Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

1.1 Wissen

1.1.1 Wie ist das **Karthesische Produkt** zweier Mengen M_1 und M_2 definiert?

1.1.2 Wie ist das **Karthesische Produkt** von n Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ definiert?

1.1.3 Wie ist die **Potenzmenge** einer Menge M definiert?

1.1.4 Wie ist die **Mächtigkeit** einer Menge M definiert?

1.1.5 Welche zwei unterschiedlichen Typen von unendlichen Mengen haben Sie kennen gelernt (bezogen auf die Mächtigkeit)?

1.1.6 Wie ist eine **höchstens abzählbare** Menge M definiert?

1.1.7 (a) Welche Mengenoperationen kennen Sie? Seien M_1, M_2 zwei Mengen, welche Symbole können Sie schreiben um die Mengen zu *verrechnen* „$M_1 \overset{?}{\square} M_2 =$", (b) und welche Bedeutung haben diese?

1.1.8 Wie lauten die Gesetze von *De Morgan* für Mengen?

1.1.9 Wie sind (a) **Maximum** und (b) **Minimum** einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert? (c) Gibt es diese immer? (d) Warum ist es für die Definition relevant, dass $M \subset \mathbb{R}$?

1.1.10 Wie sind (a) **Supremum** und (b) **Infimum** einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert? (c) Gibt es diese immer? (d) Wie ist der Zusammenhang mit dem Maximum und Minimum?

1.2 Rechnen

1.2.1 Seien $M_1 = \{0, 1, 2\}$, $M_2 = \{2, 3, 4\}$ und $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Berechnen Sie $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M \setminus M_1$, $M \setminus M_2$, $M_1^{c(M)}$ und $M_2^{c(M)}$.

1.2.2 Seien $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{-1, -2\}$. Berechnen Sie $M_1 \times M_2$, M_1^2 und M_2^2

1.2.3 Seien $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3, 4\}$. Berechnen Sie $\mathcal{P}(M_1)$, $\mathcal{P}(M_2)$, $\mathcal{P}(M_1^2)$, $\mathcal{P}(M_1 \times M_2)$.

1.2.4 Seien $M_1 = \{0, 1, 2\}$, $M_2 = \{2, 3\}$. Berechnen Sie $|M_1|$, $|M_2|$, $|M_1 \cup M_2|$, $|M_1 \cap M_2|$, $|M_1 \times M_2|$, $|M_1^2 \times M_2^2|$.

1.2.5 Seien $M_1 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $M_2 = [-1, 3]$, $M_3 = (-1, 3)$, $M_4 = (-1, 3]$, $M_5 = [-1, 3)$ Mengen. Geben Sie für alle M_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jeweils das (a) Maximum und (b) Minimum der Menge an, sofern es existiert. Geben Sie weiter für alle Mengen das (c) Supremum und (d) Infimum an.

1.3 Weiterführend

1.3.1 Skizzieren Sie die Beweise für die Abzählbarkeit der Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.

1.3.2 Skizzieren Sie den Beweis für die Überabzählbarkeit der Menge $\mathbb{R}$.

2 Abbildungen

2.1 Wissen

2.1.1 Wie ist eine **Abbildung** f definiert?

2.1.2 Wie ist der **Graph** einer Abbildung $f : X \to Y$ definiert?

2.1.3 Wann sind zwei Abbildungen $f(x)$ und $g(x)$ **gleich**?

2.1.4 Wie ist eine **Urbildmenge** einer Abbildung $f : X \to Y$ definiert?

2.1.5 Wie ist eine **Bildmenge** einer Abbildung $f : X \to Y$ definiert?

2.1.6 Was ist der **Wertebereich** einer Abbildung $f : X \to Y$?

2.1.7 Was muss eine Abbildung $f : X \to Y$ erfüllen, damit sie **surjektiv** ist?

2.1.8 Was muss eine Abbildung $f : X \to Y$ erfüllen, damit sie **injektiv** ist?

2.1.9 Was muss eine Abbildung $f : X \to Y$ erfüllen, damit sie **bijektiv** ist?

2.1.10 (a) Wie müssen die beiden Funktionen f und g definiert sein, damit die **Komposition** $(g \circ f)(x)$ möglich ist, aber $(f \circ g)(x)$ nicht? (b) Wie kann $(g \circ f)(x)$ noch geschrieben werden?

2.1.11 (a) Wie ist die **identische Abbildung** auf einer Menge X definiert? (b) Welche zusätzliche Bedingung wird an die Menge X gestellt?

2.1.12 (a) Wie ist die **Umkehrabbildung** für eine Abbildung $f : X \to Y$ definiert? (b) Welchen anderen Namen für die Umkehrabbildung haben Sie kennen gelernt?

2.1.13 Existiert zu jeder Abbildung $f : X \to Y$ eine Umkehrabbildung? Begründen Sie ihre Antwort!

2.2 Rechnen

2.2.1 Sei $f : [0, 2] \to [-1, 1]$, $f(x) = -x + 1$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Bildmengen der Mengen $M_1 = [0, 1]$ und $M_2 = [1, 2]$, also $f([0, 1])$ bzw. $f([1, 2])$.

2.2.2 Sei $f : [-2, 0] \to [-1, 1]$, $f(x) = -\frac{x}{2}$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Urbildmengen der Mengen $M_1 = \{\frac{1}{2}\}$, $M_2 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ und $M_3 = (0, -1]$, also $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$, $f^{-1}([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$ bzw. $f^{-1}((0, -1])$.

2.2.3 Sei $f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to [0, 25]$, $f(x) = x^2$ eine Abbildung. Bestimmen Sie die Menge Y so, dass die folgende Gleichung korrekt ist: $f^{-1}(Y) = \{-5, -3, 3, 5\}$.

