SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

Olasılık ve İstatistik

HAFTA 5

Matematiksel Beklenti

Varyans

Dr. Öğretim Üyesi Burcu ÇARKLI YAVUZ

bcarkli@sakarya.edu.tr

Rassal değişkenin beklenen değeri

X, olasılık dağılımı f(x) olan bir rastgele değişken olsun. X'in **ortalaması** ya da **beklenen değeri**,

Eğer X kesikli ise,

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x f(x)$$

Eğer X sürekli ise,

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek

- X, hilesiz bir zarın atılması sonucunu gösteren rastgele değişken olsun. X rastgele değişkeninin beklentisi nedir?

x	1	2	3	4	5	6
f(x)=P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E[x] = (1 * \frac{1}{6})+(2 * \frac{1}{6})+(3 * \frac{1}{6})+(4 * \frac{1}{6})+(5 * \frac{1}{6})+(6 * \frac{1}{6}) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

- Zar atma deneyi çok sayıda tekrar edilirse, tüm gelen sonuçların ortalaması yaklaşık olarak 7/2 olacaktır (olasılık dağılımının merkezi).

Örnek

- Olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilen X rastgele değişkeni için E[x]'i hesaplayınız.

x	**0**	**1**
f(x)=P(X=x)	1/3	2/3

- $E[x] = 0 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Örnek

➢ Olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilen X rastgele değişkeni için E[x]'i hesaplayınız.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1.5} & 0 < x < 1.5 \; ise \\ 0 & dd \end{cases}$$

$$E[x] = \int_0^{1.5} x * \frac{1}{1.5} dx = \frac{x^2}{3} \Big|_0^{1.5} = \frac{1.5 * 1.5}{3} = 0.75$$

Örnek

- X rastgele değişkeni bir elektronik cihazın saat cinsinden ömrünü ifade etsin. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20,000}{x^3}, & x > 100, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

olmak üzere, bu tür bir cihazın beklenen ömrünü bulunuz.

Örnek

- X rastgele değişkeni bir elektronik cihazın saat cinsinden ömrünü ifade etsin. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20{,}000}{x^3}, & x > 100, \\ 0, & \text{elsewhere}. \end{cases}$$

olmak üzere, bu tür bir cihazın beklenen ömrünü bulunuz.

Çözüm:

$$\mu = E(X) = \int_{100}^{\infty} x \frac{20,000}{x^3}\, dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20,000}{x^2}\, dx = 200.$$

- Bu tip bir cihazın ömrünün ortalama olarak 200 saat sonra sona ereceğini bekleyebiliriz.

X'e bağlı olan g(x) rastgele değişkeninin beklenen değeri

- X, *kesikli bir rassal değişken*, f(x) de bunun olasılık dağılımının x'teki değeri ise g(x)'in beklenen değeri şu şekilde hesaplanır:

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x) f(x)$$

- X, *sürekli bir rassal değişken*, f(x) de bunun olasılık dağılımının x'teki değeri ise g(x)'in beklenen değeri şu şekilde hesaplanır:

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \, dx$$

Örnek

- X, hilesiz bir zar atılınca gelen sayı ise $g(x) = 2x^2 + 1$ in beklenen değerini bulunuz.

- Bir zarın atılması deneyinde 6 farklı sayı gelebilir ve her sonucun olasılığı 1/6 dır.

$$E[g(x)] = \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6}(2x^2 + 1)$$

$$= (2 \cdot 1^2 + 1)\frac{1}{6} + \cdots + (2 \cdot 6^2 + 1)\frac{1}{6} = \frac{94}{3}$$

Örnek

- Olasılık dağılımı aşağıdaki gibi olan X'in, herhangi bir güneşli cuma günü öğleden sonra saat 16:00 ile 17:00 arasında bir araba yıkama makinesinden geçen araba sayısı olduğu varsayılsın.

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

g(x)=2X-1 dolar cinsinden yönetici tarafından görevliye ödenen para miktarı olsun. Bu zaman aralığı için görevlinin beklenen kazancını elde ediniz.

$$E[g(X)] = E(2X-1) = \sum_{x=4}^{9}(2x-1)f(x)$$

$$= (7)\left(\frac{1}{12}\right) + (9)\left(\frac{1}{12}\right) + (11)\left(\frac{1}{4}\right) + (13)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$+ (15)\left(\frac{1}{6}\right) + (17)\left(\frac{1}{6}\right) = \$12.67.$$

Örnek

- X'in olasılık yoğunluğu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{değilse} \end{cases}$$

iken, $g(x) = e^{\frac{3x}{4}}$ ün beklenen değerini bulunuz.

$$E\left[e^{3x/4}\right] = \int_0^\infty e^{3x/4} \cdot e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x/4}\, dx$$

$$= 4$$

Örnek

- X, yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

olan bir rastgele değişken olsun. g(x)= 4X+3 rastgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

$$E(4X+3) = \int_{-1}^{2} \frac{(4x+3)x^2}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} (4x^3+3x^2)\, dx = 8.$$

Beklentinin özellikleri

- b sabit bir sayı ise, E[b]=b

  E[2]=2

- a sabit bir sayı ise, E[aX]=aE[X]

