Olasılık ve İstatistik
HAFTA 3
Rastgele Değişkenler
Kesikli Rasgele Değişkenler

Dr. Öğretim Üyesi Burcu ÇARKLI YAVUZ

bcarkli@sakarya.edu.tr

Rastgele Değişken

- X, S örneklem uzayının bütün öğeleri için tanımlanmış gerçek değerli bir fonksiyon ise X'e rastgele değişken (rassal değişken) denir.
- Rassal değişken büyük harfle, rassal değişkenin aldığı değer küçük harf ile gösterilir. X rassal değişkeninin bir değeri x'dir.

Örnek

- Bir paranın 2 kez atılması deneyinde örnek uzay: S={TT,TY,YT,YY} şeklindedir.
- X rasgele değişken Tura gelme sayısı olsun; bu durumda X rasgele değişkeninin değerinin 0,1 ve 2 olma olasılıklarını inceleyebiliriz:

X={0,1,2} (hiç Tura gelmez, 1 kez gelir, 2 kez gelir)

P(X=0)=1\4 Hiç Tura gelmeme ihtimali

P(X=1)=1\2 Bir tane Tura gelme ihtimali

P(X=2)=1\4 İki tane Tura gelme ihtimali

Örnek

- X, iki adet zarın atılması deneyinde, üst yüze gelen sayıların toplamı olan rasgele bir değişken olsun.
- X rasgele değişkeninin değerinin 10 olma durumunu inceleyebiliriz:
- Üst yüze gelen sayıların toplamının 10 olma olasılığı:

$$P(X=10)=P(\{4,6\},\{5,5\},\{6,4\})=3\backslash 36=1\backslash 12$$

Örnek

- Bir kişinin her biri arızalı yada sağlam olabilen iki elektronik parça satın aldığını varsayalım. Arızalı parça a, sağlam parça s ile gösterilmek üzere mümkün olan 4 durum (a,a), (a,s), (s,a), (s,s) sırası ile 0.09, 0.21, 0.21, 0.49 olasılıklara sahiptir.
- Satın alınan sağlam parça sayısı X ile gösterilirse X={0,1,2} değerlerine sahip olabilir.
- $P(X=0)=0.09$ Hiç sağlam parça yok
- $P(X=1)=0.21+0.21=0.42$ 1 adet sağlam parça var
- $P(X=2)=0.49$ 2 adet sağlam parça var

Kesikli Rassal Değişken

- Değerleri sayımla elde edilen rassal değişkenlere kesikli rassal değişken denir.
- Rassal değişken **sayılabilir değerler** alıyorsa bu değişkene kesikli rassal değişken adı verilir.
  - Madeni paranın 3 kez atılması deneyinde yazı gelme sayısı
  - İçinde 3 kırmızı, 5 sarı, 2 mavi top olan torbadan 2 top çekildiğinde mavi gelme sayısı
  - Bir ailenin çocuk sayısı
  - Bir şeylerin sayısı,…

Sürekli Rassal Değişken

- Değerleri **ölçümle yada tartımla** elde edilen (**sayımla elde edilemeyen**) bir rassal değişkene sürekli rassal değişken adı verilir.
- Sürekli rassal değişkenin alacağı değerler bir tanım aralığı ile ifade edilir.
- Bir aralıkta sonsuz değer olduğu için sürekli rassal değişkenin alabileceği sonsuz değer vardır.
  - Bir elektronik aletin yaşam ömrü
  - Bir sorunun çözülme süresi
  - Bir kişinin ağırlığı
  - Bir kişinin boyu

Kesikli Olasılık Dağılımları

- X kesikli bir rassal değişken ise, X'in aralığı içindeki her bir x için f(x)=P(X=x) ile verilen fonksiyona X rasgele değişkeninin **olasılık fonksiyonu** (olasılık kütle fonksiyonu, olasılık dağılımı) denir.

- **Teorem:** Bir fonksiyon ancak ve ancak aşağıdaki koşullar sağlanırsa kesikli bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu olabilir:

1. $f(x) \geq 0,$
2. $\sum_{x} f(x) = 1,$
3. $P(X = x) = f(x).$

Kesikli Olasılık Dağılımları

Örnek: Perakende satış yapan bir mağazaya toptancı tarafından 3 tanesinin defolu olduğu bilinen 20 adet bilgisayar gönderilmiştir.

Bir okul bu mağazadaki bilgisayarlardan rasgele 2 tanesini satın almak isterse, alacağı bilgisayarlar içindeki defoluların olasılık dağılımını bulunuz.

