Bijektive Funktionen und Umkehrfunktionen

[Grundlagen]

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 Armin P. Barth

2 Armin P. Barth

Fragestellung

Wer Ferien in den USA bucht, ist vielleicht daran interessiert, eine Funktion zu haben, die einer Temperatur in Fahrenheit die entsprechende Temperatur in Grad Celsius zuordnet:

$$f : x \mapsto \frac{5}{9} \cdot (x - 32).$$

Herrscht zum Beispiel die Temperatur 41°F, so wertet man die Funktion an der Stelle $x = 41$ aus und findet die entsprechende Celsiuszahl

$$f(41) = \frac{5}{9} \cdot (41 - 32) = 5.$$

Dank dieser Funktion ist es also ein leichtes, zu jeder beliebigen Fahrenheitzahl die entsprechende Celsiuszahl zu bestimmen. Nun kann es aber auch passieren, dass wir irgendwo eine Temperatur in Grad Celsius lesen und uns fragen, wie viele Fahrenheit das sind. Gibt es irgendeine Möglichkeit, die obige Funktion so „umzukehren", dass sie zu jeder beliebigen Celsiuszahl die Berechnung der entsprechenden Fahrenheitzahl ermöglicht?

Allgemein ausgedrückt widmen wir uns in diesem Skript der folgenden wichtigen Frage: Liegt eine Funktion f vor, die jedem x-Wert des Definitionsbereichs den entsprechenden y-Wert zuordnet, lässt sich die Funktion dann so „umkehren", dass sie zu einem beliebig vorgegebenen y-Wert der Bildmenge das Urbild rekonstruiert? Geht das immer? Und falls nein: Woran liegt das? Und wenn es geht, wie genau findet man dann diese „Umkehrfunktion"?

Definition

Prägen wir uns zuerst die folgende Definition ein:

Definition:
Falls zu einer Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ eine Funktion $g : \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ existiert, so dass

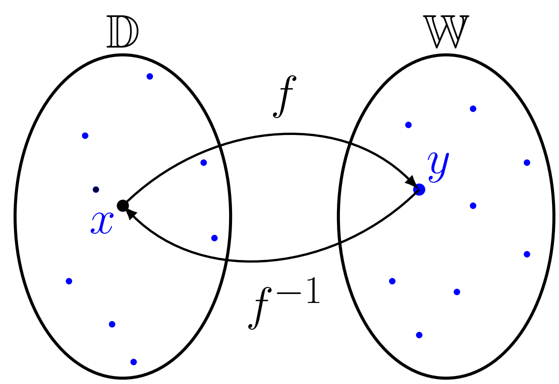
$$g\left(f(x)\right) = x$$

gilt für alle $x \in \mathbb{D}$ und

$$f\left(g(y)\right) = y$$

*für alle $y \in \mathbb{W}$, so nennt man g die **Umkehrfunktion** oder die **Inverse** der Funktion f.*

Und man bezeichnet die Umkehrfunktion mit dem Symbol f^{-1}.



Die Abbildung macht deutlich, welches Ziel wir verfolgen: Es liegt eine Funktion f vor. Wir wählen ein beliebiges Element x des Definitionsbereichs aus und registrieren das Bild y dieses Elementes bei Anwendung der Funktion. Falls nun die Umkehrfunktion f^{-1} existiert, so muss diese dem Element y dessen eindeutiges Urbild x zuordnen, so dass eine Art Kreislauf entsteht, der sich so formalisieren lässt:

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

beziehungsweise

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

Unser Ziel ist es, zu entscheiden, unter welcher Voraussetzung diese Umkehrung möglich ist und wie sie im konkreten Fall hergestellt werden kann.

Eine kleine Gefahr

Achtung: Die Notation f^{-1} könnte leicht zu Missverständnissen führen. Es handelt sich natürlich nicht um eine Potenzschreibweise! Für eine reelle (und von 0 verschiedene) Zahl x ist ja x^{-1} als $1/x$ erklärt. Würde man die Notation der Umkehrfunktion so verstehen, so entstünde der Term $1/f$, der aber gänzlich sinnlos ist, da man nicht die Zahl 1 durch eine Funktion dividieren kann. Wir verstehen f^{-1} also als einen geschlossenen Ausdruck, der einfach nur die Inverse von f bezeichnet.

Man kann sich fragen, weshalb überhaupt eine so gefährliche Schreibweise eingeführt wurde. Dafür gibt es einen guten Grund: Während die Potenzschreibweise die Tatsache ausdrückt, dass

$$x^{-1} \cdot x = 1 \qquad (\star)$$

ist, drückt f^{-1} die Tatsache aus, dass

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id} \qquad (\star\star)$$

ist. Das muss sofort erklärt werden: Die Bezeichnung $f^{-1} \circ f$ meint, dass erst die Funktion f und *danach* die Funktion f^{-1} ausgewertet wird; es ist also

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)).$$

Mit „id“ wird die *Identitätsfunktion* bezeichnet; es ist also $\mathrm{id}(x) = x$. Die Aussage, wonach $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ ist, bedeutet also nichts anderes als dass $f^{-1}(f(x)) = x$ ist - die charakteristische Eigenschaft der Umkehrfunktion.

Die Parallele zwischen $(\star)$ und $(\star\star)$ ist nun überdeutlich. Während es sich bei $(\star)$ aber um eine Multiplikation reeller Zahlen handelt, für die die Potenzgesetze gelten, handelt es sich bei $(\star\star)$ um die Verknüpfung von Funktionen, also um eine ganz andere Operation.

