Olasılık ve İstatistik
HAFTA 4
Sürekli Rastgele Değişkenler

Dr. Öğretim Üyesi Burcu ÇARKLI YAVUZ

bcarkli@sakarya.edu.tr

Sürekli Rastgele Değişken

- Eğer bir rastgele değişkenin mümkün sonuçlarının kümesi sayılabilir sayıda eleman içeriyorsa **kesikli rastgele değişken** olarak adlandırılır.
- Mümkün değerlerinin kümesi reel sayıların bir aralığına denk gelen rastgele değişkenler **sürekli rastgele değişkenler** olarak adlandırılır.
- Yükseklik, ağırlık, sıcaklık, uzaklık yada ömür gibi ölçülen veriler sürekli rastgele değişkenlere karşılık gelir.
- Sürekli rastgele değişkenin değerlerinden *tam olarak* herhangi birini alması olasılığı *sıfırdır*. Bu nedenle sürekli rastgele değişkenin olasılık dağılımı tablo şeklinde verilmez.

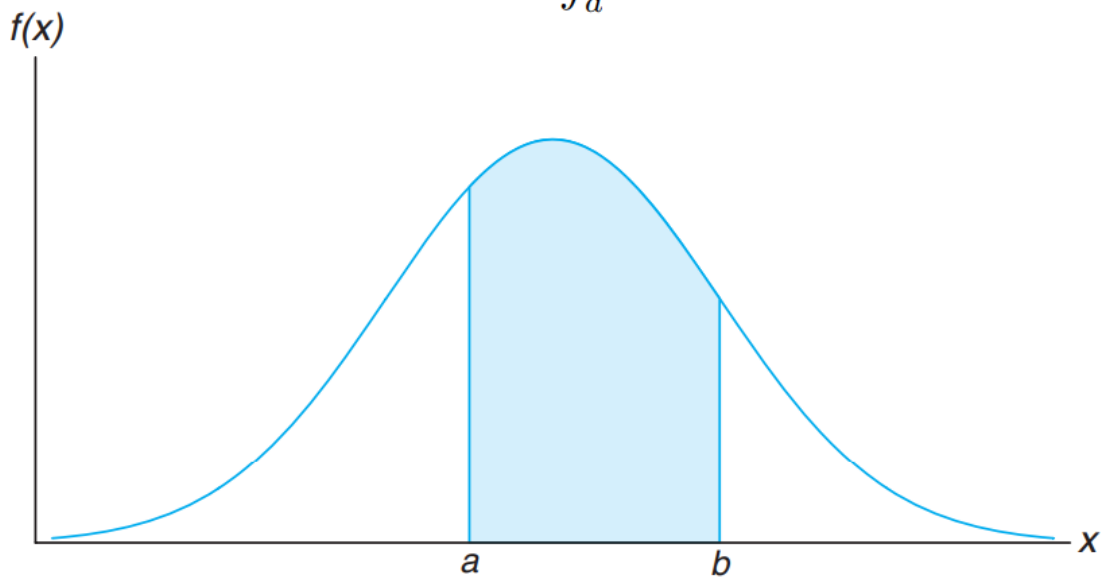
Sürekli Rastgele Değişken

- Sürekli bir X rassal değişkenine ait bir olasılık hesaplanırken, *sürekli olasılık dağılımı* olarak adlandırılan dağılım kullanılarak X'in *değer aralıklarına* olasılıklar atanır.
- f(x)'in gerçek sayı eksenindeki sayıların sürekli bir fonksiyonu olduğunu ve grafikte f(x)'in sürekli bir eğri oluşturduğunu kabul edelim.
- X'in belirli bir aralıkta olma olasılığı, tanımlanan aralıkta grafikteki f(x) eğrisinin altında kalan alana eşitse, f(x) eğrisi, X rassal değişkeninin *sürekli olasılık dağılımı*dır.
- ***Sürekli olasılık dağılımı*** yerine ***olasılık eğrisi*** yada ***olasılık yoğunluk fonksiyonu*** kavramları da kullanılabilir.