Kesikli Olasılık Dağılımları

Çözüm:

X rasgele değişkeninin değerleri 0, 1 ve 2 olabilir:

$$f(0) = P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{17}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{68}{95}, \quad f(1) = P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{17}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{51}{190},$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{0}}{\binom{20}{2}} = \frac{3}{190}.$$

Buna göre X rasgele değişkeninin olasılık dağılımı şu şekilde ifade edilir:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{68}{95}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

Kesikli Olasılık Dağılımları

Örnek: Aşağıda verilen fonksiyonun kesikli bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu olup olmadığını inceleyiniz.

$$f(x) = \frac{x+2}{25}, x = 1,2,3,4,5 \; için$$

Kesikli Olasılık Dağılımları

Çözüm: $f(x) = \frac{x+2}{25}, x = 1,2,3,4,5 \; için$

$$f(1) = \frac{3}{25}, f(2) = \frac{4}{25}, f(3) = \frac{5}{25}, f(4) = \frac{6}{25}, f(5) = \frac{7}{25}$$

- Tüm f(x) değerleri için, f(x) ≥ 0
- f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=(3+4+5+6+7)\25=1

- f(x) fonksiyonu, kesikli bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonudur.

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

- Herhangi bir x gerçek sayısı için F(X)=P(X≤x) şeklinde ifade edilen F(X)'e, X rasgele değişkeninin **birikimli dağılım fonksiyonu** denir.
- Olasılık dağılımı f(x) olan kesikli bir X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu F(X) şu şekilde ifade edilir:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty.$$

- X rassal değişkeni için F(x), aşağıdaki özellikleri sağlar:

  $0 \leq F(x) \leq 1$

  Eğer $x < y$ ise $F(x) \leq F(y)$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Örnek:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Olasılık dağılımı verilen X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Çözüm:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Olasılık dağılımı verilen X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu:

$$F(0) = f(0) = \frac{1}{16},$$
$$F(1) = f(0) + f(1) = \frac{5}{16},$$
$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16},$$
$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{15}{16},$$
$$F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < 0, \\ \frac{1}{16}, & \text{for } 0 \le x < 1, \\ \frac{5}{16}, & \text{for } 1 \le x < 2, \\ \frac{11}{16}, & \text{for } 2 \le x < 3, \\ \frac{15}{16}, & \text{for } 3 \le x < 4, \\ 1 & \text{for } x \ge 4. \end{cases}$$

Birikimli dağılım fonksiyonunu kullanarak olasılık dağılımını hesaplama:

$$F(0) = f(0) = \frac{1}{16},$$
$$F(1) = f(0) + f(1) = \frac{5}{16},$$
$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16},$$
$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{15}{16},$$
$$F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1.$$

- f(2) değerini hesaplamak istersek F(2)-F(1) şeklinde çözüm elde edebiliriz:

$$f(2) = F(2) - F(1) = \frac{11}{16} - \frac{5}{16} = \frac{3}{8}.$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Örnek:

m	0	1	3
$P(M=m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Olasılık dağılımı verilen M rasgele değişkeni için

$$F(2)=P(M\leq 2)= f(0)+f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

olarak hesaplanır. (Olasılık dağılımında f(2) olmadığı için F(2) hesabında kullanmadık)

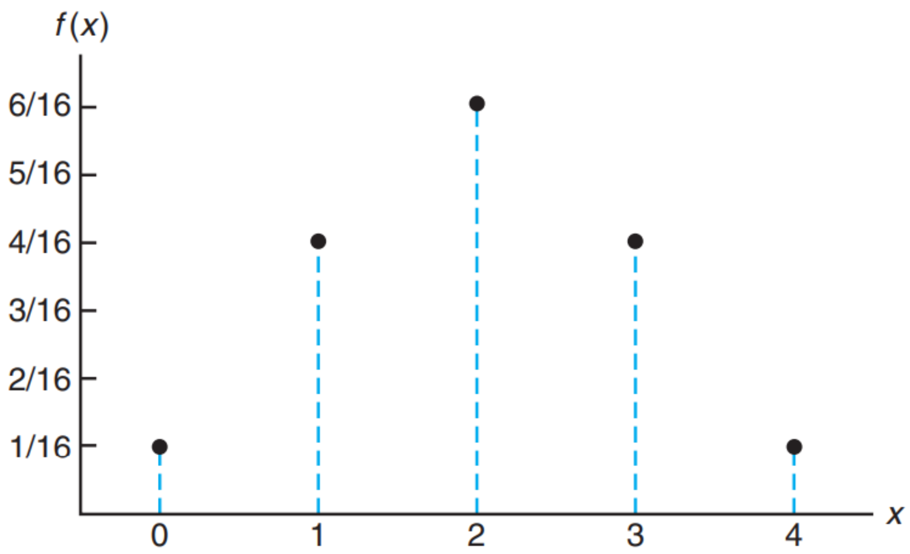
M'nin birikimli dağılım fonksiyonu:

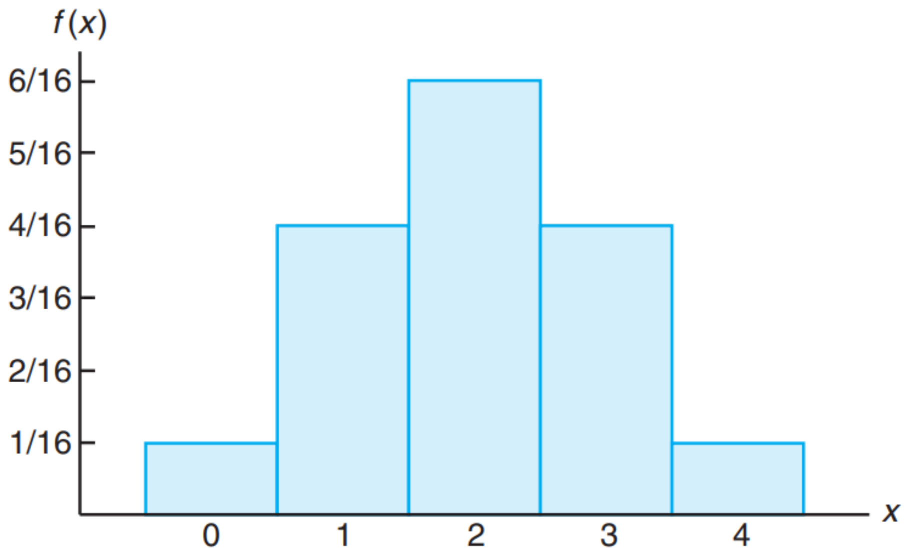
$$F(m)=\begin{cases} 0, & \text{for } m<0, \\ \frac{1}{3}, & \text{for } 0\leq m<1, \\ \frac{5}{6}, & \text{for } 1\leq m<3, \\ 1, & \text{for } m\geq 3. \end{cases}$$

Olasılık fonksiyonunun çizim ile gösterimi

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Olasılık kitle fonksiyonu grafiği & Olasılık Histogramı

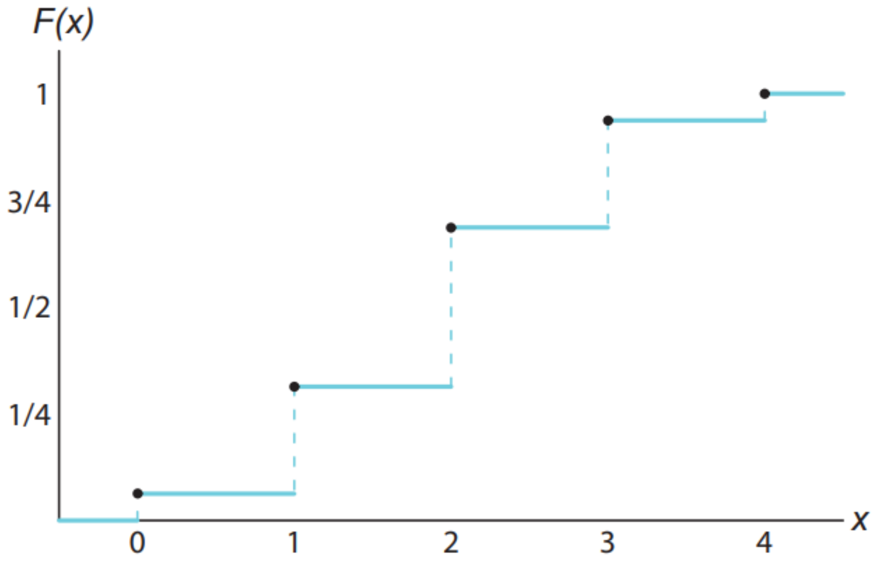




Dağılım fonksiyonunun çizim ile gösterimi

Kesikli birikimli dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < 0, \\ \frac{1}{16}, & \text{for } 0 \le x < 1, \\ \frac{5}{16}, & \text{for } 1 \le x < 2, \\ \frac{11}{16}, & \text{for } 2 \le x < 3, \\ \frac{15}{16}, & \text{for } 3 \le x < 4, \\ 1 & \text{for } x \ge 4. \end{cases}$$



Kesikli Rasgele Değişkenler Örnek

Örnek: Verilen F(x) birikimli olasılık dağılım fonksiyonundan X'in olasılık kütle fonksiyonunu (olasılık fonksiyonu, olasılık dağılımı) bulunuz.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.2 & -2 \le x < 0 \\ 0.7 & 0 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

Kesikli Rasgele Değişkenler Örnek

Örnek: Verilen F(x) birikimli olasılık dağılım fonksiyonundan X'in olasılık kütle fonksiyonunu (olasılık fonksiyonu, olasılık dağılımı) bulunuz.

