# Brückenkurs Mathematik - Übungsaufgaben
# FB Informatik

Johannes Bröhl
& Paul Meier

Winter-Semester 2024/2025

# Inhaltsverzeichnis

# *Was weiß ich noch?* Brüche

### 1. Aufgabe: Primzahlen

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Markieren Sie:

a) alle durch 2 teilbaren Zahlen in blau.
b) alle durch 3 teilbaren Zahlen in rot.
c) alle durch 5 teilbaren Zahlen in grün.
d) alle Primzahlen durch einkreisen.
e) weitere Vielfache von Primzahlen.

### 2. Aufgabe: Kürzen

a) $\frac{2}{4} = \frac{\square}{\square}$ b) $\frac{3}{9} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{5}{20} = \frac{\square}{\square}$ d) $\frac{16}{4} = \frac{\square}{\square} = \square$

### 3. Aufgabe: Erweitern

a) $\frac{2}{4} = \frac{\square}{8}$ b) $\frac{3}{9} = \frac{\square}{27}$

c) $\frac{5}{20} = \frac{\square}{100}$ d) $\frac{16}{4}(= \frac{\square}{2}) = \frac{\square}{6}$

### 4. Aufgabe: Bruch zu Dezimal

a) $\frac{1}{2} = \square,\square$ b) $\frac{1}{4} = \square,\square\square$

c) $\frac{5}{4} = \square,\square\square$ d) $\frac{1}{10} = \square,\square$

### 5. Aufgabe: Dezimal zu Bruch

a) $0,5 = \frac{\square}{\square}$ b) $0,125 = \frac{\square}{\square}$

c) $0,13 = \frac{\square}{\square}$ d) $0,\overline{3} = \frac{\square}{\square}$

### 6. Aufgabe: Ganze Zahl als Bruch

a) $1 = \frac{\square}{\square}$ b) $2 = \frac{\square}{\square}$

c) $10 = \frac{\square}{\square}$ d) $19 = \frac{\square}{\square}$

### 7. Aufgabe: Multiplizieren

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

### 8. Aufgabe: Dividieren

a) $\frac{1}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square}{\square} = \square$

c) $\frac{4}{10} \div \frac{3}{5} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

### 9. Aufgabe: Addieren

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\square+\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} + \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square+\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{2}{5} + \frac{3}{2} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} + \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square+\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

d) $$\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \text{normal:} \\ \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} + \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} \\ \qquad = \frac{\square+\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \\ \text{schnellere Alternative:} \\ \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} + \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square+\square}{\square} \\ \qquad = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \end{array} \right.$$

### 10. Aufgabe: Subtrahieren

a) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\square-\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} - \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square} = \frac{\square-\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

### 11. Aufgabe: Doppelbrüche

a) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\square}{\square} \div \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$

b) $\frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{\frac{\square}{\square}}{\frac{\square}{\square}} = \frac{\square}{\square} \div \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

# *Aufgabenblatt:* Brüche

**1. Aufgabe: Primfaktorzerlegung**

Geben Sie die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen an:

a) $16 =$ b) $27 =$ c) $45 =$
d) $91 =$ e) $84 =$ f) $72 =$

**2. Aufgabe: Kürzen**

a) $\frac{2}{4} =$ b) $\frac{17}{51} =$ c) $\frac{30}{42} =$

**3. Aufgabe: Multiplizieren**

a) $\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{2} =$ b) $\frac{17}{51} \cdot \frac{9}{2} =$ c) $\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{5} =$

**4. Aufgabe: Dividieren**

a) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{6} =$ b) $\frac{26}{39} \div \frac{2}{3} =$ c) $\frac{132}{33} \div \frac{6}{3} =$

**5. Aufgabe: Addieren (einfach)**

a) $\frac{2}{4} + \frac{6}{4} =$ b) $\frac{7}{13} + \frac{8}{13} =$ c) $\frac{11}{19} + \frac{5}{19} =$

**6. Aufgabe: Erweitern auf Nenner-kgV**

a) $\frac{2}{4}$ und $\frac{5}{6}$ b) $\frac{3}{22}$ und $\frac{5}{33}$ c) $\frac{2}{21}$ und $\frac{5}{15}$

**7. Aufgabe: Addieren (schwierig)**

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} =$ b) $\frac{3}{10} + \frac{2}{21} =$ c) $\frac{7}{4} + \frac{13}{9} =$

**8. Aufgabe: Addieren (fortgeschritten)**

a) $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} =$ b) $\frac{4}{15} + \frac{3}{25} =$ c) $\frac{5}{28} + \frac{11}{49} =$

**9. Aufgabe: Subtrahieren**

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$ b) $\frac{4}{5} - \frac{5}{7} =$ c) $\frac{13}{15} - \frac{9}{20} =$

**10. Aufgabe: Kombination**

a) $\frac{2}{4} \div \frac{3}{4} + \frac{3}{7} =$
b) $\frac{17}{51} \cdot \frac{6}{2} - \frac{3}{25} \div \frac{3}{5} =$
c) $(\frac{30}{42} - \frac{3}{7}) \div \frac{2}{5} =$

**11. Aufgabe: Gemischter Bruch zu Bruch**

a) $2\frac{2}{4} =$
b) $3\frac{4}{7} =$
c) $1\frac{30}{42} =$

**12. Aufgabe: Bruch zu Gemischtem Bruch**

a) $\frac{60}{19} =$
b) $\frac{17}{5} =$
c) $\frac{130}{8} =$

**13. Aufgabe: Bruch zu Dezimal Zahl**

a) $\frac{1}{4} =$ b) $\frac{5}{8} =$
c) $\frac{7}{5} =$ d) $\frac{2}{3} =$

**14. Aufgabe: Dezimal Zahl zu Bruch**

a) $0,8 =$ b) $0,789 =$ c) $2,375 =$

**15. Aufgabe: Uhrzeiten**

a) $1h\ 35min =$ $min =$ $h =$ $d$
b) $187min =$ $h$ $min =$ $h =$ $d$
c) $72h =$ $min =$ $d =$ $a$

Wobei min : Minuten, h : Stunden, d : Tage und a : Jahre

# *Cheat-Sheet:* Brüche

***Formel:* Brüche Kürzen**

Seien $x = n \cdot x'$ und $y = n \cdot y'$, dann gilt
$\frac{x}{y} = \frac{n \cdot x'}{n \cdot y'} = \frac{x'}{y'}$.
Die Schwierigkeit besteht darin den ggT $n$ von $x$ und $y$ zu finden.

***Formel:* Brüche Multiplizieren**

$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{x \cdot a}{y \cdot b}$

***Formel:* Brüche Dividieren**

$\frac{x}{y} \div \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b}{a} = \frac{x \cdot b}{y \cdot a}$

**Merksatz:** *Um zu dividieren, einfach mit dem Kehrbruch multiplizieren.*

***Formel:* Brüche Addieren / Subtrahieren**

$$\frac{x}{y} \pm \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot 1 \pm 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b}{b} \pm \frac{y}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{x \cdot b}{y \cdot b} \pm \frac{y \cdot a}{y \cdot b} = \frac{x \cdot b \pm y \cdot a}{y \cdot b}$$

