

Aufgabensammlung

Lineare Algebra

1 Rechnen \mathbb{R}^n

Aufgabe 1 1. Stellen Sie folgende Vektoren graphisch mittels Pfeilen dar:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Illustrieren Sie graphisch $v_1 + v_2$ und $v_1 + v_2 + v_3$, sowie $-1/2 \cdot v_3$ und $v_1 - 2 \cdot v_3$.

Aufgabe 2 Es seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, ob v_3, v_4 Elemente von $\text{Span}(v_1, v_2)$ sind.

Aufgabe 3 Finden Sie zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $v \neq w$ und so, dass $\text{Span}(v, w) \neq \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ so, dass

$$v_3 \notin \text{Span}(v_1, v_2)$$

gilt.

Aufgabe 5 Es seien $v_1, v_2, \dots, v_{2m} \in \mathbb{R}^n$, $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch schrittweises Nachrechnen die folgenden Identitäten:

$$\sum_{k=1}^{2m} \lambda_k v_k + \sum_{k=1}^m \lambda_k w_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k (v_k + w_k) + \sum_{k=m+1}^{2m} \lambda_k v_k,$$

$$\sum_{k=2}^{m+1} v_k + \sum_{k=1}^m -v_k = v_{m+1} - v_1,$$

Aufgabe 6 Es seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) so, dass

$$v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2)$$

gilt.

Aufgabe 7 Es seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, $v, w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$v + w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m) \text{ und } \lambda v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

gilt.

2 Matrix-Algebra

Aufgabe 8 Es seien mit $D_\alpha \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ aus der Vorlesung für $\alpha_1 = \pi/4$ und $\alpha_2 = -\pi/2$ und

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen und skizzieren Sie $D_{\alpha_1} v$, $D_{\alpha_2} v$, $D_{\alpha_1} w$, $D_{\alpha_2} w$.

Aufgabe 9 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie wie ein (beliebiges) $x \in \mathbb{R}^2$ und Ax geometrisch zueinander stehen und begründen Sie damit, dass $A(Ax) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 10 Implementieren Sie ein Python-Skript, das die Drehung von Vektoren im \mathbb{R}^2 visuell darstellt. Erzeugen Sie dazu mit Hilfe der `numpy` Bibliothek die 2×2 -Drehmatrix D_α (aus der Vorlesung), und mehrere Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = (v_1 + v_3), \quad v_5 = (v_2 - 2 \cdot v_3).$$

Berechnen Sie damit das Matrix-Vektor-Produkt $D_\alpha v$

Visualisieren Sie jeden Vektor v und $D_\alpha v$ als Pfeile in der Ebene (vgl.unten).

Untersuchen Sie, was mit der Länge der Vektoren geschieht. Probieren Sie verschiedene Winkel wie $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}, 2\pi$ aus. Was stellen Sie fest?

Beispielhafte Python-Befehle mit numpy:

- **Kosinus, Sinus:**

```
import numpy as np
alpha = np.pi / 4
np.cos(alpha), np.sin(alpha)
```

- **Erzeugen einer Matrix A (Beispiel Einheitsmatrix):**

```
A = np.array([
    [1, 0],
    [0, 1]
])
```

