

# 1. Doğrusal Programlama

Doğrusal Programlama kıt kaynakların optimum kullanımını içeren bir tekniktir. Bir doğrusal programlama sorusu kaynaklarını ne kadar kısıtlandığını gösteren “kısıt denklemlerine”, amaç değerini oluşturan “amaç fonksiyonuna” sahip olmalıdır.

Diğer bir ifade ile Doğrusal programlama, iyi tanımlanmış doğrusal eşitliklerin veya eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşulları altında doğrusal bir amaç fonksiyonunu en iyi (optimum /maksimizasyon - minimizasyon) kılan değişken değerlerinin belirlenmesinde kullanılan matematiksel programlama tekniğidir.

Bir problemin doğrusal programlama ile modellenip çözülebilmesi için öncelikle aşağıdaki 5 varsayımı sağlaması gerekir.

Doğrusal programlama ulaştırma ve dağıtım kanalları, beslenme ve karışım problemleri, üretim ve yatırım planlaması, Arazi kullanımı planlaması, kuruluş yer, seçimi, oyun teorisi, işgücü planlama ve araç rotalama gibi birçok probleme çözüm olmaktadır.

Bir doğrusal programlama modeli aşağıdaki 3 bileşeni barındırmak zorundadır.

1. Karar Değişkenleri: Doğrusal programlama modellerinde başlangıçta değerleri bilinmeyen ve direkt olarak karar oluşturmada kullanılan değişkenlerdir.
2. Amaç Fonksiyonu: Karar değişkenleri yardımıyla önceden belirlenen amacın (maksimize veya minimize) gerçekleştiği matematiksel denklemdir.
3. Kısıtlar: Karar oluşturma sürecinde, kararımızı kısıtlayan dış veya iç etkenlerin matematiksel ifadesidir.

Burada dikkat edilmesi gereken en önemli konu amaç fonksiyonu ve kısıt denklemlerinin sadece ve sadece karar değişkenlerinin birer fonksiyonu olduğudur. Örneğin A ve B karar değişkenleri belirlendi ise bu durumda amaç fonksiyonu da, kısıt denklemleri de sadece ve sadece A ve B karar değişkenleri ile yazılır.

Bütün doğrusal programlama modellerinin en az bir kısıt denklemine sahip olması gerekliliğine dikkat ediniz.

## 2.1. Temel Maksimizasyon Modelleri ve Grafik Çözümler:

Bir maksimizasyon modelinde amaç fonksiyonu  $Z_{max}$  ifadesi ile gösterilir. Burada temel amaç olası en yüksek değere ulaşmaktır.

### Örnek 1: Çamaşır Makinesi (Mehpare Timör / Yöneylem Araştırması)

Bir beyaz eşya şirketi birim karı 6 lira olan çamaşır makinası ve birim karı 7 lira olan kurutma makinası üretmektedir. İşletmede üretim, montaj ve paketleme olmak üzere 3 bölüm vardır. Üretim bölümünün günlük kapasitesi 120 iş gücü saattir. 1 adet çamaşır makinası üretmek için 2 iş gücü saat gerekmekte ve 1 adet kurutma makinası üretmek için 3 iş gücü saat gerekmektedir. Montaj bölümünün günlük kapasitesi 80 iş gücü saattir. Burada 1 adet çamaşır makinası için 2 iş gücü saate, 1 adet kurutma makinası için 1 iş gücü saate ihtiyaç vardır. Paketleme bölümünün günlük kapasitesi ise 400 iş gücü saattir. Bu bölümde 1 adet çamaşır makinası için 4 iş gücü saate, 1 adet kurutma makinası için 4 iş gücü saate ihtiyaç duyulmaktadır.

Buna göre işletmenin mevcut kısıtlar altında karını maksimize edebilmesi için ne yapması gerekmektedir.

Yukarıdaki soru incelendiğinde sorunun bir doğrusal programla sorusu olduğu anlaşılmaktadır. Bu durumda 3 aşamalı bir yöntem yardımıyla DP matematiksel modelini oluşturabiliriz.

Model oluşturmadan önce verileri derli toplu görmek adına tabloşturalım.

	Üretim	Montaj	Paketleme	Birim Kar
Çamaşır Makinesi	2	2	4	6
Kurutma Makinesi	3	1	4	7
Kapasiteler	120	80	400	

### 1. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi:

DP modelinin ilk aşaması karar değişkenlerinin belirlenmesidir. Karar değişkenleri bir karar verme sürecinde, karar verici tarafından başlangıçta değeri bilinmeyen durumlardır. Zaten bu durumların değerleri bilinseydi matematiksel modelden bahsetmek doğru olmazdı.

Soru özelinde incelersek bu firmanın yöneticisi başlangıçta neyi bilmemektedir !!!

Sorunun cevabı çok da zor değil. Firma yöneticisi satış yapacağı ürünler olan çamaşır makinesi ve kurutma makinelerinden ne kadar üreteceğini bilmemektedir. Bu bağlamda karar değişkenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

*ÇM: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Çamaşır Makinesi adedi*

*KM: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Kurutma Makinesi adedi*

Karar değişkenleri ifadelerinde ne amaçla kullanılacaklarının da belirtilmesi uygun olacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer hususta karar değişkenlerinin isimlendirilmesi işlemidir. İsimlendirme tamamen modeli kurgulayan kişiye bağlıdır. Fakat hatırlatıcı olması adına bilinmeyen olarak addedilen isimlerin (Çamaşır ve kurutma makinesi) kısaltmalarını kullanmak uygun olabilir.

Not: Bütün kısıt denklemleri ve amaç fonksiyonu mutlaka burada belirlenen karar değişkenleri ile yazılmalıdır.

### 2. Amaç Fonksiyonunun Yazılması:

Daha sonra amacımızı sözel olarak ifade edip, amaç fonksiyonunda matematiksel olarak yazmamız gerekmektedir. Soruda satışı yapılan ürünlerden maksimum satış geliri elde edilmesi amaçlanmaktadır. Soruda eğer kar değil de maliyet kalemlerinden bahsedilse idi o zaman maliyetlerin minimizasyonu olacağına dikkat ediniz.

Amaç: Karın Maksimizasyonu

Soruda satış gelirleri ÇM için 6 TL/adet ve KM için 7TL/adet olarak verilmiştir. Bu durumda her bir ÇM den 6 TL ve her bir KM den 7 TL kazanç getiren matematisel fonksiyon aşağıda sunulmuştur.

$$6\text{ÇM} + 7\text{KM}$$

DP modellerinde amaç ve amacın matematiksel ifadesi aşağıdaki gibi birleştirilerek yazılır.

$$Z_{max} = 6\text{ÇM} + 7\text{KM}$$

### 3. Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

Hiçbir amaç kendisini sınırlayan özel durumlar olmadan gerçekleşemez. Eğer sınırlayıcılar olmasa idi Maksimizasyon sorularının cevabı sonsuz, minimizasyon sorularının cevabı sıfır olurdu.

Soru karın maksimizasyonu ve konu üretim miktarı üzerine ise genellikle kapasite kısıtlamaları söz konusudur.

Bu soruda da üç farklı işletme bölümünün (üretim, montaj ve paketleme) farklı kapasitelere (120, 80, 400) sahip oldukları görülmektedir. O zaman soruda üç farklı kapasite kısıtı söz konusudur. Bu kısıtları sözel olarak ifade edelim.

*Üretim Bölümü Kapasitesi Kısıtı*

*Montaj Bölümü Kapasitesi Kısıtı*

*Paketleme Bölümü Kapasitesi Kısıtı*

Eğer incelenen sınırlama kapasite ise, bu kapasitenin altında çalışma durumu söz konusu olabilir ama hiçbir zaman kapasiteler aşılamaz. Bu şekilde “en fazla” ifadesi ile belirtilen kısıtları “≤” ifadesi ile matematiksel olarak ifade ediyoruz.

Üretim kapasitesini ele alalım. Her bir çamaşır makinesi 2 saat ve her bir kurutma makinesi 3 saat süre ile üretim bölümünde kalmaktadır. Bu durumda “toplam üretimde harcanan süre kapasitenin altında kalmalıdır” şeklindeki ifade aşağıdaki gibi denklemle ifade edilebilir.

$$2\text{ÇM} + 3\text{KM} \leq 120 \text{ (Üretim kısıtı)}$$

Burada örneğin 5 ÇM ve 5KM üretilirse  $5 \cdot 2 = 10$  saat ÇM için ve  $5 \cdot 3 = 15$  saat KM için üretim departmanında harcanacaktır. Bu harcama düzeyi ise toplam kapasite olan 120 işgücü/saati geçmeyecektir. Montaj ve paketleme için ise kısıtlar aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$2\text{ÇM} + \text{KM} \leq 80 \text{ (Montaj kısıtı)}$$

$$4\text{ÇM} + 4\text{KM} \leq 400 \text{ (Paketleme kısıtı)}$$

Her doğrusal programlama modeli, karar değişkenlerinin negatif olmaması kısıtı olan “Pozitiflik Şartı” adı altında özel bir kısıtın eklenmesi ile tamamlanır.

$$\text{ÇM}, \text{KM} \geq 0$$

Şimdi matematiksel modelin tam halini yazalım.

$$Z_{max} = 6\text{ÇM} + 7\text{KM}$$

$$2\text{ÇM} + 3\text{KM} \leq 120 \text{ (Üretim kısıtı)}$$

$$2\text{ÇM} + \text{KM} \leq 80 \text{ (Montaj kısıtı)}$$

$$4\text{ÇM} + 4\text{KM} \leq 400 \text{ (Paketleme kısıtı)}$$

$$\text{ÇM}, \text{KM} \geq 0 \text{ (Pozitiflik Şartı)}$$

Not: Modelin doğruluğunu kontrol etmek için sözel metinde geçen her bir sayının, matematiksel modelde kullanılıp kullanılmadığını kontrol edebilirsiniz. Örneğin her bir sayının üstünü soruda çizin ve daha sonra model tamamlandığında çizilmemiş sayı olup olmadığını sorgulayın.

Sorunun matematiksel modelini tamamladık. Fakat henüz başlangıç sorduğumuz “Kaç tane çamaşır makinesi, kaç tane kurutma makinesi üretmeliyim?” sorusunun cevabını henüz vermedik. DP modellerinde eğer soru 2 değişkenden oluşuyorsa o zaman “Grafik Yöntem” denen özel bir yaklaşımla soruyu rahatlıkla çözebiliriz. Grafik Yöntem çözümü için tek şart değişken sayısının 2 olmasıdır, kısıt sayısı ile ilgili bir şarttan söz edilemez.

Grafik yöntemle çözüm yapabilmek için her bir kısıt iki boyutlu bir koordinat eksenine eksiksiz olarak aktarmak gerekmektedir.

Bir eşitsizliğin doğrusunun grafiğini çizmek için en az iki noktasını bilmek gereklidir. Kolay olarak çizilebilmesi için DP modellerinde her bir kısıtın eksenleri kestiği noktalar belirlenerek, bu noktalar düz bir çizgi ile birleştirilir.

Öncelikle her bir kısıtın eksenleri kestiği noktaları belirleyelim. Bir denklemin eksenleri kestiği noktaları bulmak için her iki değişkene sırası ile “0” değeri verilerek diğer değişkenin ne değer aldığı belirlenir.

$$2\text{ÇM} + 3\text{KM} \leq 120$$

$$\text{ÇM} = 0 \text{ iken } \text{KM} = 40$$

$$\text{KM} = 0 \text{ iken } \text{ÇM} = 60$$

$$2\text{ÇM} + \text{KM} \leq 80$$

$$\text{ÇM} = 0 \text{ iken } \text{KM} = 80$$

$$\text{KM} = 0 \text{ iken } \text{ÇM} = 40$$

$$4\text{ÇM} + 4\text{KM} \leq 400$$

$$\text{ÇM} = 0 \text{ iken } \text{KM} = 100$$

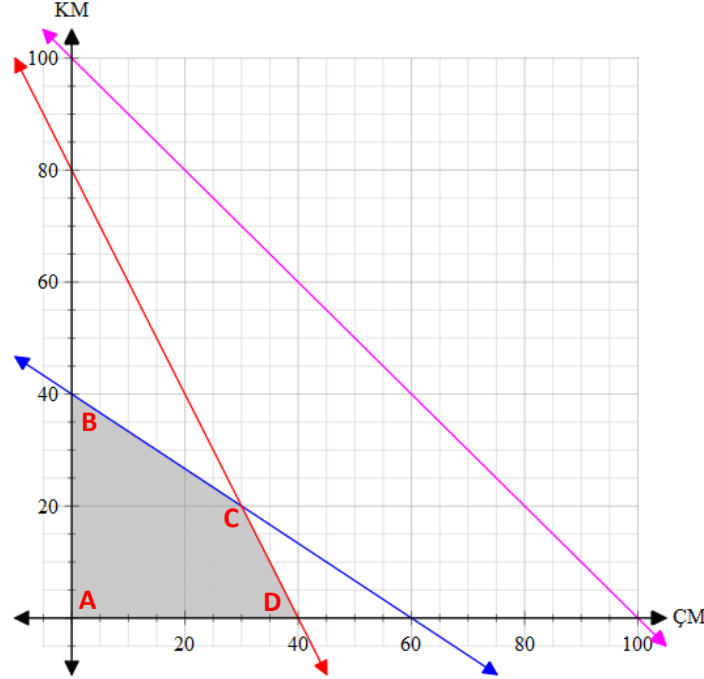
$$\text{KM} = 0 \text{ iken } \text{ÇM} = 100$$

Bu durumda üretim kısıtı (0,40) ve (60,0) noktalarından, montaj kısıtı (0,80) ve (40,0) noktalarından ve paketleme kısıtı ise (0,100) ve (100,0) noktalarından geçen doğruların çizilmesi ile grafik alanına aktarılır.



Yukarı üç farklı grafikte üç farklı kısıtın çizimi gösterilmiştir. Fakat DP modellerinde böy ayrık bir kullanım tercih edilmez. Bunun yerine üç grafik tek bir grafikte toplanır ve sadece üç kısıtı da aynı anda sağlayan bölge taranır. Bu şekildeki grafik aşağıda verilmiştir.

Bazı durumlarda tarama yapılacak alanı belirlemek zor olabilir. Bu durumda (0,0) koordinat değerini denkleme yazarak denklemin sağlanıp sağlanmadığı incelenir. Eğer sağlanıyorsa o zaman (0,0) noktası çözümde olacak şekilde tarama yapılır. Örneğin üretim kısıtında (0,0) değeri kısıta yazıldığında  $0 \leq 120$  denklemi sağlandığından, (0,0) noktası taranacak alanda olacak şekilde doğrunun alt kısmı taranır.



Yukarıdaki grafikte ortak taranan ABCD dörtgenin “Uygun Çözüm Bölgesi” adı verilir ve bu bölgedeki her bir değer ikilisi (Karar değişkeni değerlerinden bahsediliyor) bizim için uygun bir karardır. Fakat uygun karlar değil de en uygun (Optimal) karar işletme yöneticileri açısından tercih edilen karar türüdür. Her bir yönetici mevcut koşullarda en iyiye ulaşmayı hedefler.

Uygun çözüm alanındaki maksimum ve minimum değerler ancak ve ancak alanın sınır noktalarında, uç noktalarında yer alır. O yüzden her bir sınır noktasını belirleyip, amaç değerlerini hesaplamak gerekmektedir.

Şekildeki A, B ve D noktalarını direkt grafikten okuyabiliriz.

**A(0,0)**

**B(0,40)**

**D(40,0)**

Fakat C noktası bu aşamada direkt olarak okunamaz. Bu durumda temel matematik bilgilerine dayanan bir çıkarımla, o noktada kesişen doğruların birbirine eşit olacağı varsayımı ile ortak çözüm gerçekleştirilir. Kesişen kısıtlar Montaj ve üretim kısıtları olduğundan bu iki kısıt aşağıdaki gibi ortak çözülür.

$$2\text{ÇM} + 3\text{KM} = 120$$

$$2\text{ÇM} + \text{KM} = 80 \quad * -1 \Rightarrow -2\text{ÇM} - \text{KM} = -80$$

$$2\text{KM} = 40 \Rightarrow \text{KM} = 20 \Rightarrow \text{ÇM} = 30$$

Sonuçta D noktasının da (30, 20) değeri aldığını belirledik. Son aşamada her bir nokta için amaç fonksiyonu değerleri incelenir.

Uç Nokta	Amaç Değeri
A(0,0)	$Z_{max} = 6 * 0 + 7 * 0 = 0$ (Minimum)
B(0,40)	$Z_{max} = 6 * 0 + 7 * 40 = 280$
C(30,20)	$Z_{max} = 6 * 30 + 7 * 20 = 320$ (Maksimum)
D(40,0)	$Z_{max} = 6 * 40 + 7 * 0 = 240$

Bu kısıtlar altında işletmenin karını maksimize edebilmesi için **30** adet çamaşır makinası ve **20** adet kurutma makinası üretip satması gerekir. Bunu yaparsa maksimum kar **320** lirayı elde etmiş olur.

Grafik İncelendiğinde Üretim ve Montaj İşçilik kaynaklarının tamamı kullanırken, paketleme kaynağında bir miktar boşluk kalmaktadır.

Kısıt	Kullanım	Kapasite	Boşluk
Üretim	$2*30+3*20 = 120$	120	0
Montaj	$2*30 + 20 = 80$	80	0
Paketleme	$4*30+4*20 = 200$	400	200

Paketleme kaynağının karar alma sürecinde kısıtlayıcı olmadığını, üretim ve montaj kaynaklarının ise darboğaz oluşturarak direkt olarak kararı oluşturduğu görülmelidir.

Doğrusal programlama modellerinde değişken sayısından daha fazla kaynak kısıtlayıcı olmaz. Bu soruda olduğu gibi 3 kaynağın 1 tanesi kısıtlayıcı değildir.

Başka bir örnekle maksimizasyon sorularını pekiştirelim.

## Örnek 2: Evkur

Evkur marangoz atölyesi sipariş üzerine mutfak dolapları yapmaktadır. İşletmede kesme, işleme, cila ve montaj olmak üzere 4 bölüm vardır. Bu bölümlerde masa ve sandalyelerin üretimi için gereken süreler ve her birinden elde edilecek karlar tabloda verilmiştir.

	Kesme	İşleme	Cila	Montaj	Birim Kar
Masa	8	20	18	12	18
Sandalye	6	8	25	10	10
Kapasiteler	1800	2400	4500	2000	

!!Pozitiflik Şartı!!  
 $M, S \geq 0$

$$Z_{\max} = 18M + 10S$$

Buna göre karar değişkenlerini belirleyiniz. Amaç fonksiyonunu yazıp, modeli oluşturunuz.

$$\begin{aligned} 8M + 6S &\leq 1800 \text{ (K)} \\ 20M + 8S &\leq 2400 \text{ (İ)} \\ 18M + 25S &\leq 4500 \text{ (C)} \\ 12M + 10S &\leq 2000 \text{ (M)} \end{aligned}$$

### 1. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi:

Soruda karar verici konumundaki atölye sahibinin hangi değerleri başlangıçtan bilmediğini ortaya koyalım. Sorudaki bilinmeyen firmanın kaç adet sandalye ve masa üreteceğidir. Bu durumda karar değişkenleri aşağıdaki gibi olur.

