- Fragen?
- Algebraische Strukturen: Restklassenringe

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

5.2.4 Berechnen Sie:

- $[7]_5 + [4]_5 = [7+4]_5 = [11]_5 = [1]_5$
- $[-3]_8 + [10]_8 \cdot [9]_8 = [87]_8 = [7]_8$
- $([2]_{11}^{-1} + [5]_{11}) \cdot [3]_{11} = ([6]_{11} + [5]_{11}) \cdot [3]_{11} = [11]_{11} \cdot [3]_{11} = [0]_{11} \cdot [3]_{11} = [0]_{11}$
- $[5]_{17}^{-1} \cdot [5]_{17} - [9]_{17} \cdot [9]_{17}^{-1} = [1]_{17} - [1]_{17} = [0]_{17}$

Aufgabe 48 a) Berechnen Sie das Folgende:

$$\left([3]_{11}^{-1}\right)^{-1} \cdot ([9]_{11} + [-1]_{11}) = [3]_{11} \cdot [8]_{11} = [24]_{11} = [2]_{11}$$
$$[3]_7^{-1} + [1]_7 + [5]_7 = [5]_7 + [1]_7 + [5]_7 = [11]_7 = [4]_7$$
$$[3]_7 \cdot [6]_7^{-1} \cdot [-1]_7 = [3 \cdot 6 \cdot (-1)]_7 = [-18]_7 = [3]_7$$

Geben Sie dabei das Ergebnis in Standardrepräsentanten an.

b) Geben Sie zu jedem Element in $\mathbb{Z}_{11} \setminus \{[0]_{11}\}$ das inverse Element bezüglich der Multiplikation (in Standardrepräsentanten) an. Wieso $\forall_{z \in (\mathbb{Z}_{11} \setminus \{[0]_{11}\})}$?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$[x]_{11}^{-1}$	1	6	4	3	9	2	8	7	5	10

Aufgabe 49 Berechnen Sie das Folgende:

$$[7]_4 + [2]_4 + [-3]_4$$
$$[4]_{11} + [5]_{11} + [2]_{11}$$
$$[52]_5 \cdot [101]_5 \cdot [-1]_5$$
$$([5]_{17} \cdot [4]_{17}) + [-3]_{17}$$
$$[-1]_{-2} + ([6]_{-2} \cdot [8]_{-2}).$$

Geben Sie dabei das Ergebnis mittels des kleinsten nicht-negativen Repräsentanten der Äquivalenzklasse an (Standardrepräsentanten).

Aufgabe 50 a) Berechnen Sie das Folgende:

$$\left([3]_{17}^{-1}\right)^{-1} \cdot ([-5]_{17} + [7]_{17})$$
$$[3]_{11}^{-1} + [3]_{11} + [5]_{11}$$
$$[3]_5 \cdot [6]_5^{-1} \cdot [-1]_5$$

Geben Sie dabei das Ergebnis in Standardrepräsentanten an.

b) Geben Sie zu jedem Element in $\mathbb{Z}_{13} \setminus \{[0]_{13}\}$ das inverse Element bezüglich der Multiplikation (in Standardrepräsentanten) an.

5.2.3 Betrachten Sie den endlichen Restklassenkörper über $\mathbb{Z}_{13}$ mit entsprechender Addition und Multiplikation. (a) Geben Sie alle Elemente der Grundmenge an. (b) Geben Sie weiter zu allen Elementen, zu welchen es existiert, jeweils das inverse Element bezüglich der Multiplikation an.