Fortgeschrittene Technik: mittels ggT der beiden Nenner wird das kgV der Nenner direkt genutzt:
mit $y' = \frac{y}{\mathrm{ggT}(y,b)}$, $b' = \frac{b}{\mathrm{ggT}(y,b)}$ und $\mathrm{kgV}(y, b) = y' \cdot b' \cdot \mathrm{ggT}(y, b)$ gilt

$$\frac{x}{y} \pm \frac{a}{b} = \frac{x \cdot \frac{b}{\mathrm{ggT}(y,b)} \pm \frac{y}{\mathrm{ggT}(y,b)} \cdot a}{\mathrm{kgV}(y, b)} = \frac{x \cdot b' \pm y' \cdot x}{y' \cdot b' \cdot \mathrm{ggT}(y, b)}$$

da

$$\frac{x \cdot b \pm y \cdot a}{y \cdot b} = \frac{x \cdot b \cdot \frac{\mathrm{ggT}(y,b)}{\mathrm{ggT}(y,b)} \pm y \cdot \frac{\mathrm{ggT}(y,b)}{\mathrm{ggT}(y,b)} \cdot a}{y \cdot \frac{\mathrm{ggT}(y,b)}{\mathrm{ggT}(y,b)} \cdot b \cdot \frac{\mathrm{ggT}(y,b)}{\mathrm{ggT}(y,b)}} = \frac{\mathrm{ggT}(y, b) \cdot (x \cdot \frac{b}{\mathrm{ggT}(y,b)} \pm \frac{y}{\mathrm{ggT}(y,b)} \cdot a)}{\mathrm{ggT}(y, b) \cdot (\frac{y}{\mathrm{ggT}(y,b)} \cdot \frac{b}{\mathrm{ggT}(y,b)} \cdot \mathrm{ggT}(y, b))} = \frac{x \cdot b' \pm y' \cdot a}{y' \cdot b' \cdot \mathrm{ggT}(y, b)}$$

**Beispiel: ggT**

$a = 24$ und $b = 36$
$a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ und $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
Dann ist $x = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ der ggT von 24 und 36
$\mathrm{ggT}(24, 36) = 12$

**Beispiel: kgV**

$a = 24$ und $b = 36$
$a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ und $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
Dann ist $y = a \cdot 3 = b \cdot 2 = \mathrm{ggT}(24, 36) \cdot 2 \cdot 3 = 72$ das kgV von 24 und 36
$\mathrm{kgV}(24, 36) = 72$

## *Was weiß ich noch?* Kopfrechnen und schriftlich Addieren/Multiplizieren/Dividieren

**1. Aufgabe: Addieren**

a) $114 + 27 =$ b) $274 + 49 =$

**2. Aufgabe: Subtrahieren (leicht)**

a) $97 - 26 =$ b) $123 - 49 =$

**3. Aufgabe: Subtrahieren (fortgeschritten)**

a) $12 - 27 =$ b) $97 - 126 =$

**4. Aufgabe: Multiplizieren**

a) $12 \cdot 27 =$ b) $97 \cdot 123 =$

**5. Aufgabe: Dividieren (leicht)**

a) $512 \div 8 =$ b) $117 \div 9 =$

**6. Aufgabe: Dividieren (fortgeschritten)**

a) $125 \div 100 =$ b) $5 \div 15 =$

## *Aufgabenblatt:* Rechnen ohne Taschenrechner

**1. Aufgabe: Addieren**

a) $4.756.393 + 689.342 =$
b) $798.089 + 1.450.792 =$
c) $8.593 + 399.728 =$

**2. Aufgabe: Subtrahieren**

a) $5.672 - 3.762 =$
b) $8.910.034 - 7.167.287 =$
c) $1.267 - 57.389 =$
d) $236.789 - 978.225 =$

**3. Aufgabe: Multiplizieren**

a) $125 \cdot 17 =$
b) $287 \cdot 901 =$
c) $1.093,78 \cdot 346,7 =$

**4. Aufgabe: Dividieren**

a) $10.191 \div 43 =$
b) $130.801 \div 517 =$
c) $549 \div 25 =$
d) $4,6512 \div 1,02 =$

**5. Aufgabe: Geschickt rechnen**

a) $24^2 =$
b) $999 \cdot 1001 =$
c) $37^2 =$
d) $211 \cdot 189 =$

# *Aufgabenblatt:* Summen und Produkte

### 1. Aufgabe: Summen: Zuordnen

a) $\sum_{i=0}^{5} i =$

b) $\sum_{i=1}^{6} i =$

c) $\sum_{i=1}^{4} 2i =$

d) $\prod_{i=0}^{3} i^2 =$

i) $1+2+3+4+5+6 =$

ii) $2 + 4 + 6 + 8 =$

iii) $0 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 9 =$

iv) $0+1+2+3+4+5 =$

### 2. Aufgabe: Benennen: Summe

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i)$$

a) $i$ ist ...

b) $a$ ist ...

c) $b$ ist ...

d) $(x_i)$ ist ...

### 3. Aufgabe: Summen Berechnen

a) $\sum_{i=1}^{3} i =$

b) $\sum_{k=-1}^{3}(k+1) =$

c) $\sum_{n=3}^{10}(\frac{n}{2}) =$

d) $\sum_{j=1}^{3} j^2 =$

e) $\sum_{\lambda=3}^{3} \lambda^\lambda =$

f) $\sum_{m=4}^{2} \frac{m^7}{m!} =$

g) $\sum_{\psi=1}^{50} \psi =$

h) $\sum_{i=1}^{7} x_i =$

### 4. Aufgabe: rechnen mit Summen

a) $(\sum_{i=1}^{4} i) + (\sum_{i=1}^{4} i) =$

b) $\sum_{k=1}^{3} k + \sum_{j=1}^{3} j =$

c) $\sum_{n=1}^{3} n + \sum_{n=4}^{6} n =$

d) $\sum_{\psi=1}^{3} \psi + \sum_{\lambda=4}^{6} \lambda =$

### 5. Aufgabe: Indexverschiebung: Zuordnen

a) $\sum_{i=0}^{5} i + \sum_{i=2}^{7}(i-2)$

b) $\sum_{i=1}^{6} i$

c) $\sum_{n=1}^{4} 2(n+1)$

i) $\sum_{m=3}^{6} 2(m-1)$

ii) $\sum_{i=0}^{5} 2i = 2\sum_{i=0}^{5} i$

iii) $\sum_{j=-1}^{4}(j+2)$

### 6. Aufgabe: Schreibe als Summe

a) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 =$

b) $2+4+6+8 =$

c) $6+9+12+15 =$

d) $-1-2-3-4 =$

e) $4+2+8+10+6 =$

f) $3+4+5+7+8+9 =$

### 7. Aufgabe: Benennen: Produkt

$$\prod_{i=a}^{b}(x_i)$$

a) $i$ ist ...

b) $a$ ist ...

c) $b$ ist ...

d) $(x_i)$ ist ...

### 8. Aufgabe: Produkte: Zuordnen

a) $\prod_{i=1}^{5} 2i$

b) $\prod_{j=4}^{6} 3j$

c) $\prod_{i=5}^{6} 2i$

i) $3^3 \prod_{k=4}^{6} k$

ii) $2^5 \prod_{i=1}^{5} i$

iii) $2^2(5 \cdot 6)$

### 9. Aufgabe: Schreibe als Produkt

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 =$

b) $4! =$

c) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 =$

d) $4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 =$

### 10. Aufgabe: geschachtelte Summen und Produkte

a) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} i \cdot j =$

b) $\prod_{n=1}^{2} \prod_{m=2}^{3} n^m =$

c) $\sum_{i=1}^{3} \prod_{m=2}^{4}(i+m) =$

d) $\prod_{n=1}^{3} \sum_{i=0}^{2} n \cdot i =$

# *Cheat-Sheet:* Summen und Produkte

***Formel:* Triviale Summen**

$$\sum_{i=a}^{a}(x_i) = x_a$$

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i) = 0 \text{ falls } b < a$$

***Formel:* Distributivgesetz bei Summen**

Ein konstanter Faktor kann aus einer Summe ausgeklammert werden:

$$\sum_{i=a}^{b} c \cdot (x_i) = c \cdot \sum_{i=a}^{b}(x_i)$$

Die „Pünktchenschreibweise“ motiviert dies aus dem bekannten Distributivgesetz heraus sehr anschaulich:

$$\sum_{i=1}^{n}(c \cdot x_i) = (c \cdot x_1) + (c \cdot x_2) + (c \cdot x_3) + \cdots + (c \cdot x_n) = c \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = c \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i)$$

***Formel:* Summen aufspalten & zusammenfassen**

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i) + \sum_{j=b+1}^{c}(x_j) = \sum_{k=a}^{c}(x_k) = \sum_{j=a}^{b'-1}(x_j) + \sum_{i=b'}^{c}(x_i) = x_a + \sum_{i=a+1}^{c}(x_i) = \sum_{i=a}^{c-1}(x_i) + x_c$$

Beachte, dass ein Zusammenfassen nur möglich ist, wenn die „Körper“ beider Summen zusammenpassen. Außerdem wird immer implizit angenommen, dass $a \leq b < c$ bzw. $a < b' \leq c$.

