Skalarprodukt, Normalenvektoren und Hesse-Normalform

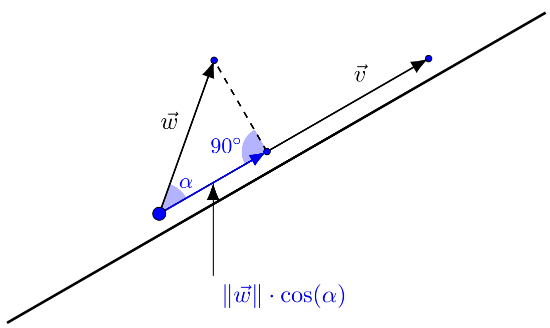
[Vektorgeometrie]

Armin P. Barth

ETH zürich

Arbeit als Vorbild

Eine Masse wird entlang einer schiefen Ebene bewegt. Um diese Bewegung aufrecht zu erhalten, ist physikalische Arbeit gegen die Schwerkraft (und eventuell auch gegen andere Kräfte) nötig. Wie kann diese Arbeit berechnet werden?



Gemäss Definition ist physikalische Arbeit gleich dem Produkt aus der Verschiebung und der Kraft parallel zum Weg. Es ist also nur derjenige Anteil des Kraftvektors $\vec{w}$ relevant, welcher in Richtung der Verschiebung $\vec{v}$ zeigt. Das bedeutet, wir müssen den Kraftvektor auf die Richtung der Verschiebung projizieren. Der für die Arbeit massgebliche Anteil der Kraft hat somit den Betrag $\|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$. Und die gesuchte Arbeit für die Bewegung der Masse entlang des Verschiebevektors $\vec{v}$ ist gleich

$$A = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$$

, wenn α der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist. Wir sehen, es ist hier ein bedeutsamer Term entstanden: Das Produkt der Normen von zwei Vektoren, das dann noch mit dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels multipliziert wird. Genau dieser Term ist die Grundlage für die Definition des sogenannten Skalarproduktes - einer in der Vektorgeometrie zentralen Operation.

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine Operation, die zwei gegebenen Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ die reelle Zahl

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$$

zuordnet, wenn α der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist.

Wir müssen vorsichtig sein; die Definition birgt kleine Gefahren:

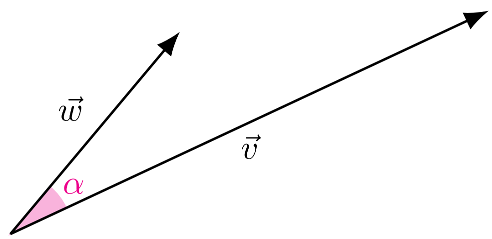
> Zunächst stellen wir klar, dass wir unter α einen Winkel mit der Eigenschaft $0 \leqslant \alpha \leqslant 180°$ verstehen wollen, insbesondere also einen nicht-negativen Winkel. Würde man das nicht festlegen, wäre unter Umständen unklar, welchen Winkel man überhaupt meint.
>
> Dann könnte ja auch einer der beiden Vektoren der Nullvektor sein. In diesem Fall ist es nicht sinnvoll, von einem Winkel zu sprechen, der von den beiden Vektoren eingeschlossen wird. Wir ergänzen die Definition darum um den Zusatz, dass das Skakarprodukt 0 sein soll, sobald einer der Vektoren der Nullvektor $\vec{0}$ ist.
>
> Schliesslich muss man betonen, dass das Skalarprodukt eine zweistellige Operation ist, die als Input zwei Vektoren, als Output aber eine reelle Zahl hat; das ist auch darum so wichtig, weil wir bald eine weitere Operation untersuchen werden, die als Inputs ebenfalls zwei Vektoren, als Output jedoch wieder einen Vektor hat.

Merken wir uns also die folgende Definition gut.

Definition:
Sind $\vec{v}, \vec{w}$ zwei Vektoren, die beide nicht der Nullvektor sind, und sei $0 \leqslant \alpha \leqslant 180°$ der von beiden Vektoren eingeschlossene Winkel. Dann nennen wir die Operation

$$\vec{v}, \vec{w} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w} := \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$$

das ***Skalarprodukt*** *von $\vec{v}$ und $\vec{w}$.*



Ist einer der beiden Vektoren der Nullvektor, so sei $\vec{v} \cdot \vec{w} := 0$.

Andere häufig verwendete Notationen des Skalarproduktes sind: $\vec{v} {\cdot} \vec{w}$, $(\vec{v}, \vec{w})$ und $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Wir werden bald sehen, inwiefern dieses Produkt wertvolle Dienste in der Vektorgeometrie leistet. Zuvor versuchen wir aber, die neue Operation noch besser kennenzulernen, indem wir Spezialfälle und Gesetze untersuchen.

Spezialfälle

Was für Werte kann das Skalarprodukt annehmen? Die Normen der Vektoren sind nichtnegativ und können beliebig gross sein, und $\cos(\alpha)$ liegt immer zwischen -1 und 1. Folglich kann $\vec{v} \cdot \vec{w}$ jede reelle Zahl annehmen. Untersuchen wir etwas genauer, wann das Skalarprodukt positiv, wann es negativ und wann es 0 sei wird:

Ist α ein spitzer Winkel, so ist $\cos(\alpha) > 0$ und somit $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$.

Ist α ein stumpfer Winkel, so ist $\cos(\alpha) < 0$ und somit $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$.

Ist $\alpha = 0°$, so haben beide Vektoren dieselbe Richtung und es ist $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$.

