MOwNiT - Laboratorium 4: Aproksymacja

Wojciech Dąbek

26 marca 2024

1 Treści zadań laboratoryjnych

1. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0, 1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla $w(x) = 1$.
2. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0, 1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a.

2 Treści zadań domowych

1. Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia.
2. Oblicz wartości funkcji $f(x) = 1 - x^2$ w dyskretnych punktach x_i : $x_i = -1 + 0.5i,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$, a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego.
3. Wykonać aproksymację funkcji $|\sin x|$ funkcjami trygonometrycznymi w zakresie $[-\pi, \pi]$.

3 Rozwiązania zadań laboratoryjnych

3.1

Szukamy funkcji aproksymującej będącej wielomianem pierwszego stopnia

$$q(x) = c_0 + c_1 x = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$$
$$\varphi_0(x) = x^0 = 1, \quad \varphi_1(x) = x^1 = x$$

Do aproksymacji metodą średniokwadratową należy więc rozwiązać układ równań:

$$\sum_{i=0}^{1} c_i \int_0^1 w(x) \cdot \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x)\ dx = \int_0^1 w(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_j(x)\ dx$$

$$\text{dla } j = 0,\ 1$$

Obliczam więc kolejno:

$$\int_0^1 w(x) \cdot \varphi_0(x) \cdot \varphi_0(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot 1 \cdot 1\ dx = 1$$
$$\int_0^1 w(x) \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_0(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot x \cdot 1\ dx = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 w(x) \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot x \cdot x\ dx = \frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 w(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_0(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot (1 + x^3) \cdot 1\ dx = \frac{5}{4}$$
$$\int_0^1 w(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_1(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot (1 + x^3) \cdot x\ dx = \frac{7}{10}$$

Podstawiając do układu równań otrzymuję postać

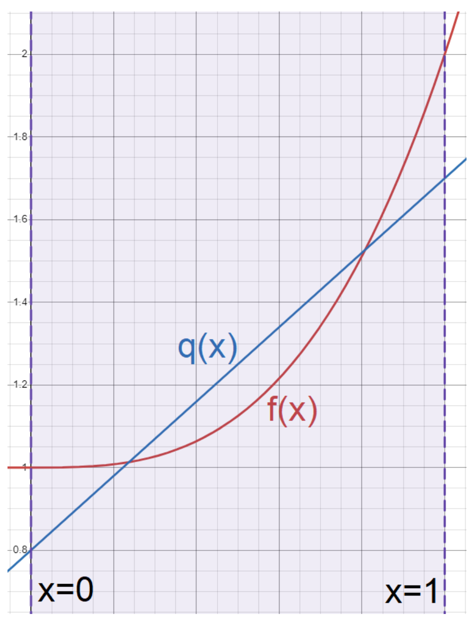
$$\begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{4}{5} = 0.8 \\ c_1 = \frac{9}{10} = 0.9 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy wzór funkcji aproksymującej:

$$q(x) = 0.9x + 0.8$$



Rysunek 1: Wykresy na [0, 1] funkcji aproksymowanej f i aproksymującej q.

3.2

Wielomiany Legendre'a P_n są ortogonalne na przedziale [-1, 1] z wagą 1.
Aby uzyskać podobny efekt na zadanym przedziale [0, 1] określam przesunięte wielomiany Legendre'a jako $\widetilde{P}_n(x) = P_n(2x-1)$. Poprzez takie przekształcenie afiniczne otrzymujemy wielomiany $\widetilde{P}_n$ ortogonalne na [0, 1].
Szukamy funkcji aproksymującej będącej wielomianem drugiego stopnia, więc skorzystam jedynie z pierwszych trzech przesuniętych wielomianów Legendre'a:

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_0(x) &= 1\\ \widetilde{P}_1(x) &= 2x-1\\ \widetilde{P}_2(x) &= 6x^2-6x+1\end{aligned}$$

Ze względu na ortogonalność układu powyższych funkcji współczynniki funkcji aproksymującej są tu określone wzorem

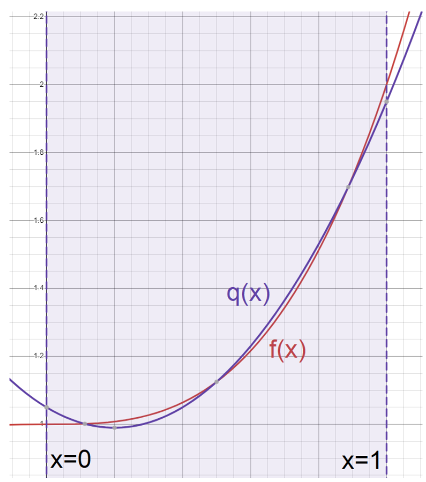
$$c_i = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^1 \widetilde{P}_i(x)f(x)\,dx, \quad \lambda_i = \int_0^1 \widetilde{P}_i^2(x)\,dx$$
$$\text{dla } i = 0, 1, 2$$

