ETH zürich

D MAVT

Dr. Paolo Tiso

Technische Mechanik
151-0223-10

Vorlesung 03

Kinematik des ebenen Starrkörpers
Kinematic of plane rigid body

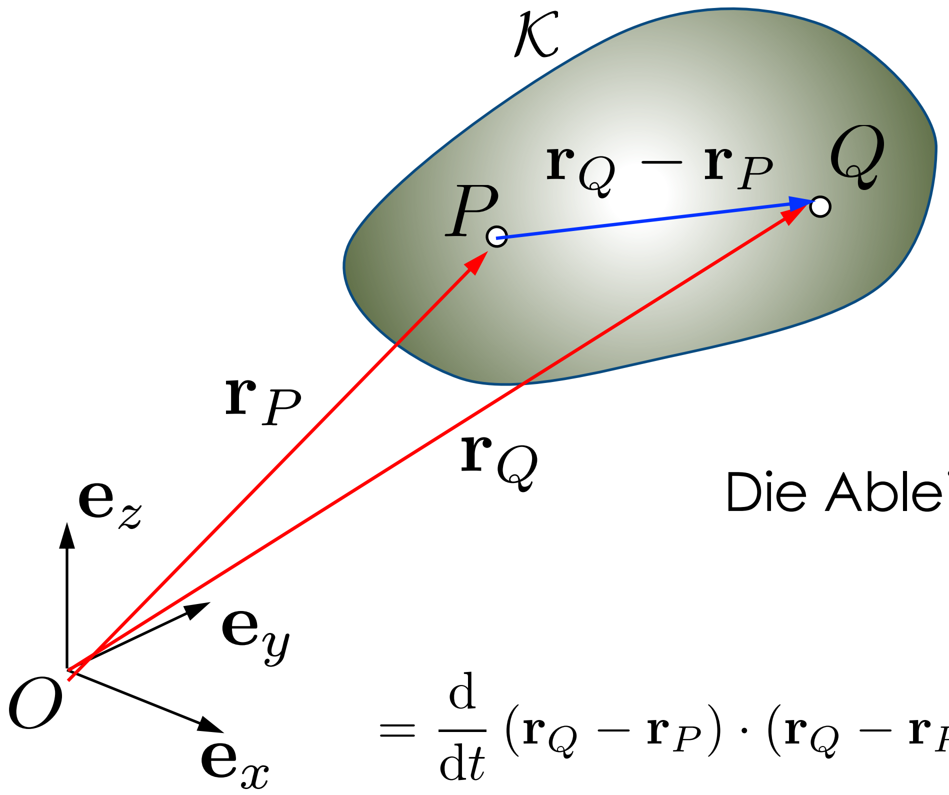
Herbstsemester 2025

Letzte Aktualisierung: 29.09.2025 20:28

3.1 Starrkörper

3.1 Rigid body

Definition: Der Abstand zwischen zwei zum Körper gehörenden Punkten ist constant:



$$\forall P, Q \in \mathcal{K} \quad |\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P| = \text{Konst.}$$

Äquivalent kann mann auch schreiben:

$$|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P|^2 = (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) \cdot (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) = \text{Konst.}$$

Die Ableitung nach Zeit ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) \cdot (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P)\right) =$$

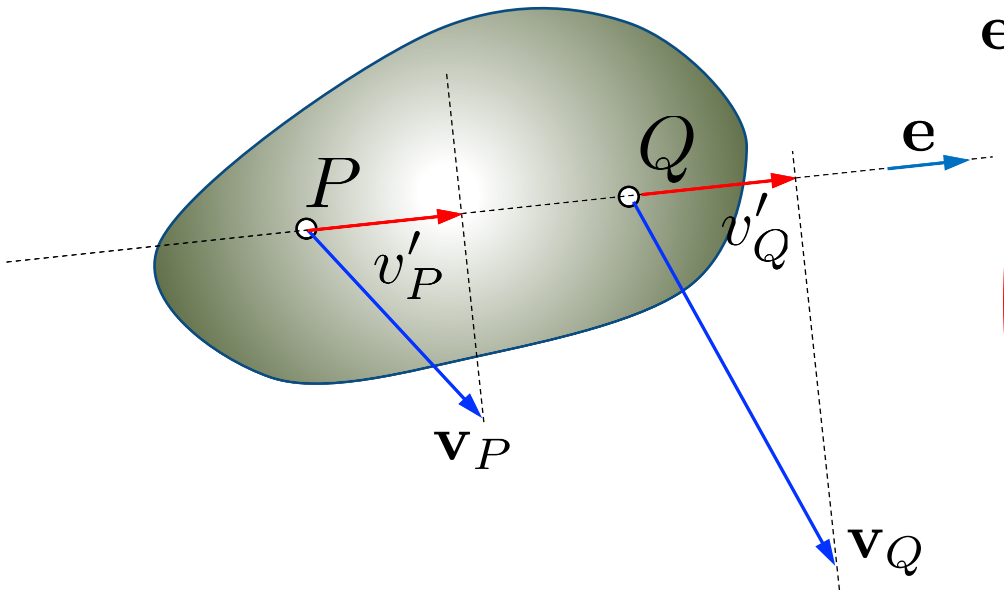
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) \cdot (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) + (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) = 2(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) \cdot (\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P) = 0$$

