Gelişmiş Sayma Teknikler, Özyineleme

GİRİŞ

Bu bölümde daha sofistike sayma teknikleri ve problemleri ele alınacaktır. Bu problemler; tekrarlı kombinasyonlar, sıralı ve sırasız bölümler, Dahil Etme-Hariç Tutma İlkesi.

TEKRARLI KOMBİNASYONLAR

Bir fırının sadece elma (a), muz (b), havuç (c) ve hurma (d) olmak üzere M = 4 çeşit kurabiye yaptığını düşünelim. Bir kişi bu kurabiyelerden r = 8 tane satın almak istiyor. Bu 8 adet kurabiyenin satın alınmasının kaç farklı yolu vardır?

Siparişin sayılmadığına dikkat edin. Bu, tekrarlı kombinasyonlara bir örnektir. Özellikle, her kombinasyon önce a'lar, sonra b'ler, sonra c'ler ve son olarak d'ler ile listelenebilir. Bu tür dört kombinasyon şöyledir:

$r_1 = aa, \text{bb, cc, dd}$ $\quad$ $r_2 = aaaa, \text{c, ddd}$ $\quad$ $r_3 = bbbb, \text{c, ddd}$ $\quad$ $r_4 = aaaaa, \text{ddd}$

Bu tür kombinasyonların m sayısını saymak kolay değildir. Yukarıdaki kombinasyonları “0” ve “1” gibi yalnızca iki sembol kullanarak kodlamak istediğimizi varsayalım. Bu işlem aşağıdaki şekilde yapılabilir:

0'ın bir kurabiyeyi belirtmesine ve 1'in bir kurabiye türünden diğerine, bir değişikliği göstermesine izin versin. Sonra her kombinasyon her kurabiye için bir tane olmak üzere r = 8 tane “0” ve M - 1 = 3 tane “1” gerektirir. Buradaki “1” lerden birincisi a'dan b'ye, ikincisi b'den c'ye ve üçüncüsü c'den d'ye değişimi gösterir. Dolayısıyla, yukarıdaki dört kombinasyon aşağıdaki gibi kodlanır:

$r_1 = 00100100100$ $\quad$ $r_2 = 00001101000$ $\quad$ $r_3 = 10000101000$ $\quad$ $r_4 = 00000111000$

Bu "kod sözcüklerinin" m sayısını saymak kolaydır. Her kod sözcüğü, R + M - 1 = 11 basamak içerir; burada r = 8, tane 0'dır ve dolayısıyla M - 1 = 3, tane 1'dir. Buna göre,

$$m = C(11,8) = C(11,3) = \frac{11.10.9}{3.2.1} = 165$$

Benzer bir argüman bize aşağıdaki teoremi verir.

Teorem 6.1: M tür nesneler olduğunu varsayalım. O zaman r adet bu tür nesnelerin kombinasyonlarının sayısı

$$C(r + M - 1, r) = C(r + M - 1, M - 1)$$

ÖRNEK: x + y + z = 18'in denklemini sağlayan negatif olmayan tam sayı çözümlerinin m sayısını bulunuz.

Her çözümü, örneğin x = 3, y = 7, z = 8 olacak şekilde 3 a’dan 7 b'den ve 8 c'den oluşan ve toplamı; r = 18 eden nesnelerinin bir kombinasyonu olarak görebiliriz. Burada M = 3 çeşit nesne vardır; a'lar, b'ler ve c'ler. Teorem 6.1 ile,

Not: Burada x, y, ve z’ yi önceki örnekteki kurabiyeler olarak düşününüz

$$C(r+M-1,r)=C(r+M-1,M-1)=C(20,2)=190.$$

SIRALI VE SIRASIZ BÖLÜMLEME

Bir setin/kümenin 7 öğeye sahip olduğunu varsayalım. S'nin sıralı bölümlerinin m sayısını, üç hücre örneğin [A1, A2, A3] için bulmak istiyoruz. Dolayısıyla bu üç hücre sırasıyla 2, 3 ve 2 eleman içersin.