*M: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Masa adedi*

*S: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Sandalye adedi*

### 2. Amaç Fonksiyonunun Yazılması:

Soruda her bir masa ve sandalye için birim karlar verilmiştir. Bu durumda amacın bu karları maksimum yapmak olduğunu söylemek doğru olacaktır. Birim karlar yardımıyla yazılan amaç fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$Z_{\max} = 18M + 10S$$

### 3. Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

Firma içerisinde yapılan 4 farklı işlemin her birisi için firma elinde bulunan kapasiteler bellidir. Bu durumda kapasite kısıtlarındaki yorumlar dikkate alınarak,  $\leq$  kısıtları her bir işlem için ayrı ayrı aşağıda verilmiştir.

$$8M + 6S \leq 1800 \text{ (Kesme Kısıtı)}$$

$$20M + 8S \leq 2400 \text{ (İşleme Kısıtı)}$$

$$18M + 25S \leq 4500 \text{ (Cila Kısıtı)}$$

$$12M + 10S \leq 2000 \text{ (Montaj Kısıtı)}$$

Ayrıca her modelde olması gereken pozitiflik kısıtını da dikkate alarak model toplu halde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Z_{max} = 18M + 10S$$

$$8M + 6S \leq 1800 \text{ (Kesme Kısıtı)}$$

$$20M + 8S \leq 2400 \text{ (İşleme Kısıtı)}$$

$$18M + 25S \leq 4500 \text{ (Cila Kısıtı)}$$

$$12M + 10S \leq 2000 \text{ (Montaj Kısıtı)}$$

$$M, S \geq 0 \text{ (Pozitiflik Şartı)}$$

Soruda iki değişken oluğu dikkate alınırsa grafik yöntemle çözüm yapılabileceği görülmektedir.

Öncelikle her bir kısıt için eksenleri kesen noktaları belirleyelim.

$$8M + 6S \leq 1800$$

$$M = 0 \text{ iken } S = 300$$

$$S = 0 \text{ iken } M = 225$$

$$20M + 8S \leq 2400$$

$$M = 0 \text{ iken } S = 300$$

$$S = 0 \text{ iken } M = 120$$

$$18M + 25S \leq 4500$$

$$M = 0 \text{ iken } S = 180$$

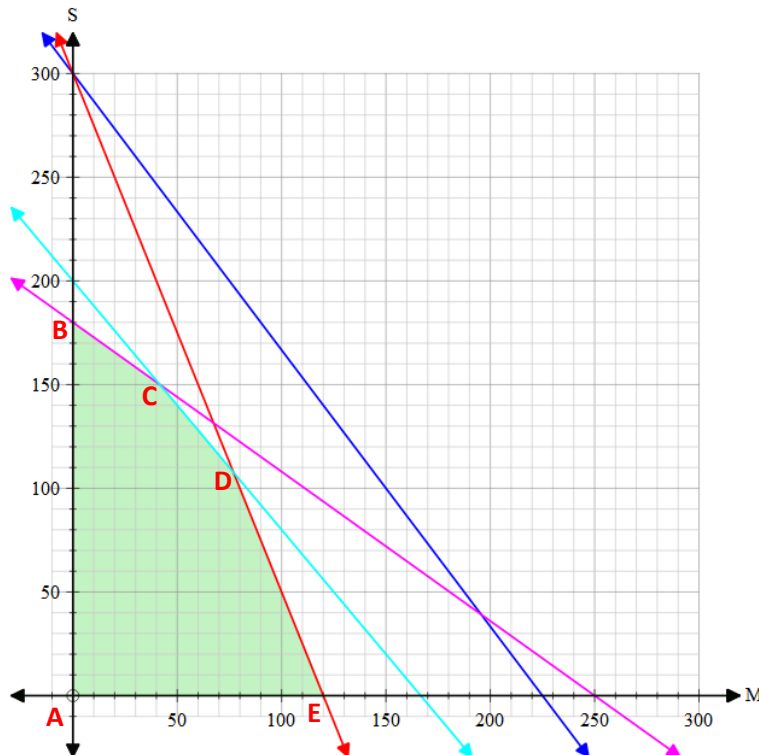
$$S = 0 \text{ iken } M = 250$$

$$12M + 10S \leq 2000$$

$$M = 0 \text{ iken } S = 200$$

$$S = 0 \text{ iken } M = 166$$

Daha sonra her bir kısıt aşağıdaki tek bir grafiğe aktararak uygun çözüm bölgesi belirlenir.





Soruda verilen A, B ve E noktalarının koordinatları kolaylıkla belirlenebilir. Fakat C ve D noktaları için ortak çözümler yapılması ihtiyacı vardır. C noktası için Cila ve Montaj kısıtları ortak çözülürken, D noktası için İşleme ve Montaj kısıtları çözülecektir.

C noktası için ortak çözüm (Cila ve Montaj Kısıtları)

$$18M + 25S = 4500 \quad * -1 \rightarrow -18M - 25S = -4500$$

$$12M + 10S = 2000 \quad * 2,5 \rightarrow 30M + 25S = 5000$$

$$12M = 500 \rightarrow M = 41,66 \rightarrow S = 150$$

D noktası için ortak çözüm (İşleme ve Montaj Kısıtları)

$$20M + 8S = 2400 \quad * 5 \rightarrow 100M + 40S = 12000$$

$$12M + 10S = 2000 \quad * -4 \rightarrow -48M - 40S = -8000$$

$$52M = 4000 \rightarrow M = 76,92 \rightarrow S = 107,7$$

Belirlenen noktalar ve bu noktalara ait amaç fonksiyonu değerleri aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Uç Nokta	Amaç Değeri
A(0, 0)	$Z_{max} = 18 * 0 + 10 * 0 = 0$ (Minimum)
B(0, 180)	$Z_{max} = 18 * 0 + 10 * 180 = 1800$
C(41.66, 150)	$Z_{max} = 18 * 41,66 + 10 * 150 = 2250$
D(76.9, 107.7)	$Z_{max} = 18 * 76,92 + 10 * 107,7 \cong 2462$ (Maksimum)
E(120, 0)	$Z_{max} = 18 * 120 + 10 * 0 = 2160$

Yukarıdaki değerler incelendiğinde en yüksek para değerine D noktasında ulaşıldığı görülmektedir. Fakat Bu noktada masa ve sandalye değerleri ondalıklı çıkmıştır. Bu pratikte mümkün değildir. Bu durumda sayılardan biri yukarı, diğeri aşağıya tamamlanarak kısıt denklemleri durumu incelenir. Soruda D noktasını (77, 107) olarak ele alırsak (76,98 değeri 77 ye daha yakın ve amaç değeri 18) o zaman toplam amaç değeri 2456 birim çıkar. Buda işletmenin maksimum karıdır.

Kısıt	Kullanım	Kapasite	Boşluk
Kesme	$8*77+6*107 = 1258$	1800	542
İşleme	$20*77+8*107=2396$	2400	4
Cila	$18*77+25*107=4061$	4500	439
Montaj	$12*77+10*107=1994$	2000	6

Aslında tamsayıli olmayan çözümdeki maksimum noktanın işleme ve montaj kısıtlarının kesişimindeki D noktası olduğunu görmüştük. Eğer tamsayı şartı olmasa idi bu iki kısıtta atıl kapasite söz konusu olmayacaktı. Fakat tamsayı şartı çok küçük te olsa atıl kapasite sonucu doğurduğunu yukarıdaki sorudan görebiliriz.

## 2.2. Temel Minimizasyon Modelleri ve Grafik Çözümleri:

Eğer işletmelerde temel amaç maliyet azaltılması, işgücü minimizasyonu, minimum alan kullanımı gibi en az değerle sonuç üretmeyi gerektirir ise bu durum Doğrusal Programlama modellerinde Minimizasyon Modelleri olarak karşımıza çıkar.

### Örnek 3: Sera Bitkiciliği (Murat Ayanoglu / Yönetim Bilimi)

Sera bitkiciliği yapan bir çiftçi, cam seralarında ürettiği bitkilerini gübre işlemi yaparak verimi arttırmak istemektedir. Bunun için azot ve fosfat içeren gübreler kullanması gerekmektedir. Yaptığı araştırma sonucu toprağa en az 80 kg azot ve en az 120 kg fosfat kazandırılmalıdır.

Piyasada azot fosfat bileşimini ve diğer mineralleri içeren 2 çeşit gübre bulunmaktadır. Bunlardan ilki torbası 6 lira olan doğal gübre, diğeri ise torbası 3 lira olan sentetik gübredir. Her bir gübreyle ilgili veriler tabloda sunulmuştur.

	Azot (kg/torba)	Fosfat (kg/torba)
Doğal Gübre	2	4
Sentetik Gübre	4	3

Bu koşullar altında çiftçiye ne yapmasını önerirsiniz?

Minimizasyon sorularında model kurma adımları maksimizasyon ile tamamen aynıdır.

### 1. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi:

Çiftçi iki farklı gübre kullanarak gereksinimlerini karşılayabilmektedir. Fakat hangi gübreden kaç torba kullanılacağını bilmek istemektedir. Bilinmeyen karar değişkeni olarak atanacağı dikkate alınırsa, değişkenleri aşağıdaki gibi yazman uygun olacaktır.

*DG: Maliyeti minimize etmek için kullanılması gereken Doğal Gübre torba sayısı*

*SG: Maliyeti minimize etmek için kullanılması gereken Sentetik Gübre torba sayısı*

### 2. Amaç Fonksiyonunun Yazılması:

Çiftçinin temel amacı; yapacağı gübreleme işlemini kendisine en az maliyet oluşturacak şekilde yapmaktır. O zaman ama Minimizasyon olacak ve bu amaç her bir gübre türünün torba maliyetleri yardımıyla yazılacaktır.

$$Z_{max} = 6DG + 3SG$$

### 3. Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

Gübreleme işleminden tam verim alabilmek adına toprağa en az 80kg azot ve en az 120kg Fosfat vermek gerekmektedir. Yani çiftçi bu değerlerin altına inmemelidir. Bu tarz kısıtlamalar ancak  $\geq$  operatörü yardımıyla hazırlanabilir.

$$2DG + 4SG \geq 80 \text{ (Azot Kısıtı)}$$

$$4DG + 3SG \geq 120 \text{ (Fosfat Kısıtı)}$$

Pozitiflik şartını da modele eklersek, modelin son hali aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{max} = 6DG + 3SG$$

$$2DG + 4SG \geq 80 \text{ (Azot Kısıtı)}$$

$$4DG + 3SG \geq 120 \text{ (Fosfat Kısıtı)}$$

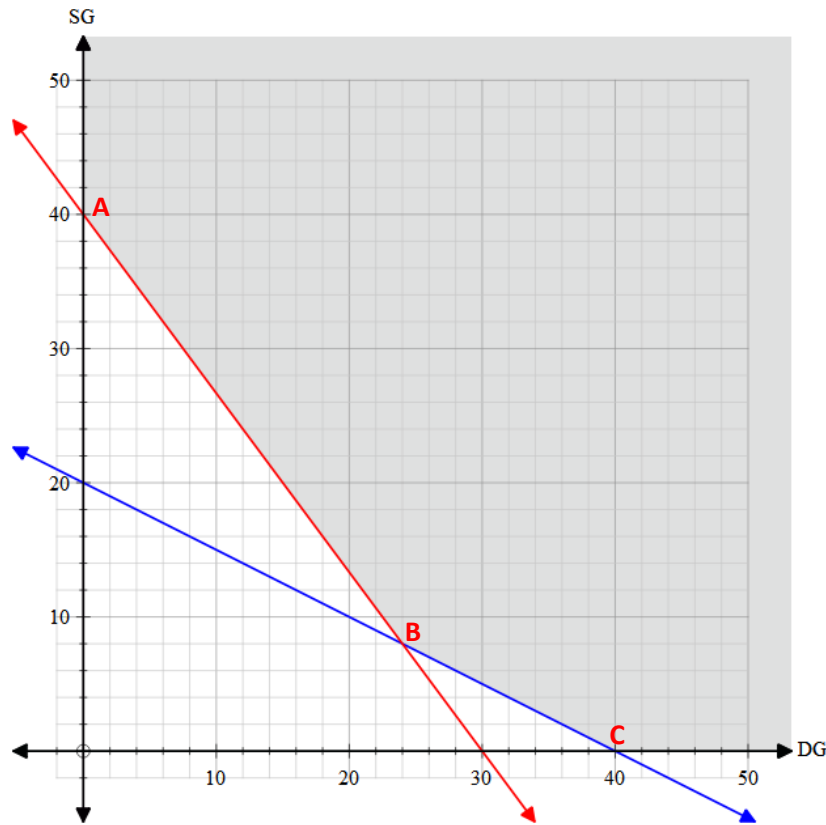
$$DG, SG \geq 0 \text{ (Pozitiflik Şartı)}$$

İki değişkenli sorunun grafik çözümü yapılabilir. Grafik çözüm yapılırken dikkat edilmesi gereken nokta eşitsizliklerin yönüne göre tarama alanlarının yukarı tarafta olabileceğidir.

Kısıtların eksenleri kestiği noktalar aşağıdaki gibidir.

<b><math>2DG + 4SG \geq 80</math></b>	<b><math>4DG + 3SG \geq 120</math></b>
$DG = 0$ iken $SG = 20$	$DG = 0$ iken $SG = 40$
$SG = 0$ iken $DG = 40$	$SG = 0$ iken $DG = 30$

Eksenleri kesen noktalar dikkate alındığında ve gerekli taramalar yapıldığında aşağıdaki grafik elde edilir. Görüldüğü üzere grafikte yer alan uygun çözüm bölgesi maksimizasyon sorularından farklı olarak üst tarafta çıkmıştır.



Şekildeki A ve C noktalarına ait koordinatlar rahatlıkla okunabilmekte, fakat B noktası için kısıtların ortak çözülmesi gerekliliği görülmektedir.

B noktası için ortak çözüm (Cila ve Montaj Kısıtları)

$$2DG + 4SG = 80 \quad *2 \Rightarrow 4DG + 8SG = 160$$

$$4DG + 3SG = 120 \quad *-1 \Rightarrow -4DG - 3SG = -120$$

$$5SG = 40 \Rightarrow SG = 8 \Rightarrow DG = 24$$

Ortak çözüm de yapıldıktan sonra aşağıdaki 3 nokta belirlenmiş olup, bu noktaların amaç fonksiyonu değerleri aşağıda ayrıca hesaplanmıştır.

Uç Nokta	Amaç Değeri
A(0,40)	$Z_{max} = 6 * 0 + 3 * 4 = 120$ (Minimum)
B(24,8)	$Z_{max} = 6 * 24 + 3 * 8 = 168$
C(40,0)	$Z_{max} = 6 * 40 + 3 * 0 = 240$

Minimizasyon sorularında en büyük değer değil de, en küçük değer alınacağına dikkat ediniz.

Bu kısıtlar altında minimum maliyetle toprağa en az **80** kg azot ve en az **120** fosfat kazandırmak için **40** adet Sentetik gübre satın alınıp, kullanılmalıdır. Bu işlem için ise çiftçinin cebinden ancak **120TL** çıkar

#### Örnek 4: Özel Yem (Hady A. Taha / Yöneylem Araştırması)

Bir çiftlikte günde en az 800 kg özel bir yem kullanılmaktadır. Bu özel yem mısır ve soya ununun karışımından aşağıdaki bileşime uygun olarak üretilmektedir.

	Protein	Lif	Maliyet
Mısır	0,09	0,02	0,30
Soya	0,60	0,06	0,90

Bu özel yemin bileşiminde en az %30 protein ve en çok %5 lif bulunması zorunluluğu vardır. Bu kısıtlar altında firmanın günlük yem ihtiyacını minimum maliyetle karşılayabilmesi için ne yapması gerekmektedir? Modeli kurunuz, grafik yöntemle çözümü yapınız.

#### 1. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi:

Çiftlikte bir karışım hazırlanacaktır. İki farklı ürün birleştirilip tek bir yem hazırlanması düşünülmektedir. Bu soruda bilinmeyen ise karışıma hangi yemden ne kadar katılması gerektiğidir.

*M: Maliyeti minimize etmek için özel yeme katılacak Mısır miktarı*

*S: Maliyeti minimize etmek için özel yeme katılacak Soya unu miktarı*

## 2. Amaç Fonksiyonunun Yazılması:

Amaç çok açıktır ki karışımın mümkünse minimum maliyetle hazırlanmasıdır. Bu amaçla maliyet değerleri de dikkate alınarak amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Z_{max} = 0,3M + 0,9S$$

## 3. Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

Sorudaki ilk kısıt protein oranı kısıtıdır. Doğrusal Programla literatüründe Karışım problemi olarak adlandırılan bu problemde eğer bir kısıtın sağ tarafı oran ise, ki bu soruda öyledir, sol tarafında ise oranlama yapılmalıdır. Yani kısıt aşağıdaki gibi yazılmamalıdır.

$$0,09M + 0,60S \geq 0,30$$

Bu şekilde yazıldığında sol ve sağ taraf arasında birim uyumsuzluğu söz konusu olur. Bir örnekle açıklayalım. Diyelim ki yeme 1 kg mısır ve 1kg soya unu katılsın. Bu durumda sol taraftaki harcanan kısmı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$0,09 * 1 + 0,60 * 1 = 0,69$$

Görüleceği üzere sadece 1er kilogram kullanımda dahi kısıtlar sağlanmış, bir başka deyişle kısıtlama söz konusu olmamıştır. Bu durumdan kurtulmak adına eğer soru karışım sorusu ise veya sorunun sağ taraf sabiti miktar yerine bir oran belirtiyor ise kısıtın aşağıdaki gibi hazırlanması uygun olacaktır.

$$\frac{0,09M + 0,60S}{M + S} \geq 0,30 \text{ (Protein Kısıtı)}$$

Soya unu kısıtını da benzer şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz. Lif kısıtının en az ifadesine sahip olduğuna dikkat ediniz.

$$\frac{0,02M + 0,06S}{M + S} \leq 0,05 \text{ (Lif Kısıtı)}$$

Soruda ayrıca toplam yem miktarının da 800kg altında olması istenmemektedir. Bu kısıt aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M + S \geq 800 \text{ (Yem Miktarı Kısıtı)}$$

Pozitiflik şartı da eklenir ise modelin son hali aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Z_{max} = 0,3M + 0,9S$$

$$\frac{0,09M + 0,60S}{M + S} \geq 0,30 \text{ (Protein Kısıtı)}$$

$$\frac{0,02M + 0,06S}{M + S} \leq 0,05 \text{ (Lif Kısıtı)}$$

$$M + S \geq 800 \text{ (Yem Miktarı Kısıtı)}$$

$$DG, SG \geq 0 \text{ (Pozitiflik Şartı)}$$

Soruyu grafik yöntemle çözmeden önce Protein ve Lif kısıtlarının düzgün şekilde (Bölme işlemi olmaksızın) yazılması gerekmektedir.

