

# Aufgabensammlung

## Lineare Algebra

### 1 Rechnen $\mathbb{R}^n$

**Aufgabe 1** 1. Stellen Sie folgende Vektoren graphisch mittels Pfeilen dar:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Illustrieren Sie graphisch  $v_1 + v_2$  und  $v_1 + v_2 + v_3$ , sowie  $-1/2 \cdot v_3$  und  $v_1 - 2 \cdot v_3$ .

**Aufgabe 2** Es seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, ob  $v_3, v_4$  Elemente von  $\text{Span}(v_1, v_2)$  sind.

**Aufgabe 3** Finden Sie zwei Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mit  $v \neq w$  und so, dass  $\text{Span}(v, w) \neq \mathbb{R}^2$  gilt.

**Aufgabe 4** Bestimmen Sie drei Vektoren  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  so, dass

$$v_3 \notin \text{Span}(v_1, v_2)$$

gilt.

**Aufgabe 5** Es seien  $v_1, v_2, \dots, v_{2m} \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m} \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie durch schrittweises Nachrechnen die folgenden Identitäten:

$$\sum_{k=1}^{2m} \lambda_k v_k + \sum_{k=1}^m \lambda_k w_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k (v_k + w_k) + \sum_{k=m+1}^{2m} \lambda_k v_k,$$

$$\sum_{k=2}^{m+1} v_k + \sum_{k=1}^m -v_k = v_{m+1} - v_1,$$

**Aufgabe 6** Es seien  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) so, dass

$$v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

mit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  gilt. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2)$$

gilt.

**Aufgabe 7** Es seien  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ,  $v, w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass dann

$$v + w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m) \text{ und } \lambda v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

gilt.

## 2 Matrix-Algebra

**Aufgabe 8** Es seien mit  $D_\alpha \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  aus der Vorlesung für  $\alpha_1 = \pi/4$  und  $\alpha_2 = -\pi/2$  und

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen und skizzieren Sie  $D_{\alpha_1} v$ ,  $D_{\alpha_2} v$ ,  $D_{\alpha_1} w$ ,  $D_{\alpha_2} w$ .

**Aufgabe 9** Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie wie ein (beliebiges)  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $Ax$  geometrisch zueinander stehen und begründen Sie damit, dass  $A(Ax) = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt.

**Aufgabe 10** Implementieren Sie ein Python-Skript, das die Drehung von Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  visuell darstellt. Erzeugen Sie dazu mit Hilfe der `numpy` Bibliothek die  $2 \times 2$ -Drehmatrix  $D_\alpha$  (aus der Vorlesung), und mehrere Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ , zum Beispiel

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit das Matrix-Vektor-Produkt  $D_\alpha v$  mit Hilfe von `np.matmul` oder dem `@`-Operator.

Visualisieren Sie jeden Vektor  $v$  und  $D_\alpha v$  als Pfeile in der Ebene mit `matplotlib`. Nutzen Sie dazu

- `import numpy as np` und `import matplotlib.pyplot as plt`
- `plt.quiver(x, y, u, v, angles='xy', scale_units='xy', scale=1)` zur Darstellung von Pfeilen
- `plt.axis('equal')` für gleichmäßige Skalierung
- `np.pi`, `np.cos()`, `np.sin()` für trigonometrische Rechnungen

Untersuchen Sie, was mit der Länge der Vektoren geschieht. Probieren Sie verschiedene Winkel wie  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}, 2\pi$  aus. Was stellen Sie fest?

**Aufgabe 11** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^m$ , so dass die linearen Gleichungssysteme

$$Ax = b_1, \quad Ax = b_2$$

lösbar sind. D.h. es existieren jeweils mindestens ein  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $Ax_1 = b_1$  und  $Ax_2 = b_2$  gilt. Zeigen Sie, dass dann für alle  $b \in \text{Span}(b_1, b_2)$  das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

ebenfalls lösbar ist.

**Aufgabe 12** Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Folgendes:

$$(A + B)v, \quad A(v + w), \quad 2(A + B)(2v - 2w).$$

**Aufgabe 13** Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix-Vektor-Produkte  $Av_1$ ,  $Av_2$  und  $Av_3$ .

**Aufgabe 14** Bilden Sie die transponierte Matrix der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie außerdem

$$A^T C B.$$

**Aufgabe 15** 1. Seien  $D_{1,\alpha}, D_{2,\alpha}, D_{3,\alpha} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  die Drehmatrizen aus der Vorlesung. Berechnen Sie die Matrix-Matrix-Produkte

$$D_{1,\alpha} D_{3,\beta} \text{ und } D_{2,\alpha} D_{3,\beta}.$$

2. Finden Sie Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  so, dass

$$AB \neq BA$$

gilt.