2.2.4 Sei $f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to X$, $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & \text{, falls } x \leq 0 \\ 4 \cdot x & \text{, falls } 0 < x \end{cases}$. Bestimmen Sie $X \subset \mathbb{R}$ so, dass f bijektiv ist.

2.2.5 Sei $f_{a,b} : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} a \cdot x & \text{, falls } x \geq 0 \\ b \cdot x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

eine Funktion. Skizzieren sie jeweils den Graphen der Funktionen:

- $f_{-1,1}$
- $f_{1,2}$
- $f_{2,-1}$
- $f_{-1,-2}$
- $f_{2,-2}$

2.2.6 Gegeben seien die Funktionen

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sin(2x)$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x+1}{2}$

Berechnen Sie:

- $(f \circ g)(x)$
- $(g \circ f)(x)$
- $(f \circ f)(x)$
- $(f \circ h)(x)$
- $(h \circ g)(x)$
- $(g \circ g)(x)$
- $(g \circ h)(x)$
- $(h \circ g)(x)$
- $(h \circ h)(x)$

2.2.7 Gegeben seien die Funktionen:

- (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x - 7$
- (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := 2x + 3$
- (c) $h : [0, \infty) \to [0, \infty]$ mit $h := \frac{3}{x^2}$

Bestimmen Sie jeweils die Umkehrfunktionen (Zeigen Sie auch, dass Ihre Umkehrfunktion die Umkehrfunktion ist).

2.3 Weiterführend

Seien für diesen Abschnitt folgende allgemeine abschnittsweise definierte Funktionen gegeben:

$$f_{i,X,Y,a,b,c} : X \to Y, \qquad f_{i,X,Y,a,b,c}(x) := \begin{cases} a \cdot x & \text{, falls } x < -1 \\ b \cdot x & \text{, falls } -1 \leq x \leq 1 \\ c \cdot x & \text{, falls } 1 < x \end{cases}$$

$$g_{i,X,Y,c,(a_1,q_1,b_1),(a_2,q_2,b_2)} : X \to Y, \qquad g_{i,X,Y,c,(a_1,q_1,b_1),(a_2,q_2,b_2)}(x) := \begin{cases} a_1 \cdot x^{q_1} + b_1 & \text{, falls } x \leq c \\ a_2 \cdot x^{q_2} + b_2 & \text{, falls } c < x \end{cases}$$

Mit i dem Namen der Funktion zur besseren Unterscheidbarkeit.
Konkret würde dies also für $f_{1,\{-3,-2,-1,0,1,2,3\},[-3,3],-1,0,1}$ folgendermaßen aussehen:
$X := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $Y := [-3, 3]$, $a := -1$, $b := 0$ und $c := 1$. Mit der damit konkretisierten Funktion:

$$f_1 : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to [-3, 3], \qquad f_1(x) := \begin{cases} -1 \cdot x & \text{, falls } x < -1 \\ 0 \cdot x & \text{, falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \cdot x & \text{, falls } 1 < x \end{cases}$$

Und für $g_{1,[-2,2],[-4,4],0,(-1,2,1),(1,\frac{1}{2},-1)}$ folgendermaßen:

$$g_1 : [-2, 2] \to [-4, 4], \qquad g_1(x) := \begin{cases} -1 \cdot x^2 + 1 & \text{, falls } x \leq 0 \\ 1 \cdot \sqrt{x} - 1 & \text{, falls } 0 < x \end{cases}$$

2.3.1 Skizzieren sie für jede der folgenden Funktion jeweils die Graphen der Funktionen im Intervall $[-5, 5]$.

1. $f_{1,\{-3,-2,-1,0,1,2,3\},[-3,3],-1,0,1}$
2. $f_{2,[-3,3],[-3,3],-1,0,1}$
3. $f_{3,[-3,3],[0,3],-1,0,1}$
4. $f_{4,[-3,3],[-3,3],1,2,-1}$
5. $g_{2,\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\},[-1,8],0,(\frac{1}{2},2,-1),(\frac{1}{5},3,-1)}$
6. $g_{3,\{-3,-2,-1,0,4,9,16\},[-4,9],0,(1,2,-1),(2,\frac{1}{2},1)}$

2.3.2 Geben Sie für die folgenden Abbildungen und eingesetzten Mengen jeweils die Bildmenge an.

1. $f_{1,[-2,2],[-2,2],-1,0,1}([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}])$
2. $f_{1,[-2,2],[-2,2],-1,0,1}([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$

2.3.3 Geben Sie für die folgenden Abbildungen und eingesetzten Mengen jeweils die Urbildmenge an.

1. $f^{-1}_{1,[-2,2],[-2,2],-1,0,1}([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}])$
2. $f^{-1}_{1,[-2,2],[-2,2],-1,0,1}(\{0\})$

3 Aussagenlogik

3.1 Wissen

3.1.1 Welche Werte kann eine **Aussagenvariable** annehmen?

3.1.2 (a) Welche Verknüpfungen zweier Aussagenvariablen A und B haben Sie kennen gelernt (4)? (b) Wie genau sind diese Definiert? (c) Welche Operation gibt es für eine einzelne Aussagenvariable A (1) und (d) wie ist diese definiert?

