Graphenanalyse und Optimierung

[Differentialrechnung]

Armin P. Barth

ETH zürich

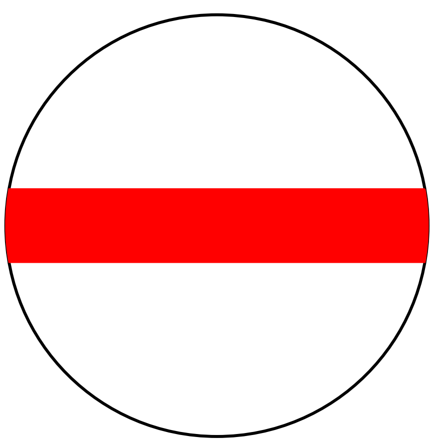
Bildquellenverzeichnis

3 Armin P. Barth

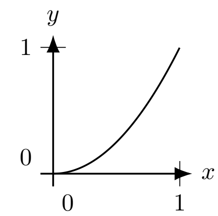
Kurvenformen

Ableitungen sind bei vielen Fragestellungen überaus nützlich. In diesem Text setzen wir sie gewissermassen als Diagnoseinstrument ein. Sie sind nämlich hervorragend dazu geeignet, die Form von Funktionsgraphen zu diagnostizieren. Formulieren wir das etwas genauer: Funktionsgraphen sind enorm wichtig in der Mathematik und all ihren „Abnehmerwissenschaften“. Obwohl es natürlich unendlich viele verschiedene Graphen gibt, können die einzelnen Abschnitte fast aller in der Praxis vorkommender Graphen mit Hilfe der folgenden Beschreibungen charakterisiert werden (siehe Graphiken (a)-(j):

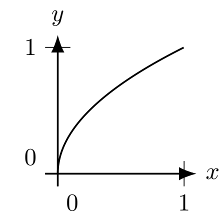
Alle hier verwendeten Begriffe sind weiter unten in *Anhang 1* aufgelistet und mit präzisen Definitionen versehen. An dieser Stelle soll es genügen, uns einen anschaulichen Vergleich vor Augen zu führen. Versetzen wir uns in die Lage eines Autofahrers. Sein Steuerrad sieht, wenn er geradeaus fährt (wie in (i)), so aus:



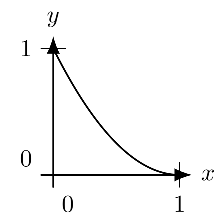
Der Querbalken des Rades ist also in horizontaler Position. Auf einer Strasse vom Typ (a), (c) oder (e), die von links nach rechts durchfahren wird, wäre das Rad dagegen nach links



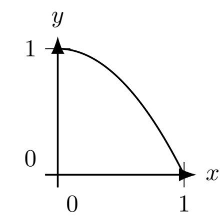
(a) Streng monoton wachsend und linksgekrümmt



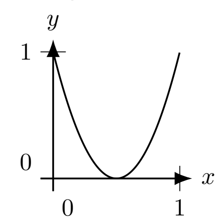
(b) Streng monoton wachsend und rechtsgekrümmt



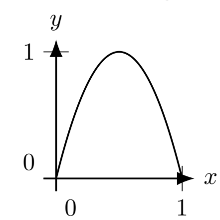
(c) Streng monoton fallend und linksgekrümmt



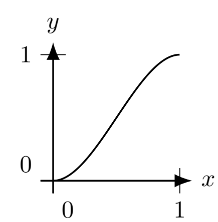
(d) Streng monoton fallend und rechtsgekrümmt



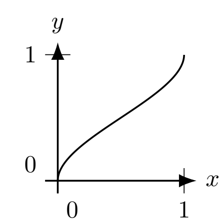
(e) (lokales) Minimum



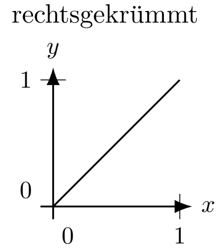
(f) (lokales) Maximum



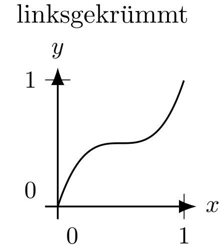
(g) Wendepunkt, erst links-, dann rechtsgekrümmt



(h) Wendepunkt, erst rechts-, dann linksgekrümmt

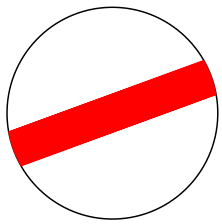


(i) linear



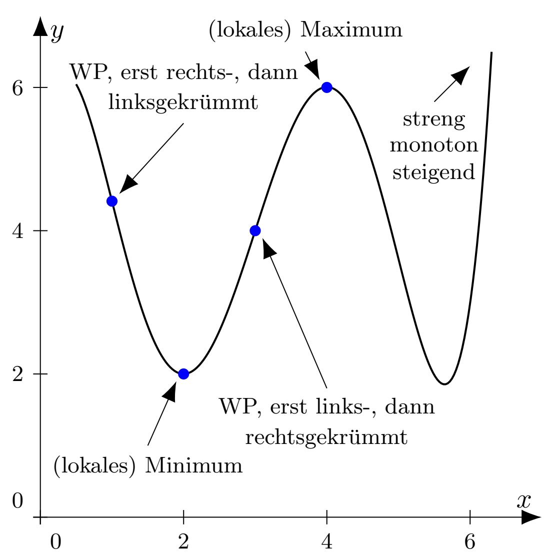
(j) Sattelpunkt

verdreht, und darum nennt man solche Kurvenabschnitte linksgekrümmt.

