

Potencjał grawitacyjny - MES

Wojciech Dąbek

Styczeń 2024

1 Problem

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Phi}{dx^2} &= 4\pi G\rho(x) \\ \Phi(0) &= 5 \\ \Phi(3) &= 4 \\ \rho(x) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 0 & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}\end{aligned}$$

Szukam funkcji Φ spełniającej powyższe warunki.

2 Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

$$\Phi''(x) = 4\pi G\rho(x)$$

Wprowadzam funkcję testującą $v : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in V$, gdzie V przyjmuję jako przestrzeń funkcji zerujących się na brzegach. Obustronnie mnożę przez v i całkuję na $[0, 3]$.

$$\int_0^3 \Phi'' v \, dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v \, dx$$

Całkuję przez części, aby pozbyć się drugiej pochodnej.

$$[\Phi' v]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' \, dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v \, dx$$

Skoro $v \in V \Leftrightarrow v(0) = v(3) = 0$, to $[\Phi' v]_0^3 = 0$. Mam więc:

$$-\int_0^3 \Phi' v' \, dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v \, dx$$

Wprowadzam oznaczenia:

$$B(\Phi, v) = - \int_0^3 \Phi' v' \, dx$$

$$L(v) = 4\pi G \int_0^3 \rho v \, dx = 4\pi G \int_1^2 v \, dx$$

Gdzie $B(\Phi, v)$ jest funkcjonałem biliniowym, a $L(v)$ jest funkcjonałem liniowym. Równanie można więc zapisać jako:

$$B(\Phi, v) = L(v)$$

3 Rozszerzenie warunków brzegowych

Ze względu na niezerowe warunki Dirichleta, konstruuję przesunięcie:

$$\Phi = w + \tilde{\Phi}$$

$$w \in V$$

$$\tilde{\Phi}(x) = 5 - \frac{x}{3}$$

Tak przyjęta funkcja $\tilde{\Phi}$ spełnia warunki brzegowe, tzn. $\tilde{\Phi}(0) = 5, \tilde{\Phi}(3) = 4$. Można zatem wrócić do równania i zapisać je jako:

$$B(w + \tilde{\Phi}, v) = L(v)$$

Korzystając z liniowości B względem pierwszego argumentu:

$$B(w, v) = L(v) - B(\tilde{\Phi}, v)$$

Przyjmując $\tilde{L}(v) = L(v) - B(\tilde{\Phi}, v)$ można ostatecznie zapisać:

$$B(w, v) = \tilde{L}(v)$$

4 Konstrukcja podprzestrzeni

N elementów skończonych $V_h \subset V$

W celu skonstruowania podprzestrzeni $V_h \subset V$ dzielę zbiór $[0, 3]$ na N równych części o długości $h = \frac{3}{N}$.

Punkty brzegowe takiego podziału to więc:

$$x_0 = 0, \, x_k = kh, \, x_N = 3$$

$$x_{k-1} = x_k - h, \, x_{k+1} = x_k + h$$

Wybieram funkcje bazowe postaci:

$$e_k(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{h} = \frac{x}{h} - k + 1 & \text{dla } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1}-x}{h} = k + 1 - \frac{x}{h} & \text{dla } x \in (x_k, x_{k+1}] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$e'_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{dla } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ -\frac{1}{h} & \text{dla } x \in (x_k, x_{k+1}] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$e_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h} = 1 - \frac{x}{h} & \text{dla } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$e_N(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{N-1}}{h} = \frac{x}{h} - N + 1 & \text{dla } x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Mogę więc zdefiniować $V_h = \langle e_0, e_1, \dots, e_N \rangle$ (generowaną przez funkcje e_k).

5 Problem przybliżony w przestrzeni V_h

Z rozważanego wyżej problemu oryginalnego przechodzę na problem przybliżony: Znaleźć $w_h \in V_h$ spełniające

$$\forall v_h \in V_h : B(w_h, v_h) = \tilde{L}(v_h)$$

$$w \approx w_h = \sum_{i=0}^N w_i e_i$$

Mam więc układ $N+1$ równań:

$$B\left(\sum_{i=0}^N w_i e_i, v_j\right) = \tilde{L}(v_j) \quad \text{dla } j = 0, 1, 2, \dots, N$$

Przyjmuję $v_j = e_j$.

$$B\left(\sum_{i=0}^N w_i e_i, e_j\right) = \tilde{L}(e_j)$$

Korzystając z liniowości B względem pierwszego argumentu:

$$\sum_{i=0}^N w_i B(e_i, e_j) = \tilde{L}(e_j)$$

Zapisuję ten układ równań w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} B(e_0, e_0) & B(e_1, e_0) & \cdots & B(e_N, e_0) \\ B(e_0, e_1) & B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_N, e_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_0, e_N) & B(e_1, e_N) & \cdots & B(e_N, e_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}(e_0) \\ \tilde{L}(e_1) \\ \vdots \\ \tilde{L}(e_N) \end{bmatrix}$$

Mam więc takie wartości elementów tych macierzy:

$$\begin{aligned} B(e_i, e_j) &= - \int_0^3 e'_i e'_j \, dx \\ \tilde{L}(e_j) &= L(e_j) - B(\tilde{\Phi}, e_j) \\ L(e_j) &= 4\pi G \int_1^2 e_j \, dx \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć, $B(e_i, e_j) = 0$ zawsze, gdy $j < i - 1$ lub $j > i + 1$.
W przeciwnym wypadku:

$$\begin{aligned} B(e_i, e_{i+1}) &= B(e_{i+1}, e_i) = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} e'_i e'_{i+1} \, dx \\ B(e_i, e_i) &= - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e'_i e'_i \, dx \text{ dla } i = 1, 2, \dots, N-1 \\ B(e_0, e_0) &= - \int_0^h e'_0 e'_0 \, dx \\ B(e_N, e_N) &= - \int_{3-h}^3 e'_N e'_N \, dx \end{aligned}$$

Podobnie $L(e_j) = 0$ zawsze, gdy $hj < 1$ lub $hj > 2$.
W przeciwnym wypadku:

$$\begin{aligned} L(e_j) &= 4\pi G \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e_j \, dx \text{ dla } j = 1, 2, \dots, N-1 \\ L(e_{1/h}) &= 4\pi G \int_1^{1+h} e_{1/h} \, dx \\ L(e_{2/h}) &= 4\pi G \int_{2-h}^2 e_{2/h} \, dx \end{aligned}$$

Pozostało do rozważenia: (wiedząc, że $\tilde{\Phi}' = -\frac{1}{3}$)

$$\begin{aligned} B(\tilde{\Phi}, e_j) &= \frac{1}{3} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e_j \, dx \text{ dla } j = 1, 2, \dots, N-1 \\ B(\tilde{\Phi}, e_0) &= \frac{1}{3} \int_0^h e_0 \, dx \\ B(\tilde{\Phi}, e_N) &= \frac{1}{3} \int_{3-h}^3 e_N \, dx \end{aligned}$$

Aby zastosować kwadraturę Gaussa-Legendre'a do przybliżenia wartości całek muszę zamienić przedziały całkowania na $[-1, 1]$. Można to zrobić tak:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

Stosując zasadę

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Otrzymuję dla przedziału $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

Przyjmuję $n = 2$, więc $w_i = 1$ i $t_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a-b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) \right]$$

Pozostaje obliczyć te wartości i rozwiązać układ równań.

Przy znalezionych w_0, w_1, \dots, w_N ostatecznym rozwiązaniem jest:

$$\Phi(x) = w + \tilde{\Phi} \approx \sum_{i=0}^N w_i e_i + 5 - \frac{x}{3}$$