Es ist möglich, einen Einheitsvektor **e** zu definieren, der in die Richtung von PQ zeigt:

$$\frac{(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P)}{|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P|} \cdot (\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P) = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P) = 0$$

3.2 Satz der Projizierten Geschwindigkeiten

3.2 Theorem of projected velocities



$$\mathbf{e}\cdot(\mathbf{v}_Q-\mathbf{v}_P)=0 \Rightarrow \mathbf{v}_Q\cdot\mathbf{e}=\mathbf{v}_P\cdot\mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{v}'_Q=\mathbf{v}'_P$$

***S**atz **d**er **p**rojizierten **G**eschwindigkeiten (**SdpG**)*

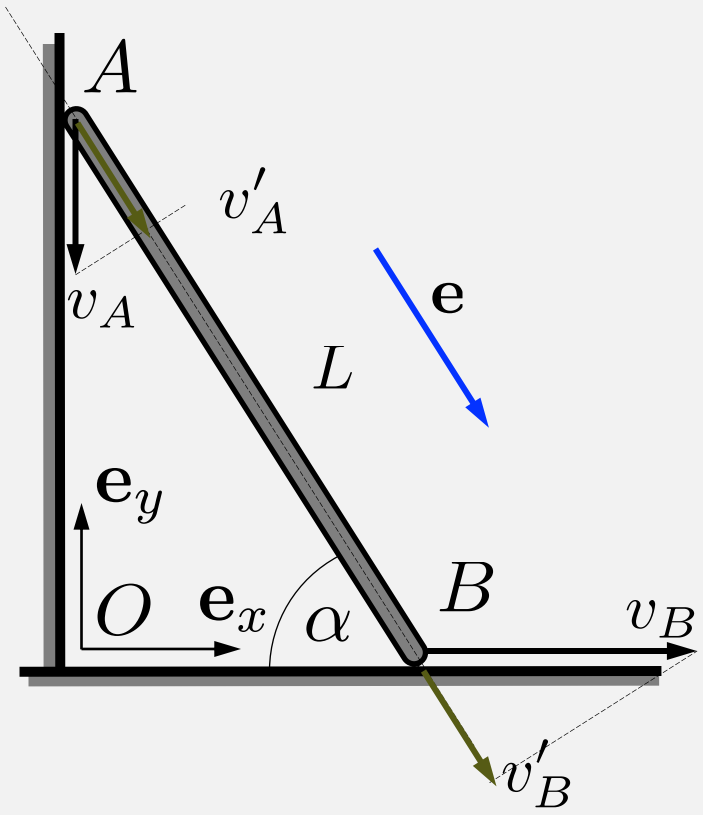
$$|\mathbf{r}_Q-\mathbf{r}_P| = \text{Konst. } \forall P,Q\in\mathcal{K} \rightarrow \mathbf{v}_Q\cdot\mathbf{e}=\mathbf{v}_P\cdot\mathbf{e}$$

wo $\mathbf{e}=\dfrac{\mathbf{r}_Q-\mathbf{r}_P}{|\mathbf{r}_Q-\mathbf{r}_P|}$

«Die Projektionen v'_P und v'_Q der Geschwindigkeit von zwei beliebigen Punkten P und Q eines starren Körper sind gleich"

3.2 Satz der Projizierten Geschwindigkeiten

Beispiel 3.1: Geführter Stab



Was ist die Beziehung zwischen $\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{v}_B$?.

Den Bindungen gemäss:

$$\mathbf{v}_A = -v_A \mathbf{e}_y \qquad \mathbf{v}_B = v_B \mathbf{e}_x$$

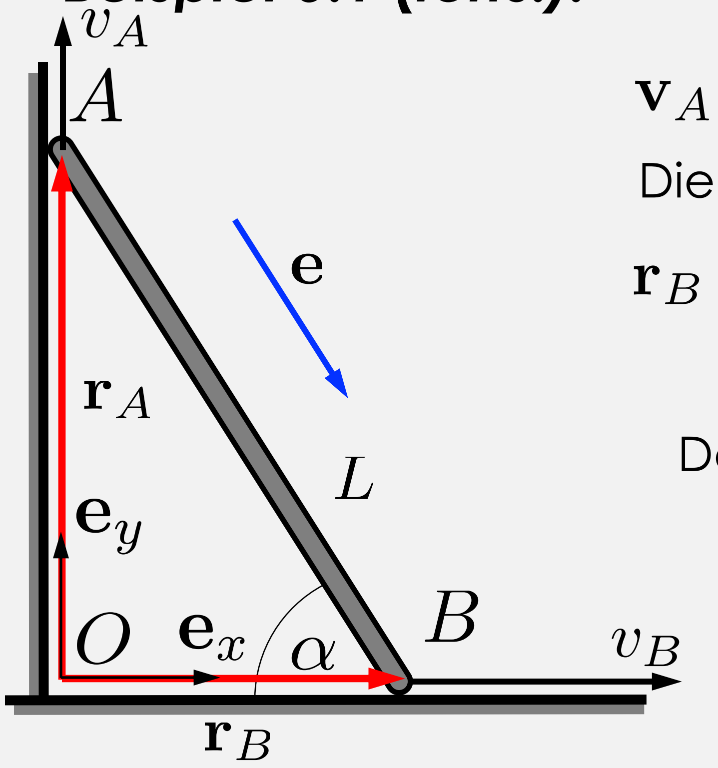
Es muss also eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten von A und B vorhanden sein. Um dies zu ermitteln, kann man die SdpG anwenden.