Dokonując odpowiednich podstawień uzyskuję wyniki:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{5}{4}\\ c_1 = \frac{9}{20}\\ c_2 = \frac{1}{4}\end{cases}$$

Wstawiając te współczynniki do funkcji aproksymującej otrzymuję:

$$\begin{aligned}q(x) &= \frac{5}{4} + \frac{9}{20}(2x-1) + \frac{1}{4}(6x^2-6x+1)\\ &= \frac{3}{20}(10x^2-4x+7)\end{aligned}$$



Rysunek 2: Wykresy na [0, 1] funkcji aproksymowanej f oraz aproksymującej q.

Wnioski: Stopień wielomianu aproksymującego ma ogromne znaczenie dla dokładności aproksymacji, a użycie wielomianów ortogonalnych wyraźnie ułatwia obliczenia.

4 Rozwiązania zadań domowych

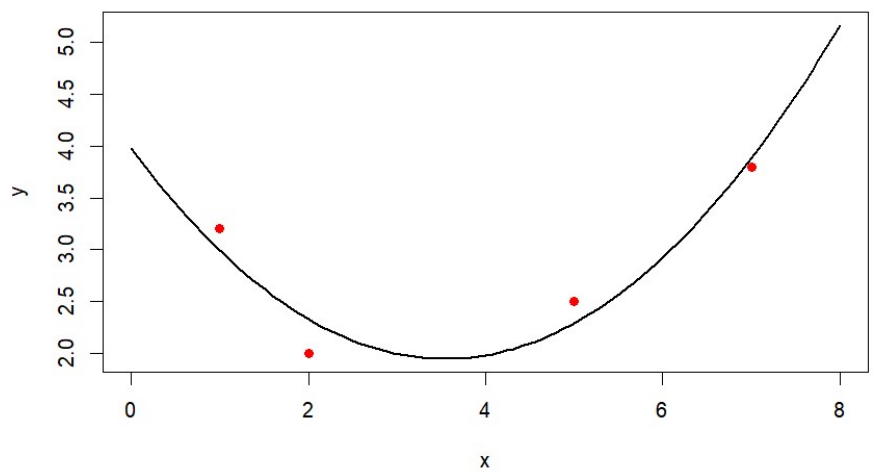
4.1

```r
Q <- function(m, x, a_vec) {
  acc <- a_vec[1]
  for (i in 1:m) {
    acc <- acc + a_vec[i+1] * x^i
  }
  return(acc)
}

S <- function(k, n, x_vec) {
  acc <- 1.0
  for (i in 2:n) {
    acc <- acc + x_vec[i]^k
  }
  return(acc)
}

T <- function(k, n, x_vec, y_vec) {
  acc <- 0
  for (i in 1:n) {
    acc <- acc + x_vec[i]^k * y_vec[i]
  }
  return(acc)
}

approximating <- function(x, x_vec, y_vec, m) {
  n <- length(x_vec)

  S_mat <- matrix(numeric((m+1)^2), m+1, m+1)
  for (row in 0:m) {
    for (col in 0:m) {
      S_mat[row+1, col+1] <- S(row + col, n, x_vec)
    }
  }

  T_vec <- numeric(m+1)
  for (i in 0:m) {
    T_vec[i+1] <- T(i, n, x_vec, y_vec)
  }

  a_vec <- solve(S_mat, T_vec)
  return(Q(m, x, a_vec))
}

# przykładowe dane
x_values <- c(1, 2, 5, 7)
y_values <- c(3.2, 2, 2.5, 3.8)
# funkcja jednej zmiennej do rysowania
example <- function(x) {
  return(approximating(x, x_values, y_values, 2))
}
curve(Vectorize(example, 'x')(x),
    min(x_values) - 1, max(x_values) + 1, lwd=2, ylab='y')
points(x_values, y_values, pch=16, col='red')
```

Powyższy program napisany w języku R realizuje metodę najmniejszych kwadratów aproksymacji punktowej. Główną funkcją jest `approximating`, która reprezentuje funkcję aproksymującą przyjmując jako argumenty:

- `x` - argument główny
- `x_vec` - wektor odciętych zadanych punktów
- `y_vec` - wektor rzędnych
- `m` - stopień wielomianu aproksymującego

Kod na końcu ilustruje przykładowe użycie tej funkcji, generując poniższy wykres przykładowych punktów i aproksymującej paraboli.