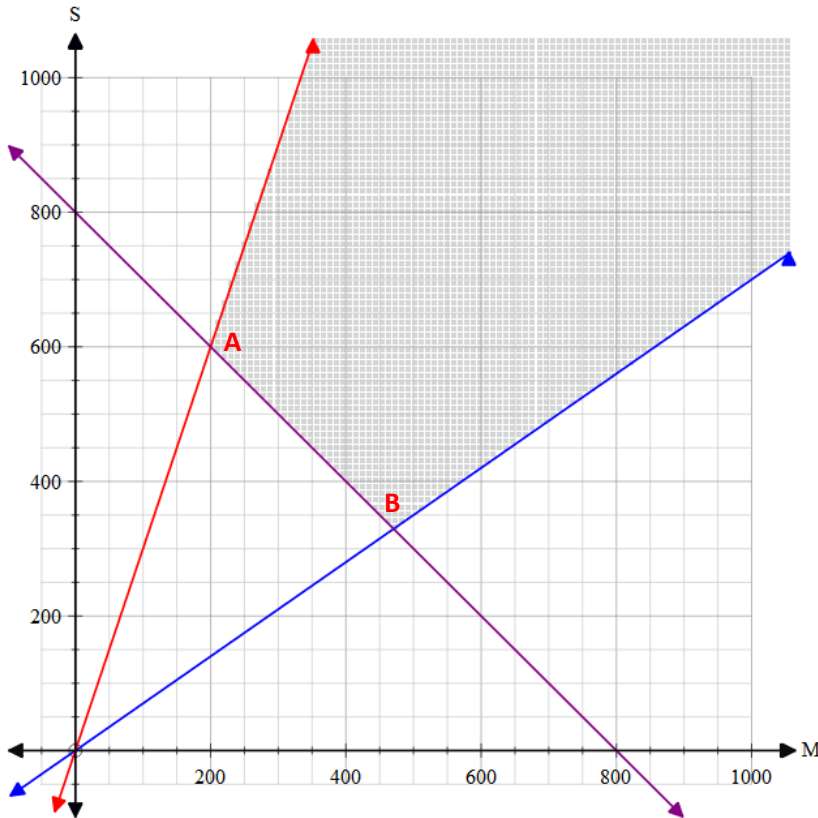
$$\frac{0,09M + 0,60S}{M + S} \geq 0,30 \implies 0,09M + 0,60S \geq 0,30(M + S) \implies -0,21M + 0,3S \geq 0$$

$$\frac{0,02M + 0,06S}{M + S} \geq 0,05 \implies 0,02M + 0,06S \leq 0,05(M + S) \implies -0,03M + 0,01S \leq 0$$

Grafik çözümde öncelikle eksenleri kesen noktaları belirleyelim.

$-0,21M + 0,3S \geq 0$	$-0,03M + 0,01S \leq 0$	$M + S \geq 800$
$M = 0$ iken $S = 0$	$M = 0$ iken $S = 0$	$M = 0$ iken $S = 800$
$S = 700$ iken $M = 1000$	$S = 600$ iken $M = 200$	$S = 0$ iken $M = 800$

Daha sonra uygun çözüm bölgesinin de belirtildiği grafik aşağıdaki gibi çizilir.



Hem A hem de B noktaları ancak ortak çözümle hesaplanabilir.

A noktası için ortak çözüm (Lif ve Yem Miktarı Kısıtları)

$$-0,03M + 0,01S = 0 \quad * -100 \rightarrow 3M - S = 0$$

$$M + S = 800$$

$$4M = 800 \rightarrow M = 200 \rightarrow S = 600$$

B noktası için ortak çözüm (Protein ve Yem Miktarı Kısıtları)

$$-0,21M + 0,3S = 0 \quad * -10 \rightarrow 2,1M - 3S = 0$$

$$M + S = 800 \quad * 3 \rightarrow 3M + 3S = 2400$$

$$5,1M = 2400 \rightarrow M \cong 470,56 \rightarrow S = 329,44$$

Hesaplana değerler ve amaç fonksiyonu karşılıkları aşağıda verilmiştir.

Uç Nokta	Amaç Değeri
A(200,600)	$Z_{max} = 0,3 * 200 + 0,9 * 600 = 600$
B(470.26, 329.44)	$Z_{max} = 0,3 * 470,26 + 0,9 * 329,44 = 437,57 \text{ (Minimum)}$

Eğer özel yem karışımına yaklaşık olarak **470,56** kg mısır ve **329,44** kg soya unu katılırsa, minimum maliyetli (**437,57** TL) özel yem karışımı elde edilmiş olur.

### 2.3. Karmaşık Modelleme Örnekleri:

Bu bölümde 2 den daha değişken içeren, önceki çözdüğümüz sorulara göre farklılıklar arz eden DP sorularını modellemeye çalışacağız.

#### Örnek 5: Ayşegül Hanım (Yatırım Planlama Sorusu)

Bir finans kurumunda çalışan Ayşegül Hanım çok başarılı olduğundan dolayı şirket yöneticisi tarafından kendisine yatırımlarda kullanmak üzere 500,000\$ fon verilmiştir. Ayşegül Hanım bilgi ve deneyimlerine dayanarak bu fonu tek bir alana yatırmasının riskli olacağını düşünmüş ve farklı ülkelere yatırım yapmaya karar vermiştir. Yaptığı araştırmalar sonucu ülkelere ait yıllık getiri oranları aşağıdaki gibidir;

Ülkeler	Getiri Oranları (%)
İngiltere	8
ABD	9,5
Japonya	7
Fransa	8,4
İspanya	7,5
Rusya	7,8

Ayşegül Hanım kazancını maksimum yapmak amacıyla olmakla beraber rasyonelliği de elden bırakmak istememektedir. Bu nedenle her ne kadar getiri oranları yüksek olsa da risk oranları yüksek olan ABD ve Fransa'ya yaptığı yatırımlar toplamının sahip olduğu fonun % 40'ını aşmamasını istemektedir. Geçmişteki bilgi ve deneyimleri sahip olunan fonların % 30'undan fazlasını tek bir yatırım kaynağına bağlamasının çok riskli olacağını söylemektedir.

Belirlenen kısıtlar altında en fazla getiriye sağlamak için ülkeler arasında bu fonun nasıl paylaştırılmasını tavsiye edersiniz?

### 1. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi:

Ayşegül Hanım için bilinmeyen elindeki paranın ne kadarını, hangi ülkedeki fona yatıracağıdır. Bu bağlamda karar değişkenleri ülke sayısı kadar olacak şekilde aşağıda verilmiştir.

$x_1$ : Toplam getiriye maksimize etmek için İngiltere'ye yatırılması gereken fon miktarı

$x_2$ : Toplam getiriye maksimize etmek için ABD'ye yatırılması gereken fon miktarı

$x_3$ : Toplam getiriye maksimize etmek için Japonya'ya yatırılması gereken fon miktarı

$x_4$ : Toplam getiriye maksimize etmek için Fransa'ya yatırılması gereken fon miktarı

$x_5$ : Toplam getiriye maksimize etmek için İspanya'ya yatırılması gereken fon miktarı

$x_6$ : Toplam getiriye maksimize etmek için Rusya'ya yatırılması gereken fon miktarı

### 2. Amaç Fonksiyonunun Yazılması:

Ayşegül Hanım'ın temel amacı elinde bulunan 500.000TL den maksimum getiri sağlayacak bir yatırım planı oluşturmaktır. Bu bağlamda amaç fonksiyonu getiri oranları ve yatırılan fon miktarlarının çarpımı şeklinde yazılmalıdır.

$$Z_{max} = 0,08x_1 + 0,095x_2 + 0,07x_3 + 0,084x_4 + 0,075x_5 + 0,078x_6$$

### 3. Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

Ayşegül Hanım için öncelikli kısıt ülkelere yatırılacak fon miktarının firma politikası ile sınırlandırılmasıdır. Yani toplam fonun en fazla %30 luk kısmının bir ülkeye yatırılmasıdır.

$$x_1 \leq 0,3 * (500000) \Rightarrow x_1 \leq 150000 \text{ (İngiltere Fonu Kısıtı)}$$

$$x_2 \leq 0,3 * (500000) \Rightarrow x_2 \leq 150000 \text{ (ABD Fonu Kısıtı)}$$

$$x_3 \leq 0,3 * (500000) \Rightarrow x_3 \leq 150000 \text{ (Japonya Fonu Kısıtı)}$$

$$x_4 \leq 0,3 * (500000) \Rightarrow x_4 \leq 150000 \text{ (Fransa Fonu Kısıtı)}$$

$$x_5 \leq 0,3 * (500000) \Rightarrow x_5 \leq 150000 \text{ (İspanya Fonu Kısıtı)}$$

$$x_6 \leq 0,3 * (500000) \Rightarrow x_6 \leq 150000 \text{ (Rusya Fonu Kısıtı)}$$

Sorudaki ikinci kısıtlama ise Amerika ve Fransa yatırılacak toplam paraya yine firma tarafından limit konulmasıdır.

$$x_2 + x_4 \leq 0,40 * (500000) \Rightarrow x_2 + x_4 \leq 200000 \text{ (ABD ve Fransa Limiti)}$$

Burada genelde dikkatten kaçan son kısıttır. Yani elindeki toplam paranın 500.000 TL olması, bir başka deyişle fonlara yatırılacak paraların toplamının 500.000TL olmasıdır. Bu kısıt küçük eşit gibi yazılabileceği gibi, eşit olarak da ifade edilebilir.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 500000 \text{ (Toplam Fon Kısıtı)}$$



Pozitiflik şartı eklenmiş modelin son hali aşağıdadır.

$$Z_{max} = 0,08x_1 + 0,095x_2 + 0,07x_3 + 0,084x_4 + 0,075x_5 + 0,078x_6$$

$$x_1 \leq 150000$$

$$x_2 \leq 150000$$

$$x_3 \leq 150000$$

$$x_4 \leq 150000$$

$$x_5 \leq 150000$$

$$x_6 \leq 150000$$

$$x_2 + x_4 \leq 200000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 500000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Normalde soru 6 değişkene sahip olduğundan grafik yöntem ile çözülemez. Fakat sorunun kendi yapısı optimum çözüme kolayca ulaşmamızı sağlar.

Maksimum para kazanma mantığı ile düşünürsek öncelikle en yüksek kazandıran ülkeye kısıtlar el verdiğince yatırım yaparız.

$$\text{ABD} = 150.000 \rightarrow x_2 = 150000$$

Daha sonra en yüksek ikinci ülke bulunur. Bu ülke Fransa'dır ve yedinci kısıt sayesinde sadece 50.000 TL yatırım söz konusudur.

$$\text{Fransa} = 50.000 \rightarrow x_4 = 50000$$

Daha sonra İngiltere'ye yatırım yapılır. Sadece birinci kısıt engellediğinden 150.000TL yatırılır.

$$\text{İngiltere} = 150.000 \rightarrow x_1 = 150000$$

Şu anda  $150.000 + 50.000 + 150.000 = 350.000$  TL yatırım yaptık ve sadece elimizde 150.000 TL kaldı bu parayı da direkt Rusya'ya yatırırsak en yüksek getirili çözümü buluruz.

$$\text{Rusya} = 150.000 \rightarrow x_6 = 150000$$

Bu durumda Japonya ve İspanya'ya herhangi bir yatırım yapılmayacaktır. Amaç değeri de aşağıdaki gibi bulunur.

$$0,08 * 150000 + 0,095 * 150000 + 0,07 * 0 +$$

$$0,084 * 50000 + 0,075 * 0 + 0,078 * 150000$$

$$= 12000 + 14250 + 4200 + 11700 = 42150 \text{ TL}$$

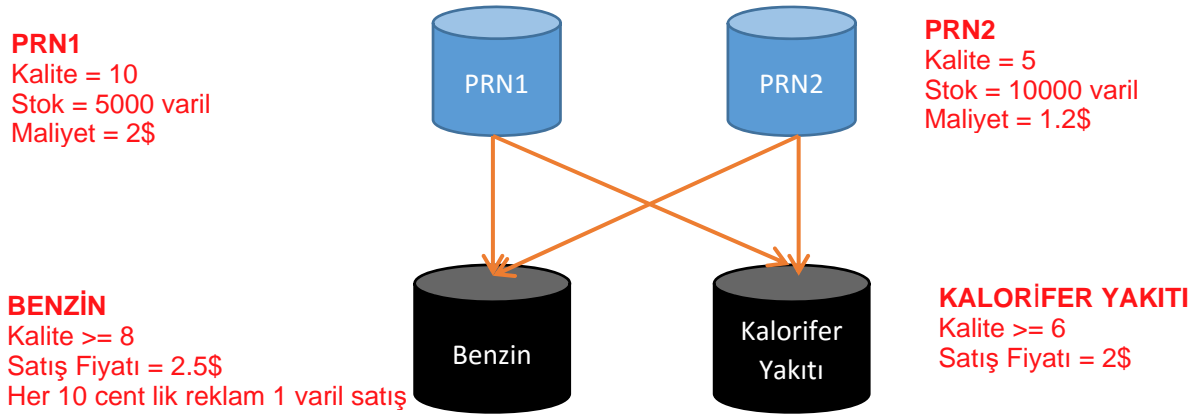
### Örnek 6: PRN (Petrol Karışımı Sorusu)

Bir petrol şirketinin elinde kalite seviyesi 10 olan PRN1 isimli hammadde ve kalite seviyesi 5 olan PRN2 isimli hammaddelerden sırasıyla 5,000 varil ve 10,000 varil mevcuttur. PRN1'in varil maliyeti 2\$, PRN2'nin varil maliyeti 1.2\$'dır. Şirket bu iki hammaddeyi karıştırarak kalorifer yakıtı ve benzin elde etmektedir. Şirketin ürettiği benzinin kalitesi en az 8, kalorifer yakıtının kalite seviyesi de en az 6 olmak zorundadır. Benzin satışını arttırmak için yapılacak her 10 centlik reklam, benzinin satışını 1 varil arttırmaktadır. Kalorifer yakıtı talebi yüksek olduğu için bu üründe reklam vermeye ihtiyaç yoktur. Üretilen benzinin satış fiyatı 2,5\$, kalorifer yakıtının satış fiyatı ise 2\$'dır.

Bu bilgileri dikkate alarak şirketin karını maksimize etmesi için ne yapması gerektiğini bulunuz.

#### 1. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi:

Burada iki farklı hammadde (PRN1 ve PRN2) karıştırılarak, iki farklı son ürün (Benzin ve Kalorifer yakıtı) elde edilmektedir. Bu bağlamda karar vericinin bilmediği her bir hammadde den her bir ürüne ne kadar karıştırılacağıdır.



Yukarıdaki şekil incelenirse PRN1 den Benzine ve Kalorifer yakıtına gidecek miktarların ayrı ayrı bilinmesi gerekliliğini anlayabiliriz. Benzer durum PRN2 için de geçerlidir. Bu durumda 4 farklı bilinmeyen olduğunu ifade edebiliriz.

- $B_1$ : Karı maksimum yapmak için PRN1 den Benzine karıştırılması gereken miktar
- $B_2$ : Karı maksimum yapmak için PRN2 den Benzine karıştırılması gereken miktar
- $K_1$ : Karı maksimum yapmak için PRN1 den K. Yakıtına karıştırılması gereken miktar
- $K_2$ : Karı maksimum yapmak için PRN2 den K. Yakıtına karıştırılması gereken miktar

Not: Karışım problemlerinde karıştırılacak hammadde ile elde edilecek ürün çarpımı kadar karar değişkeni olur. Örneğin daha önce yaptığımız özel yem sorusunda iki karıştırılacak madde (Mısır ve Soya unu) ve bir son ürün (Yem) olduğundan iki değişken vardı.



## 2. Amaç Fonksiyonunun Yazılması:

Soru dikkatlice incelendiğinde firmanın hammadde maliyetlerinden, satış gelirlerinden ve benzin ürünü için reklam giderinden bahsedildiğini görebiliriz. Bu durumda işletme matematiği temellerine dönersek;

$$\text{Toplam Kar} = \text{Toplam Gelir} - \text{Toplam Gider}$$

formülünü görürüz. Buradaki formülü sorumuz için güncellersek aşağıdaki gibi bir denklem elde edilir.

$$\text{Toplam Kar} = (\text{Satış Geliri}) - (\text{Hammadde Giderleri} + \text{Reklam Gideri})$$

Şimdi ayrı ayrı denklemdeki değerleri ifade edelim. Satış gelirleri Benzin miktarı \* satış fiyatı eşitliği ile bulunur. Fakat soruda benzin miktarını veren tek bir değişken yoktur. Toplam benzin miktarı PRN1 den gelen miktar ( $B_1$ ) ve PRN2 den gelen miktar ( $B_2$ ) toplamına eşittir. Kalorifer yakıtı için ise benzer şekilde  $K_1$  ve  $K_2$  toplamına eşittir. Bu durumda toplam satış geliri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\bullet \text{Satış Geliri} = 2,5 * (B_1 + B_2) + 2 * (K_1 + K_2)$$

Hammadde giderlerinde ise hesaplama hammadde miktarı \* hammadde maliyeti şeklinde olmalıdır. PRN1 hammaddesi miktarı benzine karıştırılan miktar ( $B_1$ ) ve kalorifer yakıtına karıştırılan miktar ( $K_1$ ) toplamına eşittir. PRN2 için ise bu değer  $B_2$  ve  $K_2$  değişkenleri ile ifade edilir.

$$\bullet \text{Hammadde Gideri} = 2 * (B_1 + K_1) + 1,2 * (B_2 + K_2)$$

Son olarak reklam gideri hesaplanmalıdır. Toplam benzin miktarı ( $B_1 + B_2$ ) ile 0,1 değerinin çarpımı reklam maliyetini verecektir.

$$\bullet \text{Reklam Gideri} = 0,1 * (B_1 + B_2)$$

Bütün denklemleri amaç fonksiyonuna yerleştirirsek aşağıdaki gibi bir fonksiyon elde edilir.

$$Z_{max} = [2,5 * (B_1 + B_2) + 2 * (K_1 + K_2)] - [2 * (B_1 + K_1) + 1,2 * (B_2 + K_2) + 0,1 * (B_1 + B_2)]$$

Eğer parantezleri açıp sadeleştirirsek aşağıdaki amaç fonksiyonu değeri elde ederiz.

$$Z_{max} = 0,4B_1 + 1,2B_2 + 0K_1 + 0,8K_2$$

Not:  $K_1$  değerinin sadeleştiğine dikkat ediniz.

## 3. Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

Sorudaki ilk kısıtlarımız hammaddelerin elde bulundurulmuş miktarları ile alakalıdır. Sonuçta elimizde olmayanı karışıma katamayız.

$$B_1 + K_1 \leq 5000 \text{ (PRN1 Hammadde stoğu kısıtı)}$$

$$B_2 + K_2 \leq 10000 \text{ (PRN2 Hammadde stoğu kısıtı)}$$

Diğer kısıtlar ise benzin ve kalorifer yakıtına ait kalite değerlerinin altı sınırlarıdır. Kalite değerlerinin miktar değil de oran olduğunda dikkat edelim. Bu tarz kısıtları sol tarafta oranlama olacak şekilde yazmak uygun olacaktır.

$$\frac{10B_1 + 5B_2}{B_1 + B_2} \geq 8 \text{ (Benzin kalitesi kısıtı)}$$

$$\frac{10K_1 + 5K_2}{K_1 + K_2} \geq 6 \text{ (Kalorifer yakıtı kalitesi kısıtı)}$$

Eğer kısıtları bölümden kurtarıp sadeleştirirsek aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$2B_1 - 3B_2 \geq 0 \text{ (Benzin kalitesi kısıtı)}$$

$$4K_1 - K_2 \geq 0 \text{ (Kalorifer yakıtı kalitesi kısıtı)}$$

Pozitiflik kısıtını da yazdığımızda model aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} Z_{max} &= [2,5 * (B_1 + B_2) + 2 * (K_1 + K_2)] \\ &\quad - [2 * (B_1 + K_1) + 1,2 * (B_2 + K_2) + 0,1 * (B_1 + B_2)] \\ B_1 + K_1 &\leq 5000 \text{ (PRN1 Hammadde stoğu kısıtı)} \\ B_2 + K_2 &\leq 10000 \text{ (PRN2 Hammadde stoğu kısıtı)} \\ \frac{10B_1 + 5B_2}{B_1 + B_2} &\geq 8 \text{ (Benzin kalitesi kısıtı)} \\ \frac{10K_1 + 5K_2}{K_1 + K_2} &\geq 6 \text{ (Kalorifer yakıtı kalitesi kısıtı)} \\ B_1, B_2, K_1, K_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sadeleştirilmiş denklemler ile modelin yazılışı aşağıdadır.

$$\begin{aligned} Z_{max} &= 0,4B_1 + 1,2B_2 + 0K_1 + 0,8K_2 \\ B_1 + K_1 &\leq 5000 \text{ (PRN1 Hammadde stoğu kısıtı)} \\ B_2 + K_2 &\leq 10000 \text{ (PRN2 Hammadde stoğu kısıtı)} \\ 2B_1 - 3B_2 &\geq 0 \text{ (Benzin kalitesi kısıtı)} \\ 4K_1 - K_2 &\geq 0 \text{ (Kalorifer yakıtı kalitesi kısıtı)} \\ B_1, B_2, K_1, K_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

### Örnek 7: Pilsan

Pilsan şirketinde üretilen pillerin 3 ayrı aygıt ile kontrolü vardır. Bu aygıtlar sırası ile Aygıt1, Aygıt2 ve Aygıt3 olarak isimlendirilmiştir. Şirket 8 saatlik çalışma süresince en 1600 adet pilin kontrol edilmesini istemektedir. Herhangi bir hatalı kontrol fabrikaya 40TL ye mal olmaktadır.

