

Yöneylem Araştırması

HAFTA 1

Ders Tanıtımı & Giriş

Dr. Öğretim Üyesi Burcu ÇARKLI YAVUZ
bcarkli@sakarya.edu.tr

Ders İçeriği

- Yöneylem Araştırmasına Giriş
- Doğrusal Programlamaya Giriş
- Doğrusal Programlama: Simpleks Yöntemi
- Dualite ve Duyarlılık Analizi
- Excel Solver / LINDO ile DP Problem çözümü
- Ulaştırma Modelleri
- Atama Modeli

Ders Değerlendirme

➤ Yıl İçi Başarı Oranı **%50**

- Vize %50
- Kısa sınav 1 %15
- Kısa sınav 2 %15
- Kısa sınav 3 %20

➤ Yıl Sonu Başarı Oranı **%50**

Önerilen Kaynaklar

- Paylaşılan ders notları
- Yöneylem Araştırması, Hamdy A. Taha, Çeviren: Ş. Alp Baray, Şakir Esnaf, Literatür Yayınevi
- Yöneylem Araştırması, Ahmet Öztürk, Ekin Yayınevi
- Yöneylem Araştırmasına Giriş, Hillier&Lieberman, Çeviri: Ferhan Çebi, İpek Deveci Kocakoç, Nobel Yayınevi

Yöneylem Araştırmasına Giriş

- Yöneylem araştırması, karar verme sürecine destek olur.
- Kıt kaynakların paylaşımının söz konusu olduğu sistemlerde kaynakların optimum kullanımına yönelik karar problemlerinde optimum şartların belirlenmesi amaçlanır.
- YA yöntemleri ile kısıtlı kaynaklar ihtiyaçlara göre tahsis edilerek belirli bir amaca yönelik sistemin çalışabileceği en uygun şartlar belirlenir.

Yöneylem Araştırmasının Doğuşu

- Yöneylem araştırmasının doğuşu İkinci Dünya Savaşı zamanına dayanmaktadır.
- Savaşta kıt kaynakların farklı askeri birimlere, ivedilikle ve etkin biçimde dağıtılması bir zorunluluktur. Bu nedenle İngiltere ve Amerika Birleşik Devletleri'nin askeri yönetimleri stratejik ve taktiksel problemlere bilimsel yaklaşımın uygulanması için çok sayıda bilim insanını bir araya getirdiler.
- Bu bilim insanlarından istenilen şey, **savaştaki askeri konularda araştırma yapmalarıdır**. Bu bilim insanları ilk yöneylem araştırması ekibidir.
- Bu ekibin, yeni radar aracının kullanımı için geliştirdiği etkili yöntemler ile Britanya Hava Sahası Almanlara karşı kazanılmıştır.
- Aynı zamanda denizaltı avcı gemilerinin hareketleri ve konvoyların daha iyi yönetimi yönündeki araştırmaları da Kuzey Atlantik Savaşının kazanılmasında önemli rol oynamıştır.

Yöneylem Araştırmasının Doğuşu

- Yöneylem araştırmasının İkinci Dünya Savaşı sırasında sağladığı avantajlar, savaş sonrasında bu araştırmaların farklı alanlara da uygulanabilmesi fikrini doğurmuştur.
- Savaş sırasında karşılaşılan problemlerin iş dünyasındaki problemlere benzer olduğunu savunan Yöneylem araştırmacıları, 1950'lerin başında çeşitli işletmelerin ve hükümet kuruluşlarının sorunlarını çözmek için danışmanlık yapmışlardır.
- Bu çalışmaların sonucunda Yöneylem Araştırması uygulamaları hızla yayılmış ve yeni teknikler geliştirilmiştir.

Yöneylem Araştırmasının Doğuşu

- Amerikan İngilizcesi *Operations Research*
- İngiliz İngilizcesi *Operational Research*
- "Operation" kavramı II. Dünya Savaşı sırasındaki askeri operasyonları anlatmak için kullanılmıştır.
- Bu çalışma alanı Türkiye'de de önceleri **Harekat Araştırması** olarak adlandırılmış ve askeri kurumlarda kullanılmıştır.
- Daha sonra Yöneylem Araştırması olarak anılmaya başlanmıştır.

