Tutorium 11: Folgen und Reihen und Polarkoordinaten-Darstellung von komplexen Zahlen

- Fragen?
- Folgen und Reihen

9.2.3 Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ streng monoton fallend ist.

z.z.: $\forall_{n \in \mathbb{N}}: \quad a_{n+1} < a_n$

Beweis: $a_{n+1} < a_n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \Big| + \frac{1}{n+1} \qquad \Big| + \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{n+2+n}{n \cdot (n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot n \cdot (n+2)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} < \frac{(2n+2) \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \qquad \Big| \cdot (n\ (n+1) \cdot (n+2))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot n^2 + 4n < 2n^2 + 2n + 2n + 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot n^2 + 4n < 2n^2 + 4n + 2 \qquad \Big| -2n^2 \quad \Big| -4n$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2 \qquad \text{w.A.} \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 99 Es sei $q > 0$ und $a_n = q^{\frac{1}{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $q < 1$ die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton steigend und für $q > 1$ streng monoton fallend ist. Zeigen Sie weiter, dass nach dem Hauptsatz über monotone Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ damit konvergent für alle $q > 0$ ist.

9.2.4 Gegeben die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n - 2$ mit $a_0 = -1$, berechne den Grenzwert der Folge.

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\cdot a_n - 2\right) = \frac{1}{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) - 2 \quad (1)$

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) := c \quad (2)$

↳ mit (2) in (1):

$$c = \frac{1}{5}\cdot c - 2 \qquad \Big| -\frac{1}{5}\cdot c$$

$$\frac{4}{5}\cdot c = (-2) \qquad \Big| \cdot\frac{5}{4}$$

$$c = \left(-\frac{5}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}(a_n)$$

Aufgabe 98 Finden Sie eine rekursive Folge, die nicht konvergent ist und nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt.

10.1.1 Wie ist ausgehend von einer Folge (a_n) eine **Reihe** über dieser Folge definiert?

10.1.2 Wie ist die **geometrische Reihe** definiert?

10.1.3 Wie ist die **harmonische Reihe** definiert?

10.1.4 Wenn sie wissen, dass eine Reihe $\sum_{v=m}^{\infty} a_v$ konvergent ist, was können sie daraus über die Folge (a_n) schließen?

10.1.5 Wenn sie wissen, dass die Folge (a_n) keine Nullfolge ist, was können sie dann über die Konvergenz der Reihe $\sum_{v=m}^{\infty} a_v$ über dieser Folge aussagen?

10.1.6 Beschreiben Sie das Majorantenkriterium für Reihen. (Seien $(a_n)_{n\geq m}$ und $(b_n)_{n\geq k}$ Folgen.)

10.2.1 Zeige, dass die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!}$ konvergent ist.

10.2.2 Zeige, dass die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}$ divergent ist.

Aufgabe 102 Berechnen Sie die Reihenwerte der folgenden Reihen:

a)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(3\frac{1}{3^\nu}-2\frac{1}{5^\nu}\right),$$

b)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{4^\nu}\right)^2.$$

Aufgabe 104 Welche der folgenden Reihen ist nach Satz 7.32 sicher divergent:

a) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 4$,

b) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(100-\nu)$,

c) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^\nu})$,

d) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^\nu}{\nu!}$.

Aufgabe 107 a) Welche Aussagen bezüglich der Konvergenz oder Divergenz der Folgenden Reihen können Sie mithilfe von Satz 7.32 treffen.

0) Wann können Sie (Mithilfe von Satz 7.32) keine Aussage treffen?

i) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \pi$

ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1337 \cdot \nu)$

iii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})$

iv) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}$

v) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2023}{2^{\nu}}$

· Polarkoordinaten-Darstellung von komplexen Zahlen

11.1.1 Geben Sie die Definition der Komplexen Exponentialfunktion ($\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) an.

11.1.2 Wie lautet die **Eulersche Identität**?

11.1.3 Dank der Komplexen Exponentialfunktion erhalten wir eine weitere Darstellungsform für Komplexe Zahlen. (a) Welchen Namen hat diese? (b) Wie wird eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit dieser ausgedrückt? (c) Wie ist der Zusammenhang mit der bekannten Schreibweise ($z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$)? (d) Welchen Vorteil bietet die neue Schreibweise?

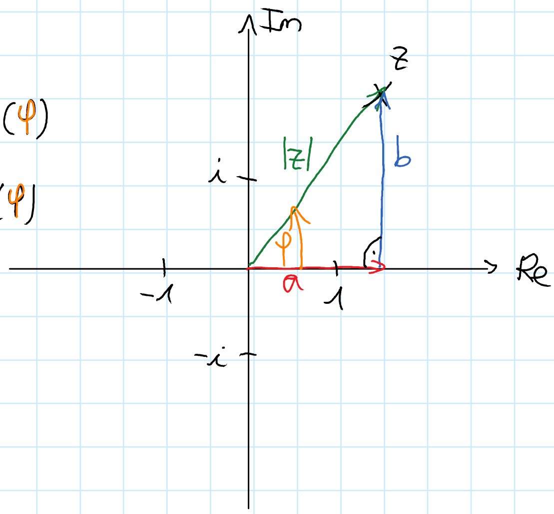
11.1.4 Geben Sie die Definition der Komplexen Sinusfunktion ($\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) an.

11.1.5 Geben Sie die Definition der Komplexen Kosinusfunktion ($\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) an.

$z = a + i b, \quad a, b \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $z = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi + 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \ \varphi \in \mathbb{R}$

$a = |z| \cdot \cos(\varphi)$

$b = |z| \cdot \sin(\varphi)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$[\varphi = \tan^{-1}(\frac{b}{a})]$

$z, w \in \mathbb{C}$ $\qquad z = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi_z}$ $\qquad w = |w| \cdot e^{i \cdot \varphi_w}$

$\hookrightarrow z \cdot w = (|z| \cdot e^{i \cdot \varphi_z}) \cdot (|w| \cdot e^{i \cdot \varphi_w})$

$= (|z| \cdot |w|) \cdot e^{i \cdot \varphi_z} \cdot e^{i \cdot \varphi_w}$

$$= (|z| \cdot |w|) \cdot e^{i \cdot \varphi_z + i \cdot \varphi_w}$$

$$= (|z| \cdot |w|) \cdot e^{i \cdot (\varphi_z + \varphi_w)}$$

Aufgabe 111 Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Polarkoordinaten $z = |z| e^{i\varphi}$. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten-Darstellung von z^{-1}.

Aufgabe 109 Schreiben Sie die folgenden Zahlen in Polarkoordinaten: $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = 1 + i$, $z_6 = -1 - i$

Aufgabe 110 **a)** Finden Sie jeweils für $n = 2, 3, 4, 5$ alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$. Skizzieren Sie diese in der gaußschen Zahlenebene.

b) Begründen Sie, dass es für ein festes $n \in \mathbb{N}$ genau n komplexe Zahlen z gibt, für die gilt $z^n = 1$ (Hinweis: Fundamentalsatz der Algebra).