**Aufgabe 16** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

- (a) Wie viele Additionen und Multiplikationen müssen für das Matrix-Vektor-Produkt  $Ax$  berechnet werden?
- (b) Sei nun  $n = m$  und es sei weiter bekannt, dass  $[A]_{kj} = 0$  falls  $j > k + 1$  oder  $j < k - 1$  (mit  $j, k = 1, \dots, n$ ) gilt. Wie viele Additionen und Multiplikationen müssen nun für das Matrix-Vektor-Produkt  $Ax$  berechnet werden?

**Aufgabe 17** Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zwei quadratische Matrizen. Zeigen Sie durch schrittweises Nachrechnen die folgende Identität:

$$(B - A)^2 \sum_{k=1}^m A^k = B^2 \sum_{k=1}^m A^k - B \sum_{k=2}^{m+1} A^k - AB \sum_{k=1}^m A^k + \sum_{k=3}^{m+2} A^k.$$

**Aufgabe 18** Für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $\bar{x} = 1/n \sum_{k=1}^n [x]_k$  der Mittelwert und für  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , ist  $\text{cov}(x, y) := 1/(n-1) \sum_{k=1}^n ([x]_k - \bar{x})([y]_k - \bar{y})$  die **Kovarianz** von  $x, y$ . Für  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ,  $m > 1$  ist die **Kovarianzmatrix**  $C := C(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  definiert durch  $[C]_{k,j} = \text{cov}(v_k, v_j)$  mit  $k, j = 1, \dots, m$ .  
Es sei  $x = (1, 2, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$ , und  $y \in \mathbb{R}^4$  sei definiert durch  $[y]_k = a[x]_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  mit  $a \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie für die Fälle  $a = 2$  und  $a = -1$  die Kovarianzmatrix  $C(x, y)$

**Aufgabe 19** In den folgenden Gleichungen sind in der Umformung von der linken zur rechten Seite ein oder mehrere Fehler unterlaufen. Berichtigen Sie jeweils den Ausdruck auf der rechten Seite. Begründen Sie, falls möglich, ihre Korrektur durch Angabe eines entsprechenden Resultats der Vorlesung.

a) Mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(B + BA) = (B^2 + BAB)$

b) Mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $\langle ABx, y \rangle = \langle B^T x, Ay \rangle$

c) Mit  $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, l$ , und  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{k=2}^l \alpha_{k-1} A C B_{k-1} x = A \left( \sum_{k=1}^l \alpha_k B_k x \right) C$$

**Aufgabe 20 a)** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$  beide invertierbar, sowie  $B_1, B_2, F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Lösen Sie folgende Gleichung nach  $B_2$ :

$$A(B_1 + B_2)C = F.$$

b) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Summe zweier invertierbarer Matrizen nicht invertierbar sein muss.

**Aufgabe 21** Beweisen Sie 2. aus Satz 2.18

**Aufgabe 22 a)** Seien  $D_\alpha \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $(\alpha \in [0, 2\pi))$  aus Beispiel 2.7 und  $x \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|x\| = 1$ , zeigen Sie

$$\langle x, D_\alpha x \rangle = \cos(\alpha).$$

b) Seien  $D_\alpha$  und  $x$  wie in Teil b, zeigen Sie

$$\langle D_\alpha x, D_\alpha x \rangle = 1.$$

**Aufgabe 23** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  so, dass  $(E - A)$  invertierbar ist. Zeigen Sie durch vollständig Induktion, dass dann

$$\sum_{k=0}^n A^k = (E - A)^{-1}(E - A^{n+1})$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt. (Hinweis: Geometrische Summenformel Math. Grundl.)

**Aufgabe 24** Für eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist die sogenannte Spur definiert durch

$$\text{Spur}(A) = \sum_{j=1}^n [A]_{jj}.$$

Seien  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\text{Spur}(BC) = \text{Spur}(CB).$$

### 3 Skalarprodukt

**Aufgabe 25** Zeigen Sie Satz 3.4

**Aufgabe 26 (a)** Verifizieren für das euklidische Skalarprodukt Sie Definition die Punkte (1) und (2) aus Definition 3.1 anhand eines (selbst gewählten) konkreten Beispiels von Vektoren  $x, y, z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**(b)** Belegen Sie jeweils durch ein Gegenbeispiel von Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$ , dass folgende Identitäten **falsch** sind:

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\lambda \langle x + y, x \rangle = \langle \lambda x + y, x \rangle$$

$$(x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}).$$

**Aufgabe 27** Es sei  $v, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$  so, dass

$$\langle v, u_1 \rangle < c, \quad \langle v, u_2 \rangle < c$$

gilt. Zeigen Sie, dass dann für alle  $\lambda \in [0, 1]$  und  $w = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$  gilt

$$\langle v, w \rangle < c.$$

Finden Sie außerdem ein Beispiel in  $\mathbb{R}^2$ , das zeigt, dass diese Aussage für allgemeine  $\lambda \in \mathbb{R}$  nicht gilt.