Yöneylem Araştırmasının Doğuşu

- Bilgisayar teknolojilerindeki hızlı gelişim de Yöneylem Araştırması çalışmalarının hızlanmasına katkı sağlamıştır.
- Karmaşık ve büyük boyutlu problemlerin etkin bir biçimde çözülebilmesi için çok sayıda hesaplama gerekmektedir. Bu hesaplamaları elle yapmak mümkün değildir. Bu nedenle bilgisayarların gelişimi elle yapılan aritmetik hesaplamaların daha hızlı ve daha doğru yapılabilmesi için büyük bir nimet olmuştur.
- 1980'lerden sonra WINQSB, LINDO, LINGO, GINO, TORA, MATH PROG, MATLAB gibi paket programlar geliştirilmiştir. Bu paket programlar Yöneylem Araştırması tekniklerinin iş hayatında kullanımının yaygınlaşmasını sağlamıştır.

Yöneylem Araştırmasının Etkisi

- Yöneylem Araştırması çalışmaları sonucunda, yönetsel karar vermede köklü değişimler meydana gelmiştir.
- YA tüm dünyadaki çok sayıda işletmenin etkinliğinin arttırılmasında rolü önemlidir.
- Bu süreçte birçok ülke ekonomilerinin verimlilik artışına kayda değer katkılar sağlamaktadır.
- Her ülkenin ulusal YA topluluğunun katılımı ile bugün Uluslararası Yöneylem Araştırması Toplulukları Federasyonu'nda birkaç düzine üye ülke bulunur.

Yöneylem Araştırmasının Adımları

- Problemin tanımlanması
- Verilerin toplanması veya Sistemin gözlemlenmesi
- Modelin Formüle edilmesi
- Modelden çözümlerin elde edilmesi
- Modelin sınanması
- Modelin uygulanmaya hazırlanması
- Modelin Uygulanması ve Önerilerin değerlendirilmesi

Matematiksel Model

- Yöneylem araştırması problemlerini **matematiksel model** kurarak çözüyoruz.
- Sistemin girdisi ile çıktısı arasındaki ilişki açık bir şekilde belirtilebiliyorsa Matematiksel modeller kullanılabilir.
- Modelin amaç fonksiyonu ve kısıt denklemleri, karar değişkenlerinin fonksiyonu olarak ifade edilir.
- **Karar değişkenleri:** Başlangıçta değerleri bilinmeyen ve direkt olarak karar oluşturmada kullanılan değişkenlerdir.
- **Amaç fonksiyonu:** Karar değişkenleri yardımıyla önceden bilinen amacın (maksimizasyon yada minimizasyon) gerçekleştiği matematiksel denklemdir. Her modelde sadece 1 adet amaç fonksiyonu olur.
- **Kısıtlar:** Karar oluşturma sürecinde, kararımızı kısıtlayan dış veya iç etkenlerin matematiksel ifadesidir.

Doğrusal Programlama

- **Doğrusal Programlama**, iyi tanımlanmış doğrusal eşitliklerin veya eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşulları altında doğrusal bir amaç fonksiyonunu en iyi kılan (optimum) değişken değerlerinin belirlenmesinde kullanılan matematiksel programlama tekniğidir.
- Doğrusal Programlamadaki **doğrusallık** kısıt denklemlerinin ve amaç fonksiyonunun doğrusal (birinci dereceden denklem/değişkenlerin dereceleri 1) olmasını ifade eder.
- Programlama ise planlama sürecini ifade eder.
- Bir doğrusal programlama modeli **karar değişkeni**, **amaç fonksiyonu** ve **kısıtlara** sahip olmalıdır.
- **Pozitiflik koşulu**: Problemden kullanılan karar değişkenlerinin tümü sıfır yada pozitif olmak zorundadır.