Starke Vermutung

Wie lautet nun die Antwort auf die Grundfrage dieser Sequenz? Zweifellos besitzt nicht jede Funktion eine Umkehrfunktion; das immerhin ist völlig klar. Überdeutlich wird das etwa im Fall der Funktion $f : x \mapsto \pi$; jeder mögliche Funktionswert ist ja π es ist also unmöglich, zu einem gegebenen Funktionswert (der in jedem Fall π heissen wird) eindeutig das Urbild zu rekonstruieren, aus dem er entstanden ist. Ein etwas weniger plumpes Beispiel ist $f : x \mapsto x^2$. Geben wir etwa den y-Wert 9 vor, so können wir nicht eindeutig entscheiden, von welchem Urbild diese Zahl stammt. Ist es 3 oder vielleicht eher -3? Die Tatsache, dass sich kein eindeutiges Urbild angeben lässt, zeigt, dass diese Funktion (als Ganzes) keine Inverse besitzt.

Dagegen haben wir bei der eingangs erläuterten Funktion Glück. Wenn durch

$$y = \frac{5}{9} \cdot (x - 32)$$

jeder beliebigen Fahrenheitzahl x die zugehörige Celsiuszahl y zugeordnet wird, kann man natürlich leicht eine Formel generieren, die das Umgekehrte leistet. Dazu brauchen wir ja eigentlich nur nach x aufzulösen:

$$x = \frac{9}{5}y + 32.$$

Mit dieser Formel lässt sich offenbar zu jeder gegebenen Celsiuszahl y die Fahrenheitzahl x rekonstruieren.

Woran liegt es, dass einige Funktionen umkehrbar sind, während andere es nicht sind?

Nun, offenbar darf es bei einer Funktion, die umkehrbar sein soll, keinesfalls zwei verschiedene x-Werte geben, die demselben Funktionswert zugewiesen werden. Denn dann wären wir ja nicht in der Lage, dem Funktionswert eindeutig ein Urbild zuzuordnen.

Um noch präziser über diese Sachverhalte reden zu können, sollten wir hier ein paar Fachbegriffe einführen.

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Erfüllt eine Funktion f die Eigenschaft, dass zwei verschiedene x-Werte auch immer verschiedenen Funktionswerten zugeordnet werden, so nennt man sie *injektiv*. Formal lässt sich das so ausdrücken:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Sind zwei Inputs verschieden, so impliziert das die Verschiedenheit ihrer Bilder.

Damit f eine Umkehrfunktion besitzt, muss allerdings eine weitere Eigenschaft erfüllt sein, die etwas weniger offensichtlich ist. Halten wir uns dazu vor Augen, dass f^{-1} den Definitionsbereich $\mathbb{W}$ haben muss (wenn f eine Funktion von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{W}$ ist). Damit f^{-1} also für jedes Element seines Definitionsbereichs $\mathbb{W}$ auswertbar ist, muss jedes Element von $\mathbb{W}$ ein Funktionswert von f sein. Die Wertemenge von f muss also exakt die Bildmenge dieser Funktion sein. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst *surjektiv*.

Verdeutlichen wir das gleich anhand eines Beispiels: An einer Theatergarderobe wird (via Funktion f) jedem abgegebenen Mantel eine Nummer zugeordnet. Damit am Ende der Aufführung die Umkehrfunktion einwandfrei funktioniert, müssen zwei Dinge sichergestellt sein:

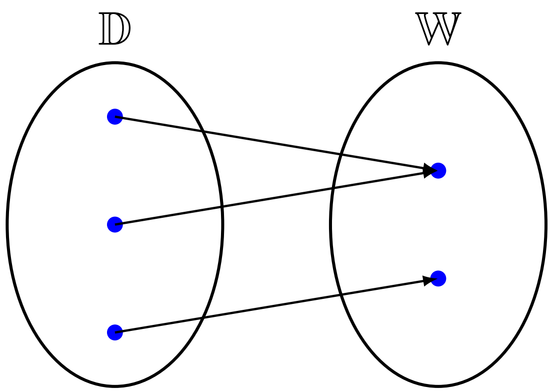
> Zwei verschiedenen Mänteln darf nie dieselbe Nummer zugeordnet werden (Injektivität). Denn sonst würde das Vorzeigen der Nummer nicht eindeutig zum richtigen Mantel führen.
>
> Zu jeder Nummer, die vorgezeigt werden kann, muss auch ein Mantel existieren (Surjektivität).

Abbildung 1: Garderobe

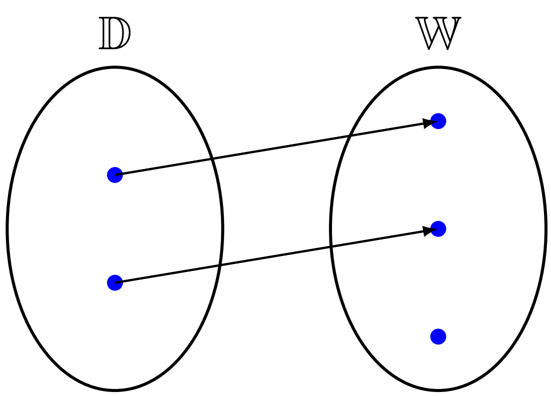
Die zweite Eigenschaft ist freilich automatisch erfüllt, es sei denn, an der Garderobe passiere ein Fehler. Und das zeigt auch, dass die Surjektivität selten ein Problem ist. Notfalls schränkt man den Wertebereich der Funktion f einfach so ein, dass er genau aus allen Funktionswerten besteht.