	Saat Başı İşçilik Ücreti	Doğruluk Yüzdeleri	Her Bir İşçinin Kontrol Ettiği Pil	Çalışan İşçi Sayısı
Aygıt1	120	0,98	10	9
Aygıt2	90	0,95	8	13
Aygıt3	70	0,90	6	12

Firma minimum maliyetle kontrol işlemlerini yürütecek işçi sayısını bilmek istemektedir. Bu durumda firmaya yardımcı matematiksel modeli kurunuz.

#### 1. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi:

Pilsan şirketinin bilmek istediği, yani karar vermesine yardımcı fakat değerini bilmediği değişken sorunun son cümlelerinde belirtilmiştir. Firma minimum işçi sayısını bilmek istemektedir. 3 farklı aygıt olduğu düşünüldüğünde, her bir aygıtta çalışacak işçi sayısı karar değişkenlerini oluşturacaktır.

***A<sub>1</sub>: Maliyetleri minimize etmek için Aygıt1 de çalışacak işçi sayısı***

***A<sub>2</sub>: Maliyetleri minimize etmek için Aygıt2 de çalışacak işçi sayısı***

***A<sub>3</sub>: Maliyetleri minimize etmek için Aygıt3 de çalışacak işçi sayısı***

#### 2. Amaç Fonksiyonunun Yazılması:

Pilsan için amaç kontrol faaliyetlerini minimum maliyetle tamamlamaktır. Bu durumda iki farklı maliyet kalemi ile karşı karşıyadır. İşçilere verilen ücretler ve hatalı kontrol durumunda katlanması gereken ceza maliyeti.

İşçilik maliyetleri; işçilik saati ücretleri ile günlük toplam çalışma süresinin çarpılması ile bulunur. Öyleyse işçilik ücretleri aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$8 * 120 * A_1 + 8 * 90 * A_2 + 8 * 70 * A_3$$

$$960A_1 + 720A_2 + 560A_3$$

Ceza maliyetleri ise hatalı parça sayısı ile hata maliyetinin çarpılmasından bulunur. Bu hesabın yapılabilmesi için öncelikler günlük hata ürün sayısının bulunması gerekir. Bir işçi Aygıt1 de %98 doğrulukla çalışıyorsa %2 hata yapar. Aynı işçi saatte 10 pilden toplam 80 pil kontrol ediyorsa bu makineye alınacak işçi sayısı  $A_1 * 80$  adet pil kontrolü yapılır ve bu kontrolün %2 si hatalı ise  $0,02 * 80 * A_1$  kadar hata yapılır. Benzer şekilde Aygıt2 de  $0,05 * 8 * 8 * A_2$  ve Aygıt3 de  $0,1 * 8 * 6 * A_3$  kadar hata yapılır. Toplam hata maliyetle çarpılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$40 * [0,02 * 8 * 10 * A_1 + 0,05 * 8 * 8 * A_2 + 0,1 * 8 * 6 * A_3]$$

$$64A_1 + 128A_2 + 192A_3$$

Toplam maliyet bu iki farklı maliyet kaleminin toplamına eşittir.

$$\text{Toplam Maliyet} = [960A_1 + 720A_2 + 560A_3] + [64A_1 + 128A_2 + 192A_3]$$

Yukarıda verilen denklemi sadeleştirerek amaç fonksiyonu formuna aşağıdaki gibi aktarabiliriz.

$$Z_{min} = 1024A_1 + 848A_2 + 752A_3$$

### 3. Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

Pilsan şirketi için ilk ve en önemli kısıt toplam kontrol edilen pil adedinin en az 1600 adet olması gerekliliğidir. Bu hesaplamada saatlik kontrol adetlerinin günlük çalışma saati olan 8 ile çarpılması gerektiğine dikkat ediniz.

$$8 * 10 * A_1 + 8 * 8 * A_2 + 8 * 6 * A_3$$

$$80A_1 + 64A_2 + 48A_3 (\text{Toplam Kontrol Kısıtı})$$

Soruda yer alan diğer kısıtlama ise mevcut işçi sayısından daha az sayıda işçi ile kontrol işinin yapılması gerekliliğidir. Bu durum ise aşağıdaki gibi denkleme aktarılabilir.

$$A_1 \leq 9 (\text{Aygıt1 daha az sayıda işçi kısıtı})$$

$$A_2 \leq 13 (\text{Aygıt2 daha az sayıda işçi kısıtı})$$

$$A_3 \leq 12 (\text{Aygıt3 daha az sayıda işçi kısıtı})$$

Pozitiflik şartını da eklersek modelin son hali aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Z_{min} = 1024A_1 + 848A_2 + 752A_3$$

$$80A_1 + 64A_2 + 48A_3 (\text{Toplam Kontrol Kısıtı})$$

$$A_1 \leq 9 (\text{Aygıt1 daha az sayıda işçi kısıtı})$$

$$A_2 \leq 13 (\text{Aygıt2 daha az sayıda işçi kısıtı})$$

$$A_3 \leq 12 (\text{Aygıt3 daha az sayıda işçi kısıtı})$$

$$A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

### 2.3. Karmaşık Grafik Çözümü Örnekleri

Şimdiye kadar çözdüğümüz grafik sorularında  $\leq$  ve  $\geq$  kısıtlarını dikkate aldık. Bu kısıtlar dışında eşitlik ile ifade edilen bir kısıt olduğunda çözüm kümesi nasıl değişir veya sağ taraf sabiti sıfır değeri aldığında çizim nasıl olacaktır sorularına bu kısımda cevap vermeye çalışacağız.

Öncelikle eşitlik kısıtını inceleyelim.

$$5x_1 + 4x_2 = 20$$

Yukarıdaki kısıtın grafik üzerinde çiziminde eşitsizlik kısıtları ile hiçbir fark yoktur. Fakat eşittir kısıtlarında tarama yapılmaz. Çünkü bu değer altı veya üstü kabul edilmez. Bu

durumda bir soruda eğer eşitlik kısıtı var ise, o sorunun uygun çözüm bölgesi bir alan değil sadece bir doğrudur. Bu şekilde eşitlik kısıtının yanı sıra birden fazla eşitsizlik kısıtı içeren sorularda öncelikler diğer kısıtların çizilip taranması daha sonradan eşitlik kısıtı çizilerek ortak taranan alandan geçen doğru parçasının belirlenmesi doğru bir yöntem olacaktır.

Diğer özel durum ise sağ tarafın sıfır değeri aldığı kısıtlardır.

$$5x_1 - 4x_2 \leq 0$$

Bu kısıtın eksenleri kesen noktalarını belirlemeye çalışalım.

$$x_1 = 0 \text{ iken } x_2 = 0$$

$$x_2 = 0 \text{ iken } x_1 = 0$$

Görüldüğü üzere her iki durumda da eksen kesim noktası (0,0) çıkmıştır. Bir doğruyu çizmede iki nokta gerekli olduğundan farklı bir  $x_1$  değeri verilerek  $x_2$  değeri hesaplanır. Bu değer seçilirken çizim kolaylığı olması açısından diğer kısıtların eksenleri kesen noktalarından birini tercih etmek faydalı olacaktır. Bu tip kısıtlara orijinden geçen kısıt denir.

Şimdi bir örnekle grafik çizimini pekiştirelim.

### Örnek 8: Karmaşık Grafik 1

Aşağıda verilen modelin grafiğini çizerek, çözümünü bulunuz.

$$Z_{max} = 5x_1 + 2x_2$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$5x_1 + 8x_2 \leq 400$$

$$4x_1 + x_2 = 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Öncelikle her bir kısıtın eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 0 \text{ iken } x_2 = 0$$

$$x_1 = 80 \text{ iken } x_2 = 80$$

$$5x_1 + 8x_2 \leq 400$$

$$x_1 = 0 \text{ iken } x_2 = 50$$

$$x_2 = 0 \text{ iken } x_1 = 80$$

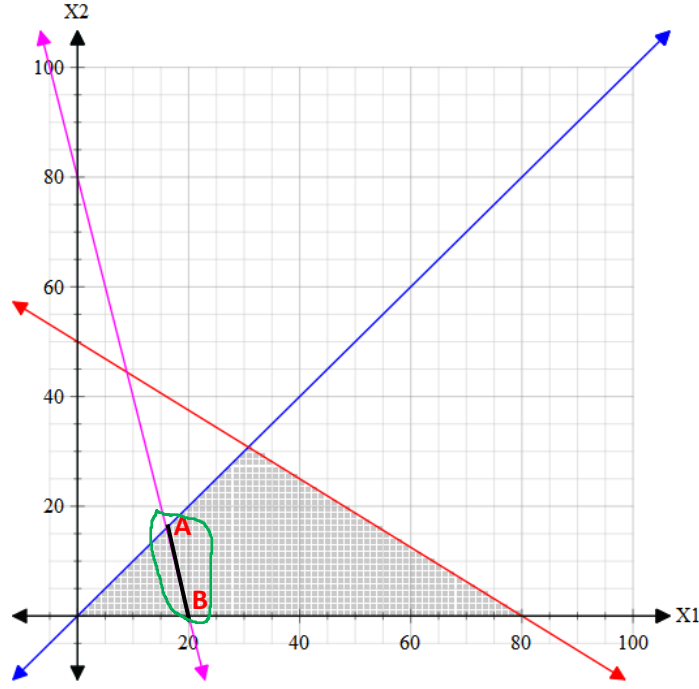
$$4x_1 + x_2 = 80$$

$$x_1 = 0 \text{ iken } x_2 = 80$$

$$x_2 = 0 \text{ iken } x_1 = 20$$

Orijinden geçen kısıt olan birinci kısıt için ikinci nokta belirlenirken ikinci kısıttaki  $x_1$  eksenini kesim noktası olan 80 değeri verilmiş ve (80,80) noktası bulunmuştur.

Bu şartla altında grafik çizimi aşağıdaki gibi olacaktır.



Yukarıdaki grafikte taranan bölge uygun çözüm bölgesi değildir. Daha önceden de söylendiği üzere sorunun matematiksel modelinde eşitlik kısıtı söz konusu ise bu durumda uygun çözüm doğrusu olacaktır. Yukarıdaki tarama doğrunun düzgün anlaşılabilmesi için diğer kısıtları ortak sağlayan bölgeyi göstermektedir.

Sorudaki uygun çözüm doğrusunun iki uç noktası vardır. Bu değerlerden biri minimum diğeri ise maksimum değerdir. B noktasının (20,0) koordinatlarına sahip olduğu eksen kesimi dikkate alınarak kolayca anlaşılabilir. A noktası ise Birinci ve Üçüncü kısıtların ortak çözülmesi ile bulunacaktır.

A noktası için ortak çözüm (Birinci ve Üçüncü Kısıtlar)

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$4x_1 + x_2 = 80$$

$$5x_1 = 80, \quad x_1 = 16 \text{ ve } x_2 = 16$$

A ve B noktası koordinatları ve amaç fonksiyonu değerleri aşağıda verilmiştir.

Uç Nokta	Amaç Değeri
<del>B</del> A(20, 0)	$Z_{max} = 5 * 20 + 2 * 0 = 100$ (Minimum)
<del>A</del> B(0, 180) (16, 6)	$Z_{max} = 5 * 16 + 2 * 16 = 112$ (Maksimum) ✓

Sonuç olarak grafiğin doğru cevabı  $x_1 = 16$  ve  $x_2 = 16$  olduğunda amaç maksimum değeri olan 112 değerine ulaşır.



### Örnek 9: Karmaşık Grafik 2

Aşağıda verilen modelin grafiğini çizerek, çözümünü bulunuz.

$$Z_{max} = 5x_1 + 12x_2$$

$$3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Öncelikle her bir kısıtın eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$$3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 0 \text{ iken } x_2 = 0$$

$$x_1 = 6 \text{ iken } x_2 = 9$$

$$2x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 = 0 \text{ iken } x_2 = 9$$

$$x_2 = 0 \text{ iken } x_1 = 4,5$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 = 0 \text{ iken } x_2 = 8$$

$$x_2 = 0 \text{ iken } x_1 = 8$$

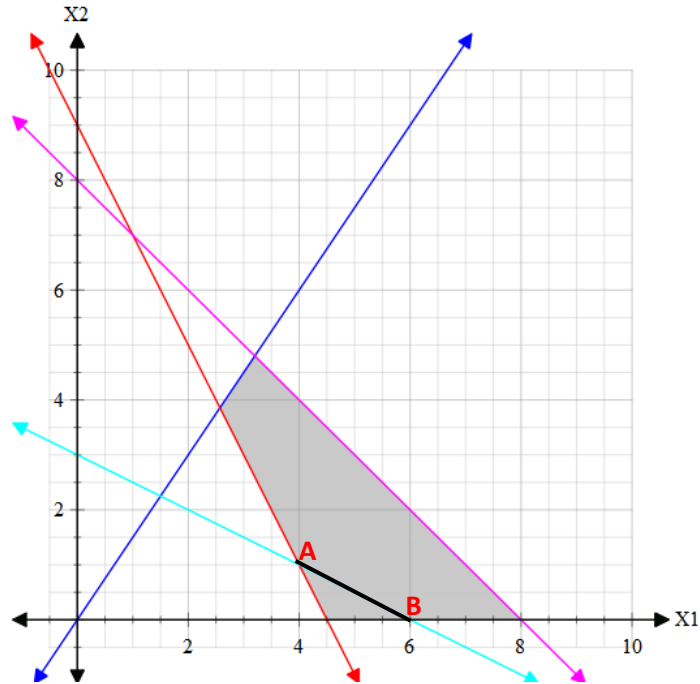
$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$x_1 = 0 \text{ iken } x_2 = 3$$

$$x_2 = 0 \text{ iken } x_1 = 6$$

Orijinden geçen kısıt olan birinci kısıt için ikinci nokta belirlenirken dördüncü kısıttaki  $x_1$  eksenini kesim noktası olan 6 değeri verilmiş ve (6,9) noktası bulunmuştur. Burada dördüncü kısıttaki 6 değerinin seçilmesi tamamen hesaplama kolaylığı olması içindir.

Bu şartla altında grafik çizimi aşağıdaki gibi olacaktır.



Çizimde yer alan B noktası için koordinat (6,0) noktası olacaktır. Fakat A noktası koordinatı direkt olarak görülemez. İkinci ve Dördüncü kısıtların ortak çözümü ile nokta bulunmalıdır.

A noktası için ortak çözüm (İkinci ve Dördüncü Kısıtlar)

$$2x_1 + x_2 = 9 * -1 \rightarrow -2x_1 - x_2 = -9$$

$$x_1 + 2x_2 = 6 * 2 \rightarrow 2x_1 + 4x_2 = 12$$

$$3x_2 = 3, \quad x_2 = 1 \text{ ve } x_1 = 4$$

A ve B noktası koordinatları ve amaç fonksiyonu değerleri aşağıda verilmiştir.

Uç Nokta	Amaç Değeri
A(6, 0)	$Z_{max} = 5 * 6 + 12 * 0 = 30$ (Minimum)
B(4, 1)	$Z_{max} = 5 * 4 + 12 * 1 = 32$ (Maksimum)

Sonuç olarak grafiğin doğru cevabı  $x_1 = 4$  ve  $x_2 = 1$  olduğunda amaç maksimum değeri olan 32 değerine ulaşır.

## ÇALIŞMA SORULARI

**SORU 01:** Bir firma müşterilerinin tüketici davranışlarını belirleyebilmek adına bir pazarlama araştırması tasarlamaktadır. Bu amaçla firma tam olarak 1000 adet mülakat yapmak istemektedir. Bu mülakatların en az 400 tanesi çocuklu ailelere ve en az 400 tanesi ise çocuksuz ailelere yapılmalıdır. Ayrıca akşamları yapılacak mülakat sayıları, gündüz yapılacak mülakat sayısından az olmamalıdır. Çocuklu ailelere yapılan mülakatların en %40 ı akşamları yapılacak ve çocuksuz ailelere yapılacak mülakatların en %60 ı ise gündüz gerçekleştirilecektir. Çocuklu ailelere ayrılan ekstra zaman ve akşam mülakatlarının daha pahalı olması göz önüne alındığında, görüşme maliyetleri aşağıdaki tabloda verildiği şekilde farklılaşmaktadır.

	Mülakat Maliyetleri	
	Gündüz Mülakatları	Akşam Mülakatları
Çocuklu Aileler	20 TL	25 TL
Çocuksuz Aileler	18 TL	20 TL

En düşük mülakat maliyet ile bu pazarlama araştırmasını nasıl gerçekleştirirsiniz. Doğrusal Programlama modelini kurunuz.

### 1- Karar Değişkenleri:

$x_1$ : Maliyeti minimize etmek için çocuklu ailelerle yapılacak gündüz mülakatı sayısı

$x_2$ : Maliyeti minimize etmek için çocuklu ailelerle yapılacak akşam mülakatı sayısı

$x_3$ : Maliyeti minimize etmek için çocuksuz ailelerle yapılacak gündüz mülakatı sayısı

$x_4$ : Maliyeti minimize etmek için çocuksuz ailelerle yapılacak akşam mülakatı sayısı

### 2- Amaç Fonksiyonu:

$$Z_{min} = 20x_1 + 25x_2 + 18x_3 + 20x_4$$

### 3- Kısıtlar:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \quad (\text{Toplam mülakat kısıtı})$$

$$x_1 + x_2 \geq 400 \quad (\text{Çocuklu ailelere yapılacak mülakat kısıtı})$$

$$x_3 + x_4 \geq 400 \quad (\text{Çocuksuz ailelere yapılacak mülakat kısıtı})$$

$$x_2 + x_4 \geq x_1 + x_3 \quad (\text{Akşam mülakatlarının gündüzden az olmaması kısıtı})$$

$$x_2 \geq 0,40(x_1 + x_2) \quad (\text{Çocuklu aile mülakatlarının \% 40 ı akşam olması kısıtı})$$

$$x_3 \geq 0,60(x_3 + x_4) \quad (\text{Çocuksuz aile mülakatlarının \% 60 ı gündüz olması kısıtı})$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad (\text{Pozitiflik Şartı})$$

**SORU 2:** ABC firması X1 ve X2 adında ürün piyasaya sürmek istemektedir. X1 ürününden adet başına günlük 5TL ve X2 ürünü için 4TL kar elde edilmesi planlanmaktadır. Bir X1 ürünü 4 saatte üretilirken, X2 ürünü 3 saatte üretilmektedir. Firmada üretim departmanında günde 6 saat çalışan 300 işçi vardır. Firma ayrıca montajla işlemini fason olarak yaptırmakta ve antlaşma gereği ABC firması en az 600 saatlik montajlama işlemi firmaya göndermek durumundadır. X1 ürünü 3 saatte montajlanabilirken, X2 ürünü ancak 2 saatte montajlanabilmektedir. Firmanın taşıma kamyonu 500 adet ürün alabilmekte (ürün boyutları aynı) ve her gün tam doluluk ile çalışmak durumundadır. Bu şartlar altında karı maksimum yapan modeli kurunuz ve grafik yöntemle çözünüz.