- **Definition eines Vektors:**

```
v = np.array([1, 0])
```

- **Matrix-Vektor-Produkte Av berechnen :**

```
np.matmul(A, v)
```

- **Visualisierung mit matplotlib:**

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
plt.quiver(0, 0, v[0], v[1], angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='blue')
plt.show()
```

Aufgabe 11 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^m$, so dass die linearen Gleichungssysteme

$$Ax = b_1, \quad Ax = b_2$$

lösbar sind. D.h. es existieren jeweils mindestens ein $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ so, dass $Ax_1 = b_1$ und $Ax_2 = b_2$ gilt. Zeigen Sie, dass dann für alle $b \in \text{Span}(b_1, b_2)$ das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

ebenfalls lösbar ist.

Aufgabe 12 Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Folgendes:

$$(A + B)v, A(v + w), 2(A + B)(2v - 2w).$$

Aufgabe 13 Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix-Vektor-Produkte Av_1 , Av_2 und Av_3 .

Aufgabe 14 Bilden Sie die transponierte Matrix der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie außerdem

$$A^T C B.$$

Aufgabe 15 1. Seien $D_{1,\alpha}, D_{2,\alpha}, D_{3,\alpha} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Drehmatrizen aus der Vorlesung.
Berechnen Sie die Matrix-Matrix-Produkte

$$D_{1,\alpha} D_{3,\beta} \text{ und } D_{2,\alpha} D_{3,\beta}.$$

2. Finden Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass

$$AB \neq BA$$

gilt.

Aufgabe 16 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Wie viele Additionen und Multiplikationen müssen für das Matrix-Vektor-Produkt Ax berechnet werden?
- (b) Sei nun $n = m$ und es sei weiter bekannt, dass $[A]_{kj} = 0$ falls $j > k + 1$ oder $j < k - 1$ (mit $j, k = 1, \dots, n$) gilt. Wie viele Additionen und Multiplikationen müssen nun für das Matrix-Vektor-Produkt Ax berechnet werden?

Aufgabe 17 Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei quadratische Matrizen. Zeigen Sie durch schrittweises Nachrechnen die folgende Identität:

$$(B - A)^2 \sum_{k=1}^m A^k = B^2 \sum_{k=1}^m A^k - B \sum_{k=2}^{m+1} A^k - AB \sum_{k=1}^m A^k + \sum_{k=3}^{m+2} A^k.$$

Aufgabe 18 Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\bar{x} = 1/n \sum_{k=1}^n [x]_k$ der Mittelwert und für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, ist $\text{cov}(x, y) := 1/(n-1) \sum_{k=1}^n ([x]_k - \bar{x})([y]_k - \bar{y})$ die **Kovarianz** von x, y . Für $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, $m > 1$ ist die **Kovarianzmatrix** $C := C(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definiert durch $[C]_{k,j} = \text{cov}(v_k, v_j)$ mit $k, j = 1, \dots, m$.

Es sei $x = (1, 2, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$, und $y \in \mathbb{R}^4$ sei definiert durch $[y]_k = a[x]_k$, $k = 1, \dots, 4$ mit $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für die Fälle $a = 2$ und $a = -1$ die Kovarianzmatrix $C(x, y)$.

Aufgabe 19 In den folgenden Gleichungen sind in der Umformung von der linken zur rechten Seite ein oder mehrere Fehler unterlaufen. Berichtigen Sie jeweils den Ausdruck auf der rechten Seite. Begründen Sie, falls möglich, ihre Korrektur durch Angabe eines entsprechenden Resultats der Vorlesung.

- a) Mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(B + BA) = (B^2 + BAB)$
- b) Mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\langle ABx, y \rangle = \langle B^T x, Ay \rangle$
- c) Mit $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, l$, und $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{k=2}^l \alpha_{k-1} A C B_{k-1} x = A \left(\sum_{k=1}^l \alpha_k B_k x \right) C$$

Aufgabe 20 a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ beide invertierbar, sowie $B_1, B_2, F \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Lösen Sie folgende Gleichung nach B_2 :

$$A(B_1 + B_2)C = F.$$

- b) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Summe zweier invertierbarer Matrizen nicht invertierbar sein muss.

Aufgabe 21 Beweisen Sie 2. aus Satz 2.18

Aufgabe 22 a) Seien $D_\alpha \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $(\alpha \in [0, 2\pi))$ aus Beispiel 2.7 und $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 1$, zeigen Sie

$$\langle x, D_\alpha x \rangle = \cos(\alpha).$$

b) Seien D_α und x wie in Teil b, zeigen Sie

