Bağıntılar (Relations)

Bağıntı, sıralı çiftler (ordered pairs) olarak tanımlanır ve (a, b) biçiminde gösterilir. Bu sıralamada a, birinci eleman ve b de ikinci elaman olarak tasarlanmıştır.

$(a, b) = (c, d)$ gibi iki bağıntının eşit olabilmesi için $a = c$ ve $b = d$ nin eşit olması gerekir. Aksi durumda bağıntıların denkliğinden bahsedilemez. Yani; (a, b) $\neq$(b, a), a=b olmadığı müddetçe bu iki bağıntı eşit olmaz. Bu yapısı ile bağıntılar kümelerden farklı bir özellik içermektedir.

Hatırlayalım, küme kavramında eşitlik olması için sıralı ilişki aranmaz. Yani {3, 5}={5, 3} küme teorisi açısından birbirine eşittir.

Kartezyen Çarpım

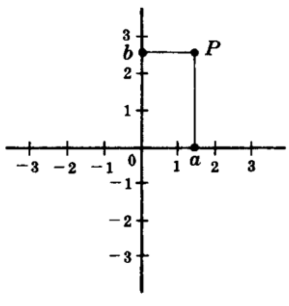
A ve B gibi iki küme göz önüne alalım. Tüm sıralı çiftler $(a, b), a\epsilon A\ ve\ b\epsilon B$ olmak üzere A ve B'nin Kartezyen çarpımı olarak adlandırılır ve $A \times B$ notasyonu ile gösterilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$A \times B = \{(a, b) |\ a \in A\ ve\ b \in B\}$$

Eğer kartezyen çarpım aynı kümenin birbiri ile çarpımı şeklinde yapılıyorsa bu durumda $A \times A$ yerine A^2 biçiminde gösterilir.

Örnek

R reel sayılar kümesini gösterir ve dolayısıyla R^2 = R×R sıralı gerçel sayı çiftleri kümesidir. Şekildeki gibi düzlemdeki noktalar olarak R^2'nin geometrik temsiline normal matematik dersinden aşinayız. Burada her P noktası, sıralı bir reel sayı çiftini (a, b) temsil eder ve bunun tersi de geçerlidir; P'den geçen dikey çizgi a noktasında x ekseniyle ve P'den geçen yatay çizgi b noktasında y ekseniyle buluşur. R^2 genellikle Kartezyen düzlem olarak adlandırılır.



Örnek A = {1, 2} ve B = {a, b, c} birer küme olsun.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$$

Ayrıca, $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Yukarıdaki örneklerde dikkat edilmesi gereken iki şey vardır. Öncelikle $A \times B \neq B \times A$ dir. Kartezyen çarpım sıralı çiftlerle ilgilenir. Bu nedenle doğal olarak kümelerin dikkate alındığı sıra önemlidir. İkinci olarak, bir S kümesindeki eleman sayısı için $n(S)$ kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$n(A \times B) = 6 = 2(3) = n(A)n(B)$$

Aslında, herhangi bir A ve B sonlu kümesi için $n(A \times B) = n(A)n(B)$'dir. Bu, A × B'deki sıralı bir (a, b) çifti için n (A), a için olasılıklar ve n(B) b için olasılıkları ifade eder.

Kümelerin çarpımı fikri, herhangi bir sonlu sayıda kümeye genişletilebilir. Herhangi bir A1, A2,...,An kümesi için, a1 ∈ A1, a2 ∈ A2,...,an ∈ An olarak adlandırılan tüm sıralı n-tuples (a1, a2,...,an) kümesi A1,...,An kümelerinin çarpımı aşağıdaki gibi gösterilir.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad \text{or} \quad \prod_{i=1}^{n} A_1$$

$A \times A$ yerine A^2 yazdığımız gibi, A × A ×···× A yerine A^n yazılabilir. Burada hepsi A'ya eşit n faktör var demektir.

Örneğin, $R^3 = R \times R \times R$, olağan üç boyutlu alanı ifade eder.

İLİŞKİLER

Bir tanımla başlıyoruz.