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i) + \sum_{j=a}^{b}(y_j) = \sum_{k=a}^{b}(x_k + y_k)$$

Summen mit unterschiedlichen „Körpern“ können zusammengefasst werden sofern sie identische Grenzen haben. Auch das lässt sich gut mittels der Pünktchen-Schreibweise nachvollziehen.

***Formel:* Summen Indexverschiebung**

$$\sum_{i=a}^{b}(x_i) = \sum_{i=a+c}^{b+c}(x_{i-c}) = \sum_{i=a-d}^{b-d}(x_{i+d})$$

***Formel:*** **Summe mit Sprungweite**

Betrachte folgende Summendefinition:

$$\sum_{\substack{i=a\\ i+=s}}^{b}(x_i) = x_a + x_{a+s} + x_{a+(2s)} + \cdots + x_{b-s} + x_b$$

Um die hier im „Kopf" der Summe definierte Sprungweite aus dem Kopf heraus zu bekommen, ist eine Indexverschiebung und das Anwenden des Distributivgesetzes notwendig:
Mit $s$ der Sprungweite zum nächsten vorkommenden Index und
$a$ als Startindex sowie $b = a + n \cdot s$ als Endindex, ergibt sich dann:

$$\sum_{\substack{i=a\\ i+=s}}^{b}(x_i) = x_{a+0\cdot s} + x_{a+1\cdot s} + x_{a+2\cdot s} + \cdots + x_{a+n\cdot s} = \sum_{i=0}^{n}(x_{a+i\cdot s})$$

bzw. falls über Zahlen $x_i$ also $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ summiert wird und diese einen gemeinsamen Teiler besitzen, also $\mathrm{ggT}((x_i)_i) = \mathrm{ggT}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = t > 1$, ist folgendes Möglich:

$$\sum_{i}(x_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i) = \sum_{i=\frac{x_1}{\mathrm{ggT}((x_i)_i)}}^{\frac{x_n}{\mathrm{ggT}((x_i)_i)}}(i \cdot \mathrm{ggT}((x_i)_i)) = \sum_{i=x_1 \div t}^{x_n \div t}(i \cdot t)$$

Betrachte zum besseren Verständnis folgende alternative Vorgehensweise:
Klammere den gemeinsamen Faktor aus bevor zur Summe zusammengefasst wird:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= (x'_1 \cdot t) + (x'_2 \cdot t) + (x'_3 \cdot t) + \cdots + (x'_n \cdot t) \\ &= t \cdot (x'_1 + x'_2 + x'_3 + \cdots + x'_n) = t \cdot \sum_{i=x'_1}^{x'_n} i = \cdot \sum_{i=x'_1}^{x'_n}(i \cdot t) = \sum_{i=x_1 \div t}^{x_n \div t}(i \cdot t) \end{aligned}$$

mit $x_i = x'_i \cdot t$

***Formel:*** **Produkte Sonderregeln**

Triviales Produkt:

$$\prod_{i=a}^{b}(x_i) = 1 \text{ falls } b < a$$

Fakultät:

$$n! = \prod_{i=1}^{n}(i) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

Faktor ausklammern:

$$\prod_{i=a}^{b}(c \cdot (x_i)) = c^{b-a+1} \cdot \prod_{i=a}^{b}(x_i)$$

Der „Körper" eines Produkts sollte vorsichtshalber immer geklammert werden um folgendes Missverständnis zu vermeiden:

$$\prod_{i=a}^{b}(x_i) \cdot c \stackrel{?}{=} \begin{cases} \prod_{i=a}^{b}(x_i \cdot c) = c^{b-a+1} \cdot \prod_{i=a}^{b}(x_i) \\ \left(\prod_{i=a}^{b}(x_i)\right) \cdot c = c \cdot \prod_{i=a}^{b}(x_i) \end{cases}$$

**Beispiel: Geschachtelte Summen und Produkte**

$$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} ij = \sum_{i=a}^{b}\left(\sum_{j=c}^{d}(i\cdot j)\right) = \begin{cases} \begin{array}{ccccccccccccc} & a & \cdot & c & + & a & \cdot & (c+1) & + & \cdots & + & a & \cdot & d \\ + & (a+1) & \cdot & c & + & (a+1) & \cdot & (c+1) & + & \cdots & + & (a+1) & \cdot & d \\ \vdots & & \cdots & \vdots & & & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \cdots & \\ + & b & \cdot & c & + & b & \cdot & (c+1) & + & \cdots & + & b & \cdot & d \end{array} \end{cases}$$

Horizontal hierbei das Geschehen der inneren Summe, Vertikal das der äußeren.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}\prod_{j=2}^{4}(ji) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{2}(2i)(3i)(4i) = (2\cdot 1)(3\cdot 1)(4\cdot 1) + (2\cdot 2)(3\cdot 2)(4\cdot 2) = 2\cdot 3\cdot 4 + 4\cdot 6\cdot 8 = 24 + 192 = 216 \\ &= \quad \left(\prod_{j=2}^{4} j\cdot 1\right) + \left(\prod_{j=2}^{4} j\cdot 2\right) = ((2\cdot 1)\cdot(3\cdot 1)\cdot(4\cdot 1)) + ((2\cdot 2)\cdot(3\cdot 2)\cdot(4\cdot 2)) = \cdots = 216 \end{aligned}$$

Es ist möglich von „innen nach außen“ oder von „außen nach innen“ aufzulösen.

# ***Aufgabenblatt:*** Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

### 1. Aufgabe: Potenzen

a) $2^3 \cdot 2^2 =$
b) $(5^2)^3 =$
c) $\frac{3^4}{2^4} =$
d) $3^3 \div 3 =$
e) $7^{-2} =$
f) $2^3 \cdot 3^3 =$
g) $3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^2 =$
h) $4 + 28 + 49 =$

### 2. Aufgabe: Wurzeln

a) $\sqrt[3]{8} =$
b) $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{27} =$
c) $\sqrt[3]{27} + 2 \cdot \sqrt[3]{27} =$
d) $\left(\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{2}\right)^2 =$
e) $\left(\sqrt{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt{2}\right)^2 =$
f) $\sqrt[3]{-27} =$
g) $\sqrt[7]{2^{21}} =$

### 3. Aufgabe: Logarithmen

a) $\ln(e) =$
b) $\log_{16}(8) =$
c) $\lg(3000) - \lg(3) =$
d) $\lg(4) + 2 \cdot \lg(5) =$
e) $2^x = 16$
f) $\ln\left(\sqrt{e}\right) =$
g) $\mathrm{ld}(32) =$

### 4. Aufgabe: Regeln vervollständigen: Potenzen

a) $a^n \cdot a^m =$
b) $\quad = a^{n-m}$
c) $(a^n)^m =$
d) $\quad = (p+q) \cdot a^n$
e) $\quad = (a \cdot b)^n$
f) $a^n \div b^n =$
g) $\quad = \frac{1}{a^n}$
h) $a^{\frac{n}{m}} =$

### 5. Aufgabe: Regeln vervollständigen: Wurzeln

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} =$
b) $\quad = \sqrt[m\cdot n]{a^{m-n}}$
c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} =$
d) $p \cdot \sqrt[n]{a} + q \cdot \sqrt[n]{a} =$
e) $\sqrt{a} =$
f) $\quad = \sqrt[n]{a \cdot b}$
g) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} =$
h) $(\sqrt[n]{a})^m = \quad =$
i) $\sqrt[n\cdot p]{a^{n\cdot q}} =$
j) $\sqrt[n]{a^n} =$

