

7. Atama Modelleri:

Atama modelleri belli işlerin veya görevlerin belli kişi veya kurumlara atanması ile alakalıdır. Doğrusal programlama modellerinin bir türüdür ve yapı itibarıyla ulaştırma modellerine oldukça benzerdir. Farkı ise atama modellerinde arz ve talepler sadece birdir. Yani atama modellerinde bir kişi sadece bir işi yapar. Benzer şekilde bir işe ise sadece tek bir kişi tarafından yapılmalıdır.

Bir örnekle pekiştirelim.

Örnek:

Bir polis karakoluna 3 farklı çağrı gelmiştir. Karakol elinde bulunan 5 adet devriyeyi bu çağrılara yönlendirmek istemektedir. Her bir polis devriyesinin olay yerlerine (çağrı merkezlerine) uzaklıkları aşağıda verilmiştir.

	Çağrı 1	Çağrı 2	Çağrı 3
Devriye 1	10	11	18
Devriye 2	6	7	7
Devriye 3	7	8	5
Devriye4	5	6	4
Devriye 5	9	4	7

Bölgede trafik sorunu olmadığından çağrı alanlarına ulaşım sürelerinin, uzaklıklar ile doğru orantılı oldukları düşünülmektedir. Amaç toplam süreyi en aza indirecek şekilde 3 adet devriyeyi 3 çağrı merkezine yönlendirmektir. Bu amaç gerçekleşirken aşağıdaki kısıtlar dikkate alınmalıdır.

- Her bir polis devriyesi ancak bir çağrıyı cevaplayabilir
- Bir çağrıya en fazla bir devriye atanabilir.

Bu koşullar altında toplam süreyi minimize edecek modeli kurunuz.

Atama modelleri bir Doğrusal Programlama türü olduğundan, çözüm yöntemleri de aynı aşamaları içerir.

1. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi:

Atama modellerinde karar değişkeni sayısı, ulaştırma modelleri ile aynıdır. Farkı ise ulaştırma modellerinde karar değişkenleri teoride her değeri alabilirken, atama modeli değişkenleri “ikili” olarak adlandırılan, sadece “1” ve “0” değeri alabilen değişkenlerdir.

Atama modellerinde karar değişkeni aşağıdaki gibi gösterilir.

x_{ij} : *i. devriyenin j. çağrıya cevap verip vermemesi durumu*

Değişkenin tanımından da anlaşılacağı üzere ya devriye çağrıya gider ve değişken “1” değeri alır veya çağrıya cevap vermez ve değişken “0” değeri alır. Başka bir alternatif söz konusu değildir.

2. Amaç Fonksiyonunun Yazılması:

Atama modellerinde amaç fonksiyonu, ulaştırma modellerindekiyle tamamen aynı şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} Z_{min} \quad & 10x_{11} + 11x_{12} + 18x_{13} \\ & 6x_{21} + 7x_{22} + 7x_{23} \\ & 7x_{31} + 8x_{32} + 5x_{33} \\ & 5x_{41} + 6x_{42} + 4x_{43} \\ & 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} \end{aligned}$$

3. Kısıt Denklemlerinin Yazılması:

Soruda iki farklı kısıt verilmiştir. Birinci kısıt her bir devriyenin sadece bir çağrıya gitmesi ile alakalıdır ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &\leq 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} &\leq 1 \end{aligned}$$

Burada dikkat edilmesi gereken çağrıdan fazla sayıda devriye olduğundan bazı devriyelerin hiçbir çağrıya gitmemeleri ihtimali olduğudur. Ulaştırma modellerindeki dengelenmemiş problemlerin arz fazlası olduğu durumla aynı şekilde yazılır. Burada devriyeler arz eden konumunda olduğundan, bu kısıtlar arz kısıtları olarak da adlandırılabilir.

İkinci kısıtımız ise her bir çağrıya sadece bir devriyenin yönlendirilmesi ile alakalıdır ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \end{aligned}$$

Çağrılarının mutlaka cevaplanması gerekliliği dikkate alınarak kısıtlar eşitlik şeklinde yazılmıştır.

