GİRİŞ

Bu bölümde bir kümedeki elemanların sayısı ve özel bir olayın olası sonuçlarının sayısının elde edilmesi için kullanılan bazı teknikler incelenecektir. Bu tür karmaşık sayma işlemlerine kombinatoryal analiz denir. Bu konu permütasyon ve kombinasyon konularını kapsar.

Temel Sayma Kuralları

Toplama ve çarpma olmak üzere saymanın iki temel kuralı vardır.

Toplama Kuralı:

Ayrık olan E ve F olaylarını göz önüne alalım. E olayının meydana gelebileceği n yol ve F olayının meydana gelebileceği m yol varsa ve her iki olayın aynı anda gerçekleşemeyeceğini varsayalım, o zaman E veya F'nin meydana gelmesi için $n + m$ yol vardır.

Çarpma Kuralı:

Yine E ve F iki ayrık işlemi temsil etmek üzere bu iki işlem birbiri ardına meydana geliyorsa, ki bu işlemler sırasıyla n ve m şekilde meydana gelsin, o zaman E ve F'nin meydana gelebileceği nxm yol vardır.

Yukarıdaki ilkeler, üç veya daha fazla olaya genişletilebilir. Diğer bir deyişle, bir E1 olayının n1 şekilde meydana gelebileceğini, ikinci bir E2 olayının n2 yolla ve E1'in ardından meydana gelebileceğini ve üçüncü bir olay E3 olayının, n3 yolla gerçekleşebileceğini varsayalım. Bu durumda toplam ve çarpım kuralı aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Toplam Kuralı: Aynı anda iki olay gerçekleşemezse, olaylardan biri aşağıdaki durumlarda gerçekleşebilir:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots$$

Çarpım Kuralı: Olaylar arka arkaya meydana gelirse, tüm olaylar aşağıda belirtilen sırayla gerçekleşebilir:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$$

Örnek: Bir okulda 3 farklı tarih dersi, 4 farklı edebiyat dersi ve 2 faklı sosyoloji dersi olduğunu farz edin;

a) Bir öğrenci her farklı dersten kaç şekilde seçim yapabilir?

b) Bir öğrenci sadece bir kursu kaç şekilde seçebilir?

a) Bir öğrencinin her bir ders türünden birini seçebileceği m sayısı:

$$m = 3.(4).(2) = 24$$

b) Bir öğrencinin derslerden sadece birini seçmesinin n yolu:

$$n = 3 + 4 + 2 = 9$$

Yukarıdaki iki ilkenin bir dizi teorik yorumu vardır. Spesifik olarak, $n\,(A)$ 'nın bir A kümesindeki elemanların sayısını gösterdiğini varsayalım. Sonra:

Toplam Kuralı: A ve B'nin ayrık kümeler olduğunu varsayalım. Sonra

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Çarpım Kuralı: $A\ \times\ B$, A ve B kümelerinin Kartezyen çarpımı olsun.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Örnek

Dört çalışanı olan bir girişim firması, 7 ofisi olan bir plaza katı kiralıyor. Dört çalışanın her biri bir ofiste olacak şekilde, 7 ofise atamanın kaç yolu vardır?

Çözüm

İlk çalışanın seçebileceği 7 ofisi, ikincisinin seçebileceği 6 ofisi var, üçüncüsü 5 arasından seçim yapabilir ve dördüncüsü 4 arasından seçim yapabilir. Çarpım kuralına göre çalışanları ofislere atamanın $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ yolu vardır.

Örnek

Bitirme yapacak bir öğrenci, üç farklı profesörden bir proje seçebilir. Profesörlerin 3, 7 ve 4 olası projesi vardır ve hiçbir proje birden fazla profesörün listesinde yer almamaktadır. Öğrencinin bitirme projesi için kaç olası seçim yolu vardır?

Çözüm

Öğrenci, birinci profesör, ikinci profesör veya üçüncü profesör arasından seçim yaparak bir proje seçebilir. Hiçbir proje birden fazla listede bulunmadığından, toplam kuralına göre proje seçmenin 3+7+4=14 yolu vardır.

Matematiksel Fonksiyonlar

Kombinasyonlarda sıklıkla kullanılan iki önemli matematiksel fonksiyon vardır.

