

第七章

一、异步电机的动态数学模型的性质

电磁耦合是产生能量交换的必要条件！电流与磁通的乘积产生转矩，转速与磁通的乘积得到感应电动势。交、直流电机均是如此。但是由于结构不同，因此表达式不同。

▲以他励直流电机为例：他励直流电动机的励磁绕组和电枢绕组相互独立，励磁电流和电枢电流单独可控。如果忽略电枢反应，或者通过补偿的方式来抵消，那么励磁和电枢绕组各自产生的磁动势在空间上面的相差为 $\pi/2$ ，无交叉耦合。气隙磁通由励磁绕组单独产生，而电磁转矩正比于磁通与电枢电流的乘积。不考虑弱磁调速，保持励磁电流恒定，这样可以认为磁通不参与系统的动态过程。因此，可以只通过电枢电流来控制电磁转矩。

因此直流电机的动态数学模型输入只有一个变量——电枢电压，输出变量——转速。可以采用单变量线性系统来描述。完全可以用工程设计法进行分析

▲交流异步电机数学模型不同，不能简单等效，由于以下几个原因：

(1) 异步电机变压变频调速需要电压（或者电流）与频率进行协调控制，因此有两个输入量。在输出变量中，除了转速以外，磁链（磁通）也是一个输出变量。因此为了获得良好的动态性能，也需要对磁链施加控制。因此异步电机是一个多变量的系统。

(2) 直流电机在基速以下运行的时候，容易保持磁通恒定，可以视为常数。异步电机无法对磁通进行单独控制，电流矢量与磁链矢量叉乘产生转矩，转速与磁链矢量叉乘产生感应电动势。因此异步电机数学模型是非线性的模型。

(3) 三相异步电机定子三相绕组在空间上互差 $2\pi/3$ ，转子也可以等效为空间互差 $2\pi/3$ 的三相绕组，各绕组之间存在交叉耦合，每个绕组都有各自的电磁惯性，再考虑运动系统的机电惯性，转速与转角的积分关系等，因此动态模型是高阶系统。

▲总的来说，异步电机的动态数学模型是一个高阶、非线性、强耦合的多变量系统。

二、异步电机的三相数学模型

我们为了简化，因此作出以下假设：

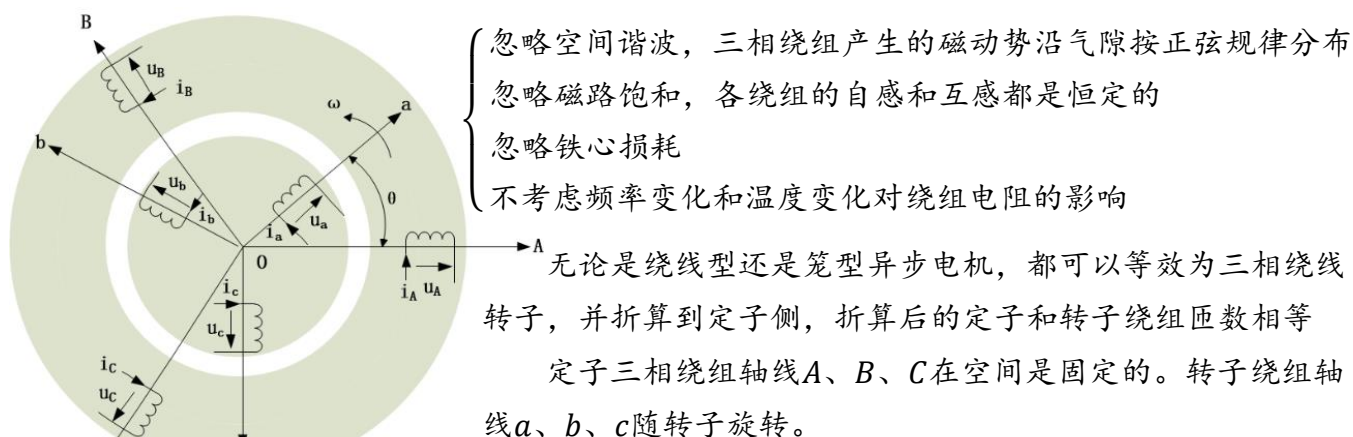


图 7.1 三相异步电动机的物理模型

1、异步电机三相动态模型的数学表达式

异步电机的动态模型是由磁链方程、电压方程、转矩方程和运动方程组成，其中磁链方程和转矩方程为代数方程，电压方程和运动方程为微分方程。

(1) 磁链方程

异步电机每个绕组的磁链是它本身的自感磁链和其他绕组对它的互感磁链之和，因此，六个绕组的磁链可以用下式表示：

$$\begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \\ \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{AA} & L_{AB} & L_{AC} & L_{Aa} & L_{Ab} & L_{Ac} \\ L_{BA} & L_{BB} & L_{BC} & L_{Ba} & L_{Bb} & L_{Bc} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC} & L_{Ca} & L_{Cb} & L_{Cc} \\ L_{aA} & L_{aB} & L_{aC} & L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{bA} & L_{bB} & L_{bC} & L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{cA} & L_{cB} & L_{cC} & L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

(PS: 矩阵方程例子 $\psi_A = L_{AA}i_A + L_{AB}i_B + L_{AC}i_C + L_{Aa}i_a + L_{Ab}i_b + L_{Ac}i_c$)

其中大写为定子，小写为转子。对角线为自感，其余为相应绕组间的互感。

例如 ψ_A 为定子A相绕组全磁链， i_a 为转子a相电流瞬时值， L_{CC} 为定子C相自感

▲对于每一相绕组来说，它所交链的磁通是互感磁通（主磁通）与漏感磁通之和

▲因此自感有：

$$\begin{cases} \text{定子各相自感为: } L_{AA} = L_{BB} = L_{CC} = L_{ms} + L_{ls} \\ \text{转子各相自感为: } L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L_{mr} + L_{lr} \end{cases}$$

(L_{ms} 为定子每相绕组交链的最大互感磁通对应于定子互感， L_{mr} 为转子每相绕组交链的最大互感磁通对应于转子互感，由于折算后定、转子绕组匝数相等，因此有 $L_{ms} = L_{mr}$ ， L_{ls} 为定子漏磁通， L_{lr} 为转子漏磁通)

▲互感又分为两类：

$$\begin{cases} \text{定子三相彼此之间和转子三相彼此之间位置都是固定的，故互感为常值} \\ \text{定子任一相与转子任一相之间的位置是变化的，互感是角位移的函数} \end{cases}$$

第一类：三相绕组轴线彼此在空间的相位差是 $\pm 120^\circ$ ，在假定磁动势沿气隙按正弦规律分布的条件下：

$$\begin{cases} L_{AB} = L_{BC} = L_{CA} = L_{BA} = L_{CB} = L_{AC} = -1/2 L_{ms} \\ L_{ab} = L_{bc} = L_{ca} = L_{ba} = L_{cb} = L_{ac} = -1/2 L_{ms} \end{cases}$$

互感为负值，说明互感磁链起弱磁作用

第二类：定、转子绕组间的互感，由于相互间位置的变化，可分别表示为：

$$\begin{cases} L_{Aa} = L_{aA} = L_{Bb} = L_{bB} = L_{Cc} = L_{cC} = L_{ms} \cos \theta \\ L_{Ab} = L_{bA} = L_{Bc} = L_{cB} = L_{Ca} = L_{aC} = L_{ms} \cos(\theta + 120^\circ) \\ L_{Ac} = L_{cA} = L_{Ba} = L_{aB} = L_{Cb} = L_{bC} = L_{ms} \cos(\theta - 120^\circ) \end{cases}$$

当定、转子两相绕组轴线重合时，两者互感值最大， L_{ms} 就是最大互感值

★简化分块矩阵式：

▲完整磁链方程分块矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} \psi_s \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

其中 $\begin{cases} \psi_s = [\psi_A & \psi_B & \psi_C]^T \\ \psi_r = [\psi_a & \psi_b & \psi_c]^T \end{cases} \quad \begin{cases} i_s = [i_A & i_B & i_C]^T \\ i_r = [i_a & i_b & i_c]^T \end{cases}$

定子电感矩阵：

$$L_{ss} = \begin{bmatrix} L_{ms} + L_{ls} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ms} + L_{ls} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ms} + L_{ls} \end{bmatrix}$$

A、B、C相自感 L_{AA} 、 L_{BB} 、 L_{CC} ，仅由主磁通产生，且仅本项有漏感，其他相漏感不会影响

转子电感矩阵：

$$L_{rr} = \begin{bmatrix} L_{ms} + L_{lr} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ms} + L_{lr} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ms} + L_{lr} \end{bmatrix}$$

定、转子互感矩阵：

$$L_{rs} = L_{sr}^T = L_{ms} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ \cos(\theta + 120^\circ) & \cos\theta & \cos(\theta - 120^\circ) \\ \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

▲以上两个分块矩阵互为转置，且各元素均与转子位置有关，均是变参数的，这是系统非线性的一个根源。

(2) 电压方程

▲三相定子绕组平衡电压方程为：

$$\begin{cases} u_A = i_A R_s + \frac{d\psi_A}{dt} \\ u_B = i_B R_s + \frac{d\psi_B}{dt} \\ u_C = i_C R_s + \frac{d\psi_C}{dt} \end{cases}$$

▲三相转子绕组折算到定子侧后的电压方程为：

$$\begin{cases} u_a = i_a R_r + \frac{d\psi_a}{dt} \\ u_b = i_b R_r + \frac{d\psi_b}{dt} \\ u_c = i_c R_r + \frac{d\psi_c}{dt} \end{cases}$$

★综上，电压方程的矩阵式为：

$$\begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \\ u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \\ \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix}$$

定子部分

即： $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt}$ 这里电压电流均为瞬时值，磁链为各绕组的瞬时全磁链。

▲原始方程（把磁链方程代入电压方程，得展开后的电压方程）

$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(\mathbf{L}\mathbf{i}) \xrightarrow{\text{将微分式子展开可以化为}} \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{d\mathbf{L}}{dt}\mathbf{i}$ 又 $\omega t = \theta$ 将 $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ 中的 t 换成 θ/ω 那么上述式子可以化为：

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{d\mathbf{L}}{d\theta}\omega\mathbf{i}$$