3.1.3 Wie ist die Negation einer Aussage A definiert?

3.1.4 Wie ist die Konjunktion zweier Aussagen A und B definiert?

3.1.5 Wie ist die Disjunktion zweier Aussagen A und B definiert?

3.1.6 Wie ist die Implikation von einer Aussage A zu einer Aussagen B definiert?

3.1.7 Wie ist die Äquivalenz zweier Aussagen A und B definiert?

3.1.8 Wie ist eine **Aussageformeln** F definiert?

3.1.9 Wann sind zwei Aussageformeln F_1, F_2 nach der Definition **gleichwertig**?

3.1.10 Wie lauten die **Kommutativgesetze** der Aussagenlogik?

3.1.11 Wie lauten die **Assoziativgesetze** der Aussagenlogik?

3.1.12 Wie lauten die **Distributivgesetze** der Aussagenlogik?

3.1.13 Wie lauten die **De Morganschen Gesetze** der Aussagenlogik?

3.1.14 Nennen Sie 5 **Beweisprinzipien**.

3.1.15 Auf welcher Aussagenlogischen Äquivalenz beruht das Beweisprinzip der Kontraposition?

3.1.16 Aus welchen beiden Teilbeweisen kann ein Äquivalenzbeweis aufgebaut werden?

3.1.17 Skizzieren Sie die Grundidee eines Beweises durch Widerspruch.

3.2 Rechnen

3.2.1 Zeigen Sie mittels einer vollständigen Wahrheitstabelle, dass

$$F_1(A,B,C) := A \Rightarrow (B \vee C)$$

und

$$F_2(A,B,C) := \neg(A \wedge \neg(B \vee C))$$

gleichwertig sind.

3.2.2 Zeigen Sie mittels einer vollständigen Wahrheitstabelle, dass

$$F_1(A,B,C) := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)$$

und

$$F_2(A,B,C) := (A \Leftarrow B) \wedge (B \Leftarrow C) \wedge (C \Leftarrow A)$$

gleichwertig sind.

3.2.3 Zeigen Sie mittels einer vollständigen Wahrheitstabelle, dass

$$F_1(A, B, C, D) := (\neg A \wedge \neg D) \vee (B \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D)$$

und

$$F_2(A, B, C, D) := (\neg A \vee \neg B \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg D)$$

gleichwertig sind.

3.2.4 Übersetzen Sie die folgende Natürlichsprachige Aussage zunächst in Mathematisch Schreibweise unter Verwendung des Existenzquantors ($\exists$) und Allquantors ($\forall$). Nehmen Sie dann an Sie wollten die Aussage mittels *Beweis durch Widerspruch* zeigen. Ermitteln Sie die dafür zu zeigende negierte Aussage:
Zu jeder Primzahl p gibt es eine Primzahl b mit $b > p$.

3.2.5 Übersetzen Sie die folgende Natürlichsprachige Aussage zunächst in Mathematisch Schreibweise unter Verwendung des Existenzquantors ($\exists$) und Allquantors ($\forall$). Nehmen Sie dann an Sie wollten die Aussage mittels *Beweis durch Widerspruch* zeigen. Ermitteln Sie die dafür zu zeigende negierte Aussage:
Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die es Werte $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(a) < 0$ und $f(c) > 0$, lässt sich ein $b \in \mathbb{R}$ finden, sodass gilt $f(b) = 0$.

3.2.6 Übersetzen Sie die folgende Natürlichsprachige Aussage zunächst in Mathematisch Schreibweise unter Verwendung des Existenzquantors ($\exists$) und Allquantors ($\forall$). Nehmen Sie dann an Sie wollten die Aussage mittels *Beweis durch Widerspruch* zeigen. Ermitteln Sie die dafür zu zeigende negierte Aussage:
Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$, dass es zu jedem wählbaren $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ein passendes $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ gibt, sodass $f((a - \varepsilon, a + \varepsilon)) \subset (f(a) - \delta, f(a) + \delta)$ gilt.

4 Relationen

4.1 Wissen

4.1.1 Wie wird eine binäre Relation $R_1 \subset M \times M$ auf der Menge M genannt im Gegensatz zu einer Relation $R_2 \subset N_1 \times N_2$ mit $N_1 \neq N_2$?