Geschwindigkeiten von A und B auf AB projizieren:

$$\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{e} = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{e} \quad v'_A = v'_B \rightarrow v_A \sin\alpha = v_B \cos\alpha \rightarrow v_B = v_A \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = v_A \tan\alpha$$

3.2 Satz der Projizierten Geschwindigkeiten

Beispiel 3.1 (forts.): Wenn das Vorzeichen der Geschwindigkeit nicht im Voraus bekannt ist:



$$\mathbf{v}_A = v_A \mathbf{e}_y \qquad \mathbf{v}_B = v_B \mathbf{e}_x$$

Die entsprechenden Ortsvektoren sind einfach:

$$\mathbf{r}_B = L \cos\alpha \mathbf{e}_x \qquad \mathbf{r}_A = L \sin\alpha \mathbf{e}_y$$

Der Einheitsvektor in Richtung des Stabes wird wie folgt ausgedrückt:

$$\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = L \cos\alpha \mathbf{e}_x - L \sin\alpha \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|} = \frac{L \cos\alpha \mathbf{e}_x - L \sin\alpha \mathbf{e}_y}{L} = \cos\alpha \mathbf{e}_x - \sin\alpha \mathbf{e}_y$$

Jetzt kann man den SdpG anwenden:

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{e} = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{e} \to v_A \mathbf{e}_y \cdot (\cos\alpha \mathbf{e}_x - \sin\alpha \mathbf{e}_y) = v_B \mathbf{e}_x \cdot (\cos\alpha \mathbf{e}_x - \sin\alpha \mathbf{e}_y)$$

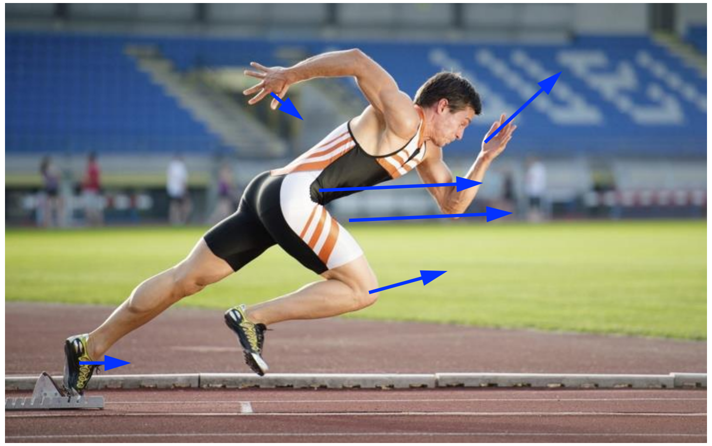
$$-v_A \sin\alpha = v_B \cos\alpha \to v_B = -v_A \tan\alpha$$

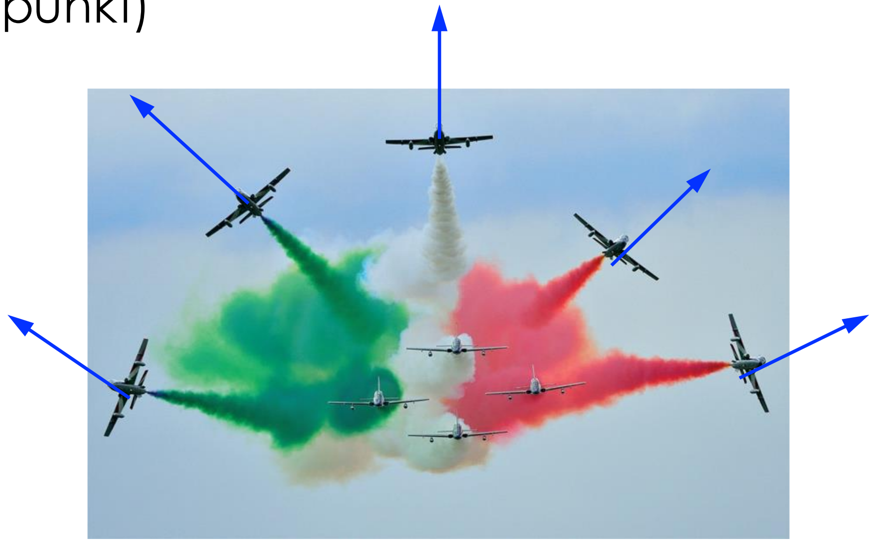
Negative Forzeichen!