**Aufgabe 28 a)** Zeigen sie Satz 3.6(2) aus dem Skript.

b) Es seien  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $y = \lambda x$  mit  $\lambda \geq 0$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

**Aufgabe 29** Zeigen sie Satz 3.6(4) (Dreiecksungleichung) aus dem Skript. Hinweis: Formen Sie  $\|x + y\|$  mit Hilfe der Rechenregeln für Skalarprodukte um und wenden Sie die Cauchy Schwarz Ungleichung an.

**Aufgabe 30** Es seien  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $y = \lambda x$  mit  $\lambda \geq 0$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

**Aufgabe 31** Es sei

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, v \rangle = 0\},$$

$$M_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, v \rangle > 0\}.$$

**Aufgabe 32** Es sei

$$v := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie die Mengen  $H_v, H_v^+$ .

b) Bestimmen Sie einen Vektor  $u \in H_{v,-1}$ .

**Aufgabe 33** Es sei

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie die Mengen  $H_v, H_v^+$ .

b) Bestimmen Sie einen Vektor  $u \in H_{v,-1}$ .

**Aufgabe 34** Implementieren Sie ein Python-Skript, das Hyperebenen im  $\mathbb{R}^2$  sowie die zugehörigen Halbräume visualisiert.

1. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und die Werte  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = -0.5$

Zeichnen Sie für jedes Paar  $v_k, b_j$  die Hyperebene  $H_{v_k, b_j}$  als Gerade in der Ebene. Zeichnen Sie zusätzlich den jeweiligen Normalenvektor  $v_k$  als Pfeil vom Ursprung mit `plt.quiver` in die Grafik ein, um die Orientierung der Hyperebene zu verdeutlichen.

2. Erzeugen Sie mit `numpy.random.rand` eine große Menge (z. B. 500) zufälliger Punkte  $y \in \mathbb{R}^2$  im Quadrat  $[-2, 2]^2$  und färben Sie die Punkte abhängig davon ein, ob sie im Halbraum  $H_{x,b}^+, H_{x,b}^-$  liegen.

Dazu nützliche Befehle:

- `import numpy as np` und `import matplotlib.pyplot as plt`
- `np.random.rand(N, 2)` erzeugt  $N$  zufällige Punkte im Quadrat  $[0, 1]^2$  (mit linearem Shift und Skalierung auf  $[-2, 2]^2$ )
- `np.dot(points, x)` berechnet  $\langle x, y \rangle$  für alle Punkte gleichzeitig
- `plt.scatter(..., color='red')` bzw. `color='blue'` zur farblichen Unterscheidung

**Aufgabe 35** Implementieren Sie ein Python-Skript, das ein Dreieck als Schnitt geeigneter Halbräume erzeugt und dieses geometrisch zu transformiert.

1. Gegeben seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Werte  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = -1$



- (a) Visualisieren Sie das Dreieck, dass sich als Schnitt der Halbräume  $H_{v_k, b_k}^+$  für  $k = 1, 2, 3$  ergibt. Erzeugen Sie mit `numpy.random.rand` eine große Menge (z. B. 500) zufälliger Punkte  $y \in \mathbb{R}^2$  im Quadrat  $[-4, 4]^2$  und färben Sie die Punkte abhängig davon ein, ob sie in **allen** Halbräumen  $H_{v_k, b_k}^+$  enthalten sind. Nutzen Sie `plt.scatter(..., color='red')` bzw. `color='blue'` (vgl. untere Importbefehle)

2. Gegeben sei der Translationsvektor

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Drehmatrix  $D_\alpha$  aus der Vorlesung mit  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

Wenden Sie nacheinander folgende Operationen auf das Dreieck an:

- Translation:  $y \mapsto y + t$
- Rotation:  $y \mapsto D_\alpha y$

und visualisieren Sie das Ergebnis. Wiederholen Sie die Transformation in umgekehrter Reihenfolge:

- Zuerst Rotation:  $y \mapsto D_\alpha y$
- dann Translation:  $y \mapsto y + t$

Dazu nützliche Funktionen:

- `import numpy as np` und `import matplotlib.pyplot as plt`
- `np.dot(points, x)` oder `points @ x` für Skalarprodukte
- `plt.fill(...)` oder `plt.Polygon(...)` zur Flächenvisualisierung
- `np.array(...)` zur Definition von Eckpunkten und Transformation
- `np.cos`, `np.sin`, `np.pi` für Winkel

**Aufgabe 36** Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren  $v_1, v_2$ , zwischen den Vektoren  $v_1, v_3$  und zwischen den Vektoren  $v_2, v_3$

**Aufgabe 37** Beschreiben Sie mathematisch das Dreieck (d.h. die Menge der Punkte, die innerhalb des Dreiecks liegen, ohne Rand) mit Eckpunkten  $(0,0)^T$ ,  $(1,1)^T$ ,  $(2,0)^T$  im  $\mathbb{R}^2$ . Verwenden Sie dazu die Mengen aus Definition 3.10

