Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Beispielklausur 2
90 min

Mathematische Grundlagen/Grundlagen der Mathematik

Bitte lesen Sie die folgenden Hinweise sorgfältig durch:

1. Prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.
2. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf dem zur Aufgabe gehörigen Blatt. Wenn nötig, dürfen Sie auch die Rückseite verwenden. Dies ist dann auf dem entsprechenden Aufgabenblatt deutlich kenntlich zu machen.
3. Geben Sie numerische Ergebnisse stets ganzzahlig beziehungsweise durch Brüche an (keine Dezimalzahlen). Eventuell auftretende Wurzeln sollen nur aufgelöst werden, wenn dies ganzzahlig möglich ist.
4. Die Klausur ist geheftet, in geordneter Reihenfolge wie bei der Ausgabe und vollständig (samt Deckblatt) abzugeben.
5. Die Klausur ist mit einem dokumentenechten Stift zu bearbeiten.
6. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
7. Lösungen, die nicht lesbar sind können nicht gewertet werden.
8. Tragen Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer leserlich in der folgenden Tabelle ein:

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	

Dies ist eine Beispielklausur, es entstehen hieraus keine Ansprüche bezüglich des Stoffs und der Art der Aufgaben in der eigentlichen Klausur.

Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Beispielklausur 2
90 min

Aufgabe 1 Mengen:

Es seien $M = \{-1, 0\}$, $N = \{2, 3\}$.

a) Schreiben Sie folgende Menge durch Aufzählen all ihrer Elemente

$$M \times N = \{$$

b) Schreiben Sie folgende Menge durch Aufzählen all ihrer Elemente

$$M^2 \cup N^2 = \{$$

c) Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)|$.

d) Schreiben Sie folgende Menge in der Mengenschreibweise (d.h. Mengenklammern, etc.): *Die Menge aller komplexen Zahlen, deren Realteil eine rationale Zahl ist, und deren Imaginärteil keine rationale Zahl ist*

Aufgabe 2 Abbildungen:

Es seien a, b reelle Zahlen, und $f_{a,b} : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} ax \ , & \text{falls } x \leq 0 \\ bx \ , & \text{falls } x > 0 \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie den Graph von $f_{-1,-2}$ (d.h. $a = -1$, $b = -2$).

b) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}_{-1,1}(\{3\})$.

c) Bestimmen Sie den Zielbereich $X \subset \mathbb{R}$ so, dass $f_{3,4} : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to X$ bijektiv ist.

Aufgabe 3 Aussagenlogik

a) Zeigen Sie, dass $F_1(A, B, C) := A \Rightarrow (B \vee C)$ und $F_2(A, B, C) := \neg\,(A \wedge \neg(B \vee C))$ gleichwertig sind, indem Sie folgende Wahrheitstabelle ausfüllen:

A	B	C	$B \vee C$	F_1	$\neg(B \vee C)$	$A \wedge \neg(B \vee C)$	F_2	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
w	w	w						
w	w	f						
w	f	w						
w	f	f						
f	w	w						
f	w	f						
f	f	w						
f	f	f						

Die zweite Tabelle nur verwenden, falls Ihre obere Lösung nicht mehr lesbar ist !!!

A	B	C	$B \vee C$	F_1	$\neg(B \vee C)$	$A \wedge \neg(B \vee C)$	F_2	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
w	w	w						
w	w	f						
w	f	w						
w	f	f						
f	w	w						
f	w	f						
f	f	w						
f	f	f						

b) Nehmen Sie an, sie möchten das Folgende mittels Beweis durch Widerspruch beweisen: *Zu jeder konvergenten Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gibt es ein* $M > 0$ *so, dass* $|a_n| < M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*. Formulieren Sie die Annahme, die dazu zu widerlegen ist.

Aufgabe 4 Rechnen mit Restklassen

Berechnen Sie folgende Aufgaben und geben Sie das Ergebnis jeweils in Standardrepräsentanten an (Zwischenergebnisse müssen nicht angegeben werden).

a) $[7]_3 + [-4]_3 =$

b) $[10]_{13} \cdot [3]_{13} \cdot [2]_{13} =$

c) $[5]_{11} + ([7]_{11} + [2]_{11})^{-1} =$

d) $([-6]_7 \cdot [6]_7^{-1}) + ([13]_7 \cdot [13]_7^{-1}) =$

Aufgabe 5 Induktion:

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Beispielklausur 2
90 min

Aufgabe 6 Komplexe Zahlen

a) Es seien $u = 3 - 6i$ und $w = 1 + i$. Berechnen Sie das Folgende:

$|\overline{u \cdot w}| =$

$\frac{w}{\overline{u}+u} =$

b) Skizzieren Sie die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \leq 1 \text{ und } |\mathrm{Im}(z)| \geq 4\}$$

in der komplexen Ebene.

c) Es seien $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lösen Sie die folgende Gleichung nach z_1 auf

$$\sum_{k=1}^{n} i(n-k)z_k^{-1} = 9$$

Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Beispielklausur 2
90 min

Aufgabe 7 Folgen

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n!\,5+2^n\,3}{n!\,3}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in N}$
.

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4$. mit $a_1 := 0$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Berechnen Sie den Grenzwert.

c) Es sei $a_n := \frac{i^n}{n} + \frac{n^2}{3n^2+(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
.

Prof. Dr. Hans-Peter Beise
Fachbereich Informatik
Hochschule Trier

Aufgabe 8 Wissen:

Vervollständigen Sie die Aussagen, so dass ein korrekte (sinnvolle) mathematische Aussage entsteht.

1. Zu einer Menge A ist die Potenzmenge definiert als

2. Eine Abbildung $f : X \to Y$ (mit X, Y zwei Mengen) ist injektiv, wenn gilt:

3. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann ist $e \in G$ das neutrale Element, wenn gilt:

4. Für $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, gilt (geometrische Reihe):

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k =$$

5. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert g, wenn gilt:

6. Es sei M eine Menge und $R \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Dann gilt
   - für alle $x \in M$ ist ...
   - für alle $(x, y) \in R$ gilt ...
   - falls $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann ist auch ...