MOwNiT - Laboratorium 11: Całkowanie Monte Carlo

Wojciech Dąbek

4 czerwca 2024

1 Treści zadań

Tematem zadania będzie obliczenie metodą Monte Carlo całki funkcji:

1. $x^2 + x + 1$
2. $\sqrt{1 - x^2}$
3. $\frac{1}{\sqrt{x}}$

w przedziale (0, 1).

Proszę dla tych funkcji:

1. Napisać funkcję liczącą całkę metodą "hit-and-miss".
   Czy będzie ona dobrze działać dla funkcji $\frac{1}{\sqrt{x}}$?
2. Policzyć całkę przy użyciu napisanej funkcji.
   Jak zmienia się błąd wraz ze wzrostem liczby prób?
3. Policzyć wartość całki korzystając ze wzoru prostokątów dla dokładności 1e-3, 1e-4, 1e-5 i 1e-6. Porównać czas obliczenia całki metodą Monte Carlo i przy pomocy wzoru prostokątów dla tej samej dokładności.
   Narysować wykres. Zinterpretować wyniki.

2 Rozwiązania

2.1 Zadanie 1

Zadaną funkcję (wraz z pomocniczą określającą wysokość obszaru) napisałem w języku Python:

```python
from random import uniform  # liczby quasi-losowe
                            # (rozkład jednostajny)

def estimate_maximum(f, a, b):
    if a == 0:
        a = .0001
    cur = f(a)
    d = min((b - a) / 100, .5)
    x = a
    while x < b:
        cur = max(cur, f(x))
        x += d
    return cur * 1.1


def monte_carlo(f, a, b, n):
    counter = 0
    h = estimate_maximum(f, a, b)
    for _ in range(n):
        x = uniform(a, b)
        y = uniform(0, h)
        if y <= f(x):
            counter += 1
    return (b - a) * h * counter / n
```

Ponieważ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, dla przedziału $(0,\ 1)$ funkcja `estimate_maximum` zwróci bardzo dużą wysokość rozważanego obszaru, którego pole pod wykresem początkowo bardzo szybko malejącej funkcji będzie bardzo małą częścią. Z tego powodu przy małej ilości wybranych punktów otrzymana ostatecznie przybliżona wartość funkcji może być względem dokładnej bardzo zaniżona (czy wręcz zerowa).

Wniosek: Metoda ta nie sprawdzi się dobrze do całkowania funkcji, które przyjmują na niewielkich fragmentach rozważanego przedziału wartości mocno odbiegające rzędem wielkości od wartości na większości tego przedziału.

2.2 Zadanie 2

Aby określić błędy, potrzebujemy najpierw obliczyć analitycznie wartości całek:

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1)\, dx = \frac{11}{6}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

Wartości całek dla zadanych funkcji wraz z błędami bezwzględymi dla liczby prób od 10 do 10^6 obliczam następującym kodem korzystającym z funkcji z zadania 1:

```
from math import sqrt, pi, fabs

x_0, x_n = 0, 1
funs = [
    (lambda x: x * x + x + 1, 11/6, 'x^2 + x + 1'),
    (lambda x: sqrt(1 - x * x), pi/4, 'sqrt(1 - x^2)'),
    (lambda x: 1 / sqrt(x), 2, '1 / sqrt(x)')
]

for i, (fun, exact, rep) in enumerate(funs):
    print(f'f(x) = {rep}')
    for k in range(1, 7):
        N = 10**k
        result = monte_carlo(fun, x_0, x_n, N)
        print(f'for N = 10^{k}: {result:.4f}', end='\t')
        print(f'error = {fabs(exact - result):.4f}')
    print()
```

Program ten wypisuje:

```
f(x) = x^2 + x + 1
for N = 10^1: 1.3200    error = 0.5133
for N = 10^2: 1.5840    error = 0.2493
for N = 10^3: 1.8579    error = 0.0246
for N = 10^4: 1.8355    error = 0.0021
for N = 10^5: 1.8360    error = 0.0026
for N = 10^6: 1.8336    error = 0.0003

f(x) = sqrt(1 - x^2)
for N = 10^1: 0.5500    error = 0.2354
for N = 10^2: 0.9460    error = 0.1606
for N = 10^3: 0.7898    error = 0.0044
for N = 10^4: 0.7905    error = 0.0051
for N = 10^5: 0.7873    error = 0.0019
for N = 10^6: 0.7853    error = 0.0001
```

```
f(x) = 1 / sqrt(x)
for N = 10^1: 0.0000    error = 2.0000
for N = 10^2: 0.0000    error = 2.0000
for N = 10^3: 2.2000    error = 0.2000
for N = 10^4: 2.0460    error = 0.0460
for N = 10^5: 2.0152    error = 0.0152
for N = 10^6: 1.9861    error = 0.0139
```

