Olasılık ve İstatistik
HAFTA 2
Koşullu Olasılık

Dr. Öğretim Üyesi Burcu ÇARKLI YAVUZ

bcarkli@sakarya.edu.tr

Koşullu (Şartlı) Olasılık

- Koşullu Olasılık, bir olayın gerçekleştiği biliniyorken, ikinci olayın olma olasılığı şeklinde ifade edilir.
- B olayının gerçekleştiği biliniyorken A olayının olma olasılığı P(A|B) şeklinde ifade edilir ve aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$P(A|B) = \frac{P(A\ ve\ B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0$$

- Dikkat!!! A ve B olayları ilişkilidir (bağımlıdır)
- P(A|B), B verildiğinde A'nın koşullu olasılığıdır.

Örnek

- Bir tüketici araştırmaları kuruluşu, belli bir kentteki 50 araba satıcısının garanti süresi içindeki bakım onarım hizmetlerini incelemiştir. Bu kuruluşun bulguları aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

Tecrübe	İyi Hizmet	Kötü Hizmet
10 yıl yada daha uzun süredir bu işte	16	4
10 yıldan kısa süredir bu işte	10	20

a) Bir kimse bu satıcılardan birini rassal olarak seçerse garanti süresinde iyi hizmet verene rastlama olasılığı kaçtır?

b) Bir kimse 10 yıl yada daha uzun süredir bu işte olan satıcılardan birini seçerse garanti süresince iyi hizmet verene rastlama olasılığı kaçtır?

Çözüm

Tecrübe	İyi Hizmet	Kötü Hizmet
10 yıl yada daha uzun süredir bu işte	16	4
10 yıldan kısa süredir bu işte	10	20

A: iyi hizmet veren satıcı

B: 10 yıl yada daha uzun süredir bu işte olan satıcı olmak üzere,

a) Rasgele yapılan seçimde iyi hizmet verene rastlama olasılığı:

$$P(A) = \frac{16+10}{50} = \frac{26}{50} = 0.52$$

Çözüm

Tecrübe	İyi Hizmet	Kötü Hizmet
10 yıl yada daha uzun süredir bu işte	16	4
10 yıldan kısa süredir bu işte	10	20

A: iyi hizmet veren satıcı

B: 10 yıl yada daha uzun süredir bu işte olan satıcı olmak üzere,

b) 10 yıldan daha uzun süredir bu işte olan satıcılardan birini seçerse garanti süresince iyi hizmet verene rastlama olasılığı

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{16}{50}}{\frac{16+4}{50}} = 0.80$$

Örnek

2 çocuklu bir ailede *çocukların cinsiyetinin farklı olduğu biliniyor* ise *büyük çocuğun erkek olma olasılığı* nedir?

Çözüm

2 çocuklu bir ailede çocukların cinsiyetinin farklı olduğu biliniyor ise büyük çocuğun erkek olma olasılığı nedir?

Çözüm:

S=2 çocuklu ailede çocukların cinsiyetleri={ek,ee,ke,kk}

B=Çocukların farklı cinsiyette olma durumu={ek,ke}

A=Büyük çocuğun erkek olması durumu={ek,ee}

$$A \cap B = \{ek\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

Teorem: A ile B, S örneklem uzayında birer olay ise ve P(A)≠0 ise P(A∩B)=P(A)P(B|A)

Örnek: 15 tanesi kusurlu olan 240 ekran kartından rassal olarak 2 ekran kartı peşpeşe seçilirse her ikisinin birden kusurlu çıkma olasılığı kaçtır?

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{15}{240} * \frac{14}{239} = \frac{7}{1912}$$

Bağımsız Olaylar

- A ve B gibi iki olaydan birinin gerçekleşmesi yada gerçekleşmemesi diğerinin gerçekleşme olasılığını etkilemiyorsa A ve B olayları birbirinden bağımsızdır.

- İki olay ***bağımsız ise*** $P(A|B)=P(A)$, $P(B|A)=P(B)$ şeklinde ifade edilir.

- $\mathbf{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$ ise **A ve B olayları bağımsızdır**.

- A,B,C gibi üç olay için bağımsızlık $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$ gerektirir. Üç yada daha çok olay bağımsız olmadıkları halde çifter çifter bağımsız olabilirler. Yada çifter çifter bağımsız olmadan da A,B,C olayları bağımsız olabilir.

Örnek

Bir madeni para 3 kez atılıyor. İlk iki atışın ikisinin de yazı gelmesi A, üçüncü atışın tura gelmesi olayı B, üç atışta 2 tane tura gelme olayı C olsun.

- A ile B olaylarının bağımsız
- B ile C olaylarının bağımlı olduğunu gösteriniz

Örnek

Bir madeni para 3 kez atılıyor. İlk iki atışın ikisinin de yazı gelmesi A, üçüncü atışın tura gelmesi olayı B, üç atışta 2 tane tura gelme olayı C olsun.

- A ile B olaylarının bağımsız $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ olmalı
- B ile C olaylarının bağımlı olduğunu gösteriniz $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$

Çözüm

Bir madeni para 3 kez atılıyor. İlk iki atışın ikisinin de yazı gelmesi A, üçüncü atışın tura gelmesi olayı B, üç atışta 2 tane tura gelme olayı C olsun.

- A ile B olaylarının bağımsız $P(A \cap B)=P(A)P(B)$ olmalı
- B ile C olaylarının bağımlı olduğunu gösteriniz $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$

Çözüm:

S={YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, TTT}

A={YYY, YYT} P(A)=1\4

B={YYT, YTT, TYT, TTT} P(B)=1\2

C={YTT, TYT, TTY} P(C)=3\8

A∩B={YYT} P(A∩B)=1\8

B∩C={YTT, TYT} P(B∩C)=1\4

Çözüm

Bir madeni para 3 kez atılıyor. İlk iki atışın ikisinin de yazı gelmesi A, üçüncü atışın tura gelmesi olayı B, üç atışta 2 tane tura gelme olayı C olsun.