Ist $\alpha = 180°$, so haben die beiden Vektoren entgegengesetzte Richtungen und es ist $\vec{v} \cdot \vec{w} = -\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$.

Ist $\vec{v} = \vec{w}$, so folgt $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(0°) = \|\vec{v}\|^2$.

Ist $\alpha = 90°$, so ist $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(90°) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot 0 = 0$.

Der letzte Punkt ist besonders interessant: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist 0, wenn sie einen rechten Winkel einschliessen. Könnte man es also nicht generell dafür verwenden, um zu entscheiden, ob zwei vorliegende Vektoren senkrecht aufeinander stehen?

Leider geht das nicht. Denn um das Skalarprodukt überhaupt berechnen zu können, benötigen wir den eingeschlossenen Winkel, und wenn wir diesen bereits kennen, ist es wenig sinnvoll, einen Orthogonalitätstest durchzuführen. Noch allgemeiner könnte man sogar vermuten, dass sich das Skalarprodukt dazu eignet, den Zwischenwinkel zwischen zwei vorliegenden Vektoren zu bestimmen, denn immerhin enthält die Gleichung

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$$

diesen gesuchten Winkel. Allerdings scheitert auch diese Idee sofort an der Tatsache, dass zur Berechnung der linken Seite der Zwischenwinkel bereits bekannt sein muss.

Dennoch: Die Idee ist verführerisch. Wir haben bisher kein Tool zur Berechnung des von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkels. Und praktisch wäre das allemal. Könnte man nicht doch das Skakalprodukt dafür nutzbar machen? Wir werden auf diesen Punkt zurückkommen, gleich nach ein paar Gesetzen...

Gesetze

Zunächst gilt für das Skalarprodukt sicherlich das *Kommutativgesetz* und zwar deswegen, weil die Multiplikation reeller Zahlen kommutativ ist; letzteres ist axiomatisch festgelegt. Es ist also

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{w} &= \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos(\alpha)\\ &= \|\vec{w}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\alpha)\\ &= \vec{w}\cdot\vec{v},\end{aligned}$$

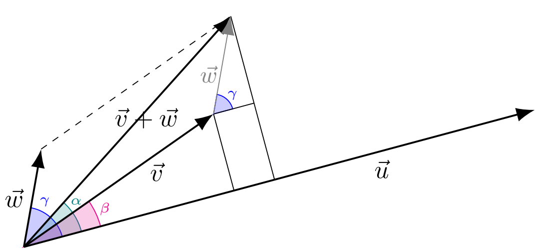
wobei das Kommutativgesetz bei der zweiten Gleichheit benutzt wurde - die anderen beiden Gleichheiten folgen direkt aus der Definition.

Das *Assoziativgesetz* ist für das Skalarprodukt sinnlos, da ein Term wie $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$ gar nicht definiert ist. Das Skalarprodukt in der Klammer liefert eine reelle Zahl, und diese kann dann nicht zusammen mit einem Vektor Input für das Skalarprodukt sein.

Wie steht es um das *Distributivgesetz*? Falls es gilt, müsste es wie folgt lauten:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) \stackrel{?}{=} \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}.$$

Das ist nicht sofort klar. Versuchen wir also, uns die Situation zu verbildlichen:



Wir sehen, dass sich die Projektion von $\vec{v}+\vec{w}$ auf $\vec{u}$ additiv zusammensetzt aus den beiden Projektionen von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$ respektive von $\vec{w}$ auf $\vec{u}$. Es ist also

$$\|\vec{v}+\vec{w}\|\cdot\cos(\alpha) = \|\vec{v}\|\cdot\cos(\beta)+\|\vec{w}\|\cdot\cos(\gamma).$$

Man muss sich allerdings gut überlegen, dass das auch zutrifft, wenn einzelne Kosinuswerte negativ sind. Darum gilt schliesslich:

$$\begin{aligned}&\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})\\ &\quad= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}+\vec{w}\|\cdot\cos(\alpha)\\ &\quad= \|\vec{u}\|\cdot(\|\vec{v}\|\cdot\cos(\beta)+\|\vec{w}\|\cdot\cos(\gamma))\\ &\quad= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\beta)+\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos(\gamma)\\ &\quad= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}.\end{aligned}$$

Wir dürfen also in der Tat Terme wie $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ auf die gewohnte Weise ausmultiplizieren.

Als weiteres nützliches Gesetz erwähnen wir noch dies: Sind λ, μ beliebige reelle Zahlen, so gilt[1]:

$$(\lambda\cdot\vec{v})\cdot(\mu\cdot\vec{w}) = \lambda\cdot\mu\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})\,. \qquad (\star)$$

Das ist nicht überraschend. Für positive Zahlen λ, μ, zum Beispiel wird der von den Vektoren eingeschlossene Winkel durch Streckung/Stauchung der Vektoren ja nicht verändert. Wir überlassen den Beweis den interessieren Leserinnen und Lesern zur Übung.

Eine zweite Formel für das Skalarprodukt

Wir haben vorher den Wunsch geäussert, das Skalarprodukt zur Winkelberechnung verwenden zu können. Die Definition des Skalarproduktes kann man umstellen zu

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}.$$

[1] Dabei hat $\cdot$ zwei unterschiedliche Rollen.

