

SINGIRESU
RAO

VIBRAÇÕES MECÂNICAS

QUARTA

PEARSON
Prentice Hall



Companion
Website

SINGIRESU
R A O

VIBRAÇÕES
MECÂNICAS

Q U A R T A E D I Ç Ã O

Tradução

Arlete Simille Marques

Revisão técnica

Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

*Professor do Instituto de Engenharia Mecânica e
do Programa de Pós-graduação em Engenharia
Mecânica da Universidade Federal de Itajubá*



São Paulo



Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

© 2009 by Pearson Education do Brasil

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de nenhum modo ou por algum outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Diretor editorial: Roger Trimer

Gerente editorial: Sabrina Cairo

Supervisor de produção editorial: Marcelo Françozo

Editora sênior: Tatiana Pavanelli Valsi

Editora: Renata de Paula Truyts

Preparação: Renata G. V. de Assunção

Revisão: Maria Alice da Costa

Capa: Rafael Mazzo (sobre projeto original)

Diagramação: Globaltec Artes Gráficas

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Rao, Singiresu S.

Vibrações mecânicas / Singiresu S. Rao ; revisor técnico José Juliano de Lima Junior; tradução Arlete Simille. -- São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2008.

Título original: Mechanical vibrations.

4. ed. americana.

ISBN 978-85-7605-200-5

1. Vibração - Modelos matemáticos I. Título.

08-11377

CDD-620.3

Índice para catálogo sistemático:
1. Vibrações mecânicas : Engenharia 620.3

2008

Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil, uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermanno Marchetti, 1435
CEP: 05038-001 – São Paulo – SP
Fone: (11) 2178-8686 – Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearsoned.com

Para Lord Sri Venkateswara

Sumário

Prefácio	xvii
Agradecimentos	xx
Lista de símbolos	xxi
CAPÍTULO 1	
Fundamentos de vibrações	1
1.1 Observações preliminares	1
1.2 Breve história da vibração	1
1.2.1 Origens da vibração	1
1.2.2 De Galileu a Rayleigh	2
1.2.3 Contribuições recentes	4
1.3 Importância do estudo da vibração	5
1.4 Conceitos básicos de vibração	6
1.4.1 Vibração	6
1.4.2 Partes elementares de sistemas vibratórios	6
1.4.3 Grau de liberdade	6
1.4.4 Sistemas discretos e contínuos	7
1.5 Classificação de vibrações	8
1.5.1 Vibração livre e vibração forçada	8
1.5.2 Vibração não amortecida e amortecida	8
1.5.3 Vibração linear e não linear	9
1.5.4 Vibração determinística e aleatória	9
1.6 Procedimento de análise de vibrações	9
1.7 Elementos de mola	11
1.7.1 Associação de molas	12
1.8 Elementos de massa ou inércia	15
1.8.1 Associação de massas	15
1.9 Elementos de amortecimento	17
1.9.1 Construção de amortecedores viscosos	18
1.9.2 Associação de amortecedores	19
1.10 Movimento harmônico	21
1.10.1 Representação vetorial de movimento harmônico	22
1.10.2 Representação de movimento harmônico por números complexos	22
1.10.3 Álgebra de números complexos	23
1.10.4 Operações com funções harmônicas	23
1.10.5 Definições e terminologia	24

1.11	Análise harmônica	26
1.11.1	Expansão por série de Fourier	26
1.11.2	Série de Fourier complexa	27
1.11.3	Espectro de freqüência	28
1.11.4	Representações no domínio do tempo e da freqüência	28
1.11.5	Funções pares e ímpares	28
1.11.6	Expansões em meia-faixa	29
1.11.7	Cálculo numérico de coeficientes	30
1.12	Exemplos usando MATLAB	32
1.13	Programa em C++	34
1.14	Programa em FORTRAN	34
1.15	Literatura de vibrações	35
	Referências bibliográficas.....	35
	Perguntas de revisão	36
	Problemas	38
	Exercícios de projeto	47

CAPÍTULO 2

Vibração livre de sistemas com um grau de liberdade	50	
2.1	Introdução	50
2.2	Vibração livre de um sistema de translação não amortecido	51
2.2.1	Equação de movimento pela segunda lei do movimento de Newton	51
2.2.2	Equação de movimento por outros métodos	52
2.2.3	Equação de movimento de um sistema massa-mola em posição vertical	53
2.2.4	Solução	54
2.2.5	Movimento harmônico	54
2.3	Vibração livre de um sistema torcional não amortecido	60
2.3.1	Equação de movimento	60
2.3.2	Solução	61
2.4	Condições de estabilidade	63
2.5	Método da energia de Rayleigh	63
2.6	Vibração livre com amortecimento viscoso	66
2.6.1	Equação de movimento	66
2.6.2	Solução	66
2.6.3	Decremento logarítmico	68
2.6.4	Energia dissipada em amortecimento viscoso	70
2.6.5	Sistemas torcionais com amortecimento viscoso	71
2.7	Vibração livre com amortecimento Coulomb	74
2.7.1	Equação de movimento	74
2.7.2	Solução	74
2.7.3	Sistemas torcionais com amortecimento Coulomb	76
2.8	Vibração livre com amortecimento por histerese	77
2.9	Exemplos com a utilização do MATLAB	79
2.10	Programa em C++	82
2.11	Programa em FORTRAN	82
	Referências bibliográficas.....	82
	Perguntas de revisão	83
	Problemas	85
	Exercícios de projeto	99

CAPÍTULO 3

Vibração excitada harmonicamente	101
3.1 Introdução	101
3.2 Equação de movimento	101
3.3 Resposta de um sistema não amortecido à força harmônica	102
3.3.1 Resposta total	103
3.3.2 Fenômeno do batimento	104
3.4 Resposta de um sistema amortecido à força harmônica	105
3.4.1 Resposta total	107
3.4.2 Fator de qualidade e largura de banda	108
3.5 Resposta de um sistema amortecido a $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$	109
3.6 Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base	110
3.6.1 Força transmitida	111
3.6.2 Movimento relativo	111
3.7 Resposta de um sistema amortecido ao desbalanceamento rotativo	113
3.8 Vibração forçada com amortecimento Coulomb	115
3.9 Vibração forçada com amortecimento por histerese	117
3.10 Movimento forçado com outros tipos de amortecimento	118
3.11 Auto-excitação e análise de estabilidade	119
3.11.1 Análise de estabilidade dinâmica	119
3.11.2 Instabilidade dinâmica causada por escoamento de fluido	120
3.12 Exemplos usando MATLAB	124
3.13 Programa em C++	127
3.14 Programa em FORTRAN	127
Referências bibliográficas	127
Perguntas de revisão	128
Problemas	130
Exercícios de projeto	139

CAPÍTULO 4

Vibração sob condições forçantes gerais	140
4.1 Introdução	140
4.2 Resposta à força periódica geral	140
4.3 Resposta a uma força periódica de forma irregular	143
4.4 Resposta a uma força não periódica	144
4.5 Integral de convolução	145
4.5.1 Resposta a um impulso	145
4.5.2 Resposta a uma condição forçante geral	147
4.5.3 Resposta à excitação de base	147
4.6 Espectro de resposta	151
4.6.1 Espectro de resposta para excitação de base	152
4.6.2 Espectros de resposta a terremoto	154
4.6.3 Projeto para ambiente sujeito a choque	156
4.7 Transformadas de Laplace	157
4.8 Resposta a condições forçantes irregulares usando métodos numéricos	160
4.9 Exemplos usando MATLAB	163
4.10 Programas em C++	166
4.10.1 Resposta a uma força periódica arbitrária	166
4.10.2 Resposta a uma função forçante arbitrária	167

4.11	Programas em FORTRAN	167
4.11.1	Resposta a uma força periódica arbitrária	167
4.11.2	Resposta a uma função forçante arbitrária	167
	Referências bibliográficas.....	168
	Perguntas de revisão	168
	Problemas	170
	Exercícios de projeto	176

CAPÍTULO 5

Sistemas com dois graus de liberdade	178
---	------------

5.1	Introdução	178
5.2	Equações de movimento para vibração forçada	179
5.3	Análise da vibração livre de um sistema não amortecido	180
5.4	Sistema torcional	184
5.5	Acoplamento de coordenadas e coordenadas principais	186
5.6	Análise de vibração forçada	190
5.7	Sistemas semidefinidos	191
5.8	Auto-excitação e análise de estabilidade	192
5.9	Exemplos usando MATLAB	193
5.10	Programa em C++	196
5.11	Programa em FORTRAN	196
	Referências bibliográficas.....	196
	Perguntas de revisão	197
	Problemas	198
	Exercícios de projeto	206

CAPÍTULO 6

Sistemas com vários graus de liberdade	207
---	------------

6.1	Introdução	207
6.2	Modelagem de sistemas contínuos como sistemas com vários graus de liberdade	207
6.3	Utilização da segunda lei de Newton para deduzir equações de movimento	208
6.4	Coeficientes de influência	210
6.4.1	Coeficientes de influência de rigidez	211
6.4.2	Coeficientes de influência de flexibilidade	213
6.4.3	Coeficientes de influência de inércia	216
6.5	Expressões de energia potencial e energia cinética na forma matricial	217
6.6	Coordenadas generalizadas e forças generalizadas	217
6.7	Utilização de equações de Lagrange para deduzir equações de movimento	218
6.8	Equações de movimento de sistemas não amortecidos na forma matricial	220
6.9	Problema de autovalor	221
6.10	Solução do problema de autovalor	222
6.10.1	Solução da equação característica (ou polinomial)	222
6.10.2	Ortogonalidade de modos normais	224
6.10.3	Autovalores repetidos	225
6.11	Teorema de expansão	226
6.12	Sistemas irrestritos	226
6.13	Vibração livre de sistemas não amortecidos	228
6.14	Vibração forçada de sistemas não amortecidos usando análise modal	229
6.15	Vibração forçada em sistemas com amortecimento viscoso	232