Doğrusal Programlama

Temel Maksimizasyon Modelleri

- Bir maksimizasyon modelinde amaç fonksiyonu Z_{\max} ifadesi ile gösterilir.
- Burada temel amaç olası en yüksek değere ulaşmaktır. (Genellikle en büyük karın elde edilmesi problemleri)

Temel Minimizasyon Modelleri

- Eğer işletmelerde temel amaç maliyet azaltılması, işgücü minimizasyonu, minimum alan kullanımı gibi en az değerle sonuç üretmeyi gerektirir ise bu durum Doğrusal Programlama modellerinde Minimizasyon Modelleri olarak karşımıza çıkar.
- Minimizasyon modelinde amaç fonksiyonu Z_{\min} ile gösterilir.

Doğrusal Programlama Örnek 1

- Bir beyaz eşya şirketi **birim karı 6 lira** olan çamaşır makinası ve **birim karı 7 lira** olan kurutma makinası üretmektedir.
- İşletmede **üretim, montaj ve paketlenme** olmak üzere 3 bölüm vardır.
- Üretim bölümünün günlük kapasitesi **120 iş gücü saattir**. 1 adet çamaşır makinası üretmek için **2 iş gücü saat** gerekirken ve 1 adet kurutma makinası üretmek için **3 iş gücü saat** gerekmektedir.
- Montaj bölümünün günlük kapasitesi **80 iş gücü saattir**. Burada 1 adet çamaşır makinası için **2 iş gücü saate**, 1 adet kurutma makinası için **1 iş gücü saate** ihtiyaç vardır.
- Paketlenme bölümünün günlük kapasitesi ise **400 iş gücü saattir**. Bu bölümde 1 adet çamaşır makinası için **4 iş gücü saate**, 1 adet kurutma makinası için **4 iş gücü saate** ihtiyaç duyulmaktadır.
- Buna göre işletmenin mevcut kısıtlar altında **karını maksimize edebilmesi için** ne yapması gerekmektedir?

Doğrusal Programlama Örnek 1

- Model oluşturmada önce verilenleri tablo formunda yazmak, özet görünüm sağlayacağı için, problemi anlamamızı kolaylaştıracaktır.

$G_M, K_M \geq 0$

Pozitiflik Şartı

	Üretim	Montaj	Paketleme	Birim Kar
Çamaşır Makinesi	2	2	4	6
Kurutma Makinesi	3	1	4	7
Kapasiteler	120	80	400	

$$2 G_M + 3 K_M \leq 120 (Ü)$$

$$2 G_M + 1 K_M \leq 80 (M)$$

$$4 G_M + 4 K_M \leq 400 (P)$$

Doğrusal Programlama Örnek 1

1. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi:



- Firma yöneticisi satış yapacağı ürünler olan çamaşır makinesi ve kurutma makinelerinden ne kadar üreteceğini bilmemektedir.
- Bu bağlamda karar değişkenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

ÇM: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Çamaşır Makinesi adedi
KM: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Kurutma Makinesi adedi

Açıklamaları Kesinlikle Yaz

- Bütün kısıt denklemleri ve amaç fonksiyonu mutlaka burada belirlenen karar değişkenleri ile yazılmalıdır.

Doğrusal Programlama Örnek 1

2.Amaç Fonksiyonunun Yazılması:

- Amaç: Karın Maksimizasyonu
- Soruda satış gelirleri ÇM için 6 TL/adet ve KM için 7TL/adet olarak verilmiştir.
- Bu durumda her bir ÇM den 6 TL ve her bir KM den 7 TL kazanç getiren matematiksel fonksiyon aşağıda sunulmuştur.

$$6\text{ÇM}+7\text{KM}$$

- DP modellerinde amaç ve amacın matematiksel ifadesi aşağıdaki gibi birleştirilerek yazılır.

$$Z_{\max}=6\text{ÇM}+7\text{KM}$$

Doğrusal Programlama Örnek 1

3.Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

- Eğer sınırlayıcılar olmasa idi Maksimizasyon sorularının cevabı sonsuz, minimizasyon sorularının cevabı sıfır olurdu.
- Bu soruda da üç farklı işletme bölümünün (üretim, montaj ve paketleme) farklı kapasitelere (120, 80, 400) sahip oldukları görülmektedir. O zaman soruda üç farklı kapasite kısıtı söz konusudur.
- Bu kısıtları sözel olarak ifade edelim.

