit ist $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ein Ring und \mathbb{Z}_m wird als **Restklassenring** modulo m bezeichnet.

Wir führen nun die Struktur des Körpers ein, eine Struktur, die algebraisch das leistet was man von reellen oder rationalen Zahlen gewohnt ist.

Definition 4.9 Es sei K eine Menge mit mindestens zwei Elementen und $\oplus : K \times K \rightarrow K$ und $\odot : K \times K \rightarrow K$ zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation). Dann ist (K, \oplus, \odot) ein **Körper**, wenn gilt:

1. (K, \oplus) ist eine abelsche Gruppe. Dabei sei das neutrale Element bezüglich \oplus mit 0 bezeichnet und für ein $x \in K$ sei das inverse Element (bezüglich \oplus) mit $-x$ bezeichnet.
2. Es gelten
 - $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ für alle $x, y, z \in K$,
 - es gibt ein neutrales Element $1 \in K \setminus \{0\}$ bezüglich \odot ^a,
 - zu jedem $x \in K \setminus \{0\}$ existiert ein $x^{-1} \in K$ so, dass $x^{-1} \odot x = 1$ ^b,
 - für alle $x, y \in K$ ist $x \odot y = y \odot x$
3. Für alle $x, y, z \in K$ gelten $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$ und $(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$ (Distributivgesetze).

^a1 ist hier ein Symbol (und nicht notwendigerweise die numerische Eins).

^b„hoch -1 “ ist eine symbolische Schreibweise

Beispiel 4.10 1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

3. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

Ringstrukturen treten häufig im Fall von Mengen von Abbildungen auf. Hierbei kann häufig keine Körperstruktur definiert werden da inverse Element bezüglich einer Multiplikation nicht existieren. Allgemein ist ein Ring häufig nicht zu einem Körper erweiterbar, weil es nicht möglich ist zu *teilen*. Dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 4.11 Es sei $X := \{f \text{ ist Abbildung : } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ mit der (punktweisen) Addition

$$+ : X \times X \rightarrow X, (f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in [0, 1]$$

und der (punktweisen) Multiplikation

$$\cdot : X \times X \rightarrow X, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in [0, 1].$$

Damit ist $(X, +, \cdot)$ ein Ring mit neutralem Element bezüglich $+$ gegeben durch

$$f_0(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_0(x) = 0$$

und neutralem Element bezüglich \cdot gegeben durch

$$f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 1.$$

Man sieht jedoch leicht, dass $(X, +, \cdot)$ kein Körper ist, weil zum Beispiel jede Funktion, die eine Nullstelle hat ($x \in [0, 1]$ mit $f(x) = 0$) kein inverses Element besitzt. Denn dies wäre ja eine Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x)g(x) = 1$ für alle $x \in [0, 1]$, was aber an der Nullstellen nicht möglich ist.

Bemerkung 4.12 Allgemein können wir an dieser Stelle folgendes definieren. Seien X, Y Mengen und

$$f, g : X \rightarrow Y$$

Abbildungen sowie $*$ eine Verknüpfung auf Y . Dann ist die **punktweise Verknüpfung** $f * g : X \rightarrow Y$ definiert durch

$$f * g(x) := f(x) * g(x), \quad \forall x \in X.$$

Man beachte, dass diese Definition etwa die Verknüpfungen der Abbildungen in Beispiel 4.11 einschließt.

Satz 4.13 *Es sei (K, \oplus, \odot) ein Körper. Dann gelten:*

1. *Für alle $x \in K$ ist $x \odot 0 = 0$*
2. *Für alle $x, y \in K$ mit $x \odot y = 0$ folgt $x = 0$ oder $y = 0$*
3. *Für alle $x, y \in K$ gilt $-(x \odot y) = -x \odot y = x \odot (-y)$*

Beweis. Zu 1. : Es gilt

$$x \odot 0 = x \odot (0 + 0) = (x \odot 0) + (x \odot 0)$$

und somit

$$0 = (x \odot 0) - (x \odot 0) = (x \odot 0) + (x \odot 0) - (x \odot 0) = (x \odot 0).$$

Zu 2. : Gilt $y = 0$ so sind wir fertig. Für den Falle $y \neq 0$ gilt mit 1.:

$$x = x \odot e = x \odot (y \odot y^{-1}) = 0 \odot y^{-1} = 0.$$

Zu 3. : Übung. □

Folgerung 4.14 Nach Satz 4.13 (2) besagt Definition 4.9 (2)', dass $(K \setminus \{0\}, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Bevor das nächste Ergebnis formuliert werden kann, müssen wir kurz den Begriff der Primzahl definieren.

Definition 4.15 Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt **Primzahl** wenn das Folgende gilt: Für $m \in \mathbb{N}$ ist $p \cdot m^{-1}$ ist eine natürliche Zahl genau dann, wenn $m = 1$ oder $m = p$. Die Menge der Primzahlen sei mit \mathbb{P} bezeichnet.

Satz 4.16 Für $m \in \mathbb{N}$ ist der Restklassenring \mathbb{Z}_m (Definition 3.11) ein Körper, genau dann, wenn m eine Primzahl ist.

Die Körper \mathbb{Z}_p (p eine Primzahl) sind zentrale Vertreter der sogenannten endlichen Körper.

Beweisskizze Der wesentliche Punkt ist hierbei die Existenz inverser Element bzgl. der Multiplikation.

Gilt $m \notin \mathbb{P}$, so gibt es natürliche Zahlen $m > p, q > 1$ mit $pq = m$. Damit folgt

$$[p]_m \cdot [q]_m = [m]_m = [0]_m.$$

Wäre nun \mathbb{Z}_m ein Körper, so würde nach Satz 4.13 2. gelten, dass $[p]_m = 0$ oder $[q]_m = 0$. Dies kann aber wegen $m > p, q > 0$ nicht sein.

Gilt $m \in \mathbb{P}$, so gilt für jedes $k \in \{1, \dots, m-1\}$

$$\text{ggT}(k, m) = 1$$

(ggT meint größter gemeinsamer Teiler). Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus (vgl. Anhang) folgt die Existenz von $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$l_1 m + l_2 k = 1.$$

Also gilt

$$[1]_m = [l_1 m]_m + [l_2 k]_m = [0]_m + [l_2]_m [k]_m = [l_2]_m [k]_m,$$

sodass $[l_2]_m$ multiplikative Inverses zu $[k]_m$ ist. Die übrigen Körpereigenschaften folgen nun leicht.

Beispiel 4.17 Bei der Übertragung/Speicherung binärer Codes kann es aus unterschiedlichen Gründen zu Übertragungsfehlern kommen. Eines der ersten Verfahren zur Vermeidung von Fehlern bei der Übertragung solcher Codes geht auf Richard W. Hamming (1950) zurück, und ist daher unter dem Namen **Hamming-Code** bekannt. Angenommen, wir haben eine Nachricht, die wir als Binärcode der Länge vier übertragen möchten, etwa 1101, dann lässt sich die (7,4)-Hamming Codierung wie folgt darstellen

$$H_{7,4} : \mathbb{Z}_2^4 \rightarrow \mathbb{Z}_2^7,$$

$$H((s_1, s_2, s_3, s_4)) := \begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 & [0]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 & [0]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 & [1]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 & [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 & [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}$$

Dabei ist das Matrix-Vektor-Produkt wie in Lineare Algebra¹ definiert, wobei die Addition und Multiplikation bezüglich des Körpers $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ zu verstehen sind.

Die genauere Funktionsweise solcher Code-Korrekturverfahren wird in späteren Modulen eingehend besprochen.

Der Vollständigkeit zum Beweis von Satz 4.16 halber wird nachfolgend der erweiterte Euklidische Algorithmus formuliert:

¹Diejenigen, die die Veranstaltung LA noch nicht besucht haben, werden dieses Beispiel später nachvollziehen können.

Homomorphismen

Im Verlauf dieser Vorlesung wurde bereits mehrfach auf die zentrale Bedeutung des Konzepts der Abbildung eingegangen. In diesem kurzen Unterabschnitt wollen wir nun die „natürlichen“ Abbildungen auf den oben definierten algebraischen Strukturen einführen. Der Begriff „natürlich“ bedeutet dabei, dass die Abbildungen die Struktur des Raums erhalten.

Definition 4.18 1. Es seien $(G, *)$ und (H, \odot) zwei Gruppen und

$$\varphi : G \rightarrow H$$

eine Abbildung, so dass

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \odot \varphi(y) \text{ für alle } x, y \in G \text{ gilt.}$$

Dann ist φ ein **(Gruppen-)Homomorphismus**.

2. Es seien $(R, \oplus, *)$ und (S, \times, \odot) zwei Ringe und

$$\varphi : R \rightarrow S$$

eine Abbildung, so dass

$$\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) \times \varphi(y), \varphi(x * y) = \varphi(x) \odot \varphi(y), \text{ für alle } x, y \in R \text{ gilt.}$$

Dann ist φ ein **(Ring-)Homomorphismus**.

3. Es seien $(K, \oplus, *)$ und (L, \times, \odot) zwei Körper und

$$\varphi : K \rightarrow L$$

eine Abbildung, so dass

$$\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) \times \varphi(y), \varphi(x * y) = \varphi(x) \odot \varphi(y), \text{ für alle } x, y \in K.$$

Dann ist φ ein **(Körper-)Homomorphismus**.

Ein bijektiver Homomorphismus heißt **Isomorphismus**.

Satz 4.19 *Es seien $(G, *)$ und (H, \odot) zwei Gruppen und*

$$\varphi : G \rightarrow H$$

ein Homomorphismus. Sei 0 jeweils das neutrale Element auf G und H , und zu $a \in G$ oder $a \in H$ sei $-a$ jeweils das inverse Element. Dann gilt

1. $\varphi(0) = 0$
2. $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ für alle $a \in G$.

5 Beweisen mit vollständiger Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, mit dem sich Gleichungen, Ungleichungen oder allgemeine Sätze beweisen lassen, die von einem n abhängen.

Zum Einstieg betrachten wir Folgendes: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt die

$$\sum_{\nu=1}^n \nu = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{Gaußsche Summenformel.} \quad (5.6)$$

Für $n = 1$ oder $n = 2$ überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit dieser Gleichung. Die Idee der Induktion ist es, nun wie folgt zu schließen:

$$\begin{aligned} &\text{Angenommen, es gilt für ein } n \in \mathbb{N} : \sum_{\nu=1}^n \nu = \frac{n(n+1)}{2}, \\ &\text{dann folgt: } \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Gelingt es, dies zu zeigen, dann folgt mit der Verifikation von (5.6) für $n = 1$ durch sukzessives Anwenden der oberen Implikation, dass (5.6) allgemein für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Diese Idee lässt sich nun in ein allgemeines Beweisverfahren überführen, das als *vollständige Induktion*, oder kurz *Induktion*, bekannt ist.

Ziel ist es, die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle $n \in J = \{n_0, n_1, n_2, \dots\} \subset \mathbb{N}_0$ zu zeigen.

Vollständige Induktion

Induktionsanfang: Man zeigt die Gültigkeit von $A(n_0)$.

Induktionsannahme: Man nimmt an, dass $A(n_k)$ für ein allgemeines $n_k \in J$ gilt.

Induktionsschritt, $n_k \rightarrow n_{k+1}$: Man zeigt, dass unter der Induktionsannahme für n_k (also $A(n_k)$ gilt), folgt, dass auch $A(n_{k+1})$ gilt.

Aus Induktionsanfang und Induktionsschritt folgt dann, dass $A(n_k)$ für alle k gilt. Mit anderen Worten, die folgenden Implikationen sind als wahr erkannt:

$$A(n_0) \implies A(n_1) \implies \dots \implies A(n_k),$$

und weil $A(n_0)$ wahr ist (Induktionsanfang), muss dann auch $A(n_k)$ für jedes k wahr sein.

Da der Induktionsanfang meist trivial ist und die Induktionsannahme ein Formalismus ist, steckt die „Arbeit“ im Induktionsschritt.

Im Folgenden werden nun einige wichtige Summenformeln und Ungleichungen eingeführt. Die zugehörigen Beweise werden dabei mittels vollständiger Induktion geführt.

Bemerkung 5.1 Wie wir später noch sehen werden, ist es sinnvoll für $x \in \mathbb{R}$ das Folgende zu setzen:

$$x^0 := 1.$$

Satz 5.2 (*Geometrische Summenformel*) Es sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\sum_{\nu=0}^n q^\nu = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist

$$\sum_{\nu=0}^0 q^\nu = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}.$$

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^n q^\nu = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$: Unter der Induktionsannahme gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} q^\nu = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{(q^{n+1} - 1) + q^{n+1}(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

□

Satz 5.3 (*Bernoullische Ungleichung*) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Beweis.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist

$$(1 + a)^1 \geq 1 + a.$$

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

Induktionsschritt: Unter der Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n (1 + a) \geq (1 + na) (1 + a) \\ &= 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a \end{aligned}$$

□

Bevor wir die nächsten Ergebnisse formulieren können muss noch Folgendes eingeführt werden.

Definition 5.4 Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man n -**Fakultät** durch

$$n! := \prod_{\nu=1}^n \nu .$$

und

$$0! := 1.$$

Beispiel 5.5 Es gilt also etwa $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Definition 5.6 Für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{\nu} = \begin{cases} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu}, & \text{falls } \nu \leq n \\ 0, & \text{falls } \nu > n \end{cases} .$$

Beispiel 5.7 Es gilt also

$$\binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} = 21 .$$

In einem kombinatorischen Experiment, bei dem Stichproben aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln gezogen werden, entspricht

$$\binom{n}{\nu}$$

der Anzahl von Möglichkeiten **ungeordnete Stichproben** bestehend aus ν Kugeln zu ziehen.

Dabei bedeutet **ungeordnet**, dass beispielsweise die Ziehungen 1,8,4 und 8,4,1 als gleich betrachtet werden. Hingegen wird bei **geordneten Stichproben** die Reihenfolge der Ziehung berücksichtigt, sodass 1,8,4 und 8,4,1 als unterschiedliche Ziehungen betrachtet werden.

Die folgende Tabelle fasst die Anzahl der möglichen Ziehungen von ν Kugeln aus n nummerierten Kugeln in unterschiedlichen Urnenexperimenten zusammen.

mit Zurücklegen	geordnet	Anzahl Möglichkeiten
ja	ja	n^ν
nein	ja	$\frac{n!}{(n-\nu)!}$
ja	nein	$\binom{n+\nu-1}{\nu}$
nein	nein	$\binom{n}{\nu}$

Wir stellen einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten zusammen.

Ordnet man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\nu}$ in einem dreieckigen Schema an, wobei in der n -ten Zeile die Koeffizienten $\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{n}$ stehen, so entsteht das sogenannte *Pascalsche Dreieck*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \\
 & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{\nu-1} & \binom{n}{\nu} & \dots & \binom{n}{n} \\
 & & & & \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{\nu} & \dots & \binom{n+1}{n+1}
 \end{array}$$

Die ersten Zeilen berechnen sich nach Definition 5.6 zu

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & 1 & & 1 \\
& & & 1 & & 2 & & 1 \\
& & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
& 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Im Pascalschen Dreieck erkennt man leicht folgende Identität für $n > \nu > 0$:

$$\boxed{\binom{n}{\nu} = \binom{n-1}{\nu} + \binom{n-1}{\nu-1}} \quad (5.7)$$

Der Beweis dazu dient als Übung. Wir beweisen damit nun folgendes Resultat.

Satz 5.8 (*binomischer Satz*) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}.$$

Beweis.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $(a + b)^0 = 1 = \sum_{\nu=0}^0 \binom{0}{\nu} a^\nu b^{0-\nu}$.

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$.

