- Fragen?
- „Element" oder „Teilmenge"

Sei $M = \{1, \{2,3\}\}$.

$1 \; ? \; M$

$2 \; ? \; M$

$\{1\} \; ? \; M$

$\{2\} \; ? \; M$

$\{2,3\} \; ? \; M$

$3 \; ? \; M$

$\emptyset \; ? \; M$

- Potenzmenge

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.1.3 Wie ist die **Potenzmenge** einer Menge M definiert?

$\mathcal{P}(M) = \{N : N \subset M\}$

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.2.3 Seien $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3, 4\}$. Berechnen Sie $\mathcal{P}(M_1)$, $\mathcal{P}(M_2)$, $\mathcal{P}(M_1^2)$, $\mathcal{P}(M_1 \times M_2)$.

$\mathcal{P}(M_1) =$

$\mathcal{P}(M_2) =$

$\mathcal{P}(M_1^2) =$

$\mathcal{P}(M_1 \times M_2) =$

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.1.4 Wie ist die **Mächtigkeit** einer Menge M definiert?

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.1.5 Welche zwei unterschiedlichen Typen von unendlichen Mengen haben Sie kennen gelernt (bezogen auf die Mächtigkeit)?

1.1.6 Wie ist eine **höchstens abzählbare** Menge M definiert?

Definition 1.29 Es seien M und N zwei Mengen, dann heißen diese **gleichmächtig**, falls eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ (oder äquivalent $f : N \to M$) existiert.

1. Wenn M und $\{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig sind, dann heißt M **endliche Menge** und man sagt, dass M die **Kardinalität** n hat (gleichbedeutend $|M| = n$).
2. Wenn M und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind, dann heißt M **abzählbar unendlich** oder kurz **abzählbar**.
3. Wenn M endlich oder abzählbar unendlich ist, dann sagt man auch M ist **höchstens abzählbar**.
4. Wenn M nicht höchstens abzählbar ist, dann heißt M **überabzählbar**.

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.2.4 Seien $M_1 = \{0, 1, 2\}$, $M_2 = \{2, 3\}$. Berechnen Sie $|M_1|$, $|M_2|$, $|M_1 \cup M_2|$, $|M_1 \cap M_2|$, $|M_1 \times M_2|$, $|M_1^2 \times M_2^2|$.

$|M_1| =$

$|M_2| =$

$|M_1 \cup M_2| =$

$|M_1 \cap M_2| =$

$|M_1 \times M_2| =$

$|M_1^2 \times M_2^2| =$

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 32 Es sei M die Menge aller Bilder mit 10000 Pixeln, wobei jedes Pixel durch drei Farbkanäle (RGB) dargestellt wird, und die Intensität eines jeden Farbkanals durch ganzzahlige Werte von 0 bis 255 kodiert ist. Stellen Sie M als kartesisches Produkt geeigneter Mengen dar und geben Sie eine Formel zur Berechnung von $|M|$ an.

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 30 Zeigen Sie, dass folgende Mengen abzählbar sind:

a) die Menge der geraden natürlichen Zahlen

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{n}{2} \in \mathbb{N} \right\},$$

b) die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.3.1 Skizzieren Sie die Beweise für die Abzählbarkeit der Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.

1.3.2 Skizzieren Sie den Beweis für die Überabzählbarkeit der Menge $\mathbb{R}$.

- Minimum, Maximum, Supremum und Infimum

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.1.9 Wie sind (a) **Maximum** und (b) **Minimum** einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert? (c) Gibt es diese immer? (d) Warum ist es für die Definition relevant, dass $M \subset \mathbb{R}$?

1.1.10 Wie sind (a) **Supremum** und (b) **Infimum** einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert? (c) Gibt es diese immer? (d) Wie ist der Zusammenhang mit dem Maximum und Minimum?

(Skript Kapitel 1: Mengen und Abbildungen)

Definition 1.36 Es sei $M \subset \mathbb{R}$.