$$\langle D_\alpha x, D_\alpha x \rangle = 1.$$

Aufgabe 23 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $(E - A)$ invertierbar ist. Zeigen Sie durch vollständig Induktion, dass dann

$$\sum_{k=0}^n A^k = (E - A)^{-1}(E - A^{n+1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (Hinweis: Geometrische Summenformel Math. Grundl.)

Aufgabe 24 Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die sogenannte Spur definiert durch

$$\text{Spur}(A) = \sum_{j=1}^n [A]_{jj}.$$

Seien $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\text{Spur}(BC) = \text{Spur}(CB).$$

3 Skalarprodukt

Aufgabe 25 Zeigen Sie Satz 3.4

Aufgabe 26 (a) Verifizieren für das euklidische Skalarprodukt Sie Definition die Punkte (1) und (2) aus Definition 3.1 anhand eines (selbst gewählten) konkreten Beispiels von Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Belegen Sie jeweils durch ein Gegenbeispiel von Vektoren aus \mathbb{R}^3 , dass folgende Identitäten **falsch** sind:

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\lambda \langle x + y, x \rangle = \langle \lambda x + y, x \rangle$$

$$(x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 27 Es sei $v, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\langle v, u_1 \rangle < c, \quad \langle v, u_2 \rangle < c$$

gilt. Zeigen Sie, dass dann für alle $\lambda \in [0, 1]$ und $w = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$ gilt

$$\langle v, w \rangle < c.$$

Finden Sie außerdem ein Beispiel in \mathbb{R}^2 , das zeigt, dass diese Aussage für allgemeine $\lambda \in \mathbb{R}$ nicht gilt.

Aufgabe 28 a) Zeigen sie Satz 3.6(2) aus dem Skript.

b) Es seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $y = \lambda x$ mit $\lambda \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Aufgabe 29 Zeigen sie Satz 3.6(4) (Dreiecksungleichung) aus dem Skript. Hinweis: Formen Sie $\|x + y\|$ mit Hilfe der Rechenregeln für Skalarprodukte um und wenden Sie die Cauchy Schwarz Ungleichung an.

Aufgabe 30 Es seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $y = \lambda x$ mit $\lambda \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Aufgabe 31 Es sei

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, v \rangle = 0\},$$

$$M_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, v \rangle > 0\}.$$

Aufgabe 32 Es sei

$$v := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Skizzieren Sie die Mengen H_v, H_v^+ .
- b) Bestimmen Sie einen Vektor $u \in H_{v,-1}$.

Aufgabe 33 Es sei

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Skizzieren Sie die Mengen H_v, H_v^+ .
- b) Bestimmen Sie einen Vektor $u \in H_{v,-1}$.

Aufgabe 34 Implementieren Sie ein Python-Skript, das Hyperebenen im \mathbb{R}^2 sowie die zugehörigen Halbräume visualisiert.

1. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und die Werte $b_1 = 1, \quad b_2 = 0, b_3 = -0.5$

Zeichnen Sie für jedes Paar v_k, b_j die Hyperebene H_{v_k, b_j} als Gerade in der Ebene. Zeichnen Sie zusätzlich den jeweiligen Normalenvektor v_k als Pfeil vom Ursprung mit `plt.quiver` in die Grafik ein, um die Orientierung der Hyperebene zu verdeutlichen.

2. Erzeugen Sie mit `numpy.random.rand` eine große Menge (z. B. 500) zufälliger Punkte $y \in \mathbb{R}^2$ im Quadrat $[-2, 2]^2$ und färben Sie die Punkte abhängig davon ein, ob sie im Halbraum $H_{x,b}^+, H_{x,b}^-$ liegen.

Dazu nützliche Befehle:

- `import numpy as np` und `import matplotlib.pyplot as plt`
- `np.random.rand(N, 2)` erzeugt N zufällige Punkte im Quadrat $[0, 1]^2$ (mit linearem Shift und Skalierung auf $[-2, 2]^2$)

- `np.dot(points, x)` berechnet $\langle x, y \rangle$ für alle Punkte gleichzeitig
- `plt.scatter(..., color='red')` bzw. `color='blue'` zur farblichen Unterscheidung

Aufgabe 35 Implementieren Sie ein Python-Skript, das ein Dreieck als Schnitt geeigneter Halbräume erzeugt und dieses geometrisch transformiert.

1. Gegeben seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Werte $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = -1$

- (a) Visualisieren Sie das Dreieck, dass sich als Schnitt der Halbräume H_{v_k, b_k}^+ für $k = 1, 2, 3$ ergibt. Erzeugen Sie mit `numpy.random.rand` eine große Menge (z. B. 500) zufälliger Punkte $y \in \mathbb{R}^2$ im Quadrat $[-4, 4]^2$ und färben Sie die Punkte abhängig davon ein, ob sie in **allen** Halbräumen H_{v_k, b_k}^+ enthalten sind oder nicht. Nutzen Sie `plt.scatter(..., color='red')` bzw. `color='blue'` (vgl. untere Importbefehle)

