Tutorium 08: Kombinatorik, vollständige Induktion und komplexe Zahlen

- Fragen?
- vollständige Induktion

6.1 Wissen

6.1.1 (a) Aus welchen drei Abschnitten Besteht ein Induktions-Beweis? (b) Skizzieren sie was in jedem der Abschnitte passiert.

6.1.2 Wie lautet die **geometrische Summenformel** (Inklusive Vorbedingungen)?

6.1.3 Wie lautet die **Gaußsche Summenformel** (Inklusive Vorbedingungen)?

6.1.4 Wie lautet die **Bernoullische Ungleichung** (Inklusive Vorbedingungen)?

6.1.5 Wie ist die **Fakultät** definiert?

6.1.6 Wie ist $\binom{n}{\nu}$ definiert?

6.1.7 Wie lautet der **binomische Satz** für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$?

6.1.8 Wie viele Möglichkeiten gibt es ν aus n Dingen zu ziehen, bei Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge?

6.1.9 Wie viele Möglichkeiten gibt es ν aus n Dingen zu ziehen, bei Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge?

6.1.10 Wie viele Möglichkeiten gibt es ν aus n Dingen zu ziehen, bei Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge?

6.1.11 Wie viele Möglichkeiten gibt es ν aus n Dingen zu ziehen, bei Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge?

6.3.27 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad , \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

6.3.56 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n} 4^\nu = 2^{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}+1)} \quad , \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

6.3.63 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$2^n > n^2 \quad , \quad \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq 5}$$

6.3.3 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n \in \mathbb{N}} : 4n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.

6.3.58 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu \quad , \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

<u>IA:</u> $n = 1$

$$\prod^{1} \left(1 + \frac{2}{\nu}\right) = 1 + \frac{2}{1} = 1 + 2 = 3$$

IA: $n=1$

$$\prod_{\nu=1}^{1}\left(1+\frac{2}{\nu}\right) = 1+\frac{2}{1} = 1+2 = 3$$

$$\sum_{\nu=1}^{1+1} \nu = 1+2 = 3$$

✓

IV: Für $\boxed{\text{EIN}}$ $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{2}{\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu \, .$$

IS: $n \Rightarrow n+1$

$$\prod_{\nu=1}^{n+1}\left(1+\frac{2}{\nu}\right) = \left(\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{2}{\nu}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right) \overset{IV}{=} \left(\sum_{\nu=1}^{n+1}\nu\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{2}{n+1}\right)$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}\cdot(n+2)}{2}\cdot\frac{n+3}{\cancel{n+1}} = \frac{(n+2)\cdot(n+3)}{2} = \sum_{\nu=1}^{(n+1)+1}\nu$$

∎

6.3.50 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{4}{(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)} = \frac{(n+1)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

...

$$\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{4}{(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)} \overset{IV}{=} \frac{4}{(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)} + \frac{(n+1)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)}$$

$$= \frac{4}{(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)} + \frac{(n+1)\cdot(n+4)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}$$

$$= \frac{4+(n+1)\cdot(n+4)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}$$

$$= \frac{n^3+9n^2+24n+20}{(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}$$

Polynom-division

$$= \frac{\cancel{(n+2)}\cdot(n+2)\cdot(n+5)}{\cancel{(n+2)}\cdot(n+3)\cdot(n+4)}$$

$$= \frac{(n+2)\cdot(n+5)}{(n+3)\cdot(n+4)}$$

...

· Kombinatorik

6.2.3 Wie viele Möglichkeiten gibt es aus einer Gruppe von 7 Personen 5 auszuwählen (c)? (Was liegt vor: Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen und (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)

6.2.4 Wie viele Möglichkeiten gibt es aus einer Gruppe von 5 Personen einen Rat von 3 Personen mit Vorsitz und Stellvertretung zu bilden (c)? (Was liegt vor: Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen und (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)

6.2.5 Wie viele Möglichkeiten gibt dass 3 Personen die Noten S, A, B, C, D, E, F bekommen (c)? (Was liegt vor: Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen und (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)

6.2.6 Wie viele Möglichkeiten gibt dass Laura, Tim und Charlie die Noten S, A, B, C, D, E, F bekommen (c)? (Was liegt vor: Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen und (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)

Beispiele:

- Anzahl der Wörter der Länge ν aus n Buchstaben
- Anzahl der Wörter der Länge ν aus n Buchstaben (ohne Doppelung)
- Anzahl der Möglichkeiten, ν Objekte an n Subjekte zu verteilen
- Anzahl der Möglichkeiten, eine Gruppe von ν Personen aus einer Gruppe von n Personen zusammenzustellen

mit Zurücklegen	geordnet	Anzahl Möglichkeiten
ja	ja	n^ν
nein	ja	$\frac{n!}{(n-\nu)!}$
ja	nein	$\binom{n+\nu-1}{\nu}$
nein	nein	$\binom{n}{\nu}$