(a) $\mathbb{Z}_{13} = \{[0]_{13}, \ldots, [12]_{13}\}$

e) Lösen Sie die nachfolgende Gleichung nach $[x]_{11}$ auf, und berechnen Sie damit anschließend $[x]_{11}$ (mit x als Standardrepräsentanten):

$$([2]_{11} \cdot [x]_{11}) + [5]_{11} = [0]_{11} \quad | + [-5]_{11}$$
$$\Leftrightarrow ([2]_{11} \cdot [x]_{11}) + [5]_{11} + [-5]_{11} = [-5]_{11}$$
$$\Leftrightarrow [2]_{11} \cdot [x]_{11} = [6]_{11} \quad | \cdot [2]_{11}^{-1}$$

$[2 \cdot x]_{11} = [6]_{11}$

$\Rightarrow x=3$, da $[2]_{11} \cdot [3]_{11} = [6]_{11}$

$$\begin{aligned} [x]_{11} &= [6]_{11} \cdot [2]_{11} \\ &= [6]_{11} \cdot [6]_{11} \\ &= [36]_{11} = [3]_{11} \end{aligned}$$

Aufgabe 55 Betrachten Sie den kommutativen Ring $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ über der endlichen Menge $\mathbb{Z}_4$.

a) Zählen Sie die Elemente von $\mathbb{Z}_4$ auf.

b) Zählen Sie konkret alle „atomaren" Eigenschaften auf, die nachzuweisen sind um zu zeigen, dass $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. (konkret: also nicht nnur die Namen der Eigenschaften, sondern wie diese explizit für $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ aussehen.)

c) Wenn Sie die Ringeigenschaften nachweisen wollten ($\leftarrow$ Konjunktiv, Sie müssen das hier nicht tun) indem Sie Für jede Eigenschaft alle möglichen Kombinationen an Elementen einsetzen,

c)1. wie viele verschiedene Kombinationen an Elementen gibt es, die Sie probieren müssten,

c)2. und wie viele Einzelbeweise ergeben sich damit insgesamt?

(„atomare" Eigenschaften: Eine Eigenschaft ist dann atomar, wenn Sie nicht aus „ kleineren" Eigenschaften zusammengesetzt ist. Falls in einer Definition eine zusammengesetzte Eigenschaft steht, sollen Sie also die Bausteine dieser Eigenschaft einzeln betrachten.)

Aufgabe 56 Betrachten Sie die Restklassenringe $\mathbb{Z}_m$ für $m > 2$ und sei m eine gerade Zahl (also $m \mod 2 = 0$).

a) Versuchen Sie für $m \in \{4, 6, 8\}$ jeweils die inversen Elemente bezüglich der Multiplikation aller Elemente des jeweiligen Restklassenrings zu bestimmen (Erwartungsgemäß wird dies nicht für alle Elemente gelingen!).

b) Zeigen Sie allgemein, dass es in den Restklassenringen mit geradem Modul m **stets** Elemente gibt, zu denen keine Inversen bezüglich Multiplikation gefunden werden können.

(Hinweis: Rufen Sie sich ins Gedächtnis wie inverse Elemente definiert sind. Weiter haben Sie vielleicht feststellen können, dass es eine Zahl gibt deren Restklassen in keinem der ausprobierten Ringe ein Inverses besitzen; Beschreiben Sie das gesuchte Inverse zu dieser Zahl allgemein und zeigen Sie, dass es hier nicht existieren kann.)

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$[x]_4^{-1}$	n.d.	1	n.d.	3	\	\	\	\
$[x]_6^{-1}$	n.d.	1	n.d.	n.d.	n.d.	5	\	\
$[x]_8^{-1}$	n.d.	1	n.d.	3	n.d.	5	n.d.	7

b) z.z.: $\forall_{m \in \mathbb{N},\, m \text{ gerade},\, m>2} \quad \exists_{x \in (\mathbb{Z}_m \setminus \{[0]_m\})} \quad \forall_{y \in \mathbb{Z}_m} : [x]_m \cdot [y]_m \neq [1]_m$

$\rightsquigarrow$ existiert mindestens ein ...

Sei $x = 2$.