2. Gegeben sei der Translationsvektor

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Drehmatrix D_α aus der Vorlesung mit $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Wenden Sie nacheinander folgende Operationen auf das Dreieck an:

- Translation: $y \mapsto y + t$
- Rotation: $y \mapsto D_\alpha y$

und visualisieren Sie das Ergebnis. Wiederholen Sie die Transformation in umgekehrter Reihenfolge:

- Zuerst Rotation: $y \mapsto D_\alpha y$
- dann Translation: $y \mapsto y + t$

Dazu nützliche Funktionen:

- `import numpy as np` und `import matplotlib.pyplot as plt`

- `np.dot(points, x)` oder `points @ x` für Skalarprodukte

Aufgabe 36 Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren v_1, v_2 , zwischen den Vektoren v_1, v_3 und zwischen den Vektoren v_2, v_3

Aufgabe 37 Beschreiben Sie mathematisch das Dreieck (d.h. die Menge der Punkte, die innerhalb des Dreiecks liegen, ohne Rand) mit Eckpunkten $(0, 0)^T, (1, 1)^T, (2, 0)^T$ im \mathbb{R}^2 . Verwenden Sie dazu die Mengen aus Definition 3.10

Aufgabe 38 Beschreiben Sie mathematisch das Dreieck (d.h. die Menge der Punkte, die innerhalb des Dreiecks liegen, ohne Rand) mit Eckpunkten $(0, 0)^T, (2, 1)^T, (3, 0)^T$ im \mathbb{R}^2 . Verwenden Sie dazu die Mengen aus Definition 3.10

Aufgabe 39 Es seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v_j, v_k \rangle = 0$ für alle $j \neq k$ und $v := v_1 + v_2 + \dots + v_m$. Zeigen Sie

$$\langle v, v \rangle = \sum_{l=1}^m \|v_l\|^2$$

4 Basis und Lineare Abbildungen

Aufgabe 40 Es seien

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), v = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dann ist \mathcal{B} ein Basis von \mathbb{R}^3 . Erzeugen Sie mithilfe des Austauschslemmas aus \mathcal{B} eine neue Basis, die v und u enthält.

Aufgabe 41 Bestimmen Sie die darstellende Matrix der folgenden Abbildungen: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 4x_1 \end{pmatrix}, \quad h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 - 6x_2 + x_3 \\ 7x_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42 Bestimmen Sie die darstellende Matrix der folgenden Abbildungen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (2x_1 - x_2).$$

b) $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_4 + x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43 Bestimmen Sie jeweils die darstellende Matrix zu folgenden linearen Abbildungen:

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$$

2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$g(x) = g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

3. $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Aufgabe 44 Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear. Zeigen Sie, dass dann eine eindeutige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x) = Ax.$$

(Vgl. Satz 4.23 und nachfolgendes Beispiel)

Aufgabe 45 Es seien $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ $b \in \mathbb{R}$. Für welche b ist die Hyperebene $H_{x,b}$ ein Unterraum?

Aufgabe 46 Welche der folgenden Abbildungen ist linear? (Begründen Sie jeweils Ihre Aussage)

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -5x_1 \end{pmatrix}$$

3. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$

Aufgabe 47 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist eine der beiden folgenden Aussagen richtig:

$$\text{Ker} B \subset \text{Ker}(AB) \text{ oder } \text{Ker}(AB) \subset \text{Ker} B.$$

Entscheiden Sie welche Aussage wahr ist und beweisen Sie diese. Widerlegen Sie die übrige Aussage durch eine Gegenbeispiel.

Aufgabe 48 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Welche Bedingungen müssen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ erfüllen, damit

$$\text{Ker} A = \text{Span}(e_1 + 2e_2)$$

gilt. (dabei sind e_1, e_2 sind die Vektoren der Standardbasis des \mathbb{R}^2 .)

Aufgabe 49 a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Zeigen Sie weiter, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

b) Es sei

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von v_1 und v_2 bezüglich der Basis \mathcal{B} .

Aufgabe 50 Es seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei Unterräume. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- a) $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum.