Tanım: A ve B küme olsun. İkili bir ilişki veya basitçe, A'dan B'ye ilişki, $A \times B$'nin bir alt kümesidir.

R'nin A'dan B'ye bir bağıntı olduğunu varsayalım. O zaman R, her birinci öğenin A'dan ve her ikinci öğenin B'den geldiği bir sıralı çiftler kümesidir. Yani, her bir a ∈ A ve b ∈ B çifti için aşağıda verilen ifadeler doğrudur:

(i) (a, b) ∈ R; sonra “a, b ile R ile ilgilidir” deriz, aRb biçiminde yazılır.

(ii) (a, b) ∈ R; sonra “a, b ile R ile ilgili değil” deriz, aRb yazılır.

R, bir A kümesinden kendisiyle bir ilişki ise, yani R, $A^2 = A \times A$'nın bir alt kümesiyse, o zaman R'nin A üzerinde bir ilişki olduğunu söyleriz.

Bir R ilişkisinin alanı (domain), R'ye ait olan sıralı çiftlerin tüm ilk öğelerinin kümesidir ve aralık (range), ikinci öğelerin kümesidir.

Örnek:

(a) A = (1, 2, 3) ve B = {x, y, z} ve R = {(1, y), (1, z), (3, y)} olsun. O zaman R, A × B'nin bir alt kümesi olduğundan, A'dan B'ye bir bağıntıdır. Bu bağıntıya göre, 1Ry, 1Rz, 3Ry, ancak

1Rx, 2Rx, 2Ry, 2Rz, 3Rx, 3Rz.

Bu örnekte R'nin etki alanı {1, 3} ve aralığı {y,z}'dir.

Ters Bağıntı

R, bir A kümesinden bir B kümesine herhangi bir ilişki olsun. R'nin R^{-1} ile gösterilen tersi, B'den A'ya, tersine çevrildiğinde R'ye ait olan sıralı çiftlerden oluşan ilişkidir; yani, $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$

Örneğin, A = {1, 2, 3} ve B = {x, y, z} olsun. Daha sonra tersi

R = {(1, y), (1, z), (3, y)} R^{-1} = {(y, 1), (z, 1), (y, 3)}

Açıkça, eğer R herhangi bir bağıntı ise, o zaman $(R^{-1})^{-1} = R$. Ayrıca, R^{-1}'in alanı ve aralığı, sırasıyla, R'nin aralığına ve alanına eşittir. Ayrıca, eğer R A üzerinde bir bağıntı ise, o zaman R^{-1} de A üzerinde bir bağıntıdır.

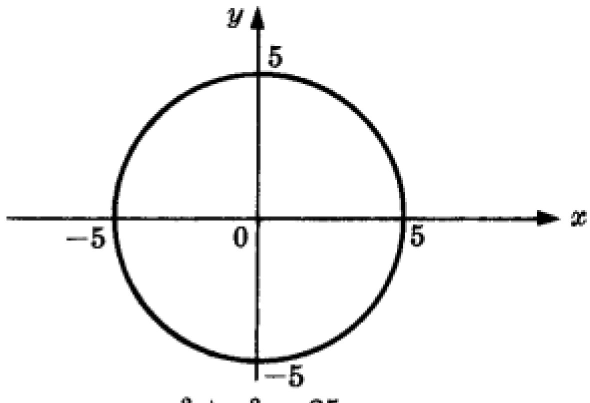
İlişkilerin Resimli Gösterimleri

İlişkileri resmetmenin çeşitli yolları vardır.

R üzerindeki ilişkiler

S reel sayılar kümesi R üzerinde bir bağıntı olsun; yani, S, $R^2 = R \times R$'nin bir alt kümesidir. Sıklıkla, S, verilen E(x, y) = 0, ($x^2 + y^2 = 25$ gibi) denklemini sağlayan tüm sıralı gerçek sayı çiftlerinden oluşur.