4.1.2 Wann ist der Graph einer Funktion $f: X \rightarrow Y$ eine homogene Relation?

4.1.3 Was muss eine Relation $R \subset X \times Y$ erfüllen um **linkstotal** zu sein?

4.1.4 Was muss eine Relation $R \subset X \times Y$ erfüllen um **rechtstotal** zu sein?

4.1.5 Was muss eine Relation $R \subset X \times Y$ erfüllen um **rechtseindeutig** zu sein?

4.1.6 Was muss eine Relation $R \subset X \times Y$ erfüllen um **linkseindeutig** zu sein?

4.1.7 Was muss eine homogene Relation $R \subset M^2$ erfüllen um **reflexiv** zu sein?

4.1.8 Was muss eine homogene Relation $R \subset M^2$ erfüllen um **symmetrisch** zu sein?

4.1.9 Was muss eine homogene Relation $R \subset M^2$ erfüllen um **transitiv** zu sein?

4.1.10 Was muss eine homogene Relation $R \subset M^2$ erfüllen um eine **Äquivalenzrelation** zu sein?

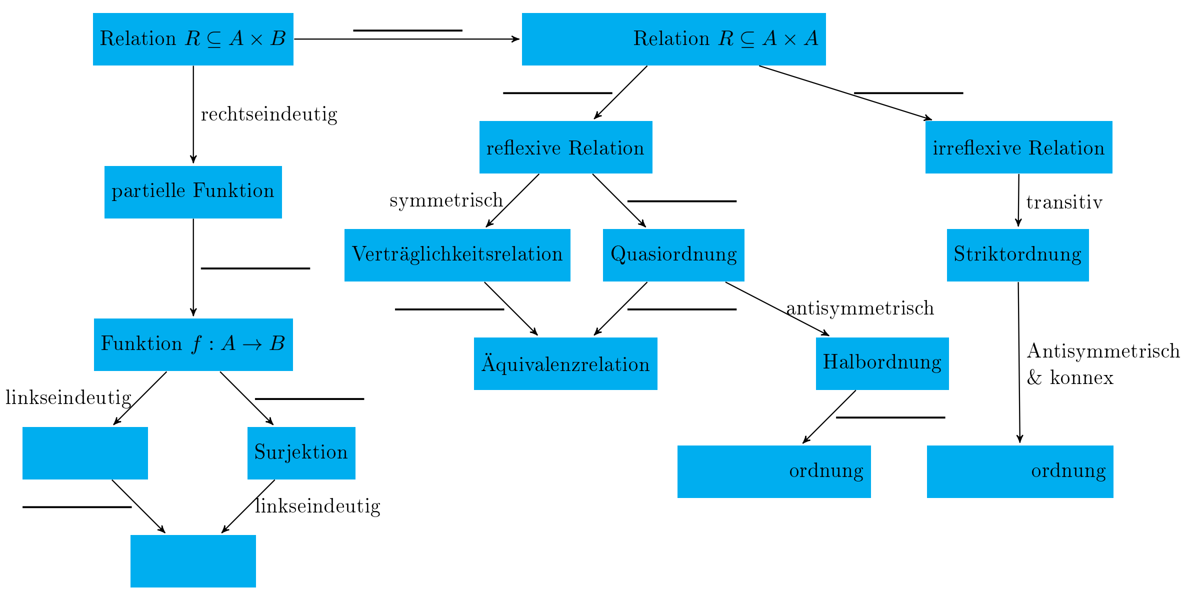
4.1.11 Was muss eine homogene Relation $R \subset M^2$ erfüllen um eine **schwache Totalordnung** zu sein?

4.1.12 Was muss eine homogene Relation $R \subset M^2$ erfüllen um eine **starke Totalordnung** zu sein?

4.1.13 Sei M eine nichtleere Menge und R eine Äquivalenzrelation auf M. Wie ist die Äquivalenzklasse zu $x \in M$ definiert?

4.1.14 Wie ist der Standartrepräsentant einer Äquivalenzklasse einer Äquivalenzrelation modulo m definiert? (mit $m \in \mathbb{N}$)

4.1.15 Vervollständigen Sie das folgende Diagramm zu den unterschiedlichen Relationen und den Eigenschaften, mittels derer sie definiert sind. Es soll jeder Pfeil beschriftet und jedes Kästchen vollständig ausgefüllt sein.



Merke:

- Antisymmetrisch + irreflexiv = asymmetrisch
- asymmetrisch + konnex = trichotom.

4.2 Rechnen

4.2.1 Seien $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ Mengen und

$$R = \{(0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, -3), (4, 0), (5, -5)\} \subset M \times N$$

eine Relation. Kann R dann auch der Graph einer Funktion sein? Falls ja, Wie lautet dann die Definition der Funktion und falls nein, warum nicht?

4.2.2 Seien $M = \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$, $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ Mengen und

$$R = \{(0, 0), (-1, 1), (0, 2), (-3, 3), (0, 4), (-5, 5)\} \subset M \times N$$

eine Relation. Kann R dann auch der Graph einer Funktion sein? Falls ja, wie lautet dann die Definition der Funktion und falls nein, warum nicht?

4.2.3 Seien $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ Mengen und

$$R = \{(0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, -3), (4, 0)\} \subset M \times N$$

eine Relation. Kann R dann auch der Graph einer Funktion sein? Falls ja, Wie lautet dann die Definition der Funktion und falls nein, warum nicht?

4.2.4 Sei $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Bauen Sie eine Relation $R \subset M \times M$, sodass Ihre Relation *reflexiv* ist.

4.2.5 Sei $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Bauen Sie eine Relation $R \subset M \times M$, sodass Ihre Relation *symmetrisch* ist und $(2, 3) \in R$, $|R| \geq 7$ gelten.

4.2.6 Sei $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Bauen Sie eine Relation $R \subset M \times M$, sodass Ihre Relation *transitiv* ist und $(1, 2) \in R$ sowie $|R| \geq 3$ gelten.

4.2.7 Sei $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Bauen Sie eine Relation $R \subset M \times M$, sodass Ihre Relation *asymmetrisch* ist und $(3, 2) \in R$ gilt. (R asymmetrisch: $\forall_{x,y \in M} : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$.)

4.2.8 Sei $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Bauen Sie eine Relation $R \subset M \times M$, sodass Ihre Relation *antisymmetrisch* ist und $\exists_{(x,y) \in R} : x > y$, $\exists_{(x,y) \in R} : x < y$, $|R| \geq 3$ gelten. (R antisymmetrisch: $\forall_{x,y \in M} : (\ (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y\ )$)

4.2.9 Sei $M = \{a, b, c, d\}$ eine Menge und

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d)\} \subset M \times M$$

eine Relation. Prüfen Sie ob R eine *Äquivalenzrelation* ist. Wie viele Äquivalenzklassen hat die Äquivalenzrelation?

4.2.10 Sei $M = \{a, b, c, d\}$ eine Menge und

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d)\} \subset M \times M$$

eine Relation. Prüfen Sie ob R eine *Äquivalenzrelation* ist.

5 Algebraische Strukturen

5.1 Wissen

5.1.1 Geben Sie die vollständige Definition einer **Gruppe** $(G, *)$ an.

5.1.2 (a) Welche zusätzliche Eigenschaft macht eine Gruppe $(G, *)$ zu einer **abelschen Gruppe**? (b) Welchen anderen Namen für abelsche Gruppen haben Sie kennengelernt? (c) Wie lautet die exakte Definition dieser zusätzlichen Eigenschaft?