- b) Für $x_1 \in U_1 \setminus U_2$ und $x_2 \in U_2 \setminus U_1$ ist $x_1 + x_2 \notin U_1 \cup U_2$.

Aufgabe 51 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel das Folgende:

- a) falls $m < n$, dann ist das LGS $Ax = b$ für kein $b \in \mathbb{R}^m$ eindeutig lösbar
- b) falls $m > n$, dann gibt es ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\text{Lsg}(A, b) = \emptyset$.

Aufgabe 52 Es sei

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von v_1 und v_2 bezüglich der Basis \mathcal{B} .

Aufgabe 53 Es sei

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von v_1 und v_2 bezüglich der Basis \mathcal{B} .

Aufgabe 54 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear und für zwei Basen $(v_1, v_2), (v_3, v_4)$ des \mathbb{R}^2 gelte

$$f(v_1) = v_3, \quad f(v_2) = v_4.$$

Zeigen Sie, dass f dann injektiv sein muss.

Aufgabe 55 Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und $(v_1, v_2, \dots, v_n), (w_1, w_2, \dots, w_n)$ zwei Basen des \mathbb{R}^n so, dass

$$f(v_j) = w_j, \quad j = 1, \dots, n$$

gilt. Zeigen Sie, dass f dann bijektiv sein muss.

Aufgabe 56 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass $\text{Ker} A$ und $\text{Im} A$ Unterräume sind. (Vgl. Satz 4.28(3))

5 Gauss-Verfahren

Aufgabe 57 Bestimmen Sie die inversen Matrizen der Elementarmatrizen $E_{Z1}(j, k)$, $E_{Z2}(\lambda, j, k)$ und $E_{Z3}(\lambda, j)$, ($\lambda \neq 0$). Überlegen Sie sich dazu welche elementaren Zeilenumformungen Sie durchführen müssen um aus den jeweiligen Matrizen die Einheitsmatrix E zu erzeugen.

Aufgabe 58 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $v \in \text{Lsg}(A, b)$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\text{Lsg}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = v + u \text{ wobei } u \in \text{Ker} A\}.$$

Aufgabe 59 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie BA für $B = E_{Z1}(2, 4)$, $B = E_{Z2}(-2, 2, 3)$ und $B = E_{Z3}(0.5, 2)$, ($B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$). Schreiben Sie dabei jeweils die Elementarmatrizen einmal vollständig aus.

Aufgabe 60 Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\text{Lsg}(A, b)$.

Aufgabe 61 Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens eine Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 62 Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -2 \\ -1 & -5 & -1 & -5 \\ 2 & 5 & 0 & -14 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Lösung des LGS $Ax = b$ mit Gauß-Verfahren.

Aufgabe 63 Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

Aufgabe 64 Bestimmen Sie die inverse Matrix der folgenden Matrix mit dem Gauß-Jordan-Verfahren:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 65 Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

Aufgabe 66 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen sie Ihre Antwort (mithilfe geeigneter Resultate des Skripts), oder widerlegen Sie die Aussage durch ein Gegenbeispiel.

- a) Wenn A invertierbar ist, dann gilt $\text{Ker } A = \{0\}$.
- b) Wenn A eine Zeile besitzt, in der alle Einträge gleich 1 sind, dann ist A nicht invertierbar.

- c) Wenn A eine Spalte besitzt, in der alle Einträge gleich 0 sind, dann ist A nicht invertierbar.

Aufgabe 67 Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Für welchen Wert für α ist $Lsg(A, b) = \emptyset$? Wie groß ist in diesem Fall $\dim(\text{Ker } A)$?

Aufgabe 68 a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

- b) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ beide invertierbar, sowie $B_1, B_2, B_3, F \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Lösen Sie folgende Gleichung nach B_2 :

$$A^3(B_1 + B_2 + B_3)C^{10} = F.$$

- c) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Summe zweier invertierbarer Matrizen nicht invertierbar sein muss.

Aufgabe 69 Es seien $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei A_1 und $\sum_{k=1}^m B_k$ invertierbar seien, und $x_1, \dots, x_m, y \in \mathbb{R}^n$

- a) Lösen Sie die folgende Gleichung nach A_2 auf:

$$\sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m B_k A_j \right) = E$$

- a) Formen Sie die folgende Gleichung so um, dass der Ausdruck $\langle x_1, y \rangle$ alleine steht:

$$\left\langle \sum_{j=1}^m A_j x_j, (A_1^{-1})^T y \right\rangle = 7$$

Aufgabe 70 a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Zeigen Sie