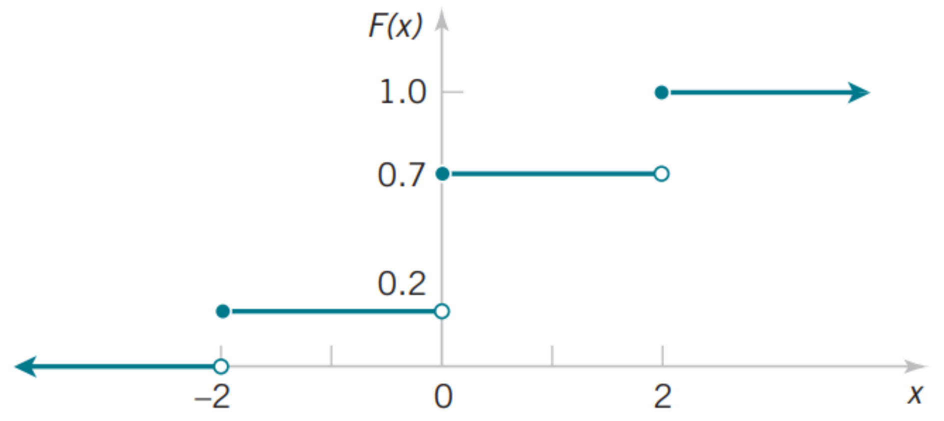
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.2 & -2 \le x < 0 \\ 0.7 & 0 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

Çözüm:

$$f(-2) = 0.2 - 0 = 0.2$$

$$f(0) = 0.7 - 0.2 = 0.5$$

$$f(2) = 1.0 - 0.7 = 0.3$$



Kesikli Rasgele Değişkenler Örnek

Örnek: Sayısal bir iletim kanalından iletilen bir bit'in hatalı olarak alınma ihtimali vardır. X, sonraki 4 bitte hatalı olarak iletilenlerin sayısına eşit olsun. Olasılık dağılımı verilen X rassal değişkeni için $P(X \leq 3)$ olasılığı nedir?

$$P(X=0)=0.6561 \quad P(X=1)=0.2916$$
$$P(X=2)=0.0486 \quad P(X=3)=0.0036$$
$$P(X=4)=0.0001$$

Kesikli Rasgele Değişkenler Örnek

Örnek: Sayısal bir iletim kanalından iletilen bir bit'in hatalı olarak alınma ihtimali vardır. X, sonraki 4 bitte hatalı olarak iletilenlerin sayısına eşit olsun. Olasılık dağılımı verilen X rassal değişkeni için $P(X \leq 3)$ olasılığı nedir?

$$P(X=0)=0.6561 \quad P(X=1)=0.2916$$
$$P(X=2)=0.0486 \quad P(X=3)=0.0036$$
$$P(X=4)=0.0001$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \\ &= 0.6561+0.2916+0.0486+0.0036=0.9999 \end{aligned}$$

Yada 1-P(X=4) = 1 - 0.0001 = 0.9999

Kesikli Rasgele Değişkenler Örnek

Örnek: Aşağıda olasılık dağılım fonksiyonu verilen X rassal değişkeni için P(X=1) değeri kaçtır?

x_i	0	1	2	3
p_i	0.07		0.57	0.13

P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1 olmalı

0.07+P(X=1)+0.57+0.13=1 ise P(X=1)=1-0.77=0.23

Kaynaklar

- Doç. Dr. Melda Akın, Matematiksel İstatistik Ders Notu, İstanbul Üniversitesi
- Mühendisler ve Fen Bilimciler için Olasılık ve İstatistik, Ronald E. Walpole, Çeviri Editörü: Prof. Dr. M. Akif BAKIR, 9. baskıdan çeviri, Palme Yayıncılık
- Mühendisler için Uygulamalı İstatistik ve Olasılık, Dougles C. Montgomery, George C. Runger, 6. baskıdan çeviri, Palme Yayıncılık