6.16	Auto-excitación e análise de estabilidade	235
6.17	Exemplos utilizando MATLAB	236
6.18	Programas em C++	240
6.19	Programas em FORTRAN	240
	Referências bibliográficas	241
	Perguntas de revisão	241
	Problemas	243
	Exercício de projeto	250
CAPÍTULO 7		
Determinação de freqüências naturais e formas modais		251
7.1	Introdução	251
7.2	Fórmula de Dunkerley	251
7.3	Método de Rayleigh	252
7.3.1	Propriedades do quociente de Rayleigh	253
7.3.2	Cálculo da freqüência natural fundamental	253
7.3.3	Freqüência fundamental de vigas e eixos	254
7.4	Método de Holzer	256
7.4.1	Sistemas torcionais	256
7.4.2	Sistemas massa-mola	257
7.5	Método de iteração matricial	258
7.5.1	Convergência para a freqüência natural mais alta	259
7.5.2	Cálculo de freqüências naturais intermediárias	259
7.6	Método de Jacobi	261
7.7	Problema padrão de autovalor	262
7.7.1	Decomposição de Choleski	263
7.7.2	Outros métodos de solução	263
7.8	Exemplos utilizando MATLAB	263
7.9	Programas em C++	265
7.10	Programas em FORTRAN	266
	Referências bibliográficas	266
	Perguntas de revisão	267
	Problemas	268
	Exercícios de projeto	271
CAPÍTULO 8		
Sistemas contínuos		272
8.1	Introdução	272
8.2	Vibração transversal de uma corda ou cabo	272
8.2.1	Equação de movimento	272
8.2.2	Condições iniciais e condições de contorno	273
8.2.3	Vibração livre de uma corda uniforme	273
8.2.4	Vibração livre de uma corda fixa em ambas as extremidades	274
8.2.5	Solução de uma onda em propagação	275
8.3	Vibração longitudinal de uma barra ou haste	276
8.3.1	Equação de movimento e solução	276
8.3.2	Ortogonalidade de funções normais	278
8.4	Vibração torcional de um eixo ou haste	280
8.5	Vibração lateral de vigas	282
8.5.1	Equação de movimento	282
8.5.2	Condições iniciais	283

8.5.3	Vibração livre	283
8.5.4	Condições de contorno	283
8.5.5	Ortogonalidade de funções normais	284
8.5.6	Vibração forçada	286
8.5.7	Efeito da força axial	287
8.5.8	Efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento	289
8.5.9	Outros efeitos	291
8.6	Vibração de membranas	291
8.6.1	Equação de movimento	291
8.6.2	Condições iniciais e condições de contorno	292
8.7	Método de Rayleigh	292
8.8	O método de Rayleigh-Ritz	294
8.9	Exemplos utilizando MATLAB	295
8.10	Programa em C++	296
8.11	Programa em FORTRAN	297
	Referências bibliográficas	297
	Perguntas de revisão	297
	Problemas	299
	Exercício de projeto	304

CAPÍTULO 9

Controle de vibração	305	
9.1	Introdução	305
9.2	Nomograma de vibração e critérios de vibração	305
9.3	Redução da vibração na fonte	307
9.4	Balanceamento de máquinas rotativas	308
9.4.1	Balanceamento em um plano	308
9.4.2	Balanceamento em dois planos	309
9.5	Rodopio (<i>whirling</i>) de eixos rotativos	312
9.5.1	Equações de movimento	312
9.5.2	Velocidades críticas	313
9.5.3	Resposta do sistema	313
9.5.4	Análise de estabilidade	314
9.6	Balanceamento de motores alternativos	315
9.6.1	Forças desbalanceadas resultantes da variação da pressão dos gases	315
9.6.2	Forças desbalanceadas resultantes da inércia das partes móveis	316
9.6.3	Balanceamento de motores alternativos	317
9.7	Controle de vibração	318
9.8	Controle de freqüências naturais	318
9.9	Introdução de amortecimento	318
9.10	Isolamento da vibração	320
9.10.1	Sistema de isolamento da vibração com fundação rígida	320
9.10.2	Isolamento entre a fonte de vibração e o ambiente	322
9.10.3	Sistema de isolamento da vibração com fundação flexível	323
9.10.4	Sistema de isolamento da vibração com fundação parcialmente flexível	324
9.10.5	Isolamento contra choque	325
9.10.6	Controle ativo de vibração	326
9.11	Absorvedores de vibração	327
9.11.1	Absorvedor dinâmico de vibração não-amortecido	327
9.11.2	Absorvedor dinâmico de vibração amortecido	329
9.12	Exemplos usando MATLAB	331
9.13	Programa em C++	334
9.14	Programa em FORTRAN	334
	Referências bibliográficas	334

Perguntas de revisão	335
Problemas	337
Projeto	343
CAPÍTULO 10	
Medições de vibração e aplicações	344
10.1 Introdução	344
10.2 Transdutores	345
10.2.1 Transdutores de resistência variável	345
10.2.2 Transdutores piezelétricos	346
10.2.3 Transdutores eletrodinâmicos	347
10.2.4 Transdutor transformador diferencial linear variável	347
10.3 Sensores de vibração	348
10.3.1 Transdutor de deslocamento	349
10.3.2 Acelerômetro	349
10.3.3 Transdutor de velocidade	350
10.3.4 Distorção de fase	351
10.4 Instrumentos de medição de frequência	352
10.5 Excitadores de vibração	353
10.5.1 Excitadores mecânicos	353
10.5.2 Excitador eletrodinâmico	353
10.6 Análise de sinal	354
10.6.1 Analisadores de espectro	355
10.6.2 Filtro passa-faixa	355
10.6.3 Analisadores de largura de faixa percentual constante e analisadores de largura de faixa constante	356
10.7 Ensaio dinâmico de máquinas e estruturas	356
10.7.1 Utilização de medições da forma operacional de deflexão	356
10.7.2 Utilização de teste modal	357
10.8 Análise modal experimental	357
10.8.1 Idéia básica	357
10.8.2 O equipamento necessário	357
10.8.3 Processador digital de sinal	358
10.8.4 Análise de sinais aleatórios	359
10.8.5 Determinação de parâmetros modais pelos picos observados	360
10.8.6 Determinação de parâmetros modais pelo diagrama de Nyquist	362
10.8.7 Medição de formas modais	363
10.9 Monitoração e diagnóstico de falha de máquinas	364
10.9.1 Critério de severidade da vibração	364
10.9.2 Técnicas de manutenção de máquinas	364
10.9.3 Técnicas de monitoração prognóstica	365
10.9.4 Técnicas de monitoração da vibração	366
10.9.5 Sistemas de instrumentação	368
10.9.6 Escolha de parâmetros de monitoração	369
10.10 Exemplos usando MATLAB	369
Referências bibliográficas	370
Perguntas de revisão	371
Problemas	373
Exercícios de projeto	375

CAPÍTULO 11

Métodos de integração numérica em análise de vibração	376
11.1 Introdução	376
11.2 Método de diferenças finitas	376
11.3 Método de diferença central para sistema com um grau de liberdade	377
11.4 Método de Runge-Kutta para sistemas com um grau de liberdade	378
11.5 Método de diferença central para sistemas com vários graus de liberdade	379
11.6 Método de diferenças finitas para sistemas contínuos	380
11.6.1 Vibração longitudinal de barras	380
11.6.2 Vibração transversal de vigas	382
11.7 Método de Runge-Kutta para sistemas com vários graus de liberdade	384
11.8 Método de Houbolt	384
11.9 Método de Wilson	386
11.10 Método de Newmark	388
11.11 Exemplos usando MATLAB	389
11.12 Programas em C++	392
11.13 Programas em FORTRAN	393
Referências bibliográficas	394
Perguntas de revisão	394
Problemas	396

APÊNDICE A

Relações matemáticas	399
-----------------------------------	------------

APÊNDICE B

Deflexão em vigas e placas	401
---	------------

APÊNDICE C

Matrizes	403
-----------------------	------------

APÊNDICE D

Pares de transformadas de Laplace	406
--	------------

APÊNDICE E

Unidades	407
-----------------------	------------

APÊNDICE F

Introdução ao MATLAB	409
-----------------------------------	------------

Respostas a problemas selecionados	413
---	------------

Índice remissivo	420
-------------------------------	------------

Prefácio

Esta obra é uma introdução à engenharia de vibrações para nível universitário. A teoria, os aspectos de computação e as aplicações das vibrações são apresentados do modo mais simples possível e ilustrados por um grande número de exemplos e problemas. Enfatizamos diversas técnicas de análise por computador, destacamos as explicações dos aspectos fundamentais e ressaltamos o significado físico e a interpretação que aproveitam o conhecimento prévio em mecânica, adquirida no curso universitário. As reações favoráveis e o incentivo de professores e estudantes deram-nos o ímpeto para redigir esta edição. Destacamos alguns pontos importantes:

- Inúmeras perguntas de revisão auxiliam o aluno a rever e testar seu conhecimento. Elas incluem perguntas de múltipla escolha, com respostas curtas, do tipo verdadeiro-falso, que envolvem ligar descrições relacionadas e perguntas com lacunas a preencher.
- Apêndice com as idéias básicas da programação MATLAB.
- Vários exemplos baseados em MATLAB são apresentados em todos os capítulos.
- Programas de computador de uso geral em programação MATLAB, C++ e FORTRAN com as aplicações constam em todos os capítulos para a solução de problemas de vibração.
- Diversos problemas, incluindo aqueles baseados na utilização de programação MATLAB, em C++ e em FORTRAN, são propostos ao final de cada capítulo para expor aos estudantes detalhes importantes de computação e programação.