Üretim Bölümü Kapasitesi Kısıtı

Montaj Bölümü Kapasitesi Kısıtı

Paketleme Bölümü Kapasitesi Kısıtı

Doğrusal Programlama Örnek 1

3.Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

- Eğer incelenen sınırlama kapasite ise, bu kapasitenin altında çalışma durumu söz konusu olabilir ama hiçbir zaman kapasiteler aşılamaz. Bu şekilde “**en fazla**” ifadesi ile belirtilen kısıtları “ \leq ” ifadesi ile matematiksel olarak ifade ediyoruz.

$$2\text{ÇM}+3\text{KM} \leq 120 \text{ (Üretim Kısıtı)}$$

$$2\text{ÇM}+\text{KM} \leq 80 \text{ (Montaj Kısıtı)}$$

$$4\text{ÇM}+4\text{KM} \leq 400 \text{ (Paketleme Kısıtı)}$$

- Her doğrusal programlama modeli, karar değişkenlerinin negatif olmaması kısıtı olan “**Pozitiflik Şartı**” adı altında özel bir kısıtın eklenmesi ile tamamlanır.

$$\text{ÇM}, \text{KM} \geq 0 \text{ (Pozitiflik şartı)}$$


Doğrusal Programlama Örnek 1

Matematiksel Model



ÇM: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Çamaşır Makinesi adedi

KM: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken Kurutma Makinesi adedi

- $Z_{\max} = 6\text{ÇM} + 7\text{KM}$

- $2\text{ÇM} + 3\text{KM} \leq 120$ (Üretim Kısıtı)

- $2\text{ÇM} + \text{KM} \leq 80$ (Montaj Kısıtı)

- $4\text{ÇM} + 4\text{KM} \leq 400$ (Paketleme Kısıtı)

- $\text{ÇM}, \text{KM} \geq 0$ (Pozitiflik şartı)

Doğrusal Programlama Örnek 1

Matematiksel Modelin Grafik Yöntem ile Çözümü

- “Kaç tane çamaşır makinesi, kaç tane kurutma makinesi üretmeliyim?” sorusunun cevabını verebilmek için kurduğumuz matematiksel modeli çözmeliyiz.
- DP modellerinde eğer soru 2 değişkenden oluşuyorsa o zaman “Grafik Yöntem” denen özel bir yaklaşımla soruyu rahatlıkla çözebiliriz.
- Grafik Yöntem çözümü için tek şart **değişken sayısının 2 olmasıdır.**
- Grafik yöntemle çözüm yapabilmek için her bir kısıtı iki boyutlu bir koordinat eksenine eksiksiz olarak aktarmak gerekmektedir.

Doğrusal Programlama Örnek 1

Matematiksel Modelin Grafik Yöntem ile Çözümü

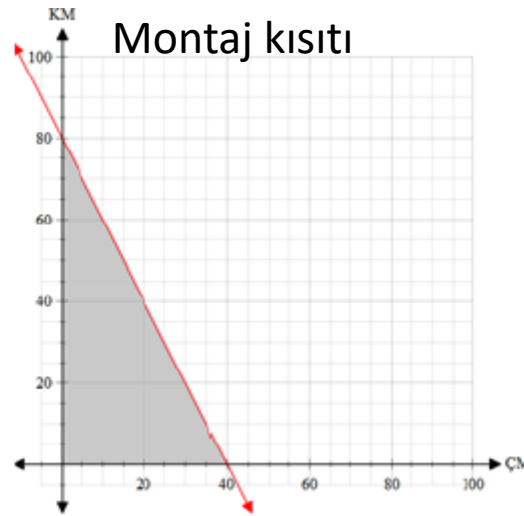
- Bir eşitsizliğin doğrusunun grafiğini çizmek için en az iki noktasını bilmek gereklidir.
- Kolay çizim yapabilmek için DP modellerinde her bir kısıtın eksenleri kestiği noktalar belirlenerek, bu noktalar düz bir çizgi ile birleştirilir.
- Bir denklemin eksenleri kestiği noktaları bulmak için her iki değişkene sırası ile “0” değeri verilerek diğer değişkenin ne değer aldığı belirlenir.

