Vektorprodukt

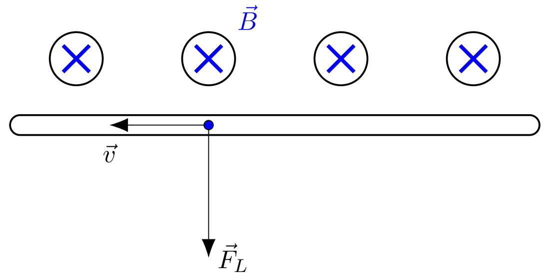
[Vektorgeometrie]

Armin P. Barth

ETH zürich

Lorentzkraft als Vorbild

Bewegt sich eine elektrische Ladung in einem magnetischen Feld, so erfährt sie eine Kraft, die nach ihrem Entdecker, dem niederländischen Mathematiker und Physiker Hendrik Lorentz, *Lorentzkraft* (im engeren Sinne) genannt wird.



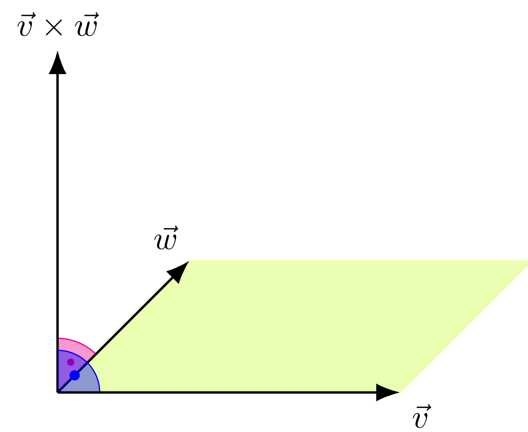
Genauer: Bewegt sich eine positive Ladung q in einem Leiter mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$, und befindet sich der Leiter in einem Magnetfeld $\vec{B}$, so erfährt die Ladung eine Kraft $\vec{F}_L$, welche sowohl senkrecht zur Geschwindigkeit als auch senkrecht zu den Magnetfeldlinien gerichtet ist und nach der *Rechte-Hand-Regel* beschrieben werden kann. Bei dieser Regel richtet man den Daumen der rechten Hand in Richtung der Geschwindigkeit und den Zeigefinger in Richtung der Magnetfeldlinien (in der Abbildung ins Blatt hinein) aus. Dann wird der Mittelfinger gerade die Richtung der Lorentzkraft anzeigen. Bei negativen Ladungen müsste man entsprechend mit der linken Hand arbeiten. Im sogenannten „Leiterschaukelversuch“ kann die Wirkung dieser Kraft probat demonstriert werden.

Dieses Phänomen ist überaus wichtig; so kann damit etwa die Funktionsweise eines einfachen Elektromotors erklärt werden. Damit ist die Lorentzkraft ein wichtiges Bindeglied zwischen Elektrizität und Mechanik.

Zur mathematischen Beschreibung dieses Sachverhalts ist offenbar eine Operation nötig, die zwei gegebene Vektoren in einen neuen Vektor umwandelt, welcher senkrecht auf jedem der Inputvektoren steht. In Anlehnung an die Lorentzkraft und andere physikalische Vorbilder wurde in der Vektorgeometrie eine Operation eingeführt, die genau dieses Verhalten modelliert: das *Vektorprodukt*. Es ordnet also zwei Inputvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einen neuen Vektor $\vec{v}\times\vec{w}$ (lies: „v Kreuz w“) zu: $\vec{v}, \vec{w} \mapsto \vec{v} \times \vec{w}$

Es soll betont werden, dass diese Operation, wenn sie einmal genau definiert ist, auch innerhalb der Mathematik bemerkenswerte und erfreuliche Vorzüge hat, auf die wir bald detailliert eingehen werden.

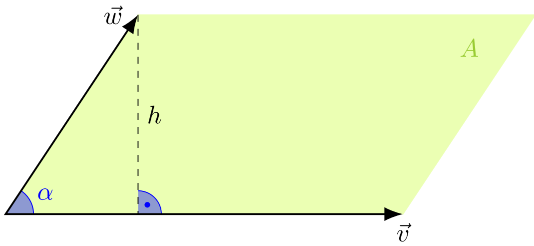
Definition des Vektorproduktes



Wir gehen also davon aus, dass zwei nichtkollineare Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gegeben sind, die im Einführungsbeispiel die Rolle der Geschwindigkeit und des Magnetfeldes gespielt haben. Diesen Inputvektoren soll nun durch eine neue Operation ein Outputvektor zugeordnet werden. Es ist klar, dass es nicht genügt zu fordern, dass der Output unserer neuen Operation ein Vektor sein soll, der auf der von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Ebene senkrecht steht, denn solche gibt es unendlich viele. Wir müssen diese Forderung vielmehr in zweierlei Hinsicht präzisieren: Wir sollten etwas über die Länge des neuen Vektors sagen und ebenfalls etwas über die Richtung.