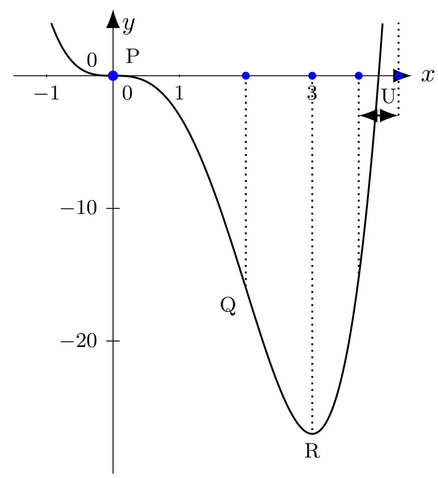


Umgekehrt wäre das Rad auf Strassen vom Typ (b), (d) oder (f) nach rechts verdreht, und darum nennt man solche Kurvenabschnitte rechtsgekrümmt. Bei Kurven vom Typ (g), (h) oder (j) müsste der Fahrer das Steuerrad von einer Linksauslenkung in eine Rechtsauslenkung drehen oder umgekehrt, und während dieser Drehbewegung gäbe es genau einen Punkt, an dem der Querbalken des Rades horizontal wäre, und dieser Punkt heisst Wendepunkt.

Betrachten wir als Beispiel einen Graphen, in dem man die meisten dieser Standardformen antrifft:



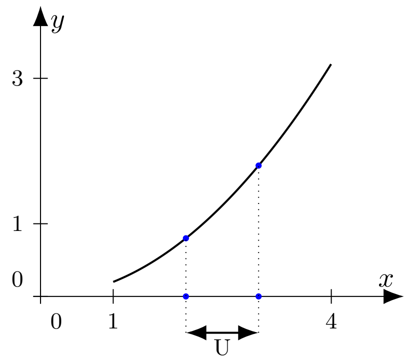
Die Frage ist nun, ob und gegebenenfalls wie die Ableitungen einer Funktion helfen, um zu diagnostizieren, in welcher Standardform wir uns gerade befinden, wenn wir einen beliebigen Punkt oder Ausschnitt des Graphen herausgreifen. Kann man also, wenn man zum Beispiel bei folgender Funktion das Teilintervall U herausgreift, allein mit Hilfe der Ableitungen (und mühelos) entscheiden, dass es sich hier um einen streng monoton wachsenden und linksgekrümmten Ausschnitt handelt? Oder kann man, wenn man etwa die x-Koordinate des Punktes P herausgreift, allein mit den Ableitungen (und mühelos) entscheiden, dass es sich bei dieser Stelle um einen Sattelpunkt handelt? Oder bei Q um einen Wendpunkt (erst rechts-, dann linksgekrümmt)? Oder bei R um ein (wahrscheinlich absolutes) Minimum?



Ja, das geht! Und es ist erfreulich einfach. Wir untersuchen im Folgenden drei dieser Standardformen eingehend und detailliert und überlassen die restlichen dann der Leserin oder dem Leser als sicherlich befriedigende (weil gut lösbare) Aufgabe.

Ableitungen helfen

(a) Streng monoton wachsend, linksgekrümmt

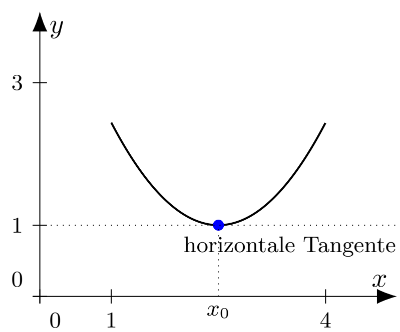


Voraussetzung dafür, dass der Graph in einem Teilintervall U streng monoton wachsend ist, ist natürlich $f'(x) > 0 \, \forall x \in U$. Dann hat die Tangente an den Graphen in jedem Punkt innerhalb dieses Intervalls eine Steigung > 0. Allein, das garantiert noch nicht die Linkskrümmung. Diese stellt sich aber ein, wenn f' über U auch streng monoton wachsend ist, das heisst also, wenn $f''(x) > 0$ über U. Also:

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) > 0 \\ f''(x) > 0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ streng mon. wachsend} \\ \text{und linksgekr.} \end{array}\right.$$

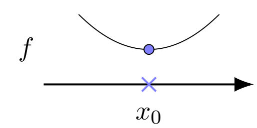
über U.

(b) (Lokales) Minimum

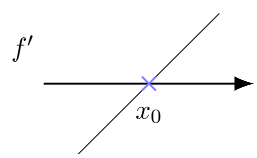


Eine notwendige Bedingung dafür, dass an der Stelle x_0 ein (lokales oder absolutes) Minimum vorliegt, ist natürlich $f'(x_0) = 0$. Die Tangente an den Graphen im Punkt $(x_0, f(x_0)$ muss ja horizontal sein, also Steigung 0 aufweisen. x_0 ist also eine Nullstelle der 1. Ableitung.

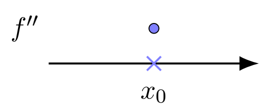
Weiter: Das hier gewünschte Kurvenverhalten (negative Steigung für $x < x_0$, Steigung 0 an der Stelle x_0 und positive Steigung für $x > x_0$) können wir sicher dadurch erzwingen, dass wir $f''(x_0) > 0$ verlangen, denn dann kreuzt der f'-Graph die x-Achse an der Stelle x_0 „von links unten nach rechts oben“. Bei f bedeutet dies, dass sich ein Gefälle für $x < x_0$ und ein positives Wachstum für $x > x_0$ einstellt. Zusammen mit der Forderung $f'(x_0)$ erzwingt das das Vorhandensein eines Minimums.



