Tutorium B11: Folgen und Reihen und Polarkoordinaten-Darstellung von komplexen Zahlen

- Fragen?
- Folgen und Reihen

9.2.3 Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ streng monoton fallend ist.

Aufgabe 99 Es sei $q > 0$ und $a_n = q^{\frac{1}{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $q < 1$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend und für $q > 1$ streng monoton fallend ist. Zeigen Sie weiter, dass nach dem Hauptsatz über monotone Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ damit konvergent für alle $q > 0$ ist.

9.2.4 Gegeben die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n - 2$ mit $a_0 = -1$, berechne den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 98 Finden Sie eine rekursive Folge, die nicht konvergent ist und nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt.

10.1.1 Wie ist ausgehend von einer Folge (a_n) eine **Reihe** über dieser Folge definiert?

10.1.2 Wie ist die **geometrische Reihe** definiert?

10.1.3 Wie ist die **harmonische Reihe** definiert?

10.1.4 Wenn sie wissen, dass eine Reihe $\sum_{v=m}^{\infty} a_v$ konvergent ist, was können sie daraus über die Folge (a_n) schließen?

10.1.5 Wenn sie wissen, dass die Folge (a_n) keine Nullfolge ist, was können sie dann über die Konvergenz der Reihe $\sum_{v=m}^{\infty} a_v$ über dieser Folge aussagen?

10.1.6 Beschreiben Sie das Majorantenkriterium für Reihen. (Seien $(a_n)_{n\geq m}$ und $(b_n)_{n\geq k}$ Folgen.)

10.2.1 Zeige, dass die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!}$ konvergent ist.

10.2.2 Zeige, dass die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}$ divergent ist.

Aufgabe 102 Berechnen Sie die Reihenwerte der folgenden Reihen:

a)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(3\frac{1}{3^{\nu}}-2\frac{1}{5^{\nu}}\right),$$

b)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\nu}}+\frac{1}{4^{\nu}}\right)^{2}.$$

Aufgabe 104 Welche der folgenden Reihen ist nach Satz 7.32 sicher divergent:

a) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 4$,

b) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (100-\nu)$,

c) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (1-\frac{1}{2^\nu})$,

d) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu}{\nu!}$.

Aufgabe 107 **a)** Welche Aussagen bezüglich der Konvergenz oder Divergenz der Folgenden Reihen können Sie mithilfe von Satz 7.32 treffen.

0) Wann können Sie (Mithilfe von Satz 7.32) keine Aussage treffen?

i) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \pi$

ii) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1337\cdot\nu)$

iii) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (1-\frac{1}{n})$

iv) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu$

v) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{2023}{2^\nu}$

- Polarkoordinaten-Darstellung von komplexen Zahlen

11.1.1 Geben Sie die Definition der Komplexen Exponentialfunktion ($\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) an.

11.1.2 Wie lautet die **Eulersche Identität**?

11.1.3 Dank der Komplexen Exponentialfunktion erhalten wir eine weitere Darstellungsform für Komplexe Zahlen. (a) Welchen Namen hat diese? (b) Wie wird eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit dieser ausgedrückt? (c) Wie ist der Zusammenhang mit der bekannten Schreibweise ($z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$)? (d) Welchen Vorteil bietet die neue Schreibweise?

11.1.4 Geben Sie die Definition der Komplexen Sinusfunktion ($\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) an.

11.1.5 Geben Sie die Definition der Komplexen Kosinusfunktion ($\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) an.

Aufgabe 111 Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Polarkoordinaten $z = |z|\, e^{i\varphi}$. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten-Darstellung von z^{-1}.

Aufgabe 109 Schreiben Sie die folgenden Zahlen in Polarkoordinaten: $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = 1 + i$, $z_6 = -1 - i$

Aufgabe 110 **a)** Finden Sie jeweils für $n = 2, 3, 4, 5$ alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$. Skizzieren Sie diese in der gaußschen Zahlenebene.

b) Begründen Sie, dass es für ein festes $n \in \mathbb{N}$ genau n komplexe Zahlen z gibt, für die gilt $z^n = 1$ (Hinweis: Fundamentalsatz der Algebra).