תרגול 3 – DFS

תזכורת – DFS

אלגוריתם DFS (Depth-first search) הוא אלגוריתם הסורק את הגרף ומוציא מידע גולמי המשמש אלגוריתמים אחרים הפועלים על הגרף.

- **יער ה-DFS** - קבוצת עצים מכוונים המתארת את אופן גילוי הצמתים, כלומר יחסי הורות המאפיינים איזה צומת גילה איזה צומת במהלך ריצת ה-DFS.
- **זמני הגילוי** – לכל צומת v מוצמד זמן גילויו על ידי ריצת ה-DFS, המסומן ב-$d(v)$.
- **זמני הנסיגה** – לכל צומת v מוצמד זמן הנסיגה של ריצת ה-DFS מהצומת. זמן הנסיגה מסומן על ידי $f(v)$.
- **סיווג קשתות** – כל קשת מסווגת לאחד מארבעה סוגים.
    - **קשתות עץ (tree edges)** – אלו הקשתות השייכות ליער ה-DFS. כלומר אם uv היא קשת עץ אז DFS גילה את v דרך u.
    - **קשות קדמיות (forward edges)** – אלו הן קשתות uv , אשר אינן קשתות עץ, המחברות צומת u לצאצא שלו v ביער ה-DFS.
    - **קשתות אחוריות (back edges)** – אלו הן קשתות uv המחברות צומת u לאב קדמון שלו v ביער ה-DFS.
    - **קשתות חוצות (cross edges)** – כל שאר הקשתות. הן עשויות לקשר צמתים באותו עץ DFS כל עוד אין יחסי הורות ביניהם, או לקשר צמתים בעצי DFS שונים.

בנוגע לסיווג הקשתות – נשים לב כי גם אם הגרף עליו הרצנו DFS איננו מכוון, הקשתות לאחר הסיווג הן קשתות מכוונות.

משפט המסלול הלבן

ביער ה-DFS של גרף (מכוון או לא מכוון), צומת v הוא צאצא של צומת u אם"ם בזמן גילוי u (דהיינו בנקודת הזמן $d(u)$) קיים מסלול מ-u ל-v דרך צמתים שאינם התגלו (צמתים לבנים כפי שמכונים ב-CLRS).

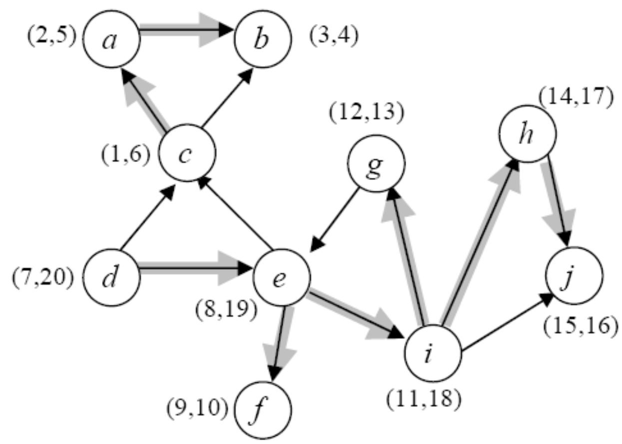
כך למשל, אם בדוגמה לעיל d היה הצומת הראשון אותו DFS היה סורק, אז בזמן גילוי d, היה מסלול לבן מ-d לכל שאר הצמתים (שכן יש מסלול מ-d לכל שאר הצמתים בגרף, ובנקודת זמן זו כולם לבנים). לכן ממשפט המסלול הלבן, הרצת DFS מהצומת d תבטיח לנו שכל הצמתים הם צאצים של d. כלומר, בהרצה שכזו ישנו בדיוק עץ DFS אחד.

הקשר בין סוגי הקשתות לזמני הגילוי והנסיגה הוא הקשר הבא:

- קשת uv היא קשת עץ או קשת קדימה אם"ם $d(u)<d(v)<f(v)<f(u)$.
- קשת uv היא קשת אחורית אם"ם $d(v)<d(u)<f(u)<f(v)$.
- קשת uv היא קשת חוצה אם"ם $d(v)<f(v)<d(u)<f(u)$.

חשוב להבין שהמידע המתקבל מריצת DFS עלול להשתנות מריצה לריצה, כלומר בניגוד ל-BFS שמוציא כפלט אינפורמציה על הגרף, פלט DFS (בין אם זה יער ה-DFS, זמני הגילוי והנסיגה או סיווג הקשתות) מהווה מידע התלוי בריצת ה-DFS עצמה. בכל זאת, מידע זה שימושי מאוד כפי שנראה בהמשך.

באיור דוגמה לפלט המתקבל מהרצת DFS. בדוגמה זו אנו מקבלים יער DFS עם שני עצים.



תרגיל 1

בהרצת DFS על גרף מכוון $G=(V,E)$ נסמן את הקשתות שסווגו כאחוריות ב-$F\subseteq E$. האם הגרף (V,F) הוא DAG? מה לגבי הגרף $(V,E\setminus F)$?

פתרון

כן. נניח בשלילה שקיים מעגל $C=v_1\to v_2\to\cdots\to v_k=v_1$ ב-(V,F), כלומר שכל הקשתות במעגל אחוריות. אז לכל $1\le i\le k-1$ מתקיים $f(v_{i+1})>f(v_i)$ (אנו נסוגים מכל הצאצאים לפני שנסוגים מצומת). לכן נקבל ש- $f(v_1)<f(v_2)<\cdots<f(v_{k-1})<f(v_k)=f(v_1)$ - סתירה.