Damit eine Funktion also eine Umkehrfunktion besitzt, muss sie also sowohl injektiv als auch surjektiv sein. Ist sie beides, so nennt man sie *bijektiv*.

Die folgenden Abbildungen verdeutlichen noch einmal die Bedeutung der eben besprochenen Eigenschaften:



Surjektiv, aber nicht injektiv.

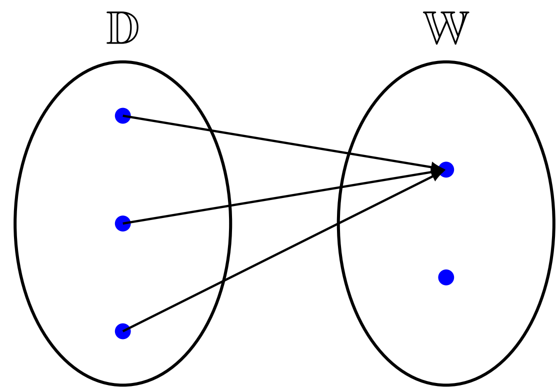


Injektiv, aber nicht surjektiv.

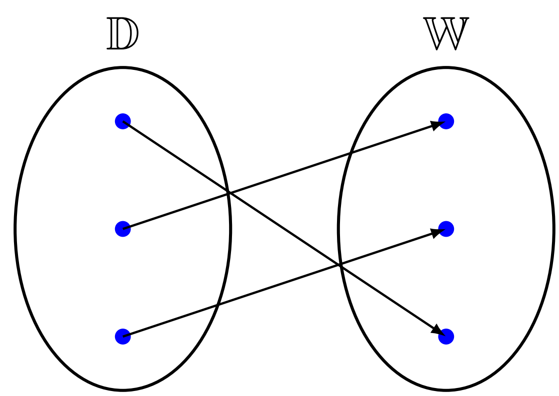
Und hier noch die formale Definition:

Definition:
*Eine Funktion f heisst **injektiv**, wenn für alle x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich gilt, dass*

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$



Weder injektiv noch surjektiv.



Injektiv und surjektiv, also bijektiv

*Die Funktion heisst **surjektiv**, wenn zu jedem $y \in \mathbb{W}$ ein $x \in \mathbb{D}$ existiert, so dass $y = f(x)$, wenn $\mathbb{W}$ also gleich der Bildmenge ist.*

*Die Funktion heisst **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

Beweis der Vermutung

Damit sind wir nun nicht nur in der Lage, die wesentliche Erkenntnis sehr präzise auszudrücken, sondern auch, sie zu beweisen.

> **Satz:**
> *Die Funktion f besitzt eine Umkehrfunktion, genau dann wenn f bijektiv ist.*
>
> $$\exists f^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijektiv}$$

Beweis. Da es sich hierbei um eine Äquivalenz-Aussage handelt, müssen wir zwei Dinge beweisen: dass aus der Bijektivität die Existenz einer Umkehrfunktion folgt und dass aus der Existenz einer Umkehrfunktion die Bijektivität folgt.

„$\Leftarrow$“ Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ bijektiv, so gibt es zu jedem $y \in \mathbb{W}$ genau ein Urbild $x \in \mathbb{D}$. Wir können also eine Funktion $g : \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ einführen mit der Eigenschaft $g(y) = x$. Diese erfüllt alle Eigenschaften der Umkehrfunktion; es ist also $g = f^{-1}$.

„$\Rightarrow$“ Nehmen wir nun an, die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ existiert. Ist f dann zwingend bijektiv? Wählen wir dazu ein beliebiges $y \in \mathbb{W}$. Und es sei $x := f^{-1}(y)$. Wegen der Umkehrfunktions-Eigenschaft $f(f^{-1}(y)) = y$ ist dann also $y = f(x)$, das heisst, die Funktion ist sicher surjektiv.

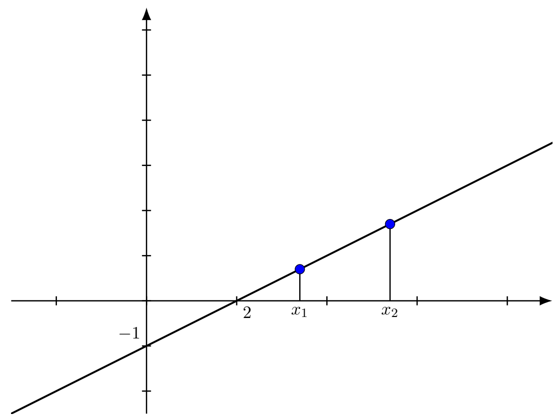
Ist sie auch injektiv? Dazu nehmen wir an, es sei $f(x_1) = f(x_2)$. Wegen der Umkehrfunktions-Eigenschaft ist dann $x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$. Da jedes Element von $\mathbb{W}$ somit nur ein Urbild hat, ist die Funktion auch injektiv.

Damit ist alles Nötige gezeigt. □

Beispiele

Wenn wir in Gedanken alle bisher behandelten Funktionen durchgehen, so finden wir sowohl bijektive, die also umkehrbar sind, als auch nicht-bijektive, die das nicht sind.

