Olasılık ve İstatistik

HAFTA 1

Ders Tanıtımı & Giriş

Dr. Öğretim Üyesi Burcu ÇARKLI YAVUZ

bcarkli@sakarya.edu.tr

Derse Devam

- Dersi ilk defa alan yada daha önce alıp DZ ile kalan öğrenciler derslerin %70'ine devam etmek zorundadır.
- Devamsızlıktan kalan öğrenciler derslerin son haftasında ilan edilir ve bu öğrenciler dönem sonu sınavına giremezler.

14 Haftalık Ders Akışı

1- Olasılık ve İstatistiğe Giriş
2- Koşullu Olasılık
3- Rastgele Değişkenler ve Çeşitleri
4- Rastgele Değişkenler ve Özellikleri
5- Beklenti ve varyans
6- Kesikli Olasılık Dağılımları
7- Sürekli Olasılık Dağılımları
8- VİZE ? (Bölüm sayfasından vize sınav tarihi duyurularını takip ediniz)
9- Betimleyici İstatistik
10- Örnekleme, istatistiksel tahmin, tahminin güven aralığı
11- Tek örneklem için hipotez testleri
12- İki örneklem için hipotez testleri
13- Regresyon
14- Varyans analizi

Değerlendirme

Başarı Notu=

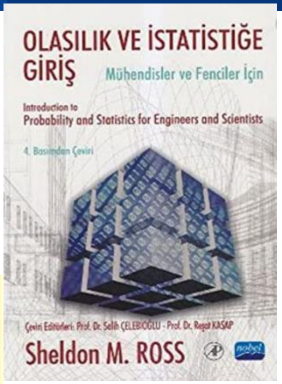
Yarıyıl içi çalışmalar*%50 + Final*%50

Yarıyıl içi çalışmalar:

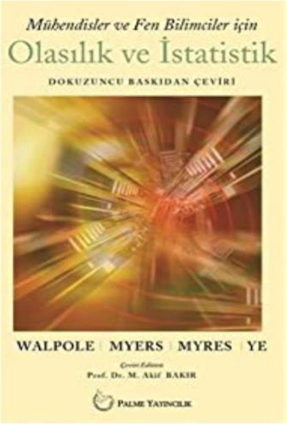
Ara sınav	%55
Ödev	%15
Kısa sınav 1	%15
Kısa sınav 2	%15

Önerilen Kaynaklar

- Olasılık ve İstatistiğe Giriş Mühendisler ve Fenciler İçin, Sheldon M. Ross, Çeviri Editörleri: Prof. Dr. Salih Çelebioğlu, Prof. Dr. Reşat Kasap, 4. baskıdan Çeviri, Nobel, 2012.



- Mühendisler ve Fen Bilimciler için Olasılık ve İstatistik, Ronald E. Walpole, Çeviri Editörü: Prof. Dr. M. Akif BAKIR, 9. baskıdan çeviri, Palme Yayıncılık, 2016.



- Mühendisler için Uygulamalı İstatistik ve Olasılık, Dougles C. Montgomery & George C. Runger, Çeviri: M.Terziler, T.Öner, E.Dalan Yıldırım, Ş.Ayar Özbal, 6. baskıdan çeviri, Palme Yayıncılık, 2019.

İstatistik nedir?

- Bir sonuç çıkarmak için verileri yöntemli bir biçimde toplayıp sayı olarak belirtme işi, sayımlama
- İlkelerini olasılık kuramlarından alarak eldeki verileri grafik ve sayı biçiminde değerlendirmeye dayandıran matematiğin uygulamalı dalı, sayım bilimi.
- Verileri derleme, bölümlendirme, çizelgeler ve çizgelerle özetleme, olasılık kuramı yardımıyla deney tasarımlama ve gözlem ilkelerini saptama, örneklem bilgilerinin anlamlılığını inceleme, yorumlama ve genelleme yöntemlerini veren bilim.

Olasılık nedir?

- Olasılık, herhangi bir deneyin sonucunda gözlenebilecek farklı durumlar ile hangi sıklıkla karşılaşılacağıdır.
- Ortaya çıkan olayların belirsizliğinin incelenmesi anlamına gelir.
- Bir olayın gerçekleşme şansının sayısal değeridir.
- Bir olayın olabilirlik derecesinin 0 ile 1 arasındaki bir gerçek sayıyla gösterilmiş biçimi.

