Tutorium 01: Mengen, Mengenoperationen und kartesisches Produkt

- Fragen?
- Menge oder nicht?
  - $\{1, 2, 2, 3\}$ ✗
  - $\{\ \}$ ✓ $= \emptyset$
  - { :-), :-c, ;-) } ✓
  - $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\}$ (✓)
  - $\{\{0,1\}, \{1\}, \{0\}\}$ ✓
  - $\emptyset \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$
  - $\{1,2,3,4\} \neq \{0,1,2,3,4\}$
  - $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$

Definition 1.1 Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Ein solches Objekt x heißt **Element** der Menge M, Schreibweise:

$$x \in M.$$

Ist x nicht Element von M, so schreiben wir

$$x \notin M.$$

Die Menge ohne Elemente heißt die **leere Menge**, Schreibweise:

$$\emptyset \text{ oder } \{\}.$$

- „Teilmenge" oder „Element"

  Sei $M = \{1, 2\}$.
  - $1 \in M$
  - $\{1\} \subset M$
  - $\{3\} \not\subset M$
  - "A" $\notin M$

- Mengenoperationen

  (Mini-Test-Aufgabensammlung 1.2.1)

  Seien $M_1 = \{0, 1, 2\}$, $M_2 = \{2, 3, 4\}$ und $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Berechnen Sie $M_1 \cup M_2$, Seien $M_1 = \{0,1,2\}$, $M_2 = \{2,3,4\}$ und $M = \{0,1,2,3,4,5\}$. Berechnen Sie $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M \setminus M_1$, $M \setminus M_2$, $M_1^{c(M)}$ und $M_2^{c(M)}$.

- $M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,0\}$
- $M_1 \cap M_2 = \{2\}$
- $M \setminus M_1 = \{3,4,5\} = M_1^{c(M)}$
- $M \setminus M_2 = \{0,1,5\} = M_2^{c(M)}$

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 2 Es seien $M := \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $M_1 := \{-2,-1,0\}$, $M_2 := \{1,4,9\}$ und $M_3 := \{2,4,6,8\}$. Bestimmen Sie

$$M_1 \cup M_2,\ M_2 \cup M_3,\ M_1 \cap M_2,\ M_1^{c(M)},\ (M_2 \cup M_3)^{c(M)},\ M \setminus (M_1 \cup M_3)$$

- $M_1 \cup M_2 =$
- $M_2 \cup M_3 =$
- $M_1 \cap M_2 =$
- $M_1^{c(M)} =$
- $(M_2 \cup M_3)^{c(M)} =$
- $M \setminus (M_1 \cup M_3) =$

- Kartesisches Produkt

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.1.1 Wie ist das **Karthesische Produkt** zweier Mengen M_1 und M_2 definiert?

1.1.2 Wie ist das **Karthesische Produkt** von n Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ definiert?

(HowTo: Definitionen lesen, v3)

Definition 1.9 Es seien M_1, M_2 zwei nichtleere Mengen, dann heißt

$$\boxed{M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2\}}$$

☐ Der „Hauptteil"
ist der zum Rechnen oder Anwenden interessante Teil. Hier stehen häufig irgendwelche Symbole und Funktionen, die bereits definiert wurden. (Diese Definitionen kann man im Zweifelsfall auch nochmal lesen.)

Definition 1.9 Es seien $\boxed{M_1,\ M_2 \text{ zwei nichtleere Mengen}}$, dann heißt

$$\boxed{M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2\}}$$

(Menge der geordneten 2-Tupel) das **kartesische Produkt** von M_1 und M_2. Seien allgemeiner mehrere nichtleere Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ gegeben, dann heißt

$$\boxed{M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in M_j,\ j = 1, \ldots, n\}}$$

das **kartesische Produkt** der Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$.
Gilt weiter $M := M_1 = M_2 = \ldots = M_n$, so schreibt man auch

$$\boxed{M^n = \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n-\text{mal}}.}$$

- Der „Hauptteil"
  ist der zum Rechnen oder Anwenden interessante Teil. Hier stehen häufig irgendwelche Symbole und Funktionen, die bereits definiert wurden. (Diese Definitionen kann man im Zweifelsfall auch nochmal lesen)
- Die „Bedingungen"
  ist der Teil, in denen verwendete Symbole genau festgelegt werden. Falls hier so etwas wie $x \in \mathbb{R}^n$ steht, wissen wir, dass x ein Vektor mit n-Komponenten im reellwertigem Bereich ist.
- Die „definierten Begriffe"
  in diesem Bereich werden Schlüsselwörter eingeführt, die später in anderen Definitionen wieder auftauchen können.

(Mini-Test-Aufgabensammlung 1.2.2)

Seien $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{-1, -2\}$. Berechnen Sie $M_1 \times M_2$, M_1^2 und M_2^2

- $M_1 \times M_2 = \{(1,-1), (1,-2), (2,-1), (2,-2)\}$
- $M_1^2 = M_1 \times M_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$
- $M_2^2 = M_2 \times M_2 = \{(-1,-1), (-1,-2), (-2,-1), (-2,-2)\}$

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 7 a) Bestimmen Sie alle Element aus

$$(\{1, 2\} \times \{3, 7\})^2$$

a) $(\{1,2\} \times \{3,7\})^2 = (\{(1,3), (1,7), (2,3), (2,7)\})^2$

$= \{((1,3),(1,3)), ((1,3),(1,7)), \ldots\}$

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 5 a) Skizzieren Sie die Menge $[4, 8] \times \{-1, 1, 2\}$.

b) Schreiben Sie folgende Menge durch Aufzählen all ihrer Elemente $(\mathbb{Z} \times \{1, 3\}) \cap (\{1, 2\} \times \mathbb{Z})$.

(Beispielklausur Aufgabe 1d))

Schreiben Sie folgende Menge in der Mengenschreibweise (d.h. Mengenklammern, etc.): Die Menge aller Teilmengen der Menge der rationalen Zahlen, die die Null nicht enthalten.

$\tilde{M} = \{x \in \mathbb{Q} : x \neq 0\} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $\{M_i \subset \tilde{M} : i \in \mathbb{N}\}$

oder

$\{M : M \subset (\mathbb{Q} \setminus \{0\})\}$

(Beispielklausur Aufgabe 1d))

Schreiben Sie folgende Menge in der Mengenschreibweise (d.h. Mengenklammern, etc.): *Die Menge aller Teilmengen der reellen Zahlen, die alle negativen Zahlen enthalten.*

$\{M : M \subset \mathbb{R} \setminus [0, \infty)\}$

oder

$\{M : M \subset \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}\}$

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1, Aufgabe 7)

b) Schreiben Sie folgende Menge mit Hilfe der mathematischen Mengenschreibweise: *Die Menge aller Bilder mit 100 mal 100 Pixeln, wobei jedes Pixel durch drei Farbkanäle erzeugt wird, die ihrerseits jeweils Werte aus* $\{0, 1, ..., 255\}$ *annehmen können.*

b)

- Fragen?