Lineare Funktionen $f : x \mapsto a \cdot x + b$ sind stets bijektiv, ausser die Steigung ist gleich 0. Betrachten wir etwa das Beispiel $f : x \mapsto 0.5x - 1$.



Zwei verschiedenen Inputs x_1, x_2 werden sicher verschiedene Funktionswerte zugeordnet (Injektivität), und jede reelle Zahl y kommt auch als Funktionswert vor (Surjektivität). Die Funktion ist also bijektiv und besitzt damit eine Umkehrfunktion f^{-1}, die jedem beliebigen y-Wert sein eindeutiges Urbild zuweist.

Die Betragsfunktion, die Signums-Funktion und die Heaviside-Funktion sind sicherlich nicht bijektiv. Es ist ja beispielsweise

$$|-3.7| = |3.7| \,.$$

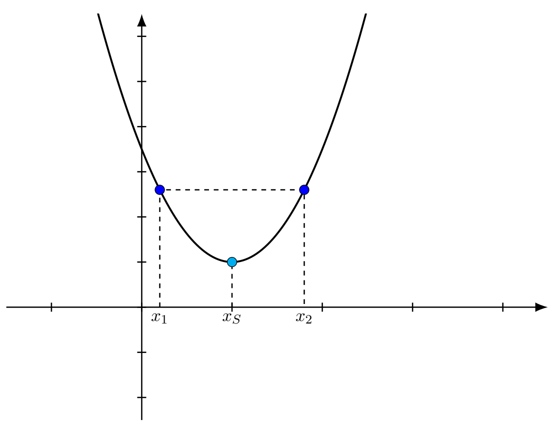
Die Betragsfunktion ist also nicht injektiv. Würde man sich fragen, von welchem eindeutigen Urbild der Funktionswert 3.7 herkommt, so könnte man darauf keine Antwort geben, und darum lässt sich die Funktion auch nicht umkehren.

Noch deutlicher wird das bei der Signums-Funktion, die jeder positiven reellen Zahl den Wert 1 zuweist. Es ist also gänzlich unmöglich, umgekehrt zu dem Wert $y = 1$ ein eindeutiges Urbild zu erzeugen. Und ähnlich verhält es sich mit der Heaviside-Funktion.

Auch quadratische Funktionen sind prinzipiell nie bijektiv. Bezeichnet x_S die x-Koordinate des Scheitelpunktes, so haben wir ja nachgewiesen, dass bei einer quadratischen Funktion f stets

$$f(x_S - \varepsilon) = f(x_S + \varepsilon)$$

gilt für ein beliebiges reelles ε. Die Injektivität ist also immer verletzt, und darum lässt sich eine quadratische Funktion (als Ganzes) nicht umkehren.



Dagegen sind Funktionen wie etwa $\sqrt{x}$, x^3 oder $1/x$ bijektiv, besitzen also je eine Umkehrfunktion.

Wie berechnet man die Inverse?

Ist einmal klar, dass eine bestimmte Funktion bijektiv ist, so können wir sicher sein, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt. Die Frage ist natürlich, wie man eine solche im konkreten Fall bestimmt!?

Nehmen wir einmal das Beispiel der linearen (und damit bijektiven) Funktion

$$f : y = \frac{2x-5}{4}.$$

Die Funktionsgleichung zeigt uns, nach welcher Formel der Input x einer Zahl y zugeordnet wird. Da die Umkehrfunktion gerade das Umgekehrte tut, also einem y-Wert dessen eindeutiges Urbild x zuweist, müssen wir uns fragen, nach welcher Formel ein vorgegebenes y in x umgewandelt wird. Mit anderen Worten: Wir müssen die Funktionsgleichung einfach nach x auflösen:

$$\begin{aligned} && y &= \frac{2x-5}{4} \\ \Leftrightarrow && 4y &= 2x-5 \\ \Leftrightarrow && x &= \frac{4y+5}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist klar, wie man zu einem vorliegenden y das eindeutige Urbild rekonstruiert. Die Umkehrfunktion lässt sich also so ausdrücken:

$$f^{-1} : x \mapsto \frac{4x+5}{2}.$$

Dass wir die Variable der Umkehrfunktion auch wieder x nennen (und nicht y), hat praktische Vorteile; zum Beispiel sind wir uns ja gewöhnt, den Graphen einer Funktion so einzuzeichnen, dass die Abszisse die x-Werte darstellt.

Merke:

Die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion bestimmt man oft dadurch, dass man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auflöst (und danach die Input-Variable der Umkehrfunktion wieder x nennt).

Eine nur oberflächlich betrachtet andere Methode besteht darin, eine Analyse der Operationen (Reihenfolge und Wirkung) vorzunehmen und dann diese Operationen in Reihenfolge und Wirkung umzukehren. Wie lässt sich das verstehen?

Versetzen wir uns, was sicher leicht fällt, in die Lage eines Menschen, der sich morgens ankleidet. Er zieht vielleicht ein Shirt über, darüber dann einen Pullover und zuletzt eine Jacke. Es gibt eine klare Reihenfolge, und es wäre eine ganz andere „Funktion“ und sicher alles andere als praktisch, würde er zuerst das Shirt und dann die Jacke und zum Schluss den Pullover anziehen. Am Abend vor dem Zubettgehen wendet dieser Mensch die „Umkehrfunktion“ an, die ihn „in den Originalzustand zurückversetzt“. Dazu muss er aber alle beim Ankleiden ausgeführten Operationen *sowohl in der Reihenfolge als auch in der Wirkung umkehren.* Das bedeutet, er muss zuerst die Jacke ausziehen und dann den Pullover und erst zum Schluss das Shirt. Eine falsche Reihenfolge würde hier zu erheblichen Verrenkungen führen.