Características

Cada tópico de *Vibrações mecânicas* é independente, todos os conceitos são totalmente explicados, e as deduções são apresentadas com detalhes completos. Os aspectos de computação são enfatizados por todo o livro. Todos os capítulos contam com exemplos baseados em MATLAB. Vários programas de computador interativos em MATLAB, C++ e FORTRAN, sendo que a maioria deles é apresentada na forma de sub-rotinas de uso geral, também foram incluídos em todos os capítulos. A intenção é que tais programas sejam utilizados pelos estudantes.

Tanto exemplos quanto problemas baseados na utilização dos vários programas de computador são disponibilizados em cada capítulo a fim de expor aos estudantes detalhes importantes de computação e de programação. Contudo, embora os programas tenham sido testados, não podemos garantir sua exatidão.

A maioria dos livros didáticos discute isoladores, absorvedores e balanceamento em locais diferentes. Tendo em vista que uma das principais finalidades do estudo de vibrações é controlar a resposta à vibração, todos os tópicos rela-

cionados diretamente ao controle da vibração são apresentados no Capítulo 9. Os instrumentos de medição de vibrações, como excitadores de vibração, procedimentos de análise modal e monitoração de máquinas são apresentados no Capítulo 10. De maneira semelhante, todos os métodos de integração numérica aplicáveis a sistemas com um ou vários graus de liberdade bem como a sistemas contínuos foram unificados no Capítulo 11.

Citamos, ainda, características específicas de *Vibrações mecânicas*:

- Mais de 200 exemplos ilustrativos acompanham a maioria dos tópicos.
- Mais de 1.000 problemas com suas respectivas soluções estão disponíveis no manual do professor no Companion Website do livro (em inglês e com acesso exclusivo para professores).
- Mais de 30 problemas de projeto são dados ao final de vários capítulos.
- Mais de 70 programas de computador em MATLAB, C++ e FORTRAN auxiliam os alunos na implementação numérica dos métodos discutidos no texto.
- Informações biográficas sobre cientistas e engenheiros que contribuíram para o desenvolvimento da teoria das vibrações são apresentadas na página inicial de cada capítulo e dos apêndices.

Notação e unidades

Foram usados o sistema de unidades SI e o sistema de unidades inglês nos exemplos e nos problemas. Uma lista de símbolos com as unidades associadas ao SI e ao sistema inglês é apresentada após os agradecimentos. Uma breve discussão de unidades SI aplicadas à área das vibrações é dada no Apêndice E. Foram usadas setas sobre símbolos para representar vetores coluna e colchetes para indicar matrizes.

Conteúdo

Vibrações mecânicas está organizado em 11 capítulos e 6 apêndices. O material deste livro permite opções flexíveis para diferentes tipos de cursos sobre vibrações. Por exemplo, para um curso avançado com a duração de um semestre, os Capítulos 1 a 5 e 9 e, partes dos Capítulos 6, 7, 8 e 10 podem ser usados. O curso pode ter uma orientação para computador com a inclusão do Capítulo 11 no lugar do Capítulo 8.

O Capítulo 1 começa com uma breve discussão sobre os aspectos históricos e a importância das vibrações. Os conceitos básicos e a terminologia utilizados em análise de vibrações são apresentados. A análise da vibração livre de sistemas translacionais e torcionais, não amortecidos, com um grau de liberdade é dada no Capítulo 2. Os efeitos do amortecimento viscoso, de Coulomb e por histerese também são discutidos. A resposta harmônica de sistemas com um grau de liberdade é considerada no Capítulo 3. O Capítulo 4 trata

da resposta de um sistema com um grau de liberdade sob funções forçantes gerais. São discutidos também os papéis desempenhados pela integral de convolução, transformadas de Laplace e métodos numéricos. O conceito de espectro de resposta também é apresentado nesse capítulo. A vibração livre e forçada de sistemas com dois graus de liberdade é considerada no Capítulo 5. A vibração autoexcitada e a estabilidade do sistema também são discutidas. O Capítulo 6 apresenta a análise da vibração de sistemas com vários graus de liberdade. Métodos matriciais de análise são usados para a apresentação da teoria. O procedimento da análise modal é descrito para a solução de problemas de vibração forçada. Vários métodos para determinar as freqüências naturais de sistemas discretos são esquematizados no Capítulo 7. Os métodos de Dunkerley, Rayleigh, Holzer e Jacobi a iteração de matrizes são igualmente discutidos. A análise de vibração de sistemas contínuos, incluindo cordas, barras, eixos, vigas e membranas, é dada no Capítulo 8. Do mesmo modo, os métodos de Rayleigh e Rayleigh-Ritz para determinar as freqüências naturais aproximadas são estudados. O Capítulo 9 discute os vários aspectos do controle de vibração, incluindo os problemas de eliminação, isolamento e absorção. O balanceamento de máquinas rotativas e alternativas e o rodotípo de eixos também são considerados. Os instrumentos de medição de vibração, excitadores de vibração e instrumentos de análise de sinais são os tópicos do Capítulo 10. Finalmente, o Capítulo 11 apresenta técnicas de integração numérica para determinar a resposta dinâmica de sistemas discretos e contínuos. Os métodos de diferença central, de Runge-Kutta, Houbolt, Wilson e Newmark são resumidos e ilustrados.

S. S. RAO

Companion Website



No Companion Website deste livro (www.prenhall.com/rao_br) professores e estudantes têm acesso a materiais adicionais que facilitam tanto a exposição das aulas quanto o processo de aprendizagem.

Para professores

- Galeria de imagens.
- Apresentações em PowerPoint.
- Manual do professor

Esses materiais são de uso exclusivo dos professores e estão protegidos por senha. Para ter acesso a eles, os professores que adoram o livro devem entrar em contato com seu representante Pearson ou enviar um e-mail para universitarios@pearsoned.com.

Para estudantes

- Exercícios adicionais
 - Lista de programas em linguagem MATLAB, C++ e FORTRAN
 - Respostas às perguntas de revisão.
 - Capítulos 12, 13 e 14 do livro Original (em Inglês)
- Esse capítulos encontram-se protegidos. Para acessá-los, é necessário inserir a senha 345&rao no local indicado no Companion Website do livro.*

Agradecimentos

Gostaria de expressar meu apreço aos meus alunos e membros do corpo docente cujos comentários ajudaram a melhorar o livro. Sou muito grato às seguintes pessoas por terem oferecido seus comentários, sugestões e idéias: Richard Alexander, Texas A&M University; C. W. Bert, University of Oklahoma; Raymond M. Brach, University of Notre Dame; Alfonso Diaz-Jimenez, Universidad Distrital “Francisco Jose de Caldas,” Colômbia; George Doyle, University of Dayton; Hamid Hamidzadeh, South Dakota State University; H. N. Hashemi, Northeastern University; Zhikun Hou, Winchester Polytechnic Institute; J. Richard Houghton, Tennessee Technological University; Faryar Jabbari, University of California, Irvine; Robert Jeffers, University of Connecticut; Richard Keltie, North Carolina State University; J. S. Lamancusa, Pennsylvania State University; Harry Law, Clemson University; Robert Leonard, Virginia Polytechnic Institute and State University; James Li, Columbia University; Sameer Madanshetty, Boston University; M. G. Prasad, Stevens Institute of Technology; F. P. J. Rimrott, University of Toronto; Subhash Sinha, Auburn University; Daniel Stutts, University of Missouri-Rolla; Massoud Tavakoli, Georgia Institute of Technology; Theodore Terry, Lehigh University; Chung Tsui, University of Maryland, College Park; Alexander Vakakis, University of Illinois-Urbana Champaign; Chuck Van Karsen, Michigan Technological University; Aleksandra Vinogradov, Montana State University; K. W. Wang, Pennsylvania State University; William Webster, GMI Engineering and Management Institute. Gostaria ainda de agradecer à Purdue University por ter me dado permissão de utilizar o Boilermaker Special no Problema 2.91. Meus sinceros agradecimentos ao Dr. Qing Liu, ex-aluno de pós-graduação na University of Miami, por ter me ajudado a escrever alguns dos programas em MATLAB e C++. Por fim, agradeço à minha esposa, Kamala, às minhas filhas, Sridevi e Shobha, e à minha neta, Siriveena Rosa — sem sua paciência, incentivo e apoio, esta edição poderia não ter sido concluída.