Możemy zaobserwować konsekwentny spadek wartości błędu wraz ze wzrostem liczby prób. Potwierdzony jest też wniosek z zadania 1.

2.3 Zadanie 3

Obliczenia oraz rysowanie wykresów wykonałem następującym programem wykorzystującym funkcje z zadania 1:

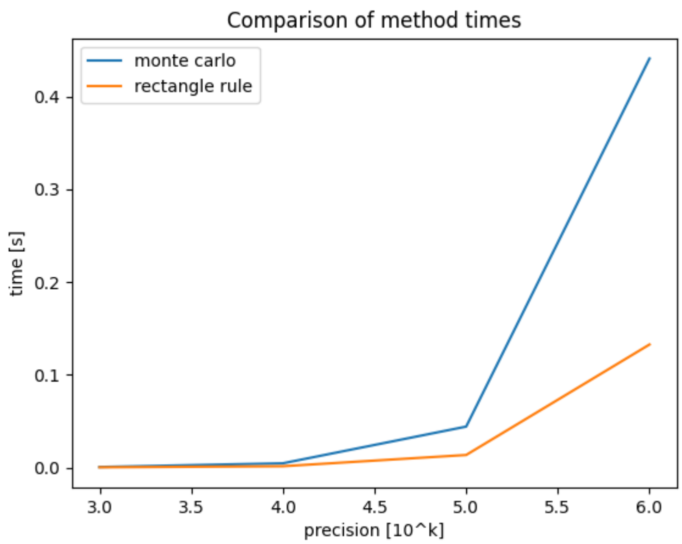
```
from time import perf_counter
import matplotlib.pyplot as plt


def rect_integrate(f, a, b, h):
    if a == 0:
        a = .0001
    sum = 0
    x = a
    while x < b:
        sum += f(x)
        x += h
    return sum * h


x_0, x_n = 0, 1
funs = [
    (lambda x: x * x + x + 1, 11/6, 'x^2 + x + 1'),
    (lambda x: sqrt(1 - x * x), pi/4, 'sqrt(1 - x^2)'),
    (lambda x: 1 / sqrt(x), 2, '1 / sqrt(x)')
]

for i, (fun, _, rep) in enumerate(funs):
    print(f'f(x) = {rep}')
    mc_times, rect_times = [], []
    for k in range(3, 7):
        N = 10**k
        time = perf_counter()
        mc_result = monte_carlo(fun, x_0, x_n, N)
        time = perf_counter() - time
        print(f'for N = 10^{k}:  {mc_result:.4f}', end='\t')
        print(f'time = {time:.5f} s')
        mc_times.append(time)
        time = perf_counter()
        rect_result = rect_integrate(fun, x_0, x_n, 1/N)
        time = perf_counter() - time
        print(f'for h = 10^-{k}: {rect_result:.4f}', end='\t')
        print(f'time = {time:.5f} s')
        rect_times.append(time)
```

```
    print()
    plt.plot(range(3, 7), mc_times, label='monte carlo')
    plt.plot(range(3, 7), rect_times, label='rectangle rule')
    plt.legend(loc='upper left')
    plt.title('Comparison of method times')
    plt.xlabel('precision [10^k]')
    plt.ylabel('time [s]')
    plt.show()
```