Induktionsschritt: Unter der Induktionsannahme gilt durch Anwendung von Satz

5.8

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^{\nu+1} b^{n-\nu} + \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu+1} \\
&= \sum_{\mu=1}^{n+1} \binom{n}{\mu-1} a^\mu b^{n+1-\mu} + \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n+1-\nu} \\
&= a^{n+1} + \sum_{\nu=1}^n \binom{n+1}{\nu} a^\nu b^{n+1-\nu} + b^{n+1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} a^\nu b^{n+1-\nu} .
\end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung dann auch für $n+1$. □

Beispiel 5.9 Für $n=6$ gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^6 &= \sum_{\nu=0}^6 \binom{6}{\nu} a^\nu b^{6-\nu} \\
&= 1 \cdot b^6 + 6 \cdot ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + 1 \cdot a^6 .
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.10 Als Spezialfälle aus dem binomischen Satz ergeben sich interessante Beziehungen für das Pascalsche Dreieck: Für $a=1, b=1$ ergibt sich

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} 1^\nu 1^{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} ,$$

d. h. die Summe der Binomialkoeffizienten in der n -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ergibt stets 2^n . Für $a=-1, b=1$ ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$0 = 0^n = ((-1)+1)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu ,$$

d. h. versieht man die Binomialkoeffizienten in der n -ten Zeile jeweils abwechselnd mit dem Vorzeichen $+$ und $-$, so erhält man als Summe 0. Für $n=6$ gilt etwa

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

und

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0 .$$

6 Komplexe Zahlen

Wir haben oben gesehen, dass das Lösen der Gleichung

$$4 \cdot x = 1$$

einer Erweiterung der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ zum Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bedurfte. Weiter bedurfte das Lösen der Gleichung

$$x^2 = 2$$

einer Erweiterung von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ nach $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

In diesem Abschnitt wollen wir $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ in einer Weise erweitern, dass die Gleichung

$$x^2 = -1 \tag{6.8}$$

lösbar ist. Dies führt zum Körper der **komplexen Zahlen**. Dazu definieren wir das Folgende:

Definition 6.1 Die **imaginäre Einheit** i ist definiert als die Lösung der Gleichung (6.8), d.h. es gilt

$$i^2 = -1.$$

Eine **komplexe Zahl** ist ein Element (x, iy) mit $x, y \in \mathbb{R}$, und wir setzen dafür $(x, iy) =: x + iy$. Für $z := x + iy$ heißen:

1. $\operatorname{Re}(z) := x$ der **Realteil** von z ,
2. $\operatorname{Im}(z) := y$ der **Imaginärteil** von z .

Wir setzten

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

die Menge der komplexen Zahlen.

Wie zu Beginn des Abschnitts bemerkt, wollen wir auf \mathbb{C} die algebraische Struktur eines Körpers definieren, und benötigen daher entsprechende algebraische Operationen $+$ und \cdot .

Definition 6.2 Für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ aus \mathbb{C} definieren wir

1. $z + w := x + u + i(y + v)$ **Addition,**
2. $zw := z \cdot w := xu + i(xv + uy) - vy$ **Multiplikation.**

Damit gilt:

Satz 6.3 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Ring mit neutralem Element $0 + i0$ bezüglich der Addition $+$, und $1 + i0$ als neutralem Element bezüglich der Multiplikation \cdot .

Der Kürze halber schreiben wir auch

$$x + i0 = x, \quad 0 + iy = iy, \quad 0 + i0 = 0.$$

Die Erweiterung zum Körper ergibt sich nun dadurch, dass man für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein inverses Element bezüglich der Multiplikation finden kann:

Satz und Definition 6.4 Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und

$$z^{-1} := \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

dann gilt

$$z \cdot z^{-1} = 1.$$

Somit ist z^{-1} das inverse Element von z bezüglich \cdot . Damit ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} zz^{-1} &= (x + iy) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{-xy}{x^2 + y^2} - \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Dass damit nun weiter sämtliche Körperaxiome erfüllt sind kann leicht nachgerechnet werden (Übung). \square

Für $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ schreiben wir auch

$$z w^{-1} = z \frac{1}{w} = \frac{z}{w}.$$

Da $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist, und weiterhin die Konvention *Punkt- vor Strichrechnung* gilt, können die Regeln der Bruchrechnung unmittelbar auf das Rechnen mit komplexen Zahlen übertragen werden. Damit können wir mit den komplexen Zahlen rechnen wie in \mathbb{R} gewohnt und es gelten beispielsweise:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \frac{1}{w} &= \frac{z+w}{zw} & (z, w \neq 0), \\ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{w} &= \frac{1}{zw} & (z, w \neq 0), \\ \frac{z+w}{w} &= \frac{z}{w} + 1 & (w \neq 0) \\ \frac{1}{\frac{1}{w}} &= w & (w \neq 0) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Definition 6.5 Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl.

1. Die komplexe Zahl $\bar{z} := x - iy$ heißt zu z **konjugiert komplex**.
2. Die Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$ heißt **Betrag** von z .

Bemerkung 6.6 Für $z, w \in \mathbb{C}$ ergebe sich leicht (Übung)

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{(\bar{z})} = z,$$

sowie

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Für den Betrag gelten folgende Rechenregeln:

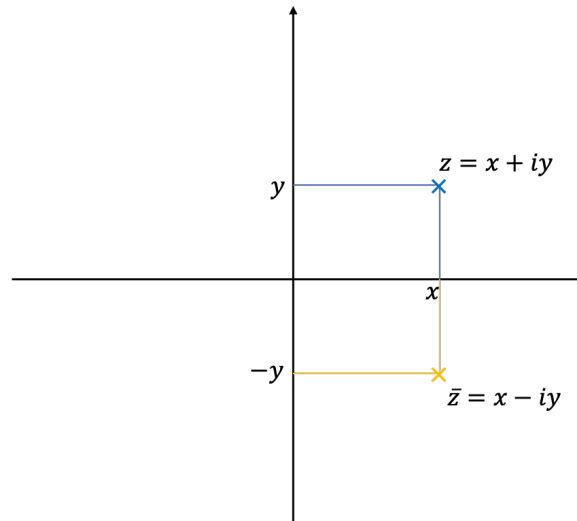


Abbildung 4: Gaußsche Zahlenebene (oder komplexe Ebene)

Satz 6.7 Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

1. $|z| \geq 0$, und dabei ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist,
2. $|z| = |\bar{z}|$, $|z| = |-z|$, $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$,
3. $|z|^2 = z\bar{z}$ und $1/z = \bar{z}/|z|^2$, falls $z \neq 0$,
4. $|zw| = |z||w|$ und $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$,
5. (Dreiecksungleichung) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$.

Beweis. 1., 2. und 3. dienen als Übung.

Zu 4. Es gilt nach 3.

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2.$$

Durch Wurzelziehen folgt die erste Behauptung. Weiter gilt

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Zu 5. Nach 2. und 4. ist

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung für $z + w$. Damit erhält man dann auch

$$|z - w| \leq |z| + |-w| = |z| + |w|.$$

□

Beispiel 6.8 Für $z = 3 - i$ gilt

$$|z| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}, \quad \bar{z} = 3 - i(-1) = 3 + i$$

und

$$z\bar{z} = (3 - i)(3 + i) = 9 + 1 (= |z|^2).$$

Wir kommen nun zu einem zentralen Ergebnis der Mathematik. Wie zu Beginn des Abschnitts erwähnt, haben die bisherigen Erweiterungen von \mathbb{Z} über \mathbb{Q} nach \mathbb{R} und schließlich nach \mathbb{C} uns ermöglicht Gleichungen der Form

$$4 \cdot x = 1, \quad x^2 = 2, \quad x^2 = -1$$

zu lösen. Wir werden nun sehen, dass die komplexen Zahlen ein natürliches Ende dieser Erweiterungen darstellt, denn hierin sind sämtliche (Linear-)Kombinationen solcher Gleichungen stets lösbar.

Dazu zunächst folgende Definition

Definition 6.9 Eine **Polynomfunktion** (oder kurz **Polynom**) ist eine Funktion $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^d a_{\nu} z^{\nu}$$

mit $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$. Ist $a_d \neq 0$, so heißt $\deg(P) := d$ der **Grad** von P , und a_0, \dots, a_d sind die **Koeffizienten** von P . Ein $z \in \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von P , falls $P(z) = 0$ gilt.

In der oberen Skizze sehen wir, dass das Polynom $P(x) = x^2 - 1$ genau zwei Nullstellen an ± 1 hat, und somit die Gleichung

$$0 = x^2 - 1$$

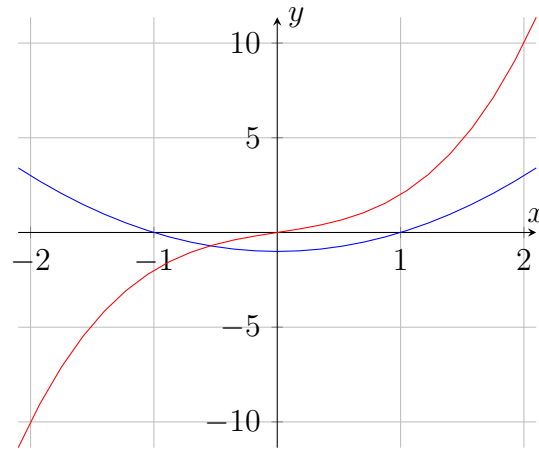


Abbildung 5: Graphen der Polynome $P(x) = x^2 - 1$ (blau), und $P(x) = x^3 + x$ (rot), jeweils als Funktion der reellen Zahlen.

genau zwei Lösungen in \mathbb{R} hat. Hingegen hat das Polynom $P(x) = x^3 + x$ nur eine reelle Nullstelle an 0 und damit hat

$$0 = x^3 + x$$

nur eine reelle Lösung. Beachtet man jedoch, dass

$$P(x) = x^3 + x = x(x - i)(x + i)$$

gilt, so sieht man, dass die letzte Gleichung an $\pm i$ noch zwei weitere Lösungen in \mathbb{C} hat. Diese Beobachtung lässt sich weitreichend verallgemeinern:

Satz 6.10 (*Fundamentalsatz der Algebra und Faktorisierungssatz*) *Es sei*

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^d a_{\nu} z^{\nu}$$

ein Polynom vom Grad $d > 0$. Dann existieren $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ und zugehörige $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$P(z) = a_d(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (z - z_k)^{\alpha_k}$$

gilt. Dabei gilt $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = d$.

Definition 6.11 Die $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ in Satz 6.10 heißen **Vielfachheiten** der Nullstellen z_1, z_2, \dots, z_k .

Beispiel 6.12 Es sei $P(z) = z^2 - c$ mit $c \geq 0$ fest. Dann gilt $P(z) = (z - \sqrt{c})(z + \sqrt{c})$. Somit sind für $c > 0$, \sqrt{c} und $-\sqrt{c}$ zwei Nullstellen mit jeweils Vielfachheit 1, welche für $c \rightarrow 0$ zu einer Nullstelle der Vielfachheit 2 werden.

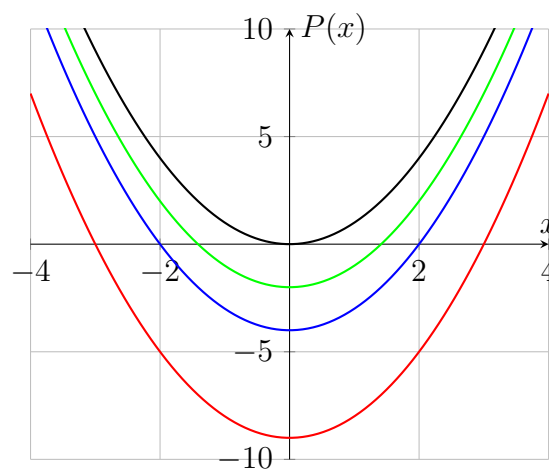


Abbildung 6: Graphen zu $P(z) = z^2 - c$ als Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $c = 9, 4, 2, 0$ (rot, blau, grün, schwarz)

Beispiel 6.13 1. Das Polynom $P(z) = z^2 + 9 = (z + i3)(z - i3)$ hat einfache Nullstellen an $3i$ und $-3i$

2. Das Polynom $P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$ hat nur eine einfache reelle Nullstelle an $z = -1$. Nach dem dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 6.10) muss P noch zwei weitere Nullstellen (inklusive Vielfachheit) haben. Es gilt

$$P(z) = (z + 1)(z + 2i)(z - 2i),$$

woran man erkennt, dass P die beiden komplexen Nullstellen an $z = 2i$ und $z = -2i$ hat.

3. Das Polynom $P(z) = z^3 + iz^2 + 4z + i4 = (z+i)(z-2i)(z+2i)$ hat ausschließlich komplexe Nullstellen an $z = -i$, $z = i$ und $z = -i$.

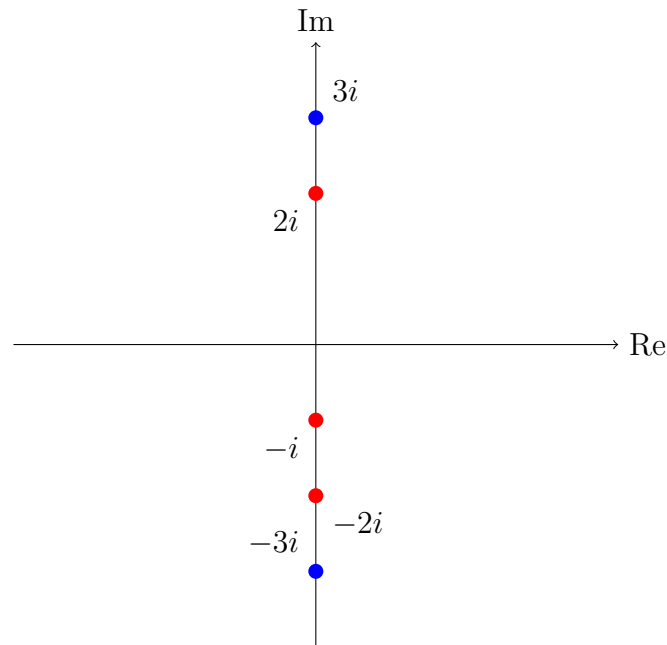


Abbildung 7: Nullstellen der Polynome aus Beispiel 6.13, (blau) $P(z) = z^2 + 9 = (z + i3)(z - i3)$, (rot) $P(z) = z^3 + iz^2 + 4z + i4 = (z+i)(z-2i)(z+2i)$

In dem oberen Beispiel beobachtet man, dass die Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizient stets symmetrisch bezüglich der reellen Achse in \mathbb{C} liegen. Dies gilt auch im Allgemeinen:

Satz 6.14 *Es sei*

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^d a_{\nu} z^{\nu}$$

ein Polynom mit $a_{\nu} \in \mathbb{R}$ für $\nu = 0, \dots, d$. Dann gilt $P(z) = 0$ genau dann, wenn $P(\bar{z}) = 0$ gilt.

Beweis. Durch mehrfache Anwendung von Bemerkung 6.6 und wegen $\overline{a_{\nu}} = a_{\nu}$ $\nu =$

$0, \dots, d$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 0 &= P(z) \\
 \Leftrightarrow 0 &= \overline{P(z)} \\
 \Leftrightarrow 0 &= \overline{\sum_{\nu=0}^d a_{\nu} z^{\nu}} \\
 \Leftrightarrow 0 &= \sum_{\nu=0}^d \overline{a_{\nu} z^{\nu}} \\
 \Leftrightarrow 0 &= \sum_{\nu=0}^d \overline{a_{\nu}} \overline{z^{\nu}} \\
 \Leftrightarrow 0 &= \sum_{\nu=0}^d a_{\nu} \bar{z}^{\nu} \\
 \Leftrightarrow 0 &= P(\bar{z})
 \end{aligned}$$

□

7 Folgen und Reihen

Folgen und deren Grenzwerte sind für uns aus folgenden Gründen essenziell:

1. Viele Verfahren und Algorithmen erzeugen Folgen (von Ausgaben), und der Grenzwert der Folge ist in diesen Fällen typischerweise das angestrebte Ergebnis.
2. Mittels Folgen werden wir Grenzwerte für allgemeine Abbildungen definieren, auf Basis derer die gesamte Differential- und Integralrechnung (in einer und mehrerer Veränderlichen) beruhen. Diese wiederum sind wesentliche und unverzichtbare Werkzeuge der Physik, Optimierung, maschinelles Lernen/KI und vielen weiteren Bereichen.