3.3 Momentaner Bewegungszustand

3.3 Instantaneous act of motion

Wir interessieren uns für ***momentanen Bewegungszustand***
(Geschwindigkeiten zu einem bestimmten Zeitpunkt)

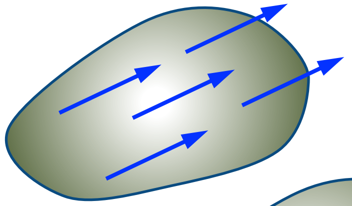




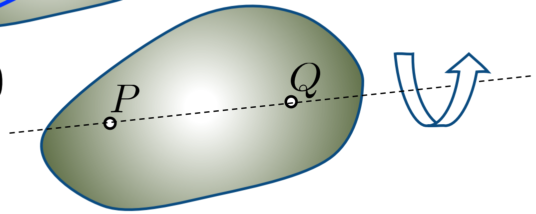
3.4 Bewegungsarte

3.4 types of motion

- ***Starre Bewegung*** : SdpG zu jedem Zeitpunkt erfüllt (Körper kann auch nicht starr sein!)
  - ***Translation***: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}\ \forall P \in \mathcal{K}$



  - ***Rotation***: $\exists P, Q \in \mathcal{K}\ |\mathbf{v}_P = \mathbf{0}, \mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$



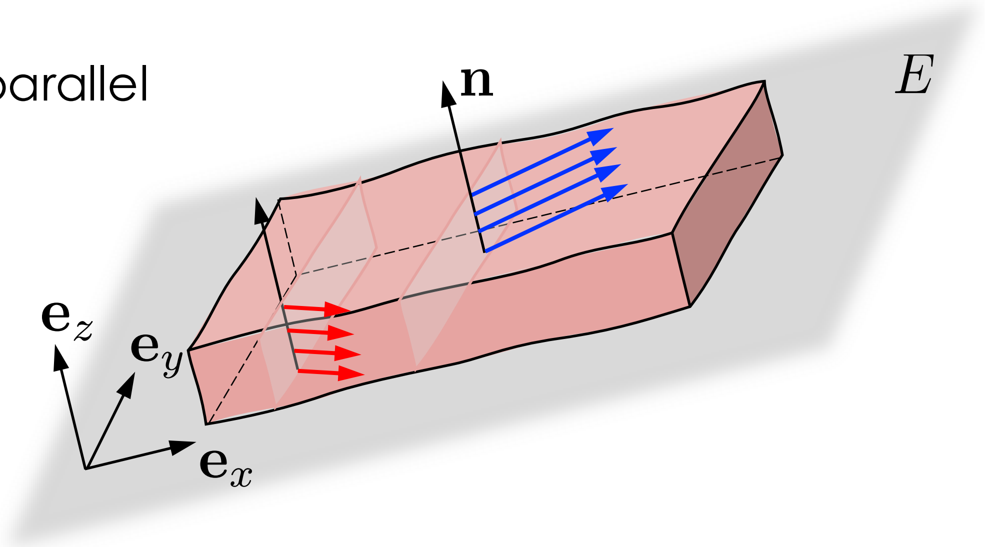
- ***Ebene Bewegung*** *(planar motion)*

1. Alle Geschwindigkeiten sind zu einer gegeben Ebene *E* parallel

$$\Rightarrow \mathbf{v}(x,y,z) = v_x(x,y,z)\mathbf{e}_x + v_y(x,y,z)\mathbf{e}_y$$

2. Alle Punkte auf einer Normalen zu *E* haben diegleiche Geschwindigkeit

$$\Rightarrow \mathbf{v}(x,y,z) = v_x(x,y)\mathbf{e}_x + v_y(x,y)\mathbf{e}_y$$



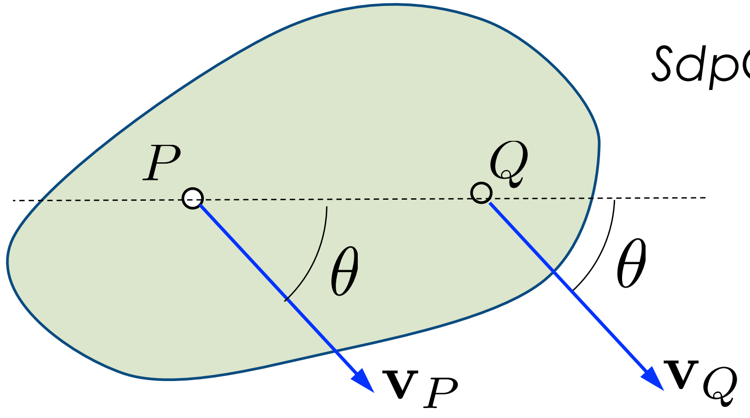
3.5 Translation und Rotation für ebene Bewegungen

3.5 translation and rotation for planar motions

*Eine **starre, ebene** Bewegung ist entweder eine **Translation** oder eine **Rotation**.*