### 1- Karar Değişkenleri:

$x_1$ : Karı maksimize etmek için üretilecek X1 model ürün sayısı

$x_2$ : Karı maksimize etmek için üretilecek X2 model ürün sayısı

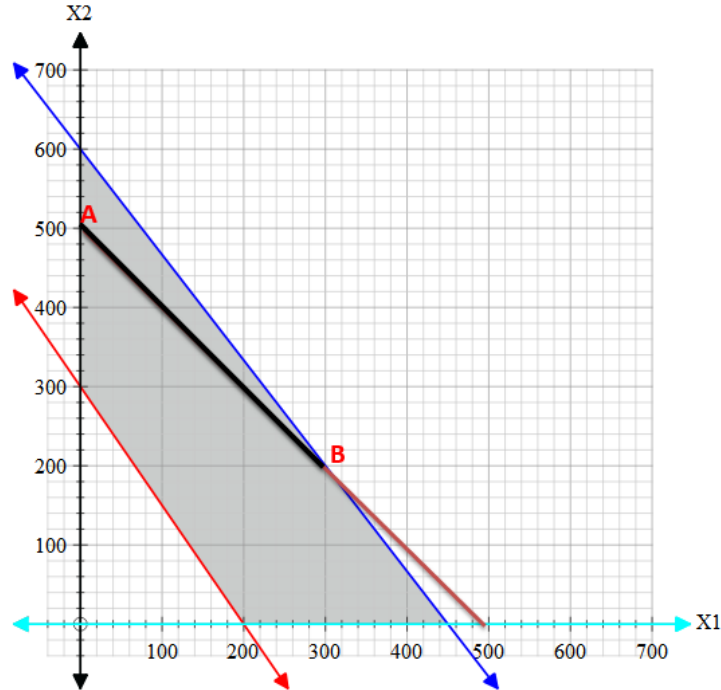
### 2- Amaç Fonksiyonu:

$$Z_{max} = 5x_1 + 4x_2$$

### 3- Kısıtlar:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 1800 & (\text{Üretim Kısıtı}) \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 600 & (\text{Fason İmalat Kısıtı}) \\ x_1 + x_2 &= 500 & (\text{Taşıma Kısıtı}) \\ x_1, x_2 &\geq 0 & (\text{Pozitiflik Şartı}) \end{aligned}$$

### Grafik Çözüm:



A (0, 500) → Amaç =  $5 \cdot 0 + 4 \cdot 500 = 2000\text{TL}$

B(300, 200) → Amaç =  $5 \cdot 300 + 4 \cdot 200 = 2300\text{TL}$

**SORU 03:** Sunco oktan dereceleri ve sülfür oranları farklı üç tip ham petrolün (H1, H2, H3) karıştırılması ile üç tip benzin (B1,B2,B3) üretmektedir. Benzinlerin oktan dereceleri ve sülfür oranları belli standartları sağlamalıdır:

- B1 için ortalama oktan derecesi en az 10, sülfür oranı en fazla %2 olmalıdır,
- B2 için ortalama oktan derecesi en az 8, sülfür oranı en fazla %4 olmalıdır,
- B3 için ortalama oktan derecesi en az 6, sülfür oranı en fazla %3 olmalıdır,

Firmanın her benzin tipi için en fazla satabileceği talepler sırasıyla 3000,2000 ve 1000 varildir. Bununla birlikte firma reklam yaparak talebini artırabilmektedir. Herhangi bir benzinde 1 dolarlık reklam, talebi 10 varil artırmaktadır. Hammaddelerin oktan dereceleri, sülfür oranları ve alış fiyatları ile benzinlerin satış fiyatları aşağıda verilen tablolardaki gibi ise Sunco'nun karını maksimum kılacak DP'yi bulunuz.

Ham Petrol	Oktan	Sülfür (%)	Alış Fiyatı (\$/varil)	Benzin	Satış Fiyatı (\$/varil)
$H_1$	12	1	45	$B_1$	70
$H_2$	6	3	35	$B_2$	60
$H_3$	8	5	25	$B_3$	50

## 1. Karar Değişkenleri

$B_1H_1$ : Karı maksimize etmek adına 1. tip benzine katılacak Hammadde 1 miktarı  
 $B_1H_2$ : Karı maksimize etmek adına 1. tip benzine katılacak Hammadde 2 miktarı  
 $B_1H_3$ : Karı maksimize etmek adına 1. tip benzine katılacak Hammadde 3 miktarı  
 $B_2H_1$ : Karı maksimize etmek adına 2. tip benzine katılacak Hammadde 1 miktarı  
 $B_2H_2$ : Karı maksimize etmek adına 2. tip benzine katılacak Hammadde 2 miktarı  
 $B_2H_3$ : Karı maksimize etmek adına 2. tip benzine katılacak Hammadde 3 miktarı  
 $B_3H_1$ : Karı maksimize etmek adına 3. tip benzine katılacak Hammadde 1 miktarı  
 $B_3H_2$ : Karı maksimize etmek adına 3. tip benzine katılacak Hammadde 2 miktarı  
 $B_3H_3$ : Karı maksimize etmek adına 3. tip benzine katılacak Hammadde 3 miktarı

## 2. Amaç Fonksiyonu

$$Z_{max} = \text{Gelir} - \text{Hammadde Maliyetleri} - \text{Reklam Maliyetleri}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{max} = & [70(B_1H_1 + B_1H_2 + B_1H_3) + 60(B_2H_1 + B_2H_2 + B_2H_3) + 50(B_3H_1 + B_3H_2 + B_3H_3)] \\
 & - [45(B_1H_1 + B_2H_1 + B_3H_1) + 35(B_1H_2 + B_2H_2 + B_3H_2) + 25(B_1H_3 + B_2H_3 + \\
 & B_3H_3)] \\
 & - [0,1(B_1H_1 + B_1H_2 + B_1H_3) + 0,1(B_2H_1 + B_2H_2 + B_2H_3) + 0,1(B_3H_1 + B_3H_2 + \\
 & B_3H_3)]
 \end{aligned}$$

### 3. Kısıtlar

#### Oktan Derecesi Kısıtları

$$\frac{12B_1H_1 + 6B_1H_2 + 8B_1H_3}{B_1H_1 + B_1H_2 + B_1H_3} \geq 10$$

$$\frac{12B_2H_1 + 6B_2H_2 + 8B_2H_3}{B_2H_1 + B_2H_2 + B_2H_3} \geq 8$$

$$\frac{12B_3H_1 + 6B_3H_2 + 8B_3H_3}{B_3H_1 + B_3H_2 + B_3H_3} \geq 6$$

#### Sülfür Oranı Kısıtları

$$\frac{0,01B_1H_1 + 0,03B_1H_2 + 0,05B_1H_3}{B_1H_1 + B_1H_2 + B_1H_3} \leq 0,02$$

$$\frac{0,01B_2H_1 + 0,03B_2H_2 + 0,05B_2H_3}{B_2H_1 + B_2H_2 + B_2H_3} \leq 0,04$$

$$\frac{0,01B_3H_1 + 0,03B_3H_2 + 0,05B_3H_3}{B_3H_1 + B_3H_2 + B_3H_3} \leq 0,03$$

#### Talep Kısıtları

$$B_1H_1 + B_1H_2 + B_1H_3 \leq 3000$$

$$B_2H_1 + B_2H_2 + B_2H_3 \leq 2000$$

$$B_3H_1 + B_3H_2 + B_3H_3 \leq 1000$$

$$B_1H_1, B_1H_2, B_1H_3, B_2H_1, B_2H_2, B_2H_3, B_3H_1, B_3H_2, B_3H_3 \geq 0 \text{ (Pozitiflik Şartı)}$$

**SORU 4:** Aşağıda doğrusal programlama modeli verilen soruyu grafik yöntemi kullanarak çözünüz. Sonucu yorumlayınız.

$$Z_{max} \ 2x_1 + 7x_2$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 0$$

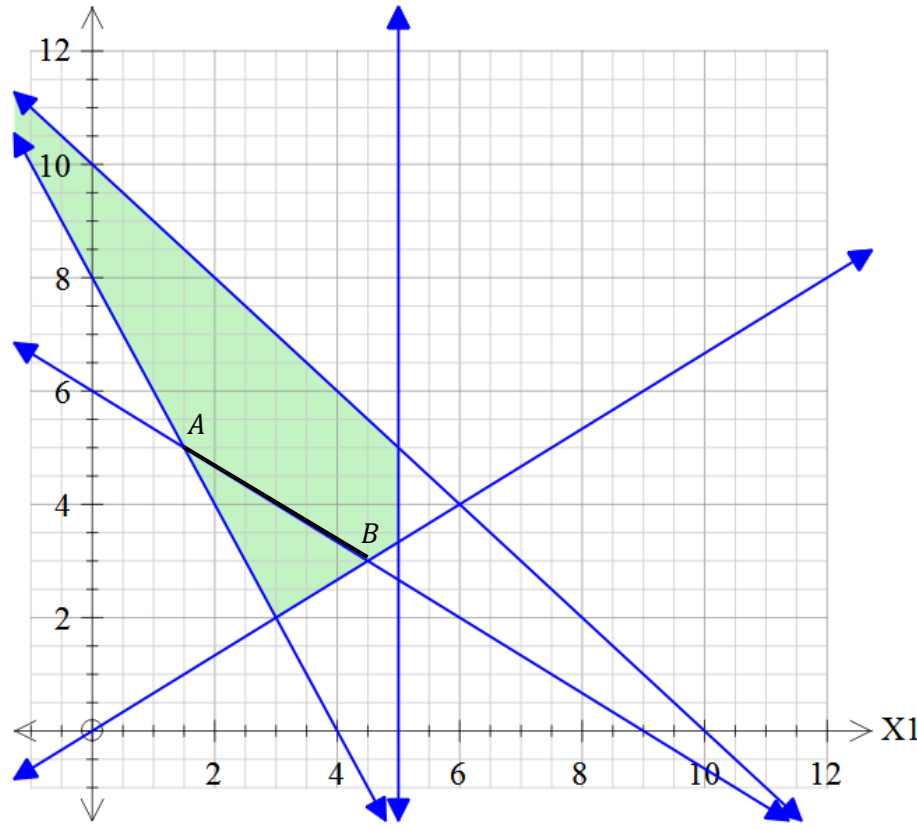
$$2x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 = 18$$

$$x_1 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Çözüm AB doğrusu üzerinde olacak.

$$A \text{ noktası (2. ve 4. kısıt ortak çözüm)} = \left(\frac{3}{2}, 5\right) \rightarrow Z_{max} = 2 * \frac{3}{2} + 7 * 5 = 38$$

$$B \text{ noktası (1. ve 4. kısıt ortak çözüm)} = \left(\frac{9}{2}, 3\right) \rightarrow Z_{max} = 2 * \frac{9}{2} + 7 * 3 = 30$$

**SORU 5:** Bir firma Spor Bisiklet, Dağ Bisikleti ve Performans Bisikleti olmak üzere 3 tip bisiklet üretmektedir. Spor bisiklet 3 saat içerisinde üretilmekte ve 2 saat içerisinde montaj yapılmaktadır. Dağ bisikleti ise ancak 4 saatte üretilip 3 saat içerisinde montajlanmaktadır. Performans bisikleti ise 5 saatlik üretim ve montaj sürelerine sahiptir. Performans bisikleti alanında ünlü olan firma en az adet 5 performans bisikleti üretmek istemektedir. Firmanın elinde günde 8 saat, haftada 5 gün çalışan 6 üretim işçisi ve 8 montaj işçisi mevcuttur. Firma spor bisikletinden 80 ", Dağ Bisikletinden 120 " ve performans bisikletinde 200 " kazanmaktadır. Bu şartlar altında firmanın karını maksimize eden doğrusal programlama modelini kurunuz.

### 1. Karar Değişkenleri

$x_1$ : Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Spor Bisiklet sayısı

$x_2$ : Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Dağ Bisikleti sayısı

$x_3$ : Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Performans Bisikleti sayısı

### 2. Amaç Fonksiyonu

$$Z_{max} = 80x_1 + 120x_2 + 200x_3$$

### 3. Kısıtlar

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240 \quad (\text{Üretim Kısıtı})$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 320 \quad (\text{Montaj Kısıtı})$$

$$x_3 \geq 5 \quad (\text{Performans Bisikleti en az üretim kısıtı})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (\text{Pozitiflik Şartı})$$



**SORU 6:** Bir firma X serisi sürat tekneleri üretmektedir. X1 modeli ekonomi sınıfı ve fiyatı 4 milyon \$'dır. Lüks sınıf olan X2 ise 6 milyon \$'dan satılmaktadır. Firma aşağıda yazan koşulları dikkate alarak yeni yıl için üretim planı oluşturmak istemektedir.

- X1 modeli üretimi X2 modelinin üretiminden az olmamalıdır.
- Firma modellerde kullanılan özel bir donanımdan en az 8 adet sipariş vermelidir. Bu donanımdan X1'de 4 adet ve X2'de 1 adet bulunmaktadır.
- Firmanın elinde sadece 10 adet yüksek performansı motor vardır. Firma bütün motorları mutlaka kullanmak istemektedir. X1 teknesi 2 motorlu ve X2 teknesi 5 motorludur.

Karı maksimize edecek modeli kurunuz.

### 1. Karar Değişkenleri

$x_1$ : Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken x1 model sürat teknesi sayısı

$x_2$ : Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken x2 model sürat teknesi sayısı

### 2. Amaç Fonksiyonu

$$Z_{max} = 4x_1 + 6x_2$$

### 3. Kısıtlar

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$4x_1 + x_2 \geq 8$$

$$2x_1 + 5x_2 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**SORU 7:** META metal alaşımları şirketi A, B, C metallerini kullanarak iki alaşım üretmektedir. Kullanılan metallerin özellikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Meta	Yoğunluk	Karbon (%)	Fiyat (TL/kg)	Tedarik Miktarı	Üretildikten sonra alaşımların bazı özellikleri taşıması gerekmektedir. Birinci alaşımın (AL1)
A	6500	0,20	2,2	350	
B	5800	0,35	2,5	200	
C	6200	0,15	2,0	250	

yoğunluğunun en az 5950, en fazla 6050; karbon yüzdesinin en fazla 0,3 olması gerekmektedir. İkinci alaşımın (AL2) yoğunluğunun en az 6000; karbon yüzdesinin en az 0,1 olması istenmektedir. Şirketin elinde 100kg. A metalinden vardır ve tedarikçilerden temin edilebilecek metal miktarları kısıtlıdır (yukarıdaki tablonun son sütununda her bir metal için tedarik edilebilecek en büyük miktarlar verilmiştir.)

- META'nın AL1 ve AL2'den 200 kg. ve 400kg.'lık taleplerini karşılayabilmesi için en küçük metal satın alma maliyetini verecek Doğrusal Programlama modelini kurunuz.
- Tedarikçi firma C metalinin fiyatını 100 kg.'dan fazla alınması halinde fazla alınacak miktarın fiyatını 1,5 YTL/kg.'a indireceğini taahhüt etmektedir (Örneğin 60 kg. alınırsa fiyat  $60 \cdot 2 = 120$  YTL; 130 kg alınırsa fiyat  $100 \cdot 2 + 30 \cdot 1,5 = 245$  YTL olacaktır). Bu yeni duruma göre metal satın alma maliyetini en küçükleyecek modeli tekrar kurunuz (önceki aşamaya göre değişecek kısımları vermeniz yeterlidir. C metalinin fiyatı dışında her şey önceki aşamadakiyle aynıdır.)

### 1. Karar Değişkenleri

$A_1$  = Maliyeti minimize etmek için A metalinden AL1 alaşımı içerisine katılacak miktar  
 $A_2$  = Maliyeti minimize etmek için A metalinden AL2 alaşımı içerisine katılacak miktar  
 $B_1$  = Maliyeti minimize etmek için B metalinden AL1 alaşımı içerisine katılacak miktar  
 $B_2$  = Maliyeti minimize etmek için B metalinden AL2 alaşımı içerisine katılacak miktar  
 $C_1$  = Maliyeti minimize etmek için C metalinden AL1 alaşımı içerisine katılacak miktar  
 $C_2$  = Maliyeti minimize etmek için C metalinden AL2 alaşımı içerisine katılacak miktar

### 2. Amaç Fonksiyonu

$$Z_{min} = 2,2(A_1 + A_2) + 2,5(B_1 + B_2) + 2(C_1 + C_2)$$

### 3. Kısıtlar

$$\frac{6500A_1 + 5800B_1 + 6200C_1}{A_1 + B_1 + C_1} \geq 5950$$

$$\frac{6500A_1 + 5800B_1 + 6200C_1}{A_1 + B_1 + C_1} \leq 6050$$

$$\frac{6500A_2 + 5800B_2 + 6200C_2}{A_2 + B_2 + C_2} \geq 6000$$

$$\frac{0,20A_2 + 0,35B_2 + 0,15C_2}{A_2 + B_2 + C_2} \geq 0,10$$

$$\frac{0,20A_1 + 0,35B_1 + 0,15C_1}{A_1 + B_1 + C_1} \leq 0,30$$

$$A_1 + A_2 - 100 \leq 350$$

$$B_1 + B_2 \leq 200$$

$$C_1 + C_2 \leq 250$$

$$A_1 + B_1 + C_1 = 200$$

$$A_2 + B_2 + C_2 = 400$$

$$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 \geq 0$$

B şıkkı için;

$$Z_{min} = 2,2(A_1 + A_2) + 2,5(B_1 + B_2) + 2(C_1 + C_2) - \mathbf{0,5(C_1 + C_2 - 100)}$$

**Eklenmesi Gereken Kısıt**

$$\mathbf{C_1 + C_2 \geq 100}$$

**SORU 8:** Aşağıda doğrusal programlama modeli verilen soruyu grafik yöntemi kullanarak çözünüz. Sonucu yorumlayınız.

$$Z_{max} = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

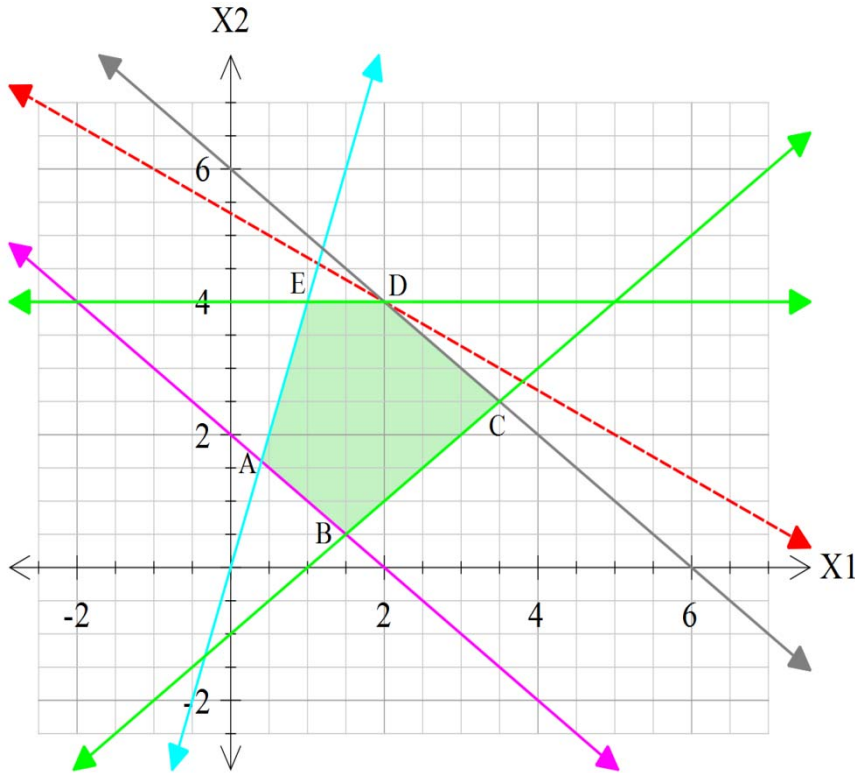
$$4x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \geq -1$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



**Çözüm:**

1. Kısıt)  $x_1 + x_2 \geq 2$  (2 puan)  
 $\rightarrow x_1=0$  için  $x_2=2$ ,  $x_2=0$  için  $x_1=2$ , (0,2) (2,0)
2. Kısıt)  $4x_1 - x_2 \geq 0$  (2 puan)  
 $\rightarrow x_1=0$  için  $x_2=0$ ,  $x_1=1$  için  $x_2=4$ , (0,0) (1,4)
3. Kısıt)  $x_1 + x_2 \leq 6$  (2 puan)  
 $\rightarrow x_1=0$  için  $x_2=6$ ,  $x_2=0$  için  $x_1=6$ , (0,6) (6,0)
4. Kısıt)  $-x_1 + x_2 \geq -1$  (2 puan)  
 $\rightarrow x_1=0$  için  $x_2=-1$ ,  $x_2=0$  için  $x_1=1$ , (0,-1) (1,0)
5. Kısıt)  $x_2 \leq 4$  (2 puan)  
 $\rightarrow x_2=4$

Uygun Çözüm Alanı Köşe Noktası	Noktayı Oluşturan Kısıt Denklemleri	Koordinatlar		Amaç Fonksiyonu Zmaks= $2x_1 + 3x_2$ Değeri (5 puan)
		$x_1$	$x_2$	
A	$x_1 + x_2 \geq 2$ $4x_1 - x_2 \geq 0$	2/5	8/5	Zmaks=5,6
B	$x_1 + x_2 \geq 2$ $-x_1 + x_2 \geq -1$	1,5	0,5	Zmaks=4,5
C	$x_1 + x_2 \leq 6$ $-x_1 + x_2 \geq -1$	7/2	5/2	Zmaks=14,5
D	$x_1 + x_2 \leq 6$ $x_2 \leq 4$	2	4	Zmaks=16
E	$4x_1 - x_2 \geq 0$ $x_2 \leq 4$	1	4	Zmaks=14

**Yorum:** Uygun çözüm alanını oluşturan A,B,C,D,E köşe noktalarından amaca en uygun çözümü D noktası sunmaktadır. (1 puan) Bu noktada  $x_1=2$  (1 puan) ve  $x_2=4$  (1 puan) değerlerini alır ve Zmaks=16 (2 puan) sonucuna ulaşılır.