Konvergenz und Grenzwerte von Folgen

Definition 7.1 Sei $N \subset \mathbb{N}_0$ abzählbar unendlich, so nennen wir eine Abbildung

$$a : N \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ (oder } \mathbb{C}^d \text{)}$$

eine **Folge**. Für die Auswertung der Folge schreibt man typischerweise

$$a_n := a(n) \quad (n \in N)$$

und die a_n heißen dann **Folgeglieder** und N heißt **Indexmenge**. Anstatt a schreiben wir :

$$(a_n)_{n \in N} := a \text{ oder kurz } (a_n) := (a_n)_{n \in N}.$$

Ist $J \subset N$ abzählbar unendlich, dann heißt

$$(a_n)_{n \in J}$$

eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n \in N}$.

Beispiel 7.2 1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n}$$

2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n^2$$

3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n + i^n.$$

4. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \begin{pmatrix} 1/n \\ (1 + 1/n)^n \end{pmatrix}$$

Bemerkung 7.3 Folgen sind nach dem Obigen spezielle Abbildungen (oder Funktionen) mit einem abzählbar unendlichen Definitionsbereich in \mathbb{N}_0 . Somit sind alle diesbezüglichen bisherigen Definitionen und Resultate hierauf anwendbar.

Da wir an dieser Stelle mit Elementen in \mathbb{R}^d (oder \mathbb{C}^d) arbeiten, definieren wir an dieser Stelle kurz die darauf üblichen algebraischen Operation solcher Elemente (vgl. lineare Algebra).

Definition 7.4 Für $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$ in \mathbb{R}^d (oder \mathbb{C}^d) und $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder in \mathbb{C}) ist

1. $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$,
2. $x \pm y = (x_1 \pm y_1, \dots, x_d \pm y_d)$,
3. und

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2}$$

die Euklidische Norm (kurz Norm) von x .

Bemerkung 7.5 Es seien $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$ in \mathbb{R}^d (oder \mathbb{C}^d) .

1. $\|x - y\|$ ist der **euklidische Abstand** zwischen x, y und stimmt für $d = 1, 2, 3$ mit dem überein, was man anschaulich mit Abstand meint.
2. Für $d = 1$ ist $\|x\| = |x|$.
3. $\|x\| \geq 0$ wobei nur für $0 = x_1 = x_2 = \dots = x_d$ gilt $\|x\| = 0$.

4. $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Definition 7.6 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt $c \in \mathbb{R}^d$ (oder $c \in \mathbb{C}^d$) **Grenzwert** von (a_n) , wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, n \in \mathbb{N} : \|c - a_n\| < \varepsilon.$$

(*Textuell:* Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon$ gilt $\|a_n - c\| < \varepsilon$). Wir schreiben

$$a_n \rightarrow c \ (n \rightarrow \infty) \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

und sagen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **strebt** gegen c . Existiert ein solches c , dann heißt die Folge **konvergent**. Gilt dabei $c = 0$, so heißt die Folge auch **Nullfolge**.

Bemerkung 7.7 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} . Wir sagen (a_n) strebt gegen $+\infty$ ($-\infty$), falls

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n_m \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_m, n \in \mathbb{N} : a_n > m \ (a_n < -m).$$

(*Textuell:* Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_m$ gilt $a_n > m$ ($a_n < -m$)).

Wir schreiben dafür:

$$a_n \rightarrow \pm\infty \ (n \rightarrow \infty) \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty.$$

Folgen, die gegen $+\infty$ oder $-\infty$ streben gelten jedoch **nicht als konvergent** in \mathbb{R} . Das liegt daran, dass $+\infty$, $-\infty$ keine Elemente der reellen Zahlen sind.

Satz 7.8 Es sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R}^d (\mathbb{C}^d) und für jedes n sei $a_n = (a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(d)})$. Dann gilt für $c = (c^{(1)}, \dots, c^{(d)})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

genau dann, wenn

$$\forall j = 1, \dots, d : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(j)} = c^{(j)}.$$

Wir reduzieren uns im Folgenden meist auf den Falls $d = 1$. Wegen dem oberen Ergebnis können die zugehörigen Resultate und Definitionen problemlos auf den Fall $d > 1$ ausgedehnt werden.

Die Analyse der Konvergenz und Grenzwerte von Folgen erfolgt in vielen Fällen durch die Untersuchung einzelner Subterme. Betrachtet wir beispielsweise

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2},$$

dann sieht man unmittelbar, dass die drei Summanden rechts jeweils gegen 1, 0 und 0 konvergieren, und man sieht daher ein, dass a_n gegen 1 strebt. Wie wir nun zeigen werden, ist eine solche Argumentation auch allgemeiner Möglich,.

Dazu definieren wir zunächst für eine beliebige Menge $X \subset \mathbb{R}$ (oder $X \subset \mathbb{C}$) und Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}), $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) die **punktweise Addition**

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in X),$$

und die **punktweise Multiplikation**

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in X).$$

Falls g nullstellenfrei ist (also $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$), dann ist die Funktion $1/g : X \rightarrow \mathbb{R}$ argumentweise durch

$$(1/g)(x) := 1/g(x) \quad (x \in X)$$

definiert, und damit auch $f/g := f \cdot (1/g)$ für $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}).

Der folgende Satz zeigt, dass Grenzwertbildung mit den algebraischen Operationen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} verträglich ist.

Satz 7.9 *Es seien $(a_n)_{n \in N}$, $(b_n)_{n \in N}$ Folgen mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

Dann gilt

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c + g.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = c \cdot g.$
3. *Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in N$ und ist $c \neq 0$, so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n/a_n) = g/c.$*

Beweis. Teil (1.) dient als Übung. Wir beweisen nur (2.). (3.) folgt dann in analoger Weise. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ muss gezeigt werden, dass $|a_n b_n - cg| < \varepsilon$ wenn n genügend groß ist. Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $M > 0$ sodass $|a_n| < M$ für alle n gilt (Übung). Wir nehmen zunächst $g \neq 0$ an. Da $a_n \rightarrow c$ und $b_n \rightarrow g$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, gibt es $n_a \in \mathbb{N}$ und $n_b \in \mathbb{N}$ so dass

$$n \geq n_a \Rightarrow |a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2|g|}$$

und

$$n \geq n_b \Rightarrow |b_n - g| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Für $n \geq n_\varepsilon := \max\{n_a, n_b\}$ erhalten wir somit durch Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |a_n b_n - cg| &= |a_n b_n - a_n g + a_n g - cg| \\ &\leq |a_n| |b_n - g| + |g| |a_n - c| \\ &\leq M |b_n - g| + |g| |a_n - c| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Falls $g = 0$ gilt, verschwindet jeweils der rechte Summand in der zweiten und dritten Zeile in der oberen Gleichung, und somit folgt die Behauptung auch für diesen Fall. \square

Beispiel 7.10 1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n^k}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n + 2$$

Satz 7.11 Für eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{C}$$

genau dann, wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z).$$

Satz 7.12 (*Hauptsatz über monotone Folgen*) Jede monotone und beschränkte^a Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} ist konvergent.

^ad.h. $\forall n : |a_n| \leq M$ für eine Schranke $M > 0$

Man kann damit nun Folgende zeigen:

Satz 7.13 (**Satz von Bolzano-Weierstraß für Folgen**) Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Definition 7.14 Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N, |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Satz 7.15 **Cauchy-Konvergenzkriterium:** Eine Folge (a_n) konvergiert in \mathbb{R} genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis.

Notwendigkeit: Angenommen, (a_n) konvergiert gegen $c \in \mathbb{R}$. Sei zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ nun $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - c| < \epsilon/2$ für alle $n \geq n_\epsilon$. Daraus folgt, dass $|a_m - a_n| \leq |a_m - c| + |c - a_n| < \epsilon$ für alle $m, n \geq n_\epsilon$. Dies zeigt, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Hinreichend: Jede Cauchy-Folge in \mathbb{R} ist beschränkt und besitzt somit nach Bolzano-Weierstraß, vgl. Satz 7.13, eine konvergente Teilfolge. Sei (a_{n_k}) eine solche Teilfolge, und gelte $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = c$. Es sei weiter $\epsilon > 0$ beliebig, und dazu $n_{\epsilon/2} \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$n, n_k \geq n_{\epsilon/2} : \Rightarrow |a_n - a_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |a_{n_k} - c| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Damit gilt dann sofort für alle $n \geq n_{\epsilon/2}$ (mit beliebigem $n_k \geq n_{\epsilon/2}$):

$$|a_n - c| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - c| < \epsilon.$$

□

Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

Mit Hilfe des Grenzwerts für Folgen lässt sich der Grenzwert für allgemeine Abbildung definieren.

Definition 7.16 Es sei $X \subset \mathbb{R}$ (oder $\subset \mathbb{C}$) und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : X \rightarrow \mathbb{C}$) sowie $z \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$).

1. Existiert ein $c \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) so, dass für **jede** Folge (x_n) in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ und $x_n \neq z$, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c,$$

so heißt c **Grenzwert** von f an der Stelle z und wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow z} f(x) = c.$$

2. Gilt in (1) außerdem $z \in X$ und $f(z) = c$, dann heißt f **stetig** an der Stelle z .

Bemerkung 7.17 1. In Definition 7.16 (1) ist die Existenz einer Folge (x_n) mit $x_n \in X$ für alle Folgenglieder vorausgesetzt. Existiert eine solche Folge nicht, so kann es an der fraglichen Stelle auch keinen Grenzwert geben.

2. Falls in Definition 7.16 (2) keine Folge (x_n) mit $x_n \in X$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ existiert, dann heißt f dennoch stetig an z . In diesem Fall ist z ein sogenannter **isolierter Punkt** von X .

3. In Definition 7.16 heißt f **stetig auf der Menge** $M \subset X$, falls f stetig an jeder Stelle $a \in M$ ist. Ist $M = X$, so heißt f kurz **stetig**.

Satz 7.18 Es sei $X \subset \mathbb{R}$ (oder $\subset \mathbb{C}$) und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f stetig an $x \in X$ genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : y \in X, |y - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

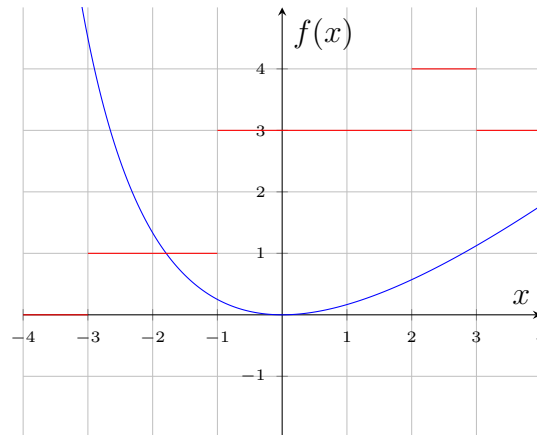


Abbildung 8: Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x+5}$ (stetig) und einer Treppenfunktion (unstetig)

Beweis. Es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : y \in X, |y - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Um zu zeigen, dass dann (2) in Definition 7.16 gilt, sei (x_n) eine beliebige Folge in X , die gegen x konvergiert und so, dass $x \neq x_n$ für alle n gilt. Sei weiter $\varepsilon > 0$ beliebig. Dazu wählen wir ein zugehöriges (gemäß der obigen Eigenschaft) $\delta > 0$. Ist nun $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|x_n - x| < \delta$ für alle $n \geq m$ gilt, dann folgt $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war gilt also

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x).$$

Die umgekehrt Implikation dient als Übung. □

Das folgende Beispiel verdeutlicht den Unterschied zwischen der Existenz eines Funktionsgrenzwert und der Stetigkeit.

Beispiel 7.19 1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \neq 2 \\ 1 & \text{falls } x = 2 \end{cases}.$$

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$. Aber f ist an der Stelle 2 nicht stetig (unstetig) da $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) = 1$.

2. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (also eine Folge). Dann kann an keinem Elementen des Definitionsbereichs eine Grenzwertuntersuchung erfolgen (warum ist das so?), der Grenzwert ist hier also an keiner Stelle definiert. Dennoch gilt eine solche Funktion als stetig an allen $n \in \mathbb{N}$, da jedes Element ein isolierter Punkt des Definitionsbereichs ist.
3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f((x, y)) = \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}.$$

Dann gilt $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f((x, y)) = 0$. Es kann aber an $(0, 0)$ nicht von Stetigkeit der Funktion f gesprochen werden, da diese Stelle nicht zum Definitionsbereich gehört. Mann könnte jedoch f stetig zu einer Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, in dem man $f((x, y)) =: \tilde{f}((x, y))$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $0 =: \tilde{f}((0, 0))$ setzt.

Aus Satz 7.9 und Definition 7.16) ergibt sich:

Satz 7.20 *Es sei $X \subset \mathbb{R}$ (oder $\subset \mathbb{C}$) und $f, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : X \rightarrow \mathbb{C}$) sowie $z \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) mit $\lim_{x \rightarrow z} f(x) = c$ und $\lim_{x \rightarrow z} h(x) = g$. Dann gilt:*

1. $\lim_{x \rightarrow z} (f + h) = c + g$.
2. $\lim_{x \rightarrow z} (f \cdot h) = c \cdot g$.
3. *Ist f nullstellenfrei und ist $c \neq 0$, so folgt $\lim_{x \rightarrow z} (h/f) = g/c$.*

Ist weiter $z \in X$ und f, h beide stetig an z , so folgt in den drei Fällen jeweils die Stetigkeit von $f + h$, $f \cdot h$ und h/f an z .

Rekursive Folgen

In der Mathematik bezeichnet eine **rekursive Folge** eine Folge, bei der jedes Element durch eine oder mehrere vorherige Elemente definiert ist. Diese Definitionen können explizit oder implizit sein. Eine rekursive Folge kann durch eine oder mehrere Startwerte und eine rekursive Beziehung definiert werden. Formaler definieren wir

²Bei solchen Funktionen wird meist auf die (formal richtige) doppelte Klammerung $f((x, y))$ verzichtet und man schreibt kurz $f(x, y)$

Definition 7.21 Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **rekursiv**, falls es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\varphi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$) und festgesetzte $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) (**Rekursionsanfang** genannt) so gibt, dass

$$a_n = \begin{cases} \varphi(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}), & \text{falls } n > k \\ \xi_n, & \text{falls } n \leq k \end{cases}.$$

Für allgemeine Indexmengen $N \subset \mathbb{N}_0$ werden rekursive Folgen analog definiert.

Beispiel 7.22 Ein Beispiel für eine rekursive Folge ist die **Fibonacci-Folge**, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

Hier ist F_n das n -te Fibonacci-Zahl für $n \in \mathbb{N}$.

Die ersten paar Fibonacci-Zahlen lauten:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_2 &= F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3, \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Fibonacci-Folge ist eine der bekanntesten rekursiven Folgen.

Beispiel 7.23 1.

$$a_n = \begin{cases} (1 + a_{n-1})/a_{n-1}, & \text{falls } n > 1 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \end{cases}.$$

Hier sind $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_4 = \frac{5}{3}, \dots$

2.

$$a_n = \begin{cases} (1 + a_{n-1})/a_{n-2}, & \text{falls } n > 2 \\ n, & \text{falls } n \leq 2 \end{cases}.$$

Hier sind $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = \frac{4}{3}$, ...

3.

$$a_n = \begin{cases} \frac{a_{n-1}}{2} + 1, & \text{falls } n > 2 \\ \xi, & \text{falls } n = 2 \end{cases}.$$

Für konvergente rekursive Folgen ist folgendes Ergebnis zur Bestimmung des konkreten Grenzwerts sehr nützlich.