**Aufgabe 38** Beschreiben Sie mathematisch das Dreieck (d.h. die Menge der Punkte, die innerhalb des Dreiecks liegen, ohne Rand) mit Eckpunkten  $(0,0)^T$ ,  $(2,1)^T$ ,  $(3,0)^T$  im  $\mathbb{R}^2$ . Verwenden Sie dazu die Mengen aus Definition 3.10

**Aufgabe 39** Es seien  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle v_j, v_k \rangle = 0$  für alle  $j \neq k$  und  $v := v_1 + v_2 + \dots + v_m$ . Zeigen Sie

$$\langle v, v \rangle = \sum_{l=1}^m \|v_l\|^2$$

## 4 Basis und Lineare Abbildungen

**Aufgabe 40** Es seien

$$\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad v = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $\mathcal{B}$  ein Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Erzeugen Sie mithilfe des Austauschlemmas aus  $\mathcal{B}$  eine neue Basis, die  $v$  und  $u$  enthält.

**Aufgabe 41** Bestimmen Sie die darstellende Matrix der folgenden Abbildungen:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 4x_1 \end{pmatrix}, \quad h \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 - 6x_2 + x_3 \\ 7x_3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42** Bestimmen Sie die darstellende Matrix der folgenden Abbildungen:

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (2x_1 - x_2).$$

b)  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_4 + x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 43** Bestimmen Sie jeweils die darstellende Matrix zu folgenden linearen Abbildungen:

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$$

2.  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$g(x) = g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

3.  $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

**Aufgabe 44** Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear. Zeigen Sie, dass dann eine eindeutige Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existiert, so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$f(x) = Ax.$$

(Vgl. Satz 4.23 und nachfolgendes Beispiel)

**Aufgabe 45** Es seien  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$   $b \in \mathbb{R}$ . Für welche  $b$  ist die Hyperebene  $H_{x,b}$  ein Unterraum?

**Aufgabe 46** Welche der folgenden Abbildungen ist linear? (Begründen Sie jeweils Ihre Aussage)

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$

2.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -5x_1 \end{pmatrix}$$

3.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \|x\|$

**Aufgabe 47** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann ist eine der beiden folgenden Aussagen richtig:

$$\text{Ker} B \subset \text{Ker}(AB) \text{ oder } \text{Ker}(AB) \subset \text{Ker} B.$$

Entscheiden Sie welche Aussage wahr ist und beweisen Sie diese. Widerlegen Sie die übrige Aussage durch eine Gegenbeispiel.

**Aufgabe 48** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Welche Bedingungen müssen  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  erfüllen, damit

$$\text{Ker} A = \text{Span}(e_1 + 2e_2)$$

gilt. (dabei sind  $e_1, e_2$  sind die Vektoren der Standardbasis des  $\mathbb{R}^2$ .)

**Aufgabe 49 a)** Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Zeigen Sie weiter, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

**b)** Es sei

$$\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von  $v_1$  und  $v_2$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ .

**Aufgabe 50** Es seien  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  zwei Unterräume. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a)  $U_1 \cap U_2$  ist ein Unterraum.

b) Für  $x_1 \in U_1 \setminus U_2$  und  $x_2 \in U_2 \setminus U_1$  ist  $x_1 + x_2 \notin U_1 \cup U_2$ .

**Aufgabe 51** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel das Folgende:

a) falls  $m < n$ , dann ist das LGS  $Ax = b$  für kein  $b \in \mathbb{R}^m$  eindeutig lösbar

b) falls  $m > n$ , dann gibt es ein  $b \in \mathbb{R}^m$  mit  $\text{Lsg}(A, b) = \emptyset$ .

**Aufgabe 52** Es sei

$$\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von  $v_1$  und  $v_2$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ .

**Aufgabe 53** Es sei

$$\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von  $v_1$  und  $v_2$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ .

**Aufgabe 54** Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  linear und für zwei Basen  $(v_1, v_2), (v_3, v_4)$  des  $\mathbb{R}^2$  gelte

$$f(v_1) = v_3, \quad f(v_2) = v_4.$$

Zeigen Sie, dass  $f$  dann injektiv sein muss.

**Aufgabe 55** Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear und  $(v_1, v_2, \dots, v_n), (w_1, w_2, \dots, w_n)$  zwei Basen des  $\mathbb{R}^n$  so, dass

$$f(v_j) = w_j, \quad j = 1, \dots, n$$

gilt. Zeigen Sie, dass  $f$  dann bijektiv sein muss.