Zuerst zur Länge: Es hat sich als praktisch herausgestellt, die Länge so festzulegen, dass sie gerade der Masszahl der Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht.

Damit ist jetzt schon klar, wie die genaue Länge unseres neuen Vektors sein muss:



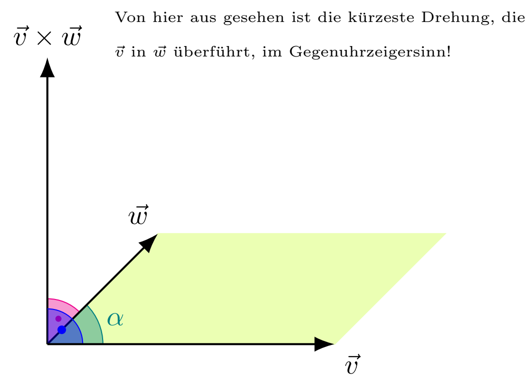
Bezeichnet α nämlich den von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkel, so findet man mit ein wenig Trigonometrie:

$$A = \|\vec{v}\| \cdot h = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\alpha).$$

Also:

$$A = \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\alpha).$$

Der den beiden Inputvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zugeordnete Vektor soll also senkrecht auf diesen beiden stehen und als Länge gerade die Masszahl der Fläche des aufgespannten Parallelogramms haben. Nun besteht noch immer Unsicherheit bezüglich der Richtung. Und hierbei orientieren wir uns an dem physikalischen Vorbild; das heisst, wir legen die Richtung so fest, dass die Rechte-Hand-Regel eingehalten wird. Noch genauer: Der Outputvektor soll in diejenige Richtung zeigen, aus welcher die kürzeste Drehung, die $\vec{v}$ in $\vec{w}$ überführt, als Gegenuhrzeigersinn erscheint.



Damit wird der Rechte-Hand-Regel Genüge getan. Man sagt auch, die drei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ (genau in dieser Reihenfolge) bilden ein sogenanntes *Rechtssystem*.

Mit diesen drei Angaben ist das Vektorprodukt präzise und eindeutig definiert. Wir prägen uns gut ein:

Definition:
Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei nicht-kollineare Vektoren, so versteht man unter dem ***Vektorprodukt*** *der beiden Vektoren den (eindeutigen) Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ mit den folgenden drei Eigenschaften:*

1. *Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht senkrecht auf der durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Ebene.*

2. *Die Länge des Vektors $\vec{v} \times \vec{w}$ entspricht der Masszahl der Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms.*

3. *Die drei Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ (genau in dieser Reihenfolge) bilden ein* ***Rechtssystem*** *und genügen somit der* ***Rechte-Hand-Regel****.*

Für kollineare Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ definiert man zudem: $\vec{v} \times \vec{w} = 0$.

Jetzt, da das Vektorprodukt präzise definiert ist, sollten wir unbedingt noch ergänzen, dass sich die Lorentzkraft nach folgender Formel berechnet:

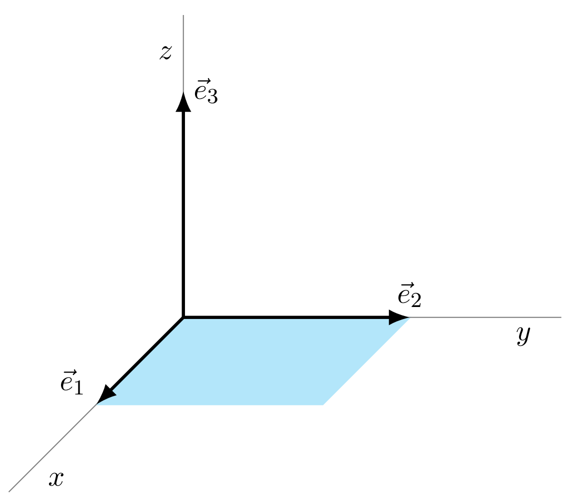
$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Obige Definition legt das Vektorprodukt zwar geometrisch eindeutig fest; aber sie erlaubt uns nicht, den zwei Inputvektoren zugeordneten Vektor konkret zu *berechnen*.