Aber daraus kann der Winkel leider nicht bestimmt werden, da man ihn für den Zähler des Bruches auf der rechten Seite bereits kennen müsste. Es geht also nicht. Ausser wir finden einen anderen Weg, das Skalarprodukt zu bestimmen, einen Weg, der den Zwischenwinkel nicht benutzt. Funktioniert das? Glücklicherweise geht das tatsächlich. Und wir zeigen hier sogar zwei Wege zu dieser neuen Formel auf:

Weg 1

Bei diesem Weg benutzen wir die sogenannte *Standardbasis* des Anschauungsraumes:

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich also gerade um die drei normierten Vektoren, die in die Richtungen der positiven Koordinatenhalbachsen zeigen. In der Anschauungsebene wären es entsprechend nur zwei Basisvektoren. Eine angenehme Eigenschaft dieser Vektoren ist, dass sich jeder beliebige Vektor $\vec{v}$ des Anschauungsraumes (und analog jeder beliebige Vektor der Anschauungsebene) auf genau eine Weise als Linearkombination der Basisvektoren schreiben lässt. Es ist nämlich

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3.$$

Und analog in zwei Dimensionen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2.$$

Warum ist das hilfreich? Nun, ganz einfach, weil wir nun die oben erläuterten Gesetze anwenden können. Mit Hilfe des Distributivgesetzes und des Gesetzes ($\star$) lässt sich ein Skalarprodukt wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} &\vec{v} \cdot \vec{w} \\ &= (v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &\quad \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1 + w_2 \cdot \vec{e}_2 + w_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &= \ v_1 w_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + v_1 w_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + v_1 w_3 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \\ &\quad + v_2 w_1 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + v_2 w_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + v_2 w_3 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) \\ &\quad + v_3 w_1 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) + v_3 w_2 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) + v_3 w_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3). \end{aligned}$$

Das mag abschreckend wirken, aber bei genauem Hinsehen wird die Freude überwiegen: Sechs dieser Summanden sind nämlich 0, weil die Vektoren orthogonal zueinander stehen und ihr Skalarprodukt somit 0 ist. Einzig drei Summanden sind von 0 verschieden, und auch sie sind speziell einfach zu berechnen:

$$\begin{aligned} &\vec{v} \cdot \vec{w} \\ &= (v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &\quad \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1 + w_2 \cdot \vec{e}_2 + w_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &= \ v_1 w_1 \underbrace{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1)}_{=1} + v_1 w_2 \underbrace{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)}_{=0} + v_1 w_3 \underbrace{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)}_{=0} \\ &\quad + v_2 w_1 \underbrace{(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1)}_{=0} + v_2 w_2 \underbrace{(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2)}_{=1} + v_2 w_3 \underbrace{(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3)}_{=0} \\ &\quad + v_3 w_1 \underbrace{(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1)}_{=0} + v_3 w_2 \underbrace{(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2)}_{=0} + v_3 w_3 \underbrace{(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)}_{=1} \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \end{aligned}$$

Wir haben es geschafft!

Es ist gelungen, das Skalarprodukt auf eine zweite Weise zu berechnen, und in dieser neuen Formel spielt der eingeschlossene Winkel keine Rolle mehr. Analog findet man natürlich im zweidimensionalen Fall:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Wir halten also fest:

Merke:

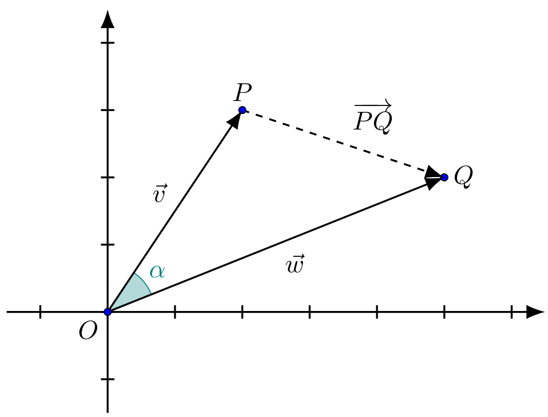
In $\mathbb{R}^2$ gilt

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = \sum_{i=1}^{2} v_i \cdot w_i.$$

In $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot w_i.$$

Weg 2



Bei diesem zweiten Weg benutzen wir Geometrie und lassen uns von folgender Idee leiten: Der Term $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$ ist uns eigentlich nicht unbekannt. Durchforsten wir unser Vorwissen, so finden wir einen Satz, in welchem ein Term dieser Art eine wesentliche Rolle spielt: Den Cosinussatz. Im beliebigen Dreieck ABC gilt bekanntlich:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos(\beta) \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Die rechten Seiten enthalten Terme, die wir jetzt als Skalarprodukte deuten können. Wenn es uns also gelingt, die Dreiecksseiten durch Vektoren darzustellen, dann sollte es möglich sein, eine dieser Gleichungen nach dem Skalarprodukt aufzulösen, um damit eine zweite Formel zur Berechnung eines Skalarproduktes zu erhalten - eine Formel, die nach dem 1. Weg freilich keine Überraschung mehr sein wird.

Wir deuten die beiden Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ also als Ortsvektoren von zwei beliebigen Punkten im Anschauungsraum oder der Anschauungsebene: Dann gilt nach Cosinussatz

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2 \cdot \underbrace{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)}_{=\vec{v}\cdot\vec{w}}.$$

Wie erhofft können wir nun nach dem Skalarprodukt auflösen und erhalten dann erneut die schon auf dem ersten Weg ermittelte Formel:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= \frac{\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2}{2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 - \sum_{i=1}^n (w_i - v_i)^2}{2}, \end{aligned}$$

wobei $n \in \{2, 3\}$. Es heben sich sämtliche Quadrate auf:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{\sum_{i=1}^n 2 \cdot v_i \cdot w_i}{2} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i.$$

Winkelberechnungen

Damit ist viel gewonnen, denn jetzt können wir das Skalarprodukt dazu benützen, Winkel zwischen beliebigen Vektoren zu bestimmen. Als einfacher Spezialfall ergibt sich:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