Abbildung 2: Ankleiden/Ausziehen

Und genau so können wir auch vorgehen, wenn wir auf der Suche nach der Umkehrfunktion (dem Entkleiden) sind; wir müssen y so „entkleiden“, dass daraus wieder das originale x entsteht. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion

$$f : x \mapsto \sqrt{3x+1}.$$

Der Funktionswert ist der angekleidete Mensch. Und der Prozess des Ankleidens lief offenbar so ab:

> Zuerst wurde die Inputvariable mit 3 multipliziert. (Shirt überziehen.)
>
> Danach wurde 1 addiert. (Pullover überziehen.)
>
> Und zum Schluss wurde radiziert. (Jacke anziehen.)

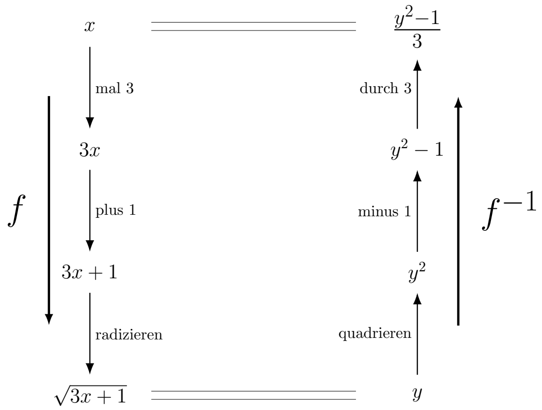
Jede andere Reihenfolge würde zu einem falschen Term führen. Nun, vor dem Zubettgehen, verläuft der Prozess umgekehrt ab; die Operationen werden sowohl in der Reihenfolge als auch in der Wirkung umgekehrt:

> Zuerst wird quadriert. (Jacke ausziehen.)
>
> Dann wird 1 subtrahiert. (Pullover ausziehen.)
>
> Und zum Schluss wird durch 3 dividiert. (Shirt ausziehen.)

Die Umkehrfunktion gehorcht also der folgenden Funktionsgleichung:

$$f^{-1} : x \mapsto \frac{x^2-1}{3}.$$

Die folgende Darstellung zeigt die Operationen besonders übersichtlich:



Merke:

Die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion bestimmt man oft dadurch, dass man die Operationen von f sowohl in der Reihenfolge als auch in der Wirkung umkehrt.

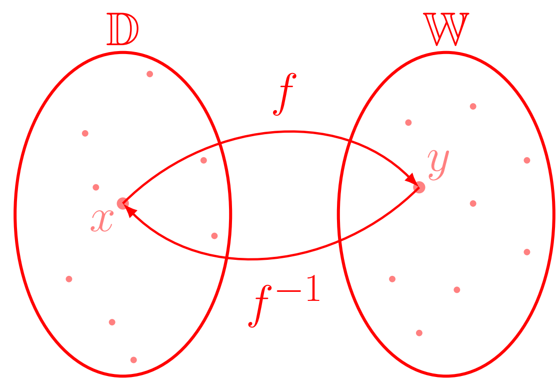
Definitions- und Wertebereich

Wir haben bei diesen beiden Beispielen die Betrachtung des Definitions- und Wertebereichs ganz ausser Acht gelassen. Wie wir aber gleich sehen werden, kann das ganz schön wichtig sein.

Zunächst: Wir haben festgehalten, dass die Funktion f von der Menge $\mathbb{D}$ in die Menge $\mathbb{W}$ „geht" und dass die Inverse f^{-1} von der Menge $\mathbb{W}$ in die Menge $\mathbb{D}$ abbildet. Die Bildmenge von f muss also mit der Urbildmenge von f^{-1} übereinstimmen, und die Urbildmenge von f muss mit der Bildmenge von f^{-1} übereinstimmen. Das ist deswegen so, weil der oben beschriebene Kreislauf sonst nicht reibungslos funktionieren würde. Es muss ja $f^{-1}(f(x))$ immer auswertbar sein und x ergeben, und es muss auch $f(f^{-1}(y))$ immer auswertbar sein und y ergeben.

Merke:

Damit $f^{-1}(f(x))$ immer auswertbar ist und x ergibt und damit auch $f(f^{-1}(y))$ immer auswertbar ist und y ergibt, muss die Bildmenge von f gleich der Urbildmenge von f^{-1} und die Urbildmenge von f gleich der Bildmenge von f^{-1} sein.



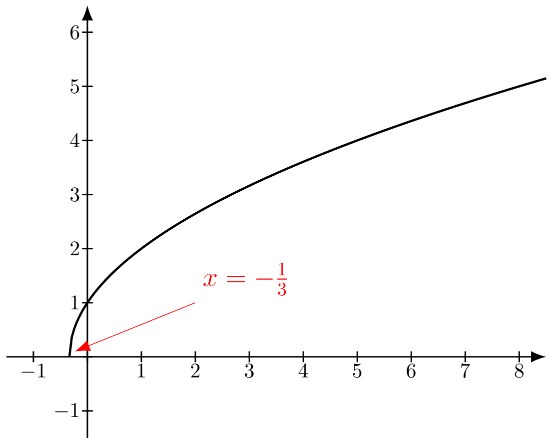
Wie sieht das bei den oben betrachteten Beispielen aus?