5.1.3 Nennen Sie die Namen der Eigenschaften einer abelschen Gruppe $(G, *)$.

5.1.4 Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $g \in G$. Wie bezeichnen/schreiben wir allgemein das Inverse von g bezüglich der Verknüpfung $*$?

5.1.5 Welche bekannte Menge kennen Sie die zusammen mit der bekannten Addition $(+)$ eine Gruppe bildet?

5.1.6 Wie ist eine Permutation σ definiert?

5.1.7 Was ist S_n und wie ist es definiert?

5.1.8 Geben Sie die vollständige Definition eines **Rings** $(R, \oplus, \odot)$ an.

5.1.9 (a) Welche zusätzliche Eigenschaft macht einen Ring$(R, \oplus, \odot)$ zu einem **kommutativen Ring**? (b) Wie lautet die exakte Definition dieser zusätzlichen Eigenschaft?

5.1.10 Geben Sie die vollständige Definition eines **Körpers** $(K, \oplus, \odot)$ an.

5.1.11 Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper. Als was werden die Verknüpfungen (a) $\oplus$ und (b) $\odot$ normalerweise bezeichnet? Wie werden weiterhin die neutralen Elemente bezüglich (c) $\oplus$ bzw. (d) $\odot$ normalerweise bezeichnet/geschrieben?

5.1.12 Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper und sei $k \in K_0 := K \setminus \{0\}$. Wie bezeichnen/schreiben wir allgemein das Inverse von k bezüglich der Verknüpfung $\odot$?

5.1.13 Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper und sei $k \in K$. Wie bezeichnen/schreiben wir allgemein das Inverse von k bezüglich der Verknüpfung $\oplus$?

5.1.14 Es gibt in jedem Körper $(K, \oplus, \odot)$ genau ein Element welches kein Inverses bezüglich der zweiten Operation $\odot$ besitzt. (a) Welches ist es und (b) welche besondere Eigenschaft hat es?

5.1.15 Welche bekannten Mengen kennen Sie die zusammen mit der bekannten Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$ jeweils einen Körper bilden?

5.1.16 Wie ist ein **(Gruppen-)Homomorphismus** von einer Gruppe $(G, *)$ auf eine Gruppe $(H, \odot)$ definiert?

5.1.17 Wie ist ein **(Ring-)Homomorphismus** von einem Ringe $(R, \oplus, *)$ auf einen Ring $(S, \times, \odot)$ definiert?

5.1.18 Wie ist ein **(Körper-)Homomorphismus** von einem Körper $(K, \oplus, *)$ auf einen Körper $(L, \times, \odot)$ definiert?

5.1.19 Was macht einen Homomorphismus zu einem **Isomorphismus**?

5.1.20 Unter welcher Bedingung ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ ein Körper?

5.2 Rechnen

5.2.1 Geben Sie zu den beiden Permutationen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ aus der Gruppe $(S_5, \circ)$ jeweils das Inverse Element an.

5.2.2 Geben Sie ein Gegenbeispiel an das zeigen, dass die Gruppe $(S_5, \circ)$ nicht kommutativ ist.

5.2.3 Betrachten Sie den endlichen Restklassenkörper über $\mathbb{Z}_{13}$ mit entsprechender Addition und Multiplikation. (a) Geben Sie alle Elemente der Grundmenge an. (b) Geben Sie weiter zu allen Elementen, zu welchen es existiert, jeweils das inverse Element bezüglich der Multiplikation an.

5.2.4 Berechnen Sie:

- $[7]_5 + [4]_5 =$
- $[-3]_8 + [10]_8 \cdot [9]_8 =$
- $([2]_{11}^{-1} + [5]_{11}) \cdot [3]_{11} =$
- $[5]_{17}^{-1} \cdot [5]_{17} - [9]_{17} \cdot [9]_{17}^{-1} =$

6 Vollständige Induktion

6.1 Wissen

6.1.1 (a) Aus welchen drei Abschnitten Besteht ein Induktions-Beweis? (b) Skizzieren sie was in jedem der Abschnitte passiert.

6.1.2 Wie lautet die **geometrische Summenformel** (Inklusive Vorbedingungen)?

6.1.3 Wie lautet die **Gaußsche Summenformel** (Inklusive Vorbedingungen)?

6.1.4 Wie lautet die **Bernoullische Ungleichung** (Inklusive Vorbedingungen)?

6.1.5 Wie ist die **Fakultät** definiert?

6.1.6 Wie ist $\binom{n}{v}$ definiert?

6.1.7 Wie lautet der **binomische Satz** für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$?

6.1.8 Wie viele Möglichkeiten gibt es ν aus n Dingen zu ziehen, bei Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge?

6.1.9 Wie viele Möglichkeiten gibt es ν aus n Dingen zu ziehen, bei Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge?

6.1.10 Wie viele Möglichkeiten gibt es ν aus n Dingen zu ziehen, bei Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge?

6.1.11 Wie viele Möglichkeiten gibt es ν aus n Dingen zu ziehen, bei Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge?

6.2 Rechnen

6.2.1 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

6.2.2 Berechnen Sie $\binom{7}{5}$.

6.2.3 Wie viele Möglichkeiten gibt es aus einer Gruppe von 7 Personen 5 auszuwählen (c)? (Was liegt vor: Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen und (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)

6.2.4 Wie viele Möglichkeiten gibt es aus einer Gruppe von 5 Personen einen Rat von 3 Personen mit Vorsitz und Stellvertretung zu bilden (c)? (Was liegt vor: Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen und (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)

6.2.5 Wie viele Möglichkeiten gibt dass 3 Personen die Noten S, A, B, C, D, E, F bekommen (c)? (Was liegt vor: Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen und (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)

6.2.6 Wie viele Möglichkeiten gibt dass Laura, Tim und Charlie die Noten S, A, B, C, D, E, F bekommen (c)? (Was liegt vor: Ziehen (a) mit/ohne Zurücklegen und (b) mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?)