Rasgele Deneyler

- Çevresel koşulların aynı kaldığı deneysel bir çalışmada, tekrarlı gözlemler birbirinden farklı raslantısal değerler alıyorsa bu tür deneylere **rastgele deneyler** denir.

Örneklem Uzayı ve Olaylar

- Önceden sonuçları kesin olarak kestirilemeyen bir deneyi düşünelim. Deneyin sonucu bilinmemesine rağmen, oluşacak tüm olanaklı sonuçların kümesinin bilindiğini varsayalım.
- Bir deneyin tüm olanaklı sonuçlarının kümesi, deneyin **örnek uzayı (örneklem uzayı)** olarak bilinir ve **S** ile gösterilir.
- Örneklem uzayının herhangi bir alt kümesi A, **rasgele olay** yada kısaca **olay** olarak tanımlanır.

Örneklem uzayı elemanlarının belirlenmesi

- Örneklem uzayının elemanları sözel yada sayısal olabilir.
- **Para atışı deneyinde** karşılaşabileceğimiz durumlar **Yazı** yada **Tura** gelmesidir.
- Yani örneklem uzayının elemanları **S={Yazı, Tura}** şeklinde gösterilebilir. Yazı gelme durumu 0 (sıfır), Tura gelme durumu 1 (bir) ile gösterilirse aynı küme sayısal olarak **S={0,1}** şeklinde de gösterilebilir.
- **Para atışı iki kez yapılırsa** örneklem uzayı sembolik ve sayısal olarak şu şekilde gösterilebilir:

  S={YY, YT, TY, TT} ve S={0,1,2,3}

Olasılık

- Bir A olayının ortaya çıkma olasılığı;

P(A)

şeklinde gösterilir.

$$P(A)= n(A)/n(S)$$

Kararlılık

- Bir deneyin eşit koşullar altında tekrarlanması durumunda, herhangi bir *A* olayının gerçekleşme sayısı tüm deneylerin sayısına bölünürse bağıl tekrarlanma sayısı (*h(A)*) elde edilir.
- Bir deney aynı koşullar altında sürekli olarak tekrarlanırsa, gerçekleştirilen deney sayısı arttıkça *h(A)* değerindeki değişkenlik azalacak ve giderek bir sabit değere yaklaşacaktır. Bu duruma ***kararlılık özelliği*** adı verilir. Deney sonsuz kez tekrarlandığında *h(A)* değerinin P(A) olasılık değerine eşit olması beklenir.
- Bir olayın olasılığı deneyin tekrarlama sayısı sonsuza yaklaşırken o olayın göreli frekansının alacağı limit değer olarak tanımlanır:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} h(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

n(A): Herhangi bir A olayının gerçekleşme sayısı

n: Deney sayısı

Örnek Uzayın görselleştirilmesi

1-Listeleme:

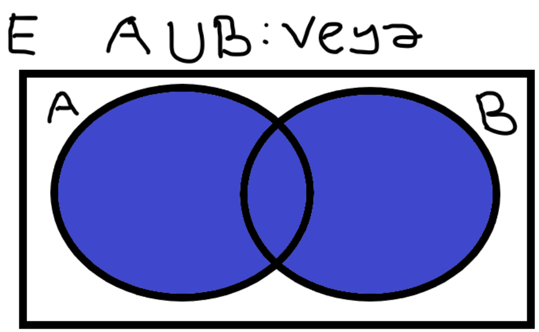
S={Yazı, Tura}

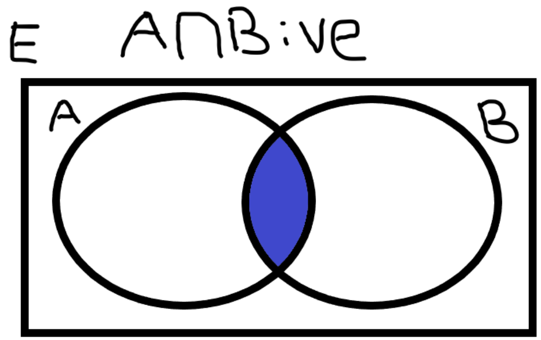
S={1,2,3,4,5,6}

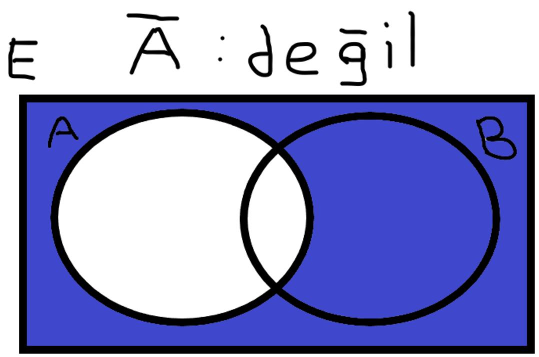
S={Galibiyet, Mağlubiyet, Beraberlik}

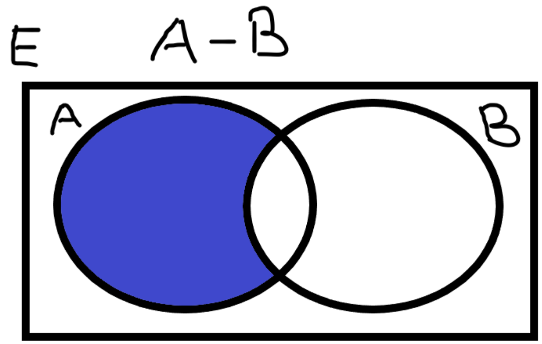
Örnek Uzayın görselleştirilmesi

2- Venn Şeması









Örnek Uzayın görselleştirilmesi

3- Kontenjans Tablosu

Kulüp / Cinsiyet	Tiyatro	Briç	Sinema	Satranç	Toplam
Bayan	30	50	20	15	115
Bay	25	10	20	70	125
Toplam	55	60	40	85	240

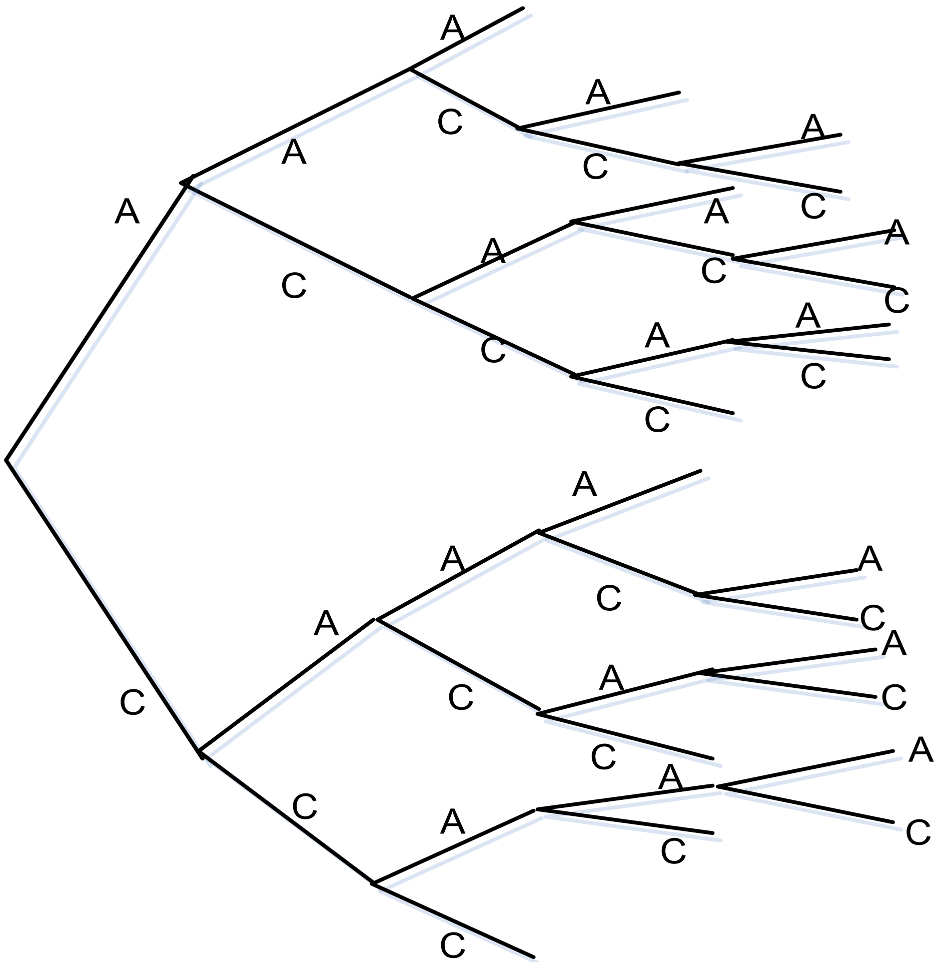
Örnek Uzayın görselleştirilmesi

4-Ağaç Diyagramı

Ali ile Can masa tenisi oynamaktadırlar. 3 set kazananın galip geleceği maçın ortaya çıkabilecek tüm mümkün sonuçlarını gösteren ağaç diyagramını oluşturunuz.