电流变化引起的脉变电动势

定转子相对位置变化引起的与转速成正比的旋转电动势

(3) 转矩方程

我们可以利用能量的变化求转矩，例如在线性电感条件下，磁场储能 W_m 和磁共能 W'_m ：

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{L} \mathbf{i}$$

电磁转矩等于机械角位移变换时磁共能的变化率，即 $\partial W'_m / \partial \theta_m$ （电流约束为常数）

▲此处我们注意 θ_m 为机械角位移（即Simulink输出的机械制）与电磁是一个磁极对数倍数关系，即 $\theta_m = \theta / n_p$

▲于是有电磁转矩：

$$T_e = \left. \frac{\partial W'_m}{\partial \theta_m} \right|_{i=\text{常数}} = n_p \left. \frac{\partial W'_m}{\partial \theta} \right|_{i=\text{常数}}$$

将 $W_m = W'_m = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{L} \mathbf{i}$ 带入上式中，并考虑到电感分块矩阵的关系，可以得到：

$$T_e = \frac{1}{2} n_p \mathbf{i}^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta} \mathbf{i} \text{ 又考虑到 } \mathbf{i}^T = [\mathbf{i}_s^T \quad \mathbf{i}_r^T] = [i_A \quad i_B \quad i_C \quad i_a \quad i_b \quad i_c]$$

$$\begin{aligned} \text{因此可以得到 } T_e = & -n_p L_{ms} [(i_A i_a + i_B i_b + i_C i_c) \sin \theta \\ & + (i_A i_b + i_B i_c + i_C i_a) \sin (\theta + 120^\circ) \\ & + (i_A i_c + i_B i_a + i_C i_b) \sin (\theta - 120^\circ)] \end{aligned}$$

(4) 运动方程

▲运动控制系统的运动方程式为：

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = \frac{J}{n_p} \frac{d\omega}{dt} = T_e - T_L$$

其中 J ——转动惯量 T_L ——包括摩擦阻转矩的负载转矩

转角方程为：

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

▲在此要强调的一点：注意区分电角速度、电角度、机械角速度（simulink电机输出）
（机械角速度 $\omega_m = \omega / n_p$ ）

▲上述的异步电机动态模型是在线性磁路、磁动势在空间正弦分布假定下得出来的结论，对定子、转子电压和电流未作任何假定，因此，该动态模型完全可以用来分析含有电压、电流谐波的三相异步电机调速系统的动态过程。

2、异步电机三相原始模型的性质

▲非线性、强耦合

非线性耦合体现在电压方程、磁链方程与转矩方程。既存在定子和转子间的耦合，也存在三相绕组间的交叉耦合

▲非线性变参数

旋转电动势和电磁转矩中都包含变量之间的乘积（乘积项： $T_e = K_t I \Phi$ 、 $e = K_e n \Phi$ 是非线性的基本因素）。定、转子间的相对运动，导致其夹角 θ 不断变化，使得互感矩阵是 θ 的函数，为非线性变参数矩阵

▲变量非独立性

定转子的电压、电流和磁链在对称约束下，三相变量中只有两相是独立的

三相模型完全可以且有必要用两相模型代替

对称约束方程为：

$$\text{定子} \begin{cases} \psi_A + \psi_B + \psi_C = 0 \\ i_A + i_B + i_C = 0 \\ u_A + u_B + u_C = 0 \end{cases}$$

$$\text{转子} \begin{cases} \psi_a + \psi_b + \psi_c = 0 \\ i_a + i_b + i_c = 0 \\ u_a + u_b + u_c = 0 \end{cases}$$

★

三、坐标变换

1、坐标变换基本思路

坐标变换的目的是将交流电动机的物理模型变换成类似直流电动机的模式，这样变换后，分析和控制交流电动机就可以大大简化。以产生同样的旋转磁动势为准则，在三相坐标系上的定子交流电流 i_A 、 i_B 、 i_C 。

▲三相——两相变换（Clark变换：3s/2s变换）可以等效成两相静止坐标系上的交流电流 i_α 和 i_β 。（坐标静止、电流正弦）

▲静止两相——旋转正交变换（Park变换：2s/2r变换）可以等效成同步旋转坐标系上的直流电流 i_d 和 i_q 。如果观察者站到铁心上与坐标系一起旋转，他所看到的就好像是一台直流电动机。（坐标旋转、电流静止）

异步电机的电感矩阵和转矩方程体现了电磁耦合和能量转换的复杂关系；三相原始模型复杂，简化基本方法就是坐标变换。要简化数学模型，须从电磁耦合关系入手。

如果能将交流电动机的物理模型等效地变换成类似直流电动机的模式，分析和控制就可以大大简化。任意对称的多相绕组，通入平衡的多相电流，都能产生旋转磁动势，当然以两相最为简单。坐标变换原则：合成磁动势相等

2、Clark变换：3s/2s变换

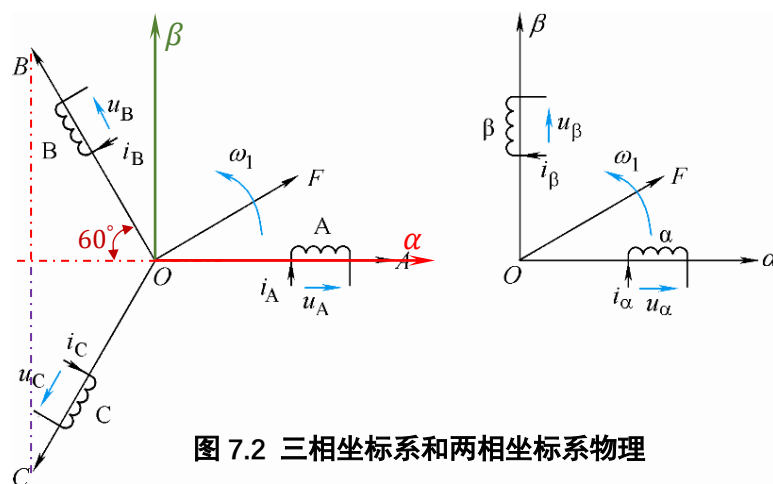


图 7.2 三相坐标系和两相坐标系物理

ABC 和 $\alpha\beta$ 两个坐标系中的磁动势矢量，将两个坐标系原点并在一起，使 A 轴和 α 轴重合（如上图所示），再进行投影（将三相投影到 α 、 β 轴）。三相绕组每相有效匝数为 N_3 ，两相绕组等效匝数为 N_2 。三相绕组 A 、 B 、 C 和两相绕组之间的变换，称作三相坐标系和两相正交坐标系间的变换，简称3/2变换。按照磁动势相等的等效原则；变换前后总功率不变。

$$\text{因此有：} N_2 i_\alpha = N_3 i_A - N_3 i_B \cos 60^\circ - N_3 i_C \cos 60^\circ = N_3 (i_A - \frac{1}{2} i_B - \frac{1}{2} i_C)$$

$$N_2 i_\beta = N_3 i_B \sin 60^\circ - N_3 i_C \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} N_3 (i_B - i_C)$$

考虑到变换前后总功率不变，则有 $N_3/N_2 = \sqrt{2/3}$

▲三相坐标系变换到两相正交坐标系（简称3s/2s变换）的变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{N_3}{N_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

在 $i_A + i_B + i_C = 0$ 的约束条件下，上述矩阵可以写作：

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

刚好是正交矩阵，利用正交矩阵性质：逆矩阵=矩阵的转置；由此可以得到逆变换，即两相静止坐标系——三相静止坐标系的变换（2s/3s变换）

▲两相正交坐标系变换到三相坐标系（简称2s/3s变换）的变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \frac{N_3}{N_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

又考虑到 $i_A + i_B + i_C = 0$ 因此可以写作：

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} \text{ 与 } \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

PS：电压变换阵和磁链变换阵与电流变换阵相同

3、Park变换：2s/2r变换

两相静止绕组，通以两相平衡交流电流，产生旋转磁动势。如果令两相绕组转起来，且旋转角速度等于合成磁动势的旋转角速度，则两相绕组通以直流电流就产生空间旋转磁动势。即从静止两相正交坐标系 $\alpha\beta$ 到旋转正交坐标系 dq 的变换，称作静止两相——旋转正交变换，简称2s/2r变换。

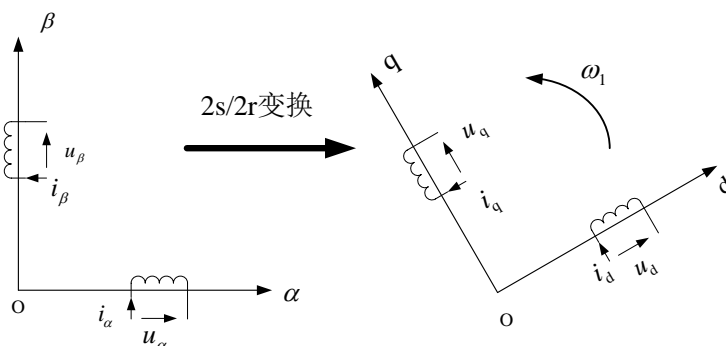


图 7.3 静止两相正交坐标系和旋转正交坐标系的物理模型

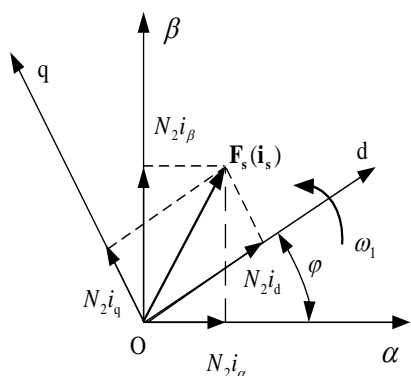


图 7.4 两相静止和旋转坐标系中的磁动势矢量

▲ 电流存在以下关系：
$$\begin{cases} i_d = i_\alpha \cos \varphi + i_\beta \sin \varphi \\ i_q = -i_\alpha \sin \varphi + i_\beta \cos \varphi \end{cases}$$

▲ 所以旋转正交变换 (Park变换):

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = C_{2s/2r} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