Für Winkel zwischen 0° und 180° ist der Cosinus ja genau dann 0, wenn es sich um einen rechten Winkel handelt. Wir haben also einen simplen Orthogonalitätstest in der Hand. Stehen zum Beispiel die folgenden Vektoren senkrecht aufeinander?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ja, das tun sie, denn wir sehen sofort, dass

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{2} v_i w_i = 2 \cdot 3 + (-6) \cdot 1 = 0$$

ist. Um den Winkel zu berechnen, den zwei beliebige Vektoren einschliessen, benützen wir die Definition des Skalarproduktes, diesmal aber im Wissen, dass wir den Zähler auf der rechten Seite nun berechnen können, ohne den Winkel bereits zu kennen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}.$$

Wie gross ist der Winkel $\measuredangle BAC$ im Dreieck mit den Ecken $A(-2, 2, 0)$, $B(-1, 0, 2)$ und $C(-5, 2, -3)$? Der gesuchte Winkel ist derjenige Winkel, der von den beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ eingeschlossen wird. Wir bestimmen also zuerst diese Vektoren.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha) \\ &= \frac{1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{-9}{3 \cdot \sqrt{18}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Schliesslich finden wir $\alpha = \arccos\left(-\sqrt{2}/2\right) = 135°$.

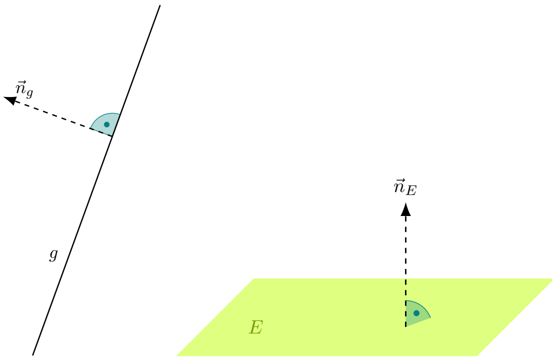
Normalenvektoren

Wir besprechen als nächstes ein Thema, das eng mit dem Skalarprodukt verbunden ist. Unter einem *Normalenvektor* verstehen wir entweder einen Vektor in der Anschauungsebene, der senkrecht auf einer gegebenen Geraden steht oder aber einen Vektor im Anschauungsraum, der senkrecht auf einer gegebenen Ebene steht. Es versteht sich von selbst, dass, falls $\vec{n}$ ein solcher Normalenvektor ist, auch $\lambda \cdot \vec{n}$ (für eine beliebige, von 0 verschiedene reelle Zahl λ) ein Normalenvektor ist.

Bei zahlreichen geometrischen Fragestellungen ist es nützlich, schnell die senkrechte Richtung zu einer Geraden oder einer Ebene angeben zu können. Darum fragen wir uns hier, wie man wohl mühelos Normalenvektoren zu Geraden und Ebenen erzeugen kann.

Betrachten wir als Beispiel die folgende Gerade in der Anschauungsebene:

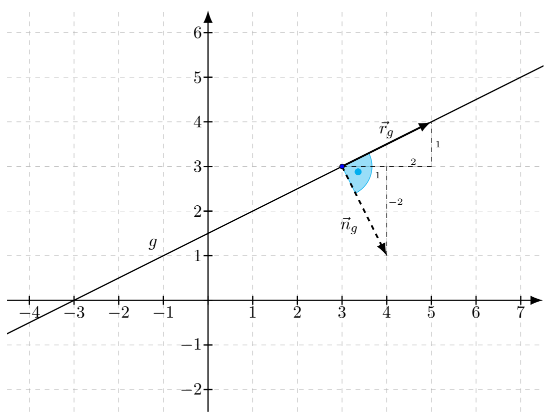
$$g : x - 2y + 3 = 0.$$



Durch einfaches Umformen findet man, dass diese Gerade eine Steigung von $1/2$ hat, so dass also

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor der Geraden ist. Die Frage ist nun, wie wir schnell und mühelos eine dazu senkrechte Richtung angeben können? Nun, offenbar dadurch, dass wir den Richtungsvektor um $90°$ drehen.



Wir sehen sofort, dass zum Beispiel

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor der Geraden ist. Es fällt auf, dass die Komponenten dieses Vektors mit den Koeffizienten von x und y in der Geradengleichung übereinstimmen:

$$g: 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 3 = 0.$$

Ist das ein Zufall? Um das zu überprüfen, stellen wir versuchshalber die gewagte These auf, dass für jede Gerade

$$g: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

gilt, dass

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor ist. Was würde das denn heissen? Das würde bedeuten, dass

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

senkrecht auf jedem beliebigen Vektor $\overrightarrow{PQ}$ steht, den man aus zwei Punkten P und Q der Geraden bilden kann, dass also das Skalarprodukt aus

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

und $\overrightarrow{PQ}$ gleich 0 ist. Das können wir leicht überprüfen: Seien dazu P und Q zwei beliebige Punkte der Geraden, so dass also

$$\begin{array}{r|lcrcl} \mathrm{I} & P \in g & \Leftrightarrow & a \cdot x_P + b \cdot y_P + c & = & 0 \\ \mathrm{II} & Q \in g & \Leftrightarrow & a \cdot x_Q + b \cdot y_Q + c & = & 0 \end{array}$$

gilt. Wir möchten überprüfen, ob

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{PQ} \stackrel{?}{=} 0$$

gilt oder nicht:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} \\ &= a \cdot (x_Q - x_P) + b \cdot (y_Q - y_P) \\ &= a \cdot x_Q - a \cdot x_P + b \cdot y_Q - b \cdot y_P. \end{aligned}$$

Das ist in der Tat gleich 0, denn wenn wir Gleichung I von Gleichung II subtrahieren, so erhalten wir gerade die Information, dass

$$a \cdot x_Q - a \cdot x_P + b \cdot y_Q - b \cdot y_P = 0$$

ist. Die gewagte Vermutung hat sich somit als zutreffend erwiesen. Es ist offenbar überaus einfach, zu einer gegebenen Geraden einen Normalenvektor abzulesen; man muss als Komponenten lediglich die Koeffizienten von x und y (in dieser Reihenfolge) wählen.