S.S. RAO
srao@miami.edu

Lista de Símbolos

Símbolo	Significado	Unidades inglesas	Unidades SI
a, a_0, a_1, a_2, \dots	constantes, comprimentos		
a_{ij}	coeficiente de flexibilidade	in./lb	N/m
$[a]$	matriz de flexibilidade	in./lb	N/m
A	área	in ²	m ²
A, A_0, A_1, \dots	constantes		
b, b_1, b_2, \dots	constantes, comprimentos		
B, B_1, B_2, \dots	constantes		
B	peso de balanceamento	lb	N
c, ζ	coeficiente de amortecimento viscoso	lb-sec/in.	N·s/m
c, c_0, c_1, c_2, \dots	constantes		
c	velocidade de onda	in./sec	m/s
c_c	constante de amortecimento viscoso crítico	lb-sec/in.	N·s/m
c_i	constante de amortecimento do i -ésimo amortecedor	lb-sec/in.	N·s/m
c_{ij}	coeficiente de amortecimento	lb-sec/in.	N·s/m
$[c]$	matriz de amortecimento	lb-sec/in.	N·s/m
C, C_1, C_2, C'_1, C'_2	Constantes		
d	diâmetro, dimensão	in.	m
D	diâmetro	in.	m
$[D]$	matriz dinâmica	sec ²	s ²
e	base de logaritmos naturais		
e	excentricidade	in.	m
\vec{e}_x, \vec{e}_y	vetores unitários paralelos às direções x e y		
E	Módulo de Young	lb/in ²	Pa
$E[x]$	valor esperado de x		
f	freqüência linear	Hz	Hz
f_f	força por unidade de comprimento	lb/in.	N/m
\tilde{f}	impulso unitário	lb-sec	N·s
F, F_d	força	lb	N
F_0	amplitude de força $F(t)$	lb	N
F_r, F_T	força transmitida	lb	N
\vec{F}_i	força que age sobre a i -ésima massa	lb	N
\vec{F}	vetor de força	lb	N
F	Impulso	lb-sec	N·s
g	aceleração devido à gravidade	in./sec ²	m/s ²
$g(t)$	função resposta a impulso		
G	módulo de elasticidade transversal	lb/in ²	N/m ²
h	constante de amortecimento por histerese	lb/in	N/m
$H(i\omega)$	função resposta em freqüência		
i	$\sqrt{-1}$		
I	Momento de inércia de área	in ⁴	m ⁴
$[I]$	matriz identidade		
$\text{Im}()$	parte imaginária de ()		
j	inteiro		
J	momento de inércia polar	in ⁴	m ⁴
J, J_0, J_1, J_2, \dots	momento de inércia de massa	lb-in./sec ²	kg·m ²
k, \tilde{k}	constante elástica	lb/in.	N/m
k_i	constante elástica da i -ésima mola	lb/in.	N/m
k_t	constante elástica torcional	lb-in/rad	N·m/rad
k_{ij}	coeficiente de rigidez	lb/in.	N/m
$[k]$	matriz de rigidez	lb/in.	N/m
l, l_i	comprimento	in.	m
m, \tilde{m}	massa	lb-sec ² /in.	kg
m_i	i -ésima massa	lb-sec ² /in.	kg
m_{ij}	coeficiente de massa	lb-sec ² /in.	kg
$[m]$	matriz de massa	lb-sec ² /in.	kg
M	Massa	lb-sec ² /in.	kg
M	momento fletor	lb-in.	N·m
$M_r, M_{r1}, M_{r2}, \dots$	Torque	lb-in.	N·m
M_{r0}	amplitude de $M_r(t)$	lb-in.	N·m

Símbolo	Significado	Unidades inglesas	Unidades SI
n	um inteiro		
n	número de graus de liberdade		
N	força normal	lb	N
N	número total de passos de tempo		
p	pressão	lb/in ²	N/m ²
$p(x)$	função densidade de probabilidade de x		
$P(x)$	função distribuição de probabilidade de x		
P	força, tensão	lb	N
q_j	j -ésima coordenada generalizada		
\vec{q}	vetor de deslocamentos generalizados		
\vec{q}	vetor de velocidades generalizadas		
Q_j	j -ésima força generalizada		
r	razão de freqüências = ω/ω_n		
\vec{r}	vetor raio	in.	m
$\text{Re}(\cdot)$	parte real de (\cdot)		
$R(\tau)$	função de autocorrelação		
R	resistência elétrica	ohm	ohm
R	função de dissipação de Rayleigh	lb-in/s	N·m/s
R	quociente de Rayleigh	1/sec ²	1/s ²
s	coeficiente exponencial, raiz da equação		
S_a, S_d, S_v	espectro de aceleração, deslocamento, velocidade		
$S_x(\omega)$	espectro de x		
t	tempo	sec	s
t_i	i -ésima estação de tempo	sec	s
T	torque	lb-in	N·m
T	energia cinética	in.-lb	J
T_i	energia cinética da i -ésima massa	in.-lb	J
T_r	razão de transmissibilidade	in.-lb	J
u_{ij}	um elemento da matriz $[U]$		
U, U_i	deslocamento axial	in.	m
\underline{U}	energia potencial	in.-lb	J
\overline{U}	peso desbalanceado	lb	N
$[U]$	matriz triangular superior		
v, v_0	velocidade linear	in./sec	m/s
V	força de cisalhamento	lb	N
V	energia potencial	in.-lb	J
V_i	energia potencial da i -ésima mola	in.-lb	J
w, w_1, w_2, ω_i	deflexões transversais	in.	m
w_0	valor de w em $t = 0$	in.	m
\dot{w}_0	valor de \dot{w} em $t = 0$	in./sec	m/s
w_n	n -ésimo modo de vibração		
W	peso de uma massa	lb	N
W	energia total	in.-lb	J
W	deflexão transversal	in.	m
W_i	valor de W em $t = t_i$	in.	m
$W(x)$	uma função de x		
x, y, z	coordenadas cartesianas, deslocamentos	in.	m
$x_0, x(0)$	valor de x em $t = 0$	in.	m
$\dot{x}_0, \dot{x}(0)$	valor de \dot{x} em $t = t_0$	in./sec	m/s
x_j	deslocamento da j -ésima massa	in.	m
\dot{x}_j	valor de x em $t = t_j$	in.	m
\ddot{x}_j	valor de \dot{x} em $t = t_j$	in./sec	m/s
x_h	parte homogênea de $x(t)$	in.	m
x_p	parte particular de $x(t)$	in.	m
\vec{x}	vetor de deslocamentos	in.	m
\vec{x}_i	valor de \vec{x} em $t = t_i$	in.	m
$\dot{\vec{x}}_i$	valor de $\dot{\vec{x}}$ em $t = t_i$	in./sec	m/s
$\ddot{\vec{x}}_i$	valor de $\ddot{\vec{x}}$ em $t = t_i$	in./sec ²	m/s ²
$\vec{x}^{(i)}(t)$	i -ésimo modo		
X	amplitude de $x(t)$	in.	m
X_j	amplitude de $x_j(t)$	in.	m
$\vec{X}^{(i)}$	i -ésimo vetor modal	in.	m
$X_i^{(j)}$	i -ésimo componente do j -ésimo modo	in.	m

Símbolo	Significado	Unidades inglesas	Unidades SI
$[X]$	matriz modal	in.	m
\vec{X}_r	r -ésima aproximação de uma forma modal		
y	deslocamento de base	in.	m
Y	amplitude de $y(t)$	in.	m
z	deslocamento relativo, $x - y$	in.	m
Z	amplitude de $z(t)$	in.	m
$Z(i\omega)$	impedância mecânica	lb/in.	N/m
α	ângulo, constante		
β	ângulo, constante		
β	constante de amortecimento por histerese		
γ	peso específico	lb/in ³	N/m ³
δ	decremento logarítmico		
$\delta_1, \delta_2, \dots$	deflexões	in.	m
δ_{st}	deflexão estática	in.	m
δ_{ij}	delta de Kronecker		
Δ	determinante		
ΔF	incremento em F	lb	N
Δx	incremento em x	in.	m
Δt	incremento no tempo t	sec	s
ΔW	energia dissipada em um ciclo	in.-lb	J
ε	uma pequena quantidade		
ε	deformação		
ζ	fator de amortecimento		
θ	constante, deslocamento angular		
θ_i	i -ésimo deslocamento angular	rad	rad
θ_0	valor de θ em $t = 0$	rad	rad
$\dot{\theta}_0$	valor de $\dot{\theta}$ em $t = 0$	rad/sec	rad/s
Θ	amplitude de $\theta(t)$	rad	rad
Θ_i	amplitude de $\theta_i(t)$	rad	rad
λ	autovalor = $1/\omega^2$	sec ²	s ²
$[\lambda]$	matriz de transformação		
μ	viscosidade de um fluido	lb-sec/in ²	kg/m·s
μ	coeficiente de atrito		
μ_x	valor esperado de x		
ρ	densidade de massa	lb-sec ² /in ⁴	kg/m ³
η	fator de perda		
σ_x	desvio padrão de x		
σ	tensão	lb/in ²	N/m ²
τ	período de oscilação, tempo	sec	s
τ	tensão de cisalhamento	lb/in ²	N/m ²
ϕ	Ângulo, ângulo de fase	rad	rad
ϕ_i	ângulo de fase no i -ésimo modo	rad	rad
ω	freqüência de oscilação	rad/sec	rad
ω_i	i -ésima freqüência natural	rad/sec	rad/s
ω_n	freqüência natural	rad/sec	rad/s
ω_d	freqüência de vibração amortecida	rad/sec	rad/s

Índices

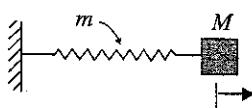
Operações

Símbolo	Significado
cri	valor crítico
eq	valor equivalente
i	i -ésimo valor
L	plano esquerdo
max	valor máximo
n	correspondente à freqüência natural
R	plano direito
0	valor específico ou de referência
t	torcional

Símbolo	Significado
$()$	$\frac{d()}{dt}$
$()$	$\frac{d^2()}{dt^2}$
$\vec{()}$	vetor coluna $()$
$[]$	matriz
$[]^{-1}$	inversa de $[]$
$[]^T$	transposta de $[]$
$\Delta()$	incremento em $()$
$I()$	transformada de Laplace de $()$
$I^{-1}()$	transformada inversa de Laplace de $()$

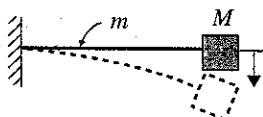
Massas, molas e amortecedores equivalentes

