Tutorium 10: komplexe Zahlen, Beispielklausur sowie Folgen und Reihen

· Fragen?

· Fragen zu den Beispielklausuren

Aufgabe 1 Mengen:
Es seien $M_1 = \{0,1\}$, $M_2 = \{1,2,3\}$, $M_3 = \{-3,1\}$.

c) Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(M_1^2)|$.

c) $M_1^2 = M_1 \times M_1 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$\mathcal{P}(M_1^2) = \dots$

$$|\mathcal{P}(M_1^2)| = 2^{|M_1^2|} = 2^{|M_1 \times M_1|} = 2^{|M_1|\cdot|M_1|} = 2^{2\cdot 2} = 2^4 = 16$$

Aufgabe 2 Abbildungen:
Es seien a, b reelle Zahlen, und $f_{a,b} : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} ax, & \text{falls } x \le 0 \\ bx, & \text{falls } x > 0 \end{cases}.$$

b) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}_{-1,1}([-2,0])$.

b)

$$\Rightarrow f_{-1,1}(x) = \begin{cases} -1x, & x \le 0 \\ 1x, & x > 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}_{-1,1}(y) = \begin{cases} \pm y, & y \ge 0 \\ \text{n.d.}, & y < 0 \end{cases}$$

$f^{-1}_{-1,1}(-2) = \text{n.d.}$

$f^{-1}_{-1,1}(0) = \pm 0 = 0$

$\Rightarrow f^{-1}_{-1,1}([-2,0]) = \{0\}$

→ da f lineare Funktion:

$f_{-1,1}(x) = (-2)$

$\downarrow x \le 0$ (*) $\qquad x > 0$ (**)

$(-x) = (-2) \quad |\cdot(-1) \qquad x = (-2)$ ↯ wegen (**)

$x = 2$ ↯ wegen (*)

$f_{1,1}(x) = 0$

$\downarrow x \le 0 \qquad x > 0$ (**)

$-x = 0 \quad |\cdot(-1) \qquad x = 0$ ↯ wegen (**)

$x = 0$

$\Rightarrow f^{-1}_{-1,1}([-2,0]) = \{0\}$

Aufgabe 6 Komplexe Zahlen

c) Es seien $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ so, dass $\sum_{k=1}^n w_k \neq 0$. Lösen Sie die folgende Gleichung nach z_1 auf

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{k=1}^n w_k \, z_\nu \, i \, \nu \right) = 1$$

$$\left(\sum_{\nu=1}^n i \cdot z_\nu \cdot \nu \left(\sum_{k=1}^n w_k \right) \right) = 1$$

$$i \cdot \left(\sum_{\nu=1}^n z_\nu \cdot \nu \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n w_k \right) = 1 \quad |:i \quad |:\left(\sum_{k=1}^n w_k \right), \left(\sum_{k=1}^n w_k \right) \neq 0$$

$$(z_1 \cdot 1) + \left(\sum_{\nu=2}^n z_\nu \cdot \nu \right) = \frac{1}{i \cdot \sum_{k=1}^n w_k} \quad \Big| -\left(\sum_{\nu=2}^n z_\nu \cdot \nu \right)$$

$$(z_1 \cdot 1) + \left(\sum_{v=2}^{n} z_v \cdot v\right) = \frac{1}{i \cdot \sum_{k=1}^{n} w_k} \quad \Big| -\left(\sum_{v=2}^{n} z_v \cdot v\right)$$

$$z_1 = \frac{1}{i \cdot \sum_{k=1}^{n} w_k} - \left(\sum_{v=2}^{n} z_v \cdot v\right)$$

- Komplexe Zahlen

Aufgabe 83

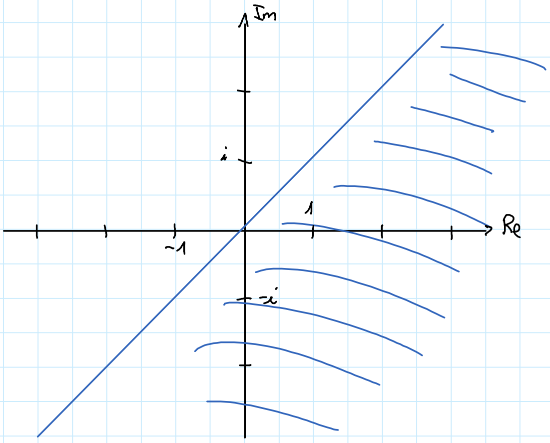
b) $\{z \in \mathbb{C} : -1 \cdot \mathrm{Re}(z) + 1 \cdot \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : -1 \cdot \mathrm{Re}(z) + 1 \cdot \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$

b) $-\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 0 \quad \big| -\mathrm{Im}(z)$