$$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2.$$

- b) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ beide invertierbar, sowie $B_1, B_2, B_3, F \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Lösen Sie folgende Gleichung nach B_2 :

$$A(B_1 + B_2 + B_3)C = F.$$

- c) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Summe zweier invertierbarer Matrizen nicht invertierbar sein muss.

Aufgabe 71 a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ in Zeilenstufenform so, dass für $b_1 = (1, 2, 1)^T \in \mathbb{R}^3$ und $b_2 = (1, 2, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ gilt $\text{Lsg}(A, b_1) = \emptyset$ und $\text{Lsg}(A, b_2) \neq \emptyset$.

- b) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ in Zeilenstufenform so, dass gilt: $\text{Lsg}(A, e_1) \neq \emptyset$ und $\text{Lsg}(A, e_2) \neq \emptyset$ und $\text{Lsg}(A, e_3) \neq \emptyset$.

- c) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{1 \times 5}$ so, dass gilt: $\text{Lsg}(A, 1) = \emptyset$

Aufgabe 72 Es seien $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei A_1 und $\sum_{k=1}^m B_k$ invertierbar seien, und $x_1, \dots, x_m, y \in \mathbb{R}^n$

- a) Lösen Sie die folgende Gleichung nach A_2 auf:

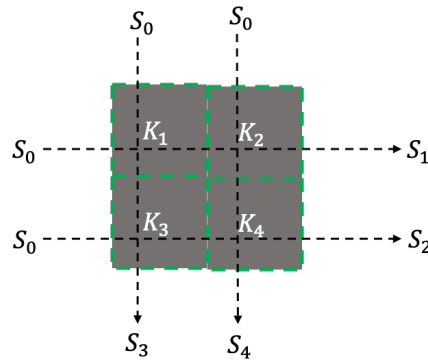
$$\sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m B_k A_j \right) = E$$

- a) Formen Sie die folgende Gleichung so um, dass der Ausdruck $\langle x_1, y \rangle$ alleine steht:

$$\left\langle \sum_{j=1}^m A_j x_j, (A_1^{-1})^T y \right\rangle = 7$$

Aufgabe 73 Die untere Abbildung stelle den Aufbau eines Experiments dar, in dem Strahlen mit Intensität $S_0 > 0$ (z.B. Röntgen, Ultraschall oder RADAR -Strahlen) durch ein Objekt, bestehend aus quadratischen Gebieten K_1, K_2, K_3, K_4 , gestrahlt werden. An den gegenüberliegenden Enden werden die durch das Material des Objekts gedämpften Strahlen S_1, S_2, S_3, S_4 gemessen. Allgemein sei dabei die Dämpfung eines Strahls der Intensität S , der durch einen Körper der Breite (oder Höhe) eines der quadratischen Gebiete K_j mit Absorptionskoeffizient $D > 0$ gestrahlt wird, beschrieben durch

$$S_d = S e^{-D},$$



wobei S_d die Intensität des gedämpften Strahls ist.

Seien nun D_j , $j = 1, \dots, 4$, die unbekannten Absorptionskoeffizient der Gebiete K_j , $j = 1, \dots, 4$. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der D_j , $j = 1, \dots, 4$ auf.

6 Zerlegung von Unterräumen, Orthogonalität

Aufgabe 74 Es sei $v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\langle v, x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

genau dann gilt, wenn $v = 0$.

Aufgabe 75 a) Finden Sie zwei Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^3$ so, dass $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.

b) Finden Sie zwei Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^4$ so, dass $\dim(U) = \dim(V) = 2$, $U \neq V$ und $U + V \neq \mathbb{R}^4$.

c) Es seien $v = (1, 1, 0)^T$, $u = (1, 1, 1)^T$ und $U = \text{Span}(u, v)$. Bestimmen Sie U^\perp

Aufgabe 76 Es seien $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_n)$ Basen des \mathbb{R}^n und $B, H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Matrizen mit Spaltenvektoren b_1, \dots, b_n bzw. h_1, \dots, h_n , (diese Matrizen sind invertierbar da Basis) und sei

$$v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$$

gegeben. Ermitteln Sie jeweils die Matrixoperationen (aus H und B), die das Folgende umsetzen:

- a) Berechnung der Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis (e_1, \dots, e_n) .
- b) Berechnung der Koordinaten bezüglich \mathcal{B} für einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ (gegeben in Koordinaten der Standardbasis)
- c) Berechnung der Koordinaten von v bezüglich der Basis \mathcal{H} .

Aufgabe 77 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel das Folgende:

- a) falls $m < n$, dann ist das LGS $Ax = b$ für kein $b \in \mathbb{R}^m$ eindeutig lösbar
- b) falls $m > n$, dann gibt es ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\text{Lsg}(A, b) = \emptyset$.

Aufgabe 78 Zeigen Sie die durch (*) und (**) markierten Aussagen im Beweis zu Satz 6.5

Aufgabe 79 Zeigen Sie die durch (***) und (****) markierten Aussagen im Beweis zu Satz 6.5

Aufgabe 80 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\dim(\text{Ker } A) = \dim(\text{Ker } A^T)$$

