MOwNiT - Laboratorium 3: Interpolacja

Wojciech Dąbek

19 marca 2024

1 Treści zadań laboratoryjnych

1. Dane są trzy węzły interpolacji: $(-1, 2.4),\ (1, 1.8),\ (2, 4.5)$. Proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:
   - jednomiany
   - wielomiany Lagrange'a
   - wielomiany wg wzoru Newtona

   Proszę pokazać, że trzy reprezentacje dają ten sam wielomian.
2. Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: $p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4$
3. Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu $p(t)$ stopnia $n-1$ w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:
   - jednomiany
   - wielomiany Lagrange'a
   - wielomiany Newtona

2 Treści zadań domowych

1. Znaleźć kompromis między granicą błędu a zachowaniem wielomianu interpolacyjnego dla funkcji Rungego $f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$, dla równoodległych węzłów na przedziale $[-1, 1]$.
2. Proszę:
   - sprawdzić, czy pierwsze siedem wielomianów Legendre'a są wzajemnie ortogonalne
   - sprawdzić, czy one spełniają wzór na rekurencję

- wyrazić każdy z sześciu pierwszych jednomianów $1,\ t,\ \ldots,\ t^6$ jako liniową kombinację pierwszych siedmiu wielomianów Legendre'a $p_0,\ \ldots,\ p_6$.

3. Dana jest funkcja określona w trzech punktach $x_0,\ x_1,\ x_2$, rozmieszczonych w jednakowych odstępach ($x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h$):

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$$

Proszę wykonać interpolację danej funkcji sklejanymi funkcjami sześciennymi.

3 Rozwiązania zadań laboratoryjnych

3.1

- Wykorzystując jednomiany:
  Współczynniki a_j postaci naturalnej szukanego wielomianu interpolacyjnego 2-go stopnia można wyznaczyć rozwiązując układ równań:

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{2} a_j x_i^j \text{ dla } i = 0, 1, 2$$

  Podstawiam zadane węzły interpolacji:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 2.4 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1.8 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 4.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1.1 \\ a_1 = -0.3 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

  Szukany wielomian ma zatem postać:

$$\boldsymbol{x^2 - 0.3x + 1.1}$$

- Wykorzystując wielomiany Lagrange'a:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k) L_k(x) \quad \text{gdzie} \quad L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

  Podstawiam zadane węzły interpolacji:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2.4 \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 1.8 \frac{(x-(-1))(x-2)}{(1-(-1))(1-2)} + 4.5 \frac{(x-(-1))(x-1)}{(2-(-1))(2-1)} = \\ &= 0.4(x-1)(x-2) - 0.9(x+1)(x-2) + 1.5(x+1)(x-1) = \\ &= \boldsymbol{x^2 - 0.3x + 1.1} \end{aligned}$$

- Wykorzystując wielomiany Newtona:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

  Podstawiam do obliczeń zadane węzły interpolacji:

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) = 2.4 \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1.8 - 2.4}{1 + 1} = -0.3 \\ f[x_1, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{4.5 - 1.8}{2 - 1} = 2.7 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{2.7 + 0.3}{2 + 1} = 1 \end{aligned}$$

  Stąd mamy:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2.4 - 0.3(x + 1) + (x + 1)(x - 1) = \\ &= \boldsymbol{x^2 - 0.3x + 1.1} \end{aligned}$$

Wniosek: Wszystkie trzy metody dają ostatecznie ten sam wielomian interpolacyjny.

3.2

Dokonując odpowiednich przekształceń otrzymujemy:

$p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4 = t(3t^2 - 7t + 5) - 4 = t(t(3t - 7) + 5) - 4 = t(t(t \cdot 3 - 7) + 5) - 4$

3.3

- Wybierając jednomiany, możemy zastosować algorytm Hornera dla postaci naturalnej. Przy jego użyciu do ewaluacji wielomianu stopnia $n - 1$ wykonywanych jest $n - 1$ mnożeń.

- Wybierając wielomiany Lagrange'a, przy każdej ewaluacji wartości w konkretnym punkcie musimy powtórzyć obliczanie licznika dla każego $L_k(x)$, co daje $n - 1$ mnożeń do wykonania n razy. Oprócz tego, każdą obliczoną bazę Lagrange'a mnożymy jeszcze przez odpowiedni współczynnik (rzędną węzła), co daje kolejne n mnożeń. Stąd przy takiej ewaluacji wykonywanych jest ich $n(n - 1) + n = n^2$.