### 6. Aufgabe: Regeln vervollständigen: Logarithmen

a) $\log_a(1) =$
b) $\log_a(a) =$
c) $\log_a(a^x) =$
d) $\quad = w \cdot \log_a(u)$
e) $\lg(x) =$
f) $\mathrm{ld}(x) =$
g) $\log_a(u \cdot v) =$
h) $\quad = \log_a(u) - \log_a(v)$
i) $\log_{\frac{a}{b}}(c) =$
j) $\ln(x) =$
k) $\quad = \frac{\log_x(u)}{\log_x(a)}$

### 7. Aufgabe: Vereinfachen

a) $\frac{(v^2-n^2)\cdot 2n}{v-n}$
b) $(\sqrt{x} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2})$
c) $7(a-b)^3 + 3(b-a)^3$
d) $\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y}}$

### 8. Aufgabe: Gleichungen lösen

a) $2^x = 16$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 3\frac{3}{8}$
c) $\log_3\left(\frac{9x}{4x-3}\right) = 2$
d) $\log_3(3x-5) = \log_3(2x+3)$

# *Cheat-Sheet:* Potenzen Wurzeln und Logarithmen

***Formel:* Potenz, Wurzel, Logarithmus - Begriffe**

$$a^n = x \qquad \text{Basis}^{\text{Exponent}} = \textit{Potenz}$$
$$\sqrt[n]{x} = a \qquad \sqrt[\text{Wurzel-Exponent}]{\text{Radikant}} = \textit{Wurzel}$$
$$\log_a x = n \qquad \log_{\text{Basis}} \text{Numerus} = \text{Logarithmus}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a} \qquad (a^n)^m = a^{n\cdot m} \qquad a^{n^m} = a^{(n^m)} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \log_a u = \frac{\log_x a}{\log_x u}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad \sqrt[1]{a} = a \qquad \sqrt[0]{a} = n.d. \qquad \log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a a^x = x$$

$$\text{Sofern } a > 0 \text{ und } a \in \mathbb{R}\text{: } \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n\cdot m]{a^{m+n}} = (\sqrt[n\cdot m]{a})^{m+n} \qquad \log_a u \cdot v = \log_a u + \log_a v$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a^{m-n}} = (\sqrt[n\cdot m]{a})^{m-n} \qquad \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\log_a u^w = w \cdot \log_a u \qquad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

$$\log_{\frac{z}{n}} c = -\log_{\frac{n}{z}} c \qquad \log_a \frac{x}{y} = -\log_a \frac{y}{x}$$

$$\ln(x) = \log_e(x) \qquad \lg(x) = \log_{10}(x) \qquad \mathrm{ld}(x) = \log_2(x)$$

**Beispiel: Variable aus dem Exponenten verschieben mittels Logarithmus**

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^x &= 32 && |\log_{\frac{1}{2}} \\
\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \log_{\frac{1}{2}} 32 && |\text{Gesetz anwenden} \\
x &= \log_{\frac{1}{2}} 32 && |\text{Gesetz anwenden} \\
x &= -\log_{\frac{2}{1}} 32 \\
x &= -\log_2 32 \\
x &= -5
\end{aligned}$$

***Formel:* Binomische Formeln**

$$\begin{array}{lll}
1. & (a+b)^2 & = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
2. & (a-b)^2 & = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
3. & (a+b) \cdot (a-b) & = a^2 - b^2
\end{array}$$

# *Was weiß ich noch?* Dreisatz und Prozentrechnung

### 1. Aufgabe

a) Ein Erwachsener sollte am Tag ungefähr $2l$ Wasser trinken. Wie viele Liter Wasser würden zehn Erwachsene am Tag ungefähr verbrauchen?
b) Drei Laster können zusammen $15t$ transportieren. Wie viele Laster werden benötigt um $24t$ gleichzeitig zu bewegen?
c) Zwei Bäcker bereiten in einer Stunde 178 Brötchen vor. Wie viele Brötchen schafft ein Bäcker in der selben Zeit?

### 2. Aufgabe

a) Zwei Kinder essen ein Glas Nutella in 6 Tagen leer. Wie lange brauchen drei Kinder um das gleiche Glas leer zu essen?
b) Fünf Karawanen müssen drei mal die Strecke zurücklegen um alle Waren zu transportieren. Wie viele Karawanen werden benötigt um alle Waren mit nur zwei Reisen zu transportieren?
c) Normalerweise brauche ich bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $100\frac{km}{h}$ genau $2h$ um meine Eltern zu besuchen. Ich möchte bei einem Notfall aber in $90min$ ankommen. Wie schnell muss ich dann durchschnittlich fahren?

### 3. Aufgabe

a) Tim ist auf Wanderweg 12 wandern und zählt dabei Schmetterlinge. In einer Stunde begegnen ihm fünf rote, einundzwanzig blaue und sieben gelbe Schmetterlinge. Wenn seine Schwester Mia auf Wanderweg 24 auch zählt, wie viele rote, blaue und gelbe Schmetterlinge würden sie zusammen zählen?
b) Laura benötigt eine Stunde um ihre Steuererklärung zu machen. Wie lange bräuchte Laura, wenn ihr Freund Tobias helfen würde?

### 4. Aufgabe: Gemeinsamkeiten

a) Was haben die Teilaufgaben in Aufgabe 1 gemeinsam?
b) Was haben die Teilaufgaben in Aufgabe 2 gemeinsam?
c) Was haben die Teilaufgaben in Aufgabe 3 gemeinsam?
d) Welche Einteilung/Fallunterscheidung von Dreisatzaufgaben folgt daraus?

# *Aufgabenblatt:* Dreisatz und Prozentrechnung

**1. Aufgabe: Trier**

Kaiser Augustus hat bei der Gründung Triers 17 v. Chr. 15 Wohnbaracken für die dort stationierte Legion bauen lassen. Nun möchte Augustus zwei weitere Legionen in Trier stationieren. Wie viele Wohnbaracken müssen am ende in Trier vorhanden sein?

**2. Aufgabe: Alesia**

Caesars treue Legionen haben bei der Unterwerfung Galliens (und der Treverer, dem in Trier ansässigen Stamm der Kelten) nicht nur gekämpft sondern auch viel gebaut. Eine Kohorte von Caesars Truppen baut an einem Tag 200m befestigten Wall. Bei der Belagerung von Alesia 52 v.Chr. errichteten seine Truppen insgesamt 27km Befestigungen. Dabei standen Caesar 140 Kohorten zur Verfügung. Wie viele Kohorten konnte der Feldherr zur Sicherung der Bauarbeiten abstellen, wenn die Befestigungen in 3 Tagen fertiggestellt sein mussten?

**3. Aufgabe: Hannibal**

Der Karthager Hannibal versetzte im zweiten Punischen Krieg (218-201 v. Chr.) die Römische Republik in Angst und schrecken. Nach der niederschmetternden Niederlage des Römischen Heers am Trasimenischen See (217 v. Chr.) bei dem alle 25.000 Soldaten unter Gaius Flaminius's Kommando getötet oder Gefangen wurden, beschloss der Senat die Hilfe der Götter zu suchen. Wenn eine solche Niederlage nach dem Opfer von 3 Ziegen möglich war, wie viele Ziegen sollte der Senat opfern um die nächste Schlacht zu gewinnen?

**4. Aufgabe: Weinhändler**

Der Römische Weinhändler Arminius Vinorum kauft 100 Fässer besten Mosel-Riesling in Trier für 2 Denare das Fass. Er weiß, dass er den begehrten Wein in Rom für 250% des Einkaufspreises wieder verkaufen kann. Wie viel Geld darf ihn der Transport maximal kosten, damit Arminius Vinorum einen Gewinn erzielt?