Modeli toplu halde, pozitiflik şartını (ikili değişken olmasını da dikkate alarak) da ekleyerek yazalım.

$$\begin{aligned}
 &Z_{min} \quad 10x_{11} + 11x_{12} + 18x_{13} \\
 &\quad 6x_{21} + 7x_{22} + 7x_{23} \\
 &\quad 7x_{31} + 8x_{32} + 5x_{33} \\
 &\quad 5x_{41} + 6x_{42} + 4x_{43} \\
 &\quad 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} \\
 &\text{ARZ (Devriye)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} \leq 1 \end{array} \right. \\
 &\text{KISITLARI} \\
 &\text{TALEP (Çağrı)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \end{array} \right. \\
 &\text{KISITLARI} \\
 &\quad x_{ij} \geq 0 \text{ ve ikili}
 \end{aligned}$$

7.1. Macar Algoritması:

Atama modelleri Macar Algoritması adı verilen özel bir yöntemle çözülebilir. Bu yöntem 5 temel aşamadan oluşmaktadır.

1. **Satır Hesaplamaları:** Bu adımda her bir satırda yer alan en küçük değer bütün satırdaki değerlerden çıkarılır. Bu işlem bütün satırlar için tekrarlanır.
2. **Sütun Hesaplamaları:** Benzer şekilde her bir sütundaki en küçük değer diğer sütunlardan çıkarılarak yeni sütunlar hesaplanır. Satır işlemleri gibi bütün sütunlarda bu işlemler yapılmalıdır.
3. **Optimallik Araması:** Satır ve Sütun işlemler bittikten sonra ortaya çıkar sıfırların üzerinden çizgiler çekilir. Bu çizgileri çekerken olası en az sayıda çizgi çekmek gerekmektedir. Örneğin 3 çizgi ile bütün sıfırlar çizilebiliyor ise o zaman 3 çizgi kullanılmalıdır. Çizgiler yatay ve dikey olabilir, fakat çapraz olmaz. Eğer çizgi sayısı tablo satır veya sütun sayısına eşit ise o zaman tablo optimumdur ve 5. Adıma gidilerek atamalara belirlenir.
4. **Güncelleme:** Eğer önceki adımda çizgi sayısı eksik kalmış ise, üzerinden çizgi geçmeyen hücrelerin en küçüğü seçilerek, çizgi geçmeyen hücrelerden çıkarılır. Daha sonra seçilen değer çizgilerin kesişiminde olan (üzerine bir yatay bir dikey çizgi geçen) değerlere eklenir. Diğer değerlere (Sadece tek bir çizgi geçenler)

dokunulmaz. Daha sonra tekrar 3. Adıma dönülerek çizgilerin çekilmesi tekrarlanır.

5. **Atama Belirleme:** Eğer satır veya sütun sayısı kadar çizgi çekildi ise, sadece sıfırlar her sütun ve satırda bir tane olacak şekilde seçilerek atamalar gerçekleştirilir.

Macar algoritmasına çözüm yapabilmek için kare matris olması zorunluluğu vardır.

Örnek:

Bir firma 3 farklı elemanına 3 farklı görev yüklemek istemektedir. Firma elemanlarının tahmini görev bitirme sürelerini belirlemiştir. Her bir projenin, bir eleman tarafından tamamlanma süreleri aşağıda verildiğine göre, toplam görev süresini en aza indirecek eleman atamalarını gerçekleştiriniz.

	Görev 1	Görev 2	Görev 3
Eleman 1	20	26	30
Eleman 2	10	15	19
Eleman 3	17	14	12

Soruda tablo 3*3 şeklinde bir kare matris olduğundan Macar algoritması kullanılabilir.

1. **Satır işlemleri:** Her bir satırdaki en küçük değer diğerlerinden çıkarılır.

	G1	G2	G3
E1	20	26	30
E2	10	15	19
E3	17	14	12

 →

	G1	G2	G3
E1	0	6	10
E2	0	5	9
E3	5	2	0

2. **Sütun işlemleri:** Her bir sütundaki en küçük değer diğerlerinden çıkarılır. Bu işlem yapılırken önceki adımda hesaplanan son tablo kullanılır.

	G1	G2	G3
E1	0	6	10
E2	0	5	9
E3	5	2	0

 →

	G1	G2	G3
E1	0	4	10
E2	0	3	9
E3	5	0	0

3. **Optimallik Taraması:** En az sayıda yatay ve dikey çizgi ile sıfırların üstleri kapatılır.

