Potencjał grawitacyjny - MES

Wojciech Dąbek

Styczeń 2024

1 Problem

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$
$$\Phi(0) = 5$$
$$\Phi(3) = 4$$
$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1,2] \\ 0 & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases}$$

Szukam funkcji Φ spełniającej powyższe warunki.

2 Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

$$\Phi''(x) = 4\pi G\rho(x)$$

Wprowadzam funkcję testującą $v : [0,3] \to \mathbb{R}$, $v \in V$, gdzie V przyjmuję jako przestrzeń funkcji zerujących się na brzegach. Obustronnie mnożę przez v i całkuję na $[0,3]$.

$$\int_0^3 \Phi'' v \; dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v \; dx$$

Całkuję przez części, aby pozbyć się drugiej pochodnej.

$$[\Phi' v]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' \; dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v \; dx$$

Skoro $v \in V \Leftrightarrow v(0) = v(3) = 0$, to $[\Phi' v]_0^3 = 0$. Mam więc:

$$-\int_0^3 \Phi' v' \; dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v \; dx$$

Wprowadzam oznaczenia:

$$B(\Phi, v) = -\int_0^3 \Phi' v' \; dx$$
$$L(v) = 4\pi G \int_0^3 \rho v \; dx = 4\pi G \int_1^2 v \; dx$$

Gdzie $B(\Phi, v)$ jest funkcjonałem biliniowym, a $L(v)$ jest funkcjonałem liniowym.
Równanie można więc zapisać jako:

$$B(\Phi, v) = L(v)$$

3 Rozszerzenie warunków brzegowych

Ze względu na niezerowe warunki Dirichleta, konstruuję przesunięcie:

$$\Phi = w + \tilde{\Phi}$$
$$w \in V$$
$$\tilde{\Phi}(x) = 5 - \frac{x}{3}$$

Tak przyjęta funkcja $\tilde{\Phi}$ spełnia warunki brzegowe, tzn. $\tilde{\Phi}(0) = 5, \tilde{\Phi}(3) = 4$.
Można zatem wrócić do równania i zapisać je jako:

$$B(w + \tilde{\Phi}, v) = L(v)$$

Korzystając z liniowości B względem pierwszego argumentu:

$$B(w, v) = L(v) - B(\tilde{\Phi}, v)$$

Przyjmując $\tilde{L}(v) = L(v) - B(\tilde{\Phi}, v)$ można ostatecznie zapisać:

$$B(w, v) = \tilde{L}(v)$$

4 Konstrukcja podprzestrzeni N elementów skończonych $V_h \subset V$

W celu skonstruowania podprzestrzeni $V_h \subset V$ dzielę zbiór $[0, 3]$ na N równych części o długości $h = \frac{3}{N}$.
Punkty brzegowe takiego podziału to więc:

$$x_0 = 0,\; x_k = kh,\; x_N = 3$$
$$x_{k-1} = x_k - h,\; x_{k+1} = x_k + h$$

Wybieram funkcje bazowe postaci:

$$e_k(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{h} = \frac{x}{h} - k + 1 \text{ dla } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1}-x}{h} = k + 1 - \frac{x}{h} \text{ dla } x \in (x_k, x_{k+1}] \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$e_k'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} \text{ dla } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ -\frac{1}{h} \text{ dla } x \in (x_k, x_{k+1}] \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Mogę więc zdefiniować $V_h = \langle e_1, \ldots, e_{N-1} \rangle$ (generowaną przez funkcje e_k).

5 Problem przybliżony w przestrzeni V_h

Z rozważanego wyżej problemu oryginalnego przechodzę na problem przybliżony: Znaleźć $w_h \in V_h$ spełniające

$$\forall v_h \in V_h : B(w_h, v_h) = \tilde{L}(v_h)$$

$$w \approx w_h = \sum_{i=1}^{N-1} w_i e_i$$

Mam więc układ $N-1$ równań:

$$B\left(\sum_{i=1}^{N-1} w_i e_i, v_j\right) = \tilde{L}(v_j) \text{ dla } j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$$

Przyjmuję $v_j = e_j$.

$$B\left(\sum_{i=1}^{N-1} w_i e_i, e_j\right) = \tilde{L}(e_j)$$

Korzystając z liniowości B względem pierwszego argumentu:

$$\sum_{i=1}^{N-1} w_i B(e_i, e_j) = \tilde{L}(e_j)$$

Zapisuję ten układ równań w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & \cdots & B(e_{N-1}, e_1) \\ B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) & \cdots & B(e_{N-1}, e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1, e_{N-1}) & B(e_{N-1}, e_{N-1}) & \cdots & B(e_{N-1}, e_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}(e_1) \\ \tilde{L}(e_2) \\ \vdots \\ \tilde{L}(e_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Mam więc takie wartości elementów tych macierzy:

$$B(e_i, e_j) = -\int_0^3 e_i' e_j' \, dx$$
$$\tilde{L}(e_j) = L(e_j) - B(\tilde{\Phi}, e_j)$$
$$L(e_j) = 4\pi G \int_1^2 e_j dx$$

Jak łatwo zauważyć, $B(e_i, e_j) = 0$ zawsze, gdy $j < i - 1$ lub $j > i + 1$.
W przeciwnym wypadku:

$$B(e_i, e_{i+1}) = B(e_{i+1}, e_i) = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} e_i' e_{i+1}' \, dx$$
$$B(e_i, e_i) = -\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e_i' e_i' \, dx \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, N-1$$

Podobnie $L(e_j) = 0$ zawsze, gdy $hj < 1$ lub $hj > 2$.
W przeciwnym wypadku:

$$L(e_j) = 4\pi G \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e_j \, dx \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, N-1$$