Massas equivalentes



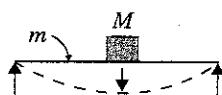
Massa (M) ligada à extremidade da mola de massa m

$$m_{eq} = M + \frac{m}{3}$$



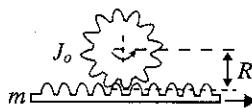
Viga em balanço de massa m que suporta uma massa M em sua extremidade

$$m_{eq} = M + 0.23 m$$



Viga simplesmente apoiada de massa m que suporta uma massa M no meio

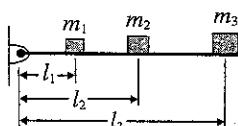
$$m_{eq} = M + 0,5 m$$



Massas translacional e rotacional acopladas

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}$$

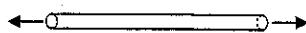
$$J_{eq} = J_0 + mR^2$$



Massas sobre uma barra articulada

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2 m_3$$

Molas equivalentes



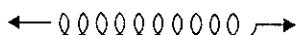
Barra sob carga axial
(l = comprimento, A = área da seção transversal)

$$k_{eq} = \frac{EA}{l}$$



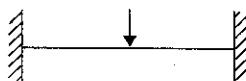
Barra cônica sob carga axial
(D, d = diâmetros das extremidades)

$$k_{eq} = \frac{\pi E D d}{4l}$$



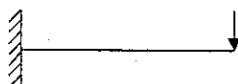
Mola helicoidal sob carga axial
(d = diâmetro do arame, D = diâmetro médio do enrolamento,
 n = número de espiras ativas)

$$k_{eq} = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$



Viga fixa-fixa com carga no meio

$$k_{eq} = \frac{192EI}{l^3}$$



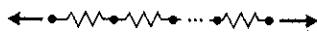
Viga em balanço com carga na extremidade

$$k_{eq} = \frac{3EI}{l^3}$$



Viga simplesmente apoiada com carga no meio

$$k_{eq} = \frac{48EI}{l^3}$$



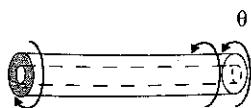
Molas em série

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$



Molas em paralelo

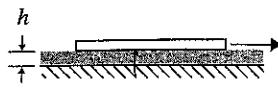
$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$



Eixo oco sob torção
(l = comprimento, D = diâmetro externo, d = diâmetro interno)

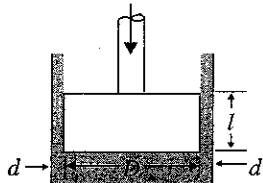
$$k_{eq} = \frac{\pi G}{k} (D^4 - d^4)$$

Amortecedores viscosos equivalentes



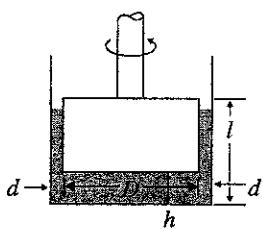
Movimento relativo entre superfícies paralelas
(A = área da placa menor)

$$c_{eq} = \frac{\mu A}{h}$$



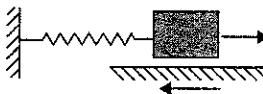
Amortecedor a pistão (movimento axial de um pistão dentro de um cilindro)

$$c_{eq} = \mu \frac{3\pi D^3 l}{d^3} \left(1 + \frac{2d}{D}\right)$$



Amortecedor torcional

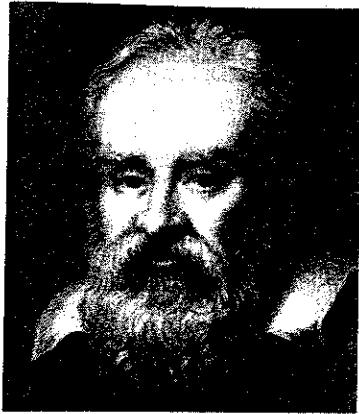
$$c_{eq} = \frac{\pi \mu D^2 (l - h)}{2d} + \frac{\pi \mu D^3}{32h}$$



Atrito seco (amortecimento de Coulomb)
(fN = força de atrito, ω = freqüência, X = amplitude de vibração)

$$c_{eq} = \frac{4fN}{\pi \omega X}$$





Galileu Galilei (Galileo Galilei) (1564–1642), um astrônomo, filósofo e professor de matemática italiano das Universidades de Pisa e Pádua, tornou-se, em 1609, o primeiro homem a apontar um telescópio para o céu. Ele escreveu o primeiro tratado de dinâmica moderna em 1590, e seu trabalho sobre as oscilações de um pêndulo simples e a vibração de cordas são de significância fundamental para a teoria de vibrações. (Fotografia por cortesia de Dirk J. Struik, *A Concise history of mathematics*, (2^a edição revisada), Nova York: Dover Publications, Inc., 1948.)

CAPÍTULO UM

Fundamentos de vibrações

1.1 Observações preliminares

O assunto de vibrações é apresentado aqui de uma maneira relativamente simples. O capítulo começa com uma breve história desse tema e continua com uma apreciação de sua importância. As várias etapas envolvidas na análise de vibrações de um sistema de engenharia são delineadas, e as definições e conceitos essenciais de vibração são apresentados. Em seguida, é apresentado o conceito de análise harmônica, que pode ser utilizada para a análise de movimentos periódicos gerais. Não há nenhuma tentativa de tratamento exaustivo no Capítulo 1; os capítulos subsequentes desenvolverão muitas das idéias com mais detalhes.

1.2 Breve história da vibração

1.2.1 Origens da vibração

As pessoas começaram a se interessar pela vibração quando foram descobertos os primeiros instrumentos musicais, provavelmente apitos ou tambores. Desde então, elas têm aplicado engenhosidade e investigação crítica ao estudo do fenômeno da vibração. Embora certas regras muito definidas fossem observadas em relação à arte da música já na antigüidade, elas dificilmente poderiam ser consideradas uma ciência. A música era muito desenvolvida e muito apreciada pelos chineses, hindus, japoneses e, talvez, pelos egípcios, desde 4000 a.C. [1.1].

Desde aproximadamente 3000 a.C., instrumentos de corda semelhantes a harpas apareciam nas paredes das tumbas egípcias [1.2]. Na realidade, o Museu Britânico (British Museum) exibe uma harpa com uma caixa de ressonância em forma de cabeça de touro encontrada em um painel esculpido em uma tumba real na cidade de Ur, datada de 2600 a.C. É provável que os instrumentos musicais de corda tenham-se originado do arco do caçador, uma arma preferida pelos exércitos do antigo Egito. Um dos instrumentos de corda mais primitivos, denominado *nanga*, datado de 1500 a.C., pode ser visto no British Museum. Nossa sistema musical atual é baseado na antiga civilização grega. Desde a antigüidade, músicos e filósofos pesquisavam as regras e leis da produção do som, usavam-nas para aperfeiçoar instrumentos musicais e transmitiam-nas de geração a geração.

O filósofo e matemático grego Pitágoras (582–507 a.C.) é considerado o primeiro a investigar sons musicais com base científica (Figura 1.1). Entre outras coisas,

Pitágoras realizou experimentos com uma corda vibratória utilizando um instrumento simples denominado monocordio. No monocordio mostrado na Figura 1.2, os cavaletes de madeira denominados 1 e 3 são fixos. O cavalete 2 é móvel, e a tensão na corda é mantida constante pelo peso pendurado em uma de suas extremidades. Pitágoras observou que, se duas cordas iguais de comprimentos diferentes forem sujeitas à mesma tensão, a mais curta emite uma nota mais aguda; além disso, se o comprimento da corda mais curta for a metade do comprimento da mais longa, a mais curta emitirá uma nota uma oitava acima da outra. Todavia, Pitágoras não deixou nenhum registro escrito de seu trabalho (Figura 1.3). Embora o conceito de tonalidade já estivesse desenvolvido na época de Pitágoras, sua relação com a freqüência de vibração do corpo sonoro não era entendida. Na verdade, a relação entre tonalidade e freqüência não foi entendida até a época de Galileu no século XVI d.C.

Por volta de 350 a.C., Aristóteles escreveu tratados sobre música e som, fazendo observações como “a voz é mais doce do que o som de instrumentos” e “o som da flauta é mais doce do que o som da lira”. Em 320 a.C., Aristóxenes, aluno de Aristóteles e também musicista, escreveu uma obra em três volumes intitulada *Elementos de harmonia*. Esses livros talvez sejam os mais antigos disponíveis sobre o assunto da música escritos diretamente pelo autor. Euclides, por volta de 300 a.C., escreveu brevemente sobre música sem qualquer referência à natureza física do som em um tratado chamado *Introdução aos harmônicos*. Nenhuma outra contribuição científica ao som foi feita pelos gregos. Parece que os romanos derivaram seu conhecimento de música completamente dos gregos, com exceção de Vitrúvio, famoso arquiteto romano que, por volta de 20 a.C., escreveu sobre as propriedades acústicas de teatros. Seu tratado, intitulado *De architectura libri decem*, ficou extraviado durante séculos e só foi redescoberto no século XVI d.C. Aparentemente, não houve nenhum desenvolvimento nas teorias do som e da vibração durante cerca de dezesseis séculos após a obra de Vitrúvio.

A China sofreu muitos terremotos na antigüidade. Zhang Heng, que trabalhou como historiador e astrônomo no segundo século, percebeu a necessidade de desenvolver um instrumento para medir terremotos com precisão. Em 132 d.C., ele inventou o primeiro sismógrafo do mundo para medir a intensidade de terremotos [1.3, 1.4]. Esse sismógrafo foi fabricado

em fino bronze fundido, tinha um diâmetro de oito chi (um chi é igual a 0,237 m) e o formato de uma jarra de vinho (Figura 1.4). Dentro da jarra havia um mecanismo que consistia em pêndulos cercados por um grupo de oito mecanismos de alavanca apontados para oito direções. Oito figuras de dragão, cada um com uma bola na boca, estavam posicionados ao redor do sismógrafo. Embaixo de cada dragão havia sapos com a boca aberta. Um forte terremoto em qualquer direção inclinaria o pêndulo nessa mesma direção e acionaria a alavanca na cabeça de dragão. Isso abriria a boca do animal e liberava a bola de bronze, que caía dentro da boca do sapo com um som metálico. Assim, o sismógrafo permitia que o pessoal da monitoração soubesse a hora e a direção em que o terremoto ocorreu.