	G1	G2	G3
E1	0	4	10
E2	0	3	9
E3	5	0	0

 →

	G1	G2	G3
E1	0	4	10
E2	0	3	9
E3	5	0	0

Görüldüğü üzere sadece iki adet çizgi bütün sıfırları kapatmak için yeterli olmuştur. Bu durumda matris boyutu 3 olduğundan, optimumluk için 3 çizgi gerekeceğinden sonraki adıma geçilerek tablo güncellenmelidir.

4. **Güncelleme:** Üzerinden çizgi geçmeyen en küçük değer 3 tür. Bu değer çizgi olmayan değerlerden çıkarılıp, üzerinden hem yatay, hem de dikey çizgi geçen kesişim değeri 5 e eklenir ve yeni tablo elde edilir.

	G1	G2	G3
E1	0	4	10
E2	0	3	9
E3	5	0	0

→

	G1	G2	G3
E1	0	1	7
E2	0	0	6
E3	8	0	0

3. **Optimallik Taraması:** Tekrar çizgiler “0” değerleri üzerinden çizilmelidir.

	G1	G2	G3
E1	0	1	7
E2	0	0	6
E3	8	0	0

→

	G1	G2	G3
E1	0	1	7
E2	0	0	6
E3	8	0	0

Bu sefer yeterli sayıda çizgi olduğundan dolayı optimal tabloya ulaşılmıştır. Bu durumda 4. Adıma (güncelleme) tekrar gerek kalmamıştır. Son adım olan Atama belirlemeye geçilebilir.

5. **Atama Belirleme:** Bu adımda sadece “0” değerleri kullanılarak atamalar yapılacaktır. Diğer değerler hiçbir şekilde atamalarda kullanılamaz. Burada kullanacağımız ipucu satırlarda veya sütunlarda yalnız kalan “0” değerlerini bulmak olacaktır. Çünkü eğer bir satırda veya sütunda sadece bir adet “0” değeri varsa, diğer değerler atamalar için kullanılamayacağı için direkt olarak o değere atama yapılır. Birinci satırda sadece E1G1 hücresinde “0” değeri bulunmaktadır. Bu satıra başka atama olmayacağından dolayı E1G1 hücresi atama için seçilecektir.

	G1	G2	G3
E1	0	1	7
E2	0	0	6
E3	8	0	0

Eğer E1G1 ataması gerçekleşir ise E2G2 deki “0” değeri kullanılamaz. Çünkü atama modellerinde “ikili” değişken kuralından dolayı bir sütunda sadece bir atama olabilir. Bu durumda E2G1 ataması mümkün değilse ikinci satırda sadece E2G2 ataması yapılabilir.

	G1	G2	G3
E1	0	1	7
E2	0	0	6
E3	8	0	0

E2G2 atamasından sonra E3G2 ataması yine kullanılamaz olacağından dolayı, Son satırda tek atama yapılabilecek hücre E3G3 olacaktır.

	G1	G2	G3
E1	0	1	7
E2	0	0	6
E3	8	0	0

Böylece modeldeki atamalar tamamlanmış ve her bir satırda ve sütunda bir atama olması kuralı sağlanmıştır. Bu çözümü sorudaki orijinal tabloya aynen aktaralım.

	Görev 1	Görev 2	Görev 3
Eleman 1	20	26	30
Eleman 2	10	15	19
Eleman 3	17	14	12

Görüleceği üzere sorunun cevabına göre Eleman 1 Görev 1 e atanırken, Eleman 2 Görev 2 ye ve Eleman 3 Görev 3 e atanmıştır. Toplam harcanacak süre ise $20 + 15 + 12 = 47$ saat olarak hesaplanmıştır.

Bazı durumlarda ise bazı atamalar engellenmiş olabilir. Aşağıdaki örnekte bu durumu inceleyelim.

Örnek:

Bir inşaat şirketi 4 farklı lokasyonda yer alana iş makinelerini farklı yerlerde ihtiyaç belirten şantiyelerine göndermek istemektedir. İş makinelerinin şimdiki konumları ile şantiyeler arasındaki mesafeler aşağıda verilmiştir. Amaç minimum sürede iş makineleri şantiyelere ulaştırmaktır.