Satz 7.24 *Es sei $X \subset \mathbb{R}^k$ (oder $X \subset \mathbb{C}$) und (a_n) eine durch eine stetige Abbildung $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$) rekursiv definierte Folge*

$$a_n = \begin{cases} \varphi(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}), & \text{falls } n > k \\ \xi_k, & \text{falls } n \leq k \end{cases},$$

und es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$. Sei weiter

$$C = \underbrace{(c, \dots, c)}_{k\text{-mal}},$$

und gelte $C \in X$, dann folgt

$$\varphi(C) = c.$$

Insbesondere gilt für $k = 1$ die Fixpunktgleichung:

$$\varphi(c) = c.$$

Beweis. Laut Annahme gilt $(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}) \rightarrow C$ für $n \rightarrow \infty$. Weiter folgt wegen der Stetigkeit von φ

$$\varphi((a_{n-1}, \dots, a_{n-k})) \rightarrow \varphi(C) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Weil (a_n) rekursiv definiert ist und gegen c konvergiert, gilt weiter auch

$$\varphi((a_{n-1}, \dots, a_{n-k})) = a_n \rightarrow c, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wegen der Eindeutigkeit des Folgengrenzwerts ergibt sich die Behauptung. \square

Beispiel 7.25 Eine wichtige Familie von Folgen sind die **geometrischen Folgen** $(a_n) = (q^n)$ für $q \in \mathbb{R}$, die sich rekursiv durch $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = qx$ und $a_0 = 1$ ergeben. Es gilt

1. Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt.
2. Für $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge, also $q^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

(Denn: 1. Hier ist $|q| = 1 + \delta$ für ein $\delta > 0$. Mit der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$|q^n| = |q|^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist (q^n) unbeschränkt.

2. Für $q = 0$ ist die Behauptung klar. Es sei also $0 < |q| < 1$. Dann ist $1/|q| = 1 + \delta$ mit einem $\delta > 0$ und wie in 1.

$$|q^n| < \frac{1}{n\delta} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aus $1/n \rightarrow 0$ folgt $q^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).)

Beispiel 7.26 (*Heron-Verfahren; Babylonisches Wurzelziehen*)

Es sei $c > 0$ gegeben und $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definiert durch

$$\varphi(x) := \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right) \quad (x > 0).$$

Dann gilt $\sqrt{c} = \sqrt{x \cdot c/x} \leq \varphi(x)$ (geometrisches Mittel \leq arithmetisches Mittel). Wir betrachten mit einem beliebigen Startwert $a_0 > 0$ die Folge (a_n) in $(0, \infty)$ mit

$$a_{n+1} := \varphi(a_n) = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Mithilfe des Hauptsatzes über monotone Folgen kann man zeigen, dass (a_n) konvergent ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{c},$$

d. h. die Folgenglieder a_n sind Approximationen (also Näherungen) für \sqrt{c} . Dabei sind im Falle $c \in \mathbb{Q}$ und $a_0 \in \mathbb{Q}$ die a_n stets rationale Zahlen.

Wie sieht es dabei mit dem Fehler aus, wenn man a_n statt \sqrt{c} verwendet? Wir schätzen den Fehler nach oben ab. Dazu sei

$$\varepsilon_n = \frac{a_n - \sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a_n}{\sqrt{c}} - 1 \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

der relative Fehler. Dann gilt

$$1 + \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{c}} a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \varepsilon_n + \frac{1}{1 + \varepsilon_n} \right),$$

also

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_n^2}{1 + \varepsilon_n} \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n^2.$$

Hat man nach n Schritten für a_n einen Fehler $\varepsilon_n \leq 10^{-m}$, so ist der Fehler ε_{n+1} im nächsten Schritt $\leq \frac{1}{2}(10^{-m})^2 = \frac{1}{2}10^{-2m}$; die Anzahl der exakt.

Reihen

Definition 7.27 Es sei $(a_n)_{n \geq m}$, $m \in \mathbb{N}_0$ eine Folge. Die Folge $(s_n)_{n \geq m}$ der **Partial-** oder **Teilsummen**

$$s_n := \sum_{\nu=m}^n a_\nu =: a_m + \cdots + a_n \quad (n \geq m)$$

heißt die (**mit** (a_n) **gebildete**) **Reihe**. Die a_ν heißen dann **Reihenglieder**.

Ist die Folge (s_n) konvergent, so heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ der **Reihenwert** und man schreibt

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Die Reihe heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} |a_\nu|$$

konvergiert.

Bemerkung 7.28 Traditionell wird neben dem Reihenwert auch die Teilsummenfolge (s_n) mit $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}$ bezeichnet. Das ist ganz praktisch, weil man dann kurz von Konvergenz oder Divergenz von $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}$ sprechen kann. Man beachte aber, dass das Symbol $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}$ damit zwei Bedeutungen hat: Erstens steht es für die Folge (s_n) der Teilsummen und zweitens (im Falle der Konvergenz!) für deren Grenzwert.

Beispiel 7.29 (geometrische Reihe) Es sei $a_n = q^n$ für ein $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Dann ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu}$ konvergent mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n q^{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Für $q = 1/2$ ergibt sich etwa $\sum_{\nu=0}^{\infty} 1/2^{\nu} = 2$.

Bemerkung 7.30 Durch Anwendung von Satz 7.9 ergibt sich leicht: Sind $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}$ und $\sum_{\nu=m}^{\infty} b_{\nu}$ konvergente Reihen und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} (a_{\nu} + b_{\nu}) \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=m}^{\infty} \lambda a_{\nu}$$

konvergent mit

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} (a_{\nu} + b_{\nu}) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu} + \sum_{\nu=m}^{\infty} b_{\nu} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=m}^{\infty} \lambda a_{\nu} = \lambda \sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}.$$

Beispiel 7.31 Mit Bemerkung 7.30 und Beispiel 7.29 ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{\nu} + 4}{5^{\nu}} = 2 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{3^{\nu}}{5^{\nu}} + 4 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{5^{\nu}} = 2 \cdot \frac{1}{1 - 3/5} + 4 \cdot \frac{1}{1 - 1/5} = 10.$$

Insbesondere erhält man aus Bemerkung 7.30 auch: Ist $k > m$, so ist $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_{\nu}$ genau dann konvergent, wenn $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}$ konvergiert, und in diesem Fall ist

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu} = \sum_{\nu=m}^{k-1} a_{\nu} + \sum_{\nu=k}^{\infty} a_{\nu}.$$

Für Konvergenzuntersuchungen ist es also unwichtig, wie die untere Summationsgrenze aussieht.

Satz 7.32 Ist $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}$ konvergent, so gilt

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Für absolut konvergente Reihen lässt sich folgendes zeigen

Satz 7.33 (Cauchy-Produktformel) Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent. Dann konvergiert das Produkt der Reihen (Produkt der Partialsummen) und der Wert (Grenzwert) der Reihe ergibt sich durch das Cauchy-Produkt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} b_{n-\nu}.$$

Satz 7.34 (Majorantenkriterium)

Es seien $(a_n)_{n \geq m}$ und $(b_n)_{n \geq k}$ Folgen mit

$$0 \leq |a_n| \leq b_n$$

für n genügend groß. Man nennt dann $\sum_{\nu=k}^{\infty} b_{\nu}$ eine konvergente **Majorante** (von $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}$). Ist $\sum_{\nu=k}^{\infty} b_{\nu}$ konvergent, so ist auch $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}$ konvergent (sogar absolut konvergent). Durch Kontraposition ergibt sich in der obigen Situation: Ist die Reihe über $(a_n)_{n \geq m}$ divergent, dann ist auch die Reihe über $(b_n)_{n \geq k}$ divergent. Man nennt dann $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}$ eine divergente **Minorante**.

Beweis. Angenommen, die Reihe $\sum_{\nu=k}^{\infty} b_{\nu}$ ist konvergent. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$\left| \sum_{\nu=N+1}^n b_{\nu} \right| < \epsilon,$$

da die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden. Aufgrund der Ungleichung $0 \leq |a_n| \leq$

b_n folgt, dass für alle $n \geq N$:

$$\left| \sum_{\nu=N+1}^n a_\nu \right| \leq \left| \sum_{\nu=N+1}^n b_\nu \right| < \epsilon.$$

Das zeigt, dass auch die Partialsummen von $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ eine Cauchy-Folge bilden, was die Konvergenz von $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ impliziert. Da $0 \leq |a_n|$ für alle n , folgt daraus die absolute Konvergenz.

Die Kontraposition dieses Beweises zeigt, dass, wenn $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ divergent ist, dann kann die Reihe $\sum_{\nu=k}^{\infty} b_\nu$ nicht konvergent sein, da andernfalls $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ nach obigem Beweis auch konvergent sein müsste. \square

Beispiel 7.35 (allgemeine harmonische Reihen) Es sei $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^d} \begin{cases} \text{divergent, falls } d = 1 \\ \text{konvergent, falls } d > 1 \end{cases}.$$

Für den Fall $d = 1$ betrachten wir

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq 1/2} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq 1/2} + \dots$$

und folgern damit

$$s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty).$$

Somit divergiert die Reihe.

Für $d > 1$ ist

$$\frac{1}{\nu^d} \leq \frac{1}{\nu^2} \leq \frac{1}{(\nu-1)\nu} =: b_\nu.$$

Weiter ist $\sum_{\nu=2}^n b_\nu = 1 - 1/n$ (Übung), also $\sum_{\nu=2}^{\infty} b_\nu = 1$. Damit ist $\sum_{\nu=2}^{\infty} b_\nu$ eine konvergente Majorante. Mit Satz 7.34 folgt die Behauptung.

Beispiel 7.36 (Münzstapel) Betrachten wir das Problem, Münzen so zu stapeln, dass jede Münze über die Kante der darunterliegenden Münze hinausragt, ohne dass der Stapel umfällt. Überraschenderweise lässt sich zeigen, dass es möglich ist, einen beliebig

großen Überhang zu erzielen, indem die Münzen in einer spezifischen Weise angeordnet werden.

Sei d der Durchmesser einer Münze und U_n der maximale Überhang, der mit n Münzen erreicht werden kann. Es zeigt sich, dass der Überhang proportional zur Summe der inversen natürlichen Zahlen ist, also zur harmonischen Reihe:

$$U_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Dies bedeutet, dass der Überhang mit jeder hinzugefügten Münze wächst, jedoch der Zuwachs mit zunehmender Anzahl von Münzen immer kleiner wird. Theoretisch kann so ein unbegrenzter Überhang erreicht werden.

Satz 7.37 (Wurzelkriterium, Quotientenkriterium)

Es sei $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_{\nu}$ eine Reihe.

1) (Wurzelkriterium) Gibt es ein $0 \leq q < 1$ und ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_{\nu}|^{\frac{1}{\nu}} \leq q, \text{ für alle } \nu \geq m > 0,$$

dann konvergiert $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_{\nu}$ (ist sogar absolut konvergent). Gilt umgekehrt $q > 1$ und

$$|a_{\nu}|^{\frac{1}{\nu}} \geq q, \text{ für alle } \nu \geq m > 0,$$

so ist die Reihe divergent.

2) (Quotientenkriterium) Gibt es ein $0 \leq q < 1$ und ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} \right| \leq q, \text{ für alle } \nu \geq m, \text{ falls } a_{\nu} \neq 0,$$

dann konvergiert $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_{\nu}$ (ist sogar absolut konvergent). Gilt umgekehrt $q > 1$ und

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} \right| \geq q, \text{ für alle } \nu \geq m > 0,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis. Wurzelkriterium:

Angenommen, es gibt ein $0 \leq q < 1$ und ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $|a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \leq q$ für alle $\nu \geq m > 0$. Wir wollen zeigen, dass $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$ konvergiert.

Da $|a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \leq q < 1$ für alle $\nu \geq m > 0$, folgt $|a_\nu| \leq q^\nu < 1$ für alle $\nu \geq N$. Weil die Reihe

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} q^\nu$$

konvergiert, ist eine konvergente Majorante gefunden und die Behauptung folgt mit atz [7.34](#).

Der umgekehrte Fall lässt sich analog beweisen, indem man zeigt, dass $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$ divergiert, falls $|a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \geq q > 1$ für alle ν gilt.

Quotientenkriterium: Übung.

□

8 Exponentialfunktion, Logarithmus

Satz 8.1 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!}$ absolut konvergent. Dies folgt beispielsweise sofort mit dem Quotientenkriterium.

Damit können wir nun die Exponentialfunktion definieren:

Definition 8.2 Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\exp(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

heißt **Exponentialfunktion**. Nach Definition ist $\exp(0) = 1$.

Satz 8.3 Es gilt:

1. \exp ist stetig,
2. \exp ist streng monoton wachsend und damit injektiv als Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ,
3. $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Wir wollen nun Eigenschaften der Exponentialfunktion einführen, die von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik sind.

Satz 8.4 Für $z, y \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\exp(z + y) = \exp(z) \cdot \exp(y)$,
2. $\exp(-z) = 1 / \exp(z)$,
3. $|\exp(ix)| = 1$.

Beweis.

1. Hier folgt mit der Cauchy-Produktformel (Satz 7.33),

$$\exp(z) \exp(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{y^{\nu}}{\nu!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{z^{\nu}}{\nu!} \frac{y^{n-\nu}}{(n-\nu)!}.$$

Erweitert man nun den innersten Term mit $n!$, klammert $1/n!$ aus der inneren Summe aus, und wendet anschließend den binomischen Satz (5.8) an, so folgt:

$$\exp(z) \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} z^{\nu} y^{n-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+y)^n}{n!} = \exp(z+y).$$

2. ergibt sich wegen der Eindeutigkeit der Inversen, da nach 1. gilt:

$$\begin{aligned} \exp(-z) &= \frac{1}{\exp(z)} \\ \Leftrightarrow \exp(-z) \cdot \exp(z) &= 1 \\ \Leftrightarrow \exp(-z) \exp(z) = \exp(0) &= 1. \end{aligned}$$

3. folgt mit 6.7.3 (sowie 6.6 verbunden mit 8.2) und 1.

$$\begin{aligned} |\exp(ix)|^2 &= \exp(ix) \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \exp(-ix) = \exp(ix - ix) = 1 = 1^2 \\ \Leftrightarrow |\exp(ix)| &= 1 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.5 Aus Satz 8.4 folgt

$$\exp(mz) = (\exp(z))^m \quad (z \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}).$$

Die Zahl $e := \exp(1)$ heißt **Eulersche Zahl**. Es gilt damit $\exp(m) = e^m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und deshalb ist die Schreibweise e^z statt $\exp(z)$ für allgemeines $z \in \mathbb{C}$ konsistent mit der Definition ganzzahliger Potenzen. Wir werden diese im Weiteren meist verwenden.

Satz 8.6 Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z, \quad (z \in \mathbb{C})$$

Satz 8.4 (3) zeigt, dass die Exponentialfunktion für Werte der imaginären Achse Werte auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ der komplexen Ebene annimmt (im Gegensatz zum Verhalten auf der reellen Achse). Der folgend Satz beschreibt das Verhalten der Exponentialfunktion für Argumente der imaginären Achse, also $z = ix$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Satz 8.7 *Es gelten:*

1. $e^{i\pi} = -1$ (*eulersche Identität*)
2. $e^{ix} = e^{ix+2\pi ik}$, für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ (2π -Periodizität).

Zusammen mit der Stetigkeit zeigt Satz 8.7, dass $\exp(ix)$ für $x \in (-\pi, \pi]$ den gesamten Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ der komplexen Ebene abläuft.

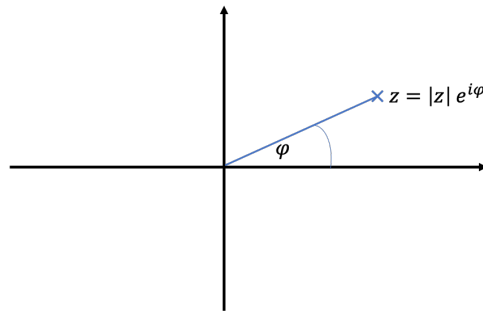


Abbildung 9: Polarkoordinaten in der komplexen Ebene

Bemerkung und Definition 8.8 Für jedes $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, gibt es ein eindeutiges $\varphi \in (-\pi, \pi]$ so, dass

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Diese Darstellung heißt **Polarkoordinaten-Darstellung** von z und φ heißt **Argument** von z . Wegen Satz 8.7 (2) gilt dann weiter

$$z = |z|e^{i\varphi+2\pi ik}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 8.9

$$\begin{aligned}
 1 &= e^{i0} \\
 i &= e^{i\pi/2} \\
 -i &= e^{-i\pi/2} \\
 -1 &= e^{i\pi} \\
 z &= 1+i = |z| e^{i\pi/4} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}
 \end{aligned}$$

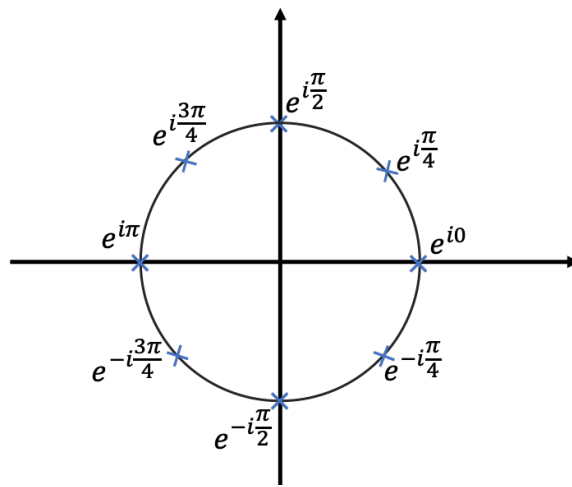


Abbildung 10: Polarkoordinaten auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene

Das Verhalten von $e^{i\varphi}$ auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene liefert einen schönen analytischen Zugang zur Definition trigonometrischer Funktionen.

