1. Küme (Set) Teorisi

Küme, öğeler veya üyeler olarak adlandırılan sırasız bir nesne topluluğudur. Nesnelere kümenin elemanı veya üyesi denir. Kümeler genellikle A, B, X ve Z gibi büyük harflerle temsil edilir. a, b, c, x ve y gibi küçük harfler ise küme elemanlarını gösterir.

∈ işareti bir nesnenin bir kümeye üye olduğunu ifade eder. x, A kümesinin bir elemanıysa, x ∈ A biçiminde yazılır. Benzer şekilde a, b ∈ S ise a ve b nin S kümesinin elemanları olduğu anlamına gelir. Bir nesne bir kümenin elemanı olmadığını göstermek için ∉ işareti kullanılır. x∉A, x, A kümesine ait bir eleman olmadığını gösterir. Örneğin, S Türkiye'de şehirler kümesiyse, Sakarya S'nin bir öğesidir ve Girne ise S'nin bir öğesi değildir. Ç çift tamsayılar kümesiyse, o zaman 2∈Ç ve 3∉Ç dir.

Bir kümeyi tanımlamanın iki farklı yolu vardır. Birincisinde, küme elemanları virgülle ayrılarak { } parantez içerisinde $A = \{1,3,5,7,9\}$ şeklinde gösterilir. İkincisinde, küme elemanları metinsel olarak ifade edilmek istendiğinde $B = \{x|x\ çift\ tam\ sayıdır, x > 0\}$ biçiminde yazılır ve "B kümesi, x öyleki, x>0 olmak üzere çift sayılardan oluşan bir kümedir" şeklinde okunur.

Python'da Set Üyeliğini Kontrol Etme

Python'da bir kümeyi tanımlamanın yolu, liste yöntemi olarak bilinir. Bu, küme parantezleri arasında bir kümenin tüm öğelerini listelediğimiz yerdir. Örneğin, {a,b,c}, elemanları a, b ve c olan bir kümedir. Veri türleri bölümünde bahsedilen int (integer), float ve string'e ek olarak, küme parantezleri kullanılarak Python'da kümeler oluşturulabilir. Küme veri türleri sırasızdır ve yinelenen öğeleri yok sayar.

Örnek 1.

Aşağıdaki kod, 8 ve 1'in A={−2,0,1,4} kümesinin öğeleri olup olmadığını kontrol eder. 8∉A ve 1∈A olduğundan, kod False ve ardından True yazdırır.

```
A = {-2,0,1,4}
print(8 in A)
print(1 in A)
```

```
False
True
```

Python'da Bir Kümenin Elemanlarını Listeleme

Aşağıdaki kod, A={−2,0,3,5} kümesinin tüm öğelerini listeler.

Örnek 2 -

```python
A = {-2,0,3,5}
for x in A:
    print(x, "A kümesinin bir elemanıdır ")

```

```
0 A kümesinin bir elemanıdır
3 A kümesinin bir elemanıdır
5 A kümesinin bir elemanıdır
-2 A kümesinin bir elemanıdır
```

Örnek 3 - Gösterimler arasında geçiş yapma

Aşağıdaki kümeyi göz önünde alalım:

$\{x \in Z : -2 \leq x < 4\}$.

Bu, −2, x'ten küçük veya eşittir ve x, 4'ten küçük olacak şekilde tüm x tam sayılarının kümesidir. Liste yöntemi kullanılarak, bu küme şu şekilde yazılabilir:

$\{-2,-1,0,1,2,3\}$.

Örnekler

(a)'dan (f)'ye kadar olan bölümlerde küme oluşturucu notasyonu kullanılarak açıklanan her bir kümeyi, (A)'dan (F)'ye kadar olan bölümlerde liste yöntemi kullanılarak açıklanan aynı kümeyle eşleştirin.