Sürekli Olasılık Dağılımları

- X'in a ve b aralığında olma olasılığı taralı alana eşittir.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$



Sürekli Olasılık Dağılımları

Teorem: X sürekli bir rassal değişken, a ve b gerçek değerli sabitlerse a≤b iken aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

Sürekli rassal değişkenlere ilişkin olasılıklar her zaman aralıklara atanır ve her gerçek c sabiti için P(x=c)=0 dır. Bu nedenle,

Sınır noktalarının aralığa dahil edilip edilmemesinin bir önemi yoktur.

Sürekli Olasılık Dağılımları

Teorem: Eğer tüm gerçek sayılar üzerinde tanımlı f(x) fonksiyonu,

1. $f(x) \geq 0$, for all $x \in R$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$.

şartlarını sağlıyorsa, X sürekli rastgele değişkeninin ***olasılık yoğunluk fonksiyonu (sürekli olasılık dağılımı)*** olarak işlev görebilir.

Temel İntegral Kuralları

- $\int a dx = ax + c$

- $\int X^n dx = \frac{X^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

- $\int \frac{1}{X} dx = ln|X| + c$

- $\int e^x dx = e^x + c$

- $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$

Sürekli Olasılık Dağılımları

Örnek: Kontrollü bir laboratuvar deneyinde °C cinsinden ölçülen tepkime ısısındaki hatanın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

olan sürekli bir X rastgele değişkeni olduğunu varsayalım.

a) f(x)'in bir yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösteriniz

b) P(0<x≤1) olasılığını elde ediniz

Sürekli Olasılık Dağılımları

Çözüm:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

a) f(x)'in bir yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösteriniz

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} |_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1.$$

b) P(0<x≤1) olasılığını elde ediniz

$$P(0 < X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9}\bigg|_0^1 = \frac{1}{9}.$$

Sürekli Olasılık Dağılımları

Örnek: X'in olasılık yoğunluğu aşağıda gibi verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

a) c'nin değeri nedir?

b) P(x>1) değerini bulunuz.

Sürekli Olasılık Dağılımları

Çözüm:

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1\ olmalı$

$$c\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 1\ ise\ c\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 1$$

$$c\left(2 * 2^2 - \frac{2 * 2^3}{3}\right) = 1$$

$$c = \frac{3}{8}$$

Sürekli Olasılık Dağılımları

Çözüm:

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

b) $P(x > 1) = \int_1^\infty f(x)dx = \frac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)dx$

$$P(x > 1) = \frac{3}{8}\left(\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}$$

Sürekli Olasılık Dağılımları

Örnek: X'in olasılık yoğunluğu aşağıda gibi verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & x > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

Buna göre k'yı ve P(0.5≤x≤1)'i bulunuz.

Sürekli Olasılık Dağılımları

Çözüm:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & x > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

Teoremden yararlanarak;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} ke^{-3x}dx = k\frac{e^{-3x}}{-3}\Big|_0^{\infty} = \frac{k}{3} = 1 \quad \Rightarrow k = 3$$

$$P(0.5 \le X \le 1) = \int_{0.5}^{1} 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}\Big|_{0.5}^{1} = -e^{-3} + e^{-1.5} = 0.173$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

- X sürekli bir rassal değişkense ve bunun olasılık yoğunluğunun t'deki değeri f(t) ise,

$$F(X) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

fonksiyonuna X'in ***birikimli dağılım fonksiyonu*** yada ***birikimli dağılımı*** denir.

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Teorem: f(x) ve F(x), X'in x'teki olasılık yoğunluğu ile birikimli dağılım fonksiyonu ise, a ile b gibi herhangi iki sabit için a≤b iken

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

ve

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

olur. Burada türev tanımlıdır.