6.3 Weiterführend

Soweit nicht näher angegeben sei $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$

6.3.1 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^2 + n$ eine gerade Zahl ist.

6.3.2 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^3 + 2n$ durch 3 teilbar ist.

6.3.3 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 4n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.

6.3.4 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^3 - n$ durch 6 teilbar ist.

6.3.5 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 2n^3 + 3n^2 + n$ durch 6 teilbar ist.

6.3.6 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^3 - 6n^2 + 14n$ durch 3 teilbar ist.

6.3.7 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 3^n - 3$ durch 6 teilbar ist.

6.3.8 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar ist.

6.3.9 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar ist.

6.3.10 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 5^n + 7$ durch 4 teilbar ist.

6.3.11 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 5^{2n} - 3^{2n}$ durch 8 teilbar ist.

6.3.12 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 2^{3n} + 13$ durch 7 teilbar ist.

6.3.13 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{a\in\mathbb{N},1<a} : a^n - 1$ durch $a - 1$ teilbar ist.

6.3.14 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^7 - n$ durch 7 teilbar ist.

6.3.15 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 3^{n+1} + 2^{3n+1}$ durch 5 teilbar ist.

6.3.16 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 3n^5 + 5n^3 + 7n$ durch 15 teilbar ist.

6.3.17 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 3^{2n} + 7$ durch 8 teilbar ist.

6.3.18 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^3 + 5n$ durch 6 teilbar ist.

6.3.19 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^4 - 4n^2$ durch 3 teilbar ist.

6.3.20 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ durch 9 teilbar ist.

6.3.21 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar ist.

6.3.22 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 5^{2n} + 24n - 1$ durch 48 teilbar ist.

6.3.23 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar ist.

6.3.24 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{a\in\mathbb{N}} : (2a - 1)^n - 1$ gerade ist.

6.3.25 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{a\in\mathbb{N}} : a^{n+1} + (a + 1)^{2n-1}$ durch $a^2 + a + 1$ teilbar ist.

6.3.26 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{a\in\mathbb{N}} : a^{2b+1} - a$ durch 6 teilbar ist.

6.3.27 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.28 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.29 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^3 = \left(\sum_{v=1}^{n} v\right)^2 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.30 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.31 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} (2\nu-1) = n^2 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.32 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} (2\nu-1)^2 = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.33 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.34 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} (4\nu-1) = 2n^2 + n \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.35 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=0}^{n} 2^\nu = 2^{n+1} - 1 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$$

6.3.36 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},q\neq 1}$$

6.3.37 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=0}^{n} a \cdot q^{\nu} = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}, q\neq 1}$$

6.3.38 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2^{2(\nu-1)}}{3^{\nu}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}, q\neq 1}$$

6.3.39 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.40 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot \nu! = (n+1)! - 1 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.41 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)(\nu+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.42 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{2n} -1^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} = \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{n+v} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.43 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{2^{\nu}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n}}\right) \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.44 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu \cdot (\nu+1)} = \frac{n}{n+1} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.45 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(2\nu-1) \cdot (2\nu+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.46 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(3\nu-2) \cdot (3\nu+1)} = \frac{n}{3n+1} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.47 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(4\nu-3)\cdot(4\nu+1)} = \frac{n}{4n+1} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.48 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\nu+3)\cdot(\nu+4)} = \frac{n}{4(n+4)} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.49 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{4}{\nu(\nu+2)} = \frac{n\cdot(3n+5)}{(n+1)(n+2)} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.50 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{4}{(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)} = \frac{(n+1)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.51 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu^2}{(2\nu-1)\cdot(2\nu+1)} = \frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.52 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} = 2^n \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.53 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{2^\nu} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.54 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\nu}{(\nu+1)!} = \frac{n!-1}{n!} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.55 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\cdot 2^\nu = (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.56 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n} 4^\nu = 2^{\nu\cdot(\nu+1)} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.57 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{\nu=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)=\frac{1}{n} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$$

6.3.58 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{2}{\nu}\right)=\sum_{\nu=1}^{n+1}\nu \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.59 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$n^2-2n-1>0 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},n\geq 3}$$

6.3.60 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{1+(n+\nu)}>\frac{13}{24} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.61 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{1}{1+(n+\nu)}>1 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.62 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$2^n>n+1 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$$

6.3.63 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$2^n>n^2 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},n\geq 5}$$

6.3.64 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$2^n>n^3 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},n\geq 10}$$

6.3.65 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\frac{n}{2}<\sum_{\nu=1}^{2^n-1}\frac{1}{\nu}<n \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$$

6.3.66 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$n!>2^n \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},n\geq 4}$$

6.3.67 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$$

6.3.68 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu\cdot 2^{\nu-1}>(n+1)\cdot n^2 \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N},n\geq 5}$$

6.3.69 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{\nu=1}^{2^n} \frac{1}{\nu} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.70 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n} \nu^\nu \leq n^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

6.3.71 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}, x>-1, x\neq 0}$$

6.3.72 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}, 0\leq x\leq 1}$$

7 Rechnen mit Komplexen Zahlen

7.1 Wissen

7.1.1 In den Komplexen Zahlen gilt per Definition: $i^2 = \dots$

7.1.2 Für was steht das i bei Komplexen Zahlen?

7.1.3 Wie ist die Menge der Komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$) mittels der Reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) definiert?

