Tutorium 04: Beweise und Relationen

- Fragen?
- Aussagenlogik (Nachtrag)

$$\neg(\forall_\Box : \Box) \Leftrightarrow (\exists_\Box : \neg\Box)$$

$$\neg(\exists_\Box : \Box) \Leftrightarrow (\forall_\Box : \neg\Box)$$

$$\neg(\Box \land \Box) \Leftrightarrow (\neg\Box \lor \neg\Box)$$

$$\neg(\Box \lor \Box) \Leftrightarrow (\neg\Box \land \neg\Box)$$

$$\neg(\Box > \Box) \Leftrightarrow (\Box \leq \Box)$$

$$\neg(\Box < \Box) \Leftrightarrow (\Box \geq \Box)$$

$$\neg(\Box \geq \Box) \Leftrightarrow (\Box < \Box)$$

$$\neg(\Box \leq \Box) \Leftrightarrow (\Box > \Box)$$

$$\neg(\Box = \Box) \Leftrightarrow (\Box \neq \Box)$$

$$\neg(\Box \neq \Box) \Leftrightarrow (\Box = \Box)$$

- Beweisprinzipien

(Mini-Test Aufgabensammlung)

3.1.14 Nennen Sie 5 **Beweisprinzipien**.

3.1.15 Auf welcher Aussagenlogischen Äquivalenz beruht das Beweisprinzip der Kontraposition?

3.1.16 Aus welchen beiden Teilbeweisen kann ein Äquivalenzbeweis aufgebaut werden?

3.1.17 Skizzieren Sie die Grundidee eines Beweises durch Widerspruch.

- direkter Beweis $\quad A \Rightarrow A_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$
  - Äquivalenzbeweis $\quad (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A))$
- Kontraposition $\quad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$
- Widerspruch $\quad (\neg A \Rightarrow f) \Rightarrow (A \Rightarrow w)$
- vollständige Induktion $\quad$ [Kapitel 5]

<u>direkter Beweis:</u>
Wenn a und b gerade Zahlen sind, dann ist die Summe $a + b$ auch eine gerade Zahl.

Sei $N = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2 \cdot m,\ m \in \mathbb{N}\}$.

z.z.: $((a \in N) \land (b \in N)) \Rightarrow ((a+b) \in N)$

direkter Beweis:

$$((a \in N) \wedge (b \in N)) \Rightarrow ((\exists_{m_a \in \mathbb{N}} : 2 \cdot m_a = a) \wedge (\exists_{m_b \in \mathbb{N}} : 2 \cdot m_b = b))$$

$$\Rightarrow (a+b) = (2 \cdot m_a + 2 \cdot m_b) = 2 \cdot (m_a + m_b) \overset{\text{mit } m_a + m_b = m'}{\Rightarrow} (a+b) = 2 \cdot m' \Rightarrow (2 \cdot m') \in N$$

$$\Rightarrow ((a+b) \in N) \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>direkter Beweis:</u>
Wenn n eine natürliche Zahl ist, dass ist $n + (n+1) + (n+2)$ durch 3 teilbar.

z.z.: $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (3 \mid (n + (n+1) + (n+2)))$

direkter Beweis:

$$(3 \mid (n + (n+1) + (n+2))) \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} : 3 \cdot k = (n + (n+1) + (n+2))$$

$$\Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} : 3 \cdot k = n + n + 1 + n + 2$$

$$\Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} : 3 \cdot k = 3 \cdot n + 3$$

$$\Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} : 3 \cdot k = 3 \cdot (n+1)$$

$$\overset{\text{mit } (n+1) = k'}{\Leftrightarrow} \exists_{k \in \mathbb{N}} : 3 \cdot k = 3 \cdot k'$$

w.A. mit $k = k'$ q.e.d.

Ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b und c ist genau dann an C rechtwinklig, wenn gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Satz des Pythagoras + Umkehrung

z.z.: $\forall_{x \in \mathbb{Z}} : (x \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x > 0)$

Äquivalenz-Beweis:

noch z.z.: $(\forall_{x \in \mathbb{Z}} : (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x > 0)) \wedge (\forall_{x \in \mathbb{Z}} : (x > 0) \Rightarrow (x \in \mathbb{N}))$

- $\forall_{x \in \mathbb{Z}} : (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x > 0)$

  $\Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{N}} : x > 0$ w.A. nach Definition

- $\forall_{x \in \mathbb{Z}} : (x > 0) \Rightarrow (x \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow \forall_{x\in\mathbb{Z},\, x>0}: x \in \mathbb{N}$ w.A. nach Definition

$\blacksquare$

z.z.: $\forall_{x\in\mathbb{Z}}: \overbrace{(x \geq 1)}^{A} \Rightarrow \overbrace{(x > 0)}^{B}$

<u>Beweis durch Kontraposition:</u>

$\forall_{x\in\mathbb{Z}}: (x \geq 1) \Rightarrow (x > 0)$

$\Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{Z}}: \neg(x > 0) \Rightarrow \neg(x \geq 1)$

$\Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{Z}}: (x \leq 0) \Rightarrow (x < 1)$

noch z.z.: $\forall_{x\in\mathbb{Z}}: (x \leq 0) \Rightarrow (x < 1)$

<u>direkter Beweis:</u>

Sei $x \in \mathbb{Z}$.

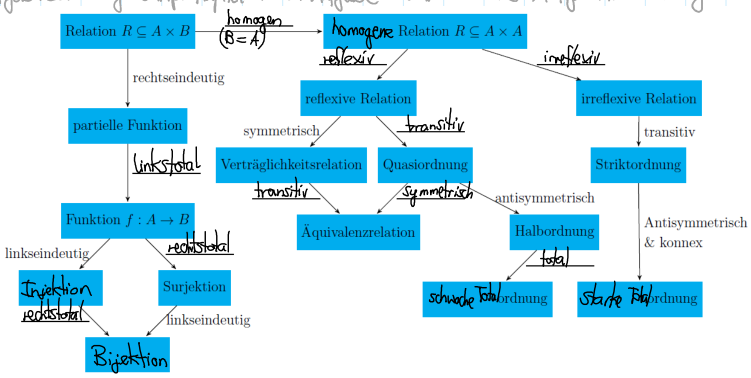
$x \leq 0 \overset{\text{mit } 0<1}{\Rightarrow} x \leq 0 < 1 \Rightarrow x < 1$

q.e.d

z.z.: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Widerspruchsbeweis)

- Relationen

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.3 / Aufgabe 46 // Mini-Test-Aufgabensammlung 4.1.15)



Definition 3.6 Es sei R eine (homogene) Relation auf einer Menge M. Dann heißt R

1. **reflexiv**, wenn für alle $x \in M$ gilt: $(x, x) \in R$,
2. **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$,
3. **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$,
4. **irreflexiv**, wenn für alle $x \in M$ gilt: $(x, x) \notin R$,
5. **konnex**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x \neq y \Rightarrow (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$
6. **antisymmetrisch** (oder identitiv), wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$,
7. **asymmetrisch** wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$,
8. **total** wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$,
9. **trichotom**, wenn für alle $x, y \in M$ genau eine der folgenden Aussagen gilt: $(x, y) \in R$, $(y, x) \in R$. $x = y$.

Satz 3.7 *Es sei R eine (homogene) Relation auf der Menge M. Dann gilt folgendes:*

1. *R ist asymmetrisch $\Leftrightarrow$ R ist antisymmetrisch und irreflexiv,*
2. *R ist trichotom $\Leftrightarrow$ R ist asymmetrisch und konnex,*
3. *R ist total $\Leftrightarrow$ R ist konnex und reflexiv,*
4. *falls zusätzlich $R \neq \emptyset$: R ist symmetrisch $\Rightarrow$ R ist nicht asymmetrisch,*
5. *falls zusätzlich $R \neq \emptyset$: R ist asymmetrisch $\Rightarrow$ R ist nicht symmetrisch,*
6. *falls zusätzlich $M \neq \emptyset$: R ist reflexiv $\Rightarrow$ R ist nicht irreflexiv,*
7. *falls zusätzlich $M \neq \emptyset$: R ist irreflexiv $\Rightarrow$ R ist nicht reflexiv.*