$\leadsto \forall_{m \in \mathbb{N},\, m \text{ gerade},\, m>2} \quad \forall_{y \in \mathbb{Z}_m} : [2]_m \cdot [y]_m \neq [1]_m$

$\Leftrightarrow$ " $: [2 \cdot y]_m \neq [1]_m$

$\Leftrightarrow$ " $: 2 \cdot y + k \cdot m \neq 1 + k' m \quad ; k, k' \in \mathbb{Z} \qquad | - k' \cdot m$

$\Leftrightarrow$ " $: 2 \cdot y + k \cdot m - k' m \neq 1$

$\Leftrightarrow$ " $: 2y + (k - k') \cdot m \neq 1$

$m = 2 \cdot n, n \in \mathbb{N}; j = k - k', j \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{y \in \mathbb{Z}_m} : 2 \cdot y + j \cdot (2 \cdot n) \neq 1$

$\Leftrightarrow$ " $: 2 \cdot (y + n \cdot j) \neq 1 \qquad |:2$

$\Leftrightarrow$ " $: \underbrace{\underset{\in „\mathbb{Z}"}{y} + \underbrace{\underset{\in \mathbb{N}}{n} \cdot \underset{\in \mathbb{Z}}{j}}_{\in \mathbb{Z}}}_{\in \mathbb{Z}} \neq \underset{\in \mathbb{Q}}{\tfrac{1}{2}}$

w.A.

q.e.d.

· Beweis 4.16.

Satz 4.16 *Für $m \in \mathbb{N}$ ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ (Definition 3.11) ein Körper, genau dann, wenn m eine Primzahl ist.*

Gilt $m \notin \mathbb{P}$, so gibt es natürliche Zahlen $m > p, q > 1$ mit $pq = m$. Damit folgt

$$[p]_m \cdot [q]_m = [m]_m = [0]_m.$$

Wäre nun $\mathbb{Z}_m$ ein Körper, so würde nach Satz $\boxed{4.13\ 2.}$ gelten, dass $[p]_m = 0$ oder $[q]_m = 0$. Dies kann aber wegen $m > p, q > 0$ nicht sein.

Satz 4.13 *Es sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper. Dann gelten:*

1. *Für alle $x \in K$ ist $x \odot 0 = 0$*
2. $\boxed{\textit{Für alle } x, y \in K \textit{ mit } x \odot y = 0 \textit{ folgt } x = 0 \textit{ oder } y = 0}$
3. *Für alle $x, y \in K$ gilt $-(x \odot y) = -x \odot y = x \odot (-y)$*

- Was fehlt dem Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ $(m \in \mathbb{N})$ zum Körper?

Bemerkung und Definition 4.8 Es sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und R_m die Kongruenz-Relation modulo m (vgl. 3.11). Dann heißt

$$\mathbb{Z}_m := \{[x]_m : x \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge der **Restklassen** modulo m. Nach (3.4) ist

$$[x]_m := \{y \in \mathbb{Z} : y = x + k\,m,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Auf $\mathbb{Z}_m$ definieren wir zwei Verknüpfungen wie folgt. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sei die Addition der zugehörigen Äquivalenzklassen definiert durch

$$[x]_m + [y]_m = [x + y]_m$$

und die Multiplikation sei definiert durch

$$[x]_m \cdot [y]_m = [x \cdot y]_m\,.$$

Damit ist $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ein Ring und $\mathbb{Z}_m$ und wird als **Restklassenring** modulo m bezeichnet.

Definition 4.7 Es sei R eine Menge und $\oplus : R \times R \to R$ und $\odot : R \times R \to R$ zwei Verknüpfungen. Dann ist $(R, \oplus, \odot)$ ein **Ring**, wenn gilt:

1. $(R, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. Für alle $x, y, z \in R$ gilt $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$ (Assoziativität).
3. Für alle $x, y, z \in R$ gelten $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$ und $(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$ (Distributivgesetze).

Weiter heißt $(R, \oplus, \odot)$ **kommutativer Ring**, wenn zusätzlich gilt

4. $x \odot y = y \odot x$ für alle $x, y \in R$.