S'nin 7 elementi olduğundan, A1 için ilk iki elementi seçmenin C (7, 2) yolu vardır. Bunu takiben, A2 için 3 elementi seçmenin C (5, 3) yolu vardır. Son olarak, A3 için 2 öğeyi (veya A3 hücresini oluşturan son 2 öğeyi) seçmenin C (2, 2) yolu vardır. Böylece aranan m değeri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$m=C(7,2).C(5,3).C(2,2)=\binom{7}{2}.\binom{5}{3}.\binom{2}{2}=21.10.1=210.$$

İfade aşağıdaki gibi tekrar düzenlenebilir:

$$m=\binom{7}{2}.\binom{5}{3}.\binom{2}{2}=\frac{7!}{2!.5!}.\frac{5!}{3!.2!}.\frac{2!}{2!.0!}=\frac{7!}{2!.3!.2!}$$

Bu denkleme dikkat edilirse ilkinden sonraki her pay, önceki faktörün paydasındaki bir terim tarafından iptal edilmiştir. Bu işlemin genel olarak doğru olduğu gösterilebilir. Yani:

Teorem 6.2: n elemanlı bir S kümesinin r hücrelerine sıralı bölümlerinin m sayısı [A1, A2,. . . , Ar]'nin her biri için $n\ (A_i)\ =\ n_i$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem-2. n elemanlı bir S kümesinin [A1, A2,…,Ar] hücrelerine n(Ai)=ni olmak üzere sıralı bölümlerinin sayısı

$$m=\frac{n!}{n_1!.n_2!....n_r!}$$

olarak elde edilebilir.

Sırasız Bölümleme

Bir S kümesinin r adet hücresi [A1, A2,. . . , Ar] olduğunu varsayalım. Burada hücreler sırasızdır. Bu tür sırasız bölümlerin sayısı m yi, her $k!$ e bölerek sıralı bölümlerin m' sayısından elde edilir. Burada k aynı sayıda elemana sahip hücrelerin sayısıdır.

ÖRNEK 10 öğrenciyi dört takıma [T1, T2, T3, T4] ayırmanın yollarının m sayısını bulunuz. Öyle ki; iki takım 3 öğrenci ve iki takım 2 öğrenciden oluşmaktadır.

Teorem-2. 'ye göre,

$$m' = 10! / (3!\ 3!\ 2!\ 2!) = 25200$$

bu kadar sıralı bölümler vardır.

Takımlar sırasız bir bölüm oluşturduğundan, m' yi 2' ye böleriz! Her biri 3 elemanlı ve 2'li iki hücre nedeniyle! Her biri 2 öğeli iki hücre nedeniyle. Böylece

$$m = 25200 / (2!\ 2!) = 6300.$$

Örnek:

a. Bir $S = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesini 2 hücreli, eleman sayıları 2 olacak şekilde sıralı ve sırasız bölümlerini elde ederek sayılarını bulunuz.

b. Bir $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesini 2 hücreli, eleman sayıları 2 ve 3 olacak şekilde sıralı ve sırasız bölümlerini elde ederek sayılarını bulunuz.

Cevap.

$$\begin{array}{ll} a.\,[\{1,2\},\{3,4\}], & [\{3,4\},\{1,2\}] \\ [\{1,3\},\{2,4\}], & [\{2,4\},\{1,3\}] \\ [\{1,4\},\{2,3\}], & [\{2,3\},\{1,4\}] \end{array}$$

Yukarıdan gözleneceği gibi sıralı bölümlerin sayısı 6 ve sırasız olanların sayısı 3 olarak bulunur. Diğer bir deyişle sıralı bölümlerin sayısı $\frac{4!}{2!.2!} = 6$ olarak bulunurken sırasız olanların sayısı $\frac{4!}{2!.2!.2!} = 3$ olarak elde edilir.

$$\begin{array}{ll} b.\,[\{1,2\},\{3,4,5\}], & [\{2,4\},\{1,3,5\}], \\ [\{1,3\},\{2,4,5\}], & [\{2,5\},\{1,3,4\}], \\ [\{1,4\},\{2,3,5\}], & [\{3,4\},\{1,2,5\}], \\ [\{1,5\},\{2,3,4\}], & [\{3,5\},\{1,2,4\}], \\ [\{2,3\},\{1,4,5\}], & [\{4,5\},\{1,2,3\}], \end{array}$$

Yukarıdan gözleneceği gibi sıralı ve sırası bölümlerin sayısı aynıdır Bu değerde 10 olarak elde edilir. Diğer bir deyişle sıralı ve sırasız bölümlerin sayısı $\frac{5!}{3!.2!} = 10$ olarak bulunur.

Örnek:

9 öğrenci üç takıma her takım sırasıyla 4, 3 ve 2 öğrenci içerecek şekilde kaç farklı yolla bölünebilir?

Cevap.

Yöntem 1.

$$\frac{9!}{4!.3!.2!} = 1260$$

Yöntem 2.

$$\binom{9}{4}.\binom{5}{3}.\binom{2}{2} = 126.10 = 1260.$$

Örnek:

12 öğrenci her grup 3 öğrenci içerecek şekilde 4 gruba (A1, A2, A3, A4) bölünmek isteniyor. Bu gruplar kaç farklı yolla bölünebilir?