Immerhin können wir schon jetzt allein aus der Anschauung einige wenige Vektorprodukte bestimmen. Bilden $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ wiederum die Standardbasis des Anschauungsraumes, so ist nämlich

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3.$$

Das sieht man sofort, wenn man den Daumen der rechten Hand in Richtung der positiven x-Halbachse und den Zeigefinger in Richtung der positiven y-Halbachse ausstreckt und zudem bedenkt, dass das von diesen beiden Vektoren aufgespannte Parallelogramm gerade den Flächeninhalt 1 hat.



In ähnlicher Weise kann man einsehen, dass

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2. \end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Vorsicht bei Gesetzen!

Schon diese einfachen Beispiele machen deutlich, dass das Vektorprodukt keine kommutative Operation ist - im Gegensatz etwa zum Skalarprodukt. Allgemein gilt offenbar:

$$\vec{w} \times \vec{v} = -\left(\vec{v} \times \vec{w}\right).$$

Auch das Assoziativgesetz gilt hier im Allgemeinen nicht. Würde es gelten, so müssten die beiden Seiten ja so lauten:

Linke Seite: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

Rechte Seite: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Während die linke Seite aber einen Vektor in der durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene darstellt, ist die rechte Seite ein Vektor, der in der von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Ebene liegt; im Allgemeinen können diese beiden Vektoren sicher nicht gleich sein.

Nun haben wir schon ein recht klares Bild von dieser neuen Operation gewonnen. Und wir können auch schon erahnen, dass sie auch für die Vektorgeometrie Wertvolles leisten wird. Denn: Sie liefert sofort die zu einer Ebene senkrechte Richtung. Und sie kann auch helfen, Flächeninhalte von Polygonen zu bestimmen, die irgendwie im Anschauungsraum liegen. Jedes Polygon kann ja in Dreiecke zerlegt, und jedes Dreieck kann als halbes Parallelogramm aufgefasst werden. Und den Inhalt eines Parallelogramms findet man leicht durch Norm-Bildung bei einem geeigneten Vektorprodukt. Es zeichnen sich also schon jetzt tolle Anwendungen ab. Aber es fehlt uns etwas ganz Entscheidendes: Eine Formel zur *Berechnung* eines Vektorproduktes. Das muss jetzt schleunigst erarbeitet werden.

Berechnung des Vektorproduktes

Unser Plan sieht so aus: Wir gehen von zwei beliebigen nicht-kollinearen Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus und suchen gezielt nach einem Vektor $\vec{x}$, welcher die Bedingung (1) in obiger Definition erfüllt, welcher also senkrecht auf beiden Inputvektoren steht. Um die Erfüllung der Bedingungen (2) und (3) kümmern wir uns nachher.

Da der gesuchte Vektor $\vec{x}$ auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht stehen soll, muss folgendes gelten:

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & \vec{v}\cdot\vec{x} & = & 0 \\ \mathrm{II} & \vec{w}\cdot\vec{x} & = & 0 \end{array}$$

Ausgeschrieben ergibt das

$$\begin{array}{r|rcl} \mathrm{I} & v_1\cdot x_1 + v_2\cdot x_2 + v_3\cdot x_3 & = & 0 \\ \mathrm{II} & w_1\cdot x_1 + w_2\cdot x_2 + w_3\cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

Können wir aus diesen Gleichungen den Vektor $\vec{x}$ bestimmen? Nein, natürlich nicht. Zum einen sind das ja nur zwei Gleichungen in drei Unbekannten (x_1, x_2, x_3), wir haben also zu wenig Information. Zum anderen ist das auch ganz klar: Das Gleichungssystem fordert ja einzig, dass $\vec{x}$ senkrecht auf zwei Inputvektoren stehen soll. Und da es unendlich viele Vektoren mit dieser Eigenschaft gibt, können wir nicht erwarten, aus dem System sofort den einen gesuchten Vektor zu finden. Aber wir können sicherlich *einen* Vektor mit der Eigenschaft (1) bestimmen. Einen von unendlich vielen.