1.2.2 De Galileu a Rayleigh

Galileu Galilei (1564–1642) é considerado o fundador da ciência experimental moderna. Na verdade, o século XVII d.C. costuma ser considerado o “século do gênio”, visto que os fundamentos da filosofia e da ciência modernas foram lançados durante esse período. Galileu teve a idéia de estudar o comportamento de um pêndulo simples observando os movimentos pendulares de uma lâmpada em uma igreja de Pisa. Certo dia, entediado durante um sermão, Galileu estava olhando para o teto da igreja. Uma lâmpada que balançava chamou sua atenção. Ele começou a medir o período dos movimentos pendulares da lâmpada com sua própria pulsação e, para seu espanto, constatou que o período era independente da amplitude das oscilações. Isso o levou a realizar mais experimentos com o pêndulo simples. Em *Discourses concerning two new sciences*, publicado em 1638, Galileu discutiu corpos vibratórios. Ele descreveu a dependência entre a freqüência e vibração e o comprimento de um pêndulo simples, juntamente com o fenômeno das vibrações solidárias (ressonância). Os escritos de Galileu também indicam que ele tinha um claro entendimento da relação entre freqüência, comprimento, tensão e densidade de uma corda vibratória esticada [1.5]. Todavia, a primeira explicação correta publicada sobre a vibração de cordas foi dada pelo matemático e teólogo francês Marin Mersenne (1588–1648) em seu livro *Harmonicorum liber*, publicado em 1636. Mersenne também mediou, pela primeira vez, a freqüência de vibração de uma corda longa e, por essa medição, previu a freqüência de uma corda mais curta que tivesse a mesma densidade e ten-



FIGURA 1.1 Pitágoras. (Reproduzido com a permissão de L. E. Navia, *Pythagoras: An Annotated Bibliography*, Garland Publishing, Inc., Nova York, 1990.)

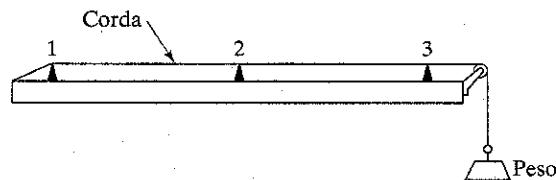


FIGURA 1.2 Monocordio.

são. Mersenne é considerado por muitos o pai da acústica. Freqüentemente, atribui-se a ele a descoberta das leis das cordas vibratórias porque ele publicou os resultados em 1636, dois anos antes de Galileu. Contudo, o crédito pertence a Galileu, visto que as leis foram escritas muitos anos antes, mas sua publicação foi proibida por ordens do Inquisidor de Roma até 1638.

O trabalho de Galileu inspirou a fundação da Academia del Cemento em Florença em 1657; logo em seguida, foram instituídas a Royal Society of London em 1662 e a Paris Academie des Sciences em 1666. Mais tarde, Robert Hooke (1635–1703) também fez experimentos para determinar a relação entre a tonalidade e a freqüência de vibração de uma corda. Contudo, foi Joseph Sauveur (1653–1716) quem investigou esses experimentos minuciosamente e cunhou a palavra “acústica” para a ciência do som [1.6]. Sauveur, na França, e John Wallis (1616–1703), na Inglaterra, observaram, independentemente, o fenômeno de formas modais e constataram que certos pontos de uma corda esticada em vibração permanecem sem movimento algum e outros pontos intermediários apresentam um movimento violento. Sauveur denominou os primeiros *nós*, e os outros, *ventres*. Foi constatado que as freqüências de tais vibrações eram mais altas em comparação com a freqüência associada à vibração simples da corda sem nenhum nó. De fato, constatou-se que as freqüências mais altas eram múltiplos inteiros da freqüência de vibração simples, e Sauveur deu o nome harmônicas às freqüências mais altas e freqüência fundamental à freqüência de vibração simples. Ele também constatou que uma corda pode vibrar com várias de suas harmônicas presentes ao mesmo tempo. Além disso, observou o fenômeno de batimentos quando dois tubos de órgão de tonalidades ligeiramente diferentes soavam ao mesmo tempo. Em 1700, Sauveur calculou, por um método um pouco duíbico, a freqüência de um corda esticada pela medida da curvatura de seu ponto médio.

Sir Isaac Newton (1642–1727) publicou sua obra monumental, *Philosophiae naturalis principia mathematica* em 1686, na qual descreveu a lei da gravitação universal, bem como as três leis do movimento e outras descobertas. A segunda lei do movimento de Newton é usada rotineiramente em livros modernos sobre vibrações para derivar as equações de movimento de um corpo em vibração. A solução teórica (dinâmica) do problema da corda vibratória foi descoberta pelo matemático inglês Brook Taylor (1685–1731) em 1713, que também apresentou o famoso teorema de Taylor para séries infinitas. A freqüência natural de vibração obtida pela equação de movimento derivada por Taylor concordava com os valores experimentais observados por Galileu e Mersenne. O procedimento adotado por Taylor foi aperfeiçoado com a introdução de derivadas parciais nas equações de movimento

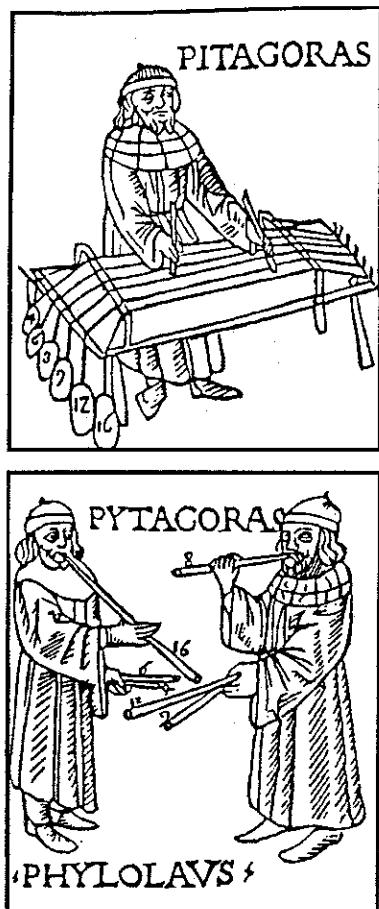


FIGURA 1.3 Pitágoras como musicista. (Reproduzido com a permissão de D. E. Smith, *History of Mathematics*, v. I, Nova York: Dover Publications, Inc., 1958.)

por Daniel Bernoulli (1700–1782), Jean D'Alembert (1717–1783) e Leonard Euler (1707–1783).

A possibilidade de uma corda vibrar com várias de suas harmônicas presentes ao mesmo tempo (sendo o deslocamento de qualquer ponto em qualquer instante igual à soma algébrica dos deslocamentos para cada harmônica) foi provada por meio das equações dinâmicas de Daniel em suas memórias publicadas pela Berlin Academy (Academia de Berlim) em 1755 [1.7]. Essa característica foi denominada princípio da coexistência de pequenas oscilações que, na terminologia moderna, é o princípio da superposição. Esse princípio mostrou ser o mais valioso no desenvolvimento da teoria de vibrações e levou à possibilidade de expressar qualquer função arbitrária (isto é, qualquer forma inicial da corda) usando uma série infinita de senos e co-senos. Em razão dessa implicação, D'Alembert e Euler duvidaram da validade desse princípio. Contudo, a validade desse tipo de expansão foi provada por J. B. J. Fourier (1768–1830) em sua obra *Analytical theory of heat* (Teoria analítica do calor) em 1822.

A solução analítica da corda vibratória foi apresentada por Joseph Lagrange (1736–1813) em suas memórias publicadas pela Academia de Turim (Turin Academy) em 1759. Em seu estudo, Lagrange admitiu que a corda era composta por um número finito de partículas de massas idênticas espalhadas igualmente e estabeleceu a existência de um número



FIGURA 1.4 O primeiro sismógrafo do mundo, inventado na China em 132 d.C. (Reproduzido com a permissão de R. Taton [Editor], *History of science*, Nova York: Basic Books, Inc., 1957.)

de freqüências independentes igual ao número de partículas de massa. Considerando-se o número de partículas infinito, constatou-se que as freqüências resultantes eram as mesmas freqüências harmônicas da corda estirada. O método para estabelecer a equação diferencial do movimento de uma corda (denominada equação de onda) apresentado na maioria dos livros modernos sobre a teoria de vibração foi desenvolvida primeiro por D'Alembert em suas memórias publicadas pela Academia de Berlim (Berlin Academy) em 1750. As vibração de vigas delgadas apoiadas e engastadas de várias maneiras foram estudadas pela primeira vez por Euler em 1744 e Daniel Bernoulli em 1751. Essa abordagem ficou conhecida como a teoria de Euler-Bernoulli ou da viga delgada.

Charles Coulomb realizou estudos teóricos e experimentais em 1784 sobre as oscilações torcionais de um cilindro de metal suspenso por um arame (Figura 1.5). Admitindo que o torque resistente do arame torcido é proporcional ao ângulo de torção, ele derivou a equação de movimento para a vibração torcional do cilindro suspenso. Integrando a equação de movimento, ele constatou que o período de oscilação é independente do ângulo de torção.