Dieses Verhalten von f' erzwingt das Minimum bei f



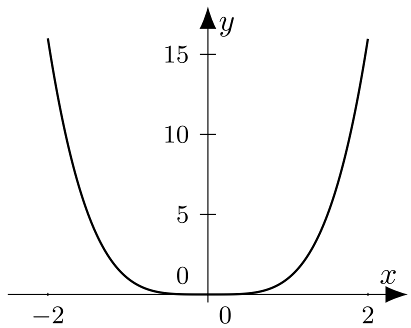
$f''(x_0) > 0$ erzwingt dieses Verhalten bei f'



Also:

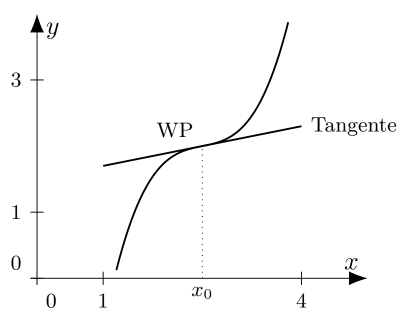
$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ hat an der Stelle } x_0 \\ \text{ein (lokales) Minimum.} \end{array}\right.$$

Aber wir müssen vorsichtig sein; diese Implikation kann nämlich nicht zu einer Äquivalenz ausgebaut werden. Dass f an einer bestimmten Stelle x_0 ein (lokales) Minimum hat, erzwingt nicht die Bedingungen auf der linken Seite der Implikation. Das lässt sich leicht an Hand eines Gegenbeispiels zeigen, bei dem ein Minimum an einer Stelle x_0 auftritt, obwohl $f''(x) \not> 0$ ist. Betrachten wir dazu die Funktion $f : x \mapsto x^4$.

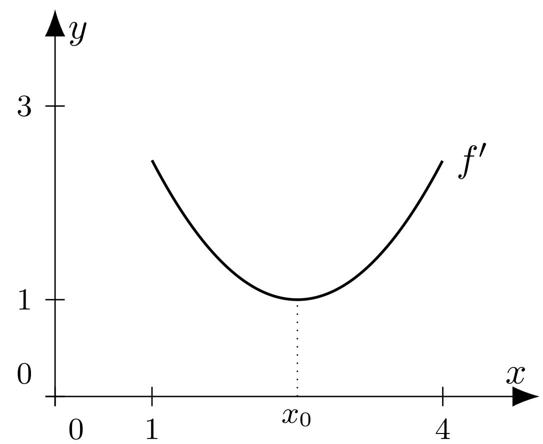


Sie hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein Minimum, sogar ein absolutes. Ihre Ableitungen lauten: $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$. Folglich ist $f''(0) = 0$, was deutlich macht, dass wir den Satz oben nur als Implikation benutzen dürfen.

(c) Wendepunkt, erst rechts-, dann linksgekrümmt



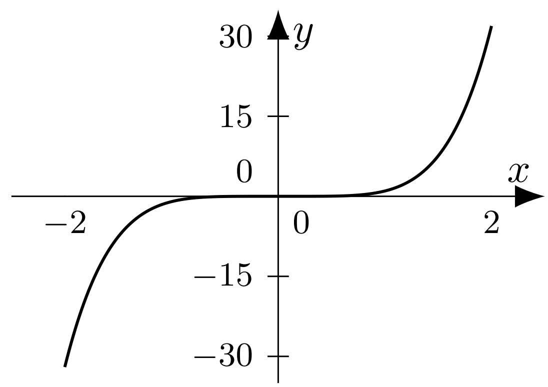
Damit f an einer Stelle x_0 einen Wendepunkt (erst rechts-, dann linksgekrümmt) aufweist, muss f' an dieser Stelle ein (lokales) Minimum aufweisen. Warum? Wenn wir im Geiste die Tangente an obige Kurve legen und der Kurve von links nach rechts entlang fahren, so sehen wir leicht, dass, wenn wir uns von links der Stelle x_0 nähern, die Steigungswerte sinken. Die Definition von „rechtsgekrümmt" besagt ja gerade dies, dass f' im betrachteten Intervall streng monoton fallend ist. Die Steigungswerte sinken ab bis zu dem tiefsten Steigungswert, der zu der skizzierten Tangente an die Kurve im Wendepunkt gehört. Danach steigen sie wieder an. In dem nun folgenden linksgekrümmten Graphenausschnitt muss ja auch nach Definition f' streng monoton wachsen. Insgesamt sieht f' lokal also so aus:



Wir tun nun einfach so, als wäre dies unsere Ausgangsfunktion, denn in b) haben wir ja schon ein hinreichendes Kriterium für ein (lokales) Minimum erarbeitet. Es muss die erste Ableitung dieser Funktion (also f'') an der Stelle x_0 verschwinden, und es muss die zweite Ableitung dieser Funktion (also f''') an der Stelle x_0 positiv sein. Somit ergibt sich:

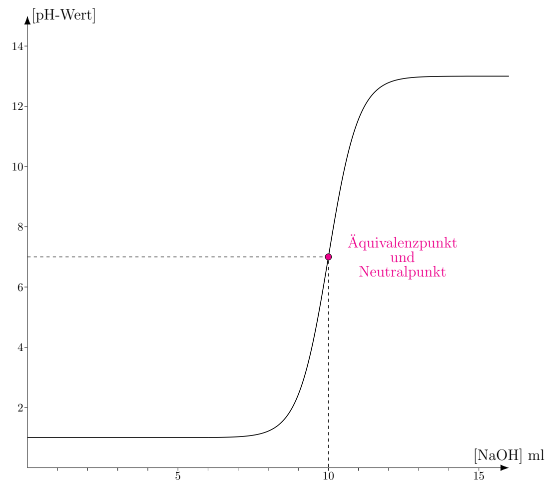
$$\left.\begin{array}{r} f''(x) = 0 \\ f'''(x) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{WP bei } x_0\text{, erst rechts-,} \\ \text{dann linksgekrümmt.} \end{array}\right.$$

Wiederum: Diese Implikation kann nicht zu einer Äquivalenz ausgebaut werden. Ein Wendepunkt dieses Typs erzwingt nicht die Bedingungen links vom Implikationspfeil. Betrachten wir ein Gegenbeispiel: $f : x \mapsto x^5$



Der Graph hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt (sogar einen Sattelpunkt), ist vorher rechts- und nachher linksgekrümmt. Die Ableitungen sind $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$ und $f'''(x) = 60x^2$. Folglich ist $f'''(x_0) = 0$, obwohl ein Wendepunkt vorliegt, was deutlich macht, dass wir den eingerahmten Satz wirklich nur als Implikation benutzen dürfen.