Gibt es ein $y \in M$ mit $y \geq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Maximum** von M, Schreibweise:

$$y = \max M$$

Gibt es ein $y \in M$ mit $y \leq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Minimum** von M, Schreibweise:

$$y = \min M$$

Gibt es ein **kleinstes** $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Supremum** von M, Schreibweise:

$$y = \sup M$$

Gibt es ein **größtes** $y \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x$ für alle $x \in M$, dann heißt y das **Infimum** von M, Schreibweise:

$$y = \inf M$$

(HowTo: Definitionen lesen, v3)

- Der „Hauptteil"
  ist der zum Rechnen oder Anwenden interessante Teil. Hier stehen häufig irgendwelche Symbole und Funktionen, die bereits definiert wurden. (Diese Definitionen kann man im Zweifelsfall auch nochmal lesen)
- Die „Bedingungen"
  ist der Teil, in denen verwendete Symbole genau festgelegt werden. Falls hier so etwas wie $x \in \mathbb{R}^n$ steht, wissen wir, dass x ein Vektor mit n-komponenten im reellwertigem Bereich ist.
- Die „definierten Begriffe"
  in diesem Bereich werden Schlüsselwörter eingeführt, die später in anderen Definitionen wieder auftauchen können.

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

1.2.5 Seien $M_1 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $M_2 = [-1, 3]$, $M_3 = (-1, 3)$, $M_4 = (-1, 3]$, $M_5 = [-1, 3)$ Mengen. Geben Sie für alle M_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jeweils das (a) Maximum und (b) Minimum der Menge an, sofern es existiert. Geben Sie weiter für alle Mengen das (c) Supremum und (d) Infimum an.

M	max(M)	min(M)	sup(M)	inf(M)
M_1				
M_2				
M_3				
M_4				
M_5				

Nebenrechnung:

· Abbildungen

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.1.1 Wie ist eine **Abbildung** f definiert?

2.1.2 Wie ist der **Graph** einer Abbildung $f : X \to Y$ definiert?

2.1.3 Wann sind zwei Abbildungen $f(x)$ und $g(x)$ **gleich**?

2.1.4 Wie ist eine **Urbildmenge** einer Abbildung $f : X \to Y$ definiert?

2.1.5 Wie ist eine **Bildmenge** einer Abbildung $f : X \to Y$ definiert?

2.1.6 Was ist der **Wertebereich** einer Abbildung $f : X \to Y$?

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 21 Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f((x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2.$$

Bestimmen und skizzieren Sie $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}(\{2\})$.

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.2.1 Sei $f : [0, 2] \to [-1, 1]$, $f(x) = -x + 1$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Bildmengen der Mengen $M_1 = [0, 1]$ und $M_2 = [1, 2]$, also $f([0, 1])$ bzw. $f([1, 2])$.

2.2.2 Sei $f : [-2, 0] \to [-1, 1]$, $f(x) = -\frac{x}{2}$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Urbildmengen der Mengen $M_1 = \{\frac{1}{2}\}$, $M_2 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ und $M_3 = (0, -1]$, also $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$, $f^{-1}([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$ bzw. $f^{-1}((0, -1])$.

2.2.3 Sei $f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to [0, 25]$, $f(x) = x^2$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Menge Y so, dass die folgende Gleichung korrekt ist: $f^{-1}(Y) = \{-5, -3, 3, 5\}$.

2.2.5 Sei $f_{a,b} : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} a \cdot x & \text{, falls } x \geq 0 \\ b \cdot x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

eine Funktion. Skizzieren sie jeweils den Graphen der Funktionen:

- $f_{-1,1}$
- $f_{1,2}$
- $f_{2,-1}$
- $f_{-1,-2}$
- $f_{2,-2}$

· Abbildungen: Komposition / Verkettung

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.1.10 (a) Wie müssen die beiden Funktionen f und g definiert sein, damit die **Komposition** $(g \circ f)(x)$ möglich ist, aber $(f \circ g)(x)$ nicht? (b) Wie kann $(g \circ f)(x)$ noch geschrieben werden?