**Aufgabe 56** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Zeigen Sie, dass  $\text{Ker} A$  und  $\text{Im} A$  Unterräume sind. (Vgl. Satz 4.28(3))

## 5 Gauss-Verfahren

**Aufgabe 57** Bestimmen Sie die inversen Matrizen der Elementarmatrizen  $E_{Z1}(j, k)$ ,  $E_{Z2}(\lambda, j, k)$  und  $E_{Z3}(\lambda, j)$ , ( $\lambda \neq 0$ ). Überlegen Sie sich dazu welche elementaren Zeilenumformungen Sie durchführen müssen um aus den jeweiligen Matrizen die Einheitsmatrix  $E$  zu erzeugen.

**Aufgabe 58** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  und  $v \in \text{Lsg}(A, b)$ . Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\text{Lsg}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = v + u \text{ wobei } u \in \text{Ker} A\}.$$

**Aufgabe 59** Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $BA$  für  $B = E_{Z1}(2, 4)$ ,  $B = E_{Z2}(-2, 2, 3)$  und  $B = E_{Z3}(0.5, 2)$ , ( $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ). Schreiben Sie dabei jeweils die Elementarmatrizen einmal vollständig aus.

**Aufgabe 60** Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie  $\text{Lsg}(A, b)$ .

**Aufgabe 61** Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens eine Lösung von  $Ax = b$ .

**Aufgabe 62** Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -2 \\ -1 & -5 & -1 & -5 \\ 2 & 5 & 0 & -14 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Lösung des LGS  $Ax = b$  mit Gauß-Verfahren.

**Aufgabe 63** Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

**Aufgabe 64** Bestimmen Sie die inverse Matrix der folgenden Matrix mit dem Gauß-Jordan-Verfahren:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 65** Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

**Aufgabe 66** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen sie Ihre Antwort (mithilfe geeigneter Resultate des Skripts), oder widerlegen Sie die Aussage durch ein Gegenbeispiel.

- a) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann gilt  $\text{Ker } A = \{0\}$ .
- b) Wenn  $A$  eine Zeile besitzt, in der alle Einträge gleich 1 sind, dann ist  $A$  nicht invertierbar.

- c) Wenn  $A$  eine Spalte besitzt, in der alle Einträge gleich 0 sind, dann ist  $A$  nicht invertierbar.

**Aufgabe 67** Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Für welchen Wert für  $\alpha$  ist  $Lsg(A, b) = \emptyset$ ? Wie groß ist in diesem Fall  $\dim(\text{Ker } A)$ ?

**Aufgabe 68 a)** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

- b) Es seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$  beide invertierbar, sowie  $B_1, B_2, B_3, F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Lösen Sie folgende Gleichung nach  $B_2$ :

$$A^3(B_1 + B_2 + B_3)C^{10} = F.$$

- c) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Summe zweier invertierbarer Matrizen nicht invertierbar sein muss.

**Aufgabe 69** Es seien  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , wobei  $A_1$  und  $\sum_{k=1}^m B_k$  invertierbar seien, und  $x_1, \dots, x_m, y \in \mathbb{R}^n$

- a) Lösen Sie die folgende Gleichung nach  $A_2$  auf:

$$\sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^m B_k A_j \right) = E$$

- a) Formen Sie die folgende Gleichung so um, dass der Ausdruck  $\langle x_1, y \rangle$  alleine steht:

$$\left\langle \sum_{j=1}^m A_j x_j, (A_1^{-1})^T y \right\rangle = 7$$

**Aufgabe 70 a)** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar. Zeigen Sie

$$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2.$$



- b) Es seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$  beide invertierbar, sowie  $B_1, B_2, B_3, F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Lösen Sie folgende Gleichung nach  $B_2$ :

$$A(B_1 + B_2 + B_3)C = F.$$

- c) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Summe zweier invertierbarer Matrizen nicht invertierbar sein muss.

**Aufgabe 71 a)** Finden Sie eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  in Zeilenstufenform so, dass für  $b_1 = (1, 2, 1)^T \in \mathbb{R}^3$  und  $b_2 = (1, 2, 0)^T \in \mathbb{R}^3$  gilt  $\text{Lsg}(A, b_1) = \emptyset$  und  $\text{Lsg}(A, b_2) \neq \emptyset$ .

- b) Finden Sie eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  in Zeilenstufenform so, dass gilt:  $\text{Lsg}(A, e_1) \neq \emptyset$  und  $\text{Lsg}(A, e_2) \neq \emptyset$  und  $\text{Lsg}(A, e_3) \neq \emptyset$ .