Definition 4.9 Es sei K eine Menge mit mindestens zwei Elementen und $\oplus : K \times K \to K$ und $\odot : K \times K \to K$ zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation). Dann ist $(K, \oplus, \odot)$ ein **Körper**, wenn gilt:

1. $(K, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe. Dabei sei das neutrale Element bezüglich $\oplus$ mit 0 bezeichnet und für ein $x \in K$ sei das inverse Element (bezüglich $\oplus$) mit $-x$ bezeichnet.
2. Es gelten
   - $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ für alle $x, y, z \in K$,
   - es gibt ein neutrales Element $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ bezüglich $\odot$[a],
   - zu jedem $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert ein $x^{-1} \in K$ so, dass $x^{-1} \odot x = 1$ [b],
   - für alle $x, y \in K$ ist $x \odot y = y \odot x$
3. Für alle $x, y, z \in K$ gelten $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$ und $(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$ (Distributivgesetze).

[a] 1 ist hier ein Symbol (und nicht notwendigerweise die numerische Eins).
[b] „hoch −1“ ist eine symbolische Schreibweise

Gilt $m \in \mathbb{P}$, so gilt für jedes $k \in \{1, \ldots, m-1\}$

$$\operatorname{ggT}(k, m) = 1$$

(ggT meint größter gemeinsamer Teiler). Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus (vgl. Anhang) folgt die Existenz von $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$l_1 m + l_2 k = 1.$$

z.z.: Die Gleichung $l_1 \cdot m + l_2 \cdot k = 1$ ist genau dann lösbar, wenn $\operatorname{ggT}(m, k) = 1$ gilt.
(https://www.youtube.com/watch?v=ftm-9hgXn4M)

Also gilt

$$[1]_m = [l_1 m]_m + [l_2 k]_m = [0]_m + [l_2]_m\,[k]_m = [l_2]_m\,[k]_m,$$

sodass $[l_2]_m$ multiplikatives Inverses zu , $[k]_m$ ist.

Aufgabenblatt: Summen und Produkte

1. Aufgabe: Summen: Zuordnen

a) $\sum_{i=0}^{5} i =$
b) $\sum_{i=1}^{6} i =$
c) $\sum_{i=1}^{4} 2i =$
d) $\prod_{i=0}^{3} i^2 =$

i) $1+2+3+4+5+6=$
ii) $2+4+6+8=$
iii) $0 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 9 =$
iv) $0+1+2+3+4+5=$

2. Aufgabe: Benennen: Summe

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i)$$

a) i ist ...
b) a ist ...
c) b ist ...
d) (x_i) ist ...

3. Aufgabe: Summen Berechnen

a) $\sum_{i=1}^{3} i =$
b) $\sum_{k=-1}^{3}(k+1) =$
c) $\sum_{n=3}^{10}(\frac{n}{2}) =$
d) $\sum_{j=1}^{3} j^2 =$
e) $\sum_{\lambda=3}^{3} \lambda^\lambda =$
f) $\sum_{m=4}^{2} \frac{m^7}{m!} =$
g) $\sum_{\psi=1}^{50} \psi =$
h) $\sum_{i=1}^{7} x_i =$

4. Aufgabe: rechnen mit Summen

a) $(\sum_{i=1}^{4} i) + (\sum_{i=1}^{4} i) =$
b) $\sum_{k=1}^{3} k + \sum_{j=1}^{3} j =$
c) $\sum_{n=1}^{3} n + \sum_{n=4}^{6} n =$
d) $\sum_{\psi=1}^{3} \psi + \sum_{\lambda=4}^{6} \lambda =$

5. Aufgabe: Indexverschiebung: Zuordnen

a) $\sum_{i=0}^{5} i + \sum_{i=2}^{7}(i-2)$
b) $\sum_{i=1}^{6} i$
c) $\sum_{n=1}^{4} 2(n+1)$

i) $\sum_{m=3}^{6} 2(m-1)$
ii) $\sum_{i=0}^{5} 2i = 2\sum_{i=0}^{5} i$
iii) $\sum_{j=-1}^{4}(j+2)$

6. Aufgabe: Schreibe als Summe

a) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=$
b) $2+4+6+8=$
c) $6+9+12+15=$
d) $-1-2-3-4=$
e) $4+2+8+10+6=$
f) $3+4+5+7+8+9=$

7. Aufgabe: Benennen: Produkt

$$\prod_{i=a}^{b}(x_i)$$

a) i ist ...
b) a ist ...
c) b ist ...
d) (x_i) ist ...