	Şantiye 1	Şantiye 2	Şantiye 3	Şantiye 4
İş Makinesi 1	-	15	74	85
İş Makinesi 2	74	22	100	115
İş Makinesi 3	90	105	21	96
İş Makinesi 4	13	-	97	25

Soruda görüleceği üzere iş makinesi 1 in şantiye 1 e atanması mümkün değildir. Benzer şekilde İş makinesi 4 şantiye 2 ye atanamaz. Bu durumdaki hücrelere yasaklı hücreler denir. Yasaklı hücrelere atama yapılamaması adına Macar algoritmasına başlamadan önce bu hücrelere M değerleri ile atanır.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	15	74	85
M2	74	22	100	115
M3	90	105	21	96
M4	13	M	97	25

Soruda tablo 4*4 şeklinde bir kare matris olduğundan Macar algoritması kullanılabilir.

- Satır işlemleri:** Her bir satırdaki en küçük değer diğerlerinden çıkarılır. Burada dikkat edilmesi gereken M çok büyük bir değer olduğundan M den herhangi bir değer çıktığında yine çok büyük bir değer olacaktır. Bu yüzden M değerinde çıkarma yapıldığında sonuç yine M olur.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	15	74	85
M2	74	22	100	115
M3	90	105	21	96
M4	13	M	97	25

→

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	70
M2	52	0	78	93
M3	69	84	0	75
M4	0	M	84	12

2. **Sütun işlemleri:** Her bir sütundaki en küçük değer diğerlerinden çıkarılır.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	70
M2	52	0	78	93
M3	69	84	0	75
M4	0	M	84	12

→

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	58
M2	52	0	78	81
M3	69	84	0	63
M4	0	M	84	0

3. **Optimallik Taraması:** En az sayıda yatay ve dikey çizgi ile sıfırların üstleri kapatılır.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	58
M2	52	0	78	81
M3	69	84	0	63
M4	0	M	84	0

→

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	58
M2	52	0	78	81
M3	69	84	0	63
M4	0	M	84	0

Yeterli sayıda çizgi olmadığından güncelleme adımına geçilir.

4. **Güncelleme:** Üzerinden çizgi geçmeyen en küçük değer 52 dir. Bu değer çizgi olmayan değerlerden çıkarılıp, üzerinden hem yatay, hem de dikey çizgi geçen kesişim değerleri M ve 84 e eklenir ve yeni tablo elde edilir. M değeri zaten çok büyük olduğundan bir değer eklendiğinde sonuç değişmeden M olarak alınabilir.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	58
M2	52	0	78	81
M3	69	84	0	63
M4	0	M	84	0

→

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	6
M2	0	0	78	29
M3	17	84	0	11
M4	0	M	136	0

3. **Optimallik Taraması:** Tekrar çizgiler "0" değerleri üzerinden çizilmelidir.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	6
M2	0	0	78	29
M3	17	84	0	11
M4	0	M	136	0

→

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	6
M2	0	0	78	29
M3	17	84	0	11
M4	0	M	136	0

Bu sefer yeterli sayıda çizgi olduğundan dolayı optimal tabloya ulaşılmıştır. Bu durumda 4. Adıma (güncelleme) tekrar gerek kalmamıştır. Son adım olan Atama belirlemeye geçilebilir.

5. **Atama Belirleme:** Bu adımda sadece "0" değerleri kullanılarak atamalar yapılacaktır.

M4Ş4 hücresi 4. Sütunda atama yapılabilecek tek hücre olduğundan atama yapılmalıdır.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	6
M2	0	0	78	29
M3	17	84	0	11
M4	0	M	136	0

Bu atamadan sonra M4Ş1 ataması mümkün değildir. Böylece birinci sütunda yapılacak tek atama M2Ş1 olacaktır.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	6
M2	0	0	78	29
M3	17	84	0	11
M4	0	M	136	0

M3Ş3 teki 0 da üçüncü sütunda atama yapılabilecek tek hücredir.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	6
M2	0	0	78	29
M3	17	84	0	11
M4	0	M	136	0

Bu atamalardan sonra ikinci sütunda tek atama yapılabilecek hücre M1Ş2 olacaktır. Buradaki diğer sıfırlı hücre M2Ş2 ye M2Ş1 atamasından dolayı atama yapılamaz.