Als naturwissenschaftliches Beispiel, das die Wichtigkeit von Wendepunkten belegt, möge das chemische Verfahren der *Titration* dienen. Es handelt sich dabei - einfach ausgedrückt - um ein Verfahren zur Bestimmung der (unbekannten) Konzentration einer bestimmten Lösung durch tröpfchenweises Zugeben einer Lösung bekannter Konzentration. Liegt zum Beispiel eine salzsäurehaltige Lösung unbekannter Konzentration vor, so werden so lange winzige Volumina einer basischen Masslösung (etwa NaOH) hineingetropft, bis ein deutlicher pH-Sprung sich einstellt. Die Titrationskurve hat dann etwa die folgende Gestalt:



Bei einer sehr starken Säure ist der sogenannte Äquivalenzpunkt bei einem pH-Wert von 7. Mathematisch gesprochen handelt es sich dabei um den Wendepunkt des Graphen. Da die Funktion aber nicht konkret vorliegt, muss eine Menge von Messdaten gesammelt und dann eine Kurve hineingepasst werden, von der nachher die zweite Ableitung bestimmt und gleich 0 gesetzt werden kann. Als Funktionstyp eignet sich etwa eine Funktion der Art

$$y = \frac{a}{1 + \mathrm{e}^{-x+b}} + c.$$

Zwei Ergänzungen dürfen hier nicht fehlen: Erstens: Man kann die unter b) und c) vorgestellten Implikationen zu Äquivalenzen ausbauen, muss aber (natürlich) die Bedingungen auf der linken Seite passend verschärfen. Darauf verzichten wir im Rahmen dieses Textes. Zweitens: Je nachdem, auf welchem Niveau die hier vorgestellten Sätze behandelt werden, verlaufen die Argumente anders. Wir haben hier sehr anschaulich und geometrisch argumentiert. Es gibt aber natürlich auch Beweise, die diesen Titel viel eher verdienen; allerdings sind sie zwangsläufig formaler und benutzen mehr Vorwissen, das wir hier noch nicht erarbeitet haben. Für die Zwecke dieser Arbeit reicht es sicherlich aus, so einfach wie möglich zu bleiben und den Formalismus nicht unnötig aufzublähen.

Die Erarbeitung der restlichen Kriterien überlassen wir nun dem Leser, der Leserin; wir stellen sie aber weiter unten im *Anhang 2* übersichtlich zusammen.

Wie werden wir diese Sätze typischerweise anwenden? Hier sollen zwei Anwendungen erläutert werden: die Graphenanalyse - Oft sagt man auch „Kurvendiskussion" - und die Extremwertaufgaben.

Graphenanalysen

Wie sieht der Graph der Funktion $f(x) = x^4 - 4x^3$ aus? Nun ja, wir könnten einen Taschenrechner oder eine geeignete Computersoftware befragen. Aber das ist wenig befriedigend und liefert meist auch nicht all die Informationen, die wir dank unseren neuen Erkenntnissen leicht und sicher zusammentragen können. Was würde helfen, den Graphen „in den Griff zu bekommen?" Nun, hilfreich wären natürlich die Schnittpunkte mit den Achsen (Nullstellen und y-Achsenabschnitt), die Extremstellen, die Wendepunkte, Kenntnisse zum Krümmungsverhalten, allfällige Asymptoten und Grenzwerte, und so weiter. Packen wir's an:

$$x^4 - 4x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 \cdot (x-4) = 0.$$

Es gibt also zwei Nullstellen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$. Und (hier überflüssigerweise bemerkt) der Graph schneidet die y-Achse bei $(0, f(0)) = (0,0)$. Um alle Extremstellen und Wendpunkte zu finden, empfiehlt es sich, die dafür nötigen Ableitungen (sofern sie existieren) bereitzustellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2 \cdot (x-3) \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x = 12x \cdot (x-2) \\ f'''(x) &= 24x - 24. \end{aligned}$$

Wir werden bald lernen, Ableitungen einfach zu berechnen.

Offenbar ist

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4x^2 \cdot (x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \{0, 3\}. \end{aligned}$$

Es gibt also zwei Stellen mit horizontaler Tangente, aber es ist zu diesem Zeitpunkt noch unklar, um was für Formen es sich genau handelt. Wir sagen darum oft, dass es sich bei diesen Stellen um Kandidaten für Extremstellen handelt, aber sie müssen sich erst bewähren. Dazu setzen wir die Kandidaten in die zweite Ableitung ein:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0, \\ f''(3) &= 36 > 0. \end{aligned}$$