$2\text{ÇM} + 3\text{KM} \leq 120$	$2\text{ÇM} + \text{KM} \leq 80$	$4\text{ÇM} + 4\text{KM} \leq 400$
$\text{ÇM} = 0 \text{ iken } \text{KM} = 40$	$\text{ÇM} = 0 \text{ iken } \text{KM} = 80$	$\text{ÇM} = 0 \text{ iken } \text{KM} = 100$
$\text{KM} = 0 \text{ iken } \text{ÇM} = 60$	$\text{KM} = 0 \text{ iken } \text{ÇM} = 40$	$\text{KM} = 0 \text{ iken } \text{ÇM} = 100$

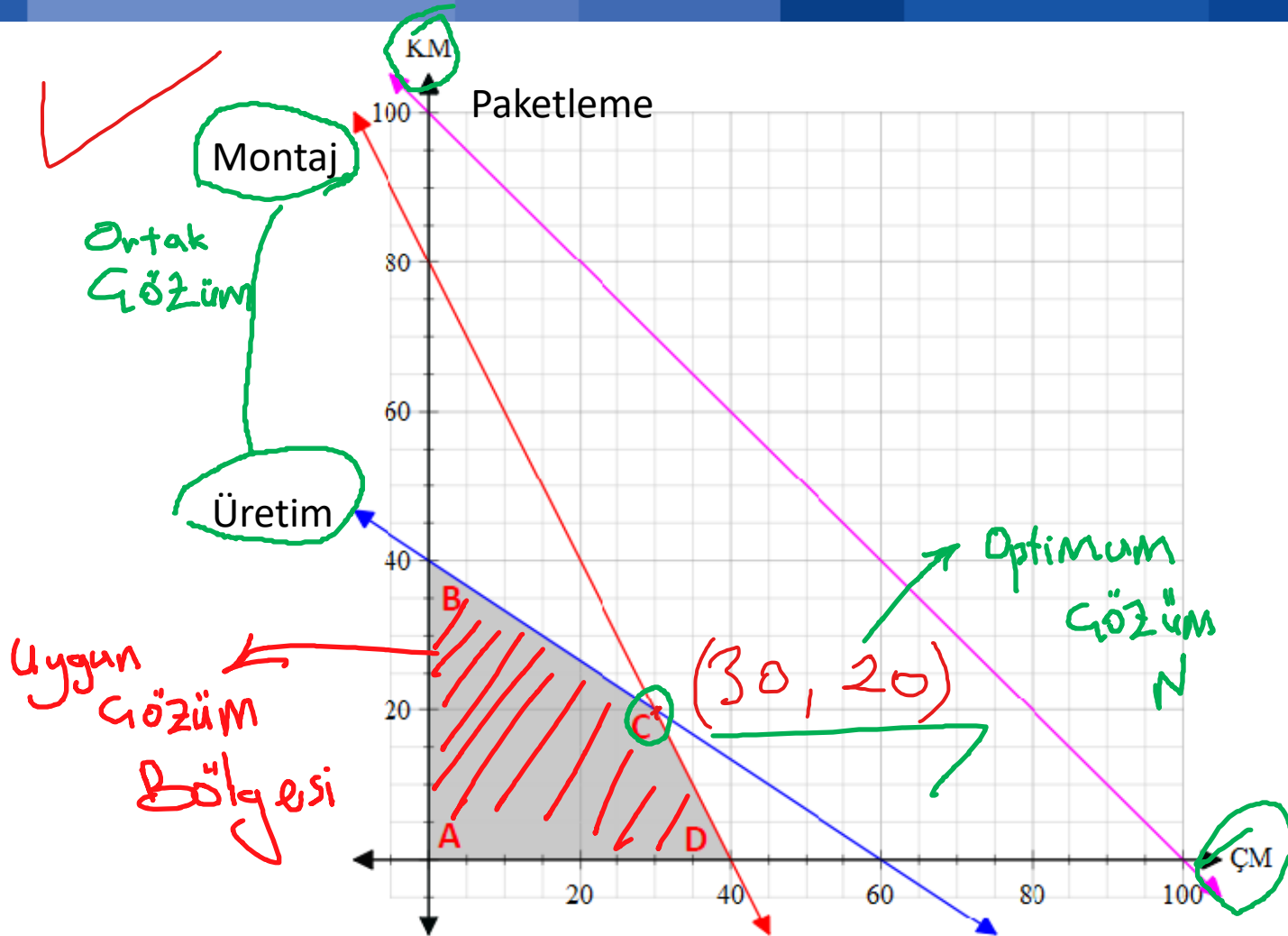
Doğrusal Programlama Örnek 1

Matematiksel Modelin Grafik Yöntem ile Çözümü

üretim kısıtı $(0,40)$ ve $(60,0)$ noktalarından,
montaj kısıtı $(0,80)$ ve $(40,0)$ noktalarından ve
paketleme kısıtı ise $(0,100)$ ve $(100,0)$ noktalarından
geçen doğruların çizilmesi ile grafik alanına aktarılır.



Doğrusal Programlama Örnek 1



Tek Grafik

Doğrusal Programlama Örnek 1

Matematiksel Modelin Grafik Yöntem ile Çözümü

- Grafikte ortak taranan ABCD dörtgenin “**Uygun Çözüm Bölgesi**” adı verilir ve bu bölgedeki her bir değer ikilisi (Karar değişkeni değerleri) bizim için uygun bir karardır.
- Fakat uygun kararlar değil de **en uygun (Optimal) karar** işletme yöneticileri açısından tercih edilen karar türüdür.
- Uygun çözüm alanındaki maksimum ve minimum değerler ancak ve ancak alanın sınır noktalarında, uç noktalarında yer alır.