Faktoriyel Kavramı:

1'den n'ye kadar pozitif tamsayıların çarpımı $n!$ İle gösterilir ve **"n faktöriyel"** olarak okunur. Yani:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Örnekler

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,\qquad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,\qquad 5! = 5 \cdot 4! = 120$

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9!} = \frac{12!}{3!\,9!} =$$

ve daha genel olarak;

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Permütasyonlar

Belirli bir sıradaki bir dizi n nesnenin (tümü bir seferde alınmak üzere) herhangi bir düzenlemesine, nesnenin permütasyonu adı verilir. Belirli bir sırada bu nesnelerin herhangi bir $r \leq n$ düzenlemesine "r-**permütasyonu**" veya "**n nesnenin bir seferde alınan r sayıdaki permütasyonu**" denir.

Alfabenin ilk dört harfi olan A, B, C, D'yi ele alalım. Bu harflerin bir permütasyonu, onların farklı sıralarda düzenlenmesi olacaktır.

Örneğin, A, B, C, D harflerini oluşturduğu bir küme göz önüne alalım.

(1) BDCA, DCBA ve ACDB 4 harfin 4 harfli permütasyonu

(2) BAD, ACB ve DBC 4 harften alınan 3 harfli permütasyonu
(3) AD, BC ve CA 4 harften alınan 2 harfli permütasyonudur.

Pratik uygulamalarda genellikle tüm durumları listelemeden bu tür permütasyonların sayısıyla ilgileniriz. n nesnenin içerisinden alınan r nesnenin permütasyon sayısı aşağıdaki gibi gösterilir.

$$P(n,r)$$

Dolayısıyla n nesneden alınan r elemanının oluşturduğu permütasyonların sayısı aşağıdaki formülü ile hesaplanır.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

Dikkat edilirse;

$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ denkleminde $\boldsymbol{r}$ faktörün olduğunu görülebilir.

Örnek:

A, B, C, D, E, F gibi her seferinde üç kez alınan altı nesnenin permütasyonlarının m sayısını bulun (Üç karakterli kelimelerin sayısını tekrar etmeyecek şekilde bulunuz). Başka bir deyişle, sadece verilen altı harfi tekrar etmeden kullanarak "üç harfli kelimelerin" sayısını bulun. Genel üç harfli kelimeyi aşağıdaki üç pozisyonla temsil edelim:

$$\_\_\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\_\_$$

Bu, $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ formülüne uygundur:

Çarpım Kuralına göre, m = $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ olası üç harfli, altı harften tekrarı olmayan kelime vardır. Yani, bir seferde 3 alınan 6 nesnenin 120

Veya $P(6,3)=6.5.4=120.$ permütasyonu vardır.

Şimdi, $r = n$ olduğunda $P\ (n,r)$ özel durumunda aşağıdaki sonucu alıyoruz. Hepsi bir seferde alınan n nesnenin, n! tane permütasyonu vardır.

Örneğin, A, B, C gibi 3 tane nesnemizin 3! var. Yani A, B, C harflerinin 6 permütasyonu vardır. Bunlar:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Tekrarlı Permütasyonlar

Bazen benzer nesnelerin kümesine sahip çoklu kümelerin permütasyonlarının sayısını elde etmek isteyebiliriz.

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_r)$$

Formülü, n_1'in benzer, n_2'nin benzer, ..., n_r'nin benzer olduğu n nesnenin permütasyon sayısını gösterir. Bu sayı aşağıda verilen denklem ile düzenlenir:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_r) = \frac{n!}{n_1!.n_2!...n_r!}$$

Bu denklemde $n_1, n_2, ...n_r$ benzer nesneleri ifade etmektedir.

Yukarıdaki teoremin ispatını belirli bir örnekle gösterelim. "BABBY" kelimesindeki harfleri kullanarak tüm olası beş harfli "kelimeleri" oluşturmak istediğimizi varsayalım. 5! =120 tane permütasyonu var. Üç B'nin ayırt edildiği B_1, A, B_2, B_3, Y nesnelerinin 120 permütasyonun altısı aşağıdaki gibidir

$B_1B_2B_3AY$ $B_2B_1B_3AY$ $B_3B_1B_2AY$ $B_1B_3B_2AY$ $B_2B_3B_1AY$ $B_3B_2B_1AY$

İndisler kaldırıldığında aynı kelime üretildiği görülür. Yani 6 sayısı,

$BBBAY$ $BBBAY$ $BBBAY$ $BBBAY$ $BBBAY$ $BBBAY$

3! = 3 · 2 · 1=6 olduğu gerçeğinden gelir. Permütasyondaki ilk üç konuma üç B'yi yerleştirmenin 6 farklı yolu var demektir. Bu, B'lerin görünebileceği her üç konum kümesi için de geçerlidir. Buna göre "BABBY" kelimesinin harfleri kullanılarak oluşturulabilecek beş harfli farklı kelimelerin sayısı:

$$P(5;3) = \frac{5!}{3!} = 20.$$

Örnek:

"BENZENE" kelimesinin harfleri kullanılarak oluşturulabilen yedi harfli kelimelerin m sayısını bulunuz?