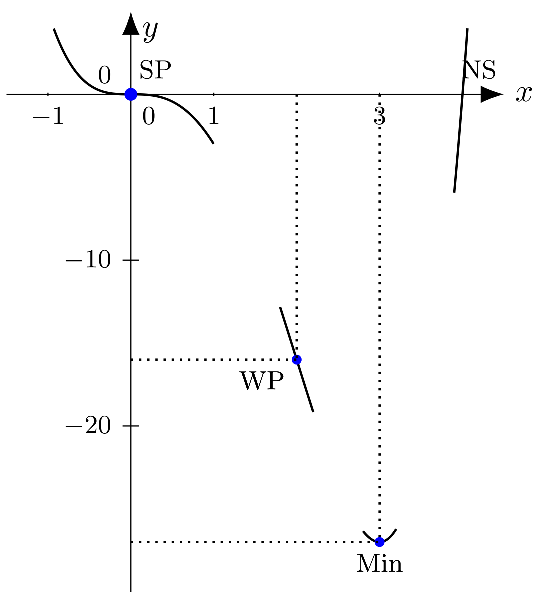
Da an der Stelle 3 die erste Ableitung verschwindet und die zweite positiv ist, muss es sich zwingend um ein Minimum handeln. Zu der Stelle 0 kann jetzt noch kein Entscheid gefällt werden. Wir ziehen die zweite und dritte Ableitung zurate:

$$\begin{aligned} f''(0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 12x \cdot (x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

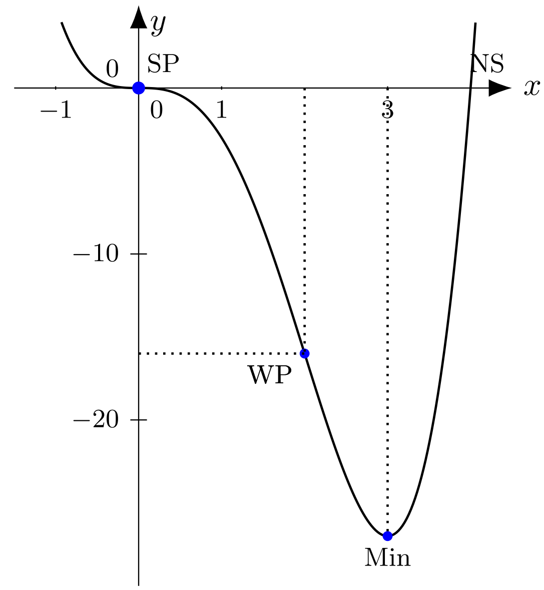
Die Stellen 0 und 2 sind also Kandidaten für Wendepunkte. Testen wir sie in der dritten Ableitung:

$$\begin{aligned} f'''(0) &= -24 < 0, \\ f'''(2) &= 24 > 0. \end{aligned}$$

Was sagt uns das? Es müssen beides Wendepunkte sein. Da an der Stelle 2 die dritte Ableitung positiv ist, ist der Graph vor der Wendestelle rechts- und nachher linksgekrümmt. Da an der Stelle 0 sowohl die erste als auch die zweite Ableitung verschwindet, die dritte aber nicht, muss es sich um einen Sattelpunkt handeln, in den der Graph linksgekrümmt eintritt und den er rechtsgekrümmt verlässt. All das zusammengestellt ergibt folgendes Bild:



Da wir wissen, dass keine weiteren Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte mehr existieren können und die Funktion überdies stetig ist, lassen sich die Bruchstücke in offensichtlicher Weise zu einem Graphen ergänzen.



Es soll nicht verschwiegen werden, dass bei dieser relativ einfachen Funktion nicht alle Diagnoseinstrumente zum Einsatz gekommen sind, über die wir verfügen. Beispielsweise hat diese Funktion keine Polstelle und keine linearen Asymptoten, so dass Grenzwertuntersuchungen ganz entfallen. Auch Symmetrieüberlegungen halfen hier nicht weiter, und die Definitionsmenge war uninteressant, weil offensichtlich alle reellen Zahlen als Inputs erlaubt sind.

Hier ist eine Checkliste für Graphenanalysen:

Graphenanalyse einer Funktion f

1. Bestimme die Definitionsmenge sowie allfällige Symmetrien.
2. Löse die Gleichung $f(x) = 0$, um alle Nullstellen zu finden. Berechne überdies $f(0)$. Trage alle Achsenschnittpunkte ein.

3. Bestimme f', f'' und f'''.
4. Benutze unsere Kriterien, um alle Extremstellen und Wendepunkte zu finden. Berechne immer auch die y-Koordinate, und trage all diese Punkte ein.
5. Berechne allenfalls weitere wichtige Punkte.
6. Führe allenfalls Grenzwertuntersuchungen durch, bestimme das Verhalten der Kurve an Polstellen und für $x \to \pm\infty$.
7. Vervollständige die Kurve.

Extremwertprobleme

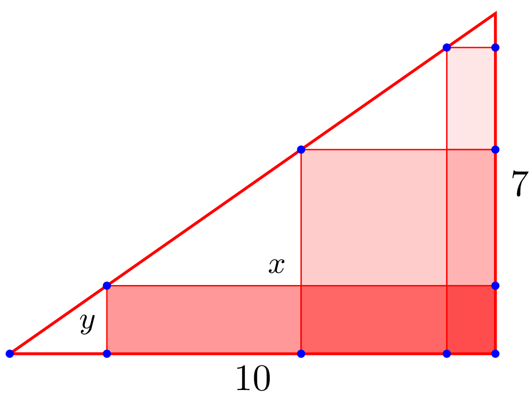
Extremwertprobleme sind Probleme, die sich in der Praxis überaus häufig stellen. Bei allen möglichen alltäglichen und wissenschaftlichen Dingen geht es darum, schneller zu werden, billiger zu sein, mehr herauszuholen, weniger zu vergeuden oder - im Idealfall - das Optimum herauszuschlagen. Mühelos lassen sich ganz alltägliche Beispiele finden, etwa, wenn wir ähnliche Waren so lange vergleichen, bis wir ein Maximum an Qualität für ein Minimum an Geld erstehen können, oder wenn wir zwanzig Blumentöpfe giessen müssen und uns überlegen, in welcher Reihenfolge wir das tun sollen, um den kürzest möglichen Gesamtweg zurückzulegen. In der Praxis sind solche Beispiele noch viel häufiger: Ampeln sollten so programmiert sein, dass sie ein Maximum an Verkehr pro Zeit durch ein Netzwerk von Strassen schleusen können. Auf möglichst kleinen Computerchips sollen möglichst viele Schaltungen untergebracht werden. Ein Weltraumteleskop, das eine Unzahl von Sternen anvisieren und fotografieren soll, muss so programmiert werden, dass es beim Absuchen des Weltalls seine Drehbewegungen und Neueinstellungen der Linsen auf ein Minimum reduziert.