Bemerkung und Definition 8.10 Die **Sinusfunktion** $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und **Kosinusfunktion** $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

und

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

Damit gilt für $x \in \mathbb{R}$ gilt damit:

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$$

und

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$$

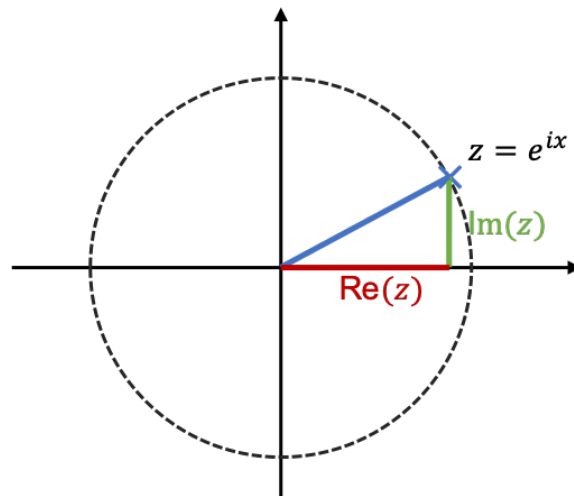


Abbildung 11: Einheitsdreieck in der komplexen Ebene

Wichtige Eigenschaften von Sinus und Kosinus als Funktionen auf \mathbb{R} sind im folgenden Ergebnis zusammen gefasst:

Satz 8.11 Für Sinus und Kosinus gilt das Folgende:

1. $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
2. $\sin(x) = \sin(x + 2\pi k)$ und $\cos(x) = \cos(x + 2\pi k)$, für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ (2π -Periodizität),
3. $\sin(x) = -\sin(-x)$ und $\cos(x) = \cos(-x)$, für und alle $x \in \mathbb{R}$
4. $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ für und alle $x \in \mathbb{R}$,
5. $\sin(k\pi) = 0$ und $\cos(k\pi + \pi/2) = 0$ für und alle $k \in \mathbb{Z}$.

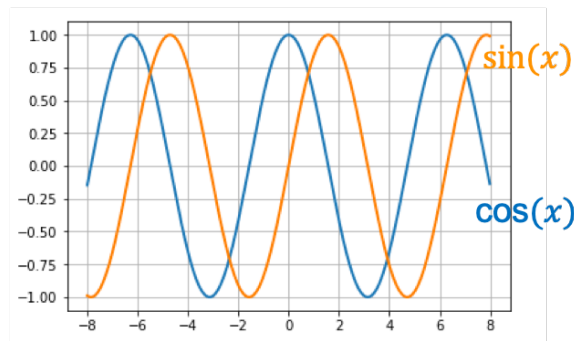


Abbildung 12: Sinus und Kosinus als Funktion von \mathbb{R} nach $[-1, 1]$

Bemerkung 8.12 Genau wie bei der Definition der Exponentialfunktion (8.2) lassen sich die Sinus und Kosinusfunktion als Grenzwert einer Reihe darstellen:

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

und

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

für all $z \in \mathbb{C}$.

Satz und Definition 8.13 Zu \exp existiert die Umkehrfunktion auf \mathbb{R} und diese ist dort stetig und streng wachsend. Diese Funktion nennen wir (natürliche) **Logarithmusfunktion** und schreiben dafür \ln oder auch \log . Aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ergibt sich leicht:

1. Für alle $s, t > 0$ ist $\ln(st) = \ln(s) + \ln(t)$.
2. Für alle $t > 0$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ ist $\ln(t^m) = m \ln(t)$.

Für $a > 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$a^m = e^{\ln(a^m)} = e^{m \ln a}$$

nach S.u.D.8.13.2.

Definition 8.14 Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ setzen wir:

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a) = e^{x \cdot \ln a}.$$

Aus den Rechenregeln für \ln und \exp erhält man $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ für $a > 0$ und die folgenden Potenzgesetze.

Satz 8.15 Es seien $a, b > 0$ und $x, y, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad a^x b^x = (ab)^x \quad \text{und} \quad (a^c)^x = a^{cx}.$$

Beweis. Es gilt

$$a^z a^w = e^{z \ln a} e^{w \ln a} = e^{z \ln a + w \ln a} = e^{(z+w) \ln a} = a^{z+w}$$

und

$$a^z b^z = e^{z \ln a} e^{z \ln b} = e^{z(\ln a + \ln b)} = e^{z \ln(ab)} = (ab)^z.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ ist $a^c = e^{c \ln a} > 0$ und damit

$$(a^c)^z = e^{z \ln(e^{c \ln a})} = e^{cz \ln a} = a^{cz}.$$

□

Satz und Definition 8.16 Es sei $a > 0$, dann definiert $f(x) = a^x$ eine bijektive Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. Dabei gilt für $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Die Funktion f^{-1} heißt **Logarithmus zur Basis a** , und wir schreiben $\log_a(x) := f^{-1}(x)$. Wie in (8.13) gelten:

1. Für alle $s, t > 0$ ist $\log_a(st) = \log_a(s) + \log_a(t)$.
2. Für alle $t > 0$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ ist $\log_a(t^m) = m \log_a(t)$.

A Intervall-Notation

Für $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \text{ und } x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x \text{ und } x < b\}$ (offenes Intervall)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \text{ und } x < b\}$ (rechts halboffenes Intervall)
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \text{ und } x \leq b\}$ (links halboffenes Intervall)

Für unbegrenzte Intervalle schreiben wir auch

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

B Quantoren

Dieser Abschnitt dient der informellen Einführung der **Quantoren**.

In dieser Vorlesung werden die folgenden **Quantoren** zur vereinfachten Formulierung verwendet

- \forall Bedeutung: „für alle“
- \exists Bedeutung: „es existiert“
- $\neg\exists$ Bedeutung: „es existiert nicht“ oder auch „es existiert kein“

Ist nun $A(x)$ eine Aussage, die von einer Variablen x abhängt, so kann mittels Quantoren das Folgende beschrieben werden:

- $\forall x : A(x)$, „für alle x gilt $A(x)$ “.
- $\exists x : A(x)$, „es existiert ein x für das $A(x)$ gilt“.

Die Quantoren werden häufig mit Bedingungen versehen. Typische Ausdrücke mit Quantoren sind beispielsweise die Folgenden:

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x^2 > 0$ „für alle reellen Zahlen x ungleich 0 gilt $x^2 > 0$ “. Man findet auch folgende Schreibweise: $x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\neg \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$ „es gibt kein reelles x , so dass $x^2 = -1$ gilt.“.
- $\forall (a, b \in \mathbb{R}, a < b) \exists x \in \mathbb{R} : a < x < b$, „für alle reellen Zahlen a, b mit $a < b$ gibt es ein reelles x mit $a < x < b$ “. Die Bedingungen des äußeren Quantors (weiter links stehend) beschreiben den Gültigkeitsbereich der inneren Quantoren.
- $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0$, „es gibt ein reelles x , so dass für alle reellen Zahlen y gilt $x \cdot y = 0$ “

Eine formale Einführung der Quantoren liefert die sogenannte **Prädikatenlogik**, die eine Erweiterung der Aussagenlogik ist. Wir werden hier die Prädikatenlogik nicht behandeln.

C Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Gegeben seien zwei nicht-negative ganze Zahlen a und b , wobei $a \geq b$.

Wir möchten den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von a und b sowie $s, t \in \mathbb{Z}$ finden, sodass $as + bt = \text{ggT}(a, b)$ gilt.

1. Initialisiere die Variablen $r_0 = a, s_0 = 1, t_0 = 0, r_1 = b, s_1 = 0, t_1 = 1, k = 1$
2. Wiederhole folgende Schritte, solange $r_k \neq 0$:

$$q_k = \left\lfloor \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\rfloor \quad (\text{C.11})$$

$$r_{k+1} = r_{k-1} - q_k r_k \quad (\text{C.12})$$

$$s_{k+1} = s_{k-1} - q_k s_k \quad (\text{C.13})$$

$$t_{k+1} = t_{k-1} - q_k t_k \quad (\text{C.14})$$

$$k \leftarrow k + 1 \quad (\text{C.15})$$

3. Der ggT von a und b ist der Wert von r_{k-1} nach Abschluss der Schleife. Die Werte von s_k und t_k entsprechen s und t wie oben. ($\lfloor \cdot \rfloor$ bedeutet ganzzahliges abrunden)

D Aufgabensammlung

D.1 Mengen und Abbildungen

Aufgabe 1 Es seien $M := \{-2, -\frac{1}{2}, 0, 1, \pi, 5, 7\}$, $M_1 := \{-2, 0, 7\}$ und $M_2 := \{-\frac{1}{2}, 0, \pi, 5\}$. Bestimmen Sie

$$M_1 \cap M_2, \quad M_1 \cup M_2, \quad M_1^{c(M)}, \quad M_2^{c(M)}, \quad M \setminus (M_1 \cup M_2)$$

.

Aufgabe 2 Es seien $M := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $M_1 := \{-2, -1, 0\}$, $M_2 := \{1, 4, 9\}$ und $M_3 := \{2, 4, 6, 8\}$. Bestimmen Sie

$$M_1 \cup M_2, \quad M_2 \cup M_3, \quad M_1 \cap M_2, \quad M_1^{c(M)}, \quad (M_2 \cup M_3)^{c(M)}, \quad M \setminus (M_1 \cup M_3)$$

.

Aufgabe 3 a) Finden Sie ein **Gegenbeispiel** das zeigt, dass folgende Aussage allgemein **nicht** gilt:

Seien M_1, M_2, M_3 nicht-leere Mengen, sodass

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset.$$

Dann gilt auch

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

(b) Schreiben Sie die folgende Menge in der beschreibenden Mengenschreibweise: *Die Menge aller geordneter Tupel von drei reellen Zahlen, wobei die erste Komponente ein ganzzahliges Vielfaches der zweiten Komponente ist, und die dritte Komponente größer als die zweite Komponente ist.*

Aufgabe 4 a) i) Finden Sie ein **Gegenbeispiel** das zeigt, dass folgende Aussage allgemein **nicht** gilt:

Seien M, M_1, M_2 nicht-leere Mengen, sodass

$$M_1 \subset M, \quad M_2 \subset M, \quad M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

Dann gilt auch

$$M_1 \cup M_2 = M.$$

- a) ii) Geben Sie außerdem ein Beispiel an, für das die Aussage gilt.
- a) iii) Verbinden Sie M, M_1, M_2 mithilfe der Komplement-Mengenoperation zu einer Formel, die für den Fall aus ii) gilt.
- b) i) Schreiben Sie die folgende Menge in der beschreibenden Mengenschreibweise:
Die Menge aller geordneter zwei-Tupel, wobei die erste Komponente eine ganze Zahl und die zweite Komponente eine n natürliche Zahl ungleich 0 ist und die beiden Zahlen sind teilerfremd³.
- b) ii) Welche allgemein bekannte Zahlen-Menge haben Sie gerade beschrieben?

Aufgabe 5 a) Skizzieren Sie die Menge $[4, 8] \times \{-1, 1, 2\}$.

b) Schreiben Sie folgende Menge durch Aufzählen all ihrer Elemente $(\mathbb{Z} \times \{1, 3\}) \cap (\{1, 2\} \times \mathbb{Z})$.

Aufgabe 6 a) Skizzieren Sie die Menge $[-1, 3] \times \{-2, 2, 3\}$.

b) Schreiben Sie folgende Menge durch Aufzählen all ihrer Elemente $(\mathbb{Z} \times \{-1, -2\}) \cap (\{3, 4\} \times \mathbb{Z})$.

Aufgabe 7 a) Bestimmen Sie alle Element aus

$$(\{1, 2\} \times \{3, 7\})^2$$

b) Schreiben Sie folgende Menge mit Hilfe der mathematischen Mengenschreibweise:
Die Menge aller Bilder mit 100 mal 100 Pixeln, wobei jedes Pixel durch drei Farbkkanäle erzeugt wird, die ihrerseits jeweils Werte aus $\{0, 1, \dots, 255\}$ annehmen können.

Aufgabe 8 Es seien A, B zwei Mengen. Beweisen Sie, dass $A \subset B$ genau dann gilt, wenn $A^c \supset B^c$ gilt.

³Es gibt keine ganze Zahl größer 1, die beide Zahlen ohne Rest teilt.

Aufgabe 9 Beweise Sie Folgendes:

a)

$$\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

b)

$$\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

Hinweis: Es meint $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}$ den unendlichen Schnitt (mit n durchläuft alle natürlichen Zahlen), also

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right] = [0, 1] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] \cap \dots$$

Aufgabe 10 Es seien A, B Mengen. Zeigen Sie die De Morganschen Gesetze (Satz 1.8)

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ und } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Aufgabe 11 Prüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Gültigkeit, und beweisen Sie diese bzw. widerlegen Sie diese durch ein Gegenbeispiel.

a) Für zwei Mengen A, B mit $A \cap B = \emptyset$ gilt, es gibt keine Menge C mit $C \subset A$ und $C \subset B$.

b) Für Mengen M_1, M_2, M_3, C gilt $C \subset (M_1 \cup M_2 \cup M_3)^c$ genau dann, wenn für alle $j = 1, 2, 3$ $C \cap M_j = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 12 Definition: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt **offen**, falls für jedes $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ so existiert, dass das Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ eine Teilmenge von M ist.

$$M \subset \mathbb{R} \text{ offen} \Leftrightarrow \forall x \in M \quad \exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset M$$

Welche der folgenden Mengen sind offen und welche nicht?

a) $(0, 1)$

b) \mathbb{R}

c) $[1, 2]$ d) \mathbb{Q}

Begründen Sie Ihre Antworten. (Ein formal korrekter Beweis ist nicht zwingend, aber Sie müssen mit der gegebenen Definition argumentieren.)

(Hinweise:

i) Um zu zeigen, dass eine Menge offen ist, muss **für jedes** x aus der Menge gezeigt werden, dass ein passendes ε existiert. Dabei darf das ε vom jeweilig betrachteten x abhängen, dies kann dann geschickterweise mit ε_x bezeichnet werden. Im Zweifel ist hier also eine Konstruktionsvorschrift anzugeben, mit der zu jedem gegebenen x ein passendes ε_x konstruiert werden kann.

ii) Beachten Sie, dass ein formaler Beweis immer daraus besteht entweder ein passende $\varepsilon > 0$ anzugeben, oder zu zeigen, dass es für mindestens ein Element der Menge kein solches ε gibt.

iii) Beachten Sie, dass die Epsilon-Umgebung nach Definition (Siehe Intervallnotation) immer Teilmenge der reellen Zahlen ist: $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$)

Aufgabe 13 Es seien $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $f : X \rightarrow Y$ definiert durch

$$f(k) := \begin{cases} k + 1 & , \quad \text{falls } k \leq 4 \\ 1 & , \quad \text{falls } k = 5 \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie den Graph von f .

b) Bestimmen Sie die Urbilder $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, wobei $A := \{1, 4\}$ und $B := \{2, 5\}$.