genau dann gilt, wenn $m = n$.

Aufgabe 81 a) Finden Sie zwei Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^5$, $U, V \neq \{0\}$, so, dass $U \oplus V = \mathbb{R}^5$.

b) Finden Sie zwei Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^4$ so, dass $\dim(U) = \dim(V) = 2$, $U \neq V$ und $U + V \neq \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 82 Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

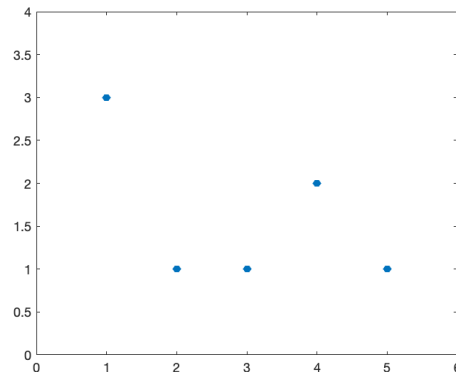
- a) Erstellen Sie aus der Basis (v_1, v_2, v_3) (des \mathbb{R}^3) mit Hilfe des Gram-Schmidt Algorithmus eine Orthonormalbasis (ONB). Beachten Sie dabei, dass v_1, v_2 bereits orthogonal sind.
- b) Berechnen Sie die Koordinaten von $(1, 1, 1)^T$ bezüglich der in Teil a) ermittelten ONB.

Aufgabe 83 Es seien $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (1, -1, 1)^T$ und $V = \text{Span}(v_1, v_2)$.

- a) Berechnen Sie v_3 so, dass v_3 orthogonal zu v_1 und v_2 ist.
- b) Zeigen Sie, dass dann $\langle v_3, w \rangle = 0$ für alle $w \in V$ gilt.
- c) Berechnen Sie zu $w = (1, 2, -1)^T$ Vektoren $v \in V$ und $u \in \text{Span}(v_3)$ so, dass $w = v + u$ gilt.

Aufgabe 84 Es sei $V = \text{Span}((1, 1, 1)^T, (-1, 1, 1)^T)$. Bestimmen Sie eine ONB von V , und berechnen Sie damit die Projektion $P_V(x)$ für $x = (1, 2, 0)^T$ und $x = (0, -1, 4)^T$.

Aufgabe 85 Es liege eine Messreihe von Werten $(x_1, y_1) = (1, 3)$, $(x_2, y_2) = (2, 1)$, $(x_3, y_3) = (3, 1)$, $(x_4, y_4) = (4, 2)$, $(x_5, y_5) = (5, 1)$ vor (vgl. Abbildung). Gesucht ist



eine Funktion $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (Polynom vom Grad 3) so, dass

$$\sum_{j=1}^5 (P(x_j) - y_j)^2$$

möglichst klein wird. Dieses Problem lässt sich als lineares kleinste Quadrate Problem formulieren: Mit $A \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$, $a = (a_3, a_2, a_1, a_0)^T$ und $b = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$, finde a so, dass Folgendes minimal wird

$$\|Aa - b\|^2.$$

Bestimmen Sie das zugehörige A und stellen Sie mithilfe von Satz 7.1 die Formel auf, die zur Berechnung der Lösung umgesetzt werden muss.

7 Determinante

Aufgabe 86 Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 23 & 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(A^2)$, $\det(B)$, $\det(B^2)$,

Aufgabe 87 Es seien

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 44 & 3 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie dazu die Formeln zur Berechnung von $\det(A - \lambda E)$ und $\det(B - \lambda E)$ für allgemeine $\lambda \in \mathbb{R}$ auf. Bestimmen Sie damit die λ so, dass obige Determinanten gleich 0 sind.

Aufgabe 88 Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Laplace'scher Entwicklungssatzes

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

8 Eigenwerte

Aufgabe 89 Bestimmen Sie die Eigenwerte folgender Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 44 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 90 Zeigen Sie, dass für die Elementarmatrizen $E_{Z2}, E_{Z3} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für alle $j, k \in 1, \dots, n$, wobei $j \neq k$, und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\det(E_{Z2}(\lambda, j, k)) = 1 \quad \det(E_{Z3}(\lambda, j)) = \lambda.$$

(Hinweis: Satz 8.5 (4) und (1))

Aufgabe 91 Es seien $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, und λ_1, λ_2 die Eigenwerte von B_1 mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ und α_1, α_2 die Eigenwerte von B_2 mit zugehörigen Eigenvektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$. Sei weiter

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & B_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Dann sind $\{\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2\}$ die Eigenwerte von A . Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 92 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ Eigenwerte von A sowie v_1, \dots, v_k zugehörige Eigenvektoren.

a) Zeigen Sie, dass für $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$, gilt

$$Av = \sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_j v_j.$$

b) Es sei $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$, wobei $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$. Geben Sie mit Hilfe von (a) eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Av = b$ an.