	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4
M1	M	0	59	6
M2	0	0	78	29
M3	17	84	0	11
M4	0	M	136	0

Bütün atamalar tamamlandığına göre şimdi orijinal tabloya atamalar yerleştirilip çözümler incelenebilir.

	Şantiye 1	Şantiye 2	Şantiye 3	Şantiye 4
İş Makinesi 1	-	15	74	85
İş Makinesi 2	74	22	100	115
İş Makinesi 3	90	105	21	96
İş Makinesi 4	13	-	97	25

Toplam taşıma süresi ise $15+74+21+25=135$ olarak hesaplanmıştır.

Atama modellerinde her zaman satır ve sütun sayıları aynı olmayabilir. Bu durumda ulaştırma modellerindeki arz talep dengesizliklerine benzer olarak sanal satırlar veya sütunlar kullanılabilir. Polis karakolu sorusuna dönerek soruyu Macar Algoritması ile çözmeye çalışalım.

	Ç1	Ç2	Ç3
D1	10	11	18
D2	6	7	7
D3	7	8	5
D4	5	6	4
D5	9	4	7

Soru tablosu incelendiğinde satır ve sütun sayılarının birbirine eşit olmadığı görülmektedir. Bu durumda Macar Algoritması ile çözüm yapmaya direkt olarak

başlanamaz. Öncelikle eksik olan satır veya sütunlar sanal satır veya sütunlar ile tamamlanır.

Soruda 3 sütuna karşılık 5 satır olduğundan 2 adet sanal sütun soruya eklenmelidir. Sanal satır ve sütunlardaki hücrelere “0” değerleri verilmelidir.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	10	11	18	0	0
D2	6	7	7	0	0
D3	7	8	5	0	0
D4	5	6	4	0	0
D5	9	4	7	0	0

Artık kare matris olduğuna göre Macar algoritmasına geçebiliriz.

1. **Satır işlemleri:** Her bir satırdaki en küçük değer diğerlerinden çıkarılır. Eklenen sanal sütunlar yüzünden her bir satırda “0” olduğundan satır işlemlerini yapmanın manası kalmamıştır. Çünkü “0” değerini çıkarmak hiçbir sayıyı değiştirmeyecektir.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	10	11	18	0	0
D2	6	7	7	0	0
D3	7	8	5	0	0
D4	5	6	4	0	0
D5	9	4	7	0	0

→

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	10	11	18	0	0
D2	6	7	7	0	0
D3	7	8	5	0	0
D4	5	6	4	0	0
D5	9	4	7	0	0

2. **Sütun işlemleri:** Her bir sütundaki en küçük değer diğerlerinden çıkarılır.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	10	11	18	0	0
D2	6	7	7	0	0
D3	7	8	5	0	0
D4	5	6	4	0	0
D5	9	4	7	0	0

→

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	5	7	14	0	0
D2	1	3	3	0	0
D3	2	4	1	0	0
D4	0	2	0	0	0
D5	4	0	3	0	0

3. **Optimallik Taraması:** En az sayıda yatay ve dikey çizgi ile sıfırların üstleri kapatılır.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	5	7	14	0	0
D2	1	3	3	0	0
D3	2	4	1	0	0
D4	0	2	0	0	0
D5	4	0	3	0	0

→

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	5	7	14	0	0
D2	1	3	3	0	0
D3	2	4	1	0	0
D4	0	2	0	0	0
D5	4	0	3	0	0

Tablo incelendiğinde 4 adet çizgi çekilerek bütün sıfırlar kapatılmıştır. Fakat bu soru için bize 5 adet çizgi gerekmektedir. Bu nedenle tablo sonraki adımda güncellenmelidir.

4. **Güncelleme:** Üzerinden çizgi geçmeyen en küçük değer 1 dir. Bu değer çizgi olmayan değerlerden çıkarılıp, üzerinden hem yatay, hem de dikey çizgi geçen kesişim değerleri “0” lara eklenir ve yeni tablo elde edilir.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	5	7	14	0	0
D2	1	3	3	0	0
D3	2	4	1	0	0
D4	0	2	0	0	0
D5	4	0	3	0	0

→

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

3. **Optimallik Taraması:** Tekrar çizgiler “0” değerleri üzerinden çizilmelidir.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

→

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

Bu sefer yeterli sayıda çizgi olduğundan dolayı optimal tabloya ulaşılmıştır. Bu durumda 4. Adıma (güncelleme) tekrar gerek kalmamıştır. Son adım olan Atama belirlemeye geçilebilir.