Örnek Uzayın görselleştirilmesi

4-Ağaç Diyagramı



Olası Durumlar;

AAA,CCC

AACA,CCAC

ACAA,CACC

ACCC,CAAA

ACACA,CACAC

AACCA,CCAAC

AACCC,CCAAA

ACACC,CACAA

ACCAA,CAACC

ACCAC,CAACA

Örnek

- Aşağıdaki olaylardan hangileri eşittir?

  A={1,3}

  B={x|x, zar üzerindeki bir sayıdır}

  C={x|$x^2 - 4x+3=0$}

  D={x|x, altı kere yapılan para atma deneyinde gelen yazı sayısı}

Bazı Temel Olasılık Aksiyomları

- $0 <= P(A) <= 1$
- P (S) = 1 (S, olması kesin olaydır)
- P (∅) = 0 (∅, imkansız olay)
- A olayının tümleyeni $\overline{A}$ olmak üzere, A'nın gerçekleşmeme olasılığı:

  $$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
- A ve B herhangi iki olay olmak üzere;

  $P(AUB) = P(A)+ P(B) – P(A\cap B)$
- ***A ve B ayrık iki olay ise;***

  $P(AUB) = P(A) + P(B)$
- A,B ve C olaylarının birleşimi:

  $P(AUBUC) = P(A)+P(B)+P(C)–P(A\cap B)–P(A\cap C)–P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

Örnek

30 kişilik bir toplulukta 17 kişi A gazetesini, 13 kişi B gazetesini, 5 kişi her iki gazeteyi birden okumaktadır.

- Rasgele seçilen bir kişinin gazete okumamama olasılığı nedir?
- Rasgele seçilen bir kişinin gazete okuma olasılığı nedir?
- Rasgele seçilen bir kişinin sadece A gazetesi okuma olasılığı nedir?

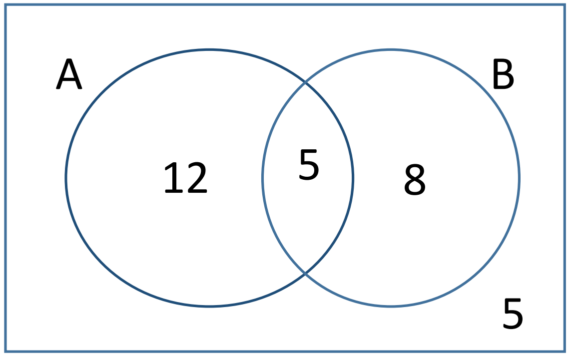
Çözüm

Toplam 30 kişi

A okuyan 17 kişi

B okuyan 13 kişi

A ve B okuyan 5 kişi, **hiç birini okumayan 5 kişi**



- Rasgele seçilen bir kişinin gazete okumama olasılığı:

  P(gazete okumama)=Gazete okumayanların sayısı/Toplam kişi sayısı

  P(gazete okumama)=5/30=1/6

- Rasgele seçilen bir kişinin gazete okuma olasılığı:

  1- P(gazete okumama) = Gazete okuyanların sayısı/Toplam kişi sayısı = 5/6

- Rasgele seçilen bir kişinin sadece A gazetesi okuma olasılığı:

  P(sadece A)=Sadece A okuyanların sayısı/Toplam kişi sayısı

  P(sadece A)=12/30=2/5

Örnek

- Bir sınıftaki öğrenciler matematik dersinden A, B, C, D ve F notlarını alabilirler. Her bir harf notunun görülme olasılığı aşağıda verilmiştir:

  P(A)=0.2, P(B)=0.3, P(C)=0.25, P(D)=0.15, P(F)=0.1

- F notu alan öğrenci dersten kalmaktadır.
- Verilen bilgilere göre bir öğrencinin dersten geçme (A,B,C yada D notu alma) olasılığı nedir?