R^2 düzlemdeki noktalar kümeyle temsil edilebildiğinden, düzlemde S'ye ait olan noktaları vurgulayarak S'yi resmedebiliriz. İlişkinin resimli temsiline ilişkinin grafiği denir. Örneğin, $x^2 + y^2 = 25$ ilişkisinin grafiği, merkezi orijinde ve yarıçapı 5 olan bir dairedir. Şekil.



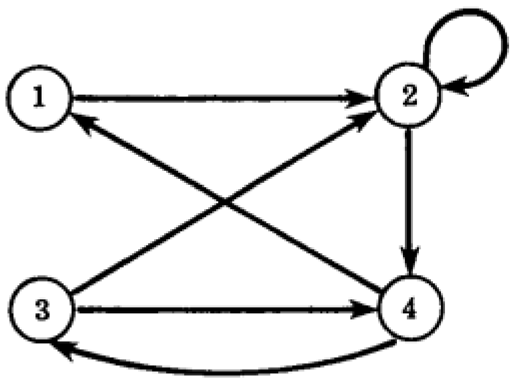
$x^2 + y^2 = 25$

İlişkilerin Yönlendirilmiş Grafiklerle Temsili

Sonlu bir küme üzerinde bir R ilişkisini hayal etmenin önemli bir yolu vardır. İlk önce kümenin elemanlarını yazıyoruz ve sonra her x elemanından her x elemanına her x, y ile ilgili olduğunda bir ok çiziyoruz. Bu diyagrama ilişkinin yönlendirilmiş grafiği denir. Şekil, örneğin, aşağıdaki ilişkinin yönlendirilmiş grafiğini gösterir.

A = {1, 2, 3, 4} kümesindeki R ilişkisi:

R = {(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)}



2 nolu düğümde, ilişkinin kendisinden-kendisine olduğuna dikkat edin.

İlişkinin Matris Olarak Temsili:

P = [a1,a2,a3,.......am] ve Q = [b1,b2,b3......bn] sırasıyla m ve n sayıda eleman içeren sonlu kümelerdir. R, P'den Q'ya bir ilişkidir. R ilişkisi, şu şekilde tanımlanan m x n matris M = [M_{ij}] ile temsil edilebilir.

$$M_{ij} \;=\; 0 \quad if \;\; (a_i, b_j) \notin R$$
$$1 \quad if \;\; (a_i, b_j\,) \in R$$

$P \;=\; \{1, 2, 3, 4\}, Q \;=\; \{a, b, c, d\}$ olsun ve $R \;=\; \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, b), (2, c), (2, d)\}$ ilişkisi tanımlansın.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Ok Diyagramı ile İlişkinin Temsili:

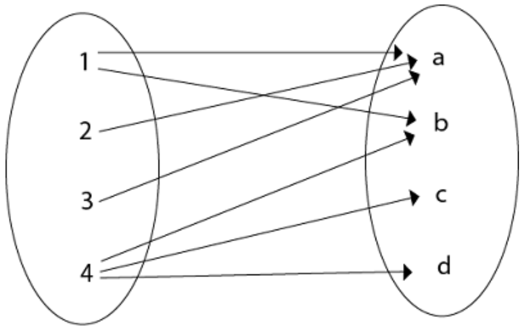
P ve Q sonlu kümelerse ve R, P'den Q'ya bir bağıntıysa. R ilişkisi aşağıdaki gibi bir ok diyagramı olarak gösterilebilir.

Örnek:

P = {1, 2, 3, 4} ve Q = {a, b, c, d} iki küme olsun ve bu kümeler üzerinde aşağıdaki ilişki tanımlansın.

R = {(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (4, b), (4, c), (4, d)

Gösterim için: P ve Q kümeleri için iki elips çizilir. P'nin öğelerini ve Q'nun öğelerini sütun şeklinde elipsler içerisinde yazılır. Ardından, a, b ve $a \;\in\; P$ ve $b \;\in\; Q$ ile ilişkiliyse, birinci elipsten ikinci elipse bir ok çizilir.