1. *Translation*

Alle Geschwindigkeiten sind parallel

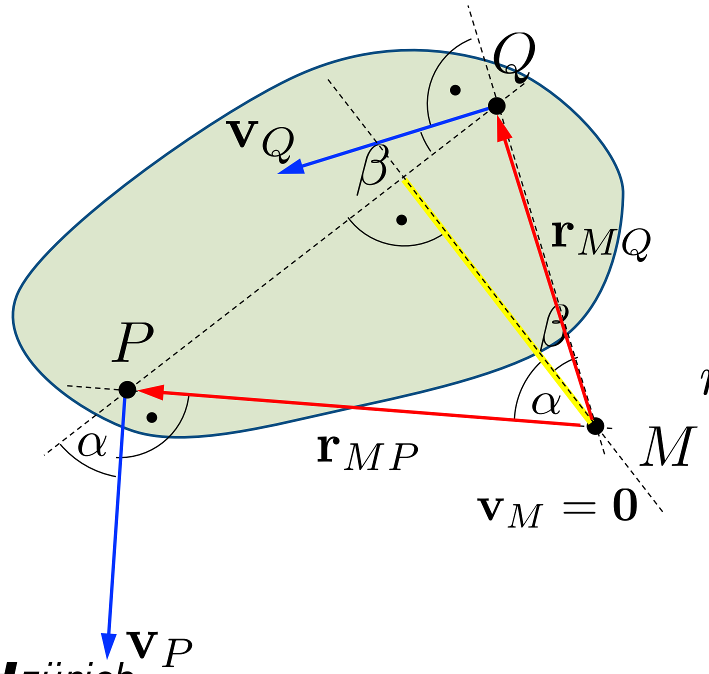


SdpG gemäss:

$$v_P \cos\theta = v_Q \cos\theta$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q$$

2. *Rotation*



M: ***Momentanzentrum***

Eng: center of instantaneous rotation

Hängt nicht von Punkten ab!

$$v_P \cos\alpha = v_Q \cos\beta$$

$$r_{MP} \cos\alpha = r_{MQ} \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{v_P}{r_{MP}} = \frac{v_Q}{r_{MQ}} = \omega \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_P &= \omega r_{MP} \\ v_Q &= \omega r_{MQ} \end{aligned}$$

ω heisst ***Winkelschnelligkeit/Rotationschnelligkeit***

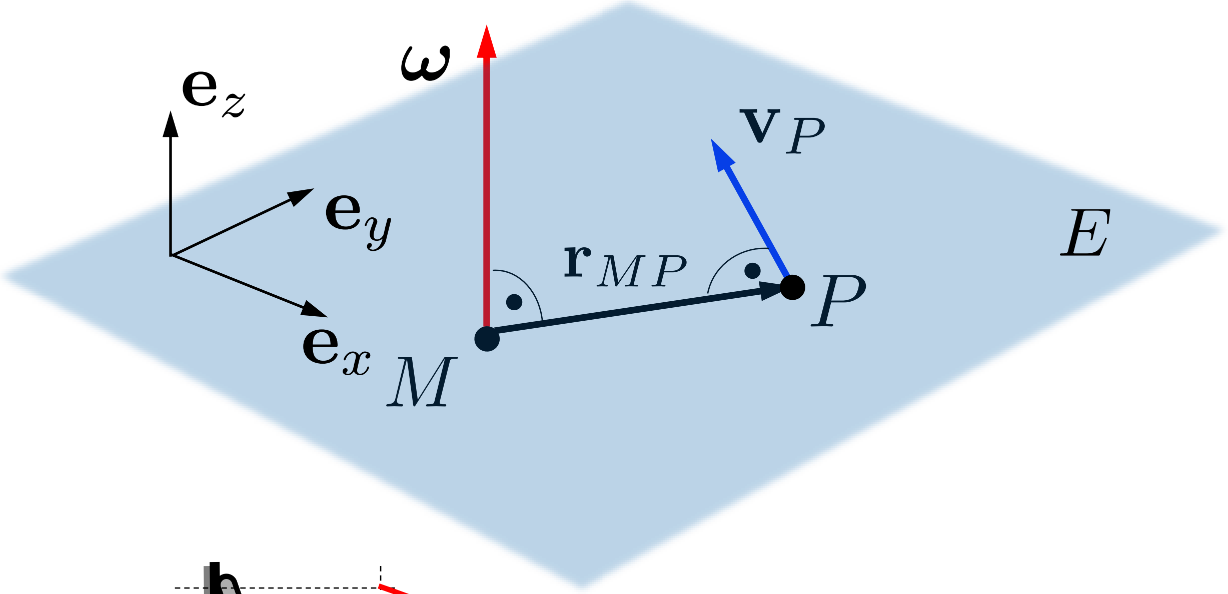
Eng: angular speed / rotational speed

3.6 Satz von Momentanzentrum

3.6 Instantaneous center of rotation theorem

Es kann auch vektoriell ausgedrückt werden, durch die Einführung des ***Winkelgeschwindigkeitsvektor*** *(eng. angular velocity vector)*

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MP}$$

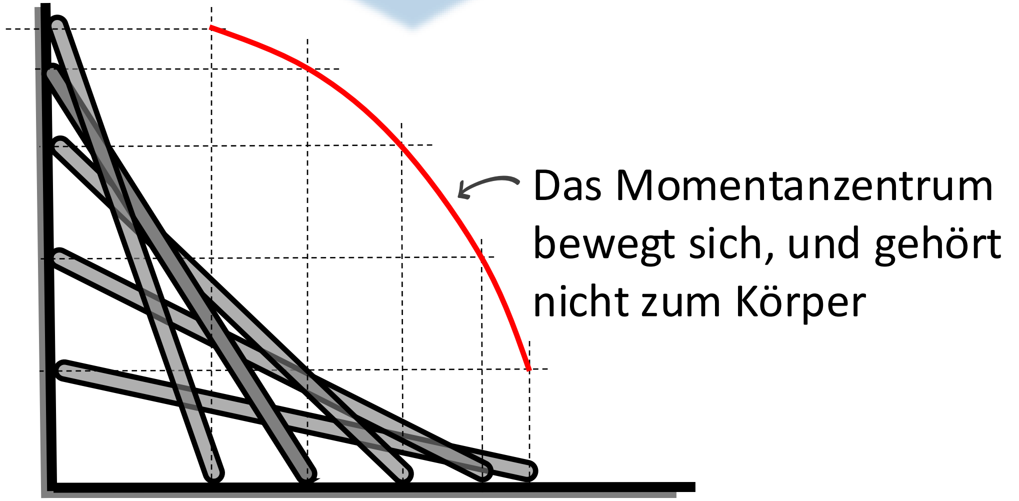


Satz von Momentanzentrum

Die Geschwindigkeit des Punktes P steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden durch P und das Momentanzentrum M.