Çözüm

$P(A)=0.2$, $P(B)=0.3$, $P(C)=0.25$, $P(D)=0.15$, $P(F)=0.1$

- Bir öğrencinin dersten geçme (A,B,C yada D notu alma) olasılığı:

- **1. yol: Ayrık olayların birleşimi (A veya B veya C veya D)**

  P(dersten geçme)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)

  P(dersten geçme)=0.2+0.3+0.25+0.15= 0.9

- **2. yol: Dersten geçme ve kalma olayları birbirinin tümleyenidir**

  P(dersten geçme)=1-P(dersten kalma)

  P(dersten geçme)=1-P(F) = 1-0.1= 0.9

Örnek Noktalarını Sayma

- Toplama kuralı
- Çarpma kuralı
- Permütasyon
- Kombinasyon

Toplama Kuralı

- Bir A olayı n_1 farklı şekilde, başka bir B olayı da n_2 farklı şekilde oluşabilen **ayrık olaylar** ise;

A <u>veya</u> B olayı n_1+n_2 farklı şekilde oluşabilir.

Örnek: İstanbul'dan İzmir'e 2 farklı tren seferi, 4 farklı havayolu firması, 40 farklı otobüs firması ve 1 adet denizyolu firması ile gidilebildiğine göre İstanbul'dan İzmir'e kaç farklı şekilde gidilir?

$2 + 4 + 40 + 1 = 47$

Çarpma Kuralı

- Eğer bir A olayı n_1 farklı yolla, B olayı n_2 farklı yolla gerçekleştirilebiliyorsa, bu iki olay birlikte (A ve B) $n_1 * n_2$ farklı yolla gerçekleştirilebilir.

Örnek: Ahmet bilgisayarını kendisi kuracaktır. Yaptığı araştırmalar sonucunda işlemci için 2 farklı marka, anakart için 3 farklı marka, harddisk için 4 farklı marka ve bellek için 5 farklı markanın iyi olduğuna karar vermiştir.

Ahmet beğendiği ürünleri kullanarak kaç farklı bilgisayar oluşturabilir?

$$n1*n2*n3*n4 = 2*3*4*5=120$$

Çarpma Kuralı

Örnek: 0,1,2,3,4 ve 5 rakamları ile kaç farklı 3 basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çarpma Kuralı

Çözüm: 0,1,2,3,4 ve 5 rakamları ile kaç farklı 3 basamaklı sayı oluşturulabilir?

6 farklı rakam var,

- Yüzler basamağında 0 olamayacağı için 5 farklı seçenek mevcut (sıfır başta olursa 2 basamaklı sayı olur, 3 basamaklı sayı olmaz)
- Onlar basamağında tüm rakamlar olabilir 6 farklı seçenek var
- Birler basamağında tüm rakamlar olabilir 6 farklı seçenek var

$\underline{5}*\underline{6}*\underline{6}=180$ adet birbirinden farklı 3 basamaklı sayı yazabiliriz

Dikkat! Rakamları farklı denilmemiş, sadece sayılar birbirinden farklı olacak denilmiş. Her sayıda kullanılan rakamlar birbirinden farklı olsa ne olurdu?

Çarpma Kuralı

Örnek: Her birini en fazla 1 kez kullanarak 0,1,2,3,4 ve 5 rakamları ile kaç farklı 4 basamaklı çift sayı oluşturulabilir?

Çarpma Kuralı

Çözüm: Her birini <u>en fazla 1 kez kullanarak</u> 0,1,2,3,4 ve 5 rakamları ile kaç farklı <u>4 basamaklı çift sayı</u> oluşturulabilir?

Birler basamağı için 0,2 ve 4 olmak üzere 3 seçenek var

4 basamak olması için binler basamağında 0 olmamalı

- Birler basamağında 0 varsa: 5*4*3*1=60 adet sayı yazılabilir
- Birler basamağında 0 yoksa: 4*4*3*2=96 adet sayı yazılabilir

- Birler basamağında 0 olanlar <u>veya</u> olmayanlar (Toplam kuralı) = 60+96=156 adet 4 basamaklı, rakamları birbirinden farklı çift sayı yazılabilir

Permütasyon

- Permütasyon, nesnelerin bulunduğu bir kümenin tamamının veya bir kısmının bir dizilişidir. (Sıralama söz konusu)
- *n* tane nesne arasından seçilmiş *r* tane nesnenin permütasyon sayısı P(n,r) yada ${}_nP_r$ şeklinde ifade edilir ve aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Permütasyon

- Sıraya konulacak *n* adet nesne olsun ve her biri sadece bir kez kullanılmak üzere kaç farklı sıralama yapılabilir?