Há uma história interessante relacionada com o desenvolvimento da teoria da vibração de placas [1.8]. Em 1802, o cientista alemão E. F. F. Chladni (1756–1824) desenvolveu um método de espalhar areia sobre uma placa vibratória para determinar suas formas modais e observou a beleza e a complexidade das formas modais das placas vibratórias. Em 1809, a Academia Francesa (French Academy) convidou Chladni a dar uma demonstração de seus experimentos. Napoleão Bonaparte, que foi à reunião, ficou muito impressionado e doou a quantia de três mil francos à Academia como prêmio para a primeira pessoa que produzisse uma teoria matemática satisfatória para a vibração de placas. Perto da data de encerramento do concurso, em outubro de 1811, havia somente uma candidata, Sophie Germain. Porém Lagrange, que era um dos juízes, percebeu um erro na derivação da equação diferencial de movimento de Sophie. A academia abriu novamente o concurso com uma nova data de encerramento em outubro de 1813. Sophie Germain candidatou-se novamente e apresentou a forma correta da equação diferencial. Todavia, a Academia não lhe concedeu o prêmio porque os juízes queriam uma justificativa física para as premissas que ela adotou na derivação. O concurso foi aberto mais uma vez. Em sua terceira tentativa, Sophie Germain finalmente ganhou o prêmio, em

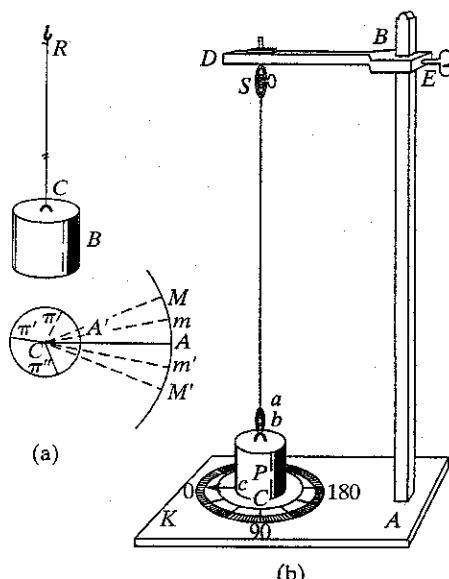


FIGURA 1.5 Dispositivo de Coulomb para testes de vibração torcional. (Reproduzido com a permissão de S. P. Timoshenko, *History of strength of materials* [História da resistência dos materiais], Nova York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.)

1815, embora os juízes não estivessem totalmente satisfeitos com sua teoria. Na verdade, mais tarde foi constatado que a equação diferencial de Sophie estava correta, mas as condições de contorno estavam erradas. As condições de contorno corretas para a vibração de placas foram estabelecidas em 1850 por G. R. Kirchhoff (1824–1887).

Entrementes, o problema da vibração de uma membrana retangular flexível, que é importante para o entendimento do som emitido por tambores, foi resolvido pela primeira vez por Simeon Poisson (1781–1840). A vibração de uma membrana circular foi estudada por R. F. A. Clebsch (1833–1872) em 1862. Depois disso, foram realizados estudos de vibração em vários sistemas mecânicos e estruturais usuais. Em 1877, Lord Baron Rayleigh publicou seu livro sobre a teoria do som [1.9]; esse livro é considerado um clássico no assunto do som e da vibração até hoje. Notável entre as muitas contribuições de Rayleigh é o método para determinar a freqüência fundamental de vibração de um sistema conservativo fazendo uso do princípio da conservação de energia — agora conhecido como método de Rayleigh. Esse método mostrou ser uma técnica útil para a solução de difíceis problemas de vibração. Uma extensão do método que pode ser usado para determinar várias freqüências naturais é conhecida como o método de Rayleigh-Ritz.

1.2.3 Contribuições recentes

Em 1902, Frahm investigou a importância do estudo da vibração torcional no projeto de eixos de hélices de navios a vapor. O absorvedor de vibração dinâmica, que envolve a adição de um sistema massa-mola secundário para eliminar as vibrações de um sistema principal, foi também proposto por Frahm em 1909. Entre os contribuintes modernos para a teoria de vibrações são notáveis os nomes de Stodola, de Laval, Timoshenko e Mindlin. Aurel Stodola (1859–1943) contribuiu para o estudo da vibração de vigas, placas e membranas. Ele desenvolveu um método para analisar vigas vibratórias que também é aplicável a pás de turbinas. Observando que todo tipo importante de motor de acionamento dá origem

a problemas de vibração, C. G. P. de Laval (1845–1913) apresentou uma solução prática para o problema da vibração de um disco rotativo desbalanceado. Após notar falhas em eixos de aço em turbinas de alta velocidade, ele usou uma vara de pescar de bambu como eixo para montar o rotor e observou que esse sistema não somente eliminava a vibração do rotor desbalanceado, como também suportava altas velocidades [1.10].

Stephen Timoshenko (1878–1972) apresentou uma teoria aperfeiçoada de vibração de vigas que ficou conhecida como a teoria de Timoshenko ou de viga grossa, que considera os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento. Uma teoria semelhante foi apresentada por R. D. Mindlin para a análise de vibração de placas grossas que inclui os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento.

Há muito foi reconhecido que muitos problemas básicos de mecânica, incluindo os de vibrações, são não lineares. Embora os tratamentos lineares comumente adotados sejam bastante satisfatórios para a maioria das finalidades, não são adequados em todos os casos. Em sistemas não lineares podem ocorrer fenômenos que são teoricamente impossíveis em sistemas lineares. A teoria matemática de vibrações não lineares começou a desenvolver-se com o trabalho de Poincaré e Lyapunov no final do século XIX d.C. Poincaré desenvolveu o método da perturbação em 1892 em conexão com a solução aproximada de problemas de mecânica celeste não lineares. Lyapunov lançou as bases da teoria moderna de estabilidade em 1892, que é aplicável a todos os tipos de sistemas dinâmicos. Após 1920, os estudos realizados por Duffing e van der Pol resultaram nas primeiras soluções definidas da teoria de vibrações não lineares e chamaram a atenção para sua importância na engenharia. Nos últimos 30 anos, autores como Minorsky e Stoker empenharam-se em coletar e reunir em monografias os principais resultados referentes às vibrações não lineares. Grande parte das aplicações práticas de vibração não linear envolvem a utilização de algum tipo de abordagem da teoria da perturbação. Nayfeh [1.11] fez um levantamento de métodos modernos da teoria da perturbação.

Características aleatórias estão presentes em diversos fenômenos como terremotos, ventos, transporte de mercadorias em veículos sobre rodas e ruído de foguetes e motores a jato. Tornou-se necessário elaborar conceitos e métodos de análise de vibração para esses efeitos aleatórios. Embora Einstein considerasse o movimento browniano um tipo particular de vibração aleatória, já em 1905, nenhuma aplicação foi investigada até 1930. A introdução da função correlação por Taylor em 1920 e da densidade espectral por Wiener e Khinchin no início da década de 1930 abriram novas perspectivas para o progresso da teoria de vibrações aleatórias. Artigos publicados por Lin e Rice entre 1943 e 1945 pavimentaram o caminho para a aplicação de vibrações aleatórias a problemas práticos de engenharia. As monografias de Crandall e Mark e Robson sistematizaram o conhecimento existente da teoria de vibrações aleatórias [1.12, 1.13].

Até 30 anos atrás, estudos de vibrações, mesmo os que tratavam de complexos sistemas de engenharia, eram realizados com a utilização de modelos grosseiros, com apenas alguns graus de liberdade. Todavia, o advento de computadores

digitais de alta velocidade na década de 1950 possibilitou o tratamento de sistemas de moderada complexidade e a geração de soluções aproximadas em forma semidefinida recorrendo a métodos clássicos de solução, porém com a utilização de avaliação numérica de certos termos que não podem ser expressos em forma fechada. O desenvolvimento simultâneo do método do elemento finito habilitou os engenheiros a usar computadores digitais para realizar análises numericamente detalhadas de vibrações de sistemas mecânicos, veiculares e estruturais complexos que apresentam milhares de graus de liberdade [1.14]. Embora o método do elemento finito tenha recebido esse nome apenas recentemente, o conceito já era usado havia vários séculos. Por exemplo, matemáticos da antigüidade determinaram a circunferência de um círculo aproximando-a a um polígono no qual cada lado, conforme a notação moderna, pode ser denominado um elemento finito. O método do elemento finito que conhecemos hoje foi apresentado por Turner, Clough, Martin e Topp em conexão com a análise de estruturas de aeronaves [1.15]. A Figura 1.6 mostra a idealização do elemento finito da carroceria de um ônibus. [1.16].

1.3 Importância do estudo da vibração

A maioria das atividades humanas envolve vibração de uma forma ou de outra. Por exemplo, ouvimos porque nossos tímpanos vibram, e vemos porque as ondas de luz sofrem vibração. A respiração está associada à vibração dos pulmões, e andar envolve movimento oscilatório (periódico) de pernas e mãos. Falamos devido ao movimento oscilatório da laringe (e da língua) [1.17]. Os primeiros estudiosos da área de vibração concentraram seus esforços no entendimento dos fenômenos naturais e no desenvolvimento de teorias matemáticas para descrever a vibração de sistemas físicos. Mais recentemente, muitas investigações foram motivadas pelas aplicações da vibração na área da engenharia, como projeto de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controle.

A maioria dos motores de acionamento tem problemas de vibração em razão do desbalanceamento inerente aos motores. O desequilíbrio pode dever-se a falha de projeto ou manutenção ruim. O desbalanceamento de motores a diesel, por exemplo, pode causar ondas terrestres de potência suficiente para causar incomodo em áreas urbanas. As rodas de algumas locomotivas podem afastar-se mais de um centímetro do trilho em altas velocidades devido ao desbalanceamento. Vibrações em turbinas causam espétaculares falhas mecânicas. Os engenheiros ainda não conseguiram evitar as falhas que resultam das vibrações das pás e do rotor das turbinas. Naturalmente, as estruturas projetadas para apoiar máquinas centrífugas pesadas como motores e turbinas, ou máquinas alternativas como motores a vapor e a gás e bombas recíprocas, também estão sujeitas a vibrações. Em todas essas situações, a estrutura ou componente da máquina sujeito à vibração pode falhar devido à fadiga do material resultante da variação cíclica da tensão induzida. Além do mais, a vibração causa desgaste mais rápido de peças de máquina como rolamentos e engrenagens e também gera ruído excessivo. Em máquinas, a vibração pode afrouxar ou soltar elementos de fixação como porcas. Em processos de corte de metais, a vibração pode causar trepidação, o que resulta em mau acabamento superficial.