Nun, beim ersten Beispiel, der linearen Funktion, taucht nichts Bemerkenswertes auf: Funktion und Inverse gehen einfach beide von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Beim zweiten Beispiel wird es aber Interessanter. Die Funktion f ist ja bloss für x-Werte definiert, für die $3x + 1 \geqslant 0$ ist. Der Definitionsbereich ist also $\mathbb{D} = [-1/3, \infty[$. Und da jede positive reelle Zahl einschliesslich 0 als Funktionswert vorkommt, ist der Wertebereich gleich $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$. Es ist also

$$f : \left[-\frac{1}{3}, \infty\right[\to \mathbb{R}_0^+.$$

Der Graph von f vermag dies auch zu verdeutlichen:



Als Umkehrfunktion hatten wir gefunden:

$$f^{-1} : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{3}.$$

Würde man diese Funktion für sich alleine betrachten, so würde man als Definitionsbereich sicher die Menge aller reellen Zahlen vorschlagen; es gibt ja nicht den geringsten Grund, weshalb sich die Funktion für irgendwelche Zahlen nicht auswerten lässt.

Aber: Nach dem oben Gesagten muss die Urbildmenge von f^{-1} ja gleich der Bildmenge von f und die Bildmenge von f^{-1} gleich der Urbildmenge von f sein. Es ist also

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \left[-\frac{1}{3}, \infty\right[.$$

Wir dürfen der Umkehrfunktion also nur positive reelle Zahlen einschliesslich 0 füttern. Und wir können auch leicht nachvollziehen, weshalb andere Inputs misslingen: Würden wir etwa den Input -2.5 für f^{-1} versuchen, so müsste ja

$$f(f^{-1}(-2.5)) = -2.5$$

sein. Aber $f^{-1}(-2.5) = 1.75$ und $f(1.75) = +2.5$; der Kreislauf misslingt also.

Dieses Beispiel macht deutlich, dass sich eine genaue Analyse von Definitions- und Wertebereich gerade im Zusammenhang mit Umkehrfunktionen allemal lohnt.

Und was, wenn f nicht bijektiv ist?

Nun, dann kann man natürlich keine Umkehrfunktion bilden. Oder etwa doch? Betrachten wir einmal das folgende Beispiel:

$$f : x \mapsto x^2 - 4x + 5.$$

Als quadratische Funktion ist f sicher nicht bijektiv. Wenn wir den Funktionsterm quadratisch ergänzen, wird es noch deutlicher:

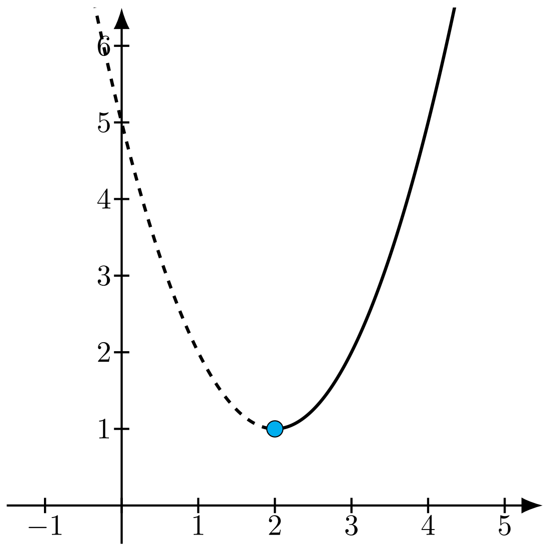
$$f : x \mapsto (x - 2)^2 + 1.$$

Der Scheitelpunkt hat offenbar die Koordinaten $(2, 1)$, und somit gilt für jedes beliebige ε, dass

$$f(2 - \varepsilon) = f(2 + \varepsilon).$$

Die Bijektivität ist tatsächlich nicht gewährleistet, und wir sollten uns von der Idee verabschieden, die Inverse finden zu können.

Aber: Die Parabel besteht natürlich aus zwei bijektiven Ästen. Lässt man nur x-Werte $\geqslant 2$ zu, so hat man durchaus eine bijektive Funktion vor sich, die sich umkehren lässt. Und lässt man nur x-Werte $\leqslant 2$ zu, so hat man wieder eine (andere!) bijektive Funktion vor sich, die sich auch invertieren lässt.



Merke:

Auch wenn eine Funktion nicht bijektiv ist, kann man sie häufig in bijektive Abschnitte unterteilen; für jede bijektive Teilfunktion lässt sich die Inverse dann finden.

Stellen wir uns zum Schluss die Frage, wie die beiden Umkehrfunktionen der beiden Äste unserer quadratischen Funktion konkret heissen: Dazu definieren wir die beiden Teilfunktionen

$$\begin{aligned} f_1 : [2, \infty[&\to [1, \infty[\\ x &\mapsto x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

(rechter Ast) und

$$\begin{aligned} f_2 :]-\infty, 2] &\to [1, \infty[\\ x &\mapsto x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

(linker Ast). Um die Inversen zu finden, lösen wir die Gleichung $y = (x-2)^2 + 1$ nach x auf:

$$\begin{aligned} & y = (x-2)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y - 1 = (x-2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \pm\sqrt{y-1} = x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \pm \sqrt{y-1} = x. \end{aligned}$$

