

# Ćwiczenia rachunkowe z fizyki

## Lista 1

Kilka zagadnień wstępnych, omawianych na pierwszych zajęciach. Przykłady mogą być wsparciem dla wprowadzenia (przypomnienia) rachunku wektorów oraz elementarnych pochodnych i całek.

### Wektory

1. Podaj kilka przykładów wielkości skalarnych, wektorowych oraz przykład tensora (drugiego rzędu). Jaka jest zasadnicza różnica pomiędzy wektorami a skalarami w danym układzie współrzędnych?
2. Pokaż, że iloczyn skalarny wektorów wyraża się wzorem  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ .
3. Przeanalizuj definicję iloczynu wektorowego  $\vec{A} \times \vec{B}$
4. Podaj kilka przykładów zastosowania iloczynu wektorowego i skalarnego wektorów w fizyce.
5. Dane są dwa wektory:  $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$  oraz  $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ . Znajdź: iloczyn skalarny  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , iloczyn wektorowy  $\vec{A} \times \vec{B}$ , kąt pomiędzy wektorami  $(\vec{A} - \vec{B})$  oraz  $(\vec{A} + \vec{B})$ .
6. Jeśli  $|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A} \cdot \vec{B}$ , to jaki kąt tworzą wektory  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ ?
7. Jak szybko sprawdzić, czy istnieje taki wektor  $\vec{A}$ , dla którego  $(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{A} = (4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ ?
8. Pokazać, że  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$  stosując wzór na iloczyn wektorowy w układzie kartezjańskim.
9. Sprawdzić, że pole równoległoboku, którego boki tworzą wektory  $\vec{a}$  oraz  $\vec{b}$ , wynosi  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .
10. Dany jest wektor  $\vec{a} = 7\hat{i} + 11\hat{j}$ . Znajdź wektor jednostkowy prostopadły do wektora  $\vec{a}$ .
11. Dane są dwa wektory:  $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$  oraz  $\vec{b} = 6\hat{i} + 16\hat{j}$ . Rozłóż wektor  $\vec{b}$  na składową równoległą do wektora  $\vec{a}$  oraz składową do niego prostopadłą.

### Elementarne pochodne i całki

12. Obliczyć pochodne po zmiennej  $x$  następujących funkcji:  $x^3 \sin(x)$ ,  $\sqrt{3x}$ ,  $e^{x^2+3}$ ,  $\cos^4(x)$ ,  $\tan(x) \equiv \sin(x)/\cos(x)$ ,  $\ln(x^2)$ ,  $f^2(x)$ ,  $\sin(\omega x)$ .

Wyznacz pierwsze i drugie pochodne następujących funkcji:

a)  $y = Bt^2 + Ct$

b)  $x = Ae^{-\alpha t}$

c)  $x = A \cos(\omega t + \delta)$

d)  $x = A \cos[\phi(t)]$

13. \* Wyznacz całki nieoznaczone:

a)  $F(t) = \int dt$

b)  $F(t) = \int t dt$

c)  $F(t) = \int (At + B) dt$

d)  $F(t) = \int \frac{1}{a + bt} dt$

e)  $F(t) = \int \exp(-\alpha t) dt$

f)  $F(t) = \int \cos[\omega t] dt$

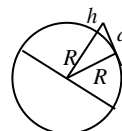
## Ćwiczenia rachunkowe z fizyki

### Oszacowania rzędu wielkości

(należy je przeprowadzać bardzo zgrubnie, przyjmując odważnie dane początkowe!)

13. Miliarder oferuje Ci jeden miliard złotych w monetach 1zł, pod warunkiem, że przeliczysz tę kwotę moneta po monecie (jedna na sekundę). Czy warto zaakceptować taką ofertę?
14. Oszacuj wagę i objętość złota wartego 1 miliard dolarów.
15. Ile ziarenek surowego ryżu mieści się w litrowym garnku?
16. Oszacuj ile kropli wody znajduje się w oceanach na Ziemi.
17. Nie tak dawno temu w komputerach klasy PC powszechnie używane były dyskietki 3,5 calowe o pojemności 1,44 MB (o grubości około 3 mm). Oszacuj ile takich dyskietek można by ułożyć jedna na drugiej na odległości Ziemia-Księżyc. Czy sumaryczna pojemność takiego stosu byłaby duża? Co w tym przypadku oznacza duża albo mała?
18. Na pierwszym polu szachownicy kładziemy jedno ziarno ryżu, na drugim – dwa, na trzecim – 4 i tak dalej, na następnym zawsze dwa razy więcej niż na poprzednim. Oszacuj objętość ryżu z ostatniego pola szachownicy.
19. Oszacuj całkowitą objętość powietrza jaką wydycha człowiek w czasie swojego życia (załóż, że każdy oddech to  $500\text{ cm}^3$ ). Ile razy serce człowieka uderza w czasie średniego życia? Ile litrów krwi przetoczy? Załóż, że w każdym uderzeniu serce pompuje około  $50\text{ cm}^3$  krwi.
20. Człowiek mruga do 20 razy na minutę. Każde mrugnięcie zajmuje mniej niż pół sekundy. Oszacuj przez jak długi czas w ciągu dnia mamy zamknięte oczy.

21. Oszacuj maksymalną odległość  $d$  (do horyzontu), jaką widzisz stojąc na plaży (Rys.). Załóż, że Twoje oczy znajdują się na wysokości  $h=1.7\text{m}$ , promień Ziemi wynosi  $R=6400\text{km}$ , a powietrze jest idealnie przejrzyste.



22. \*\* Oszacuj liczbę stroicieli pianin w dużym mieście (zadanie oryginalnie sformułowane przez Enrico Fermiego (1901-1954), wybitnego włoskiego fizyka; noblisty). Liczbę mieszkańców przyjmij jako 1 mln.

### Jednostki

23. Wahadło matematyczne to punkt materialny zawieszony na nieważkiej nici o długości  $L$ . Zakładając, że okres drgań  $T$  wahadła jest potęgową funkcją  $L$  oraz przyspieszenia ziemskiego  $g$ :  $T \propto L^\alpha g^\beta$  znaleźć wartości  $\alpha$  oraz  $\beta$  porównując jednostki obu stron powyższego równania.
24. Wprowadzamy fundamentalne stałe: grawitacji  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ , Plancka  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$  oraz prędkość światła  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , przy czym  $J = \text{N} \cdot \text{m}$  oraz  $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ . Obliczyć wartości oraz ustalić jednostki następujących wielkości:  $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$  oraz  $t_p = \frac{l_p}{c}$ .
25. Przyspieszenie dośrodkowe  $a_d$  ciała w ruchu po okręgu o promieniu  $R$  zależy od prędkości tego ciała  $v$  i promienia  $R$  jak  $a_d = v^\alpha R^\beta$ . Wyznaczyć, za pomocą analizy wymiarowej wartości wykładników  $\alpha$  i  $\beta$ . Wskazówka: wymiar przyspieszenia:  $\text{długość}/(\text{czas})^2$ , wymiar prędkości:  $\text{długość}/\text{czas}$ .
26. Definiujemy nową jednostkę czasu jako 1 mrugnięcie =  $30\mu\text{s}$ . Jaka jest prędkość światła w metrach na mrugnięcie? Jaką drogę przebywa światło w czasie jednego mrugnięcia?
27. A i B to wielkości fizyczne mające określone wymiary. Które z podanych działań mają sens fizyczny: A-B, A+B, A/B, A·B, jeśli wymiary A i B są: a) identyczne, b) różne?
28. Położenie cząstki zależy od czasu jak:  $x(t) = A \sin(\omega t)$ . Jaki wymiar mają w układzie jednostek miar SI wielkości A i  $\omega$ ?