Pozostało do rozważenia: $\left(\text{wiedząc, że } \tilde{\Phi}' = -\frac{1}{3}\right)$

$$B(\tilde{\Phi}, e_j) = \frac{1}{3} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e_j' \, dx \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, N-1$$

Aby zastosować kwadraturę Gaussa-Legendre'a do przybliżenia wartości całek muszę zamienić przedziały całkowania na $[-1, 1]$. Można to zrobić tak:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} \, dt$$

Stosując zasadę

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Otrzymuję dla przedziału $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

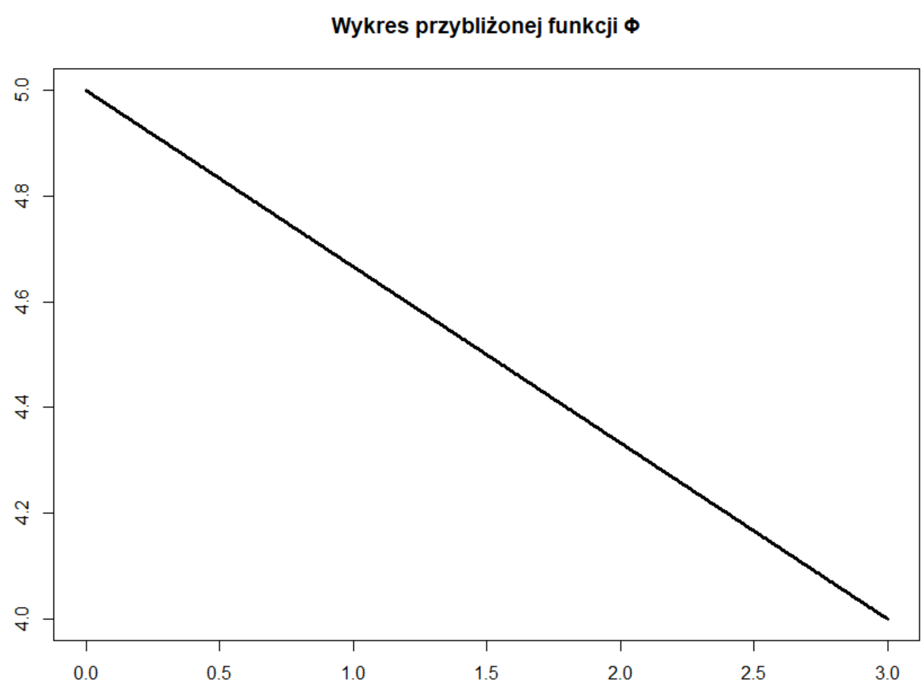
Przyjmuję $n = 2$, więc $w_i = 1$ i $t_i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a-b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right)\right]$$

Pozostaje obliczyć te wartości i rozwiązać układ równań, w czym pomoże mi dołączony program napisany w języku R.

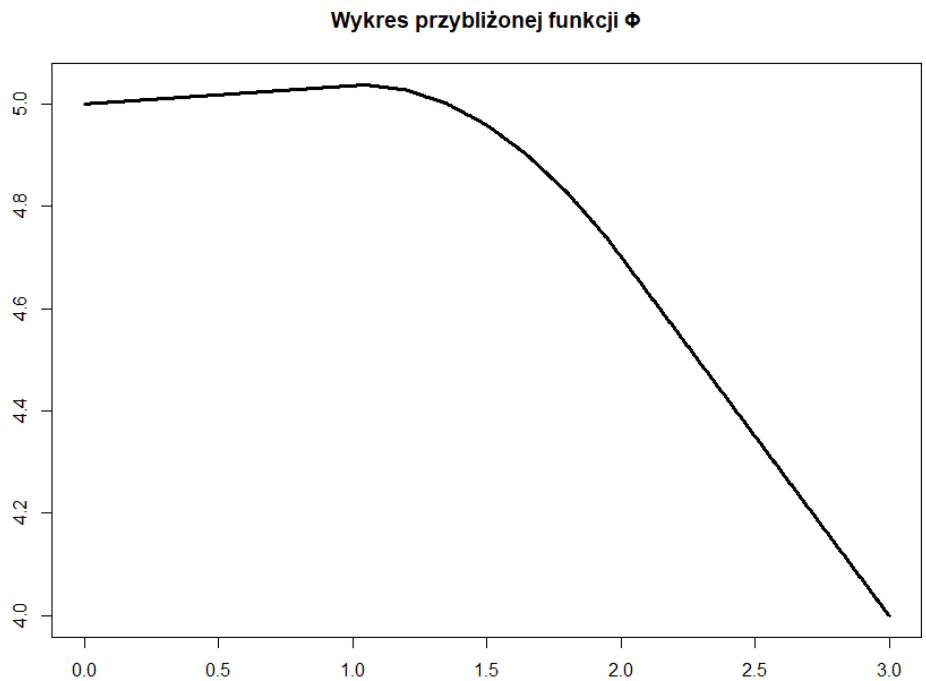
Przy znalezionych $w_0, w_1, \ldots, w_N$ ostatecznym rozwiązaniem jest:

$$\Phi(x) = w + \tilde{\Phi} \approx \sum_{i=0}^{N} w_i e_i + 5 - \frac{x}{3}$$



Rysunek 1: Wyrysowany wykres dla $N = 20$

Duży wpływ na kształt wykresu ma bardzo mała wartość $G \approx 6.6743 \cdot 10^{-11}$. Gdybym w jej miejsce przyjął wartość $6.6743 \cdot 10^{-2}$ otrzymałbym:



Rysunek 2: Wyrysowany wykres dla $G = 6.6743 \cdot 10^{-2},\ N = 20$

Widać więc, że nie jest to funkcja liniowa.