3'ü birbirine benzeyen (üç “E”) ve 2'si birbirine benzeyen (iki “N”); 7 nesnenin permütasyon sayısını arıyoruz.

$$m = P(7;3,2) = \frac{7!}{3!.2!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 420.$$

Sıralı Örnekler

Pek çok sorun, örneğin n elemanlı bir S kümesinden bir eleman seçmekle ilgilidir. Bir elemanı birbiri ardına seçtiğimizde, diyelim ki, r kez, seçime r büyüklüğünde sıralı bir örnek diyoruz. İki durumu ele alıyoruz.

1) Yerine koyma ile örnekleme

Burada, bir sonraki eleman seçilmeden önce S kümesindeki eleman değiştirilir. Bu nedenle, her seferinde bir öğe seçmenin n yolu vardır (tekrarlara izin verilir). Çarpma kuralı bizе bu tür örneklerin sayısının şu olduğunu söyler:

$$n.n.n....n. \quad n \;\; (r\ kere) = \mathrm{n}^{\mathrm{r}}$$

2) Yerine koymadan örnekleme

Burada, bir sonraki eleman seçilmeden S kümesindeki önceki eleman yerine konmaz. Bu nedenle, sıralı örneklemede tekrar yoktur. Böyle bir örnek basitçe bir r-permütasyon olarak adlandırılır. Dolayısıyla, bu tür örneklerin sayısı:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Örnek:

52 kartlık bir iskambil destesinden arka arkaya biri diğerinden sonra olacak şekilde üç kart seçiliyor. Bu seçme işleminin yapılabileceği yolların m sayısını bulun:

(a) yerine koyma ile; (b) yerine koymadan.

a) Tekrar yerine koyarak her kart 52 şekilde seçilebilir.

$$\mathrm{m} = 52.52.52 = 140608$$

b) Bu örnekte yerine koyma yok. Böylece ilk kart 52, ikincisi 51 ve üçüncüsü 50 şekilde seçilebilir. Bu nedenle:

$$\mathrm{m} = P(52,3) = 52.51.50 = 132600$$

KOMBİNASYONLAR

S, n elemanlı bir küme olsun. (Bir seferde alınan r elemanın) bu n öğelerinin bir sıranın sayılmadığı herhangi bir r elemanın seçim sayısına n'in r'li kombinasyonu denir. Böyle bir seçim, r-kombinasyonu olarak adlandırılır. Başka bir ifade ile r elemanlı S'nin bir alt kümesi sayısıdır. Bu tür kombinasyonların sayısı aşağıdaki şekilde gösterilecektir:

$$C(n,r)$$

$C(n,r)$ Genel formülü vermeden önce özel bir durumu göz önüne alalım.

Örnek

Her seferinde 3 tane alınan 4 nesnenin, A, B, C, D kombinasyonlarının sayısını bulun. Üç nesnenin her kombinasyonu 3! =6 belirler. Aşağıdaki gibi nesnelerin 6 permütasyonu:

ABC: ABC,	ACB,	BAC,	BCA,	CAB,	CBA
ABD: ABD,	ADB,	BAD,	BDA,	DAB,	DBA
ACD: ACD,	ADC,	CAD,	CDA,	DAC,	DCA
BCD: BDC,	BDC,	CBD,	CDB,	DBC,	DCB

Böylece kombinasyon sayısı 3! ile çarpıldığında bize permütasyonların sayısını verir; yani,

$$C(4,3)\cdot 3! = P(4,3) \quad \text{or} \quad C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!}$$

Ama P (4, 3) = 4 · 3 · 2 = 24 ve 3! = 6; dolayısıyla yukarıda belirtildiği gibi C (4, 3) = 4 olur.