8. Aufgabe: Produkte: Zuordnen

a) $\prod_{i=1}^{5} 2i$
b) $\prod_{j=4}^{6} 3j$
c) $\prod_{i=5}^{6} 2i$

i) $3^3 \prod_{k=4}^{6} k$
ii) $2^5 \prod_{i=1}^{5} i$
iii) $2^2(5 \cdot 6)$

9. Aufgabe: Schreibe als Produkt

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 =$
b) $4! =$
c) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 =$
d) $4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 =$

10. Aufgabe: geschachtelte Summen und Produkte

a) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} i \cdot j =$
b) $\prod_{n=1}^{2} \prod_{m=2}^{3} n^m =$
c) $\sum_{i=1}^{3} \prod_{m=2}^{4}(i+m) =$
d) $\prod_{n=1}^{3} \sum_{i=0}^{2} n \cdot i =$

Cheat-Sheet: Summen und Produkte

Formel: **Triviale Summen**

$$\sum_{i=a}^{a}(x_i) = x_a$$

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i) = 0 \text{ falls } b < a$$

Formel: **Distributivgesetz bei Summen**

Ein konstanter Faktor kann aus einer Summe ausgeklammert werden:

$$\sum_{i=a}^{b} c \cdot (x_i) = c \cdot \sum_{i=a}^{b}(x_i)$$

Die „Pünktchenschreibweise“ motiviert dies aus dem bekannten Distributivgesetz heraus sehr anschaulich:

$$\sum_{i=1}^{n}(c \cdot x_i) = (c \cdot x_1) + (c \cdot x_2) + (c \cdot x_3) + \cdots + (c \cdot x_n) = c \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = c \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i)$$

Formel: **Summen aufspalten & zusammenfassen**

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i) + \sum_{j=b+1}^{c}(x_j) = \sum_{k=a}^{c}(x_k) = \sum_{j=a}^{b'-1}(x_j) + \sum_{i=b'}^{c}(x_i) = x_a + \sum_{i=a+1}^{c}(x_i) = \sum_{i=a}^{c-1}(x_i) + x_c$$

Beachte, dass ein Zusammenfassen nur möglich ist, wenn die „Körper“ beider Summen zusammenpassen. Außerdem wird immer implizit angenommen, dass $a \leq b < c$ bzw. $a < b' \leq c$.

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i) + \sum_{j=a}^{b}(y_j) = \sum_{k=a}^{b}(x_k + y_k)$$

Summen mit unterschiedlichen „Körpern“ können zusammengefasst werden sofern sie identische Grenzen haben. Auch das lässt sich gut mittels der Pünktchen-Schreibweise nachvollziehen.

Formel: **Summen Indexverschiebung**

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i) = \sum_{i=a+c}^{b+c}(x_{i-c}) = \sum_{i=a-d}^{b-d}(x_{i+d})$$

Formel: **Summe mit Sprungweite**

Betrachte folgende Summendefinition:

$$\sum_{\substack{i=a \\ i+=s}}^{b}(x_i) = x_a + x_{a+s} + x_{a+(2s)} + \cdots + x_{b-s} + x_b$$