Sofort drängt sich die Frage auf, ob sich das bei Ebenen im Anschauungsraum ebenso verhält? Sei also

$$E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

eine Ebene, und seien P und Q zwei beliebige Punkte auf dieser Ebene. Wenn wir zeigen können, dass

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

ist, dann steht der Vektor, den man aus den Koeffizienten der drei Unbekannten bildet, tatsächlich senkrecht auf jedem beliebigen Richtungsvektor der Ebene und somit auf der Ebene selbst.

Zunächst müssen wir festhalten, dass die beiden Punkte tatsächlich auf der Ebene liegen:

$$\begin{array}{r|lcrcl} \mathrm{I} & P \in E & \Leftrightarrow & ax_P + by_P + cz_P + d & = & 0 \\ \mathrm{II} & Q \in E & \Leftrightarrow & ax_Q + by_Q + cz_Q + d & = & 0 \end{array}$$

Dann bilden wir das zur Diskussion stehende Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} \\ &= a \cdot (x_Q - x_P) + b \cdot (y_Q - y_P) + c \cdot (z_Q - z_P) \\ &= ax_Q - ax_P + by_Q - by_P + cz_Q - cz_P \end{aligned}$$

Warum ist dieser Term gleich 0? Ganz einfach, weil P und Q auf der Ebene liegen, weil die Gleichungen I und II gelten, weil die Differenz II – I gerade die Information

$$ax_Q - ax_P + by_Q - by_P + cz_Q - cz_P = 0$$

liefert.

Wir haben viel erreicht. Prägen wir uns also gut ein.

Merke:

Für eine Gerade $g : a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ gilt: Jeder Vektor

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(für $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$) ist ein **Normalenvektor** von g.

Für eine Ebene $E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ gilt: Jeder Vektor

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(für $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$) ist ein **Normalenvektor** von E.

Betrachten wir sogleich einige Beispiele und Anwendungen.

Beispiel 1

Die Gerade $g : x = 5$ lässt sich auch so schreiben:

$$g : 1 \cdot x + 0 \cdot y - 5 = 0.$$

Nach dem oben Hergeleiteten muss

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor dieser Geraden sein. Das ist sofort klar, denn die Gerade verläuft ja parallel zur y-Achse, und der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zeigt in x-Richtung.

Beispiel 2

Wenn wir die Gleichung einer Geraden, zum Beispiel $g : x - 2y + 3 = 0$, mit irgendeiner Zahl, etwa -3, multiplizieren, erhalten wir dieselbe Gerade, weil eine solche Multiplikation eine Äquivalenzumformung ist:

$$g : -3x + 6y - 9 = 0.$$

Natürlich erhalten wir nun einen anderen Normalenvektor, nämlich

$$\vec{n}_g = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Dieser Normalenvektor hat, verglichen mit

$$\vec{n}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

die entgegengesetzte Richtung und die dreifache Länge. Dieses Beispiel zeigt, dass der Normalenvektor nicht eindeutig ist.

Beispiel 3

Angenommen, wir suchen eine Ebene, die senkrecht zur Geraden

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verläuft und überdies den Punkt $P(1, 1, 8)$ enthält. Dann muss offenbar der Richtungsvektor der Geraden gleichzeitig ein Normalenvektor der gesuchten Ebene sein. Also können wir die Komponenten des Richtungsvektors der Geraden als Koeffizienten in der Ebenengleichung setzen und für die Ebene den folgenden Ansatz wählen:

$$E : 4x - 2y + 3z + d = 0.$$

Ohne eine weitere Bedingung hätten wir nun unendlich viele Ebenen, die allesamt parallel zueinander sind. Mit der zusätzlichen Angaben, dass die Ebene den Punkt $P(1, 1, 8)$ enthalten soll, können wir aus all diesen unendlich vielen Ebenen nun gerade die richtige herauspicken, indem wir fordern, dass der Punkt die Ebenengleichung erfüllt:

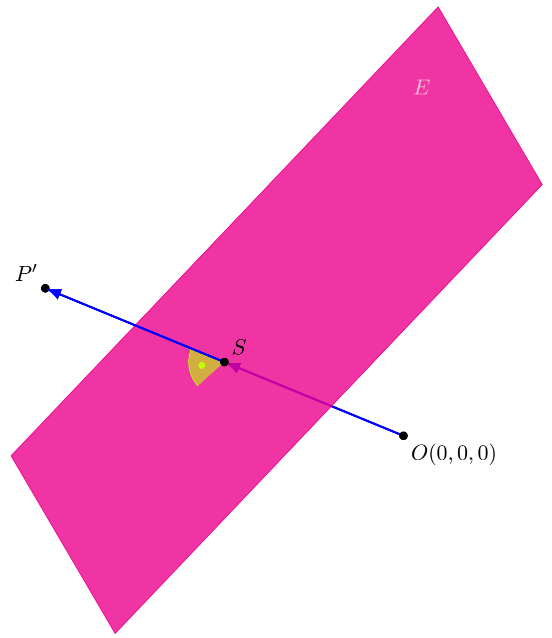
$$\begin{aligned} & 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + d = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & d = -26. \end{aligned}$$

Die gesuchte Ebene ist also

$$E : 4x - 2y + 3z - 26 = 0.$$

Beispiel 4

Es wird gefordert, dass der Ursprung an der Ebene $E : 4x - 2y + 3z - 26 = 0$ gespiegelt wird.