Cevap.

Yöntem 1.

Bu yöntemde sırasız bölümlerin hesaplanması gereklidir. Sırasız bölümlerin hesabı için sıralı bölümlerin hesaplandıktan sonra sonuç değerin 4!= 24'e bölünmesi gerekir:

$$\frac{12!}{3!.3!.3!.3!.4!} = 15400.$$

Yöntem 2.

Önce A bir öğrenciyi tanımlarsa diğer iki öğrenciyi 1. Bölüm için $\binom{11}{2}$ farklı şekilde seçebiliriz. Aynı şekilde B diğer grup için için 1. Bölümde olmayacak şekilde bir öğrenciyi tanımlarsa 2. Bölüm için diğer iki öğrenciyi $\binom{8}{2}$ farklı şekilde seçebiliriz ve sonuç olarak C de 2 grupta olmayacak şekilde 3. Bölüm için bir öğrenci olarak seçilirse diğer iki öğrenciyi $\binom{5}{2}$ farklı şekilde seçebiliriz. Diğer 3 öğrenci son bölümü oluşturacağından öğrencileri bölmek için $\binom{11}{2}.\binom{8}{2}.\binom{5}{2} = 15400$ farklı yol hesap edilebilir.

Örnek Uzayı ve Olaylar

Verilen bir deneyin olası tüm çıktılarının kümesi örnek uzayı olarak adlandırılır ve S ile gösterilir. S kümesindeki belirli bir eleman ise **örnek nokta** olarak isimlendirilir.

Olay ise (A ile gösterilir) çıktıların bir kümesini ya da başka bir ifade ile örnek uzayı olan S kümesinin bir alt kümesidir. $a \in S$ olmak üzere tek bir noktadan oluşan küme $\{a\}$ temel olay (elementary event) olarak adlandırılır. Ek olarak Φ ve S kümesi ayrıca birer olaydır. Φ ye bazen mümkün olmayan olay veya boş (null) olay da denir.

Olay bir küme olmasına rağmen, çeşitli küme işlemleri kullanıp olayları birleştirerek yeni olaylar oluşturabiliriz.

i) $A \cup B$ bir olaydır ve A olayı veya B olayından biri oluştuğu durumda gerçekleşir.

ii) $A \cap B$ bir olaydır ve A olayı ve B olayı oluştuğu durumda gerçekleşir.

iii) A^C, A nın koplementi, bir olaydır ve A olayının gerçekleşmediği durumda meydana gelir.

Eğer $A \cap B = \Phi$ ise, yani bu iki küme ayrık kümeler ise bu iki küme karşılıklı olarak ayrıdır denir. Başka bir ifade ile bu iki olay eşzamanlı olarak oluşmaz.

ÖRNEK:

Bir bozuk para üç kez havaya atılıyor ve gelen sonuçlar (H=tura) ve (T=yazı) gözlemleniyor. Buna göre örnek uzay kümesi aşağıdaki gibi oluşur.

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

Şimdide örnek olayların, küme örneklerini yazalım.

A olayı; artarda iki ya da üç kez gelen (H=tura) sayısını, kümesini

B olayı ise; üç atışta da aynı gelen olayların sayısını, kümesini göstersin. Buna göre A ve B küme elemanlarını yazalım.

$$A = \{HHH, HHT, THH\} \quad \text{and} \quad B = \{HHH, TTT\}$$

$A \cap B$ kümesi ise $\{HHH\}$, sadece H=tura lardan oluşan bir elementary olaydır.

Beş kez H=tura gelen olay kümesi ise Φ dir. Böyle bir olayın gerçekleşme ihtimali yoktur.

ÖRNEK-2

Bir tavla zarı havaya atılıyor ve zarın üst tarafına gelen noktaların (dots) sayısının oluşturmuş olduğu örnek uzay kümesini yazalım.

Örnek uzayı S={1,2,3,4,5,6} sayılarından oluşacaktır. A olayının çift sayı gelen olaylar kümesi, B olayının tek sayı gelen olaylar kümesi ve C kümesinin asal sayı olan sayılar kümesi olduğunu kabul edelim. Bu durumda A, B ve C kümeleri aşağıdaki gibi oluşur.

$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi

$B \cap C = \{3, 5\}$ kümesinin elemanları

$$C^c = \{1, 4, 6\}$$

A ve B karşılıklı ayrık kümelerdir. : $A \cap B = \Phi$

ÖRNEK:

İki zarı havaya atın ve zarların üzerinde gelen iki sayıyı kaydedin. Buna göre örnek uzay kümesini oluşturunuz.