- **n nesnenin mümkün sıralamalarının sayısı** (çarpım kuralı ile):

$$n(n-1)(n-2)...(2)(1)=n! \qquad {}_nP_n = n!$$

- ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ formülünde paydanın 0!=1 olması durumudur.

Permütasyon

- **Dairesel permütasyon:** n tane nesnenin dairesel dizilişinde oluşan permütasyon sayısı (n-1)! dir.
- Aynı türden nesnelerin dizilişini oluşturmak istediğimizde, aynı tür nesnelerin yer değiştirmesi ile yeni bir dizilim oluşmayacaktır. İçinde birinci türden n_1 adet, ikinci türden n_2 adet, … k. türden n_k adet nesneden oluşan bir grubu dizmek/sıralamak istersek permütasyon sayısı şu şekilde hesaplanır:

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * \cdots * n_k\,!}$$

Permütasyon

Örnek: 8 yarışmacının katıldığı bir müsabakada ilk üç dereceye girenler kaç farklı şekilde belirlenebilir?

$$ {}_{8}P_{3} = \frac{8!}{(8-3)!} = 8*7*6 = 336 $$

Örnek: 2,3,5,6,7 ve 9 sayılarını kullanarak 4 basamaklı rakamları birbirinden farklı kaç sayı oluşturulur?

$$ {}_{6}P_{4} = \frac{6!}{(6-4)!} = 6*5*4*3 = 360 $$

Çarpım kuralı ile çözersek: 6*5*4*3=360

Kombinasyon

- *n* adet nesne arasından **<u>seçilen</u>** *r* tanesinin kombinasyon sayısı C(n,r) yada ${}_nC_r$ şeklinde gösterilir.

- **<u>Sıralama önemli olmaksızın</u>** tüm durumların sayısı olarak ifade edilir. Bu sayı şu şekilde hesaplanır:

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

Örnek

- Beş kişilik bir topluluktan üç kişilik bir komisyon kaç farklı şekilde seçilir ?

Çözüm

- Beş kişilik bir topluluktan üç kişilik bir komisyon kaç farklı şekilde seçilir ?

$$ {}_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5*4*3*2}{2*3*2} = 10 $$

Örnek

- 10 erkek ve 5 kadın arasından 2 erkek ve 1 kadın üye içeren bir kurul kaç farklı şekilde oluşturulur?

Çözüm

- 10 erkek ve 5 kadın arasından 2 erkek ve 1 kadın üye içeren bir kurul kaç farklı şekilde oluşturulur?

$$_{10}C_2 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10*9}{2} = 45$$

(10 erkek arasından 2 erkek)

$$_5C_1 = \frac{5!}{(5-1)!1!} = 5$$

(5 kadın arasından 1 kadın)

Çarpım kuralı: 45 * 5 =225 farklı şekilde oluşturulur.

Örnek

- 10 işletme ve 8 mühendislik öğrencisi arasından 5 kişilik bir komisyon oluşturulacaktır. Rasgele bir seçim yapıldığında komisyonda <u>çoğunlukla işletme </u>öğrencisi olma <u>olasılığı</u> nedir?

5 işletme 0 mühendis, 4 işletme 1 mühendis, 3 işletme 2 mühendis

$$\frac{{}_{10}C_5 \; {}_8C_0}{{}_{18}C_5} + \frac{{}_{10}C_4 \; {}_8C_1}{{}_{18}C_5} + \frac{{}_{10}C_3 \; {}_8C_2}{{}_{18}C_5} = \frac{5292}{8568} \approx 0{,}62$$

Kullanılan Kaynaklar

- Probability&Statistics for Enginneers&Scientists, R. E. Walpole, R.H. Myers, S.L. Myers, K. Ye
- İstatistik Ders Notları, Dr. Mehmet Aksaraylı
- Bilişim Teknolojileri için İşletme İstatistiği, Dr. Öğrt. Üyesi Halil İbrahim CEBECİ, SAÜ