# *Aufgabenblatt:* Gleichungen Umformen

### 1. Aufgabe: Gleichungen umstellen

Stellen Sie die Gleichungen jeweils um:

a) nach x

$$2x + 3y = -7y$$

b) nach $\square$

$$2(\square) + 3y = -7y$$

c) nach x

$$2\left(\frac{x^2}{3}\right) + 3y = -7y$$

d) nach x

$$\frac{3x+8}{10} = \frac{2}{5}$$

e) nach $\square$

$$\frac{3(\square)+8}{10} = \frac{2}{5}$$

f) nach $\square$

$$\frac{2y-3}{\square} = \frac{7}{3y}$$

g) nach x

$$\frac{2y-3}{(7x-3)} = \frac{7}{3y}$$

### 2. Aufgabe: Mehrfachbrüche umstellen

Stellen Sie die Gleichungen jeweils um:

a) nach x

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{7}{5}$$

b) nach $\triangle$

$$\frac{\frac{3}{\triangle}}{\square} = \frac{5}{7}$$

c) nach x

$$\frac{\frac{3}{\frac{3}{x}+7}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{7}$$

### 3. Aufgabe: Terme umstellen

Vereinfachen Sie:

a) $ab + a^2b + ab^2 =$

b) $\frac{b^2x}{bz^2} \div \frac{x}{z} =$

c) $(x^2a + bx) \cdot \frac{1}{x} =$

### 4. Aufgabe: Gleichungen lösen

a) $7x + 3x = 5x \quad \rightarrow x =$

b) $\frac{3\lambda}{5} + \frac{4\lambda}{10} = 3z \quad \rightarrow \lambda =$

c) $\frac{ab}{b} - 5 = \frac{b}{3} \cdot \frac{9b}{3} \quad \rightarrow a =$

# *Aufgabenblatt:* Ungleichungen

### 1. Aufgabe

a) $x + 3 \geq 5$

b) $2x - 3 \leq 8 + x$

c) $\frac{2x}{3} < \frac{2x}{6} - \frac{3}{2}$

### 2. Aufgabe

a) $-3x \leq 7$

b) $5\eta - 7 > 7\eta$

c) $\frac{\psi}{3} \leq \frac{4\psi}{6} - \frac{3}{2}$

## ***Aufgabenblatt:*** Betrags(un)gleichungen

**1. Aufgabe**

a) $|x-3| < 1$
b) $|x-2| + 1 \leq 7$

**2. Aufgabe**

a) $|x-3| \geq 1$
b) $|x-2| + 1 > 7$

**3. Aufgabe**

a) $|\frac{x}{2} + \frac{2x}{4}| + 1 \leq 1$
b) $|x+11| - 5 \leq -7$

**4. Aufgabe: Beobachtung**

Welche allgemeinen Regeln können Sie aus den Aufgaben ableiten die für Betragsgleichungen der Formen

**i)** $|g(x)| < a$ mit $a > 0$

**ii)** $|g(x)| > a$ mit $a > 0$

**iii)** $|g(x)| < b$ mit $b < 0$

**ib)** $|g(x)| \leq a$ mit $a \geq 0$

**iib)** $|g(x)| \geq a$ mit $a \geq 0$

**iiib)** $|g(x)| \leq b$ mit $b \leq 0$

gelten? (Dabei ist $g(x)$ eine beliebige Gerade (Lineare Funktion))

## ***Was weiß ich noch?*** Geraden

**1. Aufgabe: Geradengleichung**

Wie lautet die allgemeine Geradengleichung (in Parameterform)? $g(x) =$
Welche Bedeutung haben die beiden Bezeichner $m$ und $b$? (Das sind die üblicherweise verwendeten Bezeichner)

**2. Aufgabe: Geraden beschreiben**

Welche Angaben werden benötigt um eine Gerade eindeutig zu beschreiben? (3 Möglichkeiten)

**i)** Direkt

**iia)** halb Indirekt

**iib)** Indirekt

**3. Aufgabe: Geraden beschreiben (3+)D (Bonus)**

Wie kann eine Gerade in 3 und mehr Dimensionen „besser“ (als mit der Geradengleichung in Parameterform aus der ersten Aufgabe) beschrieben werden?

**4. Aufgabe: Beziehung zwischen Geraden**

In welchen Beziehungen können zwei Geraden zueinander stehen? (Gesucht sind 5 Beziehungen)

**i)**

**ia)** Spezialfall von i)

**ii)**

**iia)** Spezialfall von ii)

**iii)** (nur in 3 und mehr Dimensionen) Warum?

**5. Aufgabe: Geraden im Alltag**

Überlegen Sie sich ein Alltagsbeispiel zu dessen Beschreibung Sie Geraden verwenden können.
Hat der Schnittpunkt einer der Geraden mit einer der Achse eine besondere Bedeutung für das reale Problem? Oder der Schnittpunkt zweier Geraden? Oder Punkte die auf der Geraden liegen oder nicht?

# *Aufgabenblatt:* Geraden

### 1. Aufgabe: Punkte auf Gerade berechnen

Gegeben ist folgende Gerade: $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
Prüfen Sie welche der folgenden Punkte auf der Geraden liegen:

a) $P_1(1|3)$
b) $P_2(1|1)$
c) $P_3(0|2)$
d) $P_4(-10|4)$
e) $P_5\left(-1|\frac{3}{2}\right)$

### 2. Aufgabe: Parallele Geraden

a) Welche Eigenschaft haben parallele Geraden?
b) Gruppieren sie die folgenden Geraden, sodass parallele Geraden in einer Gruppe sind:

$f_1(x) = 2x + 1$
$f_2(a) = \frac{6}{3}a + 1337$
$f_3(x) = 2x - 1$
$f_4(x) = -2x + 1$
$f_5(\lambda) = 2\lambda$
$f_6(x) = x + 27 - 3x$
$f_7(x) = x - 1 + x$
$f_8(w) = -2w - 1$
$f_9(x) = -2x + 7$
$f_{10}(z) = \frac{2}{3}z - 11 + \frac{8}{6}z$
$f_{11}(x) = \frac{(-1)^2}{\frac{1}{2}}x$
$f_{12}(x) = \frac{-2}{-1}x - 3$

### 3. Aufgabe: Geradengleichungen bestimmen

a) Bestimmen Sie zu den folgenden Angaben die Geradengleichungen:
*i)* $g_1$ mit Steigung 0.5 durch den Punkt $P(5|3)$
*ii)* $g_2$ mit Steigung $-2$ durch den Punkt $P(2|4)$
*iii)* $g_3$ durch die Punkte $P(1|1)$ und $Q(5|2)$
*iv)* $g_4$ durch die Punkte $P(5|2)$ und $Q(6|-2)$
b) Zeichnen Sie die Geraden $g_i$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.
c) In welcher Beziehung stehen $g_1$ und $g_2$ bzw. $g_3$ und $g_4$?
d) Können Sie eine allgemeine Regel formulieren wie sich die Steigungen von Geraden zueinander verhalten wenn die Beziehung aus *c)* zwischen ihnen vorliegt?

### 4. Aufgabe: Schnittpunkte von Geraden bestimmen

Bestimmen Sie jeweils den Schnittpunkt der angegebenen Geraden. (Prüfen/Überlegen Sie zunächst ob/wie viele Schnittpunkte existieren.)
a) $f_1(x) = 2x - 2, \quad g_1(x) = -2x + 1$
b) $f_2(x) = \frac{1}{3}x, \quad g_2(x) = 6x - 17$
c) $f_3(x) = \frac{1}{7}x + 7, \quad g_3(x) = \frac{3}{21}x - 21$
d) $f_4(x) = -3x + \frac{1}{3}, \quad g_4(x) = -x + \frac{3}{9} - \frac{4}{2}x$

### 5. Aufgabe: Textaufgaben mit Geraden lösen

Die folgende Textaufgabe ist lösbar indem Sie ihr Wissen über Geraden anwenden:
Luisa möchte Frank eine Entdeckung für ihr Projekt zeigen. Die beiden möchten sich so schnell wie möglich sehen. Dafür kennen sie ein schönes Plätzchen, dass beide gleich schnell erreichen können. Also steigt Luisa in ihr Auto und Frank setzt sich auf sein Fahrrad. Frank erreicht eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $20\frac{km}{h}$, Luisa eine von $70\frac{km}{h}$. Die beiden wohnen $54km$ voneinander entfernt.
Wie lange dauert es bis die beiden sich treffen und wo entlang der Strecke treffen sie sich?
Auf dem Weg fällt Frank ein, dass seien Nachbarin Laura vielleicht auch Interesse hat Luisas Entdeckung zu sehen. 20 Minuten nachdem er aufgebrochen ist Ruft er Laura an und gibt ihr die Koordinaten des Treffpunkts. Wie schnell muss Laura mit ihrem Auto fahren um gleichzeitig mit Luisa und Frank am Treffpunkt zu sein?