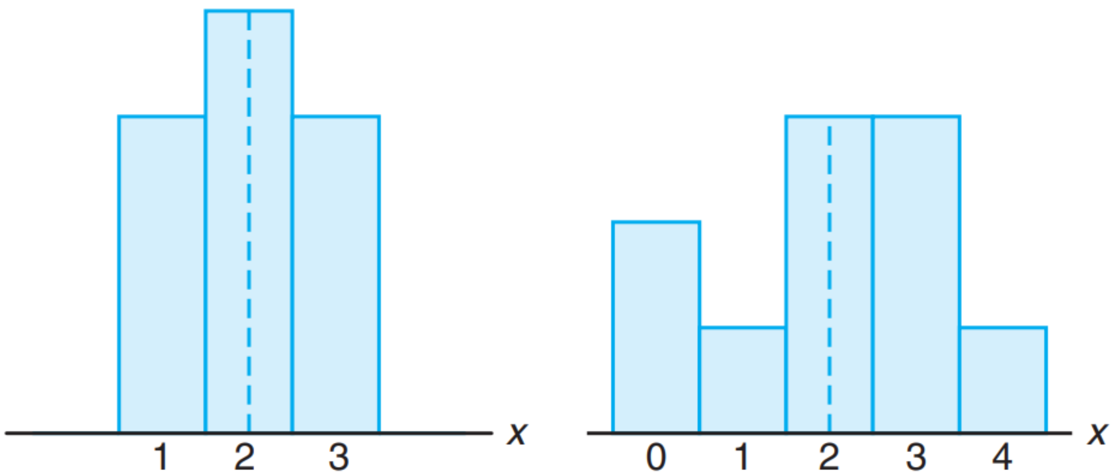
  E[2X]=2E[X]

- a ve b sabit sayı ise, E[aX+b]=aE[X]+b

  E[2X+5]=2E[X]+5

Varyans

- Bir rastgele değişkenin varyansı, gözlemlerin ortalama etrafında nasıl bir değişiklik gösterdiğinin ifadesidir.
- Aşağıdaki şekilde μ=2 ortalamasına sahip ancak ortalama etrafında gözlemlerin yayılımları bakımından önemli farklılık gösteren iki kesikli olasılık dağılımının histogramı verilmiştir.



(a) (b)

Varyans

- X, rastgele değişkeninin varyansı,

$$Var[X] = \sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

şeklinde ifade edilir.

- Kesikli ve sürekli rastgele değişkenler için E[X] ve E[X^2] hesaplaması farklı olacaktır:

X kesikli ise $E[X^2] = \sum_x x^2 f(x)$

X sürekli ise $E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$

- Varyansın pozitif karekökü σ, X'in **standart sapması** olarak adlandırılır.

Örnek

- X rastgele değişkeninin olasılık dağılımı aşağıda verilmiştir. Buna göre Var[x]'i hesaplayınız.

x	1	2	3
f(x)	0.3	0.4	0.3

$$Var[X] = \sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 f(x) = 1^2 * 0.3 + 2^2 * 0.4 + 3^2 * 0.3 = 4.6$$

$$E[X] = \sum_x x f(x) = 1 * 0.3 + 2 * 0.4 + 3 * 0.3 = 2$$

Var[x]=4.6-2^2=0.6

Örnek

- X rastgele değişkeni, üretim bandından alınan ve test edilen 3 parçadan oluşan örneklem içerisinde yer alan defolu ürünlerin sayısı olsun. X'in olasılık dağılımı

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.51	0.38	0.10	0.01

olmak üzere σ^2 yi hesaplayınız.

$$\mu = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (2)(0.10) + (3)(0.01) = 0.61$$

$$E(X^2) = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (4)(0.10) + (9)(0.01) = 0.87.$$

$$\sigma^2 = 0.87 - (0.61)^2 = 0.4979.$$

Örnek

- Bir mağazalar zincirinin yerel mağazasında biner litre olarak içme suyu ürünlerine olan haftalık talebi gösteren sürekli rastgele değişken X,

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. X'in ortalama ve varyansını bulunuz.

$$\mu = E(X) = 2\int_1^2 x(x-1)\,dx = \frac{5}{3}$$

$$E(X^2) = 2\int_1^2 x^2(x-1)\,dx = \frac{17}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

X ile ilişkili g(x) rastgele değişkeninin varyansı

- X olasılık dağılımı f(x) olan bir rastgele değişken olsun. g(x) rastgele değişkeninin varyansı,

Eğer X kesikli ise,

$$\sigma^2_{g(X)} = E\{[g(X) - \mu_{g(X)}]^2\} = \sum_x [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x)$$

Eğer X sürekli ise,

$$\sigma^2_{g(X)} = E\{[g(X) - \mu_{g(X)}]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x)\, dx$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek

➤X rastgele değişkeninin olasılık dağılımı

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

olmak üzere, g(x)=2x+3'ün varyansını hesaplayınız.

$$\mu_{2X+3} = E(2X+3) = \sum_{x=0}^{3} (2x+3) f(x) = 6.$$

$$\sigma^2_{2X+3} = E\{[(2X+3) - \mu_{2x+3}]^2\} = E[(2X+3-6)^2]$$

$$= E(4X^2 - 12X + 9) = \sum_{x=0}^{3} (4x^2 - 12x + 9) f(x) = 4.$$

Varyansın özellikleri

a ve b sabit ise,

- $Var[a] = 0$

  Var[3]=0

- $Var[ax] = a^2 var[x]$

  Var[2x]=4Var[x]

- $Var[ax + b] = a^2 var[x]$

  Var[2x+5]=4Var[x]

Örnek

- X rastgele değişkeni için E[x]=4 ve Var[x]=2 olarak verildiğine göre,

- E[3x-5]=?

  3E[x]-5=3*4-5=7

- Var[5x+2]=?

  25Var[x]=25*2=50

Kaynaklar

- Doç. Dr. Melda Akın, Matematiksel İstatistik Ders Notu, İstanbul Üniversitesi
- Mühendisler ve Fen Bilimciler için Olasılık ve İstatistik, Ronald E. Walpole, Çeviri Editörü: Prof. Dr. M. Akif BAKIR, 9. baskıdan çeviri, Palme Yayıncılık, 2016.