- A ile B olaylarının bağımsız $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ olmalı
- B ile C olaylarının bağımlı olduğunu gösteriniz $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$

$P(A)=1\backslash 4$ $P(B)=1\backslash 2$ $P(C)=3\backslash 8$ $P(A \cap B)=1\backslash 8$ $P(B \cap C)=1\backslash 4$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ olmalı

$1\backslash 8 = 1\backslash 4 * 1\backslash 2$

$1\backslash 8 = 1\backslash 8$ A ile B bağımsız

$P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$ olmalı

$1\backslash 4 \neq 1\backslash 2 * 3\backslash 8$

$1\backslash 4 \neq 3\backslash 16$ B ile C bağımsız değil yani bağımlı

Toplam Olasılık Kuralı

- Gerçekleşmeleri $B_1, B_2, \ldots B_k$ ile gösterilen k adet farklı seçeneğe olanak veren bir olayda ‘’toplam olasılık kuralı’’ denen teoremden yararlanılır.
- **Teorem:** $B_1, B_2, \ldots B_k$ olayları S örneklem uzayının bir ayrışımını oluşturuyorsa ve i=1,2,…k için $P(B_i) \neq 0$ ise S içindeki herhangi bir A olayı için

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) P(A|B_i)$$

Örnek

Bir danışmanlık şirketinin üyeleri, işletme 1'den %60, işletme 2'den %30, işletme 3'ten %10 oranında olmak üzere üç işletmeden araba kiralamaktadırlar.

İşletme 1'den gelen araçların %9'u, işletme 2'den gelen araçların %20'si, işletme 3'ten gelen araçların %6'sı bakım gerektiriyorsa şirkete kiralanan bir aracın bakım gerektirme olasılığı kaçtır?

Çözüm

Bir danışmanlık şirketinin üyeleri, işletme 1'den %60, işletme 2'den %30, işletme 3'ten %10 oranında olmak üzere üç işletmeden araba kiralamaktadırlar.

İşletme 1'den gelen araçların %9'u, işletme 2'den gelen araçların %20'si, işletme 3'ten gelen araçların %6'sı bakım gerektiriyorsa şirkete kiralanan bir aracın bakım gerektirme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

A: Bir aracın bakım gerektirmesi

B1,B2,B3: Arabanın işletme 1,2 yada 3'ten gelmesi olayı

$$P(A)=P(B1)P(A|B1)+P(B2)P(A|B2)+P(B3)P(A|B3)$$

$$P(A)=(0.60)(0.09)+(0.30)(0.20)+(0.10)(0.06)=0.12$$

Bayes Teoremi

Önceki örnekteki soru, ‘’Danışmanlık şirketine kiralanan araba bakım gerektiriyorsa, bu arabanın işletme 2’den gelmiş olma olasılığı kaçtır?’’ olsaydı Bayes teoremini kullanmamız gerekecekti.

Teorem: $B_1, B_2, \ldots B_k$ olayları S örneklem uzayının bir ayrışımını oluşturuyorsa ve i=1,2,…k için $P(B_i) \neq 0$ ise, S içinde $P(A) \neq 0$ olan herhangi bir A olayı için (r=1,2,…k iken)

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

İspat:

$$P(B_r|A) = \frac{P(A \cap B_r)}{P(A)}$$

$$= \frac{Koşullu\ olasılıktan \rightarrow P(B_r)P(A|B_r)}{Toplam\ olasılık\ teoreminden \rightarrow \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Örnek

Danışmanlık şirketine kiralanan araba bakım gerektiriyorsa, bu arabanın işletme 2'den gelmiş olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$P(B_2|A) = \frac{(0.30)(0.20)}{(0.60)(0.09) + (0.30)(0.20) + (0.10)(0.06)} = \frac{0.060}{0.120}$$

$$P(B_2|A) = \frac{1}{2}$$

Şirketin kiraladığı araçların sadece %30'u işletme 2'den geldiği halde bakım gerektiren araçların yarısı bu işletmeden gelmektedir.

Örnek

Bir şehirdeki araçların %25’i çevreyi aşırı kirletmektedir. Çevreyi aşırı kirleten bir arabanın egzoz ölçüm testini geçememe olasılığı 0.99, kirletmeyen bir arabanın egzoz ölçüm testini geçememe olasılığı 0.17 dir.

Testi geçememiş bir aracın çevreyi aşırı kirletiyor olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

Bir şehirdeki araçların %25’i çevreyi aşırı kirletmektedir. Çevreyi aşırı kirleten bir arabanın egzoz ölçüm testini geçememe olasılığı 0.99, kirletmeyen bir arabanın egzoz ölçüm testini geçememe olasılığı 0.17 dir.

Testi geçememiş bir aracın çevreyi aşırı kirletiyor olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

B1:çevreyi aşırı kirleten

B2:kirletmeyen

A:testi geçememe

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$P(B_1|A) = \frac{(0.25)(0.99)}{(0.25)(0.99) + (0.75)(0.17)} = 0.66$$

Kaynaklar

- Doç. Dr. Melda Akın, Matematiksel İstatistik Ders Notu, İstanbul Üniversitesi
- Mühendisler ve Fen Bilimciler için Olasılık ve İstatistik, Ronald E. Walpole, Çeviri Editörü: Prof. Dr. M. Akif BAKIR, 9. baskıdan çeviri, Palme Yayıncılık, 2016.