Dazu reduzieren wir das System einfach um eine Gleichung und eine Unbekannte. Addieren wir $w_3\cdot\mathrm{I}$ zu $(-v_3)\cdot\mathrm{II}$, so können wir damit die dritte Unbekannte eliminieren:

$$\begin{array}{r|rcl|l} \mathrm{I} & v_1\cdot x_1 + v_2\cdot x_2 + v_3\cdot x_3 & = & 0 & \cdot w_3 \\ \mathrm{II} & w_1\cdot x_1 + w_2\cdot x_2 + w_3\cdot x_3 & = & 0 & \cdot(-v_3) \end{array}$$

also

$$(v_1w_3 - v_3w_1)\cdot x_1 + (v_2w_3 - v_3w_2)\cdot x_2 = 0.$$

Wie muss man diese Gleichung einordnen? Da ja alle Komponenten der beiden Inputvektoren bekannt sind, sind die Klammern einfach gegebene Zahlen. Im konkreten Fall könnte die Gleichung also so aussehen:

$$5\cdot x_1 + 7\cdot x_2 = 0$$

Eine solche lineare Gleichung in zwei Unbekannten hat unendlich viele Lösungen; das haben wir oben schon festgehalten. Aber es ist ein Leichtes, Lösungen anzugeben: Man kann ja etwa für x_1 irgendeine Wahl treffen, und dann x_2 passend dazu bestimmen. Was wäre eine besonders naheliegende Weise, das zu tun?

$$\overset{\cdot(-1)}{5\cdot x_1 + 7\cdot x_2}$$

Besonders naheliegend wäre sicher, für x_1 den Wert 7 und für x_2 das Negative von 5 zu wählen. Damit wäre die Aussageform auf alle Fälle erfüllt. Zurückkommend auf unsere allgemeine Herleitung bedeutet das, dass wir sicherlich *einen* Vektor $\vec{x}$ finden, wenn wir die ersten beiden Komponenten wie folgt wählen:

$$x_1 = v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2$$
$$x_2 = -\left(v_1 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_1\right).$$

Durch Einsetzen in entweder I oder II können wir dann die zugehörige dritte Vektorkomponente berechnen:

$$x_3 = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1.$$

Das Nachrechnen überlassen wir den interessierten Leserinnen und Lesern. Insgesamt können wir einen Teilerfolg verbuchen, nämlich diesen:

Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei beliebige nicht-kollineare Vektoren, so ist der folgende Vektor sicherlich senkrecht auf der von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Ebene, erfüllt also Bedingung (1) der Definition:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ -\left(v_1 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_1\right) \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$

Das wollen wir gleich ausprobieren. Betrachten wir dazu die beiden Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gemäss obiger Formel ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 0 \\ -\left(1 \cdot 2 - (-2) \cdot 4\right) \\ 1 \cdot 0 - 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor ist also sicherlich senkrecht auf den beiden Inputvektoren, was sich auch ganz einfach mit dem Skalarprodukt überprüfen lässt. Betrachten wir ein zweites Beispiel:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hierzu erhalten wir den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist das überraschend? Die beiden Inputvektoren liegen in der $x_1 - x_2$-Ebene; es ist darum klar, dass der Vektor $\vec{x}$ „nach oben“ zeigen muss; er genügt der Bedingung (1). Wir wissen zudem, dass das von den beiden Inputvektoren aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 1 hat, weil wir uns das Parallelogramm leicht vorstellen können. Unser Vektor $\vec{x}$ hat die Norm 1, das heisst, er erfüllt auch noch die Bedingung (2). Und wenn man die drei Vektoren „in die rechte Hand nimmt“, stellt man fest, dass er auch Bedingung (3) erfüllt. Ist das ein Zufall? Wir hatten all die obigen Rechnungen ausgeführt, um (1) zu erfüllen; und nun erfüllt unser Vektor - gewissermassen gratis - auch noch (2) und (3). Das ist überraschend, und es ist klar, dass wir darüber mehr sagen müssen. Zuvor machen wir aber einen kleinen Abstecher zu den sogenannten Determinanten.