R = {(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (4, b), (4, c), (4, d)

İlişkilerin Bileşimi

A, B ve C kümeleri olsun ve R, A'dan B'ye bir bağıntı olsun ve S, B'den C'ye bir bağıntı olsun. Yani, R A × B'nin bir alt kümesi ve S, B × C'nin bir alt kümesidir. O zaman R ve S, A'dan C'ye, R◦S ile gösterilen ve şu şekilde tanımlanan bir bağıntıya yol açar:

a(R◦S)c eğer bazı b ∈ B için aRb ve bSc'ye sahibiz.

Yani, R ◦ S = {(a, c)| (a, b) ∈ R ve (b, c) ∈ S} için b ∈ B vardır

R◦S ilişkisine R ve S'nin bileşimi denir ve bazen sadece RS ile gösterilir.

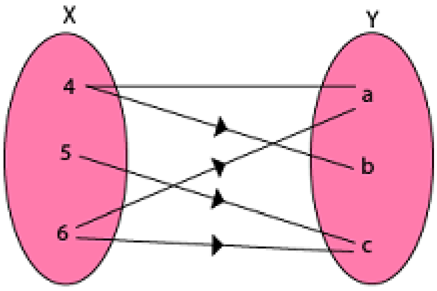
R'nin bir A kümesi üzerinde bir ilişki olduğunu, yani R'nin bir A kümesinden kendisiyle bir ilişki olduğunu varsayalım. Daha sonra, R'nin kendisiyle bileşimi olan R◦R her zaman tanımlanır. Ayrıca, R◦R bazen R^2 ile gösterilir. Benzer şekilde, $R^3 = R^2 \circ R = R \circ R \circ R$ ve bunun gibi. Böylece R^n, tüm pozitif n için tanımlanır.

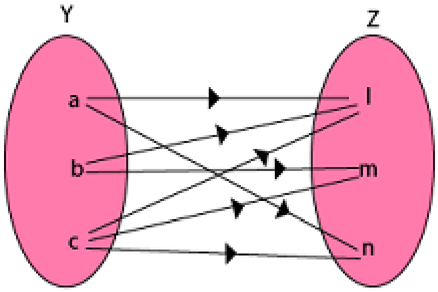
Örnek1:

X = {4, 5, 6}, Y = {a, b, c} ve Z = {l, m, n} olsun. X'ten Y'ye R1 ve Y'den Z'ye R2 ilişkisini düşünün.

$$R1 \ = \ \{(4, a), (4, b), (5, c), (6, a), (6, c)\}$$

$$R2 \ = \ \{(a, l), (a, n), (b, l), (b, m), (c, l), (c, m), (c, n)\}$$



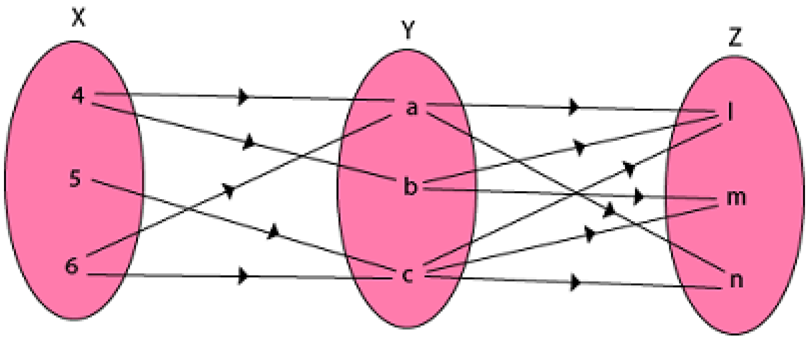


Bu iki ilişkinin bileşimini bulalım.