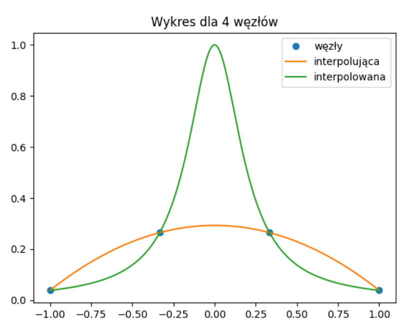
- Wybierając wielomiany Newtona, obliczamy $n-1$ kolejnych wartości $p_k(x)$, $k \in [1, n - 1]$, które wymagają wykonania $k - 1$ mnożeń. Każdy z nich mnożymy jeszcze przez odpowiedni współczynnik b_k. Stąd mamy w sumie $\sum_{k=1}^{n-1}(k - 1) + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n - 1)n$ mnożeń.

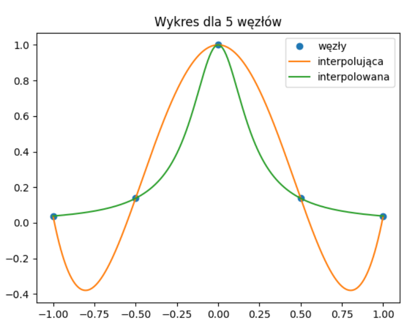
4 Rozwiązania zadań domowych

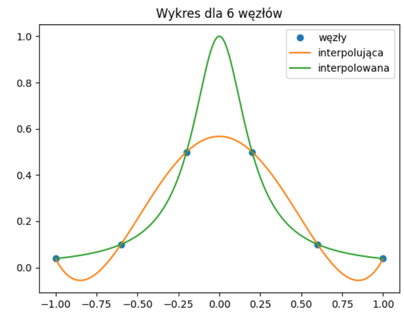
4.1

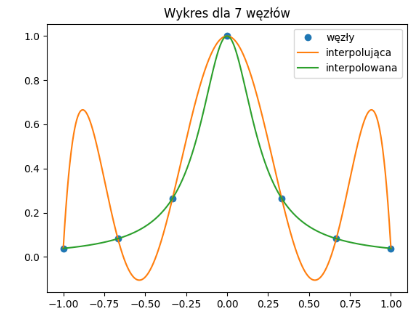
Poniższy program napisany w języku Python generuje wykresy funkcji Rungego i jej wielomianu interpolacyjnego dla $n = 4, 5, \ldots, 12$ równoodległych węzłów na przedziale $[-1, 1]$.

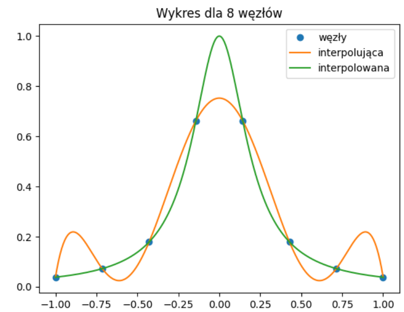
```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot
from scipy import interpolate


def runge(t) -> float:
    return 1 / (1 + 25 * t * t)


x = np.linspace(-1, 1, 1000)


def plot_for_n_knots(n: int):
    x_knots = np.linspace(-1, 1, n)
    y_knots = runge(x_knots)
    y = interpolate.krogh_interpolate(x_knots, y_knots, x)

    pyplot.title(f'Wykres dla {n} węzłów')
    pyplot.plot(x_knots, y_knots, 'o', label='węzły')
    pyplot.plot(x, y, label='interpolująca')
    pyplot.plot(x, runge(x), label='interpolowana')
    pyplot.legend()
    pyplot.show()


if __name__ == '__main__':
    for n in range(4, 13):
        plot_for_n_knots(n)
```