静止两相正交坐标系到旋转正交坐标系的变换阵:

$$C_{2s/2r} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

▲ Park逆变换矩阵:

$$C_{2r/2s} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

注: 电压和磁链的旋转变换阵与电流旋转变换阵相同

四、异步电动机在正交坐标系上的动态数学模型

▲首先推导静止两相正交坐标系（ α 、 β 坐标系）中的数学模型，然后推广到旋转正交坐标系（ d 、 q 坐标系）。

▲由于运动方程不随坐标变换而变化，故仅讨论电压方程、磁链方程和转矩方程。

说明：在以下论述中，下标 s 表示定子，下标 r 表示转子。

1、定子绕组和转子绕组的3/2变换

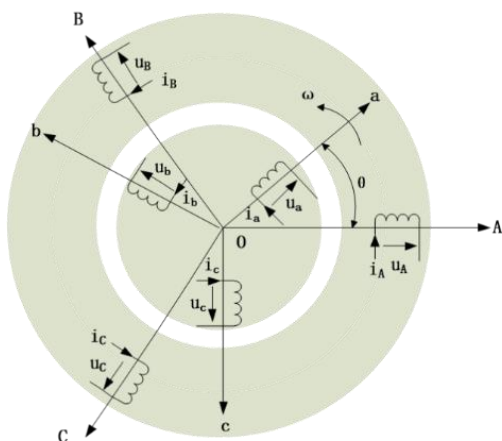


图 7.5 三相异步电动机的物理模型

异步电动机定子绕组是静止的，只需 $3s/2s$ 变换。

但是转子绕组是旋转的，必须通过 $3r/2r$ 变换和旋转到静止的 $2r/2s$ （逆Park）变换，才能变换到静止两相正交坐标系。

▲电压方程：

定子部分

$$\begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \\ u'_{r\alpha} \\ u'_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i'_{r\alpha} \\ i'_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \\ \psi'_{r\alpha} \\ \psi'_{r\beta} \end{bmatrix}$$

例如：

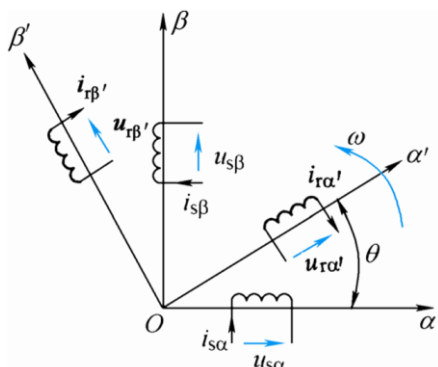


图 7.6 仅3/2变换

▲磁链方程：

$$\begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \\ \psi'_{r\alpha} \\ \psi'_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m \cos \theta & -L_m \sin \theta \\ 0 & L_s & L_m \sin \theta & L_m \cos \theta \\ L_m \cos \theta & L_m \sin \theta & L_r & 0 \\ -L_m \sin \theta & L_m \cos \theta & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i'_{r\alpha} \\ i'_{r\beta} \end{bmatrix}$$

▲转矩方程：

$$T_e = -n_p L_m [(i_{s\alpha} i'_{r\alpha} + i_{s\beta} i'_{r\beta}) \sin \theta + (i_{s\alpha} i'_{r\beta} - i_{s\beta} i'_{r\alpha}) \cos \theta]$$

▲注：其中 L_m ——定子与转子同轴等效绕组间的互感， $L_m = \frac{3}{2} L_{ms}$ （ L_{ms} 为定子每相绕组交链的最大互感磁通对应于定子互感）

$$L_s \text{——定子等效两相绕组的自感，} L_s = \frac{3}{2} L_{ms} + L_{ls} = L_m + L_{ls}$$

$$L_r \text{——定子等效两相绕组的自感，} L_r = \frac{3}{2} L_{ms} + L_{lr} = L_m + L_{lr}$$

▲3/2变换将空间互差 $2\pi/3$ 的三相绕组等效为相互垂直的两相绕组，从而消除了定子、转子三相绕组间的相互耦合。但是定子绕组与转子绕组间仍存在相对运动，因而定、转子绕组互感阵仍是非线性的变参数阵。输出转矩仍是定、转子电流及其定、转子夹角 θ 的函数。

与三相原始模型相比较3/2变换减少了状态变量的维数，简化了定子和转子的自感。

2、静止两相正交坐标系中的矩阵方程

在第一节中，我们对三相定子、转子都进行了3/2(Clark)变换，虽然定子是静止的，但是转子本来就是旋转的（即转子对应的 $\alpha'\beta'$ 坐标轴依然是旋转坐标轴）如下图所示，转子的 $\alpha'\beta'$ 坐标轴以角速度 ω 继续旋转（此处 ω 不是同步角速度），且与定子的 $\alpha\beta$ 坐标系有角度差 θ

▲那么要使得转子对应的 $\alpha'\beta'$ 坐标轴与定子的 $\alpha\beta$ 坐标轴重合，首先将转子 $\alpha'\beta'$ 坐标轴顺时针旋转 θ 角度，使它与定子 $\alpha\beta$ 坐标轴瞬时重合，完成了2r/2s变换即(Park变换)，它的旋转用了角度 θ 来代替，因此是以 θ 为变量的函数（前面所提及的Park变换是在角度 φ 下完成的变换，此处是在角度 θ 条件下，实际上是相似的）

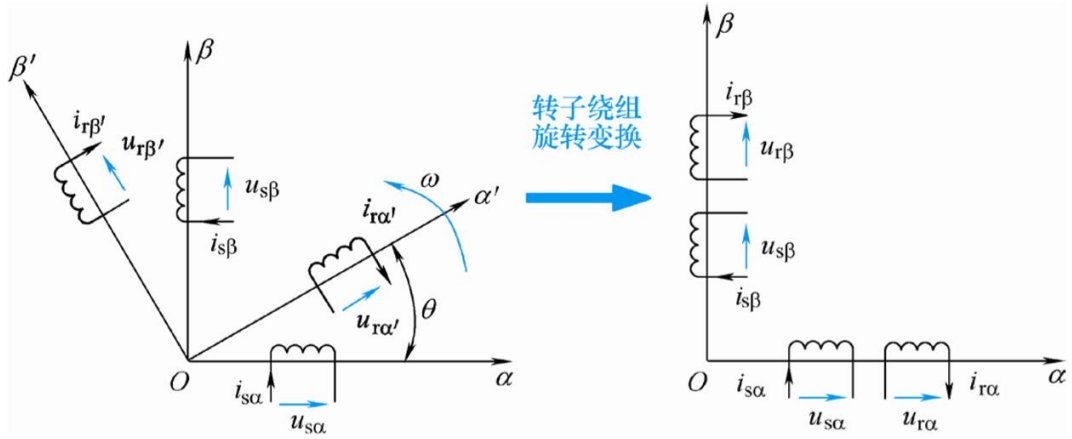


图 7.7 定子 $\alpha\beta$ 坐标系、转子 $\alpha'\beta'$ 坐标系到静止两相坐标系的变换

▲旋转变换矩阵为：

$$C_{2r/2s}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

▲前面的Park变换为：

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

▲电压方程：

$$\begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \\ u_{r\alpha} \\ u_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \\ \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r \psi_{r\beta} \\ -\omega_r \psi_{r\alpha} \end{bmatrix}$$

▲磁链方程：

$$\begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \\ \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix}$$

▲转矩方程：

$$T_e = n_p L_m (i_{s\beta} i_{r\alpha} - i_{s\alpha} i_{r\beta})$$

对比前面仅3/2变换，旋转变换改变了定、转子绕组间的耦合关系，将相对运动的定、转子绕组用相对静止的等效绕组来代替，消除了定、转子绕组间夹角对磁链和转矩的影响。

3、旋转正交坐标系中的动态数学模型

在第二节中，我们对转子坐标系作旋转正交坐标系到静止两相正交坐标系的变换，使其与定子坐标系重合，且保持静止。该变换的优点在于将非线性变参数的磁链方程转化为线性定常的方程，但却加剧了电压方程中的非线性耦合程度，将矛盾从磁链方程转移到电压方程中来了，并没有改变对象的非线性耦合性质。

因此，在这里我们将定子坐标系和转子坐标系同时变换到同一个旋转正交坐标系，即 dq 坐标系上， dq 坐标系相对于原来定子的旋转角速度为 ω_1 。旋转变换是用旋转的绕组代替原来静止的定子绕组，并使等效的转子绕组与等效的定子绕组重合，且保持严格同步，等效后定、转子绕组间不存在相对运动。

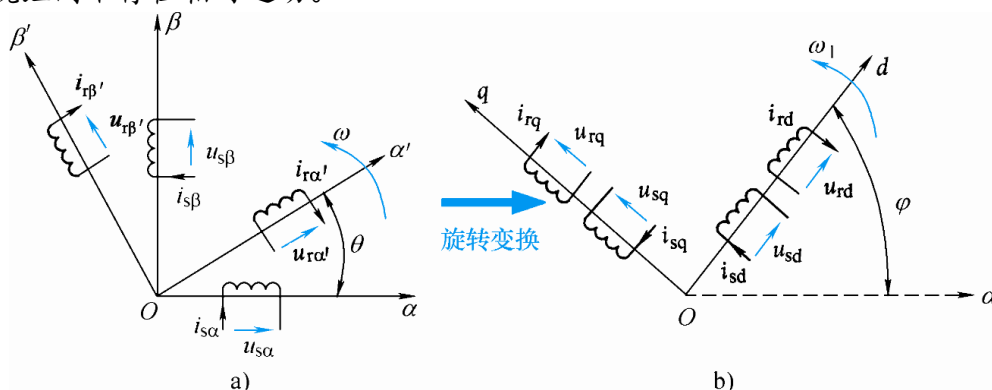


图 7.8 定子、转子坐标系到旋转正交坐标系的变换

a) 定子、转子坐标系 b) 旋转正交坐标系

▲ 定子旋转变换矩阵：

$$C_{2r/2s}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

注： θ 为三相定子绕组与三相转子绕组的夹角

▲ 转子旋转变换矩阵：

$$C_{2r/2r}(\varphi - \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \theta) & \sin(\varphi - \theta) \\ -\sin(\varphi - \theta) & \cos(\varphi - \theta) \end{bmatrix}$$

注： φ 为旋转两相坐标系（ dq 坐标系）与静止两相坐标系（ $\alpha\beta$ 坐标系）的夹角

▲ 电压方程：

$$\begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ u_{rd} \\ u_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_1 \psi_{sq} \\ \omega_1 \psi_{sd} \\ -(\omega_1 - \omega) \psi_{rq} \\ (\omega_1 - \omega) \psi_{rd} \end{bmatrix}$$