- O yüzden her bir sınır noktasını belirleyip, amaç değerlerini hesaplamak gerekmektedir.
- Şekildeki A, B, C ve D noktalarından biri optimum çözümdür.

Doğrusal Programlama Örnek 1

Matematiksel Modelin Grafik Yöntem ile Çözümü

- A, B ve D noktaları direkt grafikten okunabilir, C noktasını belirlemek için Montaj ve Üretim kısıtlarının ortak çözümü bulunur.
 $2\text{ÇM} + 3\text{KM} \leq 120$ (Üretim Kısıtı)
 $-2\text{ÇM} + \text{KM} \leq 80$ (Montaj Kısıtı) → $2\text{KM} = 40$ $\text{KM} = 20$ $\text{ÇM} = 30$
- Ortak çözüm için bir değişkeni yok edecek şekilde denklemler herhangi bir sayı ile çarpılarak taraf tarafa toplanabilir.
- ÇM katsayıları eşit olduğu için Üretim kısıtından Montaj kısıtı çıkartılır (Montaj kısıtı -1 ile çarpılarak iki eşitsizlik taraf tarafa toplanabilir)
 $2\text{KM} = 40$ ise KM değeri 20 olarak bulunur.
- Daha sonra üretim yada montaj kısıtından herhangi birinde KM yerine 20 değeri konularak ÇM değeri hesaplanır.
 $\text{ÇM} = 30$
- Böylece $C(30, 20)$ olarak bulunmuş olur.

Doğrusal Programlama Örnek 1

Matematiksel Modelin Grafik Yöntem ile Çözümü

A, B, C ve D noktası değerleri Z_{max} denkleminde teker teker yerine koyularak 4 farklı sonuç elde edilir. Bulunan sonuçlardan en büyük olan maximum kar değeri dir.