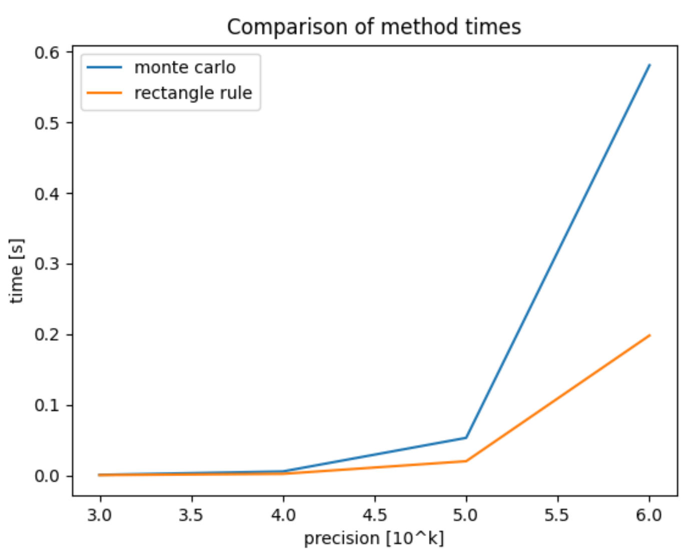
Program wypisuje:

```
f(x) = x^2 + x + 1
for N = 10^3:  1.8513 time = 0.00047 s
for h = 10^-3: 1.8325 time = 0.00014 s
for N = 10^4:  1.8434 time = 0.00447 s
for h = 10^-4: 1.8334 time = 0.00132 s
for N = 10^5:  1.8285 time = 0.04407 s
for h = 10^-5: 1.8333 time = 0.01345 s
for N = 10^6:  1.8354 time = 0.44108 s
for h = 10^-6: 1.8332 time = 0.13260 s

f(x) = sqrt(1 - x^2)
for N = 10^3:  0.7777 time = 0.00055 s
for h = 10^-3: 0.7858 time = 0.00020 s
for N = 10^4:  0.7878 time = 0.00538 s
for h = 10^-4: 0.7853 time = 0.00198 s
for N = 10^5:  0.7811 time = 0.05297 s
for h = 10^-5: 0.7853 time = 0.01987 s
for N = 10^6:  0.7855 time = 0.58076 s
for h = 10^-6: 0.7853 time = 0.19799 s

f(x) = 1 / sqrt(x)
for N = 10^3:  1.7600 time = 0.00052 s
for h = 10^-3: 2.0494 time = 0.00018 s
for N = 10^4:  1.8370 time = 0.00510 s
for h = 10^-4: 1.9854 time = 0.00188 s
for N = 10^5:  1.9987 time = 0.05079 s
for h = 10^-5: 1.9805 time = 0.01951 s
for N = 10^6:  1.9950 time = 0.50160 s
for h = 10^-6: 1.9800 time = 0.18567 s
```

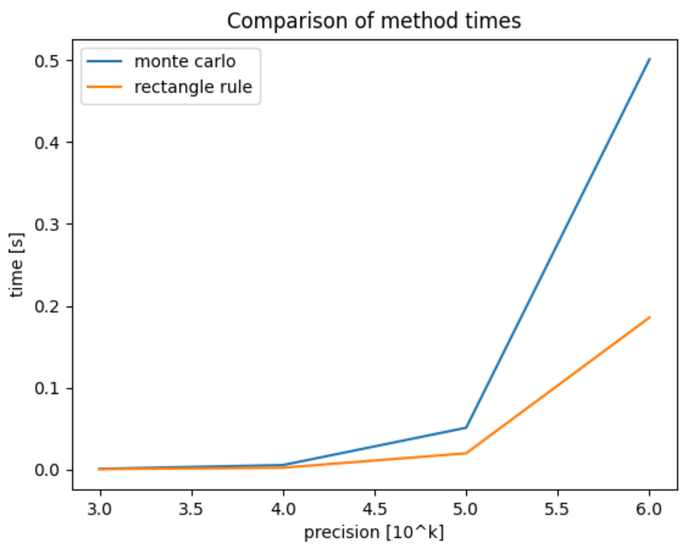
Oraz rysuje następujące wykresy:



Rysunek 1: Wykres czasu obliczeń dla funkcji $x^2 + x + 1$



Rysunek 2: Wykres czasu obliczeń dla funkcji $\sqrt{1 - x^2}$



Rysunek 3: Wykres czasu obliczeń dla funkcji $\frac{1}{\sqrt{x}}$

Wniosek: Czas obliczeń w obu przypadkach rośnie w podobny sposób, ale szybciej w przypadku metody Monte Carlo niż prostokątów. Zależność tak jest prawdziwa w ten sam sposób dla wszystkich badanych funkcji.

3 Bibliografia

Materiały ze strony