(a)

(b)

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 20 Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

Aufgabe 20 Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \; g(x) = 5x^2 + x.$$

Bestimmen Sie $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ und $f \circ g$.

$f \circ f =$

$g \circ g =$

$g \circ f =$

$f \circ g =$

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.2.6 Gegeben seien die Funktionen

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(2x)$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x+1}{2}$

Berechnen Sie:

- $(f \circ g)(x)$
- $(f \circ h)(x)$
- $(g \circ h)(x)$
- $(g \circ f)(x)$
- $(h \circ g)(x)$
- $(h \circ g)(x)$
- $(f \circ f)(x)$
- $(g \circ g)(x)$
- $(h \circ h)(x)$

- Abbildungen: Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.1.7 Was muss eine Abbildung $f : X \to Y$ erfüllen, damit sie **surjektiv** ist?

2.1.8 Was muss eine Abbildung $f : X \to Y$ erfüllen, damit sie **injektiv** ist?

2.1.9 Was muss eine Abbildung $f : X \to Y$ erfüllen, damit sie **bijektiv** ist?

- surjektiv :

- injektiv:

oder äquivalent

- bijektiv:

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.2.4 Sei $f : \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\} \to X$, $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & \text{, falls } x \leq 0 \\ 4 \cdot x & \text{, falls } 0 < x \end{cases}$. Bestimmen Sie $X \subset \mathbb{R}$ so, dass f bijektiv ist.

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 17 **a)** Finden Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

b) Finden Sie einen injektive Abbildung $g : \{0, 2\}^2 \to \mathbb{R}$.

a)

b)

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 18 Es seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x + 4$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2.$$

a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass g nicht injektiv und nicht surjektiv ist.

c) Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 27 Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Aussage in Satz 1.24(1) auch richtig sein **kann**, wenn g nicht injektiv ist.

Satz 1.24 *Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.*

1. *Sind f, g injektiv, dann ist auch die Komposition $g \circ f : X \to Z$ injektiv.*
2. *Sind f, g surjektiv, dann ist auch die Komposition $g \circ f : X \to Z$ surjektiv.*

(Aufgabensammlung / Skript Kapitel D.1)

Aufgabe 22 Ist die folgende Abbildung injektiv?

$$\varphi : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q},\ \varphi((p, q)) = \frac{p}{q}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

- Abbildungen: identische Abbildung und Umkehrabbildung

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.1.11 (a) Wie ist die **identische Abbildung** auf einer Menge X definiert? (b) Welche zusätzliche Bedingung wird an die Menge X gestellt?

2.1.12 (a) Wie ist die **Umkehrabbildung** für eine Abbildung $f : X \to Y$ definiert? (b) Welchen anderen Namen für die Umkehrabbildung haben Sie kennen gelernt?

2.1.13 Existiert zu jeder Abbildung $f : X \to Y$ eine Umkehrabbildung? Begründen Sie ihre Antwort!

Definition 1.25 Für eine nichtleere Menge X heißt $\mathrm{id}_X : X \to X$, definiert durch $\mathrm{id}(x) := \mathrm{id}_X(x) := x$ $(x \in X)$, die **identische Abbildung** auf X.

Definition 1.26 Es seien X, Y Mengen und es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ heißt **Umkehrabbildung** von f oder **inverse Abbildung** (bezüglich $\circ$) von f, falls

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \text{ und } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

gilt.

11. (a) (b)

12. (a)
(b)

13.

(Mini-Test-Aufgabensammlung)

2.2.7 Gegeben seien die Funktionen:

- (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x - 7$
- (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := 2x + 3$
- (c) $h : [0, \infty) \to [0, \infty]$ mit $h := \frac{3}{x^2}$

Bestimmen Sie jeweils die Umkehrfunktionen (Zeigen Sie auch, dass Ihre Umkehrfunktion die Umkehrfunktion ist).