Her bir zarda muhtemel altı numara vardır 1, 2,..., 6. Bundan dolayı örnek olay sayısı $n(S) = 36$. Bu örnek uzay kümesi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Satırlar birinci zarı, sütunlar da ikinci zarı gösterir. Bu verilere göre:

A olayı, iki zar üzerinde gelen sayıların toplamının 6 olan bir olay olsun. B olayı da zarlardan birinde gelen en büyük sayının 4 olduğu bir olayı ifade etsin. Buna göre A ve B olaylar kümesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

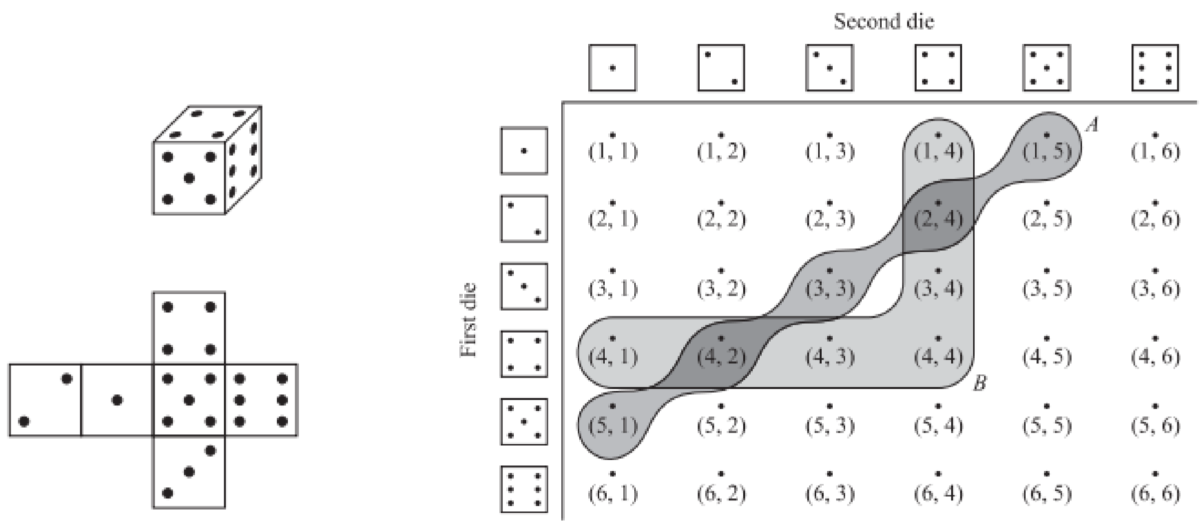
$$B = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)\}$$

Bu iki olayın kesişim kümesi.

$$A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$$

Bu iki olayın birleşim kümesi

$$A \cup B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (1, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 1)\}$$