Aufgabe 14 Es seien $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $f : X \rightarrow Y$ definiert durch

$$f(k) := \begin{cases} k + 1 & , \quad \text{falls } k \geq 0 \\ -k + 1 & , \quad \text{falls } k < 0 \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie den Graph von f .

b) Bestimmen Sie die Urbilder $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, wobei $A := \{0\}$ und $B := \{1, 4\}$.

Aufgabe 15 (a) Es sei $X = \{-1, 0, 1\}^3$, und $f : X \rightarrow [-3, 3]$ sei definiert durch

$$f((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Bestimmen Sie die Urbilder $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{-1\})$.

(b) Es sei $X = \mathbb{R}^2$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f((x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2$$

Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(\{0\})$ und skizzieren Sie $f^{-1}(\{1\})$.

Aufgabe 16 Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie jeweils den Graph von f für $a = 1$ und $a = -2$.

(b) Zeigen Sie, dass für $a < 0$ die Abbildung f nicht injektiv ist.

(Hinweise:

i) „Zeigen Sie“ bedeutet „Beweisen Sie“, womit ein formaler und korrekter Beweis gefordert ist.

ii) Ihr Beweis muss allgemein sein, d.h. er muss für beliebige $a < 0$ funktionieren, nicht nur für einige konkret gewählte a .

iii) Schlagen Sie die Definition von injektiv nach, und überlegen Sie wie die Aussage zu negieren ist um „nicht injektiv“ zu zeigen.)

Aufgabe 17 a) Finden Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

b) Finden Sie eine injektive Abbildung $g : \{0, 2\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 18 Es seien

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -2x + 4$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2.$$

a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass g nicht injektiv und nicht surjektiv ist.

c) Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

Aufgabe 19 Es seien A, B Mengen. Zeigen Sie das Folgende:

a) Aus $A^c \cap B = \emptyset$ folgt $B \subset A$,

b) $A \subset B$ genau dann, wenn $A^c \supset B^c$.

(Hinweis: Mit A^c ist hier $A^{c(M)}$ gemeint, wobei M irgend eine nicht näher beschriebene ist, die folgende Eigenschaften hat: $A \subset M$ und $B \subset M$)

Aufgabe 20 Es seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad g(x) = 5x^2 + x.$$

Bestimmen Sie $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ und $f \circ g$.

Aufgabe 21 Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f((x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2.$$

Bestimmen und skizzieren Sie $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}(\{2\})$.

Aufgabe 22 Ist die folgende Abbildung injektiv?

$$\varphi : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \varphi((p, q)) = \frac{p}{q}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 23 Bestimmen Sie die inverse Abbildung zu folgenden Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 10x,$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{10}x,$$

$$f_3 : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x^2,$$

$$f_4 : X \rightarrow X, \quad x \mapsto \sqrt{x},$$

wobei $X := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Rechnen Sie dazu auch nach, dass die Umkehrabbildungen jeweils die Bedingungen aus der Definition (der Umkehrabbildung) erfüllen.

Aufgabe 24 Es seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A, B \subset Y$. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Aufgabe 25 Es seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und Mengen $A_n \subset Y$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$$

und

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n).$$

Aufgabe 26 Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 1$,

b) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2$,

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{(2-x)^2}$.

Begründen Sie jeweils ihr Ergebnis.

Aufgabe 27 Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Aussage in Satz 1.24(1) auch richtig sein **kann**, wenn g nicht injektiv ist.

Aufgabe 28 Bestimmen Sie jeweils die Umkehrfunktion folgender Funktionen:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$,

b) $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{2}{x}$,

c) $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2 + x$.

Rechnen Sie dazu auch nach, dass die Umkehrabbildungen jeweils die Bedingungen aus der Definition (der Umkehrabbildung) erfüllen. (Beachten Sie in Teil b und c die Intervallnotation aus dem Anhang des Skripts)

Aufgabe 29 Es seien $M := \{1, 3, 20\}$, $N := \{-1, 4, 0\}$. Bestimmen sie $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{P}(N)$ und $\mathcal{P}((M \setminus \{3\}) \times (N \setminus \{-1\}))$.

Aufgabe 30 Zeigen Sie, dass folgende Mengen abzählbar sind:

a) die Menge der geraden natürlichen Zahlen

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{n}{2} \in \mathbb{N} \right\},$$

b) die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} .

Aufgabe 31 Es sei $n \in \mathbb{N}$, bestimmen Sie Formeln zur Berechnung von

$$|\mathcal{P}(\{w, f\})^n|$$

$$|\mathcal{P}(\{w, f\}^n)|.$$

(Hinweis: Satz 1.33 und Satz 1.35)

Aufgabe 32 Es sei M die Menge aller Bilder mit 10000 Pixeln, wobei jedes Pixel durch drei Farbkanäle (RGB) dargestellt wird, und die Intensität eines jeden Farbkanals durch ganzzahlige Werte von 0 bis 255 kodiert ist. Stellen Sie M als kartesisches Produkt geeigneter Mengen dar und geben Sie eine Formel zur Berechnung von $|M|$ an.

D.2 Logik

Aufgabe 33 Zeigen Sie mittels Wahrheitstabelle das Folgende:

a) $F_1(A, B) := B \Rightarrow A$ und $F_2(A, B) := \neg A \Rightarrow \neg B$ sind gleichwertig.

b) $F_3(A, B) := \neg(A \wedge B)$ und $F_4(A, B) := \neg A \vee \neg B$ sind gleichwertig (De Morgan).

(Hinweis: Hier ist $F_1 \Leftrightarrow F_2$ und $F_3 \Leftrightarrow F_4$ zu zeigen)

Aufgabe 34 Zeigen Sie mittels Wahrheitstabelle, dass $F_1(A, B, C) := (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$ und $F_2(A, B, C) := A \vee B \Rightarrow C$ gleichwertig sind.

Aufgabe 35 Zeigen Sie mittels Wahrheitstabelle, dass $F_1(A, B, C) := A \Rightarrow (B \vee C)$ und $F_2(A, B, C) := \neg(A \wedge \neg(B \vee C))$ gleichwertig sind.

Aufgabe 36 Nehmen Sie an, dass Sie folgende Aussagen durch einen Widerspruchsbeweis belegen möchten.

a) *Es gibt keine größte Primzahl.*

b) *Für jedes $a \in [0, \infty)$ gibt es mindestens ein $x_0 \in \mathbb{R}$ sodass $x_0^3 - ax_0 = 0$.*

c) *Für jedes Paar $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt:*

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Formulieren Sie jeweils die Aussage, die dazu zu einem Widerspruch zu führen ist.

Aufgabe 37 Es seien x_1 und x_2 Integer-Variablen in einem Computer-Programm. Darin sei weiter Folgendes implementiert:

```
if  $x_1 < x_2$ 
  if  $x_1 < 4$ 
    print(Hello World)
  else
    if  $x_2 < 2$ 
      print(Hallo Welt)
    end if
  end if
else
  print(Moien Welt)
end if
```

a) Bestimmen Sie drei Aussageformeln, die jeweils genau dann wahr sind, wenn *Hello World*, bzw. *Hallo Welt*, bzw. *Moien Welt* ausgegeben wird.

b) Welche der Aussageformeln aus Teil a) wird niemals *wahr* sein? Begründen Sie dies mit Hilfe von Aussageformeln.

Aufgabe 38 In den unteren Folgerungen sind jeweils ein oder mehrere Fehler unterlaufen. Korrigieren Sie jeweils die rechte Seite so, dass eine gültige Folgerung entsteht.

a Mit $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung:

f ist surjektiv \Rightarrow für jedes $y \in X$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

b Mit $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen:

f und g sind injektiv $\Rightarrow f \circ g$ ist bijektiv.

c Mit A, B zwei Aussagenvariablen:

$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$

d Mit M eine Menge:

$N \subset M \Rightarrow N \subset \mathcal{P}(M)$.

D.3 Algebra und Relationen

Aufgabe 39 Der Graph einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist laut Definition eine Teilmenge von $X \times Y$ und damit eine Relation. Prüfen Sie welche Eigenschaften aus Definition 3.3 auf

- den Graph einer beliebigen Abbildung,
- den Graph einer injektiven Abbildung,
- den Graph einer surjektiven Abbildung

zutreffen.

(Hinweise: Siehe Def. 1.13 , Def. 1.21 und Def. 3.1 .

Sie können eine Tabelle anlegen und darin markieren welche Eigenschaften erfüllt werden und welche nicht.

Begründen Sie Ihre Antworten mithilfe der Definitionen aus dem Skript.)

Aufgabe 40 Beweisen Sie die folgenden wahren Behauptungen:

- Der Graph einer beliebigen Funktion ist linkstotal.

- Der Graph einer beliebigen Funktion ist rechtseindeutig.
- Der Graph einer injektiven Funktion ist linkseindeutig.
- Der Graph einer surjektiven Funktion ist rechtstotal.

Aufgabe 41 Zeigen Sie die folgende Identität:

Es seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Sei die Funktion hier durch ihren Graphen $G_f \subset X \times Y$ beschrieben. Offenbar ist G_f eine Relation und wir können auch $R_f := G_f$ schreiben.

Dann sind folgende Aussagen Äquivalent (\Leftrightarrow):

- Die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \rightarrow X$ existiert (und ist eindeutig, also es gibt nur genau diese eine).
- f ist bijektiv.

(Hinweise: Zeigen Sie zwei Implikationen (\Rightarrow und \Leftarrow).

Welche Eigenschaften bringt R_f bereits mit? (siehe 3.3)

Formulieren Sie die beiden Aussagen auch so um, dass sie über den Graphen von f bzw. f^{-1} sprechen. Nutzen Sie dann Ihr Wissen über Relationen im allgemeinen (siehe 3.3) und über die speziellen Eigenschaften die R_f (1.11) bzw. $R_{f^{-1}}$ (1.26) haben um die Implikationen zu beweisen.)

Aufgabe 42 Es sei $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0\}$, und $R \subset M \times M$ eine Relation definiert durch $R := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in M \times M : x_2/x_1 = y_2/y_1\}$. Zeigen Sie, dass die Relation R transitiv ist.

(Hinweise: Schlagen Sie die relevanten Definitionen nach.

„Übersetzen“ Sie zunächst wie *transitiv* allgemein definiert ist und beweisen Sie diese Eigenschaft dann für die konkret vorliegende Relation R auf der konkret gegebenen Menge M .)

Aufgabe 43 Es sei $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0\}$, und $R \subset M \times M$ definiert durch $R := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in M \times M : x_2/x_1 = y_2/y_1\}$. Dann ist R eine Äquivalenzrelation. Sei G die zugehörige Menge der Äquivalenzklassen. Und für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M$ sei durch

$$[(x_1, x_2)]_R * [(y_1, y_2)]_R := [(x_1, x_2 \cdot y_2/y_1)]_R$$

eine Verknüpfung auf G definiert. Prüfen Sie ob $(G, *)$ eine (kommutative) Gruppe ist.

Aufgabe 44 Es sei M eine Menge, $R \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation und $x, y \in M$. Zeigen Sie, dass dann entweder $[x]_R = [y]_R$ oder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ gilt.

(Hinweise: Schlagen Sie die relevanten Definitionen nach.

Die hier zu zeigende Aussage hat folgende Struktur „ $A \Rightarrow$ (entweder B oder C)“. Überlegen Sie zunächst wie Sie die Aussage auf der rechten Seite der Implikation (entweder B oder C) so „übersetzen“ können, dass Sie auch hier eine (oder mehrere) Implikation(en) (\Rightarrow) erhalten. Beim Beweis von Aussagen der Form $A \Leftarrow \dots$, kann die Implikation überhaupt nur falsch sein, wenn A wahr ist. Somit man sich dabei stets $A = \text{wahr}$ einschränken. Das heißt hier: es liegt eine Äquivalenzrelation vor.)

Aufgabe 45 Es sei M die Menge $M = \{a, b, c, d\}$.

a) Schreiben Sie die Menge $M \times M$ auf. (Hinweis 1: wenn Sie dies auf eine geschickte Weise tun, erleichtert dies die folgenden Aufgaben.)

Es seien weiter R_i homogene Relationen auf M sodass $R_i \subset M \times M \forall i$.

1: $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

2: $R_2 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\}$

3: $R_3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d)\}$

4: $R_4 = \{(a, b), (a, c), (c, b), (b, d), (d, a), (d, c)\}$

5: $R_5 = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, c), (d, d)\}$

Untersuchen Sie im Folgenden ob die gegebenen R_i die jeweils geforderte Eigenschaft erfüllen. Beweisen Sie ein Nichterfüllen durch ein Gegenbeispiel mit Begründung und ein Erfüllen durch ein vollständiges Prüfen aller relevanten Elemente.

b) i) ist R_1 reflexiv?

b) ii) ist R_1 symmetrisch?

b) iii) ist R_1 transitiv?

b) iv) Was folgt somit für R_1 ? R_1 ist eine

c) i) ist R_2 reflexiv?

c) ii) ist R_2 symmetrisch?

c) iii) ist R_2 total?

c) iv) ist R_2 asymmetrisch?

d) i) ist R_3 reflexiv, symmetrisch und transitiv?

e) i) ist R_4 trichotom?

e) ii) ist R_4 asymmetrisch?

f) i) ist R_5 antisymmetrisch?

(Hinweis 2: Betrachten Sie die Definitionen im Skript und halten Sie sich genau an die Definitionen.)

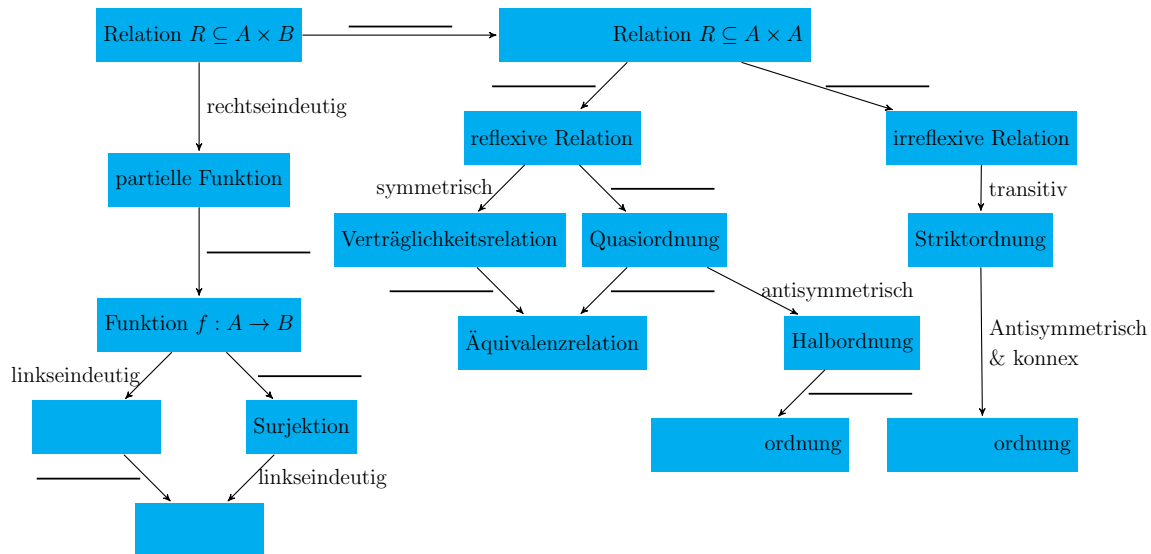
(Hinweis 3: Es kann zur Überprüfung mancher Eigenschaften sinnvoll sein folgende künstliche Unterscheidung zu treffen, die nur der besseren Lesbarkeit dient: Es sei $M_1 = \{a, b, c, d\}$ und es sei $M_2 = \{A, B, C, D\}$ und es seien $R_i \subset (M_1 \times M_2) \cup (M_2 \times M_1)$. Dabei bleiben die R_i homogene Relationen, da die Unterscheidung von M in M_1 und M_2 rein optisch ist. Die hat aber den Effekt, dass $(a, A) \in M_1 \times M_2$ und $(A, a) \in M_2 \times M_1$ optisch unterschieden werden können, obwohl inhaltlich weiter gilt $M = M_1 = M_2$)

g) Betrachten Sie nun die Menge $N := \{a, b, c, d, e, f\}$.

g) i) Konstruieren Sie eine Relation $R_6 \subset N \times N$ sodass R_6 eine Äquivalenzrelation mit mindesten zwei (unterschiedlichen) Äquivalenzklassen ist die jeweils mehr als einen Vertreter haben.

g) ii) Konstruieren Sie eine Relation $R_7 \subset N \times N$ sodass R_7 eine (schwache) Totalordnung ist.