5. **Atama Belirleme:** Bu adımda sadece “0” değerleri kullanılarak atamalar yapılacaktır.

İkinci çağrıya sadece Devriye 5 cevap verebilir. Çünkü bu sütunda başka atama yapmak mümkün değildir.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

Fakat bu atamadan sonra bariz olarak görünen başka bir atama görülmemektedir. Bütün satır ve sütunlarda atamaların alternatifleri mevcuttur. Bu durumda rastgele bir sıfır seçilerek yola devam edilir ve atamalar tamamlanır. Sonra tekrar başa dönülerek diğer sıfırlardan biri seçilerek alternatif çözümlerin varlığı araştırılır. Bu işlem sırasında sanal sütunlardaki “0” değerleri üzerinden alternatif çözümlere bakılmaz.

Öncelikle D4Ç1 deki “0” değerine atama yapalım.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

Bu durumda D4Ç3 ataması mümkün olmayacak böylece sütunda başka atama yapma şansı olmadığından dolayı D3Ç3 zorunlu olacaktır.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

Sanal sütunlardaki alternatifler bizim için anlam ifade etmez bu durumda rastgele atama gerçekleştirerek sanalları da tamamlayalım.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

Şimdi tekrar başa dönerek D4Ç1 yerine diğer bir “0” atamalı hücre olan D4Ç3 değerini seçelim.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

Bu durumda D4Ç1 ataması mümkün olmayacağından Ç1 için kalan son atama D2Ç1 seçilecektir.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

Geriye kalan iki sütun sanal olduğundan alternatifler dikkate alınmadan atamalar gerçekleştirilir.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	4	6	13	0	0
D2	0	2	2	0	0
D3	1	3	0	0	0
D4	0	2	0	1	1
D5	4	0	3	1	1

Şimdi her iki alternatif sonuçlarını orijinal soruda işaretleyelim sonuçları karşılaştıralım.

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	10	11	18	0	0
D2	6	7	7	0	0
D3	7	8	5	0	0
D4	5	6	4	0	0
D5	9	4	7	0	0

Bu çözümde toplam maliyet

$$D3Ç3 = 5$$

$$D4Ç1 = 5$$

$$D5Ç2 = 4$$

$$\text{Toplam} = 14$$

	Ç1	Ç2	Ç3	S1	S2
D1	10	11	18	0	0
D2	6	7	7	0	0
D3	7	8	5	0	0
D4	5	6	4	0	0
D5	9	4	7	0	0

Bu çözümde toplam maliyet

$$D2Ç1 = 6$$

$$D4Ç3 = 4$$

$$D5Ç2 = 4$$

$$\text{Toplam} = 14$$

Atama problemlerinde alternatif çözümler olduğunda atamalar değişse bile amaç değeri yani atamalar toplamı değişmez.

ÇALIŞMA SORULARI

Soru 1: Bir işletme 3 farklı projesini yürütmek adında 5 farklı eleman arasından seçim yapmak istemektedir. Firma elemanların her bir projeyi tamamlama sürelerini yaklaşık olarak aşağıdaki tablodaki gibi tahmin etmiştir. Bu koşullar altında toplam tamamlanma süresini minimize edecek modeli kurunuz. Soruyu Macar algoritması ile çözünüz.