Abbildung 3: Fingerabdruck

Bis vor wenigen Jahren benötigte das FBI, die amerikanische Bundespolizei, zur Lagerung der etwa 200 Millionen Fingerabdruckkarten gigantische Räume. Das war eine Platzverschwendung ohnegleichen und erschwerte zudem das effiziente Abwickeln der $30'000$ - $40'000$ Anfragen, die täglich herein fluten. Das Ziel drängte sich darum auf, alle Fingerabdrücke zu digitalisieren und elektronisch zu verwalten. Aber: Ein Fingerabdruck ist kein Text, sondern ein Bild, das eine ungefähre Datengrösse von 10 Megabytes hat. Und ein solcher Datenriese benötigt beim Verschicken einfach zu viel Zeit. Das FBI suchte darum die Zusammenarbeit mit Mathematikern, die es dank einer modernen mathematischen Erfindung (den *Wavelets*) schafften, die Daten so stark zu komprimieren – etwa um den Faktor 20 – dass sie einfacher handhabbar wurden und viel schneller elektronisch verschickt werden konnten.

Das sind eindrückliche Beispiele für einen Prozess, der in der Mathematik überaus häufig ist: den Prozess des Optimierens. Eine bestimmte Grösse (die *Zielgrösse*) soll unter Einbezug gewisser *Nebenbedingungen* optimiert werden. In einfachen Fällen kann die Differentialrechnung dabei sehr gute Dienste leisten. Wir betrachten zwei Beispiele:

Ein Rechteck im Dreieck



Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 7 und 10 sei gegeben. Darin soll ein Rechteck untergebracht werden, dessen eine Ecke mit der 90°-Ecke des Dreiecks zusammenfällt und dessen diagonal gegenüber liegende Ecke auf der Hypotenuse liegt wie in der Abbildung. Es gibt freilich unendlich viele Möglichkeiten, dieses Rechteck zu wählen. Drei davon sind eingezeichnet. Welches all dieser Rechtecke hat den grösstmöglichen Flächeninhalt? Wie müssen also x und y (die Längen der Rechteckseiten) gewählt werden, damit der Flächeninhalt maximal wird?

Der Flächeninhalt des Rechtecks kann zunächst so dargestellt werden:

$$A(x, y) = x \cdot y.$$

Das ist unsere *Zielgrösse*, die Grösse, die maximiert werden soll. Sie ist allerdings noch eine Funktion in zwei Unbekannten und nimmt keinerlei Rücksicht darauf, dass das Rechteck ja in dem gegebenen Dreieck zu liegen hat. Diese Tatsache führt uns (mit Hilfe eines Strahlensatzes) zu der *Nebenbedingung*

$$\frac{10 - x}{y} = \frac{10}{7}$$

oder, umgeformt,

$$70 - 7x = 10y.$$

Indem wir die Nebenbedingung in die Zielgrösse einsetzen, erhalten wir eine Funktion in einer Unbekannten:

$$A(x) = x \cdot \frac{70 - 7x}{10} = \frac{7}{10}(10x - x^2).$$

Diese Funktion ordnet jeder möglichen Rechtecklänge x den Flächeninhalt zu, den das in das Dreieck eingepasste Rechteck mit ebendieser Länge haben würde. Dasjenige x, für das der Flächeninhalt maximal wird, ist das Zentrum unseres Interesses; es ist nichts anderes als eine Extremstelle der Funktion A, genauer: ein Maximum des Graphen von A, welches für irgendein $x \in [0, 10]$ angenommen wird. Wir benutzen also das im ersten Teil dieses Kapitels Gelernte.

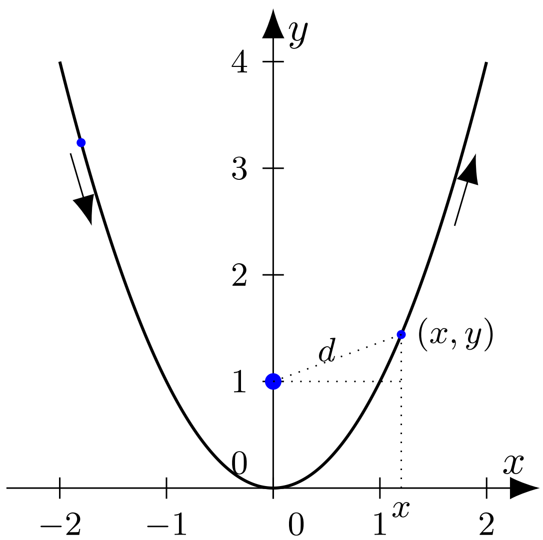
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \frac{7}{10}(10 - 2x)$$

und

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5.$$

Es gibt im Graphen von A nur eine Stelle mit horizontaler Tangente, was nicht überraschend ist, ist A doch eine quadratische Funktion und ihr Graph eine nach unten offene Parabel. Wir können also sicher sein, dass $x = 5$ das absolute Maximum repräsentiert, ohne dass wir zur Absicherung auf die zweite Ableitung zurückgreifen. Folglich wird das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben, wenn wir $x = 5$ und $y = 3.5$ wählen, also die Mitten der beiden Katheten als Eckpunkte wählen.