Um die hier im „Kopf“ der Summe definierte Sprungweite aus dem Kopf heraus zu bekommen, ist eine Indexverschiebung und das Anwenden des Distributivgesetzes notwendig:
Mit s der Sprungweite zum nächsten vorkommenden Index und
a als Startindex sowie $b = a + n \cdot s$ als Endindex, ergibt sich dann:

$$\sum_{\substack{i=a \\ i+=s}}^{b}(x_i) = x_{a+0\cdot s} + x_{a+1\cdot s} + x_{a+2\cdot s} + \cdots + x_{a+n\cdot s} = \sum_{i=0}^{n}(x_{a+i\cdot s})$$

bzw. falls über Zahlen x_i also $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ summiert wird und diese einen gemeinsamen Teiler besitzen, also $\mathrm{ggT}((x_i)_i) = \mathrm{ggT}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = t > 1$, ist folgendes Möglich:

$$\sum_{i}(x_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i) = \sum_{i=\frac{x_1}{\mathrm{ggT}((x_i)_i)}}^{\frac{x_n}{\mathrm{ggT}((x_i)_i)}}(i \cdot \mathrm{ggT}((x_i)_i)) = \sum_{i=x_1 \div t}^{x_n \div t}(i \cdot t)$$

Betrachte zum besseren Verständnis folgende alternative Vorgehensweise:
Klammere den gemeinsamen Faktor aus bevor zur Summe zusammengefasst wird:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= (x'_1 \cdot t) + (x'_2 \cdot t) + (x'_3 \cdot t) + \cdots + (x'_n \cdot t) \\ &= t \cdot (x'_1 + x'_2 + x'_3 + \cdots + x'_n) = t \cdot \sum_{i=x'_1}^{x'_n} i = \cdot \sum_{i=x'_1}^{x'_n}(i \cdot t) = \sum_{i=x_1 \div t}^{x_n \div t}(i \cdot t) \end{aligned}$$

mit $x_i = x'_i \cdot t$

Formel: **Produkte Sonderregeln**

Triviales Produkt:

$$\prod_{i=a}^{b}(x_i) = 1 \text{ falls } b < a$$

Fakultät:

$$n! = \prod_{i=1}^{n}(i) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

Faktor ausklammern:

$$\prod_{i=a}^{b}(c \cdot (x_i)) = c^{b-a+1} \cdot \prod_{i=a}^{b}(x_i)$$

Der „Körper“ eines Produkts sollte vorsichtshalber immer geklammert werden um folgendes Missverständnis zu vermeiden:

$$\prod_{i=a}^{b}(x_i) \cdot c \stackrel{?}{=} \begin{cases} \prod_{i=a}^{b}(x_i \cdot c) = c^{b-a+1} \cdot \prod_{i=a}^{b}(x_i) \\ \left(\prod_{i=a}^{b}(x_i)\right) \cdot c = c \cdot \prod_{i=a}^{b}(x_i) \end{cases}$$

Beispiel: Geschachtelte Summen und Produkte

$$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} ij = \sum_{i=a}^{b}\left(\sum_{j=c}^{d}(i \cdot j)\right) = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} & a & \cdot & c & + & a & \cdot & (c+1) & + & \cdots & + & a \cdot d \\ + & (a+1) & \cdot & c & + & (a+1) & \cdot & (c+1) & + & \cdots & + & (a+1) \cdot d \\ \vdots & & \cdots & \vdots & & & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ + & b & \cdot & c & + & b & \cdot & (c+1) & + & \cdots & + & b \cdot d \end{array} \right.$$

Horizontal hierbei das Geschehen der inneren Summe, Vertikal das der äußeren.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}\prod_{j=2}^{4}(ji) &= \sum_{i=1}^{2}(2i)(3i)(4i) = (2\cdot 1)(3\cdot 1)(4\cdot 1) + (2\cdot 2)(3\cdot 2)(4\cdot 2) = 2\cdot 3\cdot 4 + 4\cdot 6\cdot 8 = 24 + 192 = 216 \\ &= \left(\prod_{j=2}^{4} j \cdot 1\right) + \left(\prod_{j=2}^{4} j \cdot 2\right) = ((2\cdot 1)\cdot(3\cdot 1)\cdot(4\cdot 1)) + ((2\cdot 2)\cdot(3\cdot 2)\cdot(4\cdot 2)) = \cdots = 216 \end{aligned}$$

Es ist möglich von „innen nach außen“ oder von „außen nach innen“ aufzulösen.