Wir basteln uns dazu die Gerade g, die den Ursprung enthält und senkrecht zur Ebene verläuft. Dank unseren Erkenntnissen zum Normalenvektor ist das ein Kinderspiel:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nun liegt es nahe, diese Gerade mit der Ebene zu schneiden, um den Schnittpunkt S zu finden. Haben wir diesen, brauchen wir nur noch „gleich weit auf die andere Seite“ zu gehen, genauer: Dann ist $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \overrightarrow{OS}$. Brauchen wir dazu den Schnittpunkt S wirklich? Die Rechnung schafft gleich Klarheit. Wir schneiden also die Gerade mit der Ebene, $g \cap E$:

$$\begin{aligned} & 4(0+4t) - 2(0-2t) + 3(0+3t) - 26 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 29t - 26 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & t = \frac{26}{29} \end{aligned}$$

Was genau sagt uns das? Es bedeutet, dass man, um vom Ursprung O zu S zu gelangen, das 26/29-fache des Normalenvektors benötigt. Um vom Ursprung O zum gesuchten Spiegelpunkt P' zu gelangen, benötigt man folglich das 52/29-fache des Normalenvektors. Dazu brauchen wir S gar nicht konkret auszurechnen. Es ist also

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{26}{29} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{208}{29} \\ -\frac{104}{29} \\ \frac{156}{29} \end{pmatrix}$$

Somit haben wir den Spiegelpunkt gefunden:

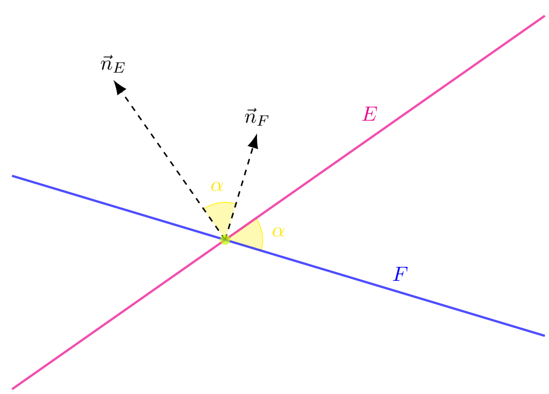
$$P'\left(\frac{208}{29}, -\frac{104}{29}, \frac{156}{29}\right).$$

Beispiel 5

Welchen Winkel schliessen die beiden folgenden Ebenen ein?

$$\begin{aligned} E &: 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ F &: y + z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Anhand der Normalenvektoren sehen wir sofort, dass die beiden Ebenen nicht parallel sind; sie schneiden sich also in der Tat in einer Schnittgeraden und bilden somit wahrscheinlich einen spitzen und einen stumpfen Winkel. Wie gross ist der spitze Winkel?



Wenn wir die Ebenen sozusagen „von der Seite“ betrachten, sehen wir, dass der Winkel, den die beiden Ebenen einschliessen, dem Winkel entspricht, den die beiden Normalenvektoren einschliessen - jedenfalls dann, wenn die beiden Normalenvektoren so stehen wie in der Abbildung. Wir benutzen also unsere Winkelformel und berechnen den Winkel, den die Normalenvektoren einschliessen:

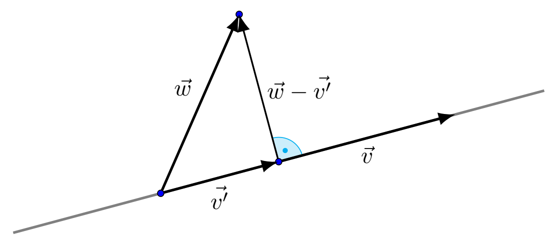
$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F}{\|\vec{n}_E\| \cdot \|\vec{n}_F\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}{3 \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{-3}{3 \cdot \sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Also ist $\alpha = \arccos\left(-\sqrt{2}/2\right) = 135°$. Dieser stumpfe Winkel macht deutlich, dass genau einer der beiden Normalenvektoren (verglichen mit obiger Abbildung) in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Den spitzen Winkel, den wir eigentlich finden wollten, erhalten wir somit als Supplementwinkel: $180° - 135° = 45°$.

Die Hesse-Normalform

Es steht ausser Frage, dass in Geometrie-Problemen häufig Abstände zu berechnen sind. Wie gross ist der Abstand eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Geraden in der Anschauungsebene? Wie gross ist der Abstand eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Ebene im Anschauungsraum? Diesen Fragen widmen wir uns hier und nützen einmal mehr eine angenehme Eigenschaft des Skalarproduktes aus. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung zum Skalarprodukt und können nachher die gestellten Fragen leicht beantworten.