Wie nah ist der Komet?



An der Stelle $(0, 1)$ befindet sich ein Planet. Aus der Tiefe des Weltraums nähert sich ein Komet. Durch die Masse des Planeten wird seine Bahn so umgelenkt, dass er der Kurve der Funktion $y = x^2$ folgt. An welcher Stelle seiner Bahn wird der Komet dem Planeten am nächsten sein?

Hier könnte man sich verschätzen. Der erste Gedanke ist vielleicht, dass das im Scheitelpunkt der Parabel sein wird. Die Abbildung spricht zwar etwas dagegen, andererseits ist es sehr gefährlich, sich auf Abbildungen abzustützen, die unter Umständen nicht sehr genau sind. Rechnen wir lieber:

Wenn sich der Komet an einer beliebigen Stelle (x, y) befindet, ist seine quadrierte Distanz[1] D zum Planeten gleich

$$D(x, y) = x^2 + (y - 1)^2.$$

Das ist unsere Zielgrösse. Sie enthält zwei Unbekannte, weil wir noch nicht berücksichtigt haben, dass der Komet sich nicht einfach *irgendwo* befinden kann, sondern immer nur auf dem Graphen von $y = x^2$. Diese Nebenbedingung muss unbedingt in die Zielgrösse eingesetzt werden:

$$D(x) = x^2 + (x^2 - 1)^2 = x^4 - x^2 + 1.$$

Nun liegt eine Funktion in einer Unbekannten vor, und unser Ziel muss sein, ihr absolutes Minimum zu finden. Wir wissen, wie das geht:

$$D'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$$

und

$$D'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Es gibt auf dem Graphen von D offenbar drei Punkte mit horizontaler Tangente, also drei Kandidaten für unser gesuchtes Minimum. Die zweite Ableitung hilft, die drei Stellen zu identifizieren:

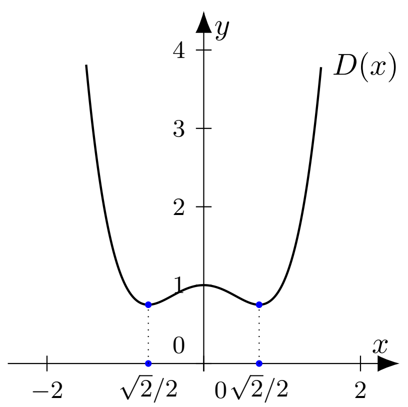
$$D''(x) = 12x^2 - 2.$$

Wir setzen die drei Stellen ein und finden:

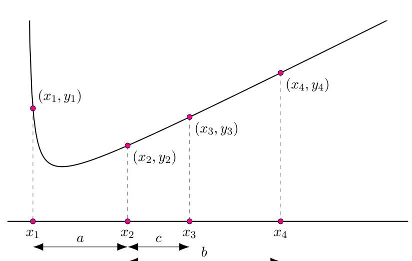
$$D''(0) = -2 < 0 \quad \text{(lokales Maximum)}$$
$$D''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 > 0 \quad \text{(absolutes Minimum).}$$

[1] Wir rechnen mit der quadrierten Distanz, weil die Distanzfunktion $d(x)$ und die Funktion $D(x) := (d(x))^2$ das Minimum sicher an derselben Stelle haben.

Damit ist das Problem gelöst. Aus dem Weltraum kommend wird der Komet dem Planeten am nächsten sein, wenn er die Stelle $x = -\sqrt{2}/2$ erreicht, dann sich wieder etwas entfernen bis zur Stelle $x = 0$, dann sich erneut nähern bis zur Stelle $x = \sqrt{2}/2$, um dann definitiv im Weltraum zu verschwinden. Die minimale Distanz an den beiden Stellen $\pm(\sqrt{2}/2)$ ist natürlich gleich. Ein Blick auf den Graphen der Funktion D zeigt das alles deutlich:



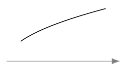
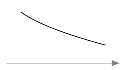
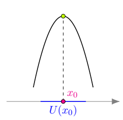
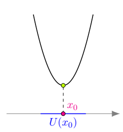
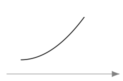
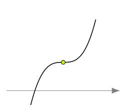
Es muss unbedingt betont werden, dass sich praktisch relevante Extremwertprobleme oftmals nicht nach diesem einfachen Algorithmus lösen lassen. Teils liegt das daran, dass die Funktion f so kompliziert oder die Gleichung $f'(x) = 0$ so schwer zu lösen ist. Glücklicherweise gibt es aber numerische Verfahren, die sich oft besser eignen. Eines soll hier ganz kurz Erwähnung finden; es heisst *golden section search* und wurde 1953 vom amerikanischen Mathematiker Jack C. Kiefer vorgeschlagen.



Angenommen, wir möchten das Minimum der abgebildeten Funktion bestimmen. Wir können annehmen, dass sich die Funktion lokal *unimodal* verhält, das heisst, dass der Graph links vom Minimum streng monoton sinkt und rechts davon streng monoton wächst. Weiter angenommen, wir hätten bereits Kenntnis von drei Stellen x_1,x_2 und x_3 mit der Eigenschaft, dass $y_2 < y_1$ und auch $y_2 < y_3$. Dann wissen wir mit Sicherheit, dass sich das gesuchte Minimum irgendwo zwischen x_1 und x_3 befindet. Aber wo? Wir wählen x_4 im grösseren Intervall und unterscheiden zwei Fälle: Falls $y_4 > y_2$ (wie in der Abbildung), fahren wir fort mit dem Tripel (x_1, x_2, x_4), weil sich das Minimum dann sicher irgendwo zwischen x_1 und x_4 befindet. Ist aber $y_4 < y_2$, so fahren wir fort mit dem Tripel (x_2, x_3, x_4), weil sich das Minimum dann sicher irgendwo zwischen x_2 und x_3 befindet. Um in beiden Fällen mit gleich grossen Intervallen arbeiten zu müssen, fordern wir, dass $a + c = b$ ist, woraus dann folgt, dass $x_4 - x_1 = x_3 - x_2$ sein muss. Daher ist nun klar, wo wir x_4 genau zu wählen haben, nämlich an der Stelle $x_4 = x_1 - x_2 + x_3$.