	Proje 1	Proje 2	Proje 3
Eleman 1	17	27	35
Eleman 2	16	28	38
Eleman 3	18	29	31
Eleman 4	14	25	34
Eleman 5	19	28	36

$$Z_{\min} 17X_{11} + 27X_{12} + 35X_{13} + 16X_{21} + 28X_{22} + 38X_{23} + 18X_{31} + 29X_{32} + 31X_{33} + 14X_{41} + 25X_{42} + 34X_{43} + 19X_{51} + 28X_{52} + 36X_{53}$$

$$\begin{aligned} X_{11}+X_{12}+X_{13} &\leq 1 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23} &\leq 1 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33} &\leq 1 \\ X_{41}+X_{42}+X_{43} &\leq 1 \\ X_{51}+X_{52}+X_{53} &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+X_{51} &= 1 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+X_{52} &= 1 \\ X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}+X_{53} &= 1 \\ X_{ij} &\text{ ikili} \end{aligned}$$

	P1	P2	P3	SP1	SP2
E1	17	27	35	0	0
E2	16	28	38	0	0
E3	18	29	31	0	0
E4	14	25	34	0	0
E5	19	28	36	0	0

	P1	P2	P3	SP1	SP2
E1	3	2	4	0	0
E2	2	3	7	0	0
E3	4	4	0	0	0
E4	0	0	3	0	0
E5	5	3	5	0	0

	P1	P2	P3	SP1	SP2	ALTERNATİF 1		ALTERNATİF 2	
E1	1	0	2	0	0	E1 – P2	27	E1 – SP1	0
E2	0	1	5	0	0	E2 – SP1	0	E2 – P1	16
E3	4	4	0	2	2	E3 – P3	31	E3 – P3	31
E4	0	0	3	2	2	E4 – P1	14	E4 – P2	25
E5	3	1	3	0	0	E5 – SP2	0	E5 – SP2	0
						Toplam Süre: 72 Saat		Toplam Süre: 72 Saat	

Soru 2 : Bir işletme 3 farklı projesini 4 farklı firmaya yaptırmak istemektedir. Firmaların önerilen projeleri tahmini tamamlama süreleri aşağıda verilmiştir. Soruyu Macar algoritması ile çözünüz.

	Proje 1	Proje 2	Proje 3
Firma 1	60	125	70
Firma 2	30	105	80
Firma 3	100	85	100
Firma 4	10	65	125

	P1	P2	P3	SANAL
F1	60	125	70	0
F2	30	105	80	0
F3	100	85	100	0
F4	10	65	125	0

	P1	P2	P3	SANAL
F1	50	60	0	0
F2	20	40	10	0
F3	90	20	30	0
F4	0	0	55	0

	P1	P2	P3	SANAL	ALTERNATİF 1		
F1	30	40	0	0	F1→P3	70	TOPLAM KAZANÇ 165
F2	0	20	10	0	F2→P1	30	
F3	70	0	30	0	F3→P3	0	
F4	0	0	75	20	F4→P2	65	

	P1	P2	P3	SANAL	ALTERNATİF 2		
F1	30	40	0	0	F1→D3	70	TOPLAM KAZANÇ 165
F2	0	20	10	0	F2→D3	0	
F3	70	0	30	0	F3→D2	85	
F4	0	0	75	20	F4→D1	10	

Soru 3: Bir mağaza elindeki 4 adet antikayı satmak istemekte ve 3 müşteri bu antikalara talip olmaktadır.

	Müşteri 1	Müşteri 2	Müşteri 3
Tablo 1	1375	1410	1435
Tablo 2	1270	1250	1300
Tablo 3	1370	1300	1365
Tablo 4	1375	1300	1320

Aşağıdaki iki farklı durum için toplam kazancı maksimum yapacak atamaları yapınız?

- Her müşteri sadece bir antika alacak
- Müşteri 1 iki antika alacak

A Şıkkı için cevap					B Şıkkı için cevap				
	M1	M2	M3			M1	M2	M3	S
T1	125	90	65		T1	125	90	65	125
T2	230	250	200		T2	230	250	200	230
T3	130	200	135		T3	130	200	135	130
T4	125	200	180		T4	125	200	180	125
	M1	M2	M3	S		M1	M2	M3	S
T1	125	90	65	0	T1	60	25	0	60
T2	230	250	200	0	T2	30	50	0	30
T3	130	200	135	0	T3	0	70	5	0
T4	125	200	180	0	T4	0	75	55	0
	M1	M2	M3	S		M1	M2	M3	S
T1	0	0	0	0	T1	60	0	0	60
T2	105	160	135	0	T2	30	25	0	30
T3	5	110	70	0	T3	0	45	5	0
T4	0	110	115	0	T4	0	50	55	0
	M1	M2	M3	S					
T1	70	0	0	70					
T2	105	90	65	0					
T3	5	40	0	0					
T4	0	40	45	0					
Toplam Kar: 1410 + 1365 + 1375 = 4150					Toplam Kar: 1410 + 1300 + 1370 + 1375 = 5445				

Soru 4: Bir işletme 3 farklı projesini 4 farklı firmaya yaptırmak istemektedir. Firmaların önerilen projeleri tahmini tamamlama süreleri aşağıda verilmiştir. Bu koşullar altında toplam tamamlanma süresini minimize edecek modeli kurunuz. Soruyu Macar algoritması ile çözünüz.