7.1.4 Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wie sind $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ definiert?

7.1.5 Wie ist die **Addition** zweier Komplexer Zahlen $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}\ ,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiert? $z + w = \dots$

7.1.6 Wie ist die **Multiplikation** zweier Komplexer Zahlen $z = a+ib, w = c+id \in \mathbb{C}\ ,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiert? $z \cdot w = \dots$

7.1.7 Wie sind die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation des Körpers der Komplexen Zahlen $(C, +, \cdot)$ definiert?

7.1.8 Wie sind die inversen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation für Elemente ($z = a + ib \in \mathbb{C}\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$) des Körpers der Komplexen Zahlen $(C, +, \cdot)$ definiert?

7.1.9 Wie ist das **konjugiert komplexe** einer Komplexen Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$ definiert?

7.1.10 Wie ist der **Betrag** einer Komplexen Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$ definiert?

7.1.11 Wie ist eine **Polynomfunktion** definiert?

7.1.12 Wie ist eine **Nullstelle** einer Polynomfunktion definiert?

7.1.13 Was besagt der **Fundamentalsatz der Algebra** (Definition)?

7.1.14 Was ist die **Vielfachheit** einer Nullstelle einer Polynomfunktion? Was gilt für die Summe aller Vielfachheiten aller Nullstellen einer Polynomfunktion?

7.1.15 Welche Besonderheit gilt für die Nullstellen von Polynomfunktionen die lediglich reelle Koeffizienten haben ($\forall_{a_v} : a_v \in \mathbb{R}$)?

7.2 Rechnen

7.2.1 Seien:

- $z_1 = 3 + i \cdot 2$
- $z_2 = -\frac{3}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$
- $z_3 = i \cdot 3$

Berechnen Sie:

- $z_1 + z_2$
- $z_1 + z_3$
- $z_2 + z_3$
- $|z_1| + z_3$
- $z_2 + |z_3|$
- $z_1 \cdot z_2$
- $z_1 \cdot z_3$
- $z_2 \cdot z_3$
- $|z_2| \cdot z_1$
- $(|z_2| + z_1) \cdot z_3$
- $\frac{1}{z_1} + z_3$
- $\frac{|z_2|}{z_3} + z_2$

7.2.2 Schreiben Sie das folgende Polynom in Summen-Form um:

$$f(z) = (z - (1 + i))^2 (z - (-1 + i))$$

7.2.3 Schreiben Sie das folgende Polynom in Summen-Form um:

$$f(z) = (z - (2 - i))(z - (2 + i))(z - (-2))$$

7.2.4 Welchen Grad hat das folgende Polynom?

$$f(z) = (z + i)^3(z - 2)^2(z - (3 + i))(z - (2 - 2i))^2$$

7.2.5 Betrachten Sie das Polynom $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - 8z^2 + 16z$, mit den Nullstellen $n_0 = 0, n_1 = 1 - i, n_2 = -2 + 2i$. Wie lauten die beiden Fehlenden Nullstellen n_3 und n_4?

8 Mengen in der Komplexen Ebene

8.1 Wissen

8.1.1 Welche Form hat die folgende Menge in der Komplexen Ebene $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$?

8.1.2 Welche Form hat die folgende Menge in der Komplexen Ebene $M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 1\}$?

8.1.3 Welche Form hat die folgende Menge in der Komplexen Ebene $M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 1\}$?

8.1.4 Wo in der Komplexen Ebene liegt der Mittelpunkt der Kreisscheibe $M = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + i \cdot 1)| \leq 1\}$?

8.1.5 Wie lautet die allgemeine Formel für eine Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt $a + ib$ in der Komplexen-Ebene?

8.2 Rechnen

8.2.1 Zeichnen Sie die folgende Menge in der Komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : 2 \cdot \mathrm{Re}(z) \leq 3 \wedge \mathrm{Im}(z) > -\frac{3}{2}\}$$

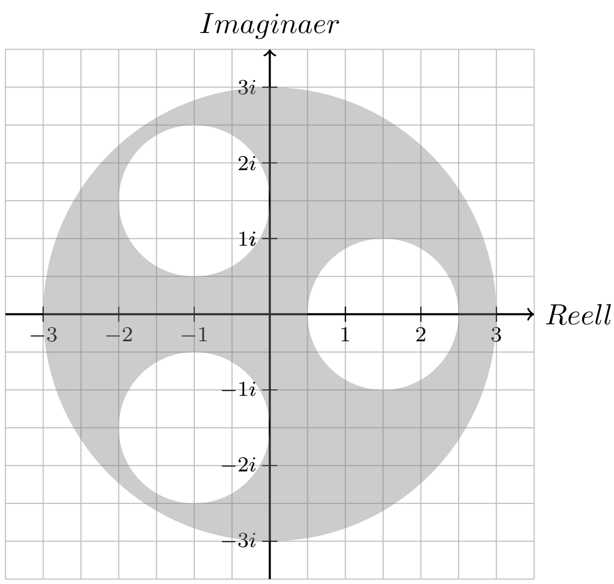
8.2.2 Zeichnen Sie die folgende Menge in der Komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 1 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq -1 \wedge |z + i| < 3\}$$

