# 2019 Bahar MAT1072 Matematik 2
## Arasınav Cevap Anahtarı

**Soru 1:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{2^n \sqrt[5]{n^3+7}}$ serisinin hangi $x \in \mathbb{R}$ değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve ıraksak olduğunu araştırınız.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt[5]{(n+1)^3+7}} \cdot \frac{2^n\sqrt[5]{n^3+7}}{(x-4)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[5]{n^3+7}}{\sqrt[5]{(n+1)^3+7}}}_{1} \cdot \frac{|x-4|}{2} = \frac{|x-4|}{2} < 1 \Rightarrow |x-4| < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{2 < x < 6}$$

<u>$x=6$ için</u>, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^3+7}}$ serisi elde edilir.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/5}}$ $\left(p=\frac{3}{5}<1 \Rightarrow \text{ıraksak}\right)$ serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[5]{n^3+7}}}{\frac{1}{n^{3/5}}} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{iki seri aynı karakterdedir.}$$

Limit testine göre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/5}}$ ıraksak olduğundan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^3+7}}$ ıraksaktır.

<u>$x=2$ için</u>, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n^3+7}}$ serisi elde edilir. Mutlak yakınsak değildir. Şartlı yakınsak mı?

i) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3+7}} > 0$  ii) $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(n+1)^3+7}} < \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3+7}} = a_n$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^3+7}} = 0$

Alterne seri testine göre seri yakınsaktır. Mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

Mutlak Yakınsak : $(2,6)$

Şartlı Yakınsak : $x=2$

Iraksak : $\mathbb{R}-[2,6)$

Soru 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{5^n} \right] = ?$

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

$$= 2 \cdot \left[ \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots \right] + \left[ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \cdots \right]$$

$a = \frac{1}{9}$ $\qquad$ $a = -\frac{1}{5}$

$r = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $r = -\frac{1}{5}$

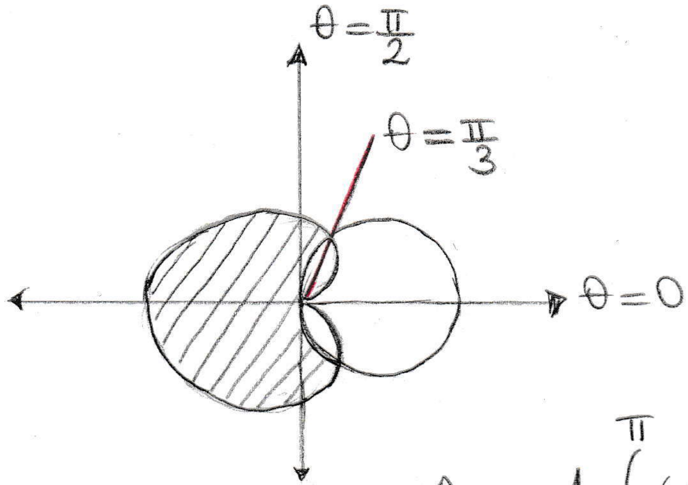
$\left| r = \frac{1}{3} \right| < 1$ $\qquad$ $\left| r = -\frac{1}{5} \right| < 1$

$\frac{a}{1-r}$ $\qquad$ $\frac{a}{1-r}$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{-\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Soru 3:

a) $r=1-\cos\theta$ eğrisinin içinde, $r=\cos\theta$ eğrisinin dışında kalan alanı veren belirli integral(ler)i kutupsal koordinatlarda yazınız. (Şekil çiziniz, integralleri hesaplamayınız.)

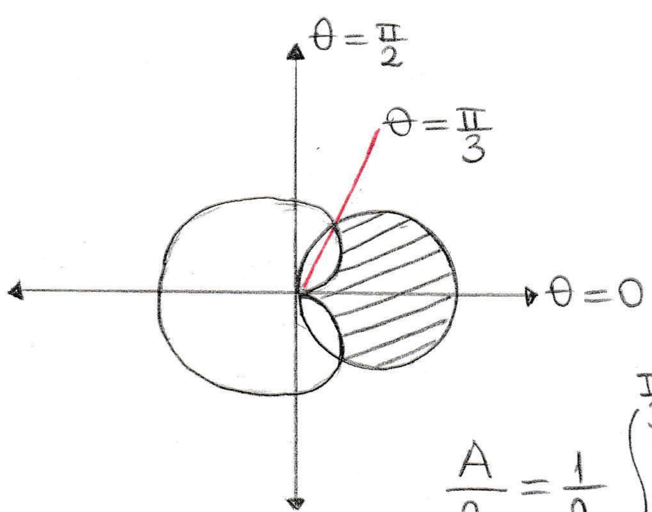



$1-\cos\theta=\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$

$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^2\,d\theta$$

b) $r=1-\cos\theta$ eğrisinin dışında, $r=\cos\theta$ eğrisinin içinde kalan alanı veren belirli integral(ler)i kutupsal koordinatlarda yazınız. (Şekil çiziniz, integlleri hesaplamayınız.)




$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\cos\theta)^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$