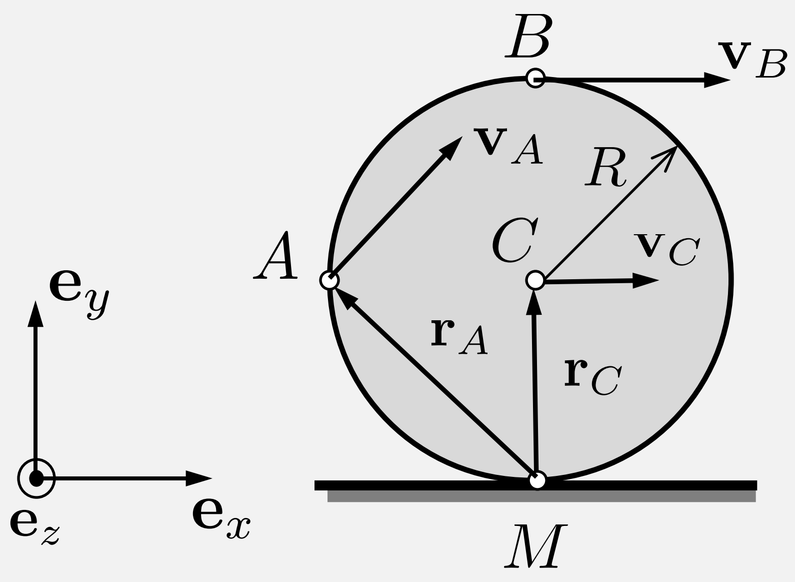
$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MP}$$

- *Die Winkelgeschwindigkeitsvektor ist immer senkrecht zur Ebene E.*
- *M ist Momentanzentrum relativ zum entsprechenden Zeitpunkt.*
- *Die Schnelligkeit ist proportional zum Abstand von Punkt zum Momentanzentrum.*
- *M ist im allgemeinen kein materieller Punkt.*



3.6 Satz von Momentanzentrum

Beispiel 3.2 Rollendes Rad (rollen ohne zu gleiten):



Das Zentrum des Rades **C** bewegt sich mit Geschwingidkeit $\mathbf{v}_C$ nach rechts:

$$\mathbf{v}_C = v_C \mathbf{e}_x$$

Was ist die Winkelgeschwindigkeit? Lassen uns den Satz von Momentanzentrum anwenden:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MC} = \mathbf{v}_C$$

$$\omega \mathbf{e}_z \times R\mathbf{e}_y = v_C \mathbf{e}_x \to \omega = -\frac{v_C}{R}$$

Jetzt können wir die Geschwindigkeit von allen anderen Punkten berechnen. Zum Beispiel, für A und B:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MA} = \mathbf{v}_A \to -\omega \mathbf{e}_z \times (-R\mathbf{e}_x + R\mathbf{e}_y) = \omega R(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MB} = \mathbf{v}_B \to -\omega \mathbf{e}_z \times 2R\mathbf{e}_y = 2\omega R\mathbf{e}_x$$