Determinanten

Wir greifen etwas vor und geben hier eine auf Leibniz zurückgehende Definition der *Determinante* an: Ist A eine $n \times n$ -Matrix, so kann ihr die folgende skalare Grösse zugeordnet werden:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Dabei wird die Summe über alle Permutationen σ der Gruppe S_n genommen, und $\operatorname{sgn}(\sigma)$, das Vorzeichen einer Permutation, ist 1 oder -1, je nachdem, ob die Anzahl Fehlstände gerade oder ungerade ist. Das ist an dieser Stelle vermutlich unverständlich, und darum wollen wir uns sofort auf das beschränken, was uns hier wichtig ist: Für eine 2×2 -Matrix A ergibt Leibniz' Formel nämlich dies:

Determinante einer 2×2 -Matrix A

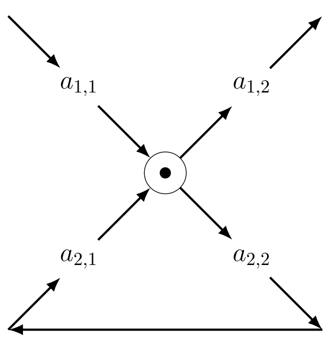
Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}. \end{aligned}$$

Offenbar berechnet man die Determinante einer solchen Matrix nach dem folgenden Schema:



Man rechnet also „übers Kreuz", steigt oben links ein, multipliziert die beiden Einträge der ersten Diagonalen und subtrahiert dann das Produkt der Einträge der zweiten Diagonalen. Aufmerksamen Leserinnen und Lesern ist es bestimmt schon aufgefallen: Jede der drei Komponenten unseres Vektors $\vec{x}$ hat exakt die Form einer Determinante einer 2×2 -Matrix. Wir können den Vektor also wie folgt notieren, und das hat den grossen Vorteil, dass man sich die einzelnen Komponenten einfacher einprägen kann:

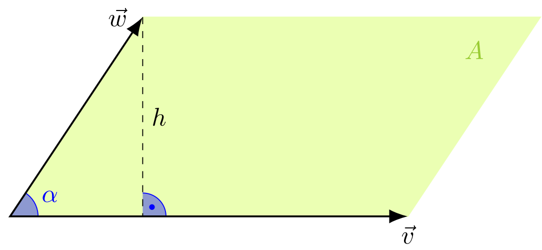
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Allerdings muss man sich fragen, ob es sich überhaupt lohnt, sich diesen Vektor gut einzuprägen, denn es ist ja bloss ein Vektor, der Bedingung (1) der Vektorprodukt-Definition erfüllt. Es lässt sich vermuten, dass wir diesen Vektor in Länge und Richtung noch verändern müssen, damit auch die Bedingungen (2) und (3) erfüllt sind. Dazu gibt es eine überraschend gute Nachricht: Dieser Vektor erfüllt die Bedingungen (2) und (3) auch; wir haben also gerade den richtigen Vektor gefunden. Toll, nicht wahr!?

Eigenschaften (2) und (3) gelten auch!

Natürlich muss man das verifizieren. Wir behaupten also, unser Vektor $\vec{x}$ hat gerade die richtige Länge. Seine Norm entspricht also dem Inhalt des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms. Wie können wir das überprüfen? Nun ja, ziemlich „straight forward", indem wir die Fläche des Parallelogramms berechnen und dann mit der Norm unseres Vektors vergleichen.

Betrachten wir dazu erneut das Parallelogramm:



Den Flächeninhalt haben wir weiter oben schon bestimmt. Um Wurzelterme zu vermeiden, gehen wir gleich zum Quadrat des Flächeninhaltes über:

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \sin^2(\alpha) \\
&= \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \left(1-\cos^2(\alpha)\right) \\
&= \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \cos^2(\alpha) \\
&= \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v}\cdot\vec{w})^2 \\
&= \left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)\cdot\left(w_1^2+w_2^2+w_3^2\right) \qquad (\star) \\
&\quad - (v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)^2
\end{aligned}
$$

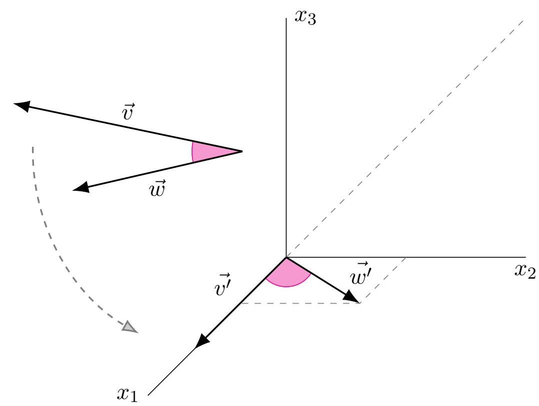
Über die Norm des Vektors $\vec{x}$ andererseits wissen wir:

$$
\begin{aligned}
\|\vec{x}\|^2 = &(v_2w_3-v_3w_2)^2+(v_1w_3-v_3w_1)^2 \\
&+(v_1w_2-v_2w_1)^2 \qquad (\star\star)
\end{aligned}
$$

Fleissige Rechnerinnen und Rechner können nun verifizieren, dass $(\star)$ und $(\star\star)$ identische Terme sind. Wir verzichten hier aber gerne darauf.