Auf diese Weise entsteht aus unserem anfänglich gewählten Suchintervall ein kleineres, und so fortfahrend lässt sich das gesuchte Minimum durch Intervallschachtelung leicht annähern. Es bleibt noch die Frage übrig, wie denn im ursprünglichen Intervall die Stelle x_2 gewählt werden soll. Hier zeigt es sich, dass der Goldene Schnitt eine gute Wahl ist, das heisst, man wählt x_2 so, dass sich die Länge des gesamten Intervalls zur Länge des grösseren gleich verhält wie die Länge des grösseren zur Länge des kleineren. Diese Wahl gibt dem ganzen Algorithmus auch seinen Namen.

Anhang 1

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Im Folgenden bezeichne U immer ein Teilintervall der Definitionsmenge I (also $U \subset I$).		
(streng) monoton wachsend		Die Funktion heisst in U **monoton wachsend**, genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in U$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Die Funktion heisst in U **streng monoton wachsend**, genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in U$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
(streng) monoton fallend		Die Funktion heisst in U **monoton fallend**, genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in U$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Die Funktion heisst in U **streng monoton fallend**, genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in U$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
(lokales) Maximum / Hochpunkt		Die Funktion hat an der Stelle $x_0 \in I$ ein **(lokales) Maximum**, genau dann, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt, so dass für alle $x \in U(x_0)$ gilt $f(x) \leqslant f(x_0)$. Das Maximum heisst **absolut**, falls es in der ganzen Definitionsmenge der Funktion keine Stelle x gibt, für die $f(x) > f(x_0)$ gilt. Der Graphenpunkt selber heisst **Hochpunkt**.
(lokales) Minimum / Tiefpunkt		Die Funktion hat an der Stelle $x_0 \in I$ ein **(lokales) Minimum**, genau dann, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt, so dass für alle $x \in U(x_0)$ gilt $f(x) \geqslant f(x_0)$. Das Minimum heisst **absolut**, falls es in der ganzen Definitionsmenge der Funktion keine Stelle x gibt, für die $f(x) < f(x_0)$ gilt. Der Graphenpunkt selber heisst **Tiefpunkt**.
Extremstelle		Ein Punkt $x_0 \in I$ heisst **Extremstelle**, genau dann, wenn es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.
linksgekrümmt		Die Funktion heiss in U **linksgekrümmt**, genau dann, wenn f' in U streng monoton wachsend ist (die Steigung von f also immer nur zunimmt).
rechtsgekrümmt		Die Funktion heiss in U **rechtsgekrümmt**, genau dann, wenn f' in U streng monoton fallend ist (die Steigung von f also immer nur abnimmt).
Wendepunkt / Sattelpunkt		Ein Punkt des Graphen, in dem der Graph von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt wechselt oder umgekehrt, heisst **Wendepunkt**. Ist in einem Wendepunkt zudem die Tangente an den Graphen horizontal, so heisst der Punkt **Sattelpunkt** oder **Terrassenpunkt**.

Anhang 2

streng monoton wachsend	$\left.\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{und} \\ f''(x) > 0 & \text{über } U \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ streng monoton wachsend} \\ \text{und linksgekrümmt über } U \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{und} \\ f''(x) < 0 & \text{über } U \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ streng monoton wachsend} \\ \text{und rechtsgekrümmt über } U \end{array}\right.$
streng monoton fallend	$\left.\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{und} \\ f''(x) > 0 & \text{über } U \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ streng monoton fallend} \\ \text{und linksgekrümmt über } U \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{und} \\ f''(x) < 0 & \text{über } U \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ streng monoton fallend} \\ \text{und rechtsgekrümmt über } U \end{array}\right.$
linksgekrümmt	f' streng monoton wachsend über $U \Leftrightarrow f$ linksgekrümmt über U
rechtsgekrümmt	f' streng monoton fallend über $U \Leftrightarrow f$ rechtsgekrümmt über U
(lokales) Maximum	$\left.\begin{array}{ll} f'(x_0) = 0 & \text{und} \\ f''(x_0) < 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ hat an der Stelle } x_0 \\ \text{ein (lokales) Maximum} \end{array}\right.$
(lokales) Minimum	$\left.\begin{array}{ll} f'(x_0) = 0 & \text{und} \\ f''(x_0) > 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ hat an der Stelle } x_0 \\ \text{ein (lokales) Minimum} \end{array}\right.$
Wendepunkt	$\left.\begin{array}{ll} f''(x_0) = 0 & \text{und} \\ f'''(x_0) \neq 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ hat an der Stelle } x_0 \\ \text{einen Wendepunkt} \end{array}\right.$ Genauer: $\left.\begin{array}{ll} f''(x_0) = 0 & \text{und} \\ f'''(x_0) > 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{WP bei } x_0\text{, erst rechts-,} \\ \text{dann linksgekrümmt} \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{ll} f''(x_0) = 0 & \text{und} \\ f'''(x_0) < 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{WP bei } x_0\text{, erst links-,} \\ \text{dann rechtsgekrümmt} \end{array}\right.$
Sattelpunkt	$\left.\begin{array}{ll} f'(x_0) = 0 & \text{und} \\ f''(x_0) = 0 & \text{und} \\ f'''(x_0) \neq 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \text{Sattelpunkt bei } x_0 \right.$