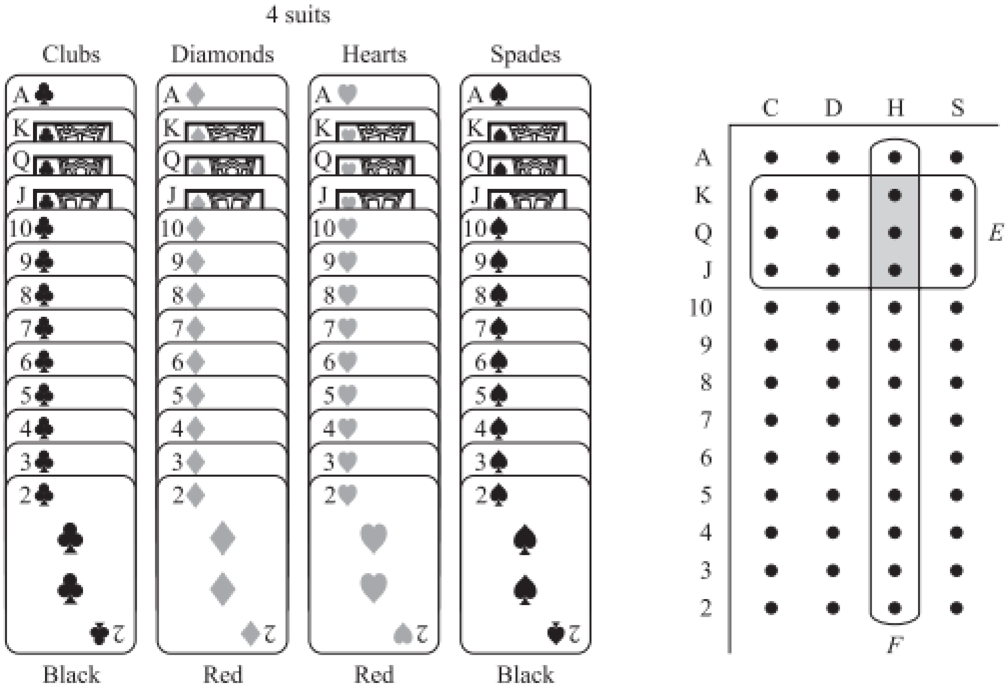


(*a*) (*b*)

OYUN KARTLARI

52 adetten oluşan bir iskambil oyunu kağıtlarından bir kart çekilmesi neticesinde meydana gelen olaylar kümesi aşağıda resmedilmiştir.

Örnek uzayı, C, D, H ve S olmak üzere dört takımdan oluşmaktadır. Her bir takım 13 kart içermekte ve kartlar üzerindeki numaralar 2 den 10 a kadar numaralandırılmıştır. Diğer dört kart ise jack (J), queen (Q), king (K), ve ace (A) olarak adlandırılmaktadır. Bu kartlardan hearts (H) ve diamonds (D) kırmızı, ve spades (S) and clubs (C) siyah kartlardır. Aşağıdaki şekil bu kartlar kümesinin (S) elemanlarını göstermektedir.



(*a*) (*b*)

E kümesi, resimli kartların olay kümesi olsun. Yani Jack (J), Queen (Q), ya da King (K), ve F' de heart (kalp) kâğıdının bir olayı olsun. Bu durumda E ve F olaylarının kesişim kümesi

$$E \cap F = \{J\,H, QH, KH\}$$

AYNI DERECEDE MUHTEMEL (OLASI) OLAN UZAYLAR

Çoğunlukla bir deneyin fiziksel karakteristikleri, örnek uzayın çeşitli çıktılarının eşit olasılıklara atanmış olduğunu önerir. S gibi sonlu bir olasılık uzayı, ki bu uzayda her bir örnek nokta aynı olasılık değerine sahip, aynı derecede olası uzay olarak adlandırılır. Özellikle eğer S kümesi, n nokta ihtiva ediyorsa, o zaman her bir noktanın olasılığı 1/n dir. Ayrıca, eğer bir A olayı r nokta ihtiva ediyorsa o zaman onun olasılığı r(1/n)=r/n. Başka bir deyişle n(A), A kümesindeki elemanların sayısını belirtir.

P(A)=A daki elemanların sayısı/S deki elemanların sayısı=n(A)/n(S)   ya da

P(A)=A daki uygun çıktıların sayısı/olası çıktıların toplam sayısı

Yukarıdaki formül sadece aynı derecede olasılığa sahip örnek uzayı için kullanılabilir. Genel amaçlı olarak kullanılamaz.

Random ifadesi, aynı derecede olasılığa sahip bir uzayda, "Bir S kümesinden random olarak bir nokta seç" ifadesi S kümesindeki her örnek nokta aynı seçilme olasılığına sahip olduğu anlamına gelmektedir.

ÖRNEK:

52' lik bir iskambil kâğıt destesi içerisinden bir kâğıt seçilmiş olsun.

A olayı={maça olan kartlar}, B olayı={resimli olan kartlar}

P (A), P (B), ve P (A ∩ B) olasılıklarını hesaplayalım. Aynı derecede olasılığa sahip bir örnek uzayımız var/var olduğundan.

P(A)=maça kağıtlarının sayısı/tüm kartların sayısı=13/52

P(B)= üzerinde resim olan kartların sayısı/tüm kartların sayısı=12/52

P (A ∩ B)=resimli maça kartların sayısı/tüm kartların sayısı=3/52

SONLU OLASILIK UZAYI

S, S = {a1, a2,...,an} sonlu bir örnek uzayı olsun. Sonlu olasılık uzayı, S deki her bir a_i noktasına, a_i nin olasılığı olarak adlandırılan reel bir p_i sayısı atanmak ile elde edilir. Bu sayı aşağıdaki şartları sağlaması gerekir:

i) her bir p_i değeri negatif olmayan bir sayısıdır. Yani $p_i \geq 0$ dır.

ii) p_i lerin toplamı 1 dir. Yani; $p_1 + p_2 +\cdots+ p_n = 1$

A olayının olasılığı P (A), A kümesindeki noktaların olasılıklarının toplamı olarak tanımlanır. Tek küme $\{a_i\}$ temel olay olarak adlandırılır ve notasyonel uygunluk açısından P $(\{a_i\})$ olarak gösterilir.

