Wrocław, 16 października 2024

Wydział Informatyki i Telekomunikacji, rok I
Logika dla informatyków

Zadania – lista 3

1. Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją binarną na zbiorze X oraz niech $A, B \subseteq X$.
   Zbadać prawdziwość zależności

   $R(A \cap B) \subseteq R(A) \cap R(B)$

   gdzie $R(Z) = \{(a,b) \in R\colon a, b \in Z\}$ dla $Z \subseteq X$.

2. Niech S, T będą relacjami binarnymi na X. Wskaż, które własności są prawdziwe:

   a) $dom(S \cup T) = dom(S) \cup dom(T)$
   b) $dom(S \cup T) \subseteq dom(S) \cup dom(T)$
   c) $dom(S \cap T) \subseteq dom(S) \cap dom(T)$

3. Sprawdzić, czy przechodnie są wszystkie relacje binarne $R \subseteq X^2$ określone na zbiorze X spełniającym warunek:

   a) card(X) = 1
   b) card(X) = 2
   c) card(X) = 3

4. Niech $R_1 \subseteq X^2$, relację $R_2 \subseteq X^2$, gdzie $R_1 \subseteq R_2$ nazywamy rozszerzeniem relacji R_1. Zbadać, czy każdą relację $R \subseteq X^2$ można rozszerzyć do relacji

   a) symetrycznej,
   b) przeciwsymetrycznej,
   c) zwrotnej,
   d) przeciwzwrotnej,
   e) przechodniej,
   f) spójnej.

5. Dla podanych niżej zbiorów X i binarnych relacji R na X sprawdzić, czy R jest relacją równoważności:
   a) X jest zbiorem liczb całkowitych; $\langle x,y\rangle \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x+y$ jest liczbą parzystą.
   b) X jest zbiorem liczb rzeczywistych; $\langle x,y\rangle \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x-y| \leq 2$.
   c) X jest zbiorem punktów na płaszczyźnie; $\langle\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\rangle \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1=y_2$.

6. Sprawdzić czy suma mnogościowa i przekrój dwóch relacji równoważności na zbiorze X są także relacjami równoważności. Odpowiedź uzasadnić.

7. Ile różnych relacji równoważności można zdefiniować na zbiorze 4-elementowym?

8. Udowodnić, że na zbiorze [0,2] (jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych niż 0 i nie większych niż 2) nie istnieje taka relacja równoważności, której klasami abstrakcji byłyby zbiory: [0,1], [1,4/3] i [1,2].

9. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. Udowodnić następujące własności:
   1. $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$
   2. Jeżeli $(a,b) \in R$, to $[a]_R = [b]_R$, i na odwrót
   3. Jeżeli $[a]_R \neq [b]_R$, to $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$