### 6. Aufgabe: Abstand Punkt zu Gerade Allgemein

Gegeben seien ein allgemeiner Punkt $P = (p_x, p_y)$ und eine allgemeine Gerade $g(x) = m_g \cdot x + b_g$. Geben Sie an wie der Abstand vom Punkt $P$ zur Geraden $g$ berechnet werden kann. (Ihr Verfahren sollte im Wesentlichen aus 3 Schritten bestehen).
Nutzen Sie nun dieses Verfahren um eine allgemeine Gleichung herzuleiten die den Abstand von $P$ zu $g$ berechnet. Diese Gleichung soll final folgende Form haben: $d_{dist(P,g)}(p_x, p_y, m_g, b_g)$. Es soll links also der gesuchte Abstand als Funktion der durch $P$ und $g$ gegebenen 4 Größen und rechts dürfen (neben Konstanten) nur diese vier Größen $(p_x, p_y, m_g, b_g)$ auftauchen.

### 7. Aufgabe: Abstand Punkt zu Gerade

Gegeben sei die Gerade $g(x) = -2x + 10$ und die beiden Punkte $P_1(0|0)$ und $P_2(6|3)$. Berechnen Sie die Abstände der beiden Punkte zur Geraden.

# *Aufgabenblatt:* Lineare Gleichungssysteme

### 1. Aufgabe: Gleichungssysteme mit Lösungen

a) $i)\ 3x + 4y = 7 \quad ii)\ 2x + 9y = 11$
b) $i)\ x + 2y = -3 \quad ii)\ 2x - y = 14$
c)

$$\begin{aligned} i) &\quad 3a + 5b + c = 6 \\ ii) &\quad -a - b + 3c = 18 \\ iii) &\quad 2a + 2b - 2c = -21 \end{aligned}$$

d) $i)\ a + b = 2 \quad ii)\ a + c = \frac{1}{2} \quad iii)\ b + c = -\frac{1}{2}$

### 2. Aufgabe: Gleichungssysteme mit Problem 1

a) $i)\ x + y = 3 \quad ii)\ 2x + 2y = 9$
b)

$$\begin{aligned} i) &\quad a + b + c = 3 \\ ii) &\quad 2a + 4b - c = 0 \\ iii) &\quad -a - 3b + 2c = 4 \end{aligned}$$

c) Beschreiben Sie das Problem das beim lösen der Gleichungen auftritt.

### 3. Aufgabe: Gleichungssysteme mit Problem 2

a) $i)\ 3\lambda + 3\psi = 9 \quad ii)\ 2\lambda + 2\psi = 6$
b)

$$\begin{aligned} i) &\quad a + b + c = 3 \\ ii) &\quad 2a + 4b - c = 0 \\ iii) &\quad -a - 3b + 2c = 3 \end{aligned}$$

c) Beschreiben Sie das Problem das beim lösen der Gleichungen auftritt.

### 4. Aufgabe: Gleichungssysteme ohne Lösungen bzw. mit unendlich Lösungen

a) Ordnen Sie die Gleichungen aus Aufgabe 2 & 3 den Kategorien *i) ohne Lösung* und *ii) unendlich Lösungen* zu.
b) Wie können Gleichungssysteme mit unterschiedlich vielen Lösungen beschrieben werden? (Hinweis: In welcher Beziehung stehen die Variablen zueinander?)

### 5. Aufgabe: Gleichungssysteme mit Gauß

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem zunächst mit einer Methode Ihrer Wahl (aber nicht Gauß) und danach mittels des Gaus-Algorithmus:

$$\begin{array}{lcccccccl} i) & a & + & b & & & & & = 3 \\ ii) & 2a & + & 4b & & & - & d & = 0 \\ iii) & & & b & + & & & 2d & = 3 \\ iv) & a & & & + & 2c & - & 3d & = 2 \end{array}$$

(Hinweis: Lösungen von Gleichungssystemen sind nicht immer nur Ganze Zahlen)

### 6. Aufgabe: Gleichungssysteme mit Gauß und Problem

a) Lösen Sie die Gleichungssysteme aus Aufgabe 2 & 3 erneut, diesmal mit Gauß.
b) Woran erkennen Sie im Gauß-Verfahren, dass Sie auf Problem 1 bzw. Problem 2 gestoßen sind?
c) Falls Sie in Gauß erkannt haben, dass Ihr Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, wie setzen Sie die Ausführung des Verfahrens fort um zur Lösung zu gelangen?

# *Aufgabenblatt:* Geometrie

**1. Aufgabe: Volumina Berechnen**

a) Geben Sie eine allgemeine Formel an um das Volumen einer Kapsel zu berechnen. Gegeben sind dabei die Gesamtlänge $l_{\text{Kapsel}}$ und der Durchmesser $d_{\text{Kapsel}}$ der Kapsel. (Eine Kapsel besteht aus einem Zylinder mit jeweils einer Halbkugel auf beiden Enden)

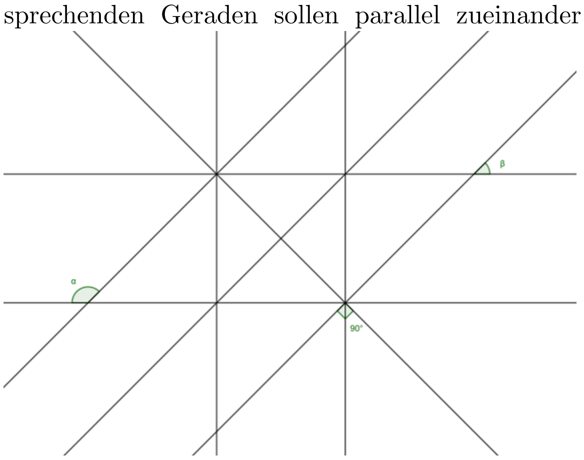
b) Geben Sie eine allgemeine Formel an um das Fassungsvermögen eines rechteckigen Schwimmbeckens zu berechnen.
Geben Sie eine allgemeine Formel an um zu berechnen wie viele Quadratmeter Kacheln oder Stahlplatten nötig sind um das Becken abzudichten.

c) An das Schwimmbecken aus der vorherigen Aufgabe soll ein Sprungbecken angebaut werden. Das Sprungbecken soll quadratisch sein, allerdings muss bei der Verbindung mit dem Schwimmbecken beachtet werden, dass der Höhenunterschied zwischen Schwimmerbereich und Sprungbereich mittels einer Rampe ausgeglichen werden muss, da keine Spitzen kanten erlaubt sind. Nehmen Sie vereinfachend an, dass die Rampe in einem 45° Winkel verläuft und ein Verbindungsstück zwischen den beiden Becken-Teilen darstellt. Beachten Sie auch, dass Sie eine zusätzliche Erweiterung der Rampe nötig ist um die ansonsten vertikal verlaufende Spitze Kante zu vermeiden.
Geben Sie wieder eine allgemeine Formel an um Fassungsvermögen und Kachelfläche des neuen Mehrzweckbeckens zu berechnen. Die Eingabegrößen sind hierbei: Länge, Breite und Tiefe des Schwimmerbeckens sowie Länge und Tiefe des Sprungbeckens.
(Machen sie vorher eine Skizze, das hilft!)

d) Berechnen Sie mit der Formel aus der vorherigen Aufgabe Volumen und Kachelfläche eines Beckens mit $50m$ Länge, $25m$ Breite und $2m$ Tiefe. Wie verändern sich die Größen wenn ein Sprungbecken mit $10m$ Kantenlänge und $5m$ Tiefe angebaut wird. Wie groß ist die resultierende Gesamtbreite des Beckens?