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Örnek: Laboratuvar deneyi örneğindeki yoğunluk fonksiyonu için F(x)'i elde edip bunu kullanarak P(0<x≤1) olasılığını bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Çözüm: -1<x<2 olduğu için

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3} dt = \left. \frac{t^3}{9} \right|_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{9}.$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Çözüm:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x^3+1}{9}, & -1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

$$P(0 < X \le 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9},$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Örnek: ABD enerji ofisi projelerini ihaleye çıkarır ve genellikle makul bir teklifin ne olması gerektiğini tahmin eder. Tahmini teklif b ile ifade edilsin. Kazanacak teklife (düşük teklif) dair yoğunluk fonksiyonunu,

$$f(y) = \begin{cases} \frac{5}{8b}, & \frac{2}{5}b \le y \le 2b, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

şeklinde belirlemiş olsun. F(y)'yi bulup, bunu kullanarak kazanacak teklifin, önsel tahmin b'nin altında kalması olasılığını belirleyiniz.

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Çözüm:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{5}{8b}, & \frac{2}{5}b \le y \le 2b, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

$\frac{2}{5}b \le y \le 2b$ değer aralığı için,

$$F(y) = \int_{2b/5}^{y} \frac{5}{8b} dt = \left. \frac{5t}{8b} \right|_{2b/5}^{y} = \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}.$$

elde edilir. Buna göre F(y) şu şekilde ifade edilir:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{2}{5}b, \\ \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}, & \frac{2}{5}b \le y < 2b, \\ 1, & y \ge 2b. \end{cases}$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Çözüm:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{5}{8b}, & \frac{2}{5}b \le y \le 2b, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{2}{5}b, \\ \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}, & \frac{2}{5}b \le y < 2b, \\ 1, & y \ge 2b. \end{cases}$$

Kazanacak teklifin başlangıçta belirlenen tahmini b'nin altında olması olasılığı:

$$P(Y \le b) = F(b) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Örnek

Katı füze yakıtındaki önemli bir faktör, parçacıkların büyüklüklerinin dağılımıdır. Parçacıkların çok büyük olması durumunda önemli problemler ortaya çıkmaktadır. Geçmişteki üretim verilerinden, parçacıkların büyüklüklerine (mikrometre cinsinden) ilişkin dağılımın

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & x > 1, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

fonksiyonu ile karakterize edileceği belirlenmiştir.

a) Yoğunluk fonksiyonunun geçerli bir fonksiyon olduğunu gösteriniz
b) F(x)'i belirleyiniz
c) Üretilen yakıt içerisindeki rastgele bir parçacığın büyüklüğünün 4 mikrometreden daha büyük olma olasılığı nedir?

Çözüm

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & x > 1, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

a) Yoğunluk fonksiyonunun geçerli bir fonksiyon olduğunu gösteriniz:

$-\infty<x<\infty$ için $f(x)\geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \;\; olmalı$$

$$\int_{1}^{\infty} 3x^{-4}dx = \frac{3x^{-3}}{-3}\Big|_{1}^{\infty} = 1$$

Çözüm

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & x > 1, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

b) F(x)'i belirleyiniz:

1<x<∞ için

$$F(x) = \int_1^x 3x^{-4}dx = \frac{3x^{-3}}{-3}\Big|_1^x = -x^{-3} + 1^{-3} = -x^{-3} + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - x^{-3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Çözüm

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & x > 1, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - x^{-3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

c) Üretilen yakıt içerisindeki rastgele bir parçacığın büyüklüğünün 4 mikrometreden daha büyük olma olasılığı:

$$P(4 < x) = \int_{4}^{\infty} 3x^{-4} dx = \frac{3x^{-3}}{-3}\Big|_{4}^{\infty} = -\left[\frac{1}{\infty^3} - \frac{1}{4^3}\right] = \frac{1}{4^3} = 0.0156$$

$$F(\infty) - F(4) = \left(1 - \frac{1}{\infty^3}\right) - \left(1 - \frac{1}{4^3}\right) = \frac{1}{4^3} = 0.0156$$

Kaynaklar

- Doç. Dr. Melda Akın, Matematiksel İstatistik Ders Notu, İstanbul Üniversitesi
- Mühendisler ve Fen Bilimciler için Olasılık ve İstatistik, Ronald E. Walpole, Çeviri Editörü: Prof. Dr. M. Akif BAKIR, 9. baskıdan çeviri, Palme Yayıncılık, 2016.