אותו הדבר תופס גם לגבי הגרף $(V,E\setminus F)$. מכיוון שרק לקשתות אחוריות uv מתקיים $f(v)>f(u)$ אז לכל $uv\in E\setminus F$ מתקיים $f(v)<f(u)$. אם כך, אותה הוכחה כמו קודם תעבוד, רק שהפעם אי-השוויונים ילכו בכיוון ההפוך.

■

תרגיל 2

מצא תנאי הכרחי ומספיק על גרף $G=(V,E)$ (מכוון או לא מכוון) לכך שבכל הרצת DFS על G תהיה קשת אשר תסווג כקשת אחורית.

פתרון

התנאי הוא ש- G יכיל מעגל (מכוון במקרה של גרף מכוון, ולא מכוון במקרה של גרף לא מכוון). נוכיח זאת:

<u>בכיוון אחד</u>: נניח ו- G מכיל מעגל C ויהא $u \in C$ הצומת הראשון על המעגל שריצת ה-DFS מבקרת בו. יהא v הצומת הקודם ל- u במעגל, כלומר vu היא קשת במעגל. בזמן גילוי u, כל צמתי C לבנים ולכן קיים מסלול לבן מ- u ל- v (המסלול הוא זה המתקבל מקשתות C להוציא הקשת vu). ממשפט המסלול הלבן נקבל ש- v הוא צאצא של u ביער ה-DFS המתקבל. אם כך, בזמן גילוי v הקשת vu תסווג כקשת אחורית.

<u>בכיוון השני</u>: תהא uv קשת שסווגה כקשת אחורית בריצת ה-DFS. פירושו של דבר הוא ש- v הוא אב קדמון של u ביער ה-DFS, ולכן יש מסלול ב- G מ- v ל- u (בפרט יש מסלול כזה בקשתות שסווגו כקשתות עץ, אבל זה לא משנה לנו). מכאן שהקשת $uv \in E$ סוגרת מעגל בגרף.

■

תרגיל 2 נותן לנו אלגוריתם המכריע האם קיים מעגל בגרף, ובפרט, במקרה המכוון האם גרף נתון הוא DAG. ואכן, אלגוריתם שכזה יריץ DFS ויחזיר "יש מעגל בגרף" אם"ם קשת כלשהי סווגה כקשת אחורית.

תרגיל 3

אילו סוגי קשתות יכולות להתקבל מהרצת DFS על גרף לא מכוון?

פתרון

בודאי שקשתות עץ עלולות להתקבל (בפרט, אם קיימת קשת בגרף, תתקבל קשת עץ). גם קשת אחורית עלולה להתקבל, ואכן בתרגיל 2 ראינו שבכל גרף לא מכוון המכיל מעגל, קשת כלשהי תסווג כקשת אחורית. נוכיח כעת כי קשתות קדמיות וקשתות חוצות אינן מתקבלות בהרצת DFS על גרף לא מכוון.

נביט בקשת $uv \in E$. מכיוון שהגרף לא-מכוון נוכל להניח בה"כ כי $d(u) < d(v)$. הקשת ודאי מסווגת רק לאחר ש-DFS מגלה את u. אם הקשת סווגה לפני זמן גילוי v אז הקשת התגלתה על ידי u וסווגה כקשת עץ מ-u ל-v. אם לעומת זאת הקשת סווגה אחרי זמן גילוי v אז הקשת התגלתה על ידי v והובילה ל-u שהוא אב קדמון של v (שכן בעת גילוי u קיים מסלול לבן מ-u ל-v). במקרה זה הקשת סווגה כקשת אחורית. מכיוון שלא קיימות אפשרויות נוספות, הקשת uv תסווג בהכרח כקשת עץ או כקשת אחורית.

■

תרגיל 4

הוכח כי הסדר ההפוך לזה המושרה על ידי זמני הנסיגה מהצמתים הוא מיון טופולוגי.

באופן פורמלי: יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון שהוא DAG. הוכח כי אם $\{f(v)\}_{v\in V}$ הם זמני הנסיגה המתקבלים מהרצת DFS על G אז לכל $uv \in E$ מתקיים $f(u) > f(v)$.

פתרון

תהא $uv \in E$. מהדיון לעיל ראינו כי $f(u) > f(v)$ אלא אם כן uv קשת אחורית. לכן מספיק להוכיח שאין קשתות אחוריות בהרצת DFS על DAG. ואכן, מתרגיל 2 מובטח לנו שלא תתקבל קשת שכזו.

■

תרגיל 5

הגדרה

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון. נאמר כי צומת $v\in V$ הוא <u>שורש</u> של G אם קיים מסלול מכוון מ-v לכל צומת. נסמן את קבוצת שורשי הגרף ב-R_G .

תרגיל

הוכח כי בכל הרצת DFS, עץ ה-DFS האחרון מכיל את R_G.

פתרון

נסמן ב-$T_1,\ldots,T_t$ את עצי ה-DFS שהתקבלו מהרצת DFS כלשהי, כאשר T_1 הוא העץ הראשון שהתקבל, T_2 השני וכו'... נניח בשלילה שיש שורש r של הגרף כך ש-$r\in T_i$ עבור $i<t$. נסמן ב-r_t את שורש העץ T_t. מכיוון ש-r שורש של הגרף, קיים מסלול מ-r ל-r_t ב-G . יהא u הצומת הראשון על מסלול זה ששייך ל-T_t (מדוע יש כזה?) ויהא w הצומת שלפניו על המסלול (מדוע יש כזה?). בזמן גילוי w, הצומת u עדיין לא התגלה שכן $u\in T_t$ ו-$w\in T_i$. על כן, ממשפט המסלול הלבן w יהיה אב קדמון של u ביער ה-DFS – סתירה לכך ש-w,u בעצי DFS שונים. מהפרכת הנחת השלילה נסיק ש-$R_G\subseteq T_t$, כנדרש.

■