**2. Aufgabe: Winkel Bestimmen**

Bestimmen Sie im Bild wie sich der Winkel $\beta$ in Abhängigkeit vom Winkel $\alpha$ verhält. Die entsprechenden Geraden sollen parallel zueinander sein.




Wo im Bild finden sich die Winkel $\alpha$ und $\beta$ noch?

# ***Was weiß ich noch?*** Quadratische Gleichungen

### 1. Aufgabe: Gleichungsformen zuordnen

Welche der folgenden Funktionen sind identisch? Ordnen Sie zu: $(f_i = g_j = h_k)$

$$\begin{array}{lll}
f_1(x) = x^2 + 4x - 12 & g_1(x) = -(x+3)^2 + 4 & h_1(x) = (x+1)(x-5) \\
f_2(x) = x^2 - 4x - 5 & g_2(x) = -(x+2)^2 + 9 & h_2(x) = -(x-1)(x+5) \\
f_3(x) = -x^2 - 4x + 5 & g_3(x) = (x+2)^2 - 16 & h_3(x) = (-1-x)(x+5) \\
f_4(x) = -x^2 - 6x - 5 & g_4(x) = (x-2)^2 - 9 & h_4(x) = (x-2)(x+6) \\
f_5(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} & g_5(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2) + \dfrac{1}{2} & h_5(x) = -\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\right)(x+1)
\end{array}$$

### 2. Aufgabe: Gleichungsformen benennen

Die Gleichungen $f, g, h$ aus *Aufgabe 1* haben jeweils eine Besondere Form. Ordnen Sie den Formen die folgenden Namen zu:
*Parameter-Form*, *Produkt-Form*, *Scheitelpunkt-Form*
Ist jede Form immer möglich? Falls nein, warum nicht?

### 3. Aufgabe: Vorteile der Scheitelpunkt-Form

Welchen Vorteil bietet die Scheitelpunkt-Form? (Welche Aussage über die Funktion können Sie sofort ablesen?) Zeigen Sie für die Funktionen $f_1$ bis $f_4$ wie diese von der Parameter-Form in die Scheitelpunkt-Form umgerechnet werden können (Quadratische Ergänzung)$(f \to g)$.

### 4. Aufgabe: Vorteile der Produkt-Form

Welchen Vorteil bietet die Produkt-Form? (Welche Aussagen(n) über die Funktion können Sie sofot ablesen?) Überlegen Sie sich eine allgemeine Herangehensweise um die Produkt-Form einer Quadratischen Gleichung aus der Parameter-Form zu berechnen.
*Bonus:* Könnte diese Herangehensweise theoretisch auch verallgemeinert werden auf Funktionen die $x^n, n \in \mathbb{N}$ enthalten? Funktioniert das immer, oder gibt es Bedingungen die erfüllt sein müssen? Können Sie diese Herangehensweise verallgemeinern?

### 5. Aufgabe: Vorteile der Parameter-Form

Welchen Vorteil bietet die Parameter-Form? (Bedenken Sie dass diese Form die am häufigsten verwendete ist um Polynome anzugeben; warum?)

## *Aufgabenblatt:* Quadratische Gleichungen

### 1. Aufgabe

Ermitteln Sie den *Scheitelpunkt* mit Hilfe der quadratischen Ergänzung und ermitteln Sie die *Nullstellen*:

$$f(x) = x^2 + 6x - 7$$

### 2. Aufgabe

Ermitteln Sie die *Nullstellen* und den *Scheitelpunkt* der Parabel:

$$f(x) = (x + 3)^2 + 2$$

### 3. Aufgabe

Berechnen Sie die *Nullstellen*:
a)

$$f(x) = x^2 + 3x - 10$$

b)

$$g(x) = 3x^2 + 17x + 10$$

### 4. Aufgabe

Berechnen Sie die *Schnittpunkte* der beiden Parabeln:

$$f(x) = x^2 + 3x - 10$$
$$g(x) = 3x^2 + 17x + 10$$

### 5. Aufgabe

Berechnen Sie die *Nullstellen*:
a)

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$$

b)

$$g(x) = -x^3 + 4x$$

# ***Was weiß ich noch?*** Ableitungen und Tangenten

### 1. Aufgabe: Polynome Ableiten

Ordnen Sie die folgenden Funktionen ihren Ableitungen zu:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $f_1(x) = x$ | i) | $g_1(x) = 3x^2$ |
| b) | $f_2(x) = x^3$ | ii) | $g_2(x) = 2x + 4$ |
| c) | $f_3(x) = 2x^2$ | iii) | $g_3(x) = 1$ |
| d) | $f_4(x) = x^2 + 4x - 12$ | iv) | $g_4(x) = 4x$ |

### 2. Aufgabe: Ableitungsregeln Polynome

Leiten Sie aus Aufgabe 1 die folgenden drei Regeln her:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | **Exponenten-Regel** | $f(x) = x^n$ | $\rightarrow f'(x) =$ |
| b) | **Faktor-Regel** | $f(x) = a \cdot g(x)$ | $\rightarrow f'(x) =$ |
| c) | **Summen-Regel** | $f(x) = g(x) + h(x)$ | $\rightarrow f'(x) =$ |

### 3. Aufgabe: Ableitungen besonderer Funktionen

Nicht alle Funktionen sind Polynome - denken Sie an die Exponential-, Logarithmus- und Wurzelfunktionen oder die Trigonometrischen Funktionen. Die Menge aller Funktionen die Ableitungen haben umfasst mehr als nur die Polynome. Ohne in die Thematik weiter einzusteigen ist es dennoch wichtig für einige ausgewählte Funktionen deren Ableitungen zu kennen. Ordnen Sie zu:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $f_1(x) = e^x = \exp(x)$ | i) | $g_1(x) = cos(x)$ |
| b) | $f_2(x) = ln(x)$ | ii) | $g_2(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(b)}$ |
| c) | $f_3(x) = sin(x)$ | iii) | $g_3(x) = b^x \cdot \ln(b)$ |
| d) | $f_4(x) = cos(x)$ | iv) | $g_4(x) = -\sin(x)$ |
| e) | $f_5(x) = b^x$ | v) | $g_5(x) = e^x$ |
| f) | $f_6(x) = \log_b(x)$ | vi) | $g_6(x) = \frac{1}{x}$ |

### 4. Aufgabe: Komplizierte Ableitungen

Mithilfe zweier (dreier) weiterer Regeln lassen sich nun auch Funktionen ableiten die aus beliebig komplizierten Kombinationen der bis hierhin bekannten Funktionen (und deren Ableitungen) bestehen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| d) | **Produkt-Regel** | $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ | $\rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ |
| e) | **Ketten-Regel** | $f(x) = g(h(x))$ | $\rightarrow \quad f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$ |
| f) | **Quotienten-Regel** | $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ | $\rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$ |

Leiten Sie ab:

$$f_1(x) = e^x \cdot (x) \qquad f_2(x) = (\sin(x))^2 \qquad f_3(x) = \ln(x) \cdot (-\cos(x))$$

$$f_4(x) = e^{\sin(x)} \qquad f_5(x) = \sin(\sin(x)) \qquad f_6(x) = \ln(-\cos(x))$$

$$f_7(x) = e^{\sin(x)} \cdot x^2 \qquad f_8(x) = \frac{x^2}{2} + \sin(\sin(x)) \qquad f_9(x) = \frac{\ln(-\cos(x))}{2x^3}$$

### 5. Aufgabe: Tangenten

Eine Tangente ist eine Gerade $t_{f,x_t}(x)$ die eine Funktion $f(x)$ ein genau einem Punkt $P(x_t|f(x_t))$ berührt („weit entfernt“ von diesem Punkt kann die Tangente die Funktion auch erneut berühren oder schneiden). Überlegen Sie wie Sie allgemein die beiden Parameter einer Geraden - Y-Achsenabschnitt $b$ und Steigung $m$ - mit den gegebenen Angaben berechnen können. Wofür brauchen Sie die Ableitung?
Testen Sie an folgendem einfachen Beispiel: Tangente an $f(x) = -x^2 + 4$ an der Stelle $x_t = 2$.