	Proje 1	Proje 2	Proje 3	Proje 4
Firma 1	35	33	31	32
Firma 2	36	32	30	39
Firma 3	36	27	27	34
Firma 4	37	30	28	39
Firma 5	37	27	27	37

	Proje 1	Proje 2	Proje 3	Proje 4	SP
Firma 1	0	6	4	0	0
Firma 2	1	5	3	7	0
Firma 3	1	0	0	3	0
Firma 4	2	3	1	7	0
Firma 5	2	0	0	5	0

	Proje 1	Proje 2	Proje 3	Proje 4	SP	<u>Alternatif Çözüm 1</u>
Firma 1	0	6	4	0	1	Firma 1 – Proje 4 = 32
Firma 2	0	4	2	6	0	Firma 2 – Proje 1 = 36
Firma 3	1	0	0	3	1	Firma 3 – Proje 2 = 27
Firma 4	1	2	0	6	0	Firma 4 – Atama Yok
Firma 5	2	0	0	5	1	Firma 5 – Proje 3 = 27
						Toplam Süre = 122

	Proje 1	Proje 2	Proje 3	Proje 4	SP	<u>Alternatif Çözüm 1</u>
Firma 1	0	6	4	0	1	Firma 1 – Proje 4 = 32
Firma 2	0	4	2	6	0	Firma 2 – Proje 1 = 36
Firma 3	1	0	0	3	1	Firma 3 – Proje 3 = 27
Firma 4	1	2	0	6	0	Firma 4 – Atama Yok
Firma 5	2	0	0	5	1	Firma 5 – Proje 2 = 27
						Toplam Süre = 122

Soru 5: Bir işletme 3 farklı projesini 4 farklı firmaya yaptırmak istemektedir. Firmaların önerilen projeleri tahmini tamamlama süreleri aşağıda verilmiştir. Bu koşullar altında toplam tamamlanma süresini minimize edecek modeli kurunuz. Soruyu Macar algoritması ile çözünüz.

	Proje 1	Proje 2	Proje 3	Proje 4
Firma 1	24	17	15	26
Firma 2	23	19	17	26
Firma 3	24	14	14	24
Firma 4	22	20	18	19
Firma 5	23	14	14	21

	Proje 1	Proje 2	Proje 3	Proje 4	SP
Firma 1	2	3	1	7	0
Firma 2	1	5	3	7	0
Firma 3	2	0	0	5	0
Firma 4	0	6	4	0	0
Firma 5	1	0	0	2	0

	Proje 1	Proje 2	Proje 3	Proje 4	SP	<u>Alternatif Çözüm 1</u>
Firma 1	1	2	0	6	0	Firma 1 – Atama Yok
Firma 2	0	4	2	6	0	Firma 2 – Proje 1 = 23
Firma 3	2	0	0	5	1	Firma 3 – Proje 3 = 14
Firma 4	0	6	4	0	1	Firma 4 – Proje 4 = 19
Firma 5	1	0	0	2	1	<u>Firma 5 – Proje 2 =14</u>
						Toplam Süre = 70

	Proje 1	Proje 2	Proje 3	Proje 4	SP	<u>Alternatif Çözüm 2</u>
Firma 1	1	2	0	6	0	Firma 1 – Atama Yok
Firma 2	0	4	2	6	0	Firma 2 – Proje 1 = 23
Firma 3	2	0	0	5	1	Firma 3 – Proje 2 = 14
Firma 4	0	6	4	0	1	Firma 4 – Proje 4 = 19
Firma 5	1	0	0	2	1	<u>Firma 5 – Proje 2 =14</u>
						Toplam Süre = 70