**SORU 9:** Aşağıda doğrusal programlama modeli verilen soruyu grafik yöntemi kullanarak çözünüz. Sonucu yorumlayınız.

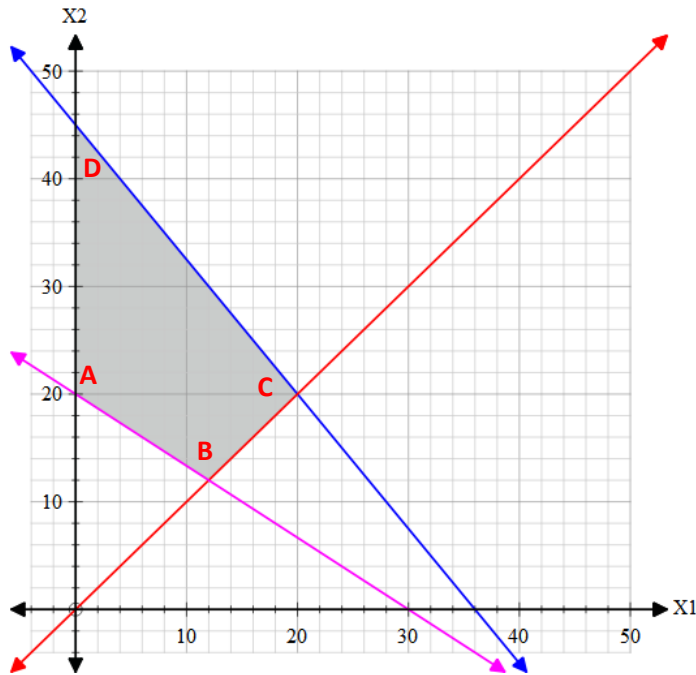
$$Z_{min} = 3x_1 + 4x_2$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 180$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



1. Kısıt:

(0,45) ve (36,0) noktaları

2. Kısıt:

(0,0) ve (20,20) noktaları

3. Kısıt:

(0,20) ve (30,0) noktaları

ABCD dörtgeni optimum alan

A(0,20)

D(0,45)

C(20,20) 1 ve 2 ortak çözümünden

D(12,12) 2 ve 3 ortak çözümünden

Amaç değerleri

**A için  $\rightarrow 3*0+4*20=80$**

B için  $\rightarrow 3*0+4*45=180$

C için  $\rightarrow 3*20+4*20=160$

D için  $\rightarrow 3*12+4*12=84$

Eğer  $x_1$  den 0 birim ve  $x_2$  den 20 birim üretilirse

Minimum değer olan 80 birim elde edilir.

**SORU 10:** Bir şirket yeni ürün üretmek için makine satın almak istemektedir. Bunun için ayırdığı kaynak 800.000 TL'dir. Makine satan firma üç farklı modelde makine önermektedir. (Klasik, Lüks ve Süper)

	Maliyet	Kapladığı Alan	Üretim Miktarı / Saat	Operatör Sayısı
<b>Klasik</b>	24.000TL	15m <sup>2</sup>	4	1
<b>Lüks</b>	40.000TL	20m <sup>2</sup>	5	2
<b>Süper</b>	80.000TL	30m <sup>2</sup>	20	5

Şirket alınacak makinelerin en az yarısının lüks model olmasını istemektedir. Üretilen ürün başına operatörlerin maliyeti hariç 80 TL kar elde edilmektedir. Şirketin makineler için ayırabileceği alan 500 m<sup>2</sup>'dir ve toplamda çalıştırabileceği operatör sayısı 100'dür. Operatörlere saatte 30 TL verilmektedir. Eldeki verilere göre şirketin karını maksimize edecek şekilde doğrusal programlama modelini oluşturunuz.

### 1. Karar Değişkenleri

$x_1$ : Karı maksimize etmek için alınacak Klasik Model makine sayısı

$x_2$ : Karı maksimize etmek için alınacak Lüks Model makine sayısı

$x_3$ : Karı maksimize etmek için alınacak Süper Model makine sayısı

### 2. Amaç Fonksiyonu

$$Z_{max} = 80 * (4x_1 + 5x_2 + 20x_3) - 30 * (x_1 + 2x_2 + 5x_3)$$

### 3. Kısıtlar

$$24.000x_1 + 40.000x_2 + 80.000x_3 \leq 800.000 \quad (\text{Toplam Bütçe Kısıtı})$$

$$15x_1 + 20x_2 + 30x_3 \leq 500 \quad (\text{Toplam Alan Kısıtı})$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 100 \quad (\text{Toplam Operatör Kısıtı})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ ve Tamsayı} \quad (\text{Pozitiflik Şartı})$$

**SORU 11:** Bir şirket geçen dönem elde ettiği karı hisse senetlerine yatırmak istemektedir. Elinde 250.000 lirası bulunan bu şirket araştırmaları sonucunda yatırım yapabileceği 5 farklı hisse senedi belirlemiştir. Bunlara ait tahmini getiri olasılıkları ve hisse senetlerinin hesaplanan riskleri şu şekildedir:

Hisse Senedi	Tahmini Getiri Oranı	Risk
HS <sub>1</sub>	0,23	0,15
HS <sub>2</sub>	0,16	0,12
HS <sub>3</sub>	0,04	0,03
HS <sub>4</sub>	0,08	0,05
HS <sub>5</sub>	0,28	0,18

Şirket yatırım politikası gereği toplam riskin 0,12’i aşmamasını istemektedir. Ayrıca yapacağı bu yatırımdan elde etmeyi planladığı kar miktarı en az 25.000’dir. Ayrıca ileride ortaklık kurabileceğini düşündüğü 3 numaralı şirketten en az 50.000 TL’lik hisse senedi almayı istemektedir. Yukarıdaki verilere göre şirketin getirisini maksimum yapacak modeli oluşturunuz.

### 1. Karar Değişkenleri

$HS_1$ : Toplam getiriyi maksimize etmek için alınacak  $HS_1$  hisse senedi tutarı  
 $HS_2$ : Toplam getiriyi maksimize etmek için alınacak  $HS_2$  hisse senedi tutarı  
 $HS_3$ : Toplam getiriyi maksimize etmek için alınacak  $HS_3$  hisse senedi tutarı  
 $HS_4$ : Toplam getiriyi maksimize etmek için alınacak  $HS_4$  hisse senedi tutarı  
 $HS_5$ : Toplam getiriyi maksimize etmek için alınacak  $HS_5$  hisse senedi tutarı

### 2. Amaç Fonksiyonu

$$Z_{max} = 0,23HS_1 + 0,16HS_2 + 0,04HS_3 + 0,08HS_4 + 0,28HS_5$$

### 3. Kısıtlar

$$HS_1 + HS_2 + HS_3 + HS_4 + HS_5 \leq 250.000 \quad (\text{Anapara Kısıtı})$$

$$\frac{0,15HS_1 + 0,12HS_2 + 0,03HS_3 + 0,05HS_4 + 0,18HS_5}{HS_1 + HS_2 + HS_3 + HS_4 + HS_5} \leq 0,12 \quad (\text{Risk Kısıtı})$$

$$0,23HS_1 + 0,16HS_2 + 0,04HS_3 + 0,08HS_4 + 0,28HS_5 \geq 25.000 \quad (\text{Getiri Kısıtı})$$

$$HS_3 \geq 50.000 \quad (\text{Şirket 3 Kısıtı})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ ve Tamsayı} \quad (\text{Pozitiflik Şartı})$$

**Soru 12:** Bir boya mağazasının Sakarya Ana bayii 3 farklı toptancıya satış yapmaktadır. Bu bayiye ait 2 tane depo vardır. Bu depolardan her hafta her toptancı 40 ar koli boya talep etmektedir. Depolardan toptancılara 1 koli boya göndermenin maliyetleri tabloda verilmiştir.

	Toptancı 1	Toptancı 2	Toptancı 3
Depo 1	25	45	15
Depo 2	20	40	30

Depo 1 ve Depo 2 nin kapasiteleri sırası ile 55 ve 45 kolidir.

- a) Toplam taşıma maliyetini minimize edecek dağıtım planını oluşturacak modeli kurunuz.
- b) Toptancılarla önceden yapılan bir antlaşmaya göre, toptancılara eksik gönderilen her bir koli için aşağıdaki miktarda tazminatlar ödenecektir. Bu bilgi ışığında a şıkkında kurulan model nasıl değişir. Sadece değişen kısmı belirtiniz.

	Toptancı 1	Toptancı 2	Toptancı 3
Tazminat	40	50	30

a.  $Z_{\min} = 25x_{11} + 45x_{12} + 15x_{13} + 20x_{21} + 40x_{22} + 30x_{23}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 55$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 45$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 40$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 40$$

$$x_{13} + x_{23} \leq 40$$

$$x_{ij} \geq 0$$

- b. Sadece amaç fonksiyonu değişir.

$$Z_{\min} = 25x_{11} + 45x_{12} + 15x_{13} + 20x_{21} + 40x_{22} + 30x_{23} + [40 * (40 - (x_{11} + x_{21})) + 50 * (40 - (x_{12} + x_{22})) + 30 * (40 - (x_{13} + x_{23}))]$$



**Soru 13:** Ferah mobilyalarının İstanbul Anadolu yakası başbayii 3 toptancıya satış yapmaktadır. Bu bayiye ait 2 tane depo vardır. Bu depolardan her hafta her toptancı 30 ar koli boya talep etmektedir. Depolardan toptancılara 1 koli boya göndermenin maliyetleri tabloda verilmiştir.

	Toptancı 1	Toptancı 2	Toptancı 3
Depo 1	15	35	25
Depo 2	10	30	40

Depo 1 ve Depo 2 nin kapasiteleri sırası ile 45 ve 35 kolidir.

- a) Toplam taşıma maliyetini minimize edecek dağıtım planını oluşturacak modeli kurunuz.
- b) Toptancılarla önceden yapılan bir antlaşmaya göre, toptancılara eksik gönderilen her bir koli için aşağıdaki miktarda tazminatlar ödenecektir. Bu bilgi ışığında a şıkkında kurulan model nasıl değişir. Sadece değişen kısmı belirtiniz.

	Toptancı 1	Toptancı 2	Toptancı 3
Tazminat	90	110	80

$$a. Z_{\min} = 15x_{11} + 35x_{12} + 25x_{13} + 10x_{21} + 30x_{22} + 40x_{23}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 45$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 35$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 30$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 30$$

$$x_{13} + x_{23} \leq 30$$

$$x_{ij} \geq 0$$

- b. Sadece amaç fonksiyonu değişir.

$$Z_{\min} = 15x_{11} + 35x_{12} + 25x_{13} + 10x_{21} + 30x_{22} + 40x_{23}$$

$$+ [90 * (30 - (x_{11} + x_{21})) + 110 * (30 - (x_{12} + x_{22})) + 80 * (30 - (x_{13} + x_{23}))]$$

**SORU 14:** Bir firma üç farklı reklam aracı kullanarak (TV, Radyo ve Web) pazarlama işlemlerini yürütmek istemektedir. Herhangi bir pazarlama aracında tek bir gün için reklam vermenin maliyeti ve potansiyel müşteri sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

		Televizyon		Radyo	Web
		Gün içi	Prime Time		
Maliyet		12.000TL	30.000TL	8.000TL	6.000TL
Müşteri Sayıları	Erkek	200.000	550.000	80.000	140.000
	Kadın	320.000	500.000	120.000	90.000

Firma aşağıdaki koşulları sağlayan bir araştırma organize etmek istemektedir.

- Firma en az 1.800.000 erkek ve 1.600.000 kadın müşteriye ulaşmak istemektedir.
- Toplam reklam bütçesi 150.000 TL ile sınırlıdır.
- En az 5 gün televizyon reklamı yapılmalıdır. Bu reklamların en az iki tanesi prime time zaman diliminde yapılacaktır.
- Radyo ve Web reklamları da en az ikişer defa yapılmalıdır.

Bu koşullar altında ulaşılabilecek kişi sayısını maksimize edecek modeli kurunuz.

$x_1$ : Maksimum müşteriye ulaşmak adına TV de gün içi reklam verilecek gün sayısı

$x_2$ : Maksimum müşteriye ulaşmak adına TV de Prime Time da reklam verilecek gün sayısı

$x_3$ : Maksimum müşteriye ulaşmak adına Radyoya reklam verilecek gün sayısı

$x_4$ : Maksimum müşteriye ulaşmak adına webe reklam verilecek gün sayısı

$$Z_{max} = 520.000x_1 + 1.050.000x_2 + 200.000x_3 + 230.000x_4$$

$$200.000x_1 + 550.000x_2 + 80.000x_3 + 140.000x_4 \geq 1.800.000 \text{ (Erkek Reklam)}$$

$$320.000x_1 + 500.000x_2 + 120.000x_3 + 90.000x_4 \geq 1.600.000 \text{ (Kadın Reklam)}$$

$$12.000x_1 + 30.000x_2 + 8.000x_3 + 6.000x_4 \leq 150.000 \text{ (Bütçe)}$$

$$x_1 + x_2 \geq 5 \text{ (Tv Reklamı)}$$

$$x_2 \geq 2 \text{ (Tv Prime Time)}$$

$$x_3 \geq 2 \text{ (Radyo)}$$

$$x_4 \geq 2 \text{ (Web)}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

**SORU 15:** Yanda verilen modelin çözümünü grafik Yöntemle bulunuz.

$$Z_{min} 4x_1 + 5x_2$$

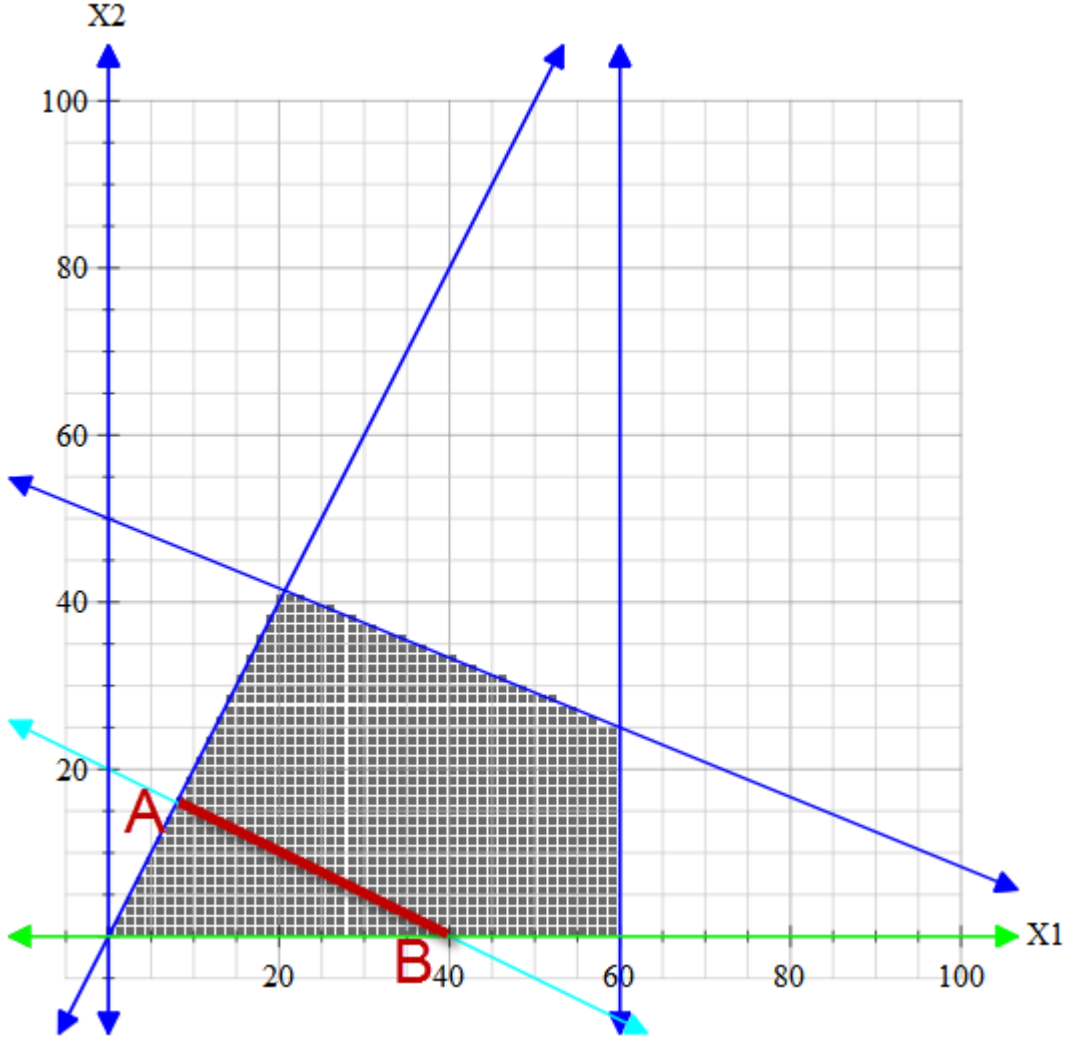
$$5x_1 + 12x_2 \leq 600$$

$$x_1 \leq 60$$

$$2x_1 - x_2 \geq 0$$

$$3x_1 + 6x_2 = 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



A Noktası (8 ,16) Amaç Fonksiyonu Değeri =  $4 \cdot 8 + 5 \cdot 16 = 112$  (Minimum Nokta)

B Noktası (40, 0) Amaç Fonksiyonu Değeri =  $4 \cdot 40 + 5 \cdot 0 = 160$

**Soru 16:** Bir yatırım finansmanı firması elinde bulunan 200.000\$ nakit paranın tamamını farklı yatırım alternatifleri arasında değerlendirmek istemektedir. Bu amaçla İletişim ve demir-çelik sektörlerinden ikişer firma ile bir spor takımına ait tahvillere yatırım yapılması düşünülmektedir. Aşağıdaki tabloda olası yatırım getirileri, risk oranları ile birlikte verilmiştir.