$-\mathrm{Re}(z) \leq -\mathrm{Im}(z) \quad \big| \cdot (-1)$

$\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Im}(z)$

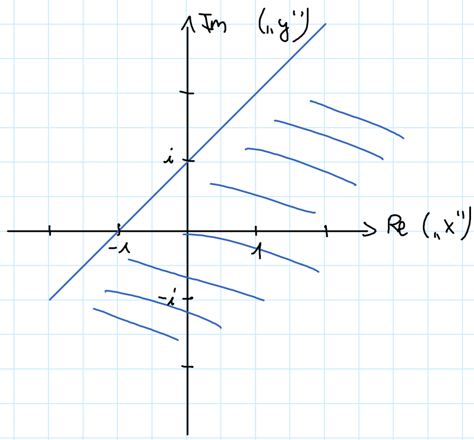


c) $-\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 1 \quad \big| + \mathrm{Re}(z)$

$\mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Re}(z) + 1$

Analogie : $\mathbb{C}$ „≈" $\mathbb{R}^2$

$y \leq x + 1$



- Folgen und Reihen

9.1.1 Wie ist der **Grenzwert** einer Folge (a_n) definiert?

9.1.2 Wann ist eine Folge (a_n) eine Nullfolge?

9.1.3 Wann ist nach Definition eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ mit $x \subset \mathbb{C}$ an der Stelle $z \in X$ stetig?

9.1.4 Sei $x \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wann ist f **monoton fallend**?

9.1.5 Sei $x \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wann ist f **streng monoton fallend**?

9.1.6 Sei $x \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wann ist f **monoton wachsend**?

9.1.7 Sei $x \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wann ist f **streng monoton wachsend**?

9.1.8 Was bedeutet es, dass eine Folge (a_n) nach oben/unten beschränkt ist?

9.1.9 Wie lautet der **Hauptsatz über monotone Folgen**?

9.1.10 (a) Wie lautet die allgemeine Definition einer **rekursiven Folge**? (b) Falls eine solche Folge einen Grenzwert hat, wie kann dieser berechnet werden?

9.2.2 Berechne den Grenzwert der Folge $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot n^2+1}{5\cdot n^3}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{5\cdot n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{5\cancel{n^3}}\cdot\frac{\frac{1}{n^3}}{\cancel{\frac{1}{n^3}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n^{\cancel{2}}}{n^{\cancel{3}}}+\frac{1}{n^3}}{5}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\,\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

9.2.1 Berechne den Grenzwert der Folge $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!\cdot\pi}{n!\cdot 3}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n!}\cdot\pi}{\cancel{n!}\cdot 3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 94 Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ und $x_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(x_k + x)^n - x^n}{x_k} = nx^{n-1}.$$

(Hinweis: Wenden Sie den binomischen Satz auf $(x_k + x)^n$ an, und untersuchen Sie summandenweise)

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(x_k+x)^n - x^n}{x_k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\overset{1}{\cancel{\binom{n}{0}}}\cdot x_k^{\overset{n-1}{\cancel{n}}}\cdot x^0 + \binom{n}{1}\cdot x_k^{\overset{2}{\cancel{n-1}}}\cdot x^1 + \dots + \overset{1}{\cancel{\binom{n}{n}}}\cdot \cancel{x_k^{\overset{1}{\cancel{0}}}\cdot x^n - x^n}}{\cancel{x_k}}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1\cdot x_k^{n-1}\cdot 1\right) + \lim_{k\to\infty}\left(\binom{n}{1}\cdot x_k^{n-2}\cdot x\right) + \dots + \lim_{k\to\infty}\left(\binom{n}{n-1}\cdot x_k^{\overset{1}{\cancel{0}}}\cdot x^{n-1}\right)$$

$$= 0 + 0 + \dots + \binom{n}{n-1}\cdot x^{n-1} = n\cdot x^{n-1} \qquad \text{q.e.d.}$$