	Bilişim Sistemleri Mühendisliği Bölümü 2021–2022 Öğretim Yılı Bahar Dönemi Lineer Cebir Ara Sınavı	Sınav Tarihi:	06.04.2022			
		Öğr. No:				
		Adı Soyadı:	CEVAP ANAHTARI			
		Notu	1.	2.	3.	4.

NOT: İşlem yapılmadan bulunacak sonuçlar dikkate alınmayacaktır. Hesap makinası kullanmak yasaktır. Sınav süresi 70 dakikadır. Başarılar dilerim.

Soru 1. Aşağıdaki şıklardan <u>sadece birini</u> çözünüz. **(25 Puan)**

a.

$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 1 & a\\ 2 & 2 & b\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$ matrisi ortogonal ($A^T = A^{-1}$) ise $a+b$ toplamını hesaplayınız.

b.

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ matrisi 2.mertebeden nilpotent ($A^n=\bar{0}$ özelliğini sağlayan matrise *n.mertebeden nilpotent matris* denir) olduğunu gösteriniz.

1. a) A ortogonal ise $A^T = A^{-1}$ dir. Her tarafı soldan A ile çarpalım.

$$A A^T = \underbrace{A A^{-1}}_{I_n} \Rightarrow A A^T = I_3 \text{ olmalıdır.}$$

$$A \cdot A^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 1 & a\\ 2 & 2 & b\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ a & b & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}5+a^2 & \cdot & \cdot\\ -2+ab & \cdot & \cdot\\ -4+2a & \cdot & \cdot\end{bmatrix} = I_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{5+a^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \mp 2$$

$$\Rightarrow \frac{-2+ab}{9} = 0 \Rightarrow ab = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-4+2a}{9} = 0 \Rightarrow a = 2$$

$a=2$ ise $b=1$ olmalıdır.

$a+b = 2+1 = 3$ ✓

b) A 2.mertebeden ise $A^2 = \bar{0}$ olmalıdır.

$$A \cdot A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9\\ 1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9\\ -1-2+3 & -2-4+6 & -3-6+9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \bar{0}$$

sağlanır. ✓

Soru 2.

$$\left.\begin{array}{l} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = m^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = m^3 \end{array}\right\}$$ lineer denklem sisteminin çözümünü m ye göre inceleyiniz. **(25 puan)**

Artırılmış matrisi satırca eşelon forma indirgemeye çalışalım.

1. Adım

$$\left[\begin{array}{cccc|c} m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 & m & m^3 \end{array}\right] \underset{r_1 \leftrightarrow r_4}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & m^3 \\ 1 & m & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 & m^2 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - mr_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & m^3 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & m-m^3 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & m^2-m^3 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 & 1-m^4 \end{array}\right]$$

ilk satırda ilk eleman 1 ve altındakiler sıfır oldu. Şimdi 2. satıra geçelim.

2. Adım

2. satırda ilk eleman $m-1$. Fakat $m=1$ olursa bölme işlemi $\left(\frac{1}{m-1}\right)$ yapılamaz.

Dolayısıyla $m-1=0$, yani $\underline{\underline{m=1}}$ olursa:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ elde edilir. $n=4, r=1$, $n-r=3$ adet parametreye bağlı <u>SONSUZ ÇÖZÜM</u> vardır.

3. Adım

$m \neq 1$ ise $\frac{1}{m-1}$ yapılabilir.

$$r_2 \leftarrow \frac{r_2}{m-1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & m^3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -m(m+1) \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & m^2-m^3 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 & 1-m^4 \end{array}\right] \underset{r_4 \leftarrow r_4 + (m-1) r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & m^3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -m(m+1) \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & m^2-m^3 \\ 0 & 0 & 1-m & (1-m)(m+2) & (1-m^2)(1+m+m^2) \end{array}\right]$$

$$\underset{r_3 \leftarrow \frac{r_3}{m-1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & m^3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -m(m+1) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & 1-m & (1-m)(m+2) & (1-m^2)(1+m+m^2) \end{array}\right] \underset{r_4 \leftarrow r_4 + (m-1) r_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & m^3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -m(m+1) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & 0 & (1-m)(m+3) & (1-m)(m^3+3m^2+2m+1) \end{array}\right]$$

$$\underset{r_4 \leftarrow \frac{r_4}{1-m}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & m^3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -m(m+1) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & 0 & m+3 & +(m^3+3m^2+2m+1) \end{array}\right]$$

$m \neq -3$ olursa TEK ÇÖZÜM olur.

$m=-3$ olursa son satır $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid -5)$ olacağından sistem tutarsız olur. ÇÖZÜM YOKTUR.

<u>SONUÇ:</u> $m=1$ olursa SONSUZ ÇÖZÜM

$m=-3$ olursa ÇÖZÜM YOKTUR.

$m \neq 1$ ve $m \neq -3$ olursa TEK ÇÖZÜM vardır. ✓

Soru 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$ denklemini çözünüz. **(25 Puan)**

Önce soldaki determinantı hesaplayalım.

$r_1 \leftarrow r_1 + r_2$, $r_1 \leftarrow r_1 + r_3$, $r_1 \leftarrow r_1 + r_4$ işlemleri yapılırsa determinant değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix} 1+3x & 1+3x & 1+3x & 1+3x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = (1+3x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$r_2 \leftarrow r_2 - x r_1$, $r_3 \leftarrow r_3 - x r_1$, $r_4 \leftarrow r_4 - x r_1$ işlemleri yapılırsa determinant değeri değişmez.

$$(1+3x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1+3x)(1-x)(1-x)(1-x)$$

Sonuç $(1+3x)(1-x)^3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3},\ x = 1$ çözümü elde edilir.

$Ç.K = \{1, -\frac{1}{3}\}$ ✓

Soru 4.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersini $\left[A\middle|I_n\right]-\left[I_n\middle|A^{-1}\right]$ *yöntemi* (elementer işlemler yaparak) ile hesaplayınız. **(25 Puan)**

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{r_2 \leftrightarrow r_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_3 \leftarrow r_3+3r_1}{\overset{r_2 \leftarrow r_2-2r_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{r_2 \leftarrow -r_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{r_3 \leftarrow r_3-r_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{r_3 \leftarrow \frac{r_3}{7}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_1 \leftarrow r_1-3r_3}{\overset{r_2 \leftarrow r_2-2r_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/7 & 4/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & -9/7 & 12/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{I_3} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -9 & 12 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ✓$$