ÖRNEK:

Üç tane bozuk para yazı tura atılıyor ve gelen turaların sayısı kaydediliyor. (7.1 a) daki örnek ile karşılatır.

S örnek uzayı S = {0, 1, 2, 3}. S kümesi için aşağıdaki atamalar olasılık uzayı olarak tanımlanmıştır.

P (0) = 1 /8, P(1) = 3/8, P(2) = 3/8, P(3) = 1/8

Yani, her bir olasılık negatif değil ve olasılıkların toplamı 1 dir. A olayının en azından bir Tura gelen olayları ve B'ninde tümümün Tura ya da tümünün Yazı olduğu olaylar kümesi olduğunu varsayalım. Yani,

A = {1, 2, 3} ve B = {0, 3}. Sonra

P (A) = P (1) + P (2) + P (3) = 3/8 + 3/8 + 1/8 = 7/8 ve

P (B) = P (0) + P (3) = 1/8 + 1/8 = 1/4

1. PARA	2. PARA	3. PARA
H	H	H
H	H	T
H	T	H
H	T	T
T	H	H
T	H	T
T	T	H
T	T	T

Sonlu Olasılık Uzayı Teoremleri

İzleyen teorem direkt olarak olaydan, bir olayın olasılığı o noktaların olasılıklarının toplamıdır.

Sınırlı olasılık uzayında tüm olayların sınıfı (kümesi) üzerinde tanımlanan P olasılık fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Teorem-1:

i) her A olayı için, $0 \leq P(A) \leq 1$

ii) $P(S) = 1$.

iii) Eğer iki olay karşılıklı olarak ayrık iseler bu durum da n $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.

Gelecek teorem, sezgimizi formülüze eder öyle ki eğer p, oluşan bir E olayının olasılığı ise, o zaman 1-p ise oluşmayan E olayının olasılığıdır. Yani, eğer bir hedefi üç atışta 1/3 kez vurmuşsak, 1-p=2/3 kez hedefi kaçırmışız demektir.

Teorem-2:

A herhangi bir olaydır. Bu durumda $P(A^c) = 1 - P(A)$

Teorem-3:

Bir boş kümeyi ve herhangi A ve B olayı göz önüne alın. Bu durumda:

i) P () = 0.

ii) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iii) eğer $A \subseteq B$, o zaman $P(A) \leq P(B)$.

Teorem-1 deki ($A \cup B$) kümesi iki kümenin ayrık olduğu durum için verilmiştir. Toplama prensibine göre bu formülün genel şekli aşağıdaki gibidir.

A ve B herhangi iki olay olmak üzere:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

ÖRNEK:

100 kişilik bir öğrenci içerisinden random olarak bir öğrencinin seçildiğini farz edelim. Bu öğrencilerden 30 tanesi matematik, 20 tanesi kimya ve 10 tanesi hem kimya hem de matematik dersini alıyor. Matematik veya Kimya dersini alanların olasılığını bulunuz.

M={Matematik dersini alan öğrencilerin kümesi}, C={Kimya dersini alan öğrencilerin kümesi}. Örnek uzayı aynı derecede muhtemel/olasılığa sahip olaylar olduğundan;

$P(M) = 30/100 = 3/10$, $P(C) = 20/100 = 1/5$, $P(M \text{ ve } C) = P(M \cap C) = 10/100 = 1/10$

Buna göre toplama prensibine göre:

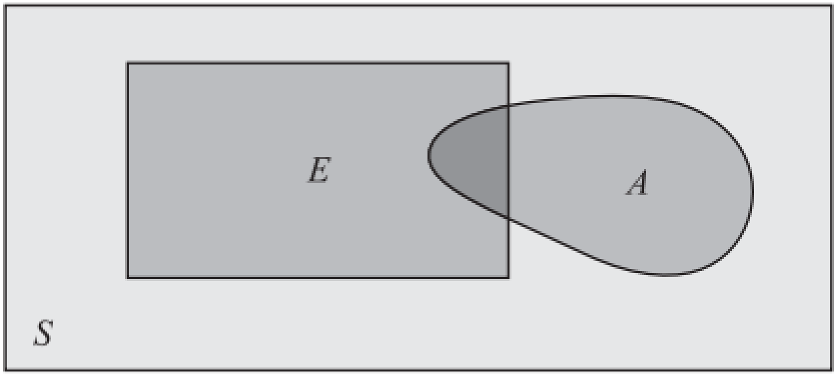
$p = P(M \text{ veya } C) = P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 3/10 + 1/5 - 1/10 = 2/5$

ŞARTLI OLASILIK

S örnek uzayında E'nin $P(E)>0$ olmak üzere bir olay olduğunu farz edelim. E olayı gerçekleştikten sonra, oluşan A olayının olasılığı, ya da daha spesifik bir ifade ile verilen bir E olayından sonra A olayının gerçekleşme olasılığına şartlı olasılık denir ve $P(A|E)$ notasyonu ile gösterilir. Aşağıdaki formülle ifade edilir.