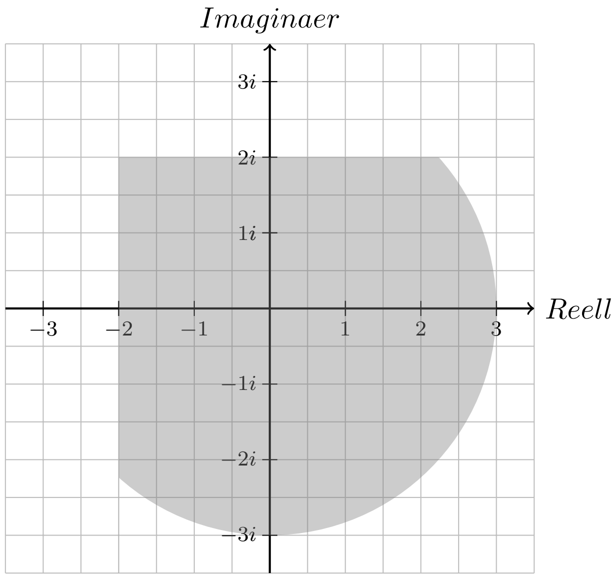
8.2.3 Zeichnen Sie die folgende Menge in der Komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : (\,|z - (1 + i)| < 3 \vee |z + (1 + i \cdot 2)| < 2\,) \wedge |z - \frac{1}{2}| > 1\}$$

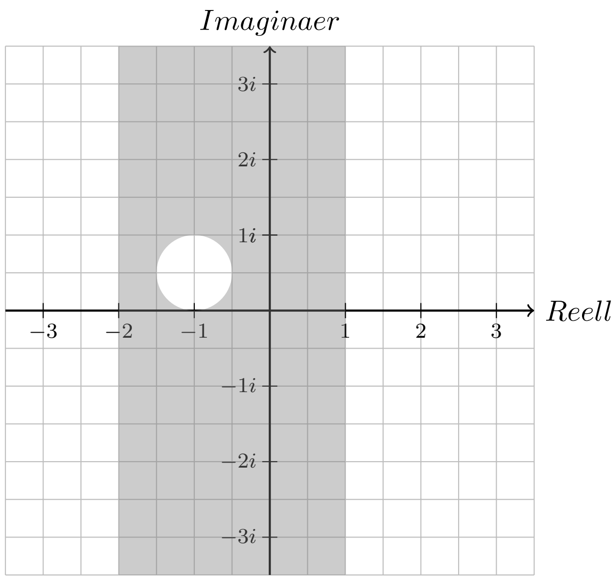
8.2.4 Beschreiben Sie die im folgenden Skizzierte Menge mittels der Mengenschreibweise.



8.2.5 Beschreiben Sie die im folgenden Skizzierte Menge mittels der Mengenschreibweise.



8.2.6 Beschreiben Sie die im folgenden Skizzierte Menge mittels der Mengenschreibweise.



9 Folgen

9.1 Wissen

9.1.1 Wie ist der **Grenzwert** einer Folge (a_n) definiert?

9.1.2 Wann ist eine Folge (a_n) eine Nullfolge?

9.1.3 Wann ist nach Definition eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ mit $x \subset \mathbb{C}$ an der Stelle $z \in X$ stetig?

9.1.4 Sei $x \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wann ist f **monoton fallend**?

9.1.5 Sei $x \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wann ist f **streng monoton fallend**?

9.1.6 Sei $x \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wann ist f **monoton wachsend**?

9.1.7 Sei $x \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wann ist f **streng monoton wachsend**?

9.1.8 Was bedeutet es, dass eine Folge (a_n) nach oben/unten beschränkt ist?

9.1.9 Wie lautet der **Hauptsatz über monotone Folgen**?

9.1.10 (a) Wie lautet die allgemeine Definition einer **rekursiven Folge**? (b) Falls eine solche Folge einen Grenzwert hat, wie kann dieser berechnet werden?

9.2 Rechnen

9.2.1 Berechne den Grenzwert der Folge $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!\cdot\pi}{n!\cdot 3}$.

9.2.2 Berechne den Grenzwert der Folge $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot n^2+1}{5\cdot n^3}$.

9.2.3 Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ streng monoton fallend ist.

9.2.4 Gegeben die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n - 2$ mit $a_0 = -1$, berechne den Grenzwert der Folge.

10 Reihen

10.1 Wissen

10.1.1 Wie ist ausgehend von einer Folge (a_n) eine **Reihe** über dieser Folge definiert?

10.1.2 Wie ist die **geometrische Reihe** definiert?

10.1.3 Wie ist die **harmonische Reihe** definiert?

10.1.4 Wenn sie wissen, dass eine Reihe $\sum_{v=m}^{\infty} a_v$ konvergent ist, was können sie daraus über die Folge (a_n) schließen?

10.1.5 Wenn sie wissen, dass die Folge (a_n) keine Nullfolge ist, was können sie dann über die Konvergenz der Reihe $\sum_{v=m}^{\infty} a_v$ über dieser Folge aussagen?

10.1.6 Beschreiben Sie das Majorantenkriterium für Reihen. (Seien $(a_n)_{n\geq m}$ und $(b_n)_{n\geq k}$ Folgen.)

10.2 Rechnen

10.2.1 Zeige, dass die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!}$ konvergent ist.

10.2.2 Zeige, dass die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}$ divergent ist.

11 Exponentialfunktion & Logarithmus

11.1 Wissen

11.1.1 Geben Sie die Definition der Komplexen Exponentialfunktion ($\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) an.

11.1.2 Wie lautet die **Eulersche Identität**?

11.1.3 Dank der Komplexen Exponentialfunktion erhalten wir eine weitere Darstellungsform für Komplexe Zahlen. (a) Welchen Namen hat diese? (b) Wie wird eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit dieser ausgedrückt? (c) Wie ist der Zusammenhang mit der bekannten Schreibweise ($z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$)? (d) Welchen Vorteil bietet die neue Schreibweise?

11.1.4 Geben Sie die Definition der Komplexen Sinusfunktion ($\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) an.

11.1.5 Geben Sie die Definition der Komplexen Kosinusfunktion ($\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) an.