(i) $R_1 \; o \; R_2$

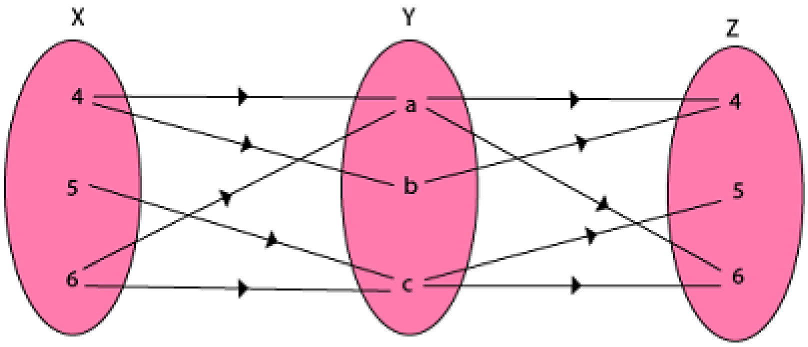
(ii)$R_1 o \; {R_1}^{-1}$

Şekilde gösterildiği gibi $R1 \; o \; R2$ bileşim ilişkisi:



$$R_1 \; o \; R_2 \; = \; \{(4,l),(4,n),(4,m),(5,l),(5,m),(5,n),(6,l),(6,m),(6,n)\}$$

Şekilde gösterildiği gibi $R1o \; R1^{-1}$ bileşim ilişkisi:



$$R_1 o \; {R_1}^{-1} \; = \; \{(4,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(4,6),(6,6)\}$$

$$R1 \; = \; \{(4,a),(4,b),(5,c),(6,a),(6,c)\}$$

İlişkilerin ve Matrislerin Bileşimi

$R \circ S$'yi bulmanın başka bir yolu daha vardır. M_R ve M_S, sırasıyla R ve S ilişkilerinin matris temsillerini göstersin.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

M_R ve M_S’ yi çarparak matrisi elde ederiz.

$$M = M_R M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Örnek

$P = \{2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde tanımlanan aşağıdaki R ve S ilişkisini göz önüne alalım.

$$R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 3)\}$$

$$S = \{(2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 5)\}.$$

Yukarıdaki bağıntıların matrislerini bulunuz.

Aşağıdaki R ve S ilişkisinin bileşimini bulmak için matrisleri kullanın.

(i)RoS (ii)RoR (iii)SoR

R ve S ilişkisinin matrisleri, aşağıdaki Şekil 'de gösterilmiştir:

$$M_R = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{ve} \quad M_S = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 3)\}$$

$$S = \{(2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 5)\}.$$

i) R ve S ilişkisinin bileşimini elde etmek için. Şekilde gösterildiği gibi MR x MS matrisini elde etmek için önce MR, MS ile çarpılır:

$$M_R \times M_S = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

MR x MS matrisindeki sıfır olmayan girişler, RoS ile ilgili öğeleri anlatır. Dolayısıyla, R ve S ilişkisinin R o S bileşimi

$$R \, o \, S = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

ii) İlk olarak, MR matrisini Şekilde gösterildiği gibi kendisiyle çarpılır.

$$M_R \times M_R = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dolayısıyla, R ve S ilişkisinin R o R bileşimi

$$R \, o \, R \; = \; \{(2,\ 2),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 2),\ (4,\ 5),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 5)\}$$

(iii) Şekilde gösterildiği gibi MS x MR matrisini elde etmek için MS matrisini MR ile çarpılır:

MS x MR matrisindeki sıfır olmayan girişler, S o R ile ilgili öğeleri anlatır.

$$M_S X\, M_R = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Dolayısıyla, S ve R ilişkisinin S o R bileşimi

$S \, o \, R \; = \; \{(2,\ 4)\ ,\ (2,\ 5),\ (3,\ 2), (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5)\}$

İlişki Türleri

Bu bölümde, bir A kümesinde tanımlanan bir dizi önemli ilişki türü tartışılmaktadır.

Refleksif (Yansımalı) ilişki

Bir A kümesindeki bir R ilişkisi, eğer her a ∈ A için aRa ise, yani her a ∈ A için (a, a) ∈ R ise dönüşlüdür. Böylece R (a, a) /∈ R olacak şekilde bir ∈ A varsa dönüşlü değildir.

Her a ∈ A için (a, a) ∈ R ise, A kümesindeki bir R ilişkisinin yansımalı olduğu söylenir.