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

Aşağıdaki Venn diyagramında gösterildiği biçimde, P (A|E), belli bir anlamda/manada, E nin azaltılmış uzayına göre A'nın bağıl olasılığını ölçer.



S aynı derecede muhtemel olan bir örnek uzayı olduğunu farz edelim ve n(A), A kümesindeki eleman sayısını gösterir/belirtir. Bu durumda

$$P(A \cap E) = \frac{n(A \cap E)}{n(S)}, \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)},$$

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{n(A \cap E)}{n(E)}$$

Bu sonucu biçimsel olarak aşağıdaki biçimde ifade edebiliriz.

Teorem-5:

S aynı derecede muhtemel olma olasılığına sahip bir örnek uzayı olduğunu ve bu örnek uzayında A ve B birer olay olduğunu farz edelim.

$$P(A|E) = \frac{\text{number of elements in } A \cap E}{\text{number of elements in } E} = \frac{n(A \cap E)}{n(E)}$$

Başka bir tanım ile:

E olayının gerçekleşmesi durumu göz önüne alındığında, A olayının gerçekleşme olasılığı P (A|E) dir. E'nin gerçekleşmesi durumunda, A'nın olasılığı olarak tarif ederiz.

ÖRNEK:

İki tavla zarı havaya atılıyor. Örnek uzayı 36 adet çift (a, b) den oluşan bir S kümesidir. Burada a ve b 1 den 6 ya kadar herhangi bir integer sayı olabilir. Bundan dolayı herhangi bir noktanın (örnek uzayındaki bir olayın) olasılığı 1/36 dır. İki zar üzerinde sayıların toplamı 6 olmak üzere, zarlardan birinin üzerindeki sayının 2 olmasının gerçekleşme olasılığını bulunuz. Yani P (A|E)' yi bulmaya çalışıyoruz. Burada;

E={ sayıların toplamı 6 olacak} ve A={zarlardan en azından birinde 2 rakamı yazacak}

Bu durumda E kümesi 5 elemandan oluşan bir olay kümesidir ve A ∩ E iki elemandan oluşan bir kümedir. Yani

E = {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)},

A ∩ E = {(2, 4), (4, 2)}

P (A|E) = 2/5

Diğer taraftan aslında A kümesi 11 elemanlı bir kümedir.

A = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2),(3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)}

Bundan dolayı a olayının gerçekleşme olayı esasında P (A) = 11/36 dır.

ÖRNEK:

Bir aile (çift) iki çocuğu vardır. Örnek uzayı S = {bb, bg, gb, gg} her bir noktanın olasılığı ¼ dür.

i) Çocuklardan en az birinin erkek olduğu biliniyorsa,

ii) büyüğünün erkek olduğu biliniyorsa,

her iki çocuğunda erkek olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

i) burada azaltılmış örnek uzayı üç elamana sahiptir {bb, bg, gb}; böylece olasılık p = 1/3 olur.

ii) burada azaltılmış örnek uzayı sadece iki elamandan oluşur {bb, bg }; böylece p = ½ olur.

ŞARTLI OLASILIK İÇİN ÇARPIM TEOREMİ

P(A)>0 olmak üzere örnek bir S uzayında, A ve B nin birer olay olduğunu farz edelim. Şartlı olasılık tanımına göre

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Her iki tarafı P (A) ile çarparsak bize aşağıdaki yararlı sonucu verir.

TEOREM: **Şartlı Olasılık İçin Çarpım Teoremi**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

A ve B her iki olayı oluşursa, çarpım Teoremi olasılık için bize bir formül verir. Bu formül birden fazla olay için genişletilebilir. Yani;

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_m) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_m|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{m-1})$$

ÖRNEK:

Bir yığın (lot) 12 çeşit ürün içermektedir ve bu ürünlerden 4 tanesi kusurludur/bozuktur. Yığından üç ürün bir biri ardına random olarak çekiliyor. Artarda çekilen üç ürünün kusurlu olmaması/sağlam olması olasılığını (p) yi bulunuz.