- c) Finden Sie eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{1 \times 5}$  so, dass gilt:  $\text{Lsg}(A, 1) = \emptyset$

**Aufgabe 72** Es seien  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , wobei  $A_1$  und  $\sum_{k=1}^m B_k$  invertierbar seien, und  $x_1, \dots, x_m, y \in \mathbb{R}^n$

- a) Lösen Sie die folgende Gleichung nach  $A_2$  auf:

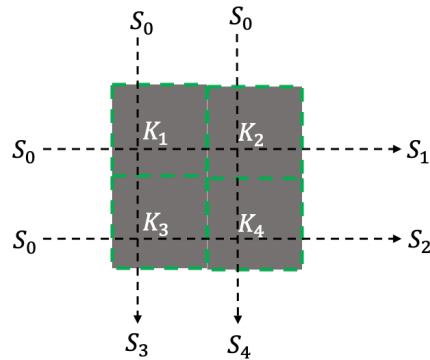
$$\sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^m B_k A_j \right) = E$$

- a) Formen Sie die folgende Gleichung so um, dass der Ausdruck  $\langle x_1, y \rangle$  alleine steht:

$$\left\langle \sum_{j=1}^m A_j x_j, (A_1^{-1})^T y \right\rangle = 7$$

**Aufgabe 73** Die untere Abbildung stelle den Aufbau eines Experiments dar, in dem Strahlen mit Intensität  $S_0 > 0$  (z.B. Röntgen, Ultraschall oder RADAR -Strahlen) durch ein Objekt, bestehend aus quadratischen Gebieten  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , gestrahlt werden. An den gegenüberliegenden Enden werden die durch das Material des Objekts gedämpften Strahlen  $S_1, S_2, S_3, S_4$  gemessen. Allgemein sei dabei die Dämpfung eines Strahls der Intensität  $S$ , der durch einen Körper der Breite (oder Höhe) eines der quadratischen Gebiete  $K_j$  mit Absorptionskoeffizient  $D > 0$  gestrahlt wird, beschrieben durch

$$S_d = S e^{-D},$$



wobei  $S_d$  die Intensität des gedämpften Strahls ist.

Seien nun  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , die unbekannten Absorptionskoeffizienten der Gebiete  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  auf.

## 6 Zerlegung von Unterräumen, Orthogonalität

**Aufgabe 74** Es sei  $v \in \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass

$$\langle v, x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

genau dann gilt, wenn  $v = 0$ .

**Aufgabe 75 a)** Finden Sie zwei Unterräume  $U, V \subset \mathbb{R}^3$  so, dass  $U \oplus V = \mathbb{R}^3$ .

**b)** Finden Sie zwei Unterräume  $U, V \subset \mathbb{R}^4$  so, dass  $\dim(U) = \dim(V) = 2$ ,  $U \neq V$  und  $U + V \neq \mathbb{R}^4$ .

**c)** Es seien  $v = (1, 1, 0)^T$ ,  $u = (1, 1, 1)^T$  und  $U = \text{Span}(u, v)$ . Bestimmen Sie  $U^\perp$

**Aufgabe 76** Es seien  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  und  $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_n)$  Basen des  $\mathbb{R}^n$  und  $B, H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Matrizen mit Spaltenvektoren  $b_1, \dots, b_n$  bzw.  $h_1, \dots, h_n$ , (diese Matrizen sind invertierbar da Basis) und sei

$$v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$$

gegeben. Ermitteln Sie jeweils die Matrixoperationen (aus  $H$  und  $B$ ), die das Folgende umsetzen:

- a) Berechnung der Koordinaten von  $v$  bezüglich der Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$ .
- b) Berechnung der Koordinaten bezüglich  $\mathcal{B}$  für einen Vektor  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  (gegeben in Koordinaten der Standardbasis)
- c) Berechnung der Koordinaten von  $v$  bezüglich der Basis  $\mathcal{H}$ .

**Aufgabe 77** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel das Folgende:

- a) falls  $m < n$ , dann ist das LGS  $Ax = b$  für kein  $b \in \mathbb{R}^m$  eindeutig lösbar
- b) falls  $m > n$ , dann gibt es ein  $b \in \mathbb{R}^m$  mit  $\text{Lsg}(A, b) = \emptyset$ .

**Aufgabe 78** Zeigen Sie die durch (\*) und (\*\*) markierten Aussagen im Beweis zu Satz 6.5

**Aufgabe 79** Zeigen Sie die durch (\*\*\*) und (\*\*\*\*) markierten Aussagen im Beweis zu Satz 6.5

**Aufgabe 80** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Zeigen Sie, dass

$$\dim(\text{Ker } A) = \dim(\text{Ker } A^T)$$

genau dann gilt, wenn  $m = n$ .

**Aufgabe 81 a)** Finden Sie zwei Unterräume  $U, V \subset \mathbb{R}^5$ ,  $U, V \neq \{0\}$ , so, dass  $U \oplus V = \mathbb{R}^5$ .

**b)** Finden Sie zwei Unterräume  $U, V \subset \mathbb{R}^4$  so, dass  $\dim(U) = \dim(V) = 2$ ,  $U \neq V$  und  $U + V \neq \mathbb{R}^4$ .

