x Cisim

- Değişmeli Halka $(H,+,\cdot)$ halkasında çarpma işleminin değişme özelliği varsa,
- Birim Halka $(H,+,\cdot)$ halkasında çarpma işleminin birim elemanı varsa,

1) $(F,+)$ bir abelyen gruptur.
2) $(F-\{0\},\cdot)$ bir abelyen gruptur (Halkanın $\{0\}$'ı "+" işlemine göre birim eleman)
3) $\cdot$ işleminin $+$ üzerinde dağılımcı özelliği vardır.

Örn)
$$\left.\begin{aligned} x \circ y &= x+y-1 \\ x \cdot y &= x+y-xy \end{aligned}\right\} (\mathbb{Z},\circ,\cdot) \text{ yapısı bir cisim midir?}$$

1.3) $\forall x \in \mathbb{Z}$

$\left.\begin{array}{l} x \circ e = x \\ \text{veya} \\ e \circ x = x \end{array}\right\}$ Buna göre; $x+e-1=x$

$e=1$ (Halkanın Sıfırı

2.3) $\forall x \in \mathbb{Z}$

$\left.\begin{array}{l} x \cdot e = x \\ e \cdot x = x \end{array}\right\}$ $x+e-xe=x$

$e(1-x)=0 \Rightarrow e=0$

2.4) $\forall x \in \mathbb{Z}$

$x \cdot x^{-1} = \underset{e}{0} \Rightarrow x+x^{-1}-x.x^{-1}=0 \Rightarrow x^{-1}(1-x)=-1$ $\quad x^{-1}=\frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow x \neq 1$

2.5) $\forall x,y \in \mathbb{Z}$

$x \cdot y \overset{?}{=} y \cdot x$

$= x \cdot y - xy$

$= y+x-yx$

Vektör uzayı

①Örneğin; $V = \{ x, y \mid x, y \in R \}$

1. $\forall (x,y), (u,w) \in V$ için $(x,y) \oplus (u,w) = (x+u, y+w)$ ----

---- $\rightarrow (V \times V \rightarrow V)$

2. $\forall\ a \in R$ ve $(x,y) \in V$ için $a \otimes (x,y) = (ax, ay) \rightarrow (R \times V \rightarrow V$

3. $V, (R, +, \cdot)$ matematiksel yapısı üzerinde bir vektör uzayı mıdır

1) $(V, \oplus)$ değişmeli grup mu?

2) $(R, +, \cdot)$ yapısı bir cisim mi?

3) Şartlar (5 adet) sağlanıyor mu?

1.1) $V \times V \Rightarrow X$

$x, y, u, w \in R \Rightarrow x, y, u, w \in V$

$(x+u, y+w) \in V$

$\Rightarrow (x,y) \oplus (u,w) \in$

1.2) $\forall (x,y), (u,w), (s,t) \in V$ için

$$[(x,y) \oplus (u,w)] \oplus (s,t) \overset{?}{=} (x,y) \oplus [(u,w) \oplus (s,t)]$$

$$= (x+u, y+w) \oplus (s,t)$$

$$= (x+(u+s), y+(w+t))$$

$$= (x,y) \oplus (u+s, w+t)$$

1.3) $\forall x, y \in V$ için

$(x,y) \oplus (e1, e2) = (x,y)$

$(x+e1, y+e2) = (x,y)$

$(e_1, e_2) = (0,0)$

1.4) $\forall\ x, y \in V$ için

$(x,y) \oplus (x^{-1}, y^{-1}) = (0,0)$

$(x+x^{-1}, y+y^{-1}) = (0,0) \Rightarrow (x^{-1}, y^{-1}) = (-x, -y)$

1.5) $\forall\, x, y, u, v \in V$ için;

$$(x,y) \oplus (u,v) \overset{?}{=} (u,v) \oplus (x,y)$$
$$= (x+u, y+v)$$
$$= (u+x, v+y)$$

3.1) $a \otimes (x,y) = (a.x,\ a.y) \in R$

$$= (a.x,\ a.y) \in V$$

3.2) $a \otimes (u \oplus V) = (a \otimes u) \oplus (a \otimes V)$

$u \to (x,y)$, $V \to (u,v)$

$$a \otimes ((x,y) \oplus (u,v)) \overset{?}{=} [a \otimes (x,y)] \oplus [a \otimes (u,v)]$$

$$= a \otimes (x+u, y+v)$$
$$= (a(x+u), a(y+v))$$
$$= (ax+au, ay+av)$$
$$= (ax, y) \oplus (au, av)$$
$$= [a \otimes (x,y)] \oplus [a \otimes (u,v)]$$

3.3) ⓪ $(a+b) \otimes (x,y) \overset{?}{=} [a \otimes (x,y)] \oplus [b \otimes (x,y)]$

① $(ax+bx, ay+by)$ $=$ ② $(ax+bx, ay+by)$

③ $(ax, ay) \oplus (bx, by)$ $=$ ④ $[a \otimes (x,y)] \oplus [b \otimes (x,y)]$

3.5) $1 \otimes (x,y) \overset{?}{=} (x,y)$

$$= (1.x, 1.y)$$ ✓

3.4) $(a,b) \otimes (x,y) \overset{?}{=} a \otimes [b \otimes (x,y)]$

$$= (abx, aby)$$
$$= a \otimes (bx, by)$$
$$= a \otimes [b \otimes (x,y)]$$

Tamsayılar

Örn) $\overline{(3,1)} = \{ (x,y) \in N \times N : (x,y) \mid (3,1) \}$
$= \{ (x,y) \in N \times N : x+1 = y+3 \}$
$= \{ (2,0), (3,1), (4,2) \dots \}$

B... Şenyerli

Örnek) $\overline{(0,4)} = ?$
$= \{ (x,y) \in N \times N : (x,y) \mid (0,4) \}$
$= \{ (x,y) \in N \times N : x+4 = y \}$
$= \{ (0,4), (1,5), (2,6) \dots \}$

Örn) $(3,2) \stackrel{?}{\equiv} (4,3)$
$3+3 = 2+4$ ✓

2) $\overline{(0,0)} + \overline{(4,3)} = \overline{(4,3)}$
$\overline{(0,0)} \cdot \overline{(4,3)} = \overline{(0.4+0.3,\ 0.3+0.4)}$
$= \overline{(0,0)}$

Örn) $\overline{(0,0)} = \{(0,0), (1,1), \dots, (a,a) \dots\}$
$\overline{(1,0)} = \{(1,0), (2,1), (3,2) \dots (a+1,a)\}$

1) ispat
$(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$

1) $\sim$ bağıntısı yansıyan mı?
$\forall (a,b) \in N \times N$ için;
$a+b = b+a$
$(a,b) \sim (a,b)$

2) $\sim$ bağıntısı simetrik mi?
$(a,b), (c,d) \in N \times N$
$(a,b) \sim (c,d) \stackrel{?}{=} (c,d) \sim (a,b)$
$= a+d = b+c$
$= a+d = c+b$
$= c+b = a+d$

3) $\sim$ geçişli mi?
$(a,b) \stackrel{?}{\sim} (e,f)$
$a+d = b+c$
$c+f = d+e$
$a+\cancel{d}+\cancel{c}+f = b+\cancel{c}+\cancel{d}+e$
$a+f = b+e \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$