Aufgabe 46 Vervollständigen Sie das folgende Diagramm zu den unterschiedlichen Relationen und den Eigenschaften, mittels derer sie definiert sind. Es soll jeder Pfeil beschriftet und jedes Kästchen vollständig ausgefüllt sein.



Merke:

- Antisymmetrisch + irreflexiv = asymmetrisch
- asymmetrisch + konnex = trichotom.

Aufgabe 47 Berechnen Sie das Folgende:

$$[3]_8 + [9]_8 + [-1]_8$$

$$[3]_5 + [1]_5 + [10]_5$$

$$[7]_7 \cdot [6]_7 \cdot [-1]_7$$

$$([6]_{13} \cdot [-5]_{13}) + [-3]_{13}$$

$$([8]_{-2} \cdot [6]_{-2}) + [-1]_{-2}.$$

Geben Sie dabei das Ergebnis mittels des kleinsten nicht-negativen Repräsentanten der Äquivalenzklasse an (Standardrepräsentanten).

Aufgabe 48 a) Berechnen Sie das Folgende:

$$([3]_{11}^{-1})^{-1} \cdot ([9]_{11} + [-1]_{11})$$

$$[3]_7^{-1} + [1]_7 + [5]_7$$

$$[3]_7 \cdot [6]_7^{-1} \cdot [-1]_7$$

Geben Sie dabei das Ergebnis in Standardrepräsentanten an.

- b) Geben Sie zu jedem Element in $\mathbb{Z}_{11} \setminus \{[0]_{11}\}$ das inverse Element bezüglich der Multiplikation (in Standardrepräsentanten) an.

Aufgabe 49 Berechnen Sie das Folgende:

$$\begin{aligned} & [7]_4 + [2]_4 + [-3]_4 \\ & [4]_{11} + [5]_{11} + [2]_{11} \\ & [52]_5 \cdot [101]_5 \cdot [-1]_5 \\ & ([5]_{17} \cdot [4]_{17}) + [-3]_{17} \\ & [-1]_{-2} + ([6]_{-2} \cdot [8]_{-2}). \end{aligned}$$

Geben Sie dabei das Ergebnis mittels des kleinsten nicht-negativen Repräsentanten der Äquivalenzklasse an (Standardrepräsentanten).

Aufgabe 50 a) Berechnen Sie das Folgende:

$$\begin{aligned} & ([3]_{17}^{-1})^{-1} \cdot ([-5]_{17} + [7]_{17}) \\ & [3]_{11}^{-1} + [3]_{11} + [5]_{11} \\ & [3]_5 \cdot [6]_5^{-1} \cdot [-1]_5 \end{aligned}$$

Geben Sie dabei das Ergebnis in Standardrepräsentanten an.

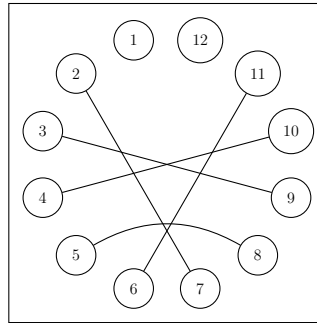
- b) Geben Sie zu jedem Element in $\mathbb{Z}_{13} \setminus \{[0]_{13}\}$ das inverse Element bezüglich der Multiplikation (in Standardrepräsentanten) an.

Aufgabe 51 a) Geben Sie zu jedem Element in $\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}$ das inverse Element bezüglich der Multiplikation (in Standardrepräsentanten) an, für alle $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

- b) Vielleicht ist Ihnen aufgefallen, dass folgendes immer gilt $[p-1]_p^{-1} = [p-1]_p$. Beweisen Sie diesen Zusammenhang.

Welche Eigenschaften von p haben Sie genutzt? Gilt die Aussage damit nur für Primzahlen p , oder für alle natürlichen Zahlen? (Hinweis: Denken Sie daran, dass ein Element multipliziert mit seinem Inversen (Multiplikation) immer um genau eins größer ist als ein Vielfaches der „Basis“ (p) des Restklassenkörpers.)

zur freiwilligen Vertiefung: c) Zeichnen Sie die bisher betrachteten Restklassenringe und verbinden Sie inverse Elemente, bezüglich der Multiplikation, nach dem folgenden Muster:



Finden Sie eine oder mehrere weitere allgemeine Regeln um zu bestimmten Zahlen die inversen bezüglich eines p aus den Primzahlen berechnen zu können? Können Sie die Regel wie zuvor allgemein beweisen? Gilt ihre Regel wirklich nur wenn p eine Primzahl ist, oder können Sie die Anforderungen an p allgemeiner halten?

(Hinweis: Welches Muster können Sie an den Zeichnungen erkennen? Drücken Sie die beteiligten Zahlen allgemein in Abhängigkeit des jeweils vorliegenden p aus. Stellen Sie die Gleichungen evtl. um und nutzen Sie aus, dass gerade Zahlen immer ganzzahlig durch 2 teilbar sind.)

Aufgabe 52 Welche der folgenden Beispiele ist eine Gruppe (belegen Sie jeweils ihre Antwort):

- a) (\mathbb{Z}, \cdot) , wobei \cdot die übliche Multiplikation bezeichne,
- b) $(M, +)$ mit M die Menge der geraden ganzen Zahlen und $+$ der üblichen Addition,
- c) $(\mathbb{R}^n, +)$, wobei die Addition durch $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ definiert sei.

Aufgabe 53 Betrachten Sie die Gruppe der Permutationen, vgl. Definition 4.5 u. Satz 4.6.

- a) Was ist das neutrale Element der Gruppe (S_n, \circ) für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

- b) Zeigen Sie, dass jedes $\sigma \in S_n$ ein inverses Element besitzt.
- c) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass (S_4, \circ) nicht kommutativ ist.

Aufgabe 54 Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Zeigen Sie das Folgende:

- a) Für alle $x, y \in G$ gilt $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
- b) Die Gruppe ist genau dann kommutativ, wenn für alle $x, y \in G$ gilt

$$x * y * x^{-1} * y^{-1} = e.$$

(vgl. Folgerung 4.4) (Hinweis: Orientieren Sie sich an dem Inhalt und Beweis zu Satz 4.3.

Tipp: Begründen sie jede Umformung (Gleichheit = oder Äquivalenz \Leftrightarrow) indem Sie auf die entsprechend genutzte Eigenschaft aus Def. 4.1 verweisen.)

Aufgabe 55 Betrachten Sie den kommutativen Ring $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ über der endlichen Menge \mathbb{Z}_4 .

- a) Zählen Sie die Elemente von \mathbb{Z}_4 auf.
- b) Zählen Sie konkret alle „atomaren“ Eigenschaften auf, die nachzuweisen sind um zu zeigen, dass $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. (konkret: also nicht nnur die Namen der Eigenschaften, sondern wie diese explizit für $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ aussehen.)
- c) Wenn Sie die Ringeigenschaften nachweisen wollten (\leftarrow Konjunktiv, Sie müssen das hier nicht tun) indem Sie Für jede Eigenschaft alle möglichen Kombinationen an Elementen einsetzen,
 - c)1. wie viele verschiedene Kombinationen an Elementen gibt es, die Sie probieren müssten,
 - c)2. und wie viele Einzelbeweise ergeben sich damit insgesamt?

(„atomare“ Eigenschaften: Eine Eigenschaft ist dann atomar, wenn Sie nicht aus „kleineren“ Eigenschaften zusammengesetzt ist. Falls in einer Definition eine zusammengesetzte Eigenschaft steht, sollen Sie also die Bausteine dieser Eigenschaft einzeln betrachten.)

Aufgabe 56 Betrachten Sie die Restklassenringe \mathbb{Z}_m für $m > 2$ und sei m eine gerade Zahl (also $m \bmod 2 = 0$).

- a) Versuchen Sie für $m \in \{4, 6, 8\}$ jeweils die inversen Elemente bezüglich der Multiplikation aller Elemente des jeweiligen Restklassenrings zu bestimmen (Erwartungsgemäß wird dies nicht für alle Elemente gelingen!).
- b) Zeigen Sie allgemein, dass es in den Restklassenringen mit geradem Modul m **stets** Elemente gibt, zu denen keine Inversen bezüglich Multiplikation gefunden werden können.

(Hinweis: Rufen Sie sich ins Gedächtnis wie inverse Elemente definiert sind. Weiter haben Sie vielleicht feststellen können, dass es eine Zahl gibt deren Restklassen in keinem der ausprobierten Ringe ein Inverses besitzen; Beschreiben Sie das gesuchte Inverse zu dieser Zahl allgemein und zeigen Sie, dass es hier nicht existieren kann.)

Aufgabe 57 Es seien $(G_1, *)$ und (G_2, \oplus) zwei Gruppen und $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ ein Gruppen-Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $(G_1, *)$ genau dann kommutativ ist, wenn (G_2, \oplus) kommutativ ist.

Aufgabe 58 Beweisen Sie:

- a) Es gibt eine Abbildung $\tilde{\oplus} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sodass $(\mathbb{N}, \tilde{\oplus})$ eine kommutative Gruppe ist. Dann sind $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{N}, \tilde{\oplus})$ isomorph.
- b) Es gibt eine paar Abbildungen $\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $\odot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sodass $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$ ein Körper ist. Dann sind $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$ isomorph.

D.4 Gleichungen, Ungleichungen und Induktion

Aufgabe 59 Zeigen Sie durch schrittweises Nachrechnen die folgenden Identität:

$$\sum_{\nu=2}^{2n+1} (-1)^{\nu+1} \nu + \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu} \nu = 2n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

Aufgabe 60 Es seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Gleichungen sind korrekt. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort (z.B durch Angabe eines Gegenbeispiels falls unkorrekt).

$$\begin{aligned}
\prod_{\nu=1}^n a_{\nu} b_{n-\nu+1} &= \prod_{\nu=1}^n a_{\nu} \cdot \prod_{\nu=1}^n b_{\nu} \\
\sum_{\nu=1}^n (a_{\nu} + b_{\nu})^2 &= \left(\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} + \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} \right)^2 \\
\sum_{\nu=1}^n \left(a_{\nu} \sum_{k=1}^n b_k \right) &= \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \cdot \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} \\
\sum_{\nu=1}^n 4a_{\nu} + b_{n-\nu+1} &= 4 \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} + \sum_{\nu=1}^n b_{\nu}
\end{aligned}$$

Aufgabe 61 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $|S_n| = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei ist S_n die Menge der Permutation (vgl. Skript).

Aufgabe 62 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$\sum_{\nu=1}^n v^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Aufgabe 63 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ gilt

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 64 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$2^n > n^3$$

für alle $n \geq 10$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 65 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$n! > 2^n.$$

Aufgabe 66 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$4n^3 - n$$

durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 67 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{\nu=2}^n \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 68 Gemäß einer alten Legende wollte der indische Kaiser Sheram dem Erfinder des Spiels Schach danken und gewährte ihm einen Wunsch. Dieser wollte nichts weiter als ein paar Weizenkörner und wünschte sich das Folgende. Auf dem ersten Schachfeld sollte ein Weizenkorn liegen, auf dem zweiten genau doppelt so viele, also zwei Weizenkörner. Auf dem dritten Feld sollten wiederum doppelt so viele Weizenkörner wie auf dem zweiten Feld liegen, und gemäß diesem Schema sollten alle 64 Felder des Schachbretts mit Weizenkörnern bestückt werden.

- a) Wie viele Weizenkörner musste der Kaiser aufbringen?
- b) Wie viele Weizenkörner müsste der Kaiser aufbringen, wenn er bei jedem neuen Feld die Anzahl der Weizenkörner verdreifachen sollte, das Schachbrett aber nur aus 34 Feldern bestünde?

Aufgabe 69 Seien $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ gegeben. Vervollständigen Sie jeweils die rechten Seiten in den unteren Ausdrücken so, dass eine gültige Gleichung entsteht.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^3 a_k\right)^2 &= \sum_{k=1}^3 a_k^2 \\ \sum_{k=4}^m a_k + \prod_{k=1}^m 5a_k &= \sum_{k=1}^{m-1} a_k + 5 \prod_{k=1}^m a_k \\ \left(\prod_{k=1}^m 6\right) \sum_{k=1}^{m-1} -2(b_k + a_k) &= 6 \left(\sum_{k=1}^{m-1} -2b_k + \sum_{k=2}^m a_k\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 70 Zeigen Sie, dass für $n, \nu \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$ gilt

$$\binom{n+1}{\nu} = \binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu}.$$

Aufgabe 71 Berechnen Sie das Folgende:

- a) In einem Restaurant stehen 20 Getränke zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten der Getränkeauswahl gibt es bei einer Bestellung von 10 Getränken.
- b) Die Anzahl der Möglichkeiten beim 20-maligen Münzwurf maximal 17-Mal Zahl zu werfen.
- c) Die Anzahl der dreistelligen Zahlen, in denen sich keine Ziffer wiederholt. Zahlen, die mit der Ziffer 0 beginnen sollen dabei nicht mitgezählt werden.

Aufgabe 72 a) In der Mensa stehen 6 Menüs zur Auswahl und Sie gehen mit 6 weiteren Kommilitonen zum Essen, von denen jeder genau ein Menü nimmt. Wie viele mögliche Menüauswahlen können dabei getroffen werden? Es soll dabei alleine die Auswahl, und nicht die Zuordnung zu den einzelnen Personen unterschieden werden.

b) Zeigen Sie, dass für $n, \nu \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$ gilt

$$\binom{n+1}{\nu} = \binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu}.$$

Aufgabe 73 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{\nu=1}^n (4\nu - 1) = 2n^2 + n.$$

D.5 Komplexe Zahlen

Aufgabe 74 Es seien $z = 2 + i4$ und $w = -3 + i2$. Berechnen Sie jeweils das Folgende und skizzieren Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene:

$$\begin{aligned} z_1 &:= z + w \\ z_2 &:= zw \\ z_3 &:= z^{-1}\bar{z} \\ z_4 &:= \operatorname{Re}(w) + i\operatorname{Im}(2z) \\ z_5 &:= \frac{w + i4}{z} \end{aligned}$$

(Wählen Sie für die Skizze einen sinnvollen Maßstab und fertigen Sie gegebenenfalls 2 Skizzen mit verschiedenen Maßstäben an.)

Aufgabe 75 Es seien $z = 3 + i2$ und $w = 4 - i3$. Berechnen Sie jeweils das Folgende und skizzieren Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene:

$$\begin{aligned} z_1 &:= z + w \\ z_2 &:= zw^2 \\ z_3 &:= z^{-1}\bar{z} \\ z_4 &:= \operatorname{Re}(w) + i\operatorname{Im}(2z) \\ z_5 &:= \frac{w + i2}{z} \end{aligned}$$

(Wählen Sie für die Skizze einen sinnvollen Maßstab und fertigen Sie gegebenenfalls 2 Skizzen mit verschiedenen Maßstäben an.)

Aufgabe 76 Es seien

$$z_1 := \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_3 := 1 + i.$$

Skizzieren Sie z_j , z_j^2 , z_j^3 , z_j^4 , $j = 1, 2, 3$, in der Gaußschen Zahlenebene. (Fertigen Sie jeweils eine Skizze für $(z_1)^n$, $(z_2)^n$, $(z_3)^n$ an.)

Aufgabe 77 Es seien

$$z_1 := i, \quad z_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_3 := -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Berechnen Sie

$$w_1 = z_1 z_2, \quad w_2 = z_2 z_3, \quad w_3 = z_1 z_3$$

und skizzieren Sie Ihre Ergebnisse in der Gaußschen Zahlenebene. Beschreiben Sie kurz Ihre Beobachtung (In welchem Zusammenhang stehen z.B. w_1 und z_3 ? Betrachten und beschreiben Sie dies geometrisch ohne auf die konkreten Zahlenwerte zu achten).