Es gibt also - wie erwartet - zwei Inverse, je nachdem, welches Operationszeichen wir wählen. Aber welche gehört zu welcher Funktion? Nun, auch das sehen wir leicht anhand der Definitions- und Wertebereiche. Es ist natürlich

$$\begin{aligned} f_1^{-1} : [1, \infty[&\to [2, \infty[\\ x &\mapsto 2 + \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2^{-1} : [1, \infty[&\to]-\infty, 2] \\ x &\mapsto 2 - \sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

Laserstrahl-Kriterium für bijektive Funktionen

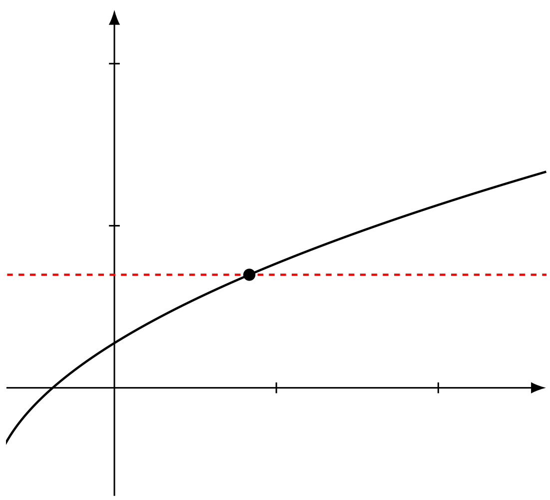
Was charakterisiert jede Funktion der Art $y = f(x)$? Und was charakterisiert nur die bijektiven Funktionen? Es ist wichtig, dass wir diese Fragen genau beantworten können. Funktionen, wie wir sie in dieser Sequenz behandeln, ordnen bekanntlich jedem Element x einer Inputmenge genau ein Element y einer Outputmenge zu. Ein Laserstrahl, der parallel zur y-Achse verläuft und den Graphen abfährt, wird also an jeder Position x genau einen Graphenpunkt treffen, falls die Position zum Definitionsbereich gehört, und sonst natürlich keinen. Es kann aber gut sein, dass mehreren x-Werten (oder gar allen) derselbe Funktionswert zugeordnet ist.

Eine bijektive Funktion ist auch eine Funktion, erfüllt also zunächst auch das eben in Erinnerung gerufene „Laserstrahl-Kriterium“. Darüber hinaus muss aber ein weiteres Kriterium erfüllt sein, das ausmacht, dass die Funktion bijektiv ist. Um welches Kriterium handelt es sich dabei?

Nun, ganz einfach: Da keine zwei x-Werte mit dem gleichen Funktionswert existieren oder da

- mit anderen Worten - jeder Wert der Bildmenge immer nur genau ein Urbild besitzt, darf auch ein Laserstrahl, der parallel zur x-Achse verläuft, an jeder Position y immer nur genau einen Graphenpunkt treffen - sofern y zur Bildmenge gehört. Zum schon bekannten Kriterium für beliebige Funktionen gesellt sich also ein weiteres für bijektive Funktionen.

Die folgenden Graphiken visualisieren diesen Sachverhalt:



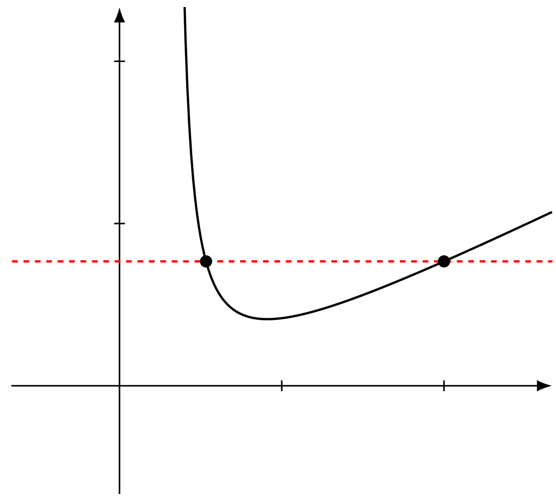
Eine bijektive Funktion.

Spieglein, Spieglein...

Betrachten wir abermals die Funktion

$$f : [-3, \infty[\to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt{x+3}.$$

Sie ist zweifellos bijektiv, da zwei verschiedene reelle Zahlen niemals dieselbe Quadratwurzel

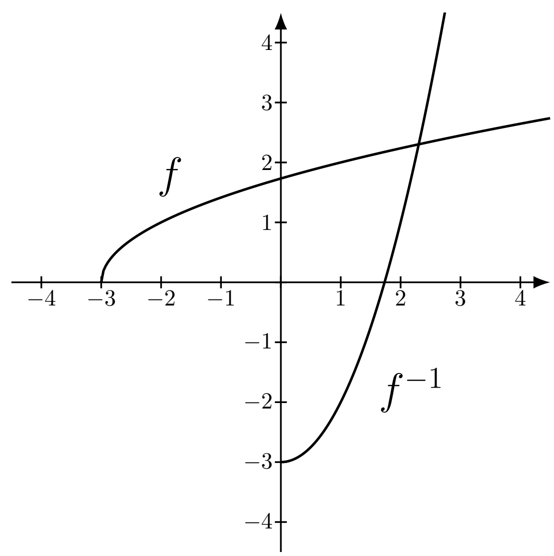


Eine nicht-bijektive Funktion.