Nun da wir gezeigt haben, dass unser Vektor $\vec{x}$ sowohl Eigenschaft (1) als auch Eigenschaft (2) erfüllt, müssen wir uns nur noch davon überzeugen, dass auch seine Richtung stimmt, dass also $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{x}$ (genau in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem bilden.

Um das zu klären, verlagern wir die beiden Inputvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ im Raum so, dass der erste Vektor in Richtung der positiven x_1-Halbachse zu liegen kommt und der zweite so in der x_1-x_2-Ebene liegt, dass seine zweite Koordinate positiv ist. Das ist immer möglich. Freilich tun wir das so, dass der Zwischenwinkel der beiden Vektoren sich nicht ändert. In dieser neuen Lage nennen wir die beiden Vektoren $\vec{v'}$ und $\vec{w'}$.



Während dieser Bewegung ändert sich der Zwischenwinkel nicht und ändern die Normen der Vektoren nicht. Zudem verändern sich die Koordinaten der Vektoren stetig. Darum ändern sich auch die Koordinaten des Vektorproduktes, welche wir nach unserer Formel für $\vec{x}$ berechnen, stetig. Wir können also sagen, dass, falls unsere $\vec{x}$-Formel am Ende die Bedingung (3) einhält, sie das auch am Anfang tut. Warum gewährleistet die Formel am Ende der Bewegung ein Rechtssystem? Ganz einfach, weil in der Endlage der beiden Vektoren Folgendes gilt:

$$
\vec{v'} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w'} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

mit $v_1 > 0$ und $w_2 > 0$. Für diese Vektoren liefert unsere $\vec{x}$-Formel den Output

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 \cdot w_2 \end{pmatrix}.
$$

Wegen $v_1 > 0$ und $v_2 > 0$ zeigt dieser Vektor sicherlich „nach oben“, in Richtung der positiven x_3-Halbachse. Daher ist Bedingung (3) erfüllt; $\vec{v'}, \vec{w'}$ und $\vec{x}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem. Und darum gilt das auch für $\vec{v}, \vec{w}$ und $\vec{x}$.

Damit ist alles gezeigt. Wir wissen nun, dass unser Vektor $\vec{x}$ alle drei Bedingungen der Definition des Vektorproduktes erfüllt, obwohl wir uns bei seiner Konstruktion ja lediglich an Bedingung (1) orientiert haben. Toll, nicht wahr!?

Wir wollen uns gut einprägen, dass wir nun in der Lage sind, ein Vektorprodukt rechnerisch zu bestimmen.

Merke:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

Wir besprechen im Folgenden drei besonders häufige und ansprechende vektorgeometrische Vorzüge dieser neuen Operation.

Ebene durch drei Punkte

Angenommen, wir wollen eine Gleichung finden für die Ebene durch drei gegebene Punkte, etwa $A(4, -2, 1)$, $B(0, 1, 3)$ und $C(-1, 5, 5)$. Wir können dieses Problem bereits lösen, keine Frage. Aber wir können es nun bedeutend einfacher lösen! Warum das? Die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ spannen die gesuchte Ebene auf, und das Vektorprodukt dieser beiden Vektoren ist ein Vektor, welcher senkrecht auf dieser Ebene steht. Er ist somit ein Normalenvektor der gesuchten Ebene. Und diesen berechnen wir jetzt.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix} = \vec{n}_E$$