A = {1, 2, 3, 4} kümesinde aşağıdaki beş ilişkiyi göz önünde bulundurun:

R1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)}

R2 = {(1, 1)(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

R3 = {(1, 3), (2, 1)}

R4 = ∅, boş ilişki

R5 = A × A, evrensel bağıntı

Hangi ilişkilerin refleksiv olduğunu belirleyin

A, 1, 2, 3 ve 4 numaralı dört öğeyi içerdiğinden, A üzerindeki bir R ilişkisi, (1, 1), (2, 2), (3, 3) ve (4,4) dört çiftini içeriyorsa dönüşlüdür. Dolayısıyla yalnızca R2 ve evrensel R5 = A × A ilişkisi dönüşlüdür. R1, R3 ve R4 dönüşlü değildir, çünkü örneğin (2, 2) bunlardan hiçbirine ait değildir.

Örnek

A = {1, 2, 3, 4} ise R = {(1, 1) (2, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}. Bir ilişki refleksif midir?

Çözüm: Bağıntı, her a ∈ A. (a, a) ∈ R, yani (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) ∈ R olduğu için yansımalıdır.

Yansımasız İlişki:

Her a ∈ A için (a, a) ∉ R ise, A kümesindeki bir R ilişkisinin dönüşsüz olduğu söylenir.

Örnek: A = {1, 2, 3} ve R = {(1, 2), (2, 2), (3, 1), (1, 3)} olsun. R bağıntısı dönüşlü mü yoksa dönüşsüz mü?

Çözüm: R bağıntısı, her a ∈ A, (a, a) ∉ R, yani (1, 1) ve (3, 3) ∉ R için olduğu gibi dönüşlü değildir. R bağıntısı (a, a gibi) dönüşsüz değildir.) ∉ R, bazıları için a ∈ A, yani (2, 2) ∈ R.

Simetrik İlişki: A kümesindeki bir R ilişkisinin simetrik iff (a, b) ∈ R ⇔ (b, a) ∈ R olduğu söylenir.

Örnek: A= {1, 2, 3} ve R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)} olsun. Bu R ilişkisi simetrik midir, değil midir?

Çözüm:

Bağıntı her (a, b) ∈ R için olduğu gibi simetriktir, elimizde (b, a) ∈ R, yani (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2) ∈ R ama dönüşlü değil çünkü (3, 3) ∉ R.

Antisimetrik İlişki:

Bir A kümesindeki bir R ilişkisi, (a, b) ∈ R ve (b, a) ∈ R o zaman a = b ise antisimetriktir.

Örnek1:

A = {1, 2, 3} ve R = {(1, 1), (2, 2)} olsun. R ilişkisi antisimetrik mi?

Çözüm:

(a, b) ve (b, a) her ikisi de R'ye ait olduğunda, R bağıntısı a = b olarak antisimetriktir.

Örnek2:

A = {4, 5, 6} ve R = {(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (4, 6)} olsun. R ilişkisi antisimetrik mi?

Çözüm:

R bağıntısı 4 ≠ 5 olarak antisimetrik değildir, ancak (4, 5) ve (5, 4) her ikisi de R'ye aittir.

Geçişli Bağıntılar:

Bir A kümesindeki R bağıntısı, eğer aRb ve bRc olduğunda aRc ise, yani (a, b), (b, c) ∈ R o zaman (a, c) ∈ R ise, geçişlidir.

Dolayısıyla, (a, b), (b, c) ∈ R ama (a, c) /∈ R olacak şekilde a, b, c ∈ R varsa R geçişli değildir.

A kümesindeki A R İlişkisinin geçişli olduğu söylenir iff (a, b) ∈ R ve (b, c) ∈ R ⟺ (a, c) ∈ R.

Örnek1:

A = {1, 2, 3} ve R = {(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)} olsun. İlişki geçişli midir?

Çözüm:

Her (a, b) (b, c) R'ye ait olduğu için R bağıntısı geçişlidir, elimizde (a, c) ∈ Ri yani, (1, 2) (2, 1) ∈ R ⇒ (1 , 1) ∈ R.