**Aufgabe 82** Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

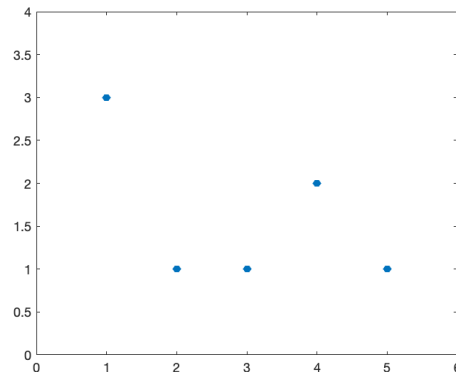
- a) Erstellen Sie aus der Basis  $(v_1, v_2, v_3)$  (des  $\mathbb{R}^3$ ) mit Hilfe des Gram-Schmidt Algorithmus eine Orthonormalbasis (ONB). Beachten Sie dabei, dass  $v_1, v_2$  bereits orthogonal sind.
- b) Berechnen Sie die Koordinaten von  $(1, 1, 1)^T$  bezüglich der in Teil a) ermittelten ONB.

**Aufgabe 83** Es seien  $v_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $v_2 = (1, -1, 1)^T$  und  $V = \text{Span}(v_1, v_2)$ .

- a) Berechnen Sie  $v_3$  so, dass  $v_3$  orthogonal zu  $v_1$  und  $v_2$  ist.
- b) Zeigen Sie, dass dann  $\langle v_3, w \rangle = 0$  für alle  $w \in V$  gilt.
- c) Berechnen Sie zu  $w = (1, 2, -1)^T$  Vektoren  $v \in V$  und  $u \in \text{Span}(v_3)$  so, dass  $w = v + u$  gilt.

**Aufgabe 84** Es sei  $V = \text{Span}((1, 1, 1)^T, (-1, 1, 1)^T)$ . Bestimmen Sie eine ONB von  $V$ , und berechnen Sie damit die Projektion  $P_V(x)$  für  $x = (1, 2, 0)^T$  und  $x = (0, -1, 4)^T$ .

**Aufgabe 85** Es liege eine Messreihe von Werten  $(x_1, y_1) = (1, 3)$ ,  $(x_2, y_2) = (2, 1)$ ,  $(x_3, y_3) = (3, 1)$ ,  $(x_4, y_4) = (4, 2)$ ,  $(x_5, y_5) = (5, 1)$  vor (vgl. Abbildung). Gesucht ist



eine Funktion  $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  (Polynom vom Grad 3) so, dass

$$\sum_{j=1}^5 (P(x_j) - y_j)^2$$

möglichst klein wird. Dieses Problem lässt sich als lineares kleinste Quadrate Problem formulieren: Mit  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$ ,  $a = (a_3, a_2, a_1, a_0)^T$  und  $b = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$ , finde  $a$  so, dass Folgendes minimal wird

$$\|Aa - b\|^2.$$

Bestimmen Sie das zugehörige  $A$  und stellen Sie mithilfe von Satz 7.1 die Formel auf, die zur Berechnung der Lösung umgesetzt werden muss.

## 7 Determinante

**Aufgabe 86** Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 23 & 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $\det(A)$ ,  $\det(A^2)$ ,  $\det(B)$ ,  $\det(B^2)$ ,

**Aufgabe 87** Es seien

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 44 & 3 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie dazu die Formeln zur Berechnung von  $\det(A - \lambda E)$  und  $\det(B - \lambda E)$  für allgemeine  $\lambda \in \mathbb{R}$  auf. Bestimmen Sie damit die  $\lambda$  so, dass obige Determinanten gleich 0 sind.

**Aufgabe 88** Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Laplace'scher Entwicklungssatzes

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

## 8 Eigenwerte

**Aufgabe 89** Bestimmen Sie die Eigenwerte folgender Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 44 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 90** Zeigen Sie, dass für die Elementarmatrizen  $E_{Z2}, E_{Z3} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  für alle  $j, k \in 1, \dots, n$ , wobei  $j \neq k$ , und  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt:

$$\det(E_{Z2}(\lambda, j, k)) = 1 \quad \det(E_{Z3}(\lambda, j)) = \lambda.$$

(Hinweis: Satz 8.5 (4) und (1))

**Aufgabe 91** Es seien  $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , und  $\lambda_1, \lambda_2$  die Eigenwerte von  $B_1$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  und  $\alpha_1, \alpha_2$  die Eigenwerte von  $B_2$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ . Sei weiter

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & B_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Dann sind  $\{\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2\}$  die Eigenwerte von  $A$ . Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

**Aufgabe 92** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  Eigenwerte von  $A$  sowie  $v_1, \dots, v_k$  zugehörige Eigenvektoren.

a) Zeigen Sie, dass für  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ , mit  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , gilt

$$Av = \sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_j v_j.$$

b) Es sei  $b \in \mathbb{R}^n$  mit  $b = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$ , wobei  $\beta_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Geben Sie mit Hilfe von (a) eine Lösung des linearen Gleichungssystems  $Av = b$  an.