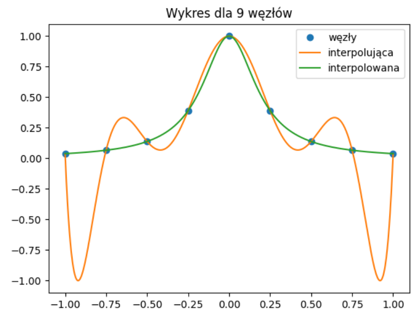


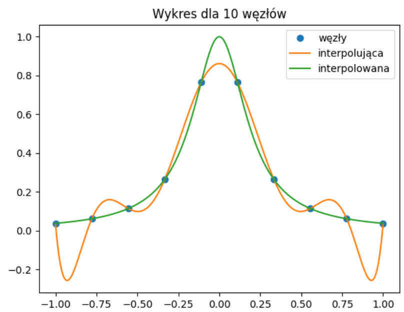


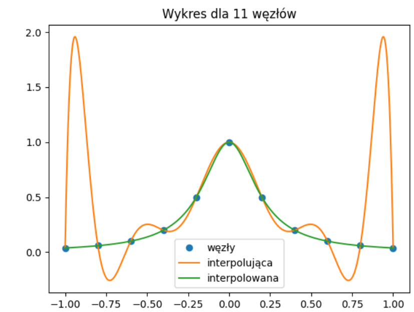

Wykres dla 6 węzłów
węzły
interpolująca
interpolowana

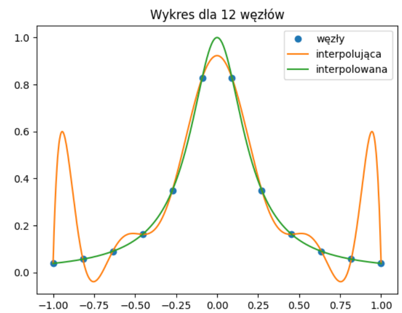

Wykres dla 7 węzłów
węzły
interpolująca
interpolowana


Wykres dla 8 węzłów
węzły
interpolująca
interpolowana


Wykres dla 9 węzłów
węzły
interpolująca
interpolowana


Wykres dla 10 węzłów
węzły
interpolująca
interpolowana


Wykres dla 11 węzłów
węzły
interpolująca
interpolowana


Wykres dla 12 węzłów
węzły
interpolująca
interpolowana

Początkowo można zauważyć wyraźnie mniejsze rozbieżności wykresów funkcji interpolującej od interpolowanej dla parzystej liczby węzłów, ale dla $n \geq 12$ są one i tak bardzo duże.

Wniosek: Jako rozsądny kompromis przyjmuję $n = 10$ węzłów.

4.2

- Pierwsze 7 wielomianów Legendre'a:

  $P_0(x) = 1$
  $P_1(x) = x$
  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
  $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
  $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
  $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
  $P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

  Licząc dla każdej kombinacji różnych od siebie powyższych wielomianów całkę
  $$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)\ dx$$
  zawsze otrzymamy zero, co z definicji oznacza ich wzajemną ortogonalność.

  Dla potwierdzenia obliczeń dokonywanych najpierw w silniku obliczeniowym *Wolfram|Alpha*, posłużyłem się następującym programem w języku R:

```
p <- function(i, x) {
  if (i == 0) return(1)
  if (i == 1) return(x)
  return(((2*i+1)/(i+1))*x*p(i-1,x) - (i/(i+1))*p(i-2, x))
}

pp <- function(i, j, x) {
  return(p(i, x) * p(j, x))
}

for (i in 0:6) {
  for (j in 0:6) {
    if (i == j) next
    ppv <- Vectorize(function(x) pp(i, j, x))
    print(integrate(ppv, -1, 1))
  }
}
```

  Program ten wypisał dla wszystkich rozważanych kombinacji wynik kwadratur jako dokładnie 0 lub niemalże 0 (z uwagi na niedokładność obliczeń na liczbach zmiennoprzecinkowych i aproksymacyjną naturę kwadratur).

Obliczeń tych może być wyraźnie mniej przy zauważeniu, że każdy wielomian o nieparzystym numerze $(P_1, P_3, \dots)$ jest nieparzysty, a każdy o parzystym - parzysty. Iloczyn funkcji nieparzystej z parzystą jest zawsze nieparzysty, a więc całkuje się do 0 na symetrycznym przedziale względem 0, tak jak w tym przypadku.

- Wzór rekurencyjny wygląda następująco:

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \\ P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \end{cases}$$

Następujący program w języku Python oblicza kolejne wyrazy ciągu rekurencyjnego.

```python
from numpy.polynomial.polynomial import Polynomial


p = [Polynomial([1]), Polynomial([0, 1])]
x = Polynomial([0, 1])  # x jako wielomian 0 + 1*x

for n in range(1, 6):
    p.append((2*n + 1)/(n+1) * x * p[n] - n/(n+1) * p[n-1])
    print(p[n+1])
```

Program wypisał takie reprezentacje obliczonych wielomianów:

```
-0.5 + 0.0 x + 1.5 x**2
0.0 - 1.5 x + 0.0 x**2 + 2.5 x**3
0.375 + 0.0 x - 3.75 x**2 + 0.0 x**3 + 4.375 x**4
0.0 + 1.875 x + 0.0 x**2 - 8.75 x**3 + 0.0 x**4 + 7.875 x**5
-0.3125 + 0.0 x + 6.5625 x**2 + 0.0 x**3 - 19.6875 x**4
                              + 0.0 x**5 + 14.4375 x**6
```

Odpowiadają one wielomianom podawanym w tablicach, więc zależność rekurencyjna jest spełniona.