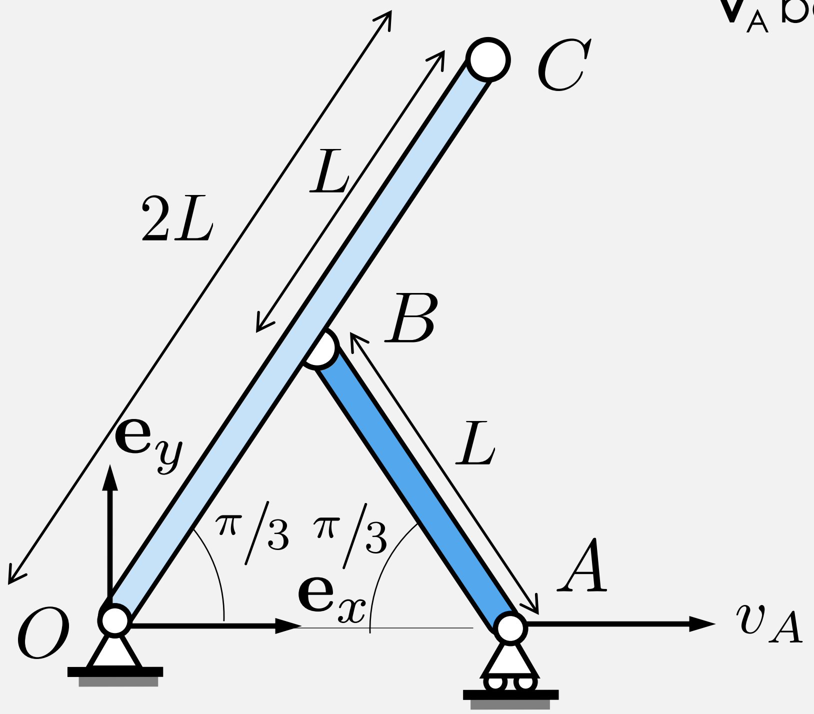
3.7 Starrkörpersysteme

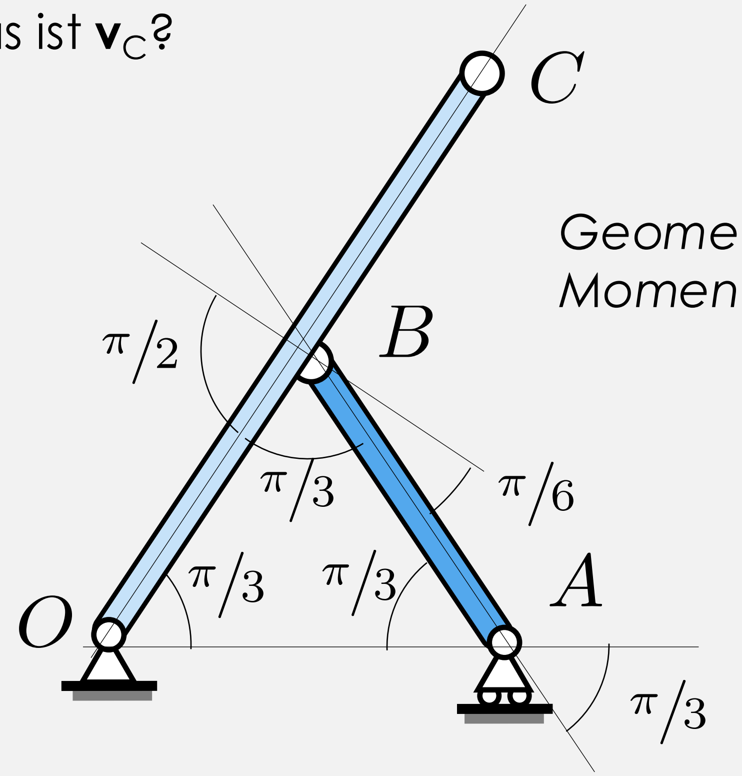
3.7 systems of rigid bodies

- Jeder Starrkörper hat seine eigene Winkelgeschwindigkeit und Momentanzentrum!
- SdpG und SM für jeden starrkörper gültig!

Beispiel 3.3

$\mathbf{v}_A$ bekannt. Was ist $\mathbf{v}_C$?

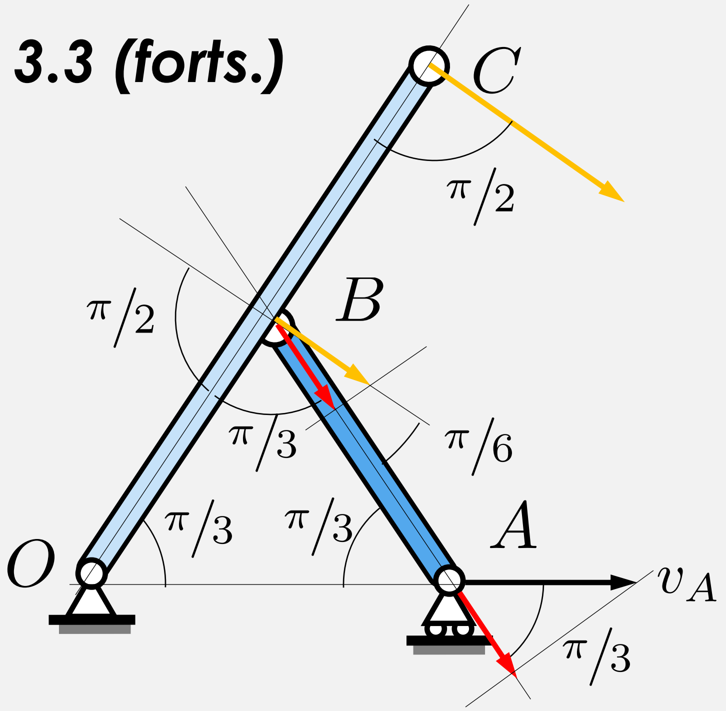




Geometrie von Momentanzustand

3.7 Starrkörpersysteme

Beispiel 3.3 (forts.)