Aufgabenblatt: Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

1. Aufgabe: Potenzen

a) $2^3 \cdot 2^2 =$
b) $(5^2)^3 =$
c) $\frac{3^4}{2^4} =$
d) $3^3 \div 3 =$
e) $7^{-2} =$
f) $2^3 \cdot 3^3 =$
g) $3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^2 =$
h) $4 + 28 + 49 =$

2. Aufgabe: Wurzeln

a) $\sqrt[3]{8} =$
b) $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{27} =$
c) $\sqrt[3]{27} + 2 \cdot \sqrt[3]{27} =$
d) $\left(\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{2}\right)^2 =$
e) $\left(\sqrt{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt{2}\right)^2 =$
f) $\sqrt[3]{-27} =$
g) $\sqrt[7]{2^{21}} =$

3. Aufgabe: Logarithmen

a) $\ln(e) =$
b) $\log_{16}(8) =$
c) $\lg(3000) - \lg(3) =$
d) $\lg(4) + 2 \cdot \lg(5) =$
e) $2^x = 16$
f) $\ln(\sqrt{e}) =$
g) $\mathrm{ld}(32) =$

4. Aufgabe: Regeln vervollständigen: Potenzen

a) $a^n \cdot a^m =$
b) $= a^{n-m}$
c) $(a^n)^m =$
d) $= (p+q) \cdot a^n$
e) $= (a \cdot b)^n$
f) $a^n \div b^n =$
g) $= \frac{1}{a^n}$
h) $a^{\frac{n}{m}} =$

5. Aufgabe: Regeln vervollständigen: Wurzeln

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} =$
b) $= \sqrt[m \cdot n]{a^{m-n}}$
c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} =$
d) $p \cdot \sqrt[n]{a} + q \cdot \sqrt[n]{a} =$
e) $\sqrt{a} =$
f) $= \sqrt[n]{a \cdot b}$
g) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} =$
h) $(\sqrt[n]{a})^m = \quad =$
i) $\sqrt[n \cdot p]{a^{n \cdot q}} =$
j) $\sqrt[n]{a^n} =$

6. Aufgabe: Regeln vervollständigen: Logarithmen

a) $\log_a(1) =$
b) $\log_a(a) =$
c) $\log_a(a^x) =$
d) $= w \cdot \log_a(u)$
e) $\lg(x) =$
f) $\mathrm{ld}(x) =$
g) $\log_a(u \cdot v) =$
h) $= \log_a(u) - \log_a(v)$
i) $\log_{\frac{a}{b}}(c) =$
j) $\ln(x) =$
k) $= \frac{\log_x(u)}{\log_x(a)}$

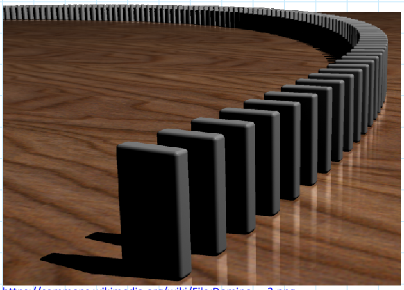
7. Aufgabe: Vereinfachen

a) $\frac{(v^2-n^2)\cdot 2n}{v-n}$
b) $(\sqrt{x} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2})$
c) $7(a-b)^3 + 3(b-a)^3$
d) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y}}$

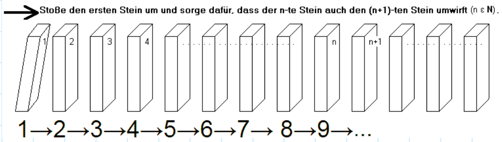
8. Aufgabe: Gleichungen lösen

a) $2^x = 16$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 3\frac{3}{8}$
c) $\log_3\left(\frac{9x}{4x-3}\right) = 2$
d) $\log_3(3x-5) = \log_3(2x+3)$

· vollständige Induktion



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Domino_-_2.png



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dominoeffect.png