- Kombinacji liniowych wielomianów Legendre'a odpowiadających pierwszym jednomianom można łatwo szukać znając już rozwiązania dla niższych numerów wielomianów. Zaczynam więc od zanotowania $1 = P_0$.

Idąc dalej:

$$\begin{aligned}
t &= P_1 \\
2P_2 = 3t^2 - 1 \Rightarrow t^2 &= \frac{1}{3}(2P_2 + P_0) \\
2P_3 = 5t^3 - 3t \Rightarrow t^3 &= \frac{1}{5}(2P_3 + 3P_1) \\
8P_4 = 35t^4 - 30t^2 + 3 \Rightarrow t^4 &= \frac{1}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0) \\
8P_5 = 63t^5 - 70t^3 + 15t \Rightarrow t^5 &= \frac{1}{63}(8P_5 + 28P_3 + 27P_1) \\
16P_6 = 231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5 \Rightarrow t^6 &= \frac{1}{231}(16P_6 + 72P_4 + 110P_2 + 103P_0)
\end{aligned}$$

4.3

Konstruuję funkcję

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0,\ x_1] \\ s_1(x) & x \in [x_1,\ x_2] \end{cases}$$

spełniającą warunki interpolacji funkcji f dla zadanych węzłów, w której funkcje s_0 i s_1 są sześcienne. Wiadomo stąd, że ich drugie pochodne s_i'' są liniowe na swoich przedziałach. Łącząc to z warunkiem interpolacji sześciennej $s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$, dla $i \in \{0, 1\}$ otrzymuję wzór:

$$s_i''(x) = s_i''(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{h} + s_i''(x_{i+1})\frac{x - x_i}{h}$$

Całkując dwukrotnie otrzymuję:

$$s_i(x) = \frac{s_i''(x_i)}{6h}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{s_i''(x_{i+1})}{6h}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x)$$

gdzie C i D to stałe całkowania, które mogę wyliczyć korzystając z warunków interpolacji $s_i(x_i) = y_i$ oraz $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Dzięki temu mamy:

$$\begin{aligned}
s_i(x) = {} & \frac{s_i''(x_i)}{6h}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{s_i''(x_{i+1})}{6h}(x - x_i)^3 + \\
& + \left(\frac{y_{i+1}}{h} - \frac{s_i''(x_{i+1})h}{6}\right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h} - \frac{s_i''(x_i)h}{6}\right)(x_{i+1} - x)
\end{aligned}$$

Do wyliczenia $s_i''(x)$ skorzystam z warunku ciągłości pierwszej pochodnej. Różniczkując powyższą funkcję na przedziale otrzymuję:

$$s_i'(x_i) = -\frac{h}{3}s_i''(x_i) - \frac{h}{6}s_i''(x_{i+1}) + \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Dla przejrzystości wprowadzam symbole:

$$\sigma_i = \frac{1}{6}s''(x_i)\left(= \frac{1}{6}s_0''(x_i) = \frac{1}{6}s_1''(x_i)\right)$$
$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Wtedy:

$$s_1'(x_1) = \Delta_1 - h(\sigma_2 + 2\sigma_1)$$
$$s_0'(x_1) = \Delta_0 + h(2\sigma_1 + \sigma_0) \text{ (wyznaczane analogicznie dla } s_{i-1}\text{)}$$

muszą być sobie równe:

$$\Delta_1 - h(\sigma_2 + 2\sigma_1) = \Delta_0 + h(2\sigma_1 + \sigma_0)$$
$$h(\sigma_0 + 4\sigma_1 + \sigma_2) = \Delta_1 - \Delta_0$$

Mamy w jednym równaniu trzy niewiadome, więc koniecznie jest określenie warunków brzegowych, dlatego przyjmuję $s''(x_0) = s''(x_2) = 0$ $(= \sigma_0 = \sigma_2)$ (*natural cubic spline*). Pozostaje wtedy:

$$4h\sigma_1 = \Delta_1 - \Delta_0$$
$$4h\sigma_1 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h}$$
$$\sigma_1 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{4h^2}$$

Ostateczną postać funkcji interpolującej s otrzymamy podstawiając współrzędne węzłów interpolacji oraz wartości σ_i do wzoru:

$$s(x) = \begin{cases} y_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3, & x \in [x_0,\ x_1] \\ y_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, & x \in [x_1,\ x_2] \end{cases}$$

gdzie

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - h(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$
$$c_i = 3\sigma_i$$
$$d_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h}$$

5 Bibliografia

Wykład *MOwNiT - Interpolacja* - Marian Bubak, Katarzyna Rycerz
Wykład *MOwNiT - Funkcje sklejane - spline functions* - Marian Bubak, Katarzyna Rycerz
Dokumentacja *SciPy Manual*
Dokumentacja *NumPy*