Da dies ein Normalenvektor der gesuchten Ebene ist, können wir die Koordinatengleichung der Ebene schon beinahe fertig hinschreiben:

$$E : -2x + 6y - 13z + d = 0.$$

Durch Einsetzen eines Punktes finden wir auch noch d,

$$A(4, -2, 1) \in E$$

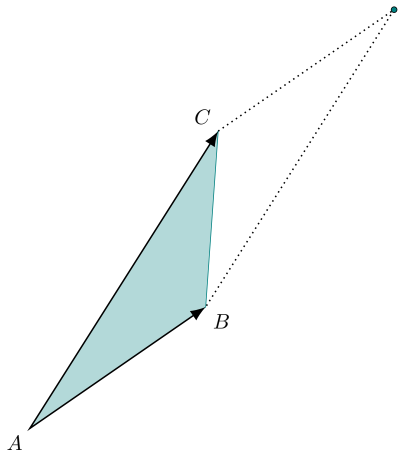
also $d = 33$. Damit haben wir die Ebene bestimmt,

$$E : -2x + 6y - 13z + 33 = 0.$$

Inhalt eines Dreiecks

Die eben verwendeten drei Punkte $A(4, -2, 1)$, $B(0, 1, 3)$ und $C(-1, 5, 5)$ sind nicht kollinear und bilden daher ein Dreieck im Anschauungsraum. Wäre es nicht praktisch, wir könnten den Flächeninhalt eines Dreiecks ganz einfach aus den Koordinaten der Eckpunkte berechnen?

Dank dem Vektorprodukt ist da ganz einfach möglich.



Das Vektorprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ liefert einen Vektor, der normal auf beiden Inputvektoren und damit normal auf der Ebene steht, die durch das Dreieck definiert wird. Aber das ist hier nicht das Entscheidende. Entscheidend ist, dass wir ja wissen, dass die Norm des Vektorproduktes gerade die Masszahl der Fläche des Parallelogramms ist, welches von den Inputvektoren aufgespannt wird. Der gesuchte Flächeninhalt ist darum gleich

$$\text{Fl.}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|.$$

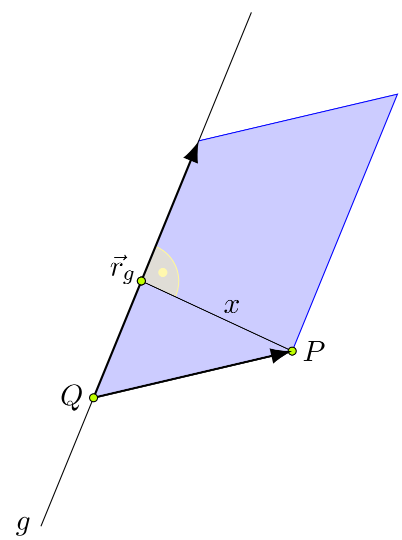
Da wir dieses Vektorprodukt weiter oben schon berechnet haben, folgt sofort:

$$\begin{aligned}\text{Fl.}\,(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-13)^2} \\ &= \frac{\sqrt{209}}{2}.\end{aligned}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Dank der Hesse-Normalform können bekanntlich einige Abstandprobleme gelöst werden: Abstand zwischen Punkt und Gerade in der Anschauungsebene und Abstand zwischen Punkt und Ebene im Anschauungsraum. Aber den Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden im Raum kann man damit nicht finden, weil es zu einer Geraden im Raum keine eindeutige Normalen-Richtung gibt.

Selbstverständlich lässt sich ein solcher Abstand ohne Vektorprodukt berechnen, wie interessierte Leserinnen und Leser sicher leicht herausfinden können. Aber der Weg ist etwas beschwerlich. Und hier nun kann das Vektorprodukt eine wirklich elegante Alternative beisteuern.



Es sei also eine Gerade g im Anschauungsraum gegeben. Wir kennen von der Geraden daher auf jeden Fall einen Punkt Q sowie einen Richtungsvektor $\vec{r}_g$. Zudem sei ein Punkt P

gegeben, dessen Abstand zu der Geraden bestimmt werden soll. Die Abbildung zeigt deutlich, dass die beiden Vektoren $\overrightarrow{QP}$ und $\vec{r}_g$ ein Parallelogramm aufspannen, dessen eine Höhe gerade den gesuchten Abstand darstellt. Den Flächeninhalt des Parallelogramms finden wir leicht als Norm des Vektorproduktes. Es ist also

$$\left\| \overrightarrow{QP} \times \vec{r}_g \right\| = \|\vec{r}_g\| \cdot x$$

und somit

$$x = \frac{\left\| \overrightarrow{QP} \times \vec{r}_g \right\|}{\|\vec{r}_g\|}.$$