Das Skalarprodukt kann projizieren! Was genau wollen wir damit sagen? Angenommen, durch einen ersten Vektor $\vec{v}$ sei eine Richtung gegeben, und ein zweiter Vektor $\vec{w}$ soll auf diese Richtung projiziert werden. Das heisst, es soll der Vektor $\vec{v'}$ der Abbildung bestimmt werden:



Zweifellos ist $\vec{v'} = \lambda \cdot \vec{v}$ für eine geeignete reelle Zahl λ. Aber wie gross is λ? Dies lässt sich leicht aus der Tatsache, dass $\vec{w} - \vec{v'}$ senkrecht auf $\vec{v}$ stehen muss, berechnen:

$$\begin{aligned} & & \left(\vec{w} - \vec{v'}\right) \cdot \vec{v} &= 0 \\ &\Rightarrow & \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{v'} \cdot \vec{v} &= 0 \\ &\Rightarrow & \vec{w} \cdot \vec{v} - \lambda \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) &= 0 \\ &\Rightarrow & \vec{w} \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \|\vec{v}\|^2 &= 0 \\ &\Rightarrow & \lambda &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}.\end{aligned}$$

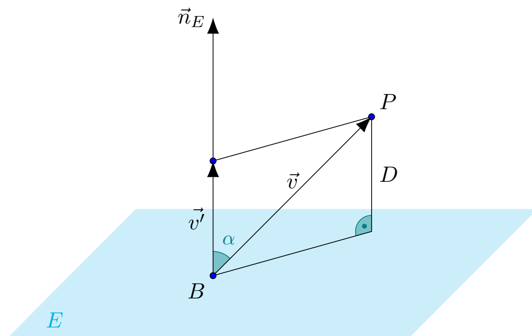
Dabei haben wir weiter oben behandelte Gesetze über das Skalarprodukt verwendet. Nun ist die gesuchte Projektion gefunden.

Projektionseigenschaft

$$\vec{v'} = \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{v}.$$

Dank dieser Vorüberlegung können wir die eingangs gestellten Abstandsprobleme elegant lösen. Wir beantworten hier nur die eine Frage, nämlich wie man den Abstand eines Punktes von einer Ebene im Anschauungsraum findet, und überlassen die entsprechende Frage für den zweidimensionalen Fall den interessierten Leserinnen und Lesern zur Übung.

Gegeben seien also eine Ebene $E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ und ein Punkt $P(x_P, y_P, z_P)$. Welchen Abstand D hat der Punkt P von der Ebene E?



Wir zeichnen einen beliebigen Punkt B auf der Ebene hinzu. Die gesuchte Distanz D ist nun einfach die Länge der Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{n}_E$.

Die Situation könnte sich so präsentieren wie in der Abbildung, dass nämlich $\vec{v} = \overrightarrow{BP}$ und $\vec{n}_E$ in denselben Halbraum zeigen. In diesem Fall ist α ein spitzer Winkel. Aber natürlich kann es auch sein, dass die beiden genannten Vektoren in verschiedene Halbräume zeigen. Diesen zweiten Fall müssen wir nachher betrachten. Im ersten Fall sei also alles so wie in der Abbildung.

Fall 1

Nach der Projektionseigenschaft ist

$$D = \left| \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{v}}{\|\vec{n}_E\|^2} \right| \cdot \|\vec{n}_E\| .$$

Dabei ist $\vec{n}_E \cdot \vec{v} \geqslant 0$, weil α ein spitzer Winkel ist. Also ist

$$\begin{aligned}
D &= \left| \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{v}}{\|\vec{n}_E\|^2} \right| \cdot \|\vec{n}_E\| \\
&= \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{v}}{\|\vec{n}_E\|^2} \cdot \|\vec{n}_E\| \\
&= \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_B \\ y_P - y_B \\ z_P - z_B \end{pmatrix}}{\|\vec{n}_E\|} \\
&= \frac{a\,(x_P - x_B) + b\,(y_P - y_B) + c\,(z_P - z_B)}{\|\vec{n}_E\|} \\
&= \frac{(ax_P + by_P + cz_P) - \overbrace{(ax_B + by_B + cz_B)}^{=-d}}{\|\vec{n}_E\|} .
\end{aligned}$$

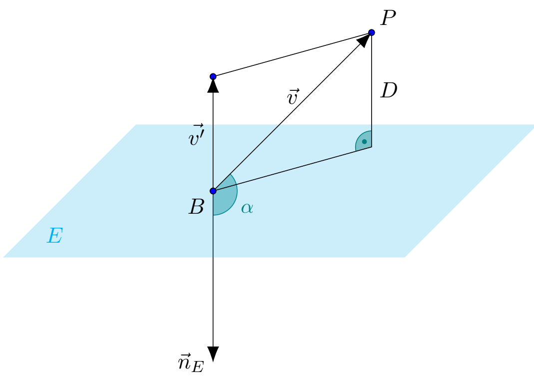
Also finden wir endlich

$$D = \frac{a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P + d}{\|\vec{n}_E\|} .$$

Das ist besonders einprägsam, denn der Zähler ist einfach nur der Term der Ebenengleichung, in welchen die Koordinaten des Punktes P eingesetzt worden sind. Und der Nenner ist die Länge des Normalenvektors der Ebene. Ist das auch im zweiten Fall so einfach?