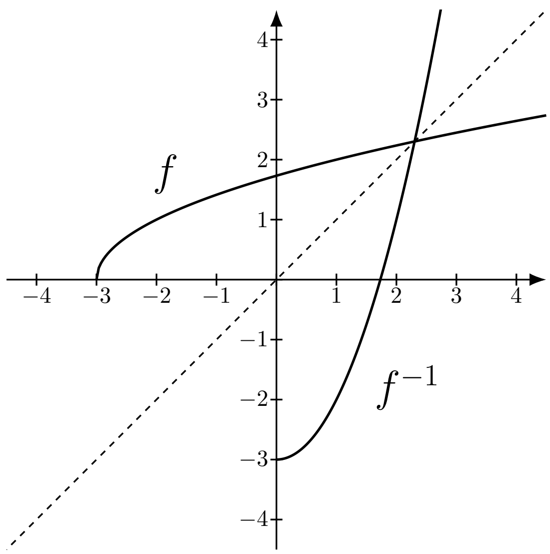
haben können. Die Umkehrfunktion ist

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to [-3, \infty[$$
$$x \mapsto x^2 - 3.$$

Zeichnen wir die Graphen beider Funktionen im gleichen Koordinatensystem, so bietet sich uns das folgende Bild dar:



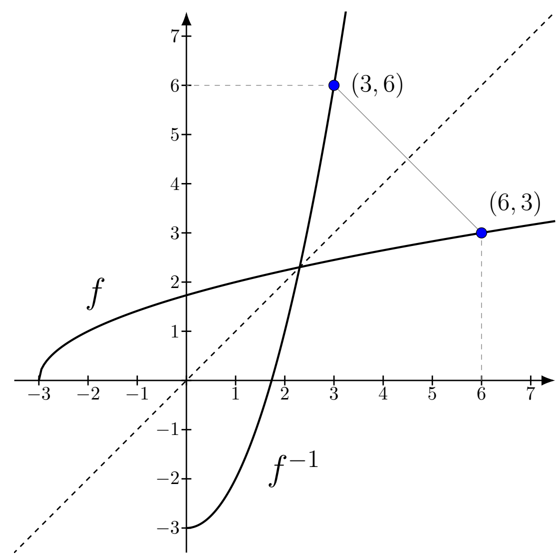
Es ist kaum möglich, die Symmetrie nicht zu bemerken. Die beiden Graphen scheinen spiegelbildlich zu sein bezüglich der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten. Das wird noch deutlicher, wenn wir diese Winkelhalbierende, also den Graphen der Funktion $x \mapsto x$ hinzuzeichnen:



Die Frage ist: Gilt das immer, wenn man die Graphen einer (bijektiven) Funktion und ihrer Umkehrfunktion einzeichnet? Und können wir die Notwendigkeit verstehen?

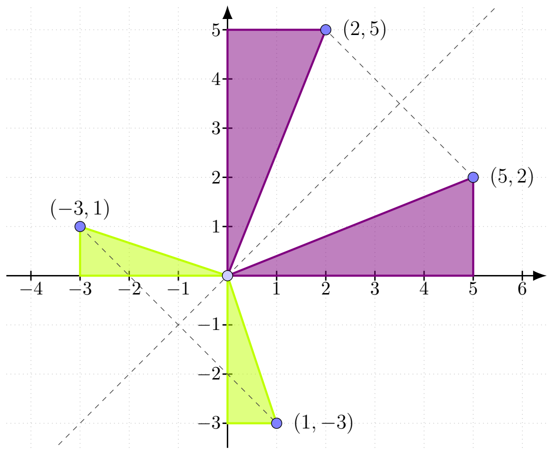
Ja, in der Tat, das stimmt immer, und natürlich hat es enorme Vorteile, wenn man um diesen Sachverhalt weiss. Denn dann kennen wir jedes Mal, wenn uns der Graph einer (bijektiven) Funktion vorliegt, automatisch auch den Graphen ihrer Umkehrfunktion und umgekehrt. Wir brauchen ja bloss zu spiegeln. Trotzdem: Wie lässt sich verstehen, dass das so sein muss?

Nun, eigentlich ist das sehr einfach; wir brauchen uns bloss zu besinnen, was eine Umkehrfunktion genau tut. Verweilen wir noch bei obigem Beispiel, und nehmen wir einmal an, uns liege der Input $x = 6$ vor. Die Funktion f ordnet diesem Input das Bild $y = 3$ zu; der Punkt $(6, 3)$ ist also ein Element des Graphen von f. Die Aufgabe der Umkehrfunktion ist es, die Wirkung der Funktion rückgängig zu machen; sie ordnet somit dem Input $x = 3$ wieder den Wert $y = 6$ zu. Der Punkt $(3, 6)$ ist folglich ein Element des Graphen von f^{-1}. Aber: Die Punkte $(6, 3)$ und $(3, 6)$ liegen spiegelbildlich bezüglich der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten!



Das lässt sich leicht verallgemeinern. Wenn eine (bijektive) Funktion dem Wert x den Wert y zuordnet, dann gehört der Punkt (x, y) zum Graphen dieser Funktion. Die Umkehrfunktion macht die Wirkung der Funktion rückgängig; sie ordnet also dem Wert y wieder den Wert x zu. Folglich gehört der Punkt (y, x) zum Graphen der Umkehrfunktion. Die beiden erwähnten Punkte liegen aber spiegelbildlich bezüglich der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten. Und somit erfüllen die ganzen Graphen diese Symmetrieeigenschaft.

Die folgende Abbildung zeigt diese Symmetrie anhand von zwei konkreten Beispielen:



Merke:

Die Graphen der Funktionen f und f^{-1} sind achsensymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.