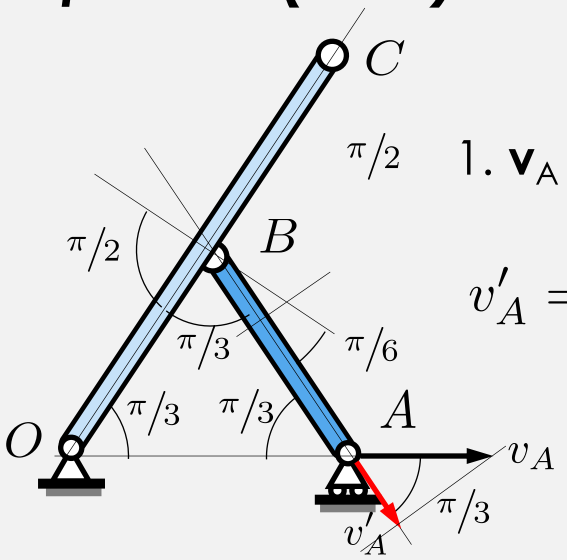
- O ist Momentanzentrum von OC;
- C gehört zu OC: die Geschwindigkeit von C muss senkrecht zu OC sein;
- Wenn die Winkelgeschwindigkeit von OC bekannt ist, kann man $\mathbf{v}_C$ mit SM bestimmen
- Die Richtung von $\mathbf{v}_B$ ist auch bekannt, da B zu OC gehört;
- Die Projektion von $\mathbf{v}_A$ auf BA ist auch bekannt.

Lösungsstrategie:

1. $\mathbf{v}_A$ auf AB projizieren;
2. $\mathbf{v}_B$ mit Hilfe von SdpG bestimmen;
3. SM für OC anwenden und ω_{OC} ermitteln;
4. $\mathbf{v}_C$ mit Hilfe von SM bestimmen.

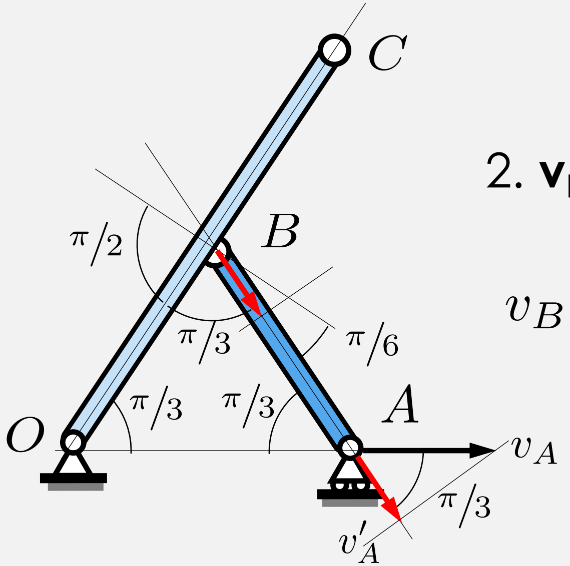
3.7 Starrkörpersysteme

Beispiel 3.3 (forts.)



1. $\mathbf{v}_A$ auf AB projizieren:

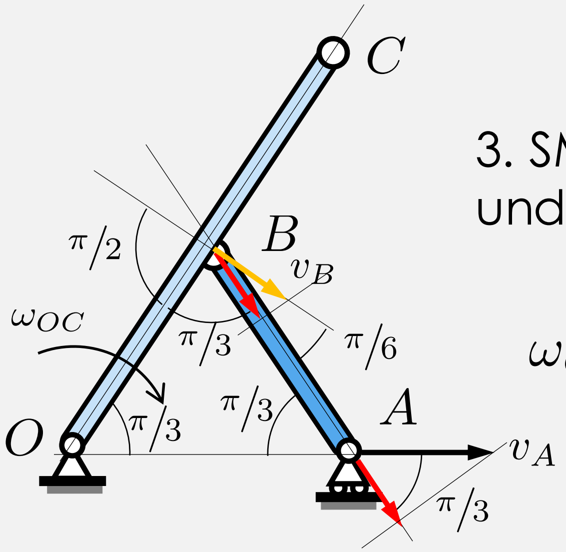
$$v'_A = v_A \cos\frac{\pi}{3} = \frac{v_A}{2}$$



2. $\mathbf{v}_B$ mit Hilfe von SdpG bestimmen:

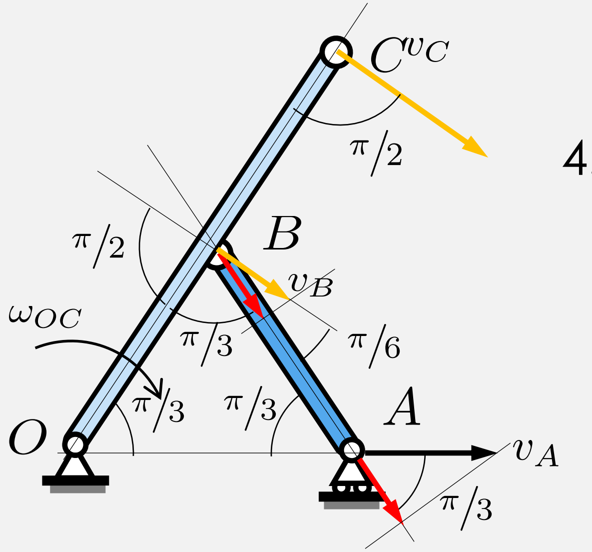
$$v_B \cos\frac{\pi}{6} = v'_A \rightarrow v_B \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v_A}{2}$$

$$v_B = \frac{v_A}{\sqrt{3}}$$



3. SM für OC anwenden und ω_{OC} ermitteln:

$$\omega_{OC} = \frac{v_B}{L} = \frac{v_A}{\sqrt{3}L}$$



4. $\mathbf{v}_C$ mit Hilfe von SM bestimmen:

$$v_C = 2L\omega_{OC} = \frac{2v_A}{\sqrt{3}}$$