Fall 2

Hier zeigen nun $\vec{v} = \overrightarrow{BP}$ und $\vec{n}_E$ in verschiedene Halbräume, so dass der Winkel α stumpf sein wird. Die Situation bietet sich uns also so dar, wie in der folgenden Skizze:



Nach der Projektionseigenschaft ist abermals

$$D = \left| \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{v}}{\|\vec{n}_E\|^2} \right| \cdot \|\vec{n}_E\| .$$

Aber diesmal ist $\vec{n}_E \cdot \vec{v} < 0$, weil α ein stumpfer Winkel ist. Somit ergibt sich zum 1. Fall ein kleiner, aber wichtiger Unterschied, nämlich ein Minuszeichen:

$$\begin{aligned} D &= \left| \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{v}}{\|\vec{n}_E\|^2} \right| \cdot \|\vec{n}_E\| \\ &= -\frac{\vec{n}_E \cdot \vec{v}}{\|\vec{n}_E\|^2} \cdot \|\vec{n}_E\| \\ &= -\frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_B \\ y_P - y_B \\ z_P - z_B \end{pmatrix}}{\|\vec{n}_E\|} \\ &= -\frac{a\,(x_P - x_B) + b\,(y_P - y_B) + c\,(z_P - z_B)}{\|\vec{n}_E\|} \\ &= -\frac{(ax_P + by_P + cz_P) - \overbrace{(ax_B + by_B + cz_B)}^{=-d}}{\|\vec{n}_E\|} \\ &= -\frac{a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P + d}{\|\vec{n}_E\|}. \end{aligned}$$

Wir haben also Folgendes eingesehen: Will man den Abstand eines Punktes P zu einer Ebene E bestimmen, so dreht sich alles um den Term

$$\frac{a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P + d}{\|\vec{n}_E\|}.$$

Falls der Punkt P in demjenigen Halbraum liegt, in den hinein der Normalenvektor der Ebene zeigt, dann ist dieser Term > 0 und liefert direkt den gesuchten Abstand. Liegt aber der Punkt im anderen Halberaum, so ist dieser Term negativ, und dann erhält man den gesuchten Abstand, indem man noch den Betrag nimmt.

Merke:

Der Abstand des Punktes $P\,(x_P, y_P, z_P)$ von der Ebene $E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ ist gleich

$$D = \left| \frac{a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P + d}{\|\vec{n}_E\|} \right|.$$

Ist der Term

$$\frac{a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P + d}{\|\vec{n}_E\|}$$

positiv, so zeigt $\vec{n}_E$ in denjenigen Halbraum, in welchem P liegt. Ist der Term aber negativ, so zeigt $\vec{n}_E$ in den anderen Halbraum.

Analog kann man für die Anschauungsebene Folgendes zeigen.

Der Abstand des Punktes $P\,(x_P, y_P)$ von der Ebene $E : a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ ist gleich

$$D = \left| \frac{a \cdot x_P + b \cdot y_P + c}{\|\vec{n}_E\|} \right|.$$

Ist der Term

$$\frac{a \cdot x_P + b \cdot y_P + c}{\|\vec{n}_E\|}$$

positiv, so zeigt $\vec{n}_E$ in diejenige Halbebene, in welchem P liegt. Ist der Term aber negativ, so zeigt $\vec{n}_E$ in die andere Halbebene.

Beispiel: Welchen Abstand hat der Punkt $P(7, 0, -2)$ von der Ebene $E : x-5y-z+9 = 0$? Dazu benützen wir einfach die oben hergeleitete Formel:

$$D = \left| \frac{1 \cdot 7 - 5 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) + 9}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} \right|$$
$$= \left| \frac{18}{\sqrt{27}} \right| = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Noch ein Beispiel: Liegen der Ursprung und der Punkt $Q(1, 3, 2)$ auf derselben Seite der Ebene $F : x - 2y + z + 1 = 0$ oder nicht? Wir berechnen für beide Punkte den Wert des Terms

$$\frac{a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P + d}{\|\vec{n}_E\|}$$

Für den Ursprung erhalten wir einen positiven Wert. Es ist einerlei, welcher Wert das genau ist, entscheidend ist ja nur, dass der Normalenvektor offenbar in denjenigen Halbraum zeigt, in welchem sich der Ursprung befindet. Setzen wir dagegen den Punkt Q ein, so ergibt sich ein negativer Wert. Darum muss Q im anderen Halbraum liegen.

Zum Schluss sollten wir noch erklären, was man unter der *Hesse-Normalform* (HNF), benannt nach dem deutschen Mathematiker Otto Hesse, versteht. Wir haben schon früher deutlich gemacht, dass man die Koordinatengleichung einer Geraden oder einer Ebene mit einer beliebigen reellen Zahl (ungleich 0) multiplizieren kann, ohne dass man dadurch am geometrischen Objekt etwas ändert. Die Lösungsmenge der Gleichung bleibt unverändert, und somit wird sie vor und nach der Multiplikation von exakt derselben Punktmenge erfüllt.

Unter der HNF versteht man nun eine Art normierte Geraden- respektive Ebenengleichung. Sie entsteht dadurch, dass man die „gewöhnliche" Koordinatengleichung mit der Zahl $1/\|\vec{n}\|$ multipliziert.

Definition: (HNF von Gerade)
Es gilt für Geraden

$$g : \quad \frac{a \cdot x + b \cdot y + c}{\|\vec{n}_g\|} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{a \cdot x + b \cdot y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

Es gilt für Ebenen analog

$$E : \quad \frac{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d}{\|\vec{n}_E\|} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

Beispielsweise gilt für die Ebene $E : 2x-2y+z+4 = 0$, dass $\|\vec{n}_E\| = 3$ ist, und darum hat diese Ebene die folgende HNF:

$$E : \frac{2}{3} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot y + \frac{1}{3} \cdot z + \frac{4}{3} = 0.$$

Was sind die Vorteile dieser Darstellung? Zum einen findet man den Abstand irgendeines Punktes zu dieser Ebene direkt durch Einsetzen der Punkt-Koordinaten in die HNF, wobei man freilich die oben erläuterte Bedeutung des Vorzeichens nicht vergessen darf. Zum anderen gibt die Konstante d (in diesem Beispiel $4/3$) gerade den Abstand des Ursprungs von der Ebene an.