4.2

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x_i)$	0	0.75	1	0.75	0

Tabela 1: Wartości funkcji $f(x) = 1 + x^3$ w zadanych $n + 1 = 5$ punktach

Obliczam kolejne wielomiany Grama do stopnia $m = 3$ dla $n = 4$:

$$
\begin{aligned}
F_0(q) &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{gdzie } q = 2(x+1) \\
F_1(q) &= 1 - 2\frac{q}{n} = 1 - \frac{q}{2} \\
F_2(q) &= 1 - 6\frac{q}{n} + 6\frac{q(q-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}(q^2 - 4q + 2) \\
F_3(q) &= 1 - 12\frac{q}{n} + 30\frac{q(q-1)}{n(n-1)} - 20\frac{q(q-1)(q-2)}{n(n-1)(n-2)} \\
&= -\frac{5}{6}q^3 + 5q^2 - \frac{43}{6}q + 1
\end{aligned}
$$

q	$F_0(q)$	$F_1(q)$	$F_2(q)$	$F_3(q)$
0	1	1	1	1
1	1	0.5	-0.5	-2
2	1	0	-1	0
3	1	-0.5	-0.5	2
4	1	-1	1	-1

Tabela 2: Wartości funkcji F_k dla $q = 0, 1, 2, 3, 4$

Następnie podobnie obliczam odpowiednie s_k:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= \sum_{q=0}^{4} 1^2 = 5 \\
s_1 &= \sum_{q=0}^{4} \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \\
s_2 &= \sum_{q=0}^{4} \left(\frac{1}{2}(q^2 - 4q + 2)\right)^2 = \frac{7}{2} \\
s_3 &= \sum_{q=0}^{4} \left(-\frac{5}{6}q^3 + 5q^2 - \frac{43}{6}q + 1\right)^2 = 10
\end{aligned}
$$

Oraz c_k:

$$c_0 = \sum_{q=0}^{4} y_i \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

$$c_1 = \sum_{q=0}^{4} y_i \cdot \left(1 - \frac{x_i}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

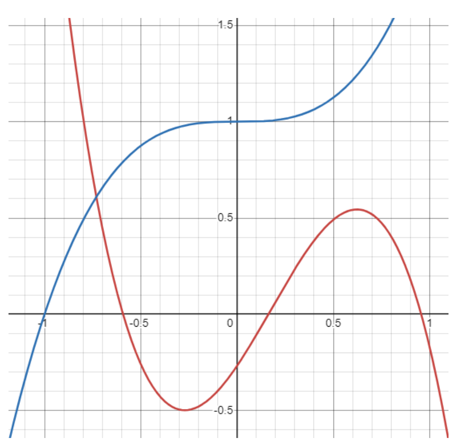
$$c_2 = \sum_{q=0}^{4} y_i \cdot \frac{1}{2}(x_i^2 - 4x_i + 2) = \frac{43}{16}$$

$$c_3 = \sum_{q=0}^{4} y_i \cdot \left(-\frac{5}{6}x_i^3 + 5x_i^2 - \frac{43}{6}x_i + 1\right) = \frac{35}{8}$$

Można podstawić wyliczone wartości do finalnego wzoru na funkcję aproksymującą:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{c_k}{s_k} F_k(q), \quad q = 2(x+1)$$

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(1 - \frac{q}{2}\right) + \frac{43}{16} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}(q^2 - 4q + 2) + \\ & + \frac{35}{8} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{5}{6}q^3 + 5q^2 - \frac{43}{6}q + 1\right) = \\ & = \frac{1}{2} + 1 - \frac{q}{2} + \frac{43}{112}(q^2 - 4q + 2) + \frac{7}{16}\left(-\frac{5}{6}q^3 + 5q^2 - \frac{43}{6}q + 1\right) = \\ & = -\frac{35}{96}q^3 + \frac{18}{7}q^2 - \frac{3475}{672}q + \frac{303}{112} = -\frac{35}{12}x^3 + \frac{43}{28}x^2 + \frac{71}{48}x - \frac{15}{56} \end{aligned}$$



Rysunek 3: Porównanie funkcji - gdzieś musiałem popełnić błąd (._.)

4.3

Funkcja $f(x) = |\sin x|$ spełnia warunki Dirichleta, więc ma reprezentację w postaci szeregu Fouriera i można ją rozłożyć na sumę funkcji trygonometrycznych. Jej okresem jest π. Trygonometryczny szereg Fouriera jest więc zadany tutaj przez

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx))$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos(2nx)\ dx$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \sin(2nx)\ dx$$

Funkcja f jest parzysta, więc współczynnik b_n jest stale równy 0, bo podcałkowa jest tam nieparzysta. Odwrotnie jest przy a_n, mamy więc:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(2nx)\ dx = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$$

Stąd ostatecznie

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\ (= f(x) = |\sin x|)$$

jest sumą tego szeregu. Funkcja f może być zatem aproksymowana na zadanym przedziale wybraną sumą częściową:

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

5 Bibliografia

Materiały ze strony - Włodzimierz Funika
https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials#Shifted_Legendre_polynomials
https://pl.wikipedia.org/wiki/Szereg_Fouriera