Uç Nokta	Amaç Değeri
A(0,0)	$Z_{max} = 6 * 0 + 7 * 0 = 0$ (Minimum)
B(0,40)	$Z_{max} = 6 * 0 + 7 * 40 = 280$
C(30,20)	$Z_{max} = 6 * 30 + 7 * 20 = 320$ (Maksimum)
D(40,0)	$Z_{max} = 6 * 40 + 7 * 0 = 240$

SONUÇ: Bu kısıtlar altında işletmenin karını maksimize edebilmesi için **30** adet çamaşır makinası ve **20** adet kurutma makinası üretip satması gerekir. Bunu yaparsa maksimum kar **320** lirayı elde etmiş olur.

Önemli

Doğrusal Programlama Örnek 1

Matematiksel Modelin Grafik Yöntem ile Çözümü

Kısıt	Kullanım	Kapasite	Boşluk
Üretim	$2*30+3*20 = 120$	120	0
Montaj	$2*30 + 20 = 80$	80	0
Paketleme	$4*30+4*20 = 200$	400	200

- Üretim ve Montaj İşçilik kaynaklarının tamamı kullanırken, paketleme kaynağında bir miktar boşluk kalmaktadır.
- Paketleme kaynağının karar alma sürecinde kısıtlayıcı olmadığını, üretim ve montaj kaynaklarının ise darboğaz oluşturarak direkt olarak kararı oluşturduğu görülmelidir.
- Doğrusal programlama modellerinde değişken sayısından daha fazla kaynak kısıtlayıcı olmaz. Bu soruda olduğu gibi 3 kaynağın 1 tanesi kısıtlayıcı değildir.

Doğrusal Programlama Örnek 2

- Bir marangoz atölyesi sipariş üzerine mutfak dolapları yapmaktadır. İşletmede kesme, işleme, cila ve montaj olmak üzere 4 bölüm vardır. Bu bölümlerde masa ve sandalyelerin üretimi için gereken süreler ve her birinden elde edilecek karlar tabloda verilmiştir.

	Kesme	İşleme	Cila	Montaj	Birim Kar
Masa	8	20	18	12	18
Sandalye	6	8	25	10	10
Kapasiteler	1800	2400	4500	2000	

- Verilenleri kullanarak matematiksel modeli oluşturunuz.

Doğrusal Programlama Örnek 2

	Kesme	İşleme	Cila	Montaj	Birim Kar
Masa	8	20	18	12	18
Sandalye	6	8	25	10	10
Kapasiteler	1800	2400	4500	2000	

$$8 M + 6 S \leq 1800 \text{ (K)}$$

$$20 M + 8 S \leq 2400 \text{ (İ)}$$

$$18 M + 25 S \leq 4500 \text{ (C)}$$

$$12 M + 10 S \leq 2000 \text{ (M)}$$

$$M, S \geq 0$$

Doğrusal Programlama Örnek 3

- Sera bitkiciliği yapan bir çiftçi, cam seralarında ürettiği bitkilerini gübre işlemi yaparak verimi arttırmak istemektedir. Bunun için azot ve fosfat içeren gübreler kullanması gerekmektedir. Yaptığı araştırma sonucu toprağa en az 80 kg azot ve en az 120 kg fosfat kazandırılmalıdır. Piyasada azot fosfat bileşimini ve diğer mineralleri içeren 2 çeşit gübre bulunmaktadır. Bunlardan ilki torbası 6 lira olan doğal gübre, diğeri ise torbası 3 lira olan sentetik gübredir. Her bir gübreyle ilgili veriler tabloda sunulmuştur.

	Azot (kg/torba)	Fosfat (kg/torba)	Fiyat
Doğal Gübre	2	4	6
Sentetik Gübre	4	3	3

- Bu koşullar altında çiftçiye ne yapmasını önerirsiniz?

Doğrusal Programlama Örnek 3

$$Z_{\min} = 6DG + 3SG$$

$$2DG + 4SG \geq 80 \text{ (A)}$$

$$4DG + 3SG \geq 120 \text{ (F)}$$

$$DG, SG \geq 0$$