**Aufgabe 93** Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die beiden Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von  $A$ .

**Aufgabe 94** Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die beiden Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von  $A$ .

**Aufgabe 95** Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die beiden Mengen  $\{v \in \mathbb{R}^2 : v^T A v = 1\}$  und  $\{v \in \mathbb{R}^2 : v^T B v = 1\}$ . (Nehmen Sie dazu eine hinreichende Menge von Vektoren  $w \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|w\| = 1$ , und bestimmen Sie jeweils  $\lambda \in \mathbb{R}$  so, dass  $\lambda w^T A w \lambda = \lambda^2 w^T A w = 1$  bzw.  $\lambda w^T B w \lambda = \lambda^2 w^T B w = 1$  gilt.)

**Aufgabe 96 a)** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor  $v$ . Zeigen Sie, dass dann der Winkel zwischen  $v$  und  $Av$  entweder 0 oder  $\pi$  (im Bogenmaß) beträgt.

**b)** Folgern Sie mit (a), dass die Drehmatrix  $D_\alpha$ , ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) aus Beispiel 2.7 genau dann einen (reellen) Eigenwert besitzt, wenn  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = \pi$  gilt.

**Aufgabe 97** Nachfolgend ist eine Lösung einer generative KI zu einer Aufgabenstellung diese Moduls aufgeführt. Diese Lösung beinhaltet mehrere mathematische Fehler oder Probleme in der Argumentation. Identifizieren Sie diese und korrigieren Sie die Lösung.

**Eingabe/Prompt** Bitte löse: Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen sie Ihre Antwort (mithilfe geeigneter Resultate des Skripts), oder widerlegen Sie die Aussage durch ein Gegenbeispiel.

- a) Wenn  $A$  eine Zeile besitzt, in der alle Einträge gleich 1 sind, dann ist  $A$  nicht invertierbar.
- b) Wenn  $A$  eine Spalte besitzt, in der alle Einträge gleich 0 sind, dann ist  $A$  nicht invertierbar.

### Ausgabe der KI

Die Aussage ist korrekt. Wenn  $A$  eine Zeile besitzt, in der alle Einträge gleich 1 sind, dann ist die Determinante von  $A$  gleich 0. Dies lässt sich leicht zeigen, da die Determinante eine multilineare Funktion der Zeilen (oder Spalten) einer Matrix ist und sich die Determinante nicht ändert, wenn man eine Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) addiert. Wenn also alle Einträge einer Zeile gleich 1 sind, kann man diese Zeile zu den anderen Zeilen addieren, ohne die Determinante zu verändern. Da die resultierende Matrix eine Zeile mit lauter Nullen hat, ist die Determinante gleich 0. Eine Matrix mit Determinante 0 ist nicht invertierbar, da eine invertierbare Matrix eine von Null verschiedene Determinante haben muss.

b) Die Aussage ist nicht korrekt. Es gibt Matrizen, die eine Spalte mit lauter Nullen haben und dennoch invertierbar sind. Ein Beispiel hierfür ist die Identitätsmatrix  $I_n$ , wobei  $n$  die Größe der Matrix ist. Die Identitätsmatrix hat in jeder Spalte genau einen Eintrag gleich 1 (auf der Hauptdiagonalen) und alle anderen Einträge gleich 0. Sie ist jedoch invertierbar, da sie sich selbst als Inverse hat. Daher widerlegt die Identitätsmatrix die Aussage und zeigt, dass eine Matrix mit einer Spalte voller Nullen dennoch invertierbar sein kann.

**Aufgabe 98** Nachfolgend ist eine Lösung einer generative KI zu einer Aufgabenstellung diese Moduls aufgeführt. Diese Lösung beinhaltet mehrere mathematische Fehler oder Probleme in der Argumentation. Identifizieren Sie diese und korrigieren Sie die Lösung.

**Eingabe/Prompt** Bitte löse folgende Aufgabe: Es seien  $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , und  $\lambda_1, \lambda_2$  die Eigenwerte von  $B_1$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  und  $\alpha_1, \alpha_2$  die Eigenwerte von  $B_2$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ . Sei weiter

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$



Dann sind  $\{\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2\}$  die Eigenwerte von  $A$ . Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

### Ausgabe der KI

Um die zugehörigen Eigenvektoren von  $A$  zu bestimmen betrachten wir die Struktur der Matrix  $A$ . Da  $B_1$  und  $B_2$  bereits Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren haben, können wir die Eigenvektoren von  $A$  durch die Kombination der Eigenvektoren von  $B_1$  und  $B_2$  konstruieren. Die Eigenvektoren von  $A$  können wie folgt angeordnet werden:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Hier haben wir die ersten beiden Komponenten mit den Eigenvektoren von  $B_1$  und die letzten beiden Komponenten mit den Eigenvektoren von  $B_2$  aufgefüllt.