Firma	Sektör	Getiri Oranı	Risk
WebCo	Demir-Çelik	% 08	% 12
GeniuX	Demir-Çelik	% 07	% 10
Telex	İletişim	% 09	% 14
iCon	İletişim	% 6,5	% 6
XYZ United	Spor	% 10	% 16

Firma hiçbir şekilde spor sektörüne, iletişim sektöründen daha fazla yatırım yapmak istememektedir. Herhangi bir sektöre ise toplamda 100.000\$ dan fazla yatırım yapılması düşünülmemektedir. İletişim sektörüne yapılan yatırımın ise en az %60 lık kısmı iCon firmasına yatırılmalıdır. Firma toplam yatırım riskinin % 12 den fazla olmamasını da istemektedir. Bu koşullar altında toplam getiriyi maksimize edecek modeli kurunuz.

#### Karar Değişkenleri:

- $X_1$ : Toplam getiriyi maksimum yapmak için WebCo firmasına ait tahvillerden alınacak tutar  
 $X_2$ : Toplam getiriyi maksimum yapmak için GeniuX firmasına ait tahvillerden alınacak tutar  
 $X_3$ : Toplam getiriyi maksimum yapmak için Telex firmasına ait tahvillerden alınacak tutar  
 $X_4$ : Toplam getiriyi maksimum yapmak için iCon firmasına ait tahvillerden alınacak tutar  
 $X_5$ : Toplam getiriyi maksimum yapmak için XYZ United firmasına ait tahvillerden alınacak tutar

#### Amaç Fonksiyonu:

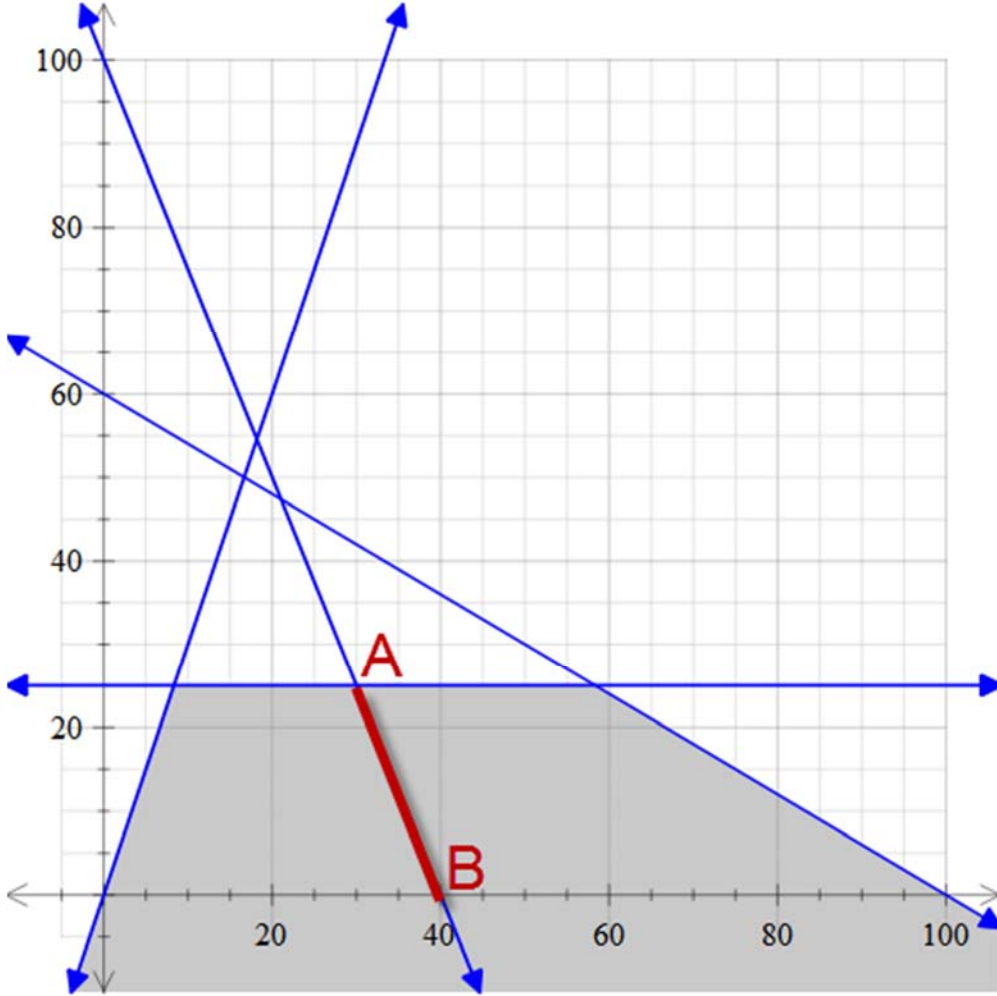
$$Z_{\max} 0,08X_1+0,07X_2+0,09X_3+0,065X_4+0,10X_5$$

#### Kısıtlar:

- Toplam Para  $\rightarrow 0,08X_1+0,07X_2+0,09X_3+0,065X_4+0,10X_5=200.000$   
 Spor Sektörü  $\rightarrow X_5 \geq X_3+X_4$   
 Sektör Yatırımı  $\rightarrow X_1+X_2 \leq 100.000 \quad X_3+X_4 \leq 100.000 \quad X_5 \leq 100.000$   
 İletişim Sektörü  $\rightarrow X_4 \geq 0,60 (X_3+X_4)$   
 Toplam Risk  $\rightarrow 0,12X_1+0,10X_2+0,14X_3+0,06X_4+0,16X_5 \leq 0,12 (X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$   
 Pozitiflik Şartı  $\rightarrow X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

**Soru 17:** Yanda matematiksel modeli verilmiş olan doğrusal programlama sorusunu grafik yöntemle çözünüz. Sonuçları yorumlayınız.

$$\begin{aligned} Z_{\max} & 7X_1 + 8X_2 \\ 3X_1 + 5X_2 & \leq 300 \\ 3X_1 - X_2 & \geq 0 \\ X_2 & \leq 25 \\ 5X_1 + 2X_2 & = 200 \\ X_1, X_2 & \geq 0 \end{aligned}$$



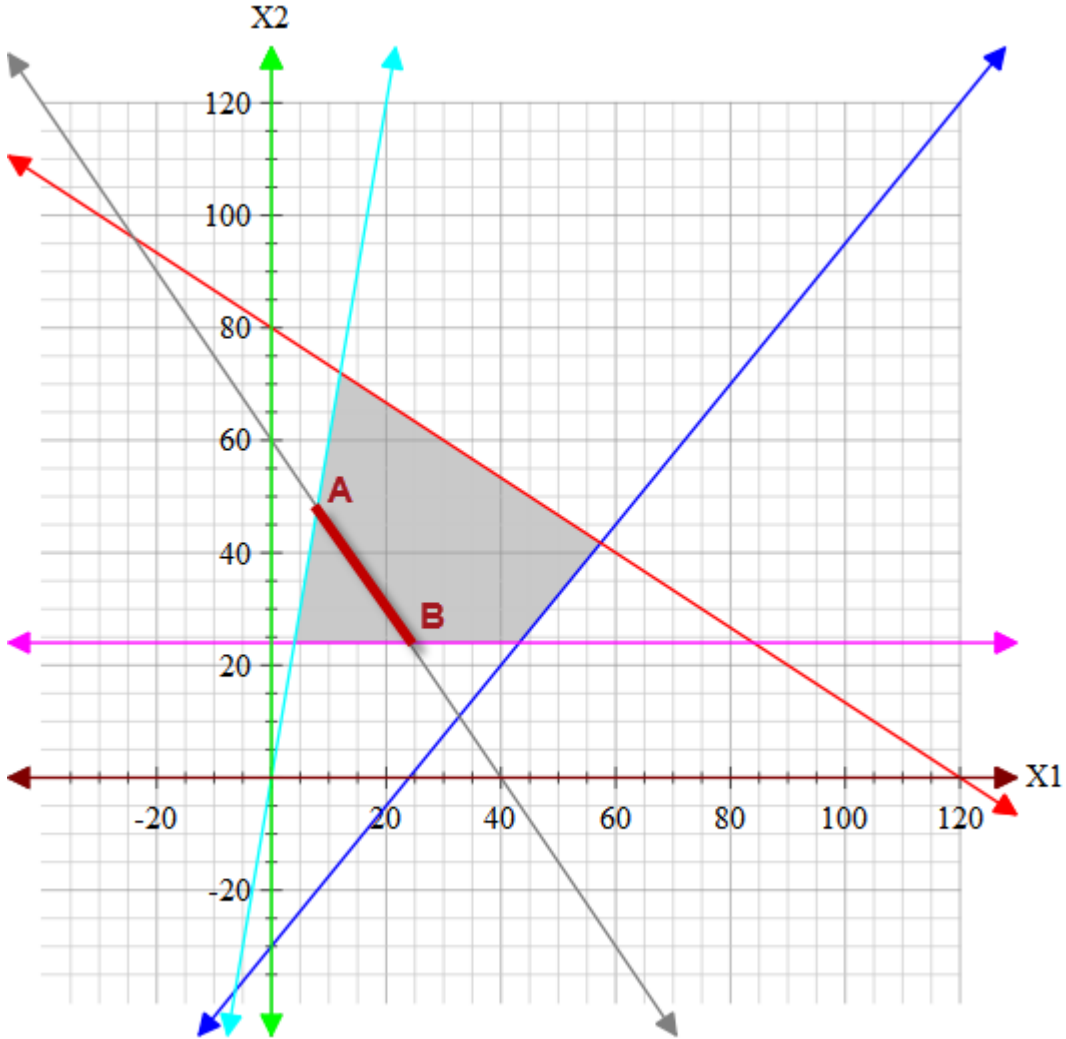
A Noktası  $X_2=25$  doğrusu üzerinde olduğundan eşitlik kısıtında  $X_2=25$  yerine yazıldığında (30, 25) olarak bulunur. Buradaki amaç fonksiyonu değeri  $7 \cdot 30 + 8 \cdot 25 = 410$  bulunur.

B Noktası ise (40, 0) noktasıdır ve amaç fonksiyonu değeri  $7 \cdot 40 + 8 \cdot 0 = 280$  bulunur.

Soru maksimizasyon olduğundan A noktası seçilir. Yani maksimum amaç değeri 410 olarak bulunur.

**Soru 18:** Yanda matematiksel modeli verilmiş olan doğrusal programlama sorusunu grafik yöntemle çözünüz. Sonuçları yorumlayınız.

$$\begin{aligned} Z_{\max} & 6X_1 + 4X_2 \\ 5X_1 - 4X_2 & \leq 120 \\ 4X_1 + 6X_2 & \leq 480 \\ X_2 & \geq 24 \\ 6X_1 - X_2 & \geq 0 \\ 9X_1 + 6X_2 & = 360 \\ X_1, X_2 & \geq 0 \end{aligned}$$



A noktası 4 ve 5. kısıtların ortak çözümünden bulunabilir. Gerekli çözüm yapıldığında A (8, 48) değerleri bulunacaktır.

B Noktası ise 3 ve 5. kısıtların ortak çözümünden bulunabilir. 3. kısıtta  $X_2=24$  olduğu dikkate alınıp  $X_1$  değeri hesaplanabilir. Gerekli çözüm yapıldığında B (24, 24) değerleri bulunacaktır.

Amaç fonksiyonunda A ve B noktaları yerine yazılırsa sırası ile 240 ve 240 bulunur. Sorunun çözümünde alternatif çözüm olduğu söylenebilir her iki noktada doğru sonucu verecektir.

**Soru 19:** Bir firma yeni kuracağı fabrikanın üretim hattında kullanmak üzere tezgâhlar alacaktır. Aşağıdaki tabloda her bir tezgâhın iş yapma kapasitesi, gerekli işçilik saati ücreti, satın alma maliyeti ve fabrika içerisinde kapladığı alan verilmiştir.

Tezgâhlar	Üretim Kapasitesi (Adet/Saatlik)	Operatör İşçilik Ücreti (TL/Saatlik)	Satın Alma Fiyatı	Kapladığı Alan (Metrekare)
T1	120	15	42500	12
T2	150	18	55000	15
T3	210	20	62500	24
T4	300	24	75000	32

Fabrikada sadece tek tip ürün satılmakta ve bu ürünün satış fiyatı 1TL olarak belirlenmiştir. Bir birim ürün üretim maliyeti işçilik hariç 0,40TL olduğu bilinmektedir. Firmanın toplam karını maksimize edecek modeli aşağıda verilmiş olan koşulları da dikkate alarak kurunuz.

1. Toplam hammadde maliyeti 8.000TL üzerine çıkmayacaktır.
2. Firma tam olarak 10 adet makine almayı istemektedir.
3. Firmanın tezgâhlar için ayırdığı toplam alan 250 metrekaredir.
4. Tezgâh alımı için ayrılan toplam bütçe 650.000 TL ile sınırlıdır.
5. Firma T1 ve T2 tezgâhlarının toplamının T4 den daha fazla olmamasını istemektedir.
6. Toplam üretilen ürün adedinin günlük 17000 adetten aşağıda olmaması hedeflenmektedir.
7. Firmanın elinde 20.000 adet ürün üretimi için yetecek kadar hammadde stoğu mevcuttur.

### 1. Karar Değişkenleri:

T<sub>1</sub>: Karı maksimize edebilmek için alınacak T1 model tezgâh sayısı

T<sub>2</sub>: Karı maksimize edebilmek için alınacak T2 model tezgâh sayısı

T<sub>3</sub>: Karı maksimize edebilmek için alınacak T3 model tezgâh sayısı

T<sub>4</sub>: Karı maksimize edebilmek için alınacak T4 model tezgâh sayısı

### 2. Amaç Fonksiyonu:

Z<sub>max</sub> Toplam Satış Karı – Toplam İşçilik Maliyeti

Z<sub>max</sub> (1-0,40)\*(8\*120\*T<sub>1</sub>+8\*150\*T<sub>2</sub>+8\*210\*T<sub>3</sub>+8\*300\*T<sub>4</sub>) – 8\*(15T<sub>1</sub>+18T<sub>2</sub>+20T<sub>3</sub>+24T<sub>4</sub>)

Z<sub>max</sub> 840T<sub>1</sub>+1056T<sub>2</sub>+1520T<sub>3</sub>+2208T<sub>4</sub>

### 3. Kısıtlar:

$$T_1+T_2+T_3+T_4 = 10 \text{ (Toplam Tezgah)}$$

$$12T_1+15T_2+24T_3+32T_4 \leq 250 \text{ (Toplam Alan)}$$

$$42.500T_1+55.000T_2+62.500T_3+75.000T_4 \leq 650.000 \text{ (Toplam Bütçe)}$$

$$T_1+T_2-T_4 \leq 0 \text{ (T1 ve T2 Kısıtı)}$$

$$960T_1+1200T_2+1680T_3+2400T_4 \geq 17.000 \text{ (Minimum Üretim)}$$

$$960T_1+1200T_2+1680T_3+2400T_4 \leq 20.000 \text{ (Hammadde Stok)}$$

$$T_1, T_2, T_3, T_4 \geq 0 \text{ ve Tamsayı (Pozitiflik Şartı)}$$

Soru 20: Yanda matematiksel modeli verilmiş olan doğrusal programlama sorusunu grafik yöntemle çözünüz. Sonuçları yorumlayınız.

$$Z_{\max} 13X_1 + 26X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 200$$

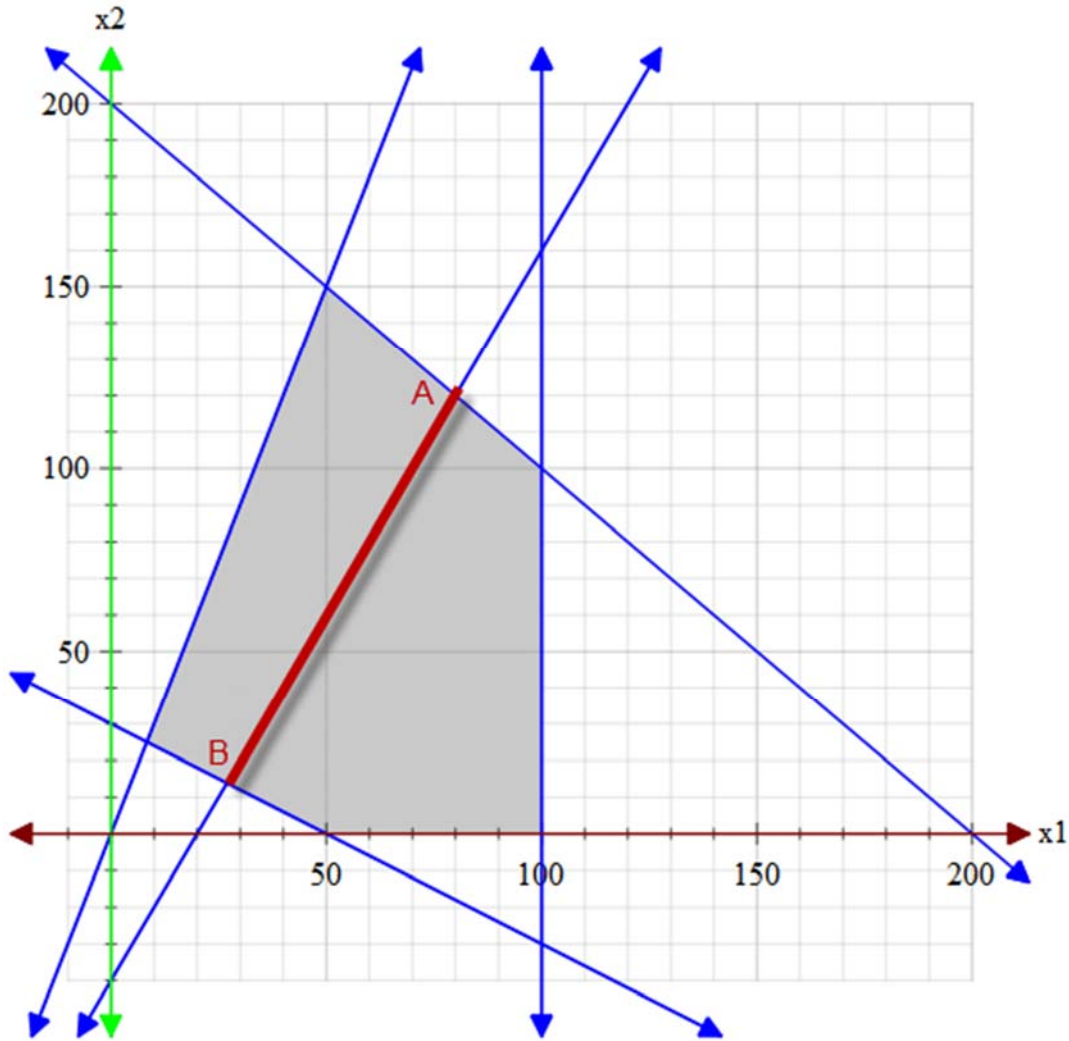
$$3X_1 + 5X_2 \geq 150$$

$$X_1 \leq 100$$

$$3X_1 - X_2 \geq 0$$

$$4X_1 - 2X_2 = 80$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



A noktası = (80, 20) değerleri amaç fonksiyonunda yerine konursa cevap 1560 bulunur.

