MOwNiT - Laboratorium 4: Aproksymacja

Wojciech Dąbek

26 marca 2024

1 Treści zadań laboratoryjnych

1. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0, 1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla $w(x) = 1$.
2. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0, 1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a.

2 Treści zadań domowych

1. Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia.
2. Oblicz wartości funkcji $f(x) = 1 - x^2$ w dyskretnych punktach x_i : $x_i = -1 + 0.5i,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$, a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego.
3. Wykonać aproksymację funkcji $|sin(x)|$ funkcjami trygonometrycznymi w zakresie $[-\pi, \pi]$.

3 Rozwiązania zadań laboratoryjnych

3.1

Szukamy funkcji aproksymującej będącej wielomianem pierwszego stopnia

$$q(x) = c_0 + c_1 x = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$$
$$\varphi_0(x) = x^0 = 1, \quad \varphi_1(x) = x^1 = x$$

Do aproksymacji metodą średniokwadratową należy więc rozwiązać układ równań:

$$\sum_{i=0}^{1} c_i \int_0^1 w(x) \cdot \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x)\ dx = \int_0^1 w(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_j(x)\ dx$$

$$\text{dla } j = 0,\ 1$$

Obliczam więc kolejno:

$$\int_0^1 w(x) \cdot \varphi_0(x) \cdot \varphi_0(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot 1 \cdot 1\ dx = 1$$
$$\int_0^1 w(x) \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_0(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot x \cdot 1\ dx = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 w(x) \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot x \cdot x\ dx = \frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 w(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_0(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot (1 + x^3) \cdot 1\ dx = \frac{5}{4}$$
$$\int_0^1 w(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_1(x)\ dx = \int_0^1 1 \cdot (1 + x^3) \cdot x\ dx = \frac{7}{10}$$

Podstawiając do układu równań otrzymuję postać

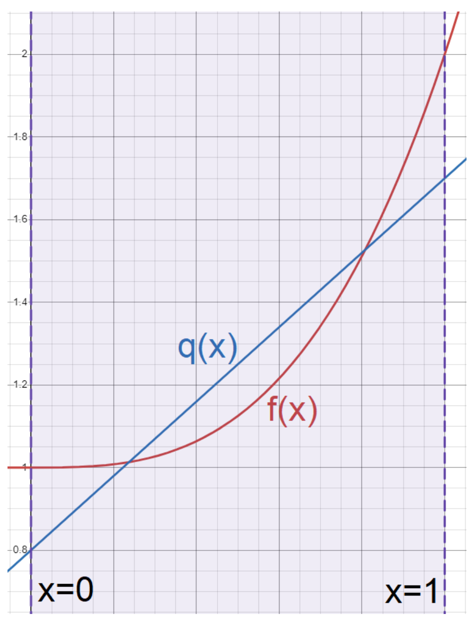
$$\begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{4}{5} = 0.8 \\ c_1 = \frac{9}{10} = 0.9 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy wzór funkcji aproksymującej:

$$q(x) = 0.9x + 0.8$$



Rysunek 1: Wykresy na [0, 1] funkcji aproksymowanej f i aproksymującej q.

3.2

Wielomiany Legendre'a P_n są ortogonalne na przedziale [-1, 1] z wagą 1.
Aby uzyskać podobny efekt na zadanym przedziale [0, 1] określam przesunięte wielomiany Legendre'a jako $\widetilde{P}_n(x) = P_n(2x-1)$. Poprzez takie przekształcenie afiniczne otrzymujemy wielomiany $\widetilde{P}_n$ ortogonalne na [0, 1].
Szukamy funkcji aproksymującej będącej wielomianem drugiego stopnia, więc skorzystam jedynie z pierwszych trzech przesuniętych wielomianów Legendre'a:

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_0(x) &= 1\\ \widetilde{P}_1(x) &= 2x-1\\ \widetilde{P}_2(x) &= 6x^2-6x+1\end{aligned}$$

Ze względu na ortogonalność układu powyższych funkcji współczynniki funkcji aproksymującej są tu określone wzorem

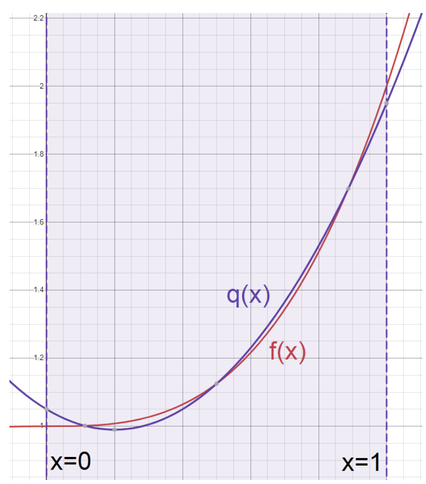
$$c_i = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^1 \widetilde{P}_i(x) f(x)\, dx, \quad \lambda_i = \int_0^1 \widetilde{P}_i^2(x)\, dx$$
$$\text{dla } i = 0, 1, 2$$

Dokonując odpowiednich podstawień uzyskuję wyniki:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{5}{4}\\ c_1 = \frac{9}{20}\\ c_2 = \frac{1}{4}\end{cases}$$

Wstawiając te współczynniki do funkcji aproksymującej otrzymuję:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{5}{4} + \frac{9}{20}(2x-1) + \frac{1}{4}(6x^2-6x+1)\\ &= \frac{3}{20}(10x^2-4x+7)\end{aligned}$$



Rysunek 2: Wykresy na [0, 1] funkcji aproksymowanej f oraz aproksymującej q.

Wnioski: Stopień wielomianu aproksymującego ma ogromne znaczenie dla dokładności aproksymacji, a użycie wielomianów ortogonalnych wyraźnie ułatwia obliczenia.

4 Rozwiązania zadań domowych

4.1

4.2

4.3

5 Bibliografia

Materiały ze strony - Włodzimierz Funika
https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials#Shifted_Legendre_polynomials