# *Aufgabenblatt:* Ableitungen und Tangenten

### 1. Aufgabe

Bestimmen Sie die *Ableitungen*:
a) $f_1(x) = x^{100}$
b) $f_2(x) = 11x^5 + 8x^3 + 3x^2 - 7x + 4$
c) $f_3(x) = (3x+3)(2x-1)$
d) $f_4(x) = (x^2 + 2x + 1)(2x - 2)$
e) $f_5(x) = \sin(x^2)$
f) $f_6(x) = e^x + 2x^2 - 7$
g) $f_7(x) = \cos(x) \cdot e^{3x^2 - 4x + 2}$
h) $f_8(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x}$

### 2. Aufgabe

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangenten, die die Parabel $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$ an der Stelle $x = 2$ berührt.

# *Was weiß ich noch?* Kurvendiskussion

## 1. Aufgabe: Schritt für Schritt

Führen Sie eine Kurvendiskussion für folgende Funktion durch:

$$f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$$

a) Bestimmen Sie die *Ableitungen* von $f$. Also $f'(x), f''(x)$ und $f'''(x)$.
b) Bestimmen Sie die *Nullstellen* von $f(x)$. Also alle Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.
c) Bestimmen Sie die *Extrema (Maxima und Minima)* von $f(x)$. Mögliche Extremwerte sind an den *Nullstellen der ersten Ableitung* zu finden. Finden Sie also alle Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$. Um zu prüfen ob es sich wirklich um ein Extremum handelt sind folgende Bedingungen für die Kandidaten $x_i$ zu prüfen:
Ist $f''(x_i) > 0$, dann hat $f$ an der Stelle $x_i$ einen Tiefpunkt.
Ist $f''(x_i) < 0$, dann hat $f$ an der Stelle $x_i$ einen Hochpunkt.
Ist $f''(x_i) = 0$, dann hat $f$ an der Stelle $x_i$ kein Extrempunkt.

d) Bestimmen Sie die *Wendepunkte* von $f(x)$. Mögliche Wendepunkte sind an den *Nullstellen der zweiten Ableitung* zu finden. Finden Sie also alle Lösungen der Gleichung $f''(x) = 0$. Prüfen Sie für die gefundenen $x_i$ ob $f'''(x_i) \neq 0$, dann hat $f$ an der Stelle $x_i$ einen Wendepunkt.
e) Bestimmen Sie ob $f$ möglicherweise *Sattelpunkte* hat. Denken Sie an *c)* und *d)* zurück. Falls für ein $x_i$ gilt, dass $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, handelt es sich um eine Sattelpunkt.
f) Bestimmen Sie wie sich $f$ im unendlichen verhält. Legen Sie zwei Tabellen an: *positives Vorzeichen* und *negatives Vorzeichen* mit jeweils zwei Spalten *gerader Exponent* und *ungerader Exponent*, sowie den Zeilen $x \to +\inf$ und $x \to -\inf$. Überlegen Sie nun wie sich $f(x) = y$ in den Zellen verhalten wird.
Tipp: auf welchen Exponenten einer beliebigen Funktion $f(x)$ muss hier geachtet werden? Warum können die anderen ignoriert werden?
g) Skizzieren Sie den Graphen von $f$. Sie haben bisher alle wichtigen Informationen zusammengetragen um nun den Graphen der Funktion skizzieren zu können. Evtl. kann es hilfreich sein noch weitere Punkte auf der Funktion zu berechnen. Überlegen Sie auch wie ihr Koordinatensystem dimensioniert sein muss, damit alle wichtigen Punkte eingezeichnet werden können und erkennbar sind. Fertigen Sie nun die Skizze an. (Skizzen müssen nicht 100% exakt sein, sollen aber die wichtigen Aspekte korrekt wiedergeben).

## 2. Aufgabe: Wichtige Tricks

a) **abc-Formel**:
Mithilfe der *abc-Formel* können Sie schnell die beiden Lösungen einer Quadratischen Gleichung berechnen. Wann kann es hier zu Problemen kommen?
Im allgemeinen können Sie höchstens von quadratischen Gleichungen die Nullstellen bestimmen. Allerdings ist es häufig möglich auch Funktionen mit größeren Exponenten geschickt umzuformen, sodass eine Berechnung der Nullstellen trotzdem möglich wird.
b) **Ausklammern**:
Versuchen Sie wenn möglich eine Funktion in teilweise Produktform zu bringen:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x = x(x^2 + 2x - 4)$$

Hier ein paar Beispiele zum üben:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3$$
$$f_2(x) = 5x^7 - \frac{1}{2}x^5$$
$$f_3(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$$

c) **Substitution**:
Gelegentlich „versteckt“ sich eine quadratische Gleichung auch:

$$f(x) = 4x^4 + x^2 - 3 \Leftrightarrow f(z) = 4z^2 + z - 3$$

mit $z = x^2$. Von der Funktion $f(z)$ können nur die Nullstellen $z_i$ berechnet werden. Daraus müssen dann die Nullstellen $x_i$ von $f(x)$ berechnet werden.
Hier ein paar Beispiele zum üben:

$$f_4(x) = \frac{1}{3}x^6 + 3x^3$$
$$f_5(x) = x^{22} - \frac{1}{2}x^{11}$$
$$f_6(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$$

## 3. Aufgabe: Weitere (schöne) Beispiele

$$f_7(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$
$$f_8(x) = 4x^3 + 12x^2$$
$$f_9(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$$

# *Aufgabenblatt:* Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben

### 1. Aufgabe

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$

### 2. Aufgabe

Bestimmen Sie Nullstellen, Extrema und Wendestellen/-Sattelpunkte:

$$f(x) = 4x^3 + 12x^2$$

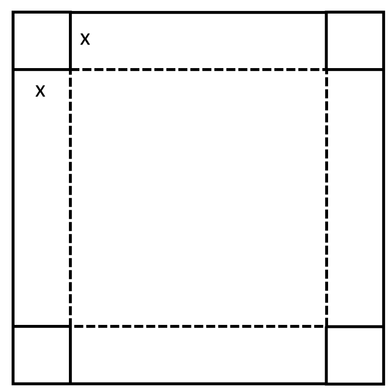
### 3. Aufgabe

Bestimmen Sie Nullstellen, Extrema und Wendestellen/-Sattelpunkte:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$$

### 4. Aufgabe

Aus einem quadratischen Stück Pappe mit einer Seitenlänge von $24cm$ soll eine Schachtel gebastelt werden. Dazu werden an den Ecken Quadrate mit einer Seitenlänge von $x$ abgeschnitten. Wie groß muss $x$ sein, damit das Volumen der Schachtel möglichst groß wird?




### 5. Aufgabe

Gegeben ist die Parabel $f(x) = -x^2 + 2$.
Zwischen der $x$-Achse und der Parabel soll ein Rechteck mit möglichst großer Fläche einbeschrieben werden. Wie groß sind die Seitenkanten dieses Rechtecks?

# *Aufgabenblatt:* Integrale

### 1. Aufgabe

Geben sie jeweils eine Stammfunktion an:

a) $f_1(x) = 15x^2 - 6$
b) $f_2(x) = (x+1)(x-1)$
c) $f_3(x) = 8x^3 - 3x^2 + 8x$

### 2. Aufgabe

Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen. Betrachten Sie die Ergebnisse im Bezug auf die Integralrechnung.
Was fällt dabei auf?

a) $x^5 - 2x^3 + 4x - 10$
b) $x^5 - 2x^3 + 4x$
c) $x^5 - 2x^3 + 4x + 99$

### 3. Aufgabe

Ermitteln Sie die Größe der Fläche, die von den beiden Parabeln eingeschlossen wird:
$f(x) = 2x^2$ und $g(x) = -3x^2 + 15x - 10$