Yukarıda belirtildiği gibi, bir seferde n nesne içerisinden alınan r elemanın herhangi bir kombinasyondaki permütasyonları r! dir. Yani,

$$P(n,r) = r!\,C(n,r)$$

Buna göre, resmi teorem olarak belirttiğimiz C (n, r) için aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Binom katsayısı $\binom{n}{r}$'in, $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ şekilde tanımlandığını hatırlayın. Böylece.

$$C(n,r) = \binom{n}{r}$$

Burada $C(n,r)$ ve $\binom{n}{r}$yi değişimli olarak kullanılacaktır (kullanılır).

Örnek

Bir çiftçi, 6 inek, 5 koyunu ve 8 tavuğu olan bir adamdan 3 inek, 2 koyun ve 4 tavuk satın alacaktır. Çiftçi bu satın almayı (seçimi) yapmasının kaç farklı m yolu vardır (Bu 7 hayvanı kaç farklı yolla seçebilir/satın alabilir).

$$m = \binom{6}{3}.\binom{5}{2}.\binom{8}{4} = 20.10.70 = 14000.$$

Örnek

a) Bir sırada 3 erkek ve 2 bayan kaç farklı şekilde oturabilir?

b) Bir sırada 3 erkek ve 2 bayan erkekler ve bayanlar beraber oturacak şekilde kaç farklı şekilde oturabilirler?

c) Bir sırada 3 erkek ve 2 bayan bayanlar sadece beraber oturacak şekilde kaç farklı şekilde oturabilirler?

Cevap

a) 5! = 120,

b) 3!.2!.2! = 24,

c) 4!.2!=48

Örnek

a) ELEVEN kelimesinin karakterlerinden kaç farklı permütasyon (kelime-anlamlı veya anlamsız) elde edilebilir?

b) Kaç tanesi “E” ile başlar ve “E” ile biter?

c) Kaç tanesinde üç tane “E” beraber bulunur?

d) Kaç tanesi “E” ile başlar ve “N” ile biter?

Cevap.

a) $P(6;3)=\frac{6!}{3!}=6.5.4=120$,

b) 4!=24,

c) 4! = 24, d.

d) $P(4;2)=\frac{4!}{2!}=12$

Örnek

Bir bayanın 11 yakın arkadaşı vardır.

a. Bu bayan, arkadaşlarından 5’ini kaç farklı şekilde akşam yemeğine davet edebilir?
b. Eğer bu arkadaşlarından içinde evli bir çift varsa ve ayrı olarak bu yemeğe katılmayacaklarsa, (davette 5 kişi olacak) kaç şekilde davet edebilir?
c. Eğer arkadaşlarından ikisi konuşmuyor ve beraber katılmayacaklarsa (davette 5 kişi olacak) kaç şekilde davet edebilir?

Cevap.

a) $C(11,5)=462$,

b) $C(10,4)=210$,

c) $2.C(9,4)=252$

Örnek

Bir bayanın 6'sı bayan olan 11 yakın arkadaşı vardır.

a. Bu bayan, arkadaşlarından 3'ünü ya da daha fazlasını bir partiye kaç farklı şekilde davet edebilir?
b. Bu bayan, arkadaşlarından 3'ünü ya da daha fazlasını bir partiye erkek ve bayanların sayısı eşit olacak şekilde (bu bayanı da dâhil ederek) kaç farklı şekilde davet edebilir?

Cevap. $a.\binom{11}{3}+\binom{11}{4}+...+\binom{11}{11}=2^{11}-\binom{11}{0}+\binom{11}{1}+\binom{11}{2}=1981,$

b. $\binom{5}{5}.\binom{6}{4}+\binom{5}{4}.\binom{6}{3}+\binom{5}{3}.\binom{6}{2}+\binom{5}{2}.\binom{6}{1}=325$

Örnek $\binom{17}{6}=\binom{16}{5}+\binom{16}{6}$ olduğunu ispat ediniz.

Cevap. $\binom{16}{5}+\binom{16}{6}=\frac{16!}{5!.11!}+\frac{16!}{6!.10!}$ Olduğundan yola çıkarak ilk kesri $\frac{6}{6}$ ile çarparak ve ikinci kesri $\frac{11}{11}$ ile çarparak toplam kesrin paydalarını eşitleyebiliriz. Daha sonra

$$\binom{16}{5}+\binom{16}{6}=\frac{6.16!}{6.5!.11!}+\frac{11.16!}{11.6!.10!}=\frac{6.16!}{6!.11!}+\frac{11.16!}{6!.11!}=\frac{(11+6).16!}{6!.11!}=\frac{17.16!}{6!.11!}=\frac{17!}{6!.11!}=\binom{17}{6}$$

Şeklinde elde edilir.