B noktası = (350/13, 180/13) değerleri amaç fonksiyonunda yerine konursa cevap 710 bulunur.

Soru maksimizasyon olduğundan A noktası seçilmelidir.



Soru 21: Bir emlak şirketinin Bolu Dağlarında ve göl kıyısında 800 dönüm arazisi vardır. Şirket bu araziye müstakil, dubleks ve tripleks evler inşa etmek istemektedir. Ancak bölgenin özel konumundan dolayı bazı kısıtlamalara tabidir. Örneğin,

- Müstakil evler, toplam evlerin %50'sini oluşturmalıdır.
- Fosseptik çukuru sayısını sınırlandırmak için müstakil evler 2 dönüm, dubleks evler 3 dönüm ve tripleks evlerin ise 4 dönümlük arazi üzerine inşa edilmesi gerekmektedir.
- Her biri 1 dönüm olan eğlence ve dinlenme alanları 200 aile başına 1 adet olarak belirlenmiştir.
- Göldeki ekolojik dengeyi korumak amacıyla yeraltı suları ev ve bahçe kullanımına sunulmayacaktır.
- Emlak şirketi, sahip olduğu arazinin %15'ini cadde, yol ve diğer kullanım alanları için ayırmak zorundadır.

Farklı tipteki evlerin getirileri de farklıdır. Yapılan hesaplamalara göre müstakil evlerden \$10.000, dubleks evlerden \$12.000, tripleks evlerden ise \$15.000 kar edilecektir.

Göl suyu kullanılamayacağı için şehir merkezinden su getirilecektir. Projenin ekonomik olabilmesi için en az \$100.000'lık bir bağlantı şartı koyulmuştur. Ayrıca, günlük su harcaması 200.000 kg ile sınırlanmıştır. Aşağıdaki veriler hem bir ailenin ortalama su tüketimine ait varsayımları, hem de su getirme maliyetlerine aittir.

	Müstakil	Dubleks	Triplex	Dinlenme Alanı
Su getirme maliyeti (\$)	1000	1200	1400	800
Su tüketimi (kg)	400	600	840	450

Firmanın, kurallara uygun bir şekilde, hangi tip evden kaç adet üretmesi gerektiğine karar verecek doğrusal programlama modelini kurunuz.

$$Z_{max} = 10000x_1 + 12000x_2 + 15000x_3$$

$$\text{Arazi kullanımı} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 \leq 680 \quad (= 0,85 \times 800)$$

$$\text{Müstakil ev kısıtı} \quad \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 50 \rightarrow 0,5x_1 - 0,5x_2 - 0,5x_3 \geq 0$$

$$\text{Eğlence ve dinlenme alanları} \quad x_4 \geq \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{200} \rightarrow 200x_4 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 0$$

$$\text{Su getirme parası} \quad 1000x_1 + 1200x_2 + 1400x_3 + 800x_4 \geq 10000$$

$$\text{Su tüketimi} \quad 400x_1 + 600x_2 + 840x_3 + 450x_4 \leq 20000$$

$$\text{Pozitiflik şartı} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

**Soru 22:** Yanda matematiksel modeli verilmiş olan doğrusal programlama sorusunu grafik yöntemle çözünüz. Sonuçları yorumlayınız.

$$Z_{\max} 5X_1 + 4X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 400$$

$$5X_1 - 2X_2 \geq 0$$

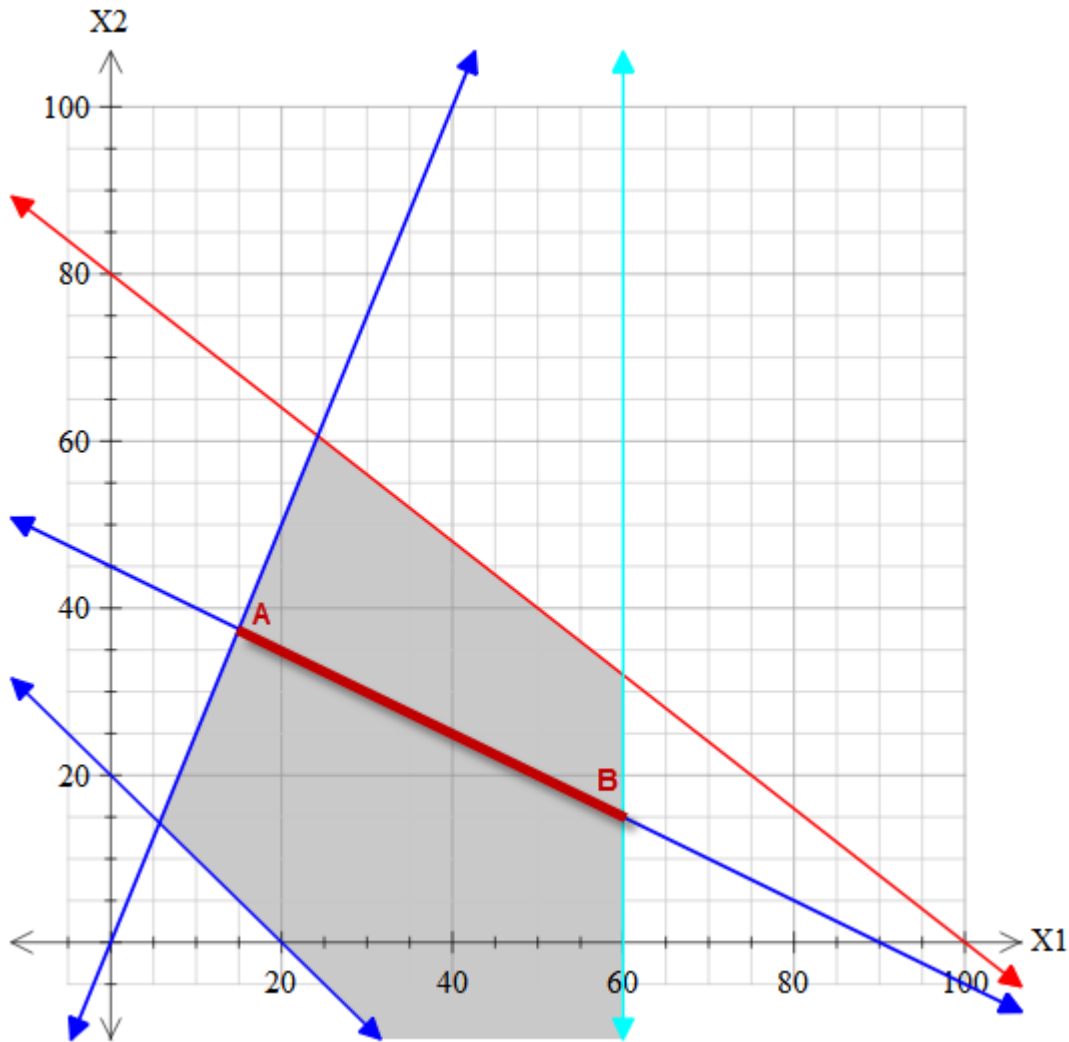
$$X_1 \leq 60$$

$$X_1 + 2X_2 = 90$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$X_1 + X_2 = 20$	$4X_1 + 5X_2 = 400$	$5X_1 - 2X_2 = 0$
$X_1=0, X_2=20 (0,20)$	$X_1=0, X_2=80 (0,80)$	$X_1=0, X_2=0 (0,0)$
$X_2=0, X_1=20 (20,0)$	$X_2=0, X_1=100 (100,0)$	$X_1=20, X_2=50 (20,50)$

$X_1 = 60$	$X_1 + 2X_2 = 90$
	$X_1=0, X_2=45 (0,45)$
	$X_2=0, X_1=90 (90,0)$



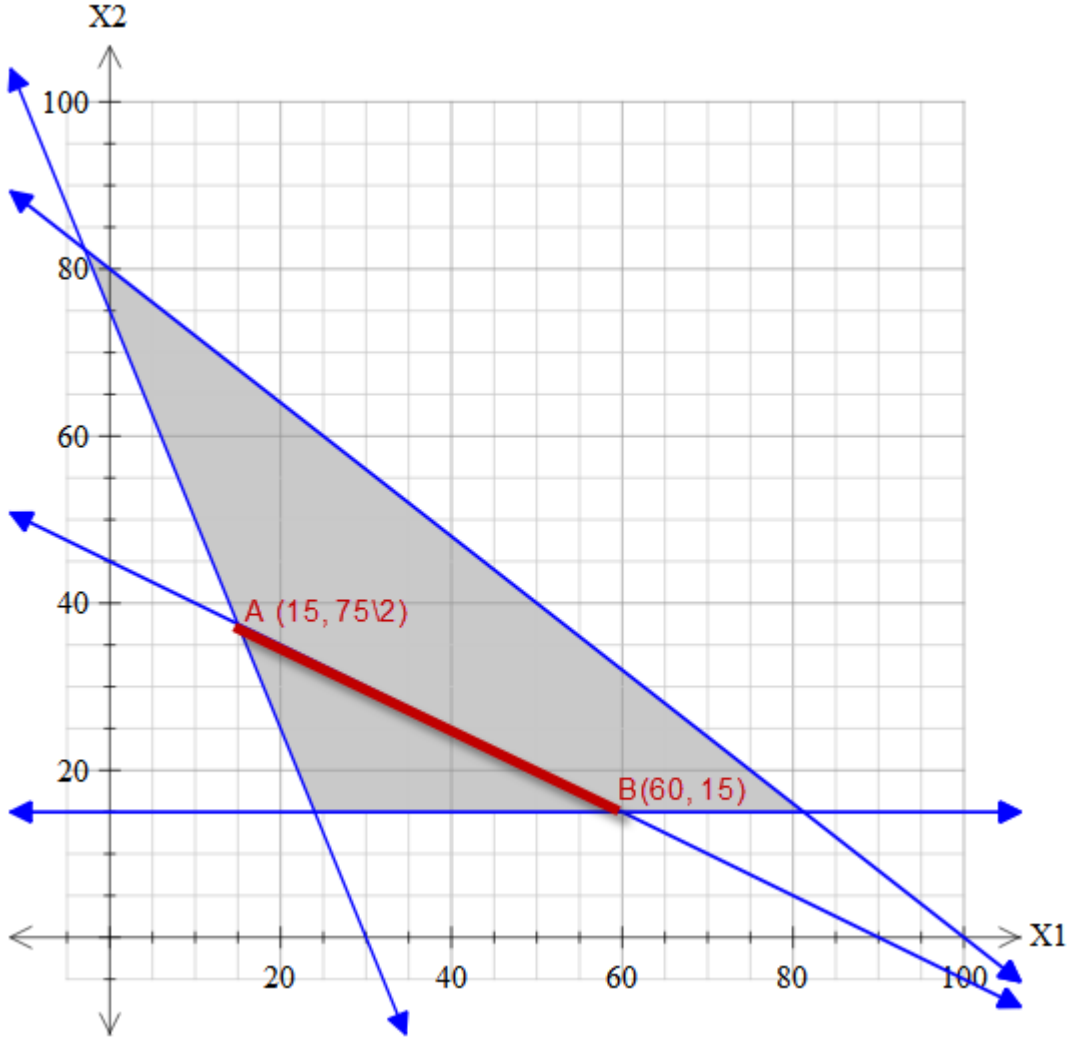
A Noktası  $\rightarrow (15, 75/2) \rightarrow 15 \cdot 5 + 75/2 \cdot 4 = 225$

B Noktası  $\rightarrow (60, 15) \rightarrow 60 \cdot 5 + 15 \cdot 4 = 360$  (Maksimum Nokta)

**Soru 23:**

$$\begin{aligned} Z_{max} \quad & 4X_1 + 6X_2 \\ 5X_1 + 2X_2 & \geq 150 \\ X_2 & \geq 15 \\ 4X_1 + 5X_2 & \leq 400 \\ 2X_1 + 4X_2 & = 180 \\ X_1, X_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Yanda matematiksel modeli verilmiş olan doğrusal programlama sorusunu **grafik yöntem ile çözüp, yorumlayınız.**



A Noktası için çözüm 285 ve B Noktası için çözüm 330 olmaktadır.

**Soru 24:** Bir firma A, B ve C olmak üzere 3 farklı ürün üretmektedir. Bu ürünler üç farklı departmanda işlem görmektedir. Ürünlerin farklı departmanlarda ihtiyaç duydukları işgücü süreleri ve bu departmanların haftalık işgücü kapasiteleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Ayrıca her ürün farklı miktarda hammaddeye ihtiyaç duymaktadır. Ürünlerin gereksinim duyduğu hammadde miktarı ve bir haftada kullanılabilecek maksimum hammadde miktarı da tabloda verilmiştir.

	Ürün			Haftalık Kapasite
	A	B	C	
<b><i>İşgücü ihtiyacı</i></b>				
Departman 1 (saat)	3,5	4	2	120 saat
Departman 2 (saat)	-	2	2	100 saat
Departman 3 (saat)	4	1	-	80 saat
<b><i>Hammadde ihtiyacı</i></b>				
İhtiyaç duyulan hammadde miktarı (kg)	5,5	4,0	3,5	250 kg

Ürünlerin satış fiyatları sırasıyla 50 TL, 60 TL ve 65 TL'dir. Her bir ürün için katlanılan toplam maliyetler ise sırasıyla 41 TL, 40 TL ve 43 TL'dir.

Yönetim, üretim miktarlarını belirlerken pazar taleplerini göz önünde bulundurmaktadır. Buna göre haftada A, B ve C ürünlerinden toplamda en az 40 adet ürün üretilmelidir. Ayrıca, üretilen A miktarı, C'nin iki katı olmalıdır.

Bu kısıtlar altında işletmenin karını maksimize edecek üretim planını bulacak **doğrusal programlama modelini** yazınız **(35 Puan)**.

#### Karar değişkenleri

$x_1$ : üretilecek A miktarı

$x_2$ : üretilecek B miktarı

$x_3$ : üretilecek C miktarı

#### Amaç Fonksiyonu

$$Z_{max} = 50x_1 + 60x_2 + 65x_3 - (41x_1 + 40x_2 + 43x_3)$$

$$Z_{max} = 9x_1 + 20x_2 + 12x_3$$

#### Kısıtlar

$$3,5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120$$

Departman 1

$$2x_2 + 2x_3 \leq 100$$

Departman 2

$$4x_1 + x_2 \leq 80$$

Departman 3

$$5,5x_1 + 4x_2 + 3,5x_3 \leq 250$$

Hammadde

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 40$$

Minimum Üretim

$$x_1 - 2x_3 = 0$$

A C nin iki katı

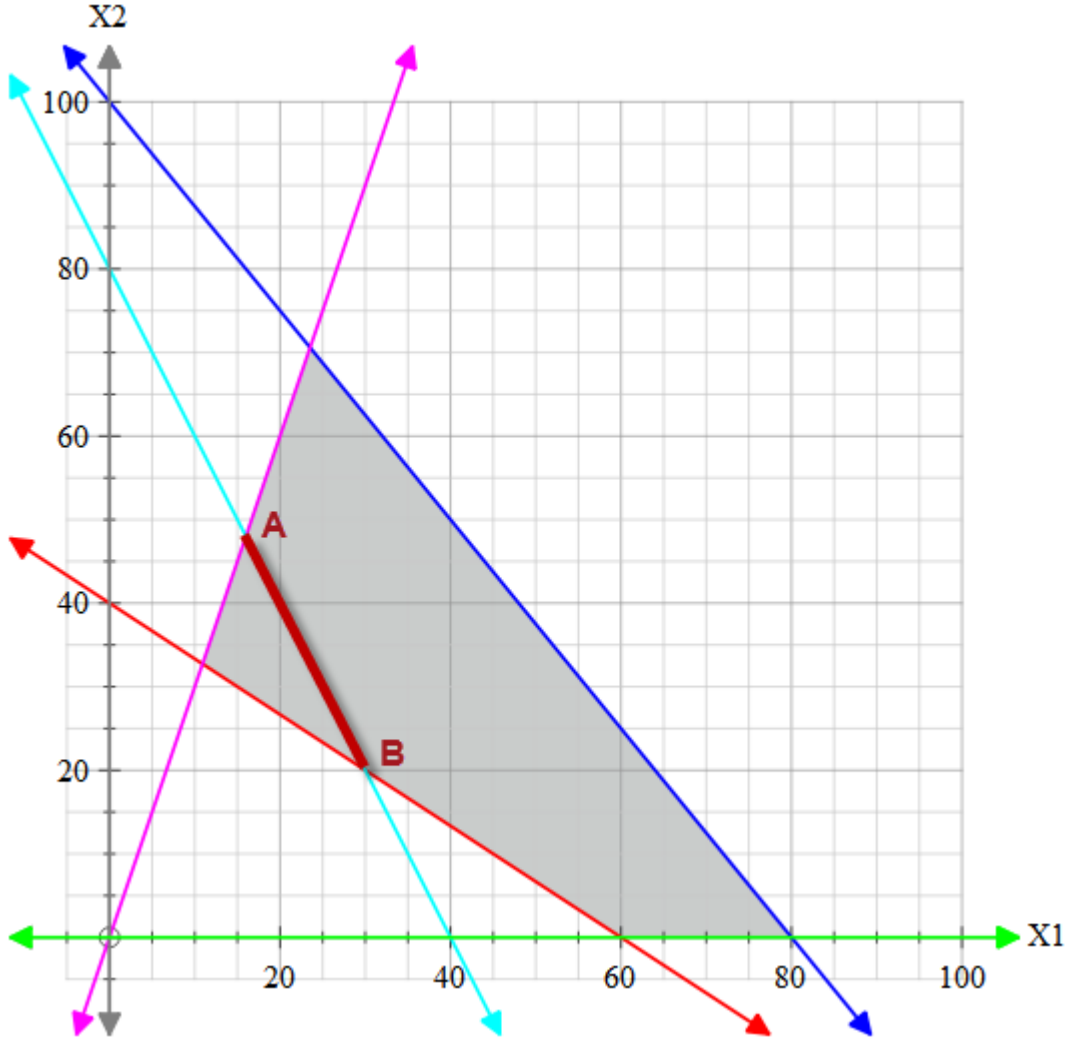
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Pozitiflik Şartı

**Soru 25:**

$$\begin{aligned}
Z_{max} \quad & 7X_1 + 5X_2 \\
5X_1 + 4X_2 & \leq 400 \\
2X_1 + 3X_2 & \geq 120 \\
3X_1 - X_2 & \geq 0 \\
2X_1 + X_2 & = 80 \\
X_1, X_2 & \geq 0
\end{aligned}$$

Yanda matematiksel modeli verilmiş olan doğrusal programlama sorusunu **grafik yöntem ile çözüp, yorumlayınız (20 Puan)**.



A ve B Koordinatlarının bulunması= 4+4 =

A Noktası için 3 ve 4. denklemler ortak çözüm	B Noktası için 2 ve 4. denklemler ortak çözüm
$ \begin{aligned} 3X_1 - X_2 &= 0 \\ 2X_1 + X_2 &= 80 \\ X_1 &= 16 \text{ ve } X_2 = 48 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 &\geq 120 \\ 2X_1 + X_2 &= 80 \\ X_1 &= 30 \text{ ve } X_2 = 20 \end{aligned} $
$Z_{max} = 7 * 16 + 5 * 48 = 352$	$Z_{max} = 7 * 30 + 5 * 20 = 310$

Daha yüksek değere sahip A noktası seçilmelidir.