Aufgabe 93 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die beiden Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von A .

Aufgabe 94 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die beiden Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von A .

Aufgabe 95 Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die beiden Mengen $\{v \in \mathbb{R}^2 : v^T A v = 1\}$ und $\{v \in \mathbb{R}^2 : v^T B v = 1\}$. (Nehmen Sie dazu eine hinreichende Menge von Vektoren $w \in \mathbb{R}^2$ mit $\|w\| = 1$, und bestimmen Sie jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\lambda w^T A w \lambda = \lambda^2 w^T A w = 1$ bzw. $\lambda w^T B w \lambda = \lambda^2 w^T B w = 1$ gilt.)

Aufgabe 96 a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor v . Zeigen Sie, dass dann der Winkel zwischen v und Av entweder 0 oder π (im Bogenmaß) beträgt.

b) Folgern Sie mit (a), dass die Drehmatrix D_α , ($0 \leq \alpha < 2\pi$) aus Beispiel 2.7 genau dann einen (reellen) Eigenwert besitzt, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ gilt.

Aufgabe 97 Nachfolgend ist eine Lösung einer generative KI zu einer Aufgabenstellung diese Moduls aufgeführt. Diese Lösung beinhaltet mehrere mathematische Fehler oder Probleme in der Argumentation. Identifizieren Sie diese und korrigieren Sie die Lösung.

Eingabe/Prompt Bitte löse: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen sie Ihre Antwort (mithilfe geeigneter Resultate des Skripts), oder widerlegen Sie die Aussage durch ein Gegenbeispiel.

- a) Wenn A eine Zeile besitzt, in der alle Einträge gleich 1 sind, dann ist A nicht invertierbar.
- b) Wenn A eine Spalte besitzt, in der alle Einträge gleich 0 sind, dann ist A nicht invertierbar.

Ausgabe der KI

Die Aussage ist korrekt. Wenn A eine Zeile besitzt, in der alle Einträge gleich 1 sind, dann ist die Determinante von A gleich 0. Dies lässt sich leicht zeigen, da die Determinante eine multilineare Funktion der Zeilen (oder Spalten) einer Matrix ist und sich die Determinante nicht ändert, wenn man eine Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) addiert. Wenn also alle Einträge einer Zeile gleich 1 sind, kann man diese Zeile zu den anderen Zeilen addieren, ohne die Determinante zu verändern. Da die resultierende Matrix eine Zeile mit lauter Nullen hat, ist die Determinante gleich 0. Eine Matrix mit Determinante 0 ist nicht invertierbar, da eine invertierbare Matrix eine von Null verschiedene Determinante haben muss.

b) Die Aussage ist nicht korrekt. Es gibt Matrizen, die eine Spalte mit lauter Nullen haben und dennoch invertierbar sind. Ein Beispiel hierfür ist die Identitätsmatrix I_n , wobei n die Größe der Matrix ist. Die Identitätsmatrix hat in jeder Spalte genau einen Eintrag gleich 1 (auf der Hauptdiagonalen) und alle anderen Einträge gleich 0. Sie ist jedoch invertierbar, da sie sich selbst als Inverse hat. Daher widerlegt die Identitätsmatrix die Aussage und zeigt, dass eine Matrix mit einer Spalte voller Nullen dennoch invertierbar sein kann.

Aufgabe 98 Nachfolgend ist eine Lösung einer generative KI zu einer Aufgabenstellung diese Moduls aufgeführt. Diese Lösung beinhaltet mehrere mathematische Fehler oder Probleme in der Argumentation. Identifizieren Sie diese und korrigieren Sie die Lösung.

Eingabe/Prompt Bitte löse folgende Aufgabe: Es seien $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, und λ_1, λ_2 die Eigenwerte von B_1 mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ und α_1, α_2 die Eigenwerte von B_2 mit zugehörigen Eigenvektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$. Sei weiter

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Dann sind $\{\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2\}$ die Eigenwerte von A . Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

Ausgabe der KI

Um die zugehörigen Eigenvektoren von A zu bestimmen betrachten wir die Struktur der Matrix A . Da B_1 und B_2 bereits Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren haben, können wir die Eigenvektoren von A durch die Kombination der Eigenvektoren von B_1 und B_2 konstruieren. Die Eigenvektoren von A können wie folgt angeordnet werden:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Hier haben wir die ersten beiden Komponenten mit den Eigenvektoren von B_1 und die letzten beiden Komponenten mit den Eigenvektoren von B_2 aufgefüllt.