Aufgabe 71 Berechnen Sie das Folgende:

a) In einem Restaurant stehen 20 Getränke zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten der Getränkeauswahl gibt es bei einer Bestellung von 10 Getränken.

b) Die Anzahl der Möglichkeiten beim 20-maligen Münzwurf maximal 17-Mal Zahl zu werfen.

c) Die Anzahl der dreistelligen Zahlen, in denen sich keine Ziffer wiederholt. Zahlen, die mit der Ziffer 0 beginnen sollen dabei nicht mitgezählt werden.

a) $n=20$ $\quad$ $\nu=10$ $\quad$ (Annahme: mit Zurücklegen, ungeordnet)

$$\binom{20+10-1}{10} = \binom{29}{10} = \frac{29!}{10!\cdot(29-10)!} = \frac{29!}{10!\cdot 19!} = \frac{29\cdot 28\cdot 27\cdot \ldots \cdot 20}{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 1} = 20.030\,010$$

b) $n=20$

K Z K K . Z Z K

$$\Rightarrow \sum_{\ell=0}^{17}\binom{20}{\ell} = \binom{20}{0}+\binom{20}{1}+\ldots+\binom{20}{17}$$

$$\sum_{\ell=0}^{20}\binom{20}{\ell}\cdot 1^{\ell}\cdot 1^{n-\ell} = (1+1)^{20} = 2^{20}$$

$$\Rightarrow 2^{20}-\binom{20}{20}-\binom{20}{19}-\binom{20}{18} = 1.048.365$$

c)

$$\underset{\uparrow}{\_}\ \underset{\uparrow}{\_}\ \underset{\uparrow}{\_}$$

$$9\cdot 9\cdot 8 = 648$$

· Komplexe Zahlen

7.1.1 In den Komplexen Zahlen gilt per Definition: $i^2 = \ldots$

7.1.2 Für was steht das i bei Komplexen Zahlen?

7.1.3 Wie ist die Menge der Komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$) mittels der Reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) definiert?

7.1.4 Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wie sind $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ definiert?

7.1.5 Wie ist die **Addition** zweier Komplexer Zahlen $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}\ ,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiert? $z + w = \ldots$

7.1.6 Wie ist die **Multiplikation** zweier Komplexer Zahlen $z = a+ib, w = c+id \in \mathbb{C}\ ,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiert? $z \cdot w = \ldots$

7.1.7 Wie sind die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation des Körpers der Komplexen Zahlen $(C, +, \cdot)$ definiert?

7.1.8 Wie sind die inversen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation für Elemente ($z = a + ib \in \mathbb{C}\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$) des Körpers der Komplexen Zahlen $(C, +, \cdot)$ definiert?

7.1.9 Wie ist das **konjugiert komplexe** einer Komplexen Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$ definiert?

7.1.10 Wie ist der **Betrag** einer Komplexen Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$ definiert?

7.1.11 Wie ist eine **Polynomfunktion** definiert?

7.1.12 Wie ist eine **Nullstelle** einer Polynomfunktion definiert?

7.1.13 Was besagt der **Fundamentalsatz der Algebra** (Definition)?

7.1.14 Was ist die **Vielfachheit** einer Nullstelle einer Polynomfunktion? Was gilt für die Summe aller Vielfachheiten aller Nullstellen einer Polynomfunktion?

7.1.15 Welche Besonderheit gilt für die Nullstellen von Polynomfunktionen die lediglich reelle Koeffizienten haben ($\forall_{a_v} : a_v \in \mathbb{R}$)?

7.2.1 Seien:

- $z_1 = 3 + i \cdot 2$
- $z_2 = -\frac{3}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$
- $z_3 = i \cdot 3$

Berechnen Sie:

- $z_1 + z_2$
- $z_1 + z_3$
- $z_2 + z_3$
- $|z_1| + z_3$
- $z_2 + |z_3|$
- $z_1 \cdot z_2$
- $z_1 \cdot z_3$
- $z_2 \cdot z_3$
- $|z_2| \cdot z_1$
- $(|z_2| + z_1) \cdot z_3$
- $\frac{1}{z_1} + z_3$
- $\frac{|z_2|}{z_3} + z_2$

- $z_1 + z_2 =$
- $z_2 + |z_3| =$
- $z_1 \cdot z_2 =$
- $|z_2| \cdot z_1 =$
- $\frac{1}{z_1} \cdot z_3 =$