旋转电势非线性耦合作用更为严重；
增加了输入量 ω_1 ，提高了系统控制自由度；
将绕组中的交流量变为直流量，以便模拟直流电动机进行控制。

▲ 磁链方程：

$$\begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix}$$

▲ 转矩方程：

$$T_e = n_p L_m (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq})$$

五、异步电机在正交坐标轴系上的状态方程

1、状态变量的选取

旋转正交坐标系上的异步电机具有 4 阶电压方程和 1 阶运动方程，因此须选取 5 个状态变量。

可选的状态变量共有 9 个，这 9 个变量分为 5 组：

①转速 ω ；②定子电流 i_{sd} 与 i_{sq} ；③转子电流；④定子磁链；⑤转子磁链。

转速 ω 作为输出变量必须选取。

其余的 4 组变量可以任意选取两组，定子电流可以直接检测，应当选为状态变量。

剩下的 3 组均不可直接检测或检测十分困难，考虑到磁链对电动机的运行很重要，可以选定子磁链或转子磁链（二选一）。

2、以 $\omega - i_s - \psi_r$ (转速、定子电流、转子磁链)为变量的状态方程

(1) dq 坐标系中的状态方程

状态变量： $\mathbf{X} = [\omega \quad \psi_{rd} \quad \psi_{rq} \quad i_{sd} \quad i_{sq}]^T$

输入变量： $\mathbf{U} = [u_{sd} \quad u_{sq} \quad \omega_1 \quad T_L]^T$

输出变量： $\mathbf{Y} = [\omega \quad \psi_r]^T$

▲磁链方程表示如下：

$$\begin{cases} \psi_{sd} = L_s i_{sd} + L_m i_{rd} \\ \psi_{sq} = L_s i_{sq} + L_m i_{rq} \\ \psi_{rd} = L_m i_{sd} + L_r i_{rd} \\ \psi_{rq} = L_m i_{sq} + L_r i_{rq} \end{cases}$$

▲电压方程式改写为：

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{sd}}{dt} = -R_s i_{sd} + \omega_1 \psi_{sq} + u_{sd} \\ \frac{d\psi_{sq}}{dt} = -R_s i_{sq} - \omega_1 \psi_{sd} + u_{sq} \\ \frac{d\psi_{rd}}{dt} = -R_r i_{rd} + (\omega_1 - \omega) \psi_{rq} + u_{rd} \\ \frac{d\psi_{rq}}{dt} = -R_r i_{rq} - (\omega_1 - \omega) \psi_{rd} + u_{rq} \end{cases}$$

▲考虑到笼型电机转子内部为短路状态，即
 $u_{rd} = u_{rq} = 0$ ，因此电压方程可以改写为：

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{sd}}{dt} = -R_s i_{sd} + \omega_1 \psi_{sq} + u_{sd} \\ \frac{d\psi_{sq}}{dt} = -R_s i_{sq} - \omega_1 \psi_{sd} + u_{sq} \\ \frac{d\psi_{rd}}{dt} = -R_r i_{rd} + (\omega_1 - \omega) \psi_{rq} \\ \frac{d\psi_{rq}}{dt} = -R_r i_{rq} - (\omega_1 - \omega) \psi_{rd} \end{cases}$$

▲可以解得转子电流：

$$\begin{cases} i_{rd} = \frac{1}{L_r} (\psi_{rd} - L_m i_{sd}) \\ i_{rq} = \frac{1}{L_r} (\psi_{rq} - L_m i_{sq}) \end{cases}$$

将解得的转子电流带入转矩方程式： $T_e = n_p L_m (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq})$ <该转矩方程为旋转正交坐标系下的转矩方程>

▲得到转矩方程为：

$$T_e = \frac{n_p L_m}{L_r} (i_{sq} \psi_{rd} - i_{sd} \psi_{rq})$$

再把解得的转子电流 i_{rd} 、 i_{rq} 带入本节磁链方程

▲得到定子磁链为：

$$\begin{cases} \psi_{sd} = \sigma L_s i_{sd} + \frac{L_m}{L_r} \psi_{rd} \\ \psi_{sq} = \sigma L_s i_{sq} + \frac{L_m}{L_r} \psi_{rq} \end{cases}$$

其中 σ 为电机漏磁系数；

$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$$

将解得的转子电流 i_{rd} 、 i_{rq} 和定子磁链 ψ_{sd} 、 ψ_{sq} 带入本节电压方程

将转矩方程式带入运动方程 $\frac{J}{n_p} \frac{d\omega}{dt} = T_e - T_L$

▲得到状态方程为：

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{n_p^2 L_m}{J L_r} (i_{sq} \psi_{rd} - i_{sd} \psi_{rq}) - \frac{n_p}{J} T_L \\ \frac{d\psi_{rd}}{dt} = -\frac{1}{T_r} \psi_{rd} + (\omega_1 - \omega) \psi_{rq} + \frac{L_m}{T_r} i_{sd} \\ \frac{d\psi_{rq}}{dt} = -\frac{1}{T_r} \psi_{rq} - (\omega_1 - \omega) \psi_{rd} + \frac{L_m}{T_r} i_{sq} \\ \frac{di_{sd}}{dt} = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r T_r} \psi_{rd} + \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{rq} - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} i_{sd} + \omega_1 i_{sq} + \frac{u_{sd}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{sq}}{dt} = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r T_r} \psi_{rq} - \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{rd} - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} i_{sq} - \omega_1 i_{sd} + \frac{u_{sq}}{\sigma L_s} \end{cases}$$

其中 T_r 为电
磁时间常数

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}$$

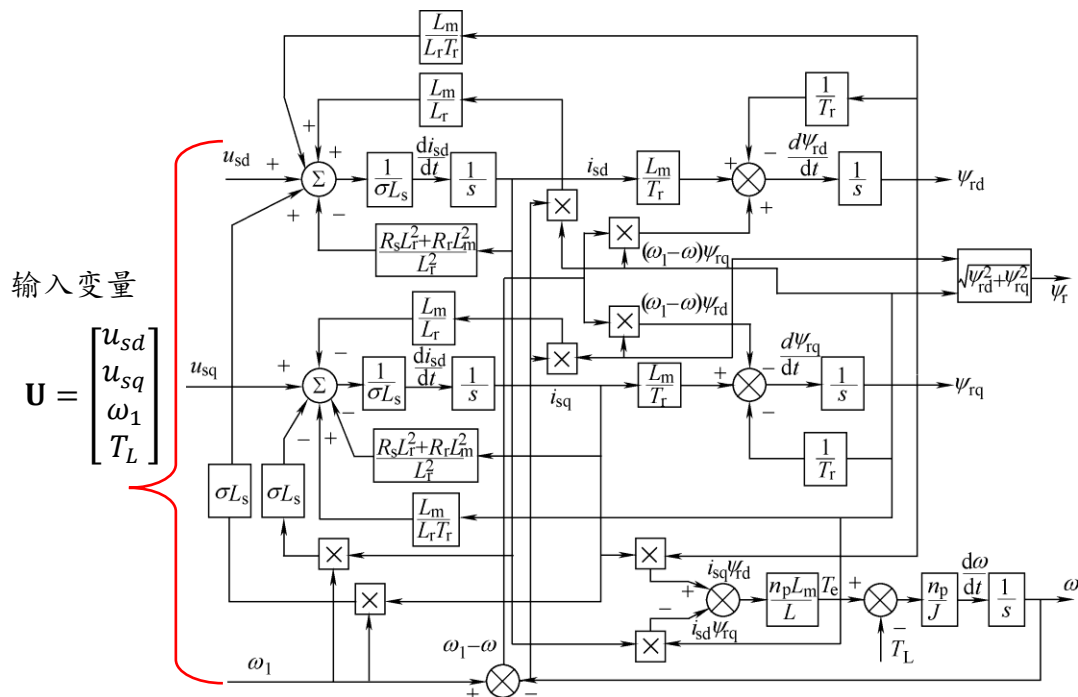


图 7.9 以转速、定子电流、转子磁链为状态变量
在 dq 坐标系中的动态结构图

(2) $\alpha\beta$ 坐标系中的状态方程

若令 $\omega_1 = 0$ (旋转角速度=0) 则 dq 坐标系 (旋转正交坐标系) 蜕化为 $\alpha\beta$ 坐标系 (静止正交坐标系), 即可得到 $\alpha\beta$ 坐标系中的状态方程。

▲其中:

状态变量: $X = [\omega \quad \psi_{r\alpha} \quad \psi_{r\beta} \quad i_{s\alpha} \quad i_{s\beta}]^T$

输入变量: $U = [u_{s\alpha} \quad u_{s\beta} \quad T_L]^T$

输出变量: $Y = \left[\omega \quad \sqrt{\psi_{r\alpha}^2 + \psi_{r\beta}^2} \right]^T$

▲ $\alpha\beta$ 坐标系中的状态方程为:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{n_p L_m}{J L_r} (i_{s\beta} \psi_{r\alpha} - i_{s\alpha} \psi_{r\beta}) - \frac{n_p}{J} T_L \\ \frac{d\psi_{r\alpha}}{dt} = -\frac{1}{T_r} \psi_{r\alpha} - \omega \psi_{r\beta} + \frac{L_m}{T_r} i_{s\alpha} \\ \frac{d\psi_{r\beta}}{dt} = -\frac{1}{T_r} \psi_{r\beta} + \omega \psi_{r\alpha} + \frac{L_m}{T_r} i_{s\beta} \\ \frac{di_{s\alpha}}{dt} = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r T_r} \psi_{r\alpha} + \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{r\beta} - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} i_{s\alpha} + \frac{u_{s\alpha}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r T_r} \psi_{r\beta} - \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{r\alpha} - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} i_{s\beta} + \frac{u_{s\beta}}{\sigma L_s} \end{cases}$$

其中电磁转矩 T_e 公式为 $\alpha\beta$ 坐标系下的电磁转矩公式:

$$T_e = n_p L_m (i_{s\beta} i_{r\alpha} - i_{s\alpha} i_{r\beta})$$

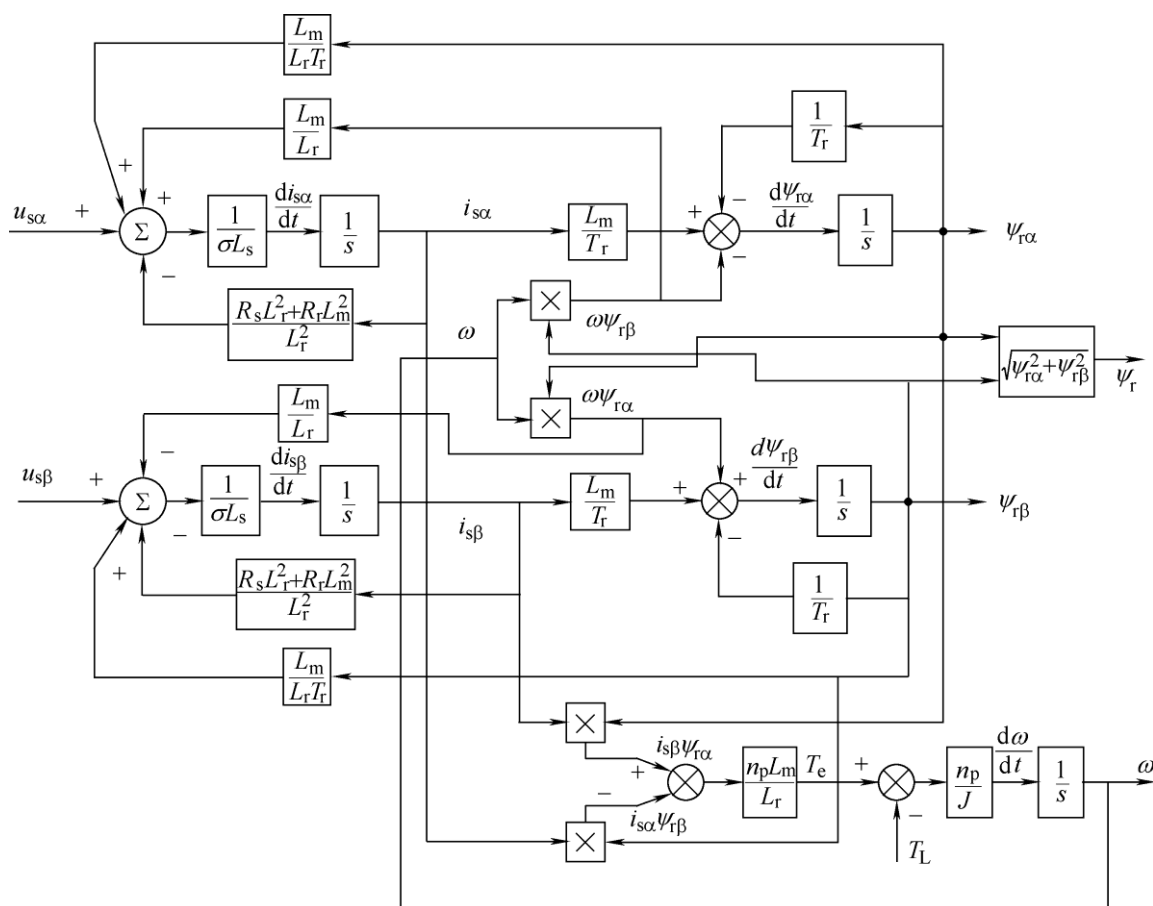


图 7.10 以转速、定子电流、转子磁链为状态变量
在 $\alpha\beta$ 坐标系中的动态结构图

3、以 $\omega - i_s - \psi_s$ (转速、定子电流、定子磁链)为变量的状态方程

与 $\omega - i_s - \psi_r$ 中的状态方程类似，分 dq 与 $\alpha\beta$ 两种坐标系讨论

(1) dq 坐标系中的状态方程

状态变量： $\mathbf{X} = [\omega \ \psi_{sd} \ \psi_{sq} \ i_{sd} \ i_{sq}]^T$

输入变量： $\mathbf{U} = [u_{sd} \ u_{sq} \ \omega_1 \ T_L]^T$

输出变量： $\mathbf{Y} = [\omega \ \psi_s]^T$

▲同理可以解得**转子电流**：

▲得到**转子磁链**为：

其中 σ 为电机漏磁系数；

$$\begin{cases} i_{rd} = \frac{1}{L_m}(\psi_{sd} - L_s i_{sd}) \\ i_{rq} = \frac{1}{L_m}(\psi_{sq} - L_s i_{sq}) \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_{rd} = -\sigma \frac{L_r L_s}{L_m} i_{sd} + \frac{L_r}{L_m} \psi_{sd} \\ \psi_{rq} = -\sigma \frac{L_r L_s}{L_m} i_{sq} + \frac{L_r}{L_m} \psi_{sq} \end{cases} \quad \sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$$

▲得到状态方程为：

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{n_p^2}{J} (i_{sq} \psi_{sd} - i_{sd} \psi_{sq}) - \frac{n_p}{J} T_L \\ \frac{d\psi_{sd}}{dt} = -R_s i_{sd} + \omega_1 \psi_{sq} + u_{sd} \\ \frac{d\psi_{sq}}{dt} = -R_s i_{sq} - \omega_1 \psi_{sd} + u_{sq} \\ \frac{di_{sd}}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s T_r} \psi_{sd} + \frac{1}{\sigma L_s} \omega \psi_{sq} - \frac{R_s L_r + R_r L_s}{\sigma L_s L_r} i_{sd} + (\omega_1 - \omega) i_{sq} + \frac{u_{sd}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{sq}}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s T_r} \psi_{sq} - \frac{1}{\sigma L_s} \omega \psi_{sd} - \frac{R_s L_r + R_r L_s}{\sigma L_s L_r} i_{sq} - (\omega_1 - \omega) i_{sd} + \frac{u_{sq}}{\sigma L_s} \end{cases}$$

其中 T_r 为电磁时间常数

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}$$

其中**电磁转矩** T_e 公式为 dq 坐标系下的电磁转矩公式：

$$T_e = n_p (i_{sq} \psi_{sd} - i_{sd} \psi_{sq})$$

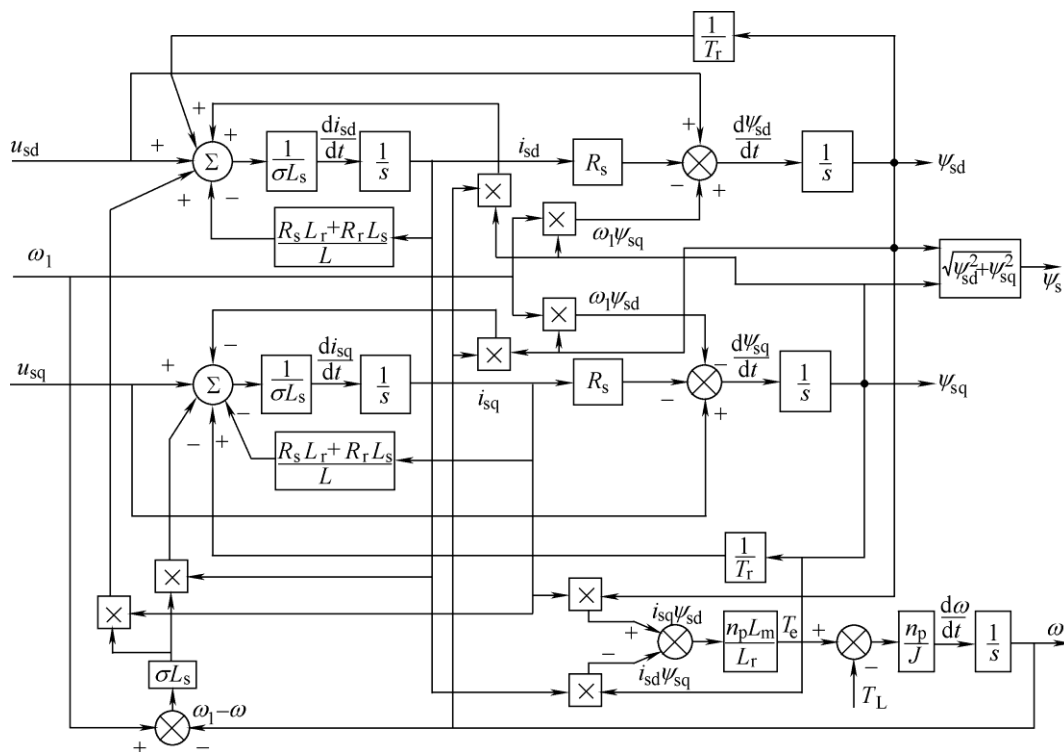


图 7.11 以转速、定子电流、定子磁链为状态变量
在 dq 坐标系中的动态结构图

(2) $\alpha\beta$ 坐标系中的状态方程

同样，若令 $\omega_1 = 0$ 则可以得到以 $\omega - i_s - \psi_s$ 为状态变量在 $\alpha\beta$ 坐标系中的状态方程

状态变量： $\mathbf{X} = [\omega \ \psi_{s\alpha} \ \psi_{s\beta} \ i_{s\alpha} \ i_{s\beta}]^T$

输入变量： $\mathbf{U} = [u_{s\alpha} \ u_{s\beta} \ T_L]^T$

输出变量： $\mathbf{Y} = \left[\omega \ \sqrt{\psi_{s\alpha}^2 + \psi_{s\beta}^2} \right]^T$

转矩方程： $T_e = n_p(i_{s\beta}\psi_{s\alpha} - i_{s\alpha}\psi_{s\beta})$

▲状态微分方程为：

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{n_p^2}{J}(i_{s\beta}\psi_{s\alpha} - i_{s\alpha}\psi_{s\beta}) - \frac{n_p}{J}T_L \\ \frac{d\psi_{s\alpha}}{dt} = -R_s i_{s\alpha} + u_{s\alpha} \\ \frac{d\psi_{s\beta}}{dt} = -R_s i_{s\beta} + u_{s\beta} \\ \frac{di_{s\alpha}}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s T_r} \psi_{s\alpha} + \frac{1}{\sigma L_s} \omega \psi_{s\beta} - \frac{R_s L_r + R_r L_s}{\sigma L_s L_r} i_{s\alpha} - \omega i_{s\beta} + \frac{u_{s\alpha}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s T_r} \psi_{s\beta} - \frac{1}{\sigma L_s} \omega \psi_{s\alpha} - \frac{R_s L_r + R_r L_s}{\sigma L_s L_r} i_{s\beta} + \omega i_{s\alpha} + \frac{u_{s\beta}}{\sigma L_s} \end{cases}$$

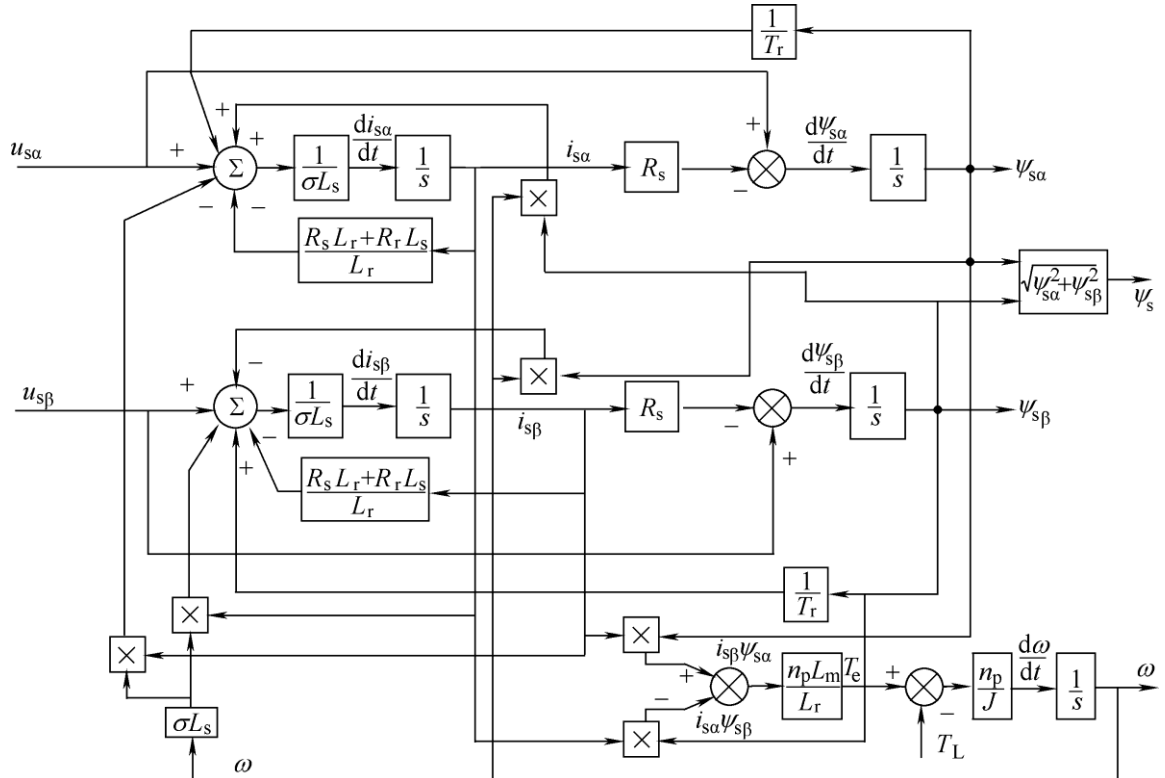


图 7.12 以转速、定子电流、定子磁链为状态变量
在 $\alpha\beta$ 坐标系中的动态结构图

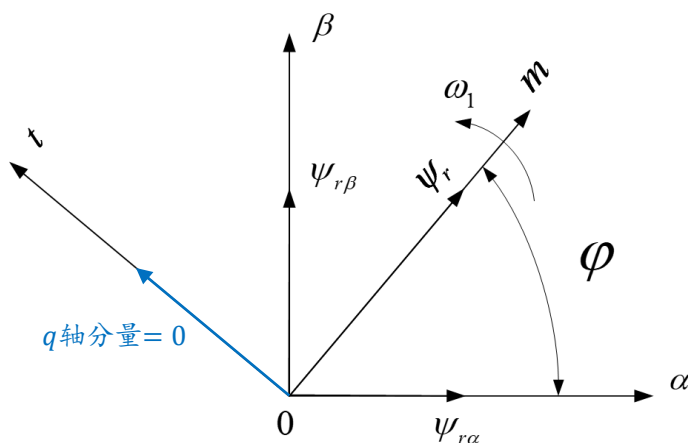
六、异步电机按转子磁链定向的矢量控制系统

▲按转子磁链定向矢量控制的基本思想：

通过坐标变换，在按转子磁链定向同步旋转正交坐标系中，得到等效的直流电动机模型。仿照直流电动机的控制方法控制电磁转矩与磁链，然后将转子磁链定向坐标系中的控制量反变换得到三相坐标系的对应量，以实施控制。这样的坐标变换也可称作矢量变换，相应的控制系统称为矢量控制（Vector Control简称VC）系统或按转子磁链定向控制（Flux Orientation Control简称FOC）系统。

1、按转子磁链定向的同步旋转正交坐标系状态方程

令d轴与转子磁链矢量重合，称作按转子磁链定向的同步旋转正交坐标系，简称mt坐标系。（dq坐标系的一个特例）此时d轴改称为m轴，q轴改称为t轴



静止正交 $\alpha\beta$ 坐标系中的转子磁链的旋转矢量
写成复数形式为：

$$\vec{\psi}_r = \psi_{r\alpha} + j\psi_{r\beta} = \psi_r e^{j\varphi}$$

其中 φ 为转子磁链空间矢量与 α 轴夹角：

$$\varphi = \arctan \frac{\psi_{r\beta}}{\psi_{r\alpha}}$$

ω_1 为同步旋转角速度：

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}$$

图 7.13 静止正交坐标系与按转子磁链定向的同步旋转正交坐标系

又正因为m轴与转子磁链矢量 $\vec{\psi}_r$ 重合，即 ψ_r 与m轴重合

有 $\begin{cases} \psi_{rm} = \psi_{rd} = \psi_r \\ \psi_{rt} = \psi_{rq} = 0 \end{cases}$ ▲为了保证m轴与 $\vec{\psi}_r$ 始终重合，还必须要 $\frac{d\psi_{rt}}{dt} = \frac{d\psi_{rq}}{dt} = 0$

▲mt坐标系下的电压方程：

$$\begin{bmatrix} u_{sm} \\ u_{st} \\ u_{rm} \\ u_{rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sm} \\ i_{st} \\ i_{rm} \\ i_{rt} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sm} \\ \psi_{st} \\ \psi_{rm} \\ \psi_{rt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_1 \psi_{st} \\ \omega_1 \psi_{sm} \\ -(\omega_1 - \omega) \psi_{rt} \\ (\omega_1 - \omega) \psi_{rm} \end{bmatrix}$$

▲mt坐标系下的磁链方程：

$$\begin{bmatrix} \psi_{sm} \\ \psi_{st} \\ \psi_{rm} \\ \psi_{rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sm} \\ i_{st} \\ i_{rm} \\ i_{rt} \end{bmatrix}$$

▲mt坐标系下的转矩方程：

$$T_e = n_p L_m (i_{st} i_{rm} - i_{sm} i_{rt})$$

▲由上面可以推导出 mt 坐标系下面的状态方程：

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{n_p L_m}{J L_r} i_{st} \psi_r - \frac{n_p}{J} T_L \\ \frac{d\psi_r}{dt} = -\frac{1}{T_r} \psi_r + \frac{L_m}{T_r} i_{sm} \Rightarrow \psi_r = \frac{L_m i_{sm}}{1 + T_r s} \\ \frac{di_{sm}}{dt} = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r T_r} \psi_r - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} i_{sm} + \omega_1 i_{st} + \frac{U_{sm}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{st}}{dt} = -\frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_r - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} i_{st} - \omega_1 i_{sm} + \frac{U_{st}}{\sigma L_s} \end{cases}$$

▲导出 mt 坐标系下的旋转角速度：

$$\boxed{\omega_1} = \omega + \frac{L_m}{T_r \psi_r} i_{st}$$

同步角速度

因为 mt 坐标系为 dq 坐标系的特殊情况，因此相对于 dq 坐标系中的状态方程， mt 坐标系中的状态方程只有4阶。<少了同步角速度表达式>

其中 T_r 为电磁时间常数：

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}$$

σ 为电机漏磁系数：

$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$$

▲由上可以定义 mt 坐标系的旋转角速度 ω_1 和转子转速 ω 之差定义为转差角频率 ω_s ：

$$\omega_s = \omega_1 - \omega = \frac{L_m}{T_r \psi_r} i_{st}$$

▲由上可以导出 mt 坐标系中电磁转矩表达式：

$$T_e = \frac{n_p L_m}{L_r} i_{st} \psi_r$$

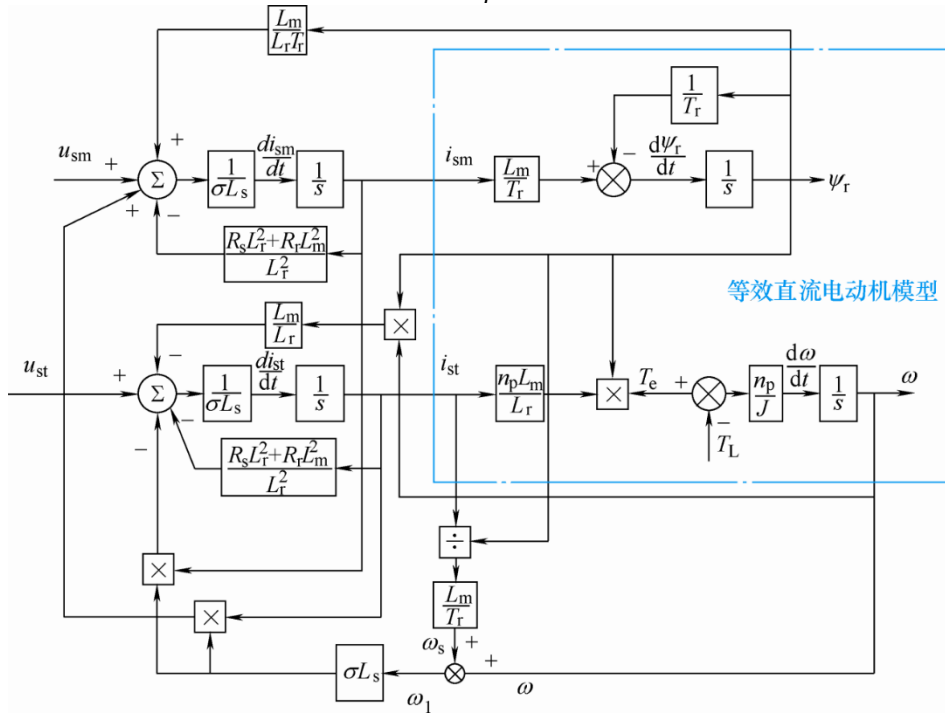


图 7.14 按转子磁链定向的异步电机动态结构图

通过转子磁链定向，将定子电流分解为励磁分量 i_{sm} 和转矩分量 i_{st} ，转子磁链 ψ_r 仅由定子电流励磁分量 i_{sm} 产生，而电磁转矩 T_e 正比于转子磁链和定子电流转矩分量的乘积 $i_{st} \psi_r$ ，实现了定子电流两个分量的解耦，而且还降低了微分方程组的阶次。

2、按转子磁链定向矢量控制的基本思想

通过坐标变换，再变换到转子磁链定向同步旋转正交坐标系（ mt 坐标系中），得到等效的直流电动机模型。

▲将定子三相电流 i_A 、 i_B 、 i_C 经过 $3s/2s$ 变换与 $2s/2r$ 变换，可以得到等效成同步旋转正交坐标系上的直流电流 i_{sm} 和 i_{st} 。因此模型变为以 i_{sm} 和 i_{st} 为输入的等效直流电机模型。其中 m 绕组相当于直流电机的励磁绕组， i_{sm} 相当于励磁电流； t 绕组相当于电枢绕组， i_{st} 相当于与转矩成正比的电枢电流； θ 为电动机内部的旋转变换角。

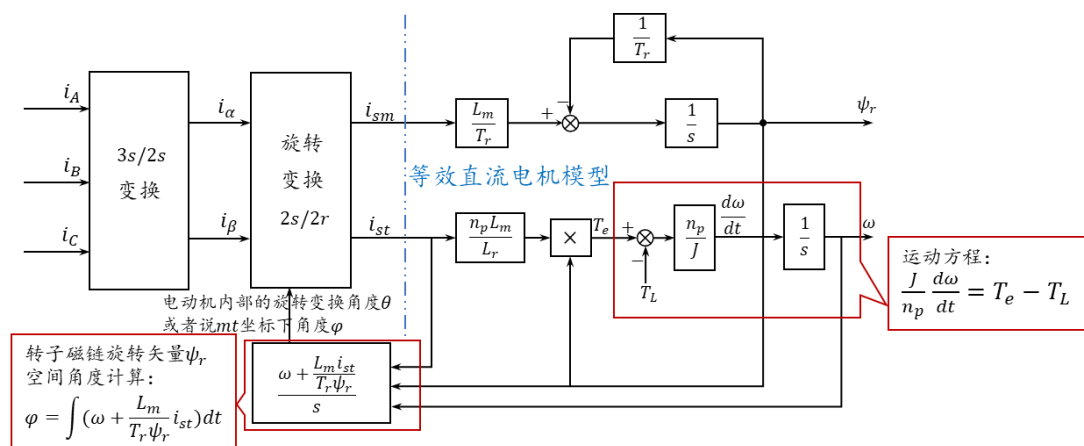


图 7.15 异步电机矢量变换及等效直流电动机模型

▲由 mt 坐标系下面的状态方程和动态结构图 7.14 可以知道，按转子磁链定向仅仅实现了定子电流两个分量 i_{sm} 和 i_{st} 的解耦；电流的微分方程中仍然存在非线性和交叉耦合，采用电流闭环控制可以有效抑制这一现象，使实际电流快速跟随给定值。

首先在按转子磁链定向坐标系中计算定子电流励磁分量给定值 i_{sm}^* 和转矩分量 i_{st}^* ，经过反旋转变换 $2r/2s$ 得到 $i_{s\alpha}^*$ 与 $i_{s\beta}^*$ ；再经过 $2/3$ 变换得到 i_A^* 、 i_B^* 、 i_C^* ；然后通过电流闭环的跟随控制，输出异步电动机所需要的定子三相电流。如下图所示：

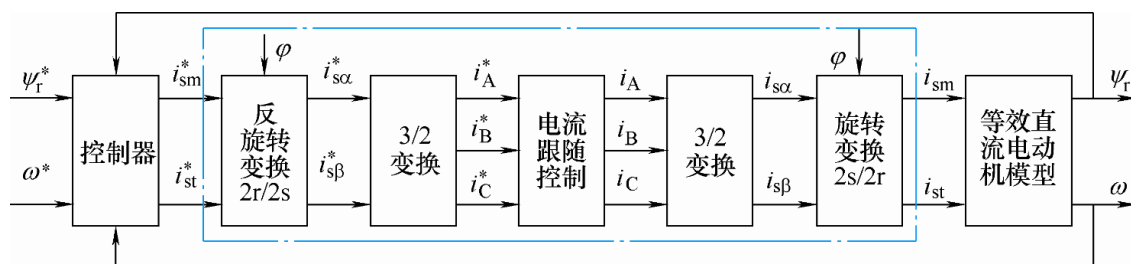


图 7.16 矢量控制系统原理结构图

▲忽略变频器产生的滞后，认为电流跟随控制的近似传递函数为 1

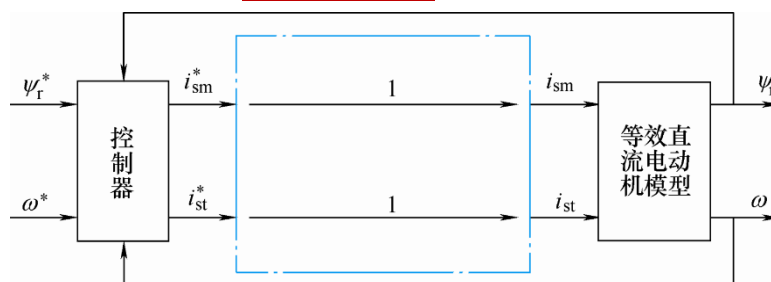


图 7.17 简化后的等效直流调速系统

3、按转子磁链定向矢量控制系统的电流闭环控制方式

转子磁链环节为稳定的惯性环节，可采用闭环控制或开环控制方式；而转速通道存在积分环节，必须加转速外环使之稳定。

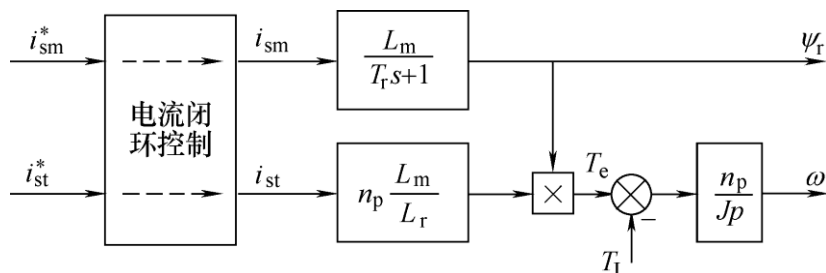


图 7.18 电流闭环控制后的系统框图

▲常用的电流闭环控制有两种方法：

①电流滞环控制型PWM变频器

②三相定子电流经坐标变换得到 mt 坐标系中的电流反馈值，采用PI调节器构成电流闭环控制，电流调节器的输出为 mt 坐标系中定子电压给定值，再经反变换和SVPWM控制逆变器输出三相电压。

▲注： φ ——转子磁链旋转矢量 ψ_r 的空间角度，旋转角速度 $\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}$

根据上式可以推出： $\varphi = \int \omega_1 dt$ 又 $\omega_1 = \omega + \frac{L_m}{T_r \psi_r} i_{st}$ 因此可以得出 $\varphi = \int (\omega + \frac{L_m}{T_r \psi_r} i_{st}) dt$

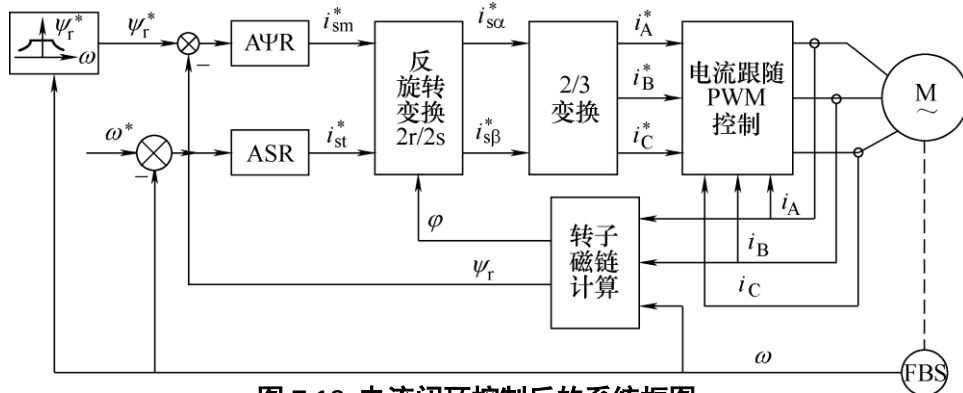


图 7.18 电流闭环控制后的系统框图

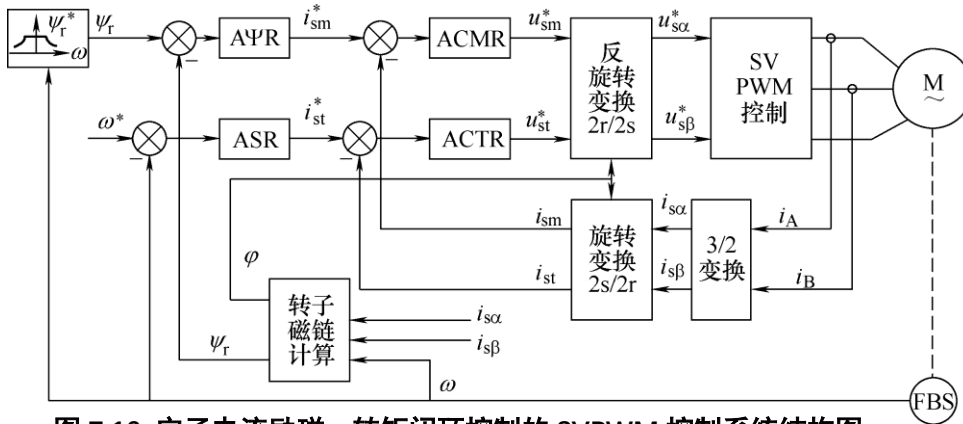


图 7.19 定子电流励磁、转矩闭环控制的 SVPWM 控制系统结构图

▲理论上来说，两种电流闭环控制作用相同，差异是电流跟随PWM控制动态响应快，但电流纹波相对较大；而SVPWM是连续PI控制，一般来说电流纹波相对较小。

4、Simulink 模型的搭建

▲理论上来说，两种电流闭环控制作用相同，差异是电流跟随 PWM 控制动态响应快，但电流纹波相对较大；而 SVPWM 是连续 PI 控制，一般来说电流纹波相对较小。

▲由此我们可以搭建电流跟随控制的 Simulink 模型：

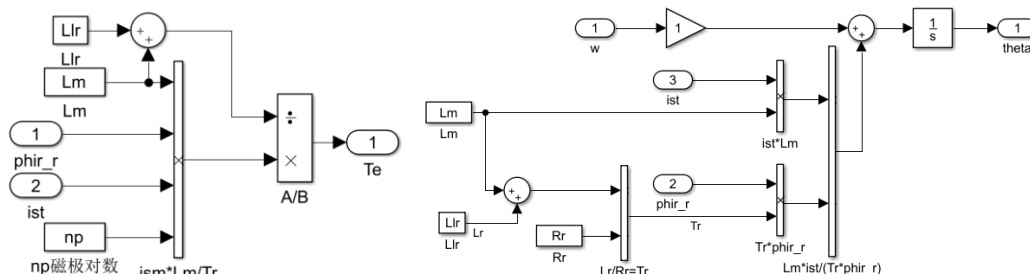


图 7.19 转矩计算模块与角度 Theta 计算模块

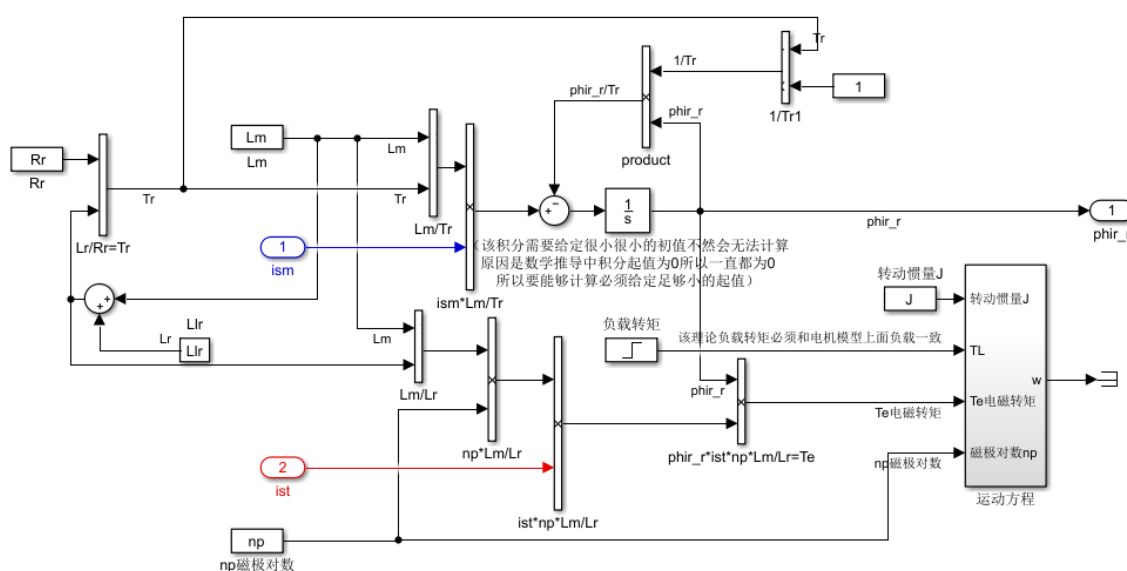


图 7.20 等效直流电机模块

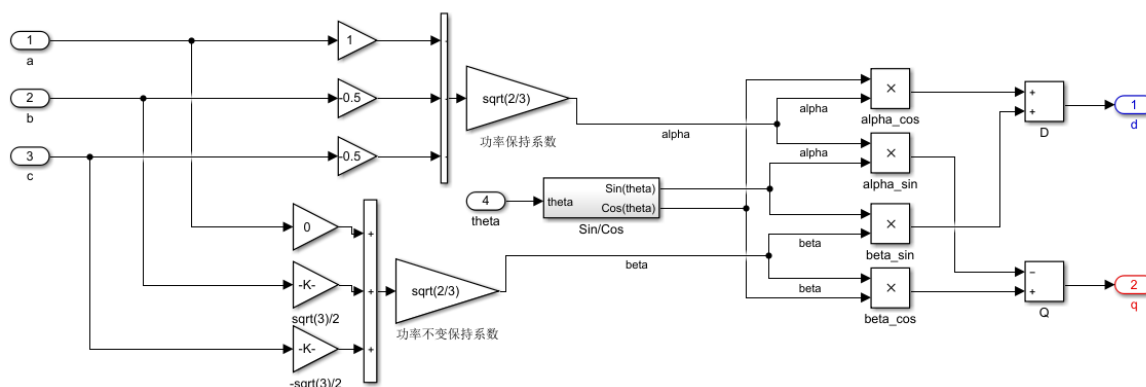


图 7.21 park 变换模块

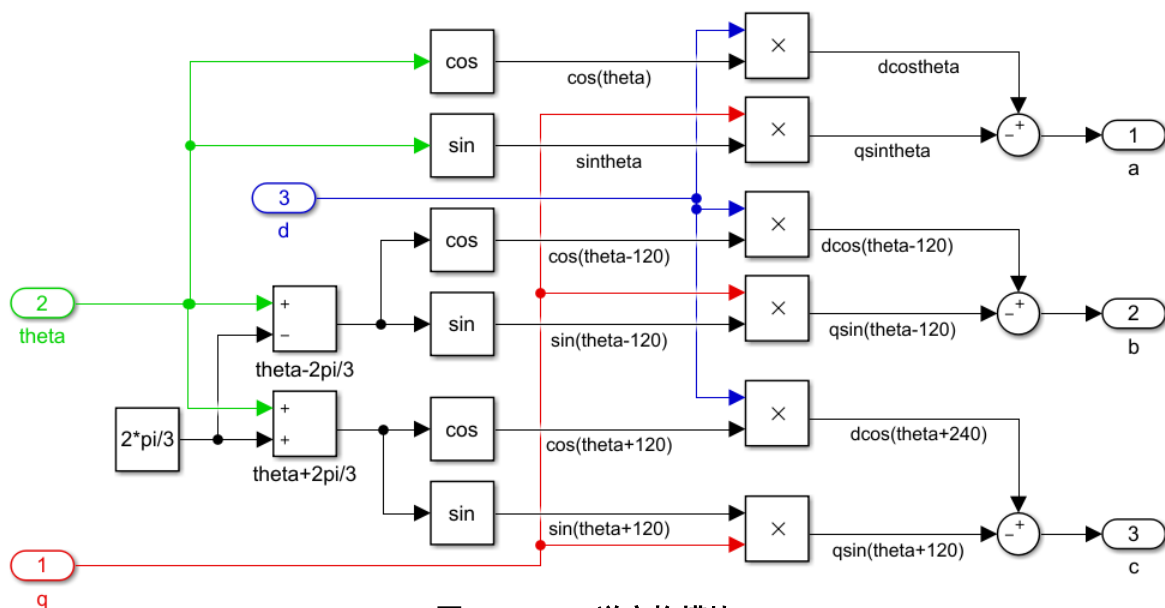


图 7.22 park 逆变换模块

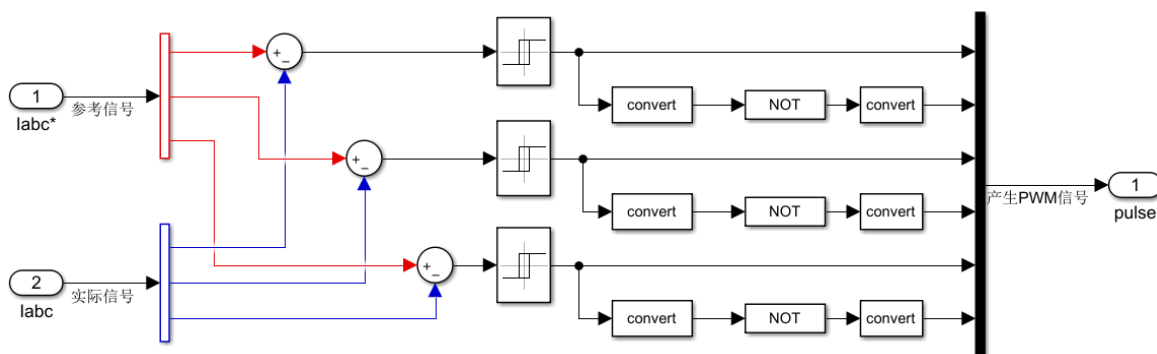


图 7.23 电流滞环比较模块

▲总的模块搭建:

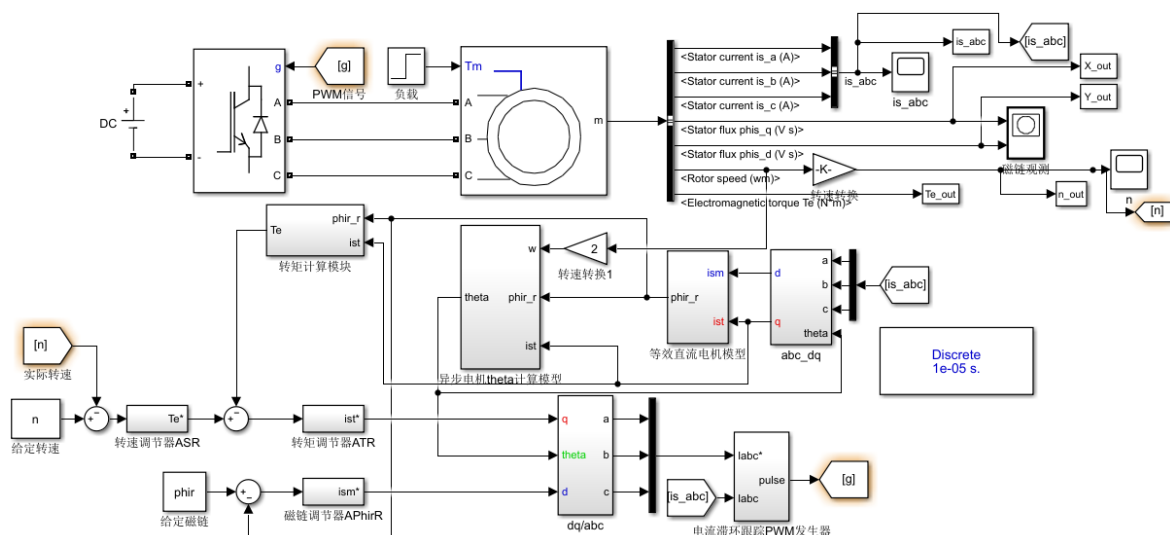


图 7.24 矢量控制总模块

▲其中转速调节器 ASR、转矩调节器 ATR、磁链调节器 APHirR 都是 PI 调节器，这里采用的调整方法为：先将积分系数 K_I 设置为 0， K_p 由小到大递增，根据设定的响应时间和超调确定 K_p 最大值；然后 K_p 保持不变， K_I 由逐渐增大至稳态误差满足要求即可。此处为了防止

超调量，对于限幅也有设置。具体设置如下表 7.1 所示：

表 7.1 各种调节器参考值

	K_p	K_i	积分器限幅值	调节器输出限幅
<i>ASR</i>	3.8	0.8	-80~80	-75~75
<i>ATR</i>	4.5	12	-65~65	-60~60
<i>APhirR</i>	1.8	100	-15~15	-13~14