İlk çekilen ürünün bozuk olmama ihtimali 8/12 dir, çünkü 12 ürünün 8 tanesi bozuk değildir. Eğer ilk çekilen ürün bozuk değilse, daha sonra çekilen ürünün bozuk olmamasının ihtimali 7/11 dir, çünkü 11 ürün kalmış olup bu ürünlerinde 7 tanesi bozuk değildir. Eğer çekilen ilk iki ürün bozuk değilse ondan sonra çekilecek ürünün bozuk olmaması ihtimali 6/10 dur. Çünkü kalan ürünlerin sayısı 10 olup bununda 6 tanesi bozuk değildir. Böylece çarpım teoremine göre

$$p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55} \approx 0.25$$

BAĞIMSIZ OLAYLAR

S olasılık uzayında, eğer bir olayın oluşumu (A olayı) diğer olayın oluşumunu (B olayı) etkilemez ise A ve B olayları bağımsızdır denir. Daha spesifik olarak, B, A dan bağımsızdır eğer B olayının olasılığı P (B), P (B|A)'ya eşit ise. Şimdi çarpım teoremindeki P (B|A) nin yerine P (B) yazarsak

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ formülü

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ şekline dönüşür.

Biçimsel olarak/şeklen yukarıdaki formülü bizim bağımsızlık tanımına göre kullanabiliriz.

TANIM: Eğer $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ise A ve B olayları bağımsızdır, aksi takdirde A ve B olayları bağımlıdır.

Şunu vurgulayalım, bağımsız olaylar simetrik özelliğine sahiptir. Bundan dolayı

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, hem $P(B|A) = P(B)$ ye hem de $P(A|B) = P(A)$ ya eşit olduğu anlamına gelmektedir.

ÖRNEK:

Üç kez/sefer havaya atılan adil (yani hilesi olmayan) bir bozuk para aynı derecede muhtemel olan aşağıdaki çözüm uzayı sonucu verir.

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT }

1. PARA	2. PARA	3. PARA
H	H	H
H	H	T
H	T	H
H	T	T
T	H	H
T	H	T
T	T	H
T	T	T

Bu çözüm uzayına göre aşağıdaki olayları göz önüne alalım:

A={ilk atışın sonucunun Tura olması durumu}={ HHH, HHT, HTH, HTT }

B={ikinci atışın sonucunun Tura olması olasılığı}={ HHH, HHT, THH, THT}

C={Atışlardan sonucun artarda iki sefer Tura olması olasılığı}= {HHT, THH}

Açıkçası A ve B bağımsız olaylardır. Bu durum aşağıda doğrulanmıştır. Diğer yandan A ve C ve B ve C arasındaki ilişki açık (aşikâr) değildir. A ve C nin bağımsız olduğunu iddia ediyoruz, fakat B ve C bağımlıdır.

P (A) = 4/8 = 1/2, P (B) = 4/8 = 1/2 , P (C) = 2/8 = ¼

Ayrıca

P (A ∩B) = P ({HHH, HHT }) = 1/4 , P (A ∩C) = P ({HHT }) = 1/8 , P (B ∩ C) = P ({HHT,THH}) = ¼

Buna bağlı olarak,

P (A)P (B) = 1/2 · 1/2 = 1/4 = P (A ∩ B), ve bu yüzden A ve B bağımsız olaylardır.

P (A)P (C) = 1/2 · 1/4 = 1/8 = P (A ∩ C), ve bu yüzden A ve C bağımsız olaylardır.

P (B)P (C) = 1 2 · 1 4 = 1 8 = P (B ∩ C), bu yüzden B ve C bağımsız olaylar değildir (bağımlı olaylardır)

ÖRNEK:

A hedefi vurma olasılığı ¼ dür ve B hedefi vurma olasılığı 2/5. Her ikisi hedefe atış yapıyor. A veya B den en az birinin hedefi vurma olasılığını bulunuz.

Bize P(A) =1/4 ve P(B)=2/5 olduğu veriliyor. Biz P (A ∪ B) yi arıyoruz. Bundan başka A nın ya da B'nin hedefi vurma olasılığı, birbirinden etkilenmeyen olaylardır, yani birinin vurması diğerinin vurmasını etkilemez, başka bir ifadeyle P (A ∩ B) = P (A)P (B) dir.

P (A ∪ B) = P (A) + P (B) − P (A ∩ B) = P (A) + P (B) − P (A)P (B) = 1/4 + 2/5 – (1/4)(2/5) = 11/20