$\{x \in Z : x^2 = 1\}$	$\{-1,0,1\}$
$\{x \in Z : x^3 = 1\}$	$\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$
$\{x \in Z : \lvert x \rvert \leq 2\}$	$\{1\}$
$\{x \in Z : x^2 < 4\}$	$\{\ldots,-3,-2,-1\}$
$\{x \in Z : x < \lvert x \rvert\}$	$\{-1,1\}$
$\{x \in Z : (x+1)^2 = x^2+2x+1\}$	$\{-2,-1,0,1,2\}$

Bir kümede her birini listeleyemeyeceğimiz kadar çok öğe olduğunda, öğeleri temsilen aşağıdaki örnekte olduğu gibi kümenin başında, sonunda veya her ikisinde genellikle sıralı noktalar (…) kullanılır.

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Örnek 4 - Python'da Oluşturucu Notasyonunun Ayarlanması

$\{x \in D: P(x)\}$ kümesi Python'da $\{for\ x\ in\ D\ if\ P(x)\}$ şeklinde ifade edilebilir. Örneğin, aşağıdaki kod, B kümesini $A = \{-2,0,1,4\}$ kümesinin pozitif öğeleri kümesi olarak tanımlar.

```
A = {-2,0,3,5}
B = {x for x in A if x > 0}
print(B)
```

```
{3, 5}
```

Özel sayı kümeleri

Z , $\{-2, -1,0,1,2, \ldots\}$, tamsayılar kümesi

$Z +$ veya $N, \{1,2,3, \ldots\}$, doğal sayılar veya pozitif tam sayılar kümesi

Q , $\{ab \mid\mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$, 23 biçimindeki rasyonel sayılar kümesi

R, gerçek sayılar kümesi

$R +$, pozitif reel sayılar kümesi

$C, \{a + ib | a \in R, b \in R, b \neq 0\}, 2 + 3i$ biçimindeki karmaşık sayılar kümesi.

Evrensel (Universal Set) Küme ve Boş Küme

Küme teorisinde tüm kümeler sabit uzunlukta evrensel küme olarak adlandırılan bir kümeye ait olduğu kabul edilir. Evrensel küme U notasyonu ile gösterilir. Verilen bir U evrensel kümesinde tanımlanan herhangi bir özellik, U evrensel kümesinin bir elemanı olamayabilir.

Örneğin: Küme oluşturucu notasyonu kullanılarak açıklanan aşağıdaki kümeyi göz önünde alalım:

$$\{x \in Z: x^2 = 2\}.$$

Bu notasyon, karesi 2'ye eşit olan tüm tam sayıların kümesidir. Ancak böyle bir tam sayı yoktur. Bu nedenle, onu tanımlamak için liste yöntemini kullanarak $\{\}$ sembolü kullanılır. Buna boş küme denir $\{\}$ işareti veya $\emptyset$ ile gösterilir. Boş kümenin elemanı yoktur. Ancak $\{\emptyset\}$ kümesi boş küme değildir; aksine, tek bir eleman içeren bir kümedir. $\{\emptyset\}$ kümesinde bulunan tek eleman boş kümedir. Boş küme diğer tüm kümelerin alt kümesi olarak göz önüne alınır. Bu tanıma uygun olarak aşağıdaki teorem sonucu elde edilir.

Teorem 1 Herhangi bir A kümesi için $\emptyset \subseteq A \subseteq U$ ifadesi yazılabilir.

Küme Eleman Sayısı (Cardinality)

Bir A kümesinin sonlu sayıda farklı eleman içerdiğini varsayalım. A'nın eleman sayısına A'nın kardinalitesi denir ve |A| notasyonu ile gösterilir. A sonsuz sayıda farklı eleman içeriyorsa, A'nın sonsuz kardinaliteye sahip olduğunu söylenir ve |A|=∞ biçiminde ifade edilir. Böylece |{0,1,2}|=3 ve |Z|=∞ olduğunu rahatça görülür. Ek olarak, |∅|=0 olduğuna dikkat edin. Python'da kümenin eleman sayısı len() fonksiyonu ile bulunur. **Not**: Python'da set() fonksiyonu küme oluşturmada kullanılır.

Örnek:

```
A = {2,3,5,8}
B = set()
C = {0}
print(len(A))
print(len(B))
print(len(C))
```

```
4
0
1
```

Küme Eşitliği

İki küme, ancak ve ancak aynı öğeleri içeriyorsa eşittir. Başka bir deyişle, A ve B eşit kümelerdir, ancak ve ancak

$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$

A ve B eşit kümeler olduğunda $A = B$ yazılır. A ve B eşit kümeler olmadığında ise $A \neq B$ yazılır.

{2,3,5} ve {5,2,3} kümeleri aynı öğeleri içerdiklerinden eşit kümelerdir. Bir kümenin elemanlarının sıralanma sırası önemli değildir. Ek olarak, öğelerin tekrarlanıp tekrarlanmaması da önemli değildir. Böylece {a, b, c} ve {b, b, a, c, b, a, c, c, c} kümeleri de eşit kümelerdir.

Alt kümeler

Bir A kümesi, B kümesinin bir alt kümesi olması için A'nın her elemanı B'nin birer elemanı olması durumunda gerçekleşir. Başka bir deyişle, A, ancak ve ancak şu durumda B'nin bir alt kümesidir.

$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$

Başka bir ifade ile ,A kümesinin bir elemanı aynı zamanda B kümesinin bir elemanı ise yani $x \in A$ ve $x \in B$ ise, bu durumda A kümesine B kümesinin bir alt kümesidir denir ve $A \subseteq B$ biçiminde gösterilir ve A kapsanır B diye okunur. A, B'nin bir alt kümesi olmadığı durumda ise $A \nsubseteq B$ biçiminde gösterilir.

A'nın B'nin bir alt kümesi olduğunu göstermek için, her $x \in A$ olduğunda, $x \in B$'nin de böyle olduğunu göstermeliyiz. A'nın B'nin bir alt kümesi olmadığını göstermek için, $x \in A$ ama $x \notin B$ olacak şekilde tek bir x bulmak gerekir

Örnek

$A = \{1,5\}$ ve $B = \{1,3,5,7,9\}$'e izin verirsek, o zaman $A \subseteq B$, çünkü A'nın her öğesi B'nin bir öğesidir, ancak $B \nsubseteq A$ değildir çünkü 3,7 ve 9 B'nin bir öğesidir ancak A'nın bir elemanı değildir.

Herhangi bir A kümesi için her zaman $\emptyset \subseteq A$ ve $A \subseteq A$'nın geçerli olduğuna dikkat edin. Herhangi bir A ve B kümesi için, eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise, $A = B$ olur.

Örnek 8 - Python'da Altkümeler

Python'da, bir A kümesinin bir B kümesinin alt kümesi olup olmadığını aşağıdaki yollardan biriyle kontrol edebiliriz:

```
A = {2,4,6,8,10,12}
B = {2,6,10}
print(A.issubset(B))
print(B <= A)
```

```
False
True
```

Kümenin Kuvveti

Bir A kümesi verildiğinde, A'nın tüm alt kümelerinin kümesine A'nın kuvvet kümesine denir. A'nın kuvvet kümesi $P(A)$ ile gösterilir. $P(A)$, elemanlarının tümü küme olan bir kümedir.

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ kümesinin kuvveti aşağıdaki biçimde yazılır.

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Boş küme, alt küme olarak yalnızca boş kümeye sahiptir. Böylece görüyoruz ki

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Bir güç setinin güç setini de alabiliriz. Örneğin, aşağıdakilere sahibiz:

$$P(\{1\})P(P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}, = P(\{\emptyset, \{1\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}.$$

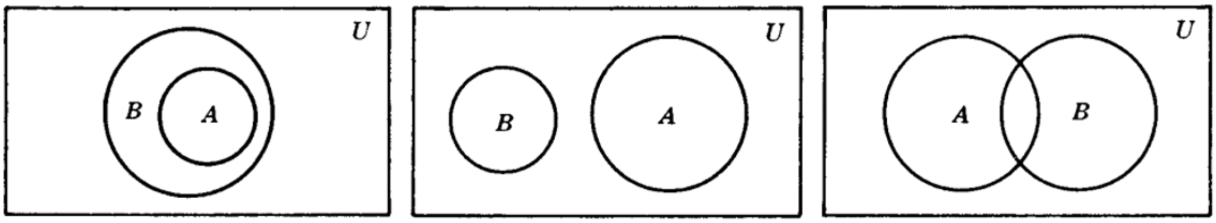
Küme kuvvetinin eleman sayısı (Cardinality) $A, |A| = n$ olacak şekilde sonlu bir küme ise, o zaman $|P(A)| = 2^n$ dir.

Küme İşlemleri

Kümeler üzerinde işlemler yaparak yeni kümeler elde edebiliriz. Küme işlemlerini gerçekleştirirken, tüm kümelerimizi bir evrensel kümenin alt kümeleri olarak düşünmek gerekir. Evrensel küme, incelenen tüm nesnelerin kümesi olarak göz önüne alınır ve U notasyonu ile gösterilir.

İngiliz matematikçi John Venn'in adını taşıyan Venn diyagramları kümeleri resimsel olarak göstermek için kullanılır. Venn diyagramlarında U evrensel kümesi dikdörtgen biçiminde, diğer kümeler ise dairesel biçimde gösterilir.

Eğer $A \subseteq B$ ise A kümesi B kümesinin içerisinde gösterilir. Eğer A kümesi B kümesinden ayrık ise bu durumda A *ve* B kümesi ayrı kümeler olarak gösterilir. Eğer A *ve* B farklı küme ise nesnelerin bazısı A kümesinde veya B kümesinde bulunabilir. Bu durum aşağıda verilen Venn şemasının (c) şıkkında ifade edilmektedir. Diğer durumlar aşağıdaki Venn diyagramlarında sırasıyla gösterilmiştir.



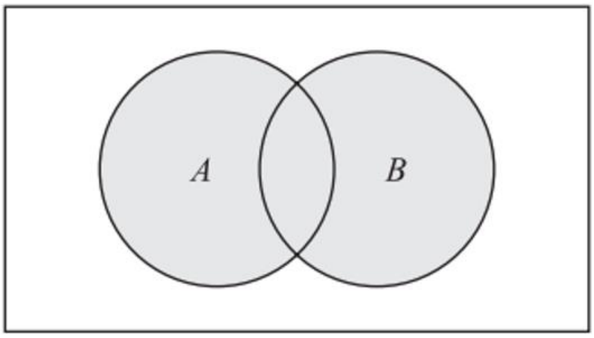
(a) (b) (c)

Birleşim İşlemi

A *ve* B kümelerinin birleşimi, A *veya* B veya her ikisinde bulunan ve $A \cup B$ ile gösterilen öğeleri içeren kümedir. Yani,

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}.$$

$A \cup B$ ‘nin Venn şeması olarak ifadesi aşağıda resimde verilmiştir.



Şekilden de görüldüğü gibi $A\ ve\ B$ kümelerinin her biri için $A \cup B = B \cup A$ dir.

Örnek 9

$$A = \{1,2,3,4\}, \qquad B = \{3,4,5,6,7\}, \qquad C = \{2,3,8,9\}.$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}, \quad A \cup C = \{1,2,3,4,8,9\}, \quad B \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8,9\},$$

Örnek 10 - Python'da Birleştirme

Python'da A ve B kümelerinin birleşimini $A.union(B)$ veya $A|\,B$ yollardan biriyle hesaplayabiliriz:

```
A = {-4,-6,2,5,7}
B = {-4, 0, 2,3}

print(A.union(B))
print(A | B)
```

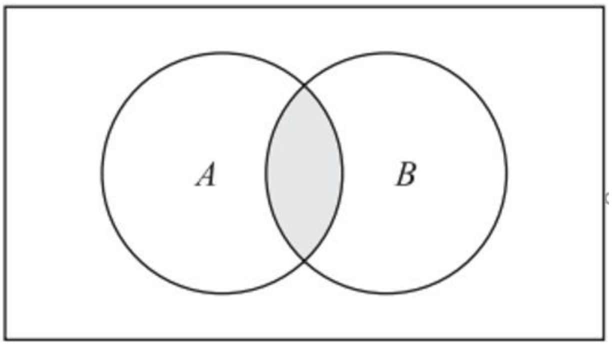
```
{0, 2, 3, 5, 7, -6, -4}
{0, 2, 3, 5, 7, -6, -4}
```

Kesişim İşlemi

A ve B kümelerinin kesişimi, A ve B'deki öğeleri içeren ve A∩B ile gösterilen ve küme elemanları hem A hem de B kümesine aittir. Matematiksel gösterim olarak,

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$

A ve B gibi iki kümenin kesişimi A ∩ B biçiminde gösterilir ve küme elemanları hem A hem de B kümesine aittir. Bu durumu gösteren Venn şeması aşağıdaki şekilde gölgeli olarak verilmiştir



$A\ ve\ B$ kümelerinin her biri için $A \cap B = B \cap A$ dir. $A \cap B = \emptyset$ ise, A ve B'nin ayrık olduğunu söyleriz. Başka bir deyişle, iki küme ancak ve ancak ortak hiçbir öğe içermiyorsa ayrıktır.

Örnek 11

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, \qquad C = \{2, 3, 8, 9\}.$$

$$A \cap B = \{3, 4\}, \qquad A \cap C = \{2, 3\}, \qquad B \cap C = \{3\}.$$

Örnek 12

U bir üniversitedeki öğrencilerin kümesi olsun ve E erkek öğrencileri, K de kız öğrencileri göstersin. U evrensel kümesi $E\ ve\ K$ ayrık kümelerinin birleşim kümesidir. Yani $U = E \cup K$ ve $E \cap K = \emptyset$ dir. Bu durum, U kümesindeki her öğrenci ya E veya K kümelerine aittir. Açıkça hem E hem de K kümesine ait olan öğrenci yoktur. Dolayısıyla E ve K kümeleri ayrık kümelerdir. Yani;

$$U = E \cup K\ ve\ E \cap K = \emptyset$$

Örnek 12 - Python'da Kesişim Kümesi

Python'da A ve B kümelerinin kesişim kümesi A. intersection(B) veya A & B olmak üzere iki yoldan biri ile hesaplanır.

```
A = {-4,-6,2,5,7}
B = {-4, 0, 2,3}

print(A.intersection(B))
print(A & B)
```

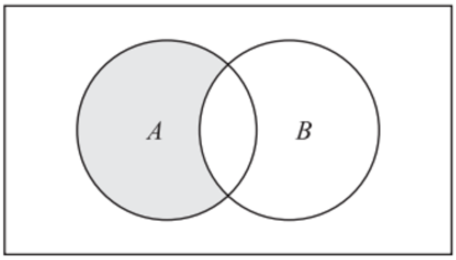
```
{2, -4}
{2, -4}
```

Fark İşlemi

A ve B kümelerinin farkı, A'da olup B'de olmayan öğeleri içeren kümedir. Bu küme elemanları $A \setminus B$ ile ya da $A - B$ ile gösterilir. $A \setminus B$ notasyon olarak,

$$A \setminus B = \{x \in U: x \in A \wedge x \notin B\}$$

biçiminde ve Venn Şemasına olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.



Herhangi bir $A \, ve \, B$ kümesi için, $A = B$ ise $A \setminus B = \emptyset$ ve $B \setminus A = \emptyset$ olduğuna dikkat edin. Böylece, $A = B$ olduğunda, $A \setminus B = B \setminus A$. Ancak, eğer $A \neq B$ ise, o zaman $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Örnek 13

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $B = \{1,3,5,7,9\}$ izin verirsek, o zaman $A \setminus B = \{2,4,6\}$ ve $B \setminus A = \{7,9\}$.

Örnek

$U = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bir evrensel kümesi olsun.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 8, 9\}$, $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$

$A \setminus B = \{1, 2\}$, $A \setminus C = \{1, 4\}$, $B \setminus C = \{4, 5, 6, 7\}$, $A \setminus E = \{1, 3\}$,

$B \setminus A = \{5, 6, 7\}$, $C \setminus A = \{8, 9\}$, $C \setminus B = \{2, 8, 9\}$, $E \setminus A = \{6, 8, 10, 12, \ldots\}$.

Örnek 14 - Python'da Fark Alma

Python'da A ve B kümelerinin farkını $A.difference(B)$ ya da $A - B$ yollarından biriyle hesaplanır.

```
A = {-4,-6,2,5,7}
B = {-4, 0, 2,3}

print(A.difference(B))
print(B - A)
```

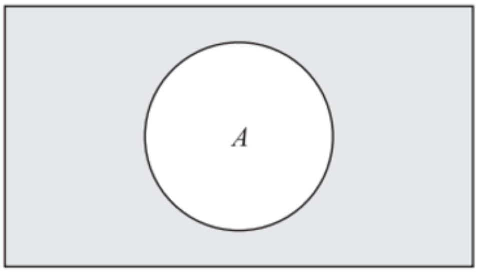
```
{-6, 5, 7}
{0, 3}
```

Kümenin Tamamlayıcısı (Tümleyeni)

Bir A kümesinin tümleyeni, U evrensel kümesindeki A kümesinin elemanları olmayan ve A^C ile gösterilen tüm elemanların kümesidir. Notasyon olarak;

$$A^C = \{x \in U : x \notin A\}$$

biçiminde gösterilir. Bu gösterim, A kümesine ait olmayıp, ancak U evrensel kümesine ait olan elemanlar kümesini ifade eder. Bu durum aşağıdaki Venn şemasında gölgelenmiş olarak verilmiştir.



Herhangi bir A kümesi için,

$A^C = U \setminus A$ dır.

Örnek:

$U = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bir evrensel kümesi olsun.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 8, 9\}$, $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$

Burada E çift tamsayılar kümesidir.

$A^C = \{5, 6, 7, \ldots\}$, $B^C = \{1, 2, 8, 9, 10, \ldots\}$, $E^C = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Yani E^C pozitif tek sayılar kümesini oluşturur.

Örnek 15

Evrensel kümemizin, tüm ondalık basamakların kümesi olan $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ olduğunu varsayalım. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $B = \{1,3,5,7,9\}$ izin verirsek, o zaman

$$A^C = \{0,7,8,9\}$$

ve

$$B^C = \{0,2,4,6,8\}$$

Örnek 16

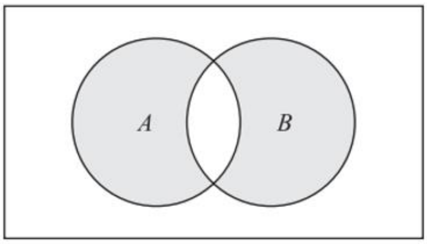
Evrensel kümemizin Z olduğunu varsayalım. E'nin tüm çift tam sayıların kümesi olmasına izin verirsek, bu durumda E^C tüm tek tam sayıların kümesini oluşturur.

Simetrik Fark

$A\ ve\ B$ arasındaki fark $A \oplus B$ biçiminde gösterilir. Bu gösterimde eleman A kümesine ya da B kümesine ait olduğunu gösterir. Ancak aynı anda $A\ ve\ B$ kümesine ait olmayı göstermez. Yani;

$A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ veya $A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Bu durum Venn şeması aşağıda gölgelenmiş olarak verilmiştir.



$U = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bir evrensel kümesi olsun.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 8, 9\}$, $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$

$A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$, $B \oplus C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A \oplus C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C) = \{1, 4, 8, 9\}$, $A \oplus E = \{1, 3, 6, 8, 10, \ldots\}$

Temel Çarpımlar (Fundamental Products)

n adet farklı küme olsun. Bu durumda:

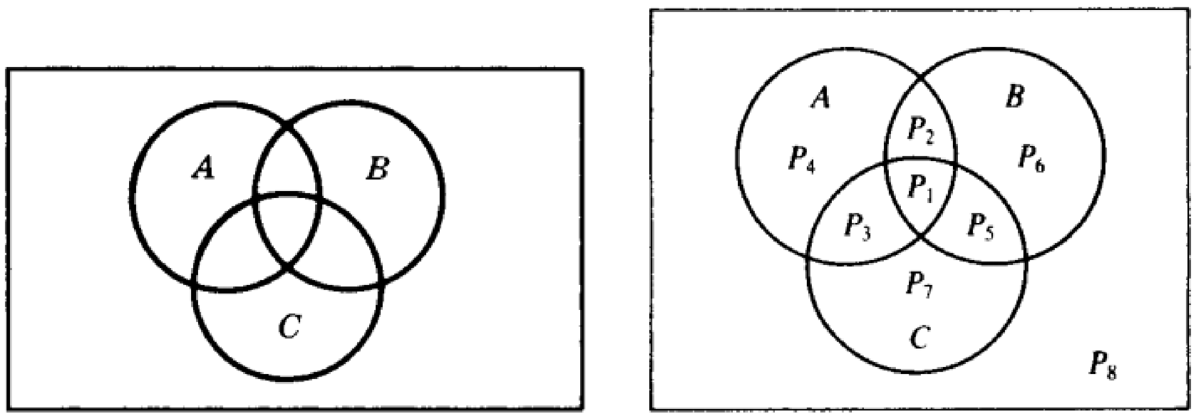
(i) $m = 2^n$ adet fundamental çarpım söz konusudur.

(ii) Herhangi iki böyle fundamental çarpım ayrık kümelerdir.

(iii) Evrensel küme tüm fundamental çarpımların birleşimidir.

Böylece, U evrensel kümesi fundamental çarpımların ayrık birleşimidir. Bu şematik olarak aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

Örnek: Aşağıdaki şekil A, B, C üç kümenin Venn diyagramı gösterilmiştir. Bu üç kümenin fundamental çarpım $m = 2^3 = 8$ çıkmaktadır.



(a) (b)

$$P_1 = A \cap B \cap C, \quad P_3 = A \cap B^C \cap C, \quad P_5 = A^C \cap B \cap C, \quad P_7 = A^C \cap B^C \cap C,$$
$$P_2 = A \cap B \cap C^C, \quad P_4 = A \cap B^C \cap C^C, \quad P_6 = A^C \cap B \cap C^C, \quad P_8 = A^C \cap B^C \cap C^C.$$

Yukarıdaki şekilde sekiz fundamental çarpım ve sekiz ayrık bölge Venn şemasında A,B ve C kümeleri için gösterilmiştir.

Sınırlı Kümeler ve Sayma Prensibi

Kümeler sınırlı ve sınırsız olabilir. Bir S kümesi eğer boş küme ya da eğer S kümesi m element ihtiva ediyorsa S kümesi sınırlı bir kümedir denir. Aksi durumda S kümesi sınırsızdır denir.

Örneğin:

İngiliz alfabesinden oluşan A kümesi ile haftanın günlerinden oluşan G kümesi sınırlı kümelerdir. Özellikle A kümesi 26 eleman, G kümesi 7 eleman içermektedir.

E kümesinin pozitif çift sayılar kümesi olsun. Ve I kümesi birim aralıkta olan bir küme olsun. Bu durumda hem E hem de I kümesi sınırsız bir kümedir.

$$E = \{2,4,6,\ldots\ldots\} \text{ ve } I = [0,1] = \{x|0 \leq x \leq 1\}$$

Bir S kümesi sınırlı bir kümedir eğer S kümesinin elemanları bir sıra (dizi) olarak düzenlenebilirse, bu durumda S kümesine sayılabilir kümedir, aksi takdirde S sayılamaz kümedir. Yukarıdaki E kümesi sayılabilir bir küme, oysa I kümesi sayılamaz bir kümedir.

Sınırlı Kümelerde Sayma İşlemi

$n(S)$ veya $|S|$ notasyonları S kümesindeki eleman sayılarını gösterir. Böylece $n(A)$ = 26, burada A İngiliz alfabesinden oluşan bir kümedir ve $n(G)$ = 7, burada G, haftanın günleridir. Ayrıca $n(\emptyset) = 0$ dır. Çünkü boş kümenin elemanı yoktur. Aşağıdaki yardımcı teoremleri göz önüne alalım:

Yardımcı Teorem 1: A ve B sınırlı ayrık kümler olduğunu farz edelim. Bu durumda $A \cup B$ sınırlı ve

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ dır.

Yardımcı Teorem 2: S kümesi, sınırlı $A\ ve\ B$ kümelerinin bir ayrık birleşim kümesi olduğunu farz edelim. Bu durumda S sınırlı ve

$n(S) = n(A) + n(B)$'dir.

Yardımcı Teorem 3: A ve B birer sınırlı/sonlu küme olsun. Bu durumda $n(A\backslash B) = n(A) - n(A \cap B)$'dir.

Örneğin: Bir sanat (art) sınıfı 25 öğrencisi vardır ve bu öğrencilerin 10'u B sınıfından biyoloji dersi almaktadır. Bu durumda A sınıfında olup ta B sınıfından biyoloji dersi almayan öğrencilerin sayısı;

$n(A\backslash B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 10 = 15$ dir.

Verilen herhangi bir A kümesinde, U evrensel kümesi A kümesi ile A kümesinin tümleyeninin A^C birleşiminden oluşur. Buna göre Yardımcı Teorem 1 aşağıdaki sonucu verir.

A kümesi, U evrensel kümesinin bir alt kümesidir. Bu durumda

$n(A^C) = n(U) - n(A)$ dir.

Örneğin: 30 öğrencili U sınıfının 18 öğrenicisi full-time öğrencidir. Bu durumda U sınıfında 30−18 = 12 part-time öğrenci var demektir.

Inclusion-Exclusion Prensibi

Ayrık küme olmadığı zaman $n(A \cup B)$ bağıntısı için Inclusion–Exclusion prensibi olarak adlandırılan bir formül vardır. Yani;

Inclusion–Exclusion prensibi: $A\ ve\ B$ kümelerinin sınırlı kümeler olduğunu kabul edelim. Bu durumda $A \cup B\ ve\ A \cap B$ sınırlı kümelerdir ve:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Yani bu formülde birleşim kümesinden oluşan iki kez eklemeyi n(A ∩ B) bir kez çıkartarak eşitlemiş oluyoruz.

Bu formül üç küme içinde yazılabilir. $A, B\ ve\ C$ sınırlı kümeler olmak üzere, $A \cup B \cup C$ için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Örnek:

A kümesi 30 öğrencinin olduğu ve matematik dersini alan küme olsun. B kümesi ise 35 öğrencinin olduğu İngilizce dersini alan küme olsun. Bu iki dersi alan öğrenci sayısı 20'dir.

a) Sadece matematik dersini alan öğrenci sayısı
b) Sadece İngilizce dersini alan öğrenci sayısı
c) Matematik veya İngilizce dersini alan öğrenci sayısı (ya da her iki dersi alan öğrenci sayısı)
d) Sadece bir kümede yer alan öğrenci sayısı

Çözüm:

a) $A \backslash n(A \cap B) = 30 - 20 = 10$
b) $B \backslash n(A \cap B) = 35 - 20 = 15$
c) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 35 - 20 = 45$
d) $A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = 45 - 20 = 25$