Summen & Produkte

$\sum$

Motivation: Berechne: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

Pünktchen-Schreibweise

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$
$+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20$
$+21+22+\dots+1337$ $=$ $1+2+\dots+1337$

Addiere alle Zahlen von 1 bis 1337

$$\sum_{i=1}^{1337} i$$

$$\boxed{\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{\text{Index-Variable} = \text{Startwert}}^{\text{Endwert}} (\text{"Argument" der Summe})}$$

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2+2^2+3^2$$

- Es sollten $a, b, i \in \mathbb{Z}$
- Es sollte $a \leq b$
- i wird in jedem Schritt um $+1$ größer

1. Aufgabe: Summen: Zuordnen

a) $\sum_{i=0}^{5} i =$ → iv)
b) $\sum_{i=1}^{6} i =$ → i)
c) $\sum_{i=1}^{4} 2i =$ → ii)
d) $\prod_{i=0}^{3} i^2 =$ → iii)

i) $1+2+3+4+5+6 = 27$
ii) $2+4+6+8 = 20$
iii) $0 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 9 = 0$
iv) $0+1+2+3+4+5 = 15$

a) $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$

b) $\sum_{k=-1}^{3} (k+1) = (-1+1)+(0+1)+(1+1)+(2+1)+(3+1) = 0+1+2+3+4 = 10$

I II III IV V VI VII VIII IX X
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

c) $\sum_{n=3}^{10} (\frac{n}{2}) = \frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{6}{2}+\frac{7}{2}+\frac{8}{2}+\frac{9}{2}+\frac{10}{2} = \frac{3+4+5+6+7+8+9+10}{2} = \frac{52}{2} = 26$

1 5 7

d) $\sum_{j=1}^{3} j^2 = 1^2+2^2+3^2 = 1+4+9 = 14$

e) $\sum_{\lambda=3}^{3} \lambda^\lambda = 3^3 = 27$

λ = lambda

f) $\sum_{m=4}^{2} \frac{m^7}{m!} = 0$

Fall: Startwert > Endwert
aber Summe muss vorwärts laufen
⇒ ⚡ ⤳ per Definition $= 0$

g) $\sum_{\psi=1}^{50} \psi = 1275$

h) $\sum_{i=1}^{7} x_i = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$

$$\sum_{i=1}^{50} i = \begin{matrix} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots \\ 50 & + & 49 & + & 48 & + & 47 & + & \dots \end{matrix} = \frac{50}{2} \cdot (50+1) =$$

51 51 51 51 51 51
$\underbrace{\qquad\qquad}_{25\text{ mal}}$

$50 + \overbrace{49 + 48 + \dots}^{24\text{ mal}}$; $1 + 2 + \dots$; $50 + 24$; $50+25$; $n + (\frac{n}{2}-1) \cdot n$; $50 + \frac{49 \cdot (49+1)}{2}$

Summenformel von Gauß

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Summenformel von Gauß

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\sum_{i=a}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{a-1} i$$

$a \geq 1$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(a-1)(a-1+1)}{2} = \frac{n(n+1) - a(a-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{10} i \overset{\wedge}{=}$$

$$\underbrace{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}_{10 \text{ Zahlen}}$$

$10 - 1 = 9$

```
def summe(anfang = 1, ende, f = lambda z:z):
    s = 0
    for i in range(anfang, ende+1):
        s += f(i)
    return s

print(f"Ergebnis: {summe(1,10)}")
print(i)
```

→ out of scope

Operationen mit Summen

⚠ Vorsicht

Frage. Was ist richtig?

$$\sum_{i=1}^{10} i + 3 \overset{?}{=} \begin{cases} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{10} i\right) + 3} \\ \boxed{\sum_{i=1}^{10} (i+3)} \end{cases}$$

⇒ Merke: Das erste + (das nicht geklammert ist) beendet das Argument der Summe*.

* außer Menschen sind doof ... siehe später.

Frage. Was ist richtig?

$$\sum_{i=1}^{10} i \cdot 3 \overset{?}{=} \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{10} i\right) \cdot 3 & \text{links} \\ \boxed{\sum_{i=1}^{10} (i \cdot 3)} & \text{rechts} \end{cases}$$

... $(1\ 3) + (2\ 3) + (3\ 3) + \dots + (9\ 3) + (10\ 3)$

$3 \cdot (1+2+3+\dots+9+10)$

Distributivgesetz für Summen:

$$\boxed{\sum_{i=a}^{b} c \cdot f(i) = c \cdot \sum_{i=a}^{b} f(i)}$$

doof

$$\sum_{k=1}^{10} 3 + k = \left(\sum_{k=1}^{10} 3\right) + k$$

$$= 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 + k$$

gemeint:

$$\sum_{k=1}^{10} (3+k)$$

Summen spalten & zusammenfassen

$$\sum^{b} f(i) + \sum^{c} f(i) = \sum^{c} f(k) = \sum^{b'-1} f(i) + \sum^{c} f(j) = f(a) + \sum^{c} f(i) = f(c) + \sum^{c-1} f(i)$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) + \sum_{j=b+1}^{c} f(j) = \sum_{k=a}^{c} f(k) = \sum_{i=a}^{b'-1} f(i) + \sum_{j=b'}^{c} f(j) = f(a) + \sum_{i=a+1}^{c} f(i) = f(c) + \sum_{i=a}^{c-1} f(i)$$

$$\left(f(a)+f(a+1)+\dots+f(b)\right) + \left(f(b+1)+f(b+2)+\dots+f(c-1)+f(c)\right)$$

$a \leq b < c$ und $a < b' \leq c$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) + \sum_{j=a}^{b} g(i) = \sum_{k=a}^{b} \left(f(k)+g(k)\right)$$

Indexverschiebung bei Summen

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} f(i-c)$$

Bsp.: $\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2+4^2+5^2$

$$\sum_{i=3+(-2)}^{5+(-2)} (i-(-2))^2 = (1+2)^2+(2+2)^2+(3+2)^2$$

Summen mit Sprungweite

Bsp.: $\sum_{i=2}^{4} (3i) = (3\,2)+(3\,3)\cdot(3\,4) = 6 \overset{+3}{+} 9 \overset{+3}{+} 12$

Idee: $\sum_{\substack{i=6 \\ i+=3}}^{12} i = 6+9+12$

Prinzipiell geht das so

$$\sum_{i \in M} i^2$$

Für uns aber gilt: in jedem Schritt immer nur +1

Bsp.: $4+16+36+64 = \sum_{y=1}^{4} (2\cdot y)^2$

$2^2+4^2+6^2+8^2$

$(2\cdot 1)^2 \overset{+1}{+} (2\cdot 2)^2 \overset{+1}{+} (2\cdot 3)^2 \overset{+1}{+} (2\cdot 4)^2$

Triviale Summen

- $\sum_{i=a}^{a} f(i) = f(a)$
- $\sum_{i=a}^{b} f(i) = 0$ falls $a > b$