Aufgabe 78 Zeigen Sie, dass für z, w in \mathbb{C} folgendes gilt:

- a) $|zw| = |z| |w|$,
- b) $|z|^2 = \bar{z}z$,
- c) $\left| \frac{z}{|z|} \right| = 1, z \neq 0$.

Aufgabe 79 Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

- a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq 4, \operatorname{Im}(z) \geq -5, \operatorname{Re}(z) > -4\}$,
- b) $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| < 3, |1/z| < 1/2\}$,
- c) $\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\}$.

Aufgabe 80 Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

- a) $\{z \in \mathbb{C} : 3\operatorname{Im}(z) \leq 12 \wedge \operatorname{Re}(z) > -2\}$,
- b) $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| < 5 \wedge |1/z| < 1/3\}$,
- c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 2 \wedge |z + i| = 3\}$.

Aufgabe 81 Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

- a) $\{z \in \mathbb{C} : 4\operatorname{Im}(z) \geq -12 \wedge -2\operatorname{Re}(z) \leq 6 \wedge \operatorname{Re}(z) < \frac{3}{2}\}$,
- b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \vee |z - 1| = 1\}$,
- c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 2 \wedge |z + 2| < 3\}$.

Aufgabe 82 Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

- a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 1 \wedge -\operatorname{Im}(z) > -1\},$
- b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 3 \wedge |z - i| \leq 2 \wedge |z + (-1 - i)| \geq 1\},$
- c) $\{z \in \mathbb{C} \wedge \operatorname{Im}(z) \neq 0 : \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)} \geq 1 \wedge |z| \leq 3\}$

Aufgabe 83 Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

- a) $\{z \in \mathbb{C} : \begin{aligned} & \left(\operatorname{Im}(z) > 0 \wedge \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)} \geq 1 \right) \\ & \vee (\operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0) \\ & \vee \left(\operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \geq 1 \right) \end{aligned} \},$
- b) $\{z \in \mathbb{C} : -1 \cdot \operatorname{Re}(z) + 1 \cdot \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$
- c) $\{z \in \mathbb{C} : -1 \cdot \operatorname{Re}(z) + 1 \cdot \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$
- d) Vergleichen Sie die Aufgabenteile b) und c) mit der Darstellung von Hyperebenen in 2 Dimensionen (Siehe Vorlesung Lineare Algebra). Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 84 Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - (-2 + i)| - 2 \leq 0\},$
- b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + 2 \geq -1 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 2\}$

Sie haben in der Vorlesung *Lineare Algebra* das Konzept von Hyperebenen kennengelernt. Im \mathbb{R}^2 ist eine Hyperebene genau eine Gerade die den Raum teilt. Der \mathbb{R}^2 ist hier sehr ähnlich zu \mathbb{C} ; oder mit anderen Worten, wir können die Komplexe Ebene \mathbb{C} auch als zweidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^2 betrachten ⁴. Dies erlaubt uns nun beliebige Geraden in der Komplexen Ebene zu zeichnen.

Eine Hyperebene im \mathbb{R}^2 ist definiert als $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle n, x \rangle = \langle n, v \rangle\}$ wobei $n \in \mathbb{R}^2$ der Normalenvektor und $v \in \mathbb{R}^2$ der Verschiebevektor der Hyperebene sind.

⁴Für viele Anwendungen können der \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} als zwei verschiedene Darstellungsformen der selben Sache betrachtet werden. Es ist aber wichtig festzuhalten, dass $\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{C}$, da es Applikationen gibt bei denen sich beide in ihrem Verhalten unterscheiden!

- c) Passen Sie die Darstellungsform der Hyperebenen im \mathbb{R}^2 so an, dass Sie allgemeine Geraden in \mathbb{C} beschreiben können.

Nutzen Sie dieses Wissen nun um zunächst die folgenden beiden Begrenzungsgeraden zu zeichnen und überlegen Sie dann welche Hälfte der Komplexen Ebene die gesuchte Lösung ist (wegen des \leq).

d) $\{z \in \mathbb{C} : -1 \cdot \operatorname{Re}(z) + 1 \cdot \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : -1 \cdot \operatorname{Re}(z) + 1 \cdot \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$

Aufgabe 85 Es seien $P, Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Polynome beide vom Grad d so, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow Q(z) = 0,$$

und P habe d unterschiedliche Nullstellen. Zeigen Sie mit Hilfe des Fundamentalsatz der Algebra, dass dann gilt $P = cQ$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 86 a) Finden Sie ein Polynom P mit $\deg(P) = 3$ und, so dass P Nullstellen an $z_1 := 3 + i$, $z_2 := 2 + 2i$, $z_3 := 3i$

b) Finden Sie ein Polynom P mit reellen Koeffizient und mit $\deg(P) = 3$ so, dass P zwei Nullstellen hat, die nicht in \mathbb{R} liegen.

c) Finden Sie ein Polynom P mit $\deg(P) = 3$ und so, dass P Nullstellen an $z_1 := 1$, $z_2 := 2 + i$ und so, dass $P(0) = 2$ gilt.

Aufgabe 87 Es seien P ein Polynom vom Grad $d_1 > 0$ und Q ein Polynom vom Grad $d_2 > 0$. Zeigen Sie

a) $\deg(P + Q) \leq \max\{d_1, d_2\}$,

b) $\deg(P \cdot Q) = d_1 + d_2$.

Aufgabe 88 In der Vorlesung *Lineare Algebra* haben Sie gelernt wie Sie die Eigenwerte einer quadratischen Matrix berechnen können.

a) Beweisen (Argumentieren) Sie warum jede quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$ genau n Eigenwerte (in \mathbb{C} und inklusive algebraischer Vielfachheit) besitzt.

b) Beweisen Sie nun, dass jede quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n = 2 \cdot m + 1$, $m \in \mathbb{N}$ (also mit ungeradem n) mindestens einen Reellen Eigenwert besitzen muss.

D.6 Folgen und Reihen

Aufgabe 89 Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die Fälle:

a) $a_n := \frac{n+2}{n^2},$

b) $a_n := \frac{n^3 + in^2}{4 + n^3},$

c) $a_n := \frac{(-1)^n}{n^2} + 4 \frac{in^2}{4 + i3n^2}.$

Aufgabe 90 Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die Fälle:

a) $a_n := \frac{n+5}{n^3},$

b) $a_n := \frac{n^3 + in^3}{5 + n^3},$

c) $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 4 \frac{in^2}{4 + i3n^2}.$

Aufgabe 91 Untersuchen Sie die nachstehen Folgen auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_n = \frac{3^n}{4^{n+k} + 4}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ fest.

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{3^n}{n!}.$

Aufgabe 92 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n^k + \frac{1}{2^n}}{4n^3} (-1)^k,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ ein fester Parameter ist. Für welche k ist die Folge divergent und für welche k ist die Folge konvergent? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

Aufgabe 93 Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

mit $x_0 \in \mathbb{R}$ fest. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Aufgabe 94 Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ und $x_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x_k + x)^n - x^n}{x_k} = nx^{n-1}.$$

(Hinweis: Wenden Sie den binomischen Satz auf $(x_k + x)^n$ an, und untersuchen Sie summandenweise)

Aufgabe 95 a) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die nicht konvergent ist, aber sodass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n := (-1)^n a_n$$

konvergiert.

b) Finden Sie eine streng monoton wachsende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die konvergiert, aber sodass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n := (a_n)^n$$

nicht konvergiert.

c) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die nicht konvergent ist, aber sodass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n := (a_n)^{\frac{1}{n}}$$

konvergiert.

Aufgabe 96 a) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + i$$

und $|a_n| < \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1,$$

und $|a_n| = 1$ und $a_n \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 97 Die nachstehenden rekursiven Folgen sind konvergent. Bestimmen Sie jeweils die Grenzwerte mit Hilfe von Satz [7.24](#).

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_{n+1} = \sqrt{a_n} - \frac{1}{4}$, mit $2 = a_1$.

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$, mit $\xi = 1$.

Aufgabe 98 Finden Sie eine rekursive Folge, die nicht konvergent ist und nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt.

Aufgabe 99 Es sei $q > 0$ und $a_n = q^{\frac{1}{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $q < 1$ die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton steigend und für $q > 1$ streng monoton fallend ist. Zeigen Sie weiter, dass nach dem Hauptsatz über monotone Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ damit konvergent für alle $q > 0$ ist.

Aufgabe 100 a) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \left(x^5 + \frac{1}{x}\right)^4 - \frac{1}{x^4}.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert von f an der Stelle $a = 0$

b) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Zeigen Sie, dass f an der Stelle $a = 0$ keinen Grenzwert hat.

Aufgabe 101 Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig an $a \in \mathbb{R}$ und $f(a) > 0$. Zeigen Sie, dass dann ein $\delta > 0$ so existiert, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $f(x) > 0$. (Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und führen Sie dies zum Widerspruch)

Aufgabe 102 Berechnen Sie die Reihenwerte der folgenden Reihen:

a)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(3\frac{1}{3^{\nu}} - 2\frac{1}{5^{\nu}}\right),$$

b)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\nu}} + \frac{1}{4^{\nu}}\right)^2.$$

Aufgabe 103 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := 5 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

Berechnen Sie die ersten drei Partialsummen der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$.

Aufgabe 104 Welche der folgenden Reihen ist nach Satz 7.32 sicher divergent:

- a) $\sum_{\nu=0}^{\infty} 4,$
- b) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (100 - \nu),$
- c) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{\nu}}),$
- d) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^{\nu}}{\nu!}.$

Aufgabe 105 a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} + 2 + \sqrt{\nu}}$$

konvergent ist.

b) Für welche $k \in \mathbb{Z}$ ist folgende Reihe divergent oder konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{k\nu}}{\nu^2}$$

Aufgabe 106 a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}$$

konvergent ist.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

divergent ist. (Hinweis: Finden Sie eine Folge (a_n) so, dass $a_n \leq 1/\sqrt{n}$ und so, dass die zugehörige Reihe divergiert. Überlegen Sie anschließend wie Sie mit dem Majoranten-Kriterium argumentieren können.)

Aufgabe 107 a) Welche Aussagen bezüglich der Konvergenz oder Divergenz der folgenden Reihen können Sie mithilfe von Satz 7.32 treffen.

0) Wann können Sie (Mithilfe von Satz 7.32) keine Aussage treffen?

i) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \pi$

ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1337 \cdot \nu)$

iii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})$

iv) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}$

v) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2023}{2^{\nu}}$

b) Für welche $k \in \mathbb{Z}$ ist folgende Reihe divergent oder konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{k+\nu}}{\nu^2}$$

Aufgabe 108 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu}$$

monoton wachsend ist.

Es gelte weiter $s_n < M$ für eine Konstante $M > 0$. Mit welchem Satz der Vorlesung können Sie daraus die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ folgern?

Aufgabe 109 Schreiben Sie die folgenden Zahlen in Polarkoordinaten: $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = 1 + i$, $z_6 = -1 - i$

Aufgabe 110 a) Finden Sie jeweils für $n = 2, 3, 4, 5$ alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$. Skizzieren Sie diese in der gaußschen Zahlenebene.

b) Begründen Sie, dass es für ein festes $n \in \mathbb{N}$ genau n komplexe Zahlen z gibt, für die gilt $z^n = 1$ (Hinweis: Fundamentalsatz der Algebra).

Aufgabe 111 Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Polarkoordinaten $z = |z| e^{i\varphi}$. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten-Darstellung von z^{-1} .

Aufgabe 112 Nachfolgend sind Lösungen einer generative KI zu Aufgabenstellungen diese Moduls aufgeführt. Diese Lösungen beinhalten mehrere mathematische Fehler oder Probleme in der Argumentation. Identifizieren Sie diese und korrigieren Sie die Lösungen.

1. Eingabe (Prompt): Bitte löse Folgendes: Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + i$$

und $|a_n| < \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Ausgabe der KI: Um eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden, die gegen $1 + i$ konvergiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ den Betrag $|a_n| < \sqrt{2}$ hat, können wir die komplexe Zahl $1 + i$ in Polarkoordinaten darstellen. Die komplexe Zahl $1 + i$ hat den Betrag $|1 + i| = \sqrt{2}$ und das Argument $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$. Wir können die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nun wie folgt definieren:

$$a_n = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

wobei e die Euler'sche Zahl ist. Diese Folge erfüllt die Bedingungen, da $|a_n| = \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$.

2. Eingabe (Prompt): Prüfen die folgende Aussage auf ihre Gültigkeit, und beweisen Sie diese bzw. widerlegen Sie diese durch ein Gegenbeispiel. Für zwei Mengen A, B mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es keine Menge C mit $C \subset A$ und $C \subset B$.

2. Ausgabe der KI: Die Aussage ist wahr. Wenn $A \cap B = \emptyset$, bedeutet das, dass A und B keine gemeinsamen Elemente haben. Angenommen, es gäbe eine Menge C mit $C \subset A$ und $C \subset B$. Da $C \subset A$, müssen alle Elemente von C auch in A enthalten sein. Da $C \subset B$, müssen alle Elemente von C auch in B enthalten sein. Somit hätten wir Elemente, die sowohl in A als auch in B liegen, was im Widerspruch zur Voraussetzung $A \cap B = \emptyset$ steht. Daher gibt es keine solche Menge C .

Aufgabe 113 Nachfolgend ist eine Lösung einer generative KI zu einer Aufgabenstellung dieses Moduls aufgeführt. Diese Lösung beinhaltet mehrere mathematische Fehler oder Probleme in der Argumentation. Identifizieren Sie diese und korrigieren Sie die Lösung.

Eingabe (Prompt): Bitte löse folgende Aufgabe: Untersuchen Sie die nachstehende Folge auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_n = \frac{3^n}{4^{n+k}+4}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ fest.

Ausgabe der KI: Um die Konvergenz der Folge (a_n) zu untersuchen und den Grenzwert zu bestimmen, betrachten wir den Ausdruck $\frac{3^n}{4^{n+k}+4}$ für $n \in \mathbb{N}$ und ein festes $k \in \mathbb{Z}$.

Zuerst betrachten wir den Nenner $4^{n+k} + 4$. Da 4^{n+k} exponentiell schneller wächst als 4, kann der Nenner für große n vernachlässigt werden. Daher können wir den Ausdruck $\frac{3^n}{4^{n+k}+4}$ approximieren durch $\frac{3^n}{4^{n+k}}$ für große n .

Nun betrachten wir den Ausdruck $\frac{3^n}{4^{n+k}}$. Wir können dies umschreiben als $\left(\frac{3}{4^k}\right)^n$. Da $\frac{3}{4^k}$ konstant ist, können wir den Ausdruck als $(\text{konstant})^n$ interpretieren.

Es gibt zwei Möglichkeiten für den Grenzwert dieser Folge:

Wenn $\frac{3}{4^k} = 1$, dann ist der Grenzwert 1^∞ unbestimmt. In diesem Fall konvergiert die Folge nicht. Wenn $\frac{3}{4^k} \neq 1$, dann ist der Grenzwert 0^∞ , was gleich 0 ist. In diesem Fall konvergiert die Folge gegen 0. Zusammenfassend können wir sagen:

Wenn $\frac{3}{4^k} = 1$ für das gegebene feste k , dann konvergiert die Folge nicht. Wenn $\frac{3}{4^k} \neq 1$ für das gegebene feste k , dann konvergiert die Folge gegen 0.

Aufgabe 114 Nachfolgend ist eine Lösung einer generative KI zu einer Aufgabenstellung dieses Moduls aufgeführt. Diese Lösung beinhaltet einen oder mehrere Fehler oder Probleme in der Argumentation. Identifizieren Sie diese und korrigieren Sie die Lösung.

Eingabe (Prompt): Bitte löse folgende Aufgabe: Finden Sie eine streng monoton wachsende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die konvergiert, aber sodass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n := (a_n)^n$$

nicht konvergiert.

Ausgabe der KI:

Wir wählen $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge ist streng monoton wachsend und konvergiert gegen 1. Für die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt dann $b_n = (a_n)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Es ist bekannt, dass die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen die reelle Zahl e konvergiert (Eulersche Zahl). Daher konvergiert $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht.