Wrocław, 09 października 2024

Wydział Informatyki i Telekomunikacji, rok I
Logika dla informatyków

Zadania – lista 2

1. Niech $\{A_i\colon i\in N\}$ będzie rodziną zbiorów takich, że $A_i =_{\text{def}} \{i, i+1, \ldots, i^2\}$.

   Obliczyć: $\bigcup_{i\in N} A_i$, $\bigcap_{i\in N} A_i$.

2. Rodzinę $\{A_i\colon i\in N\}$ nazywa się *zstępującą* rodziną zbiorów, gdy $A_{i+1} \subseteq A_i$ dla każdego $i\in N$. Udowodnić, że jeśli $\{A_i\colon i\in N\}$ oraz $\{B_i\colon i\in N\}$ są rodzinami zstępującymi, to:

$$\bigcap_{i\in N}(A_i \cup B_i) = (\bigcap_{i\in N} A_i) \cup (\bigcap_{i\in N} B_i)$$

3. Dane są dwa zbiory A i B. Rozwiązać równanie $A \cup X = B$, tj. podać możliwe wartość (lub wartości) zbioru X.

4. Czy istnieją zbiory A, B, C takie, że

   $A \cap B \neq \emptyset$ i $A \cap C = \emptyset$ oraz $(A \cap B)\setminus C = \emptyset$?

5. Udowodnić, że
   a) Jeśli $A \subseteq B$ to $2^A \subseteq 2^B$
   b) Jeśli $2^A \subseteq 2^B$ to $A \subseteq B$

6. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, B, C? Odpowiedź uzasadnić.
   a) Jeśli $A \subseteq B$ i $B\in C$ to $A\in C$.
   b) Jeśli $((A \cap B) \cap C) = \emptyset$ i $(A \cup C) \subseteq B$ to $A \cap C = \emptyset$
   c) Jeśli $A \subseteq B$ to $B \cap 2^A \neq \emptyset$

7. Ile relacji binarnych można zdefiniować na produkcie kartezjańskim $A \times B$, jeżeli A oraz B są zbiorami skończonymi o licznościach $card(A) = n$ oraz $card(B) = m$.

8. Udowodnij wzór a), a dla wzorów b) i c) uzupełnij i udowodnij:
   a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
   b) $(A \cup B) \times C = ?$
   c) $(A \cup B) \times (C \cup D) = ?$

9. Niech $X = \{a, b, c, d\}$ oraz $R \subseteq X^2$. Zbadać które spośród własności: symetrii, przeciwsymetrii, zwrotności, przeciwzwrotności, przechodniości, spójności i równoważności mają następujące relacje binarne:
   a) $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, b\rangle\}$
   b) $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, c\rangle\}$

10. Niech X będzie pewnym zbiorem osób. Jakie własności ma relacja binarna $R \subseteq X^2$ zdefiniowana następująco: $\langle x, y\rangle\in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy osoba x jest dzieckiem osoby y ?

11. Czy prawdziwe są następujące stwierdzenia dotyczące relacji binarnych na dowolnym zbiorze X?

a) Suma dwóch relacji symetrycznych jest relacją symetryczną na X.

b) Część wspólna (przekrój) dwu relacji przechodnich jest relacją przechodnią na X.

c) Jeżeli R jest relacją przechodnią oraz zbiór S spełnia warunek $R \subseteq S \subseteq X^2$ to S jest także relacją przechodnią na X.