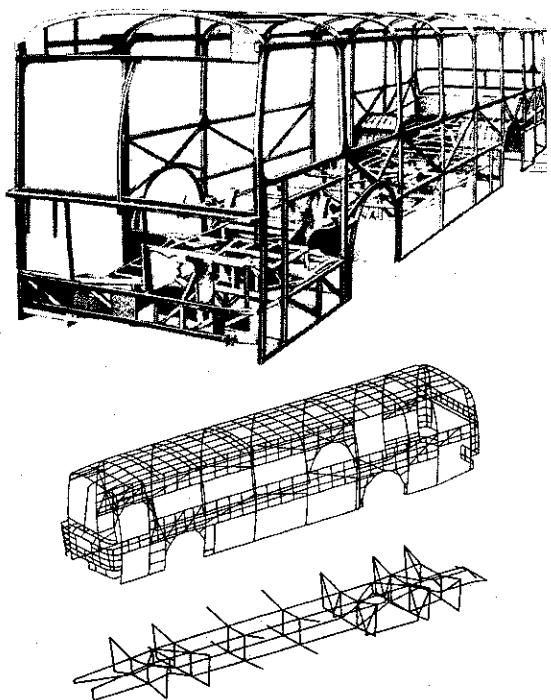


FIGURA 1.6 Idealização de elemento finito da carroceria de um ônibus [1.16]. (Reproduzido com a permissão de © 1974 Society of Automotive Engineers, Inc.)

Sempre que a freqüência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincidir com a freqüência da excitação externa, ocorre um fenômeno conhecido como *ressonância*, que resulta em deflexões excessivas e falha. A literatura está repleta de relatos de falhas de sistemas causados por ressonância e vibração excessiva de componentes e sistemas (Figura 1.7). Devido ao efeito devastador que as vibrações podem causar às máquinas e estruturas, o teste de vibrações [1.18] tornou-se um procedimento-padrão no projeto e desenvolvimento da maioria dos sistemas de engenharia. (Figura 1.8).

Em muitos sistemas de engenharia, um ser humano age como parte integral do sistema. A transmissão de vibração a seres humanos resulta em desconforto e perda de eficiência. A vibração e o ruído gerado por motores causam aborecimento às pessoas e, às vezes, danos à propriedade (Figura 1.9). A vibração de painéis de instrumentos pode provocar mau funcionamento ou dificultar a leitura dos medidores [1.19]. Assim, uma das finalidades importantes de estudar vibração é reduzi-la por meio do projeto adequado de máquinas e de seus suportes. Por isso, o engenheiro mecânico projeta o motor ou a máquina de modo a minimizar o desbalanceamento, ao passo que o engenheiro de estruturas tenta projetar a estrutura de suporte de modo a assegurar que o efeito do desbalanceamento não seja danoso [1.20].

Apesar de seus efeitos danosos, a vibração pode ser utilizada a favor em várias aplicações industriais e de consumo. Na verdade, as aplicações de equipamentos vibratórios aumentaram consideravelmente nos últimos anos [1.21]. Por exemplo, a vibração entra em ação em esteiras transportadoras, tremoras, peneiras, compactadores, máquinas de lavar, escovas de dentes elétricas, brocas odontológicas, relógios e unidades de massagem elétrica, todos equipamentos vibratórios. A vibração também é usada em bate-estacas, testes

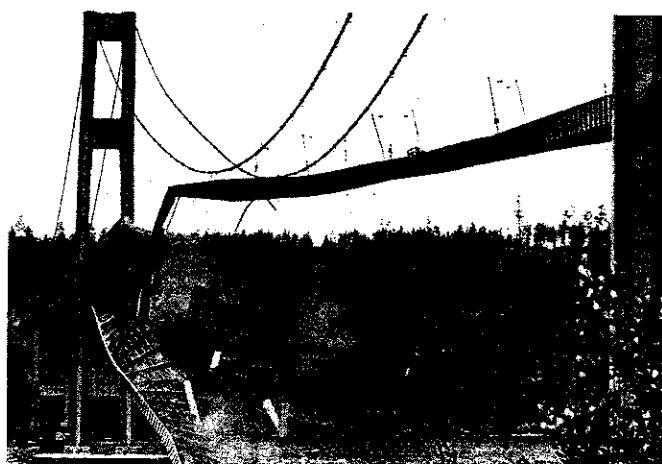


FIGURA 1.7 Ponte Tacoma Narrows durante vibração induzida pelo vento. A ponte foi inaugurada em 1º de julho de 1940 e caiu em 7 de novembro de 1940. (Foto Farquharson, Historical Photography Collection, University of Washington Libraries.)

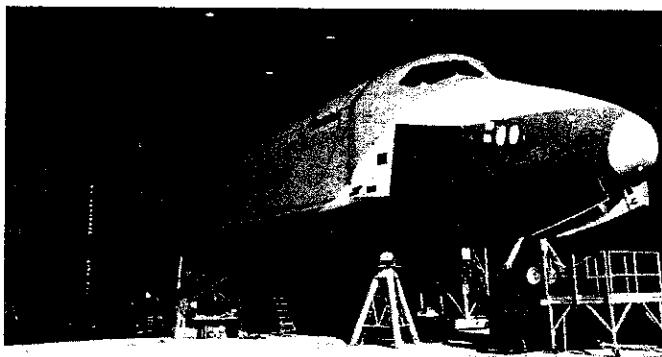


FIGURA 1.8 Teste de vibração do ônibus espacial *Enterprise*. (Cortesia da NASA.)

vibratórios de materiais, processos vibratórios de acabamento e circuitos eletrônicos na filtragem de freqüências indesejadas (Figura 1.10). Constatou-se que a vibração melhora a eficiência de certos processos de usinagem, fundição, forjamento e soldagem. Ela é empregada na simulação de terremotos em pesquisas geológicas e também para realizar estudos no projeto de reatores nucleares.

1.4 Conceitos básicos de vibração

1.4.1 Vibração

Qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é denominado *vibração* ou *oscilação*. O balançar de um pêndulo e o movimento de uma corda dedilhada são exemplos típicos de vibração. A teoria de vibração trata do estudo de movimentos oscilatórios de corpos e as forças associadas a eles.

1.4.2 Partes elementares de sistemas vibratórios

Em geral, um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor).

A vibração de um sistema envolve a transferência alternada de sua energia potencial para energia cinética e de energia

cinética para energia potencial. Se o sistema for amortecido, certa quantidade de energia é dissipada em cada ciclo de vibração e deve ser substituída por uma fonte externa, se for preciso manter um regime permanente de vibração.

Como exemplo, considere a vibração do pêndulo simples mostrado na Figura 1.11. Digamos que o peso do pêndulo de massa m seja liberado após a aplicação de um deslocamento angular θ . Na posição 1, a velocidade do peso é zero, e, por consequência, sua energia cinética, é zero. Porém, ele tem uma energia potencial de magnitude $mgl(1 - \cos \theta)$ em relação à posição 2 no plano de referência. Visto que a força gravitacional mg induz um torque $mgl \sin \theta$ ao redor do ponto O , o peso começa a oscilar para a esquerda partindo da posição 1. Isso lhe dá certa aceleração angular na direção horária e, no instante em que ele alcança a posição 2, toda a sua energia potencial será convertida em energia cinética. Por consequência, o peso não parará na posição 2, mas continuará a oscilar até a posição 3. Contudo, ao passar pela posição média 2, um torque no sentido anti-horário começa a agir sobre o peso devido à gravidade e provoca uma desaceleração. A velocidade do peso reduz-se a zero na posição extrema esquerda. A essa altura, toda a energia cinética do peso será convertida em energia potencial. Mais uma vez, devido ao torque da gravidade, a massa continua a adquirir uma velocidade no sentido anti-horário. Por consequência, ela inicia a oscilação no sentido contrário com velocidade cada vez maior e passa pela posição média novamente. Esse processo continua a repetir-se, e o pêndulo terá movimento oscilatório. Contudo, na prática, a magnitude de oscilação (θ) diminui gradativamente, e à certa altura o pêndulo pára devido à resistência (amortecimento) oferecida pelo meio circundante (ar). Isso significa que certa quantidade de energia é dissipada em cada ciclo de vibração devido ao amortecimento pelo ar.

1.4.3 Graus de liberdade

O número mínimo de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente as posições de todas as partes de um sistema a qualquer instante define o grau de liberdade do sistema. O pêndulo simples mostrado na Figura 1.11, bem como cada um dos sistemas mostrados na Figura 1.12 representa um sistema com apenas um grau de liberdade. Por exemplo, o movimento do pêndulo simples (Figura 1.11) pode ser definido em termos do ângulo θ ou em termos das coordenadas cartesianas x e y . Se as coordenadas x e y forem usadas para descrever o movimento, deve-se reconhecer que essas coordenadas não são independentes. Elas estão relacionadas uma com a outra pela relação $x^2 + y^2 = l^2$, onde l é o comprimento constante do pêndulo. Assim, qualquer uma das coordenadas pode descrever o movimento do pêndulo. Nesse exemplo, constatamos que a escolha de θ como a coordenada independente será mais conveniente do que a escolha de x ou y . Para o cursor mostrado na Figura 1.12(a), a coordenada angular θ ou a coordenada x podem ser usadas para descrever o movimento. Na Figura 1.12(b), a coordenada linear x pode ser utilizada para especificar o movimento. No caso do sistema torcional (barra longa com um disco pesado na extremidade) mostrado na Figura 1.12(c), a coordenada angular θ pode ser empregada para descrever o movimento.



FIGURA 1.9 Aborrecimento causado por vibração e ruído. (Reproduzido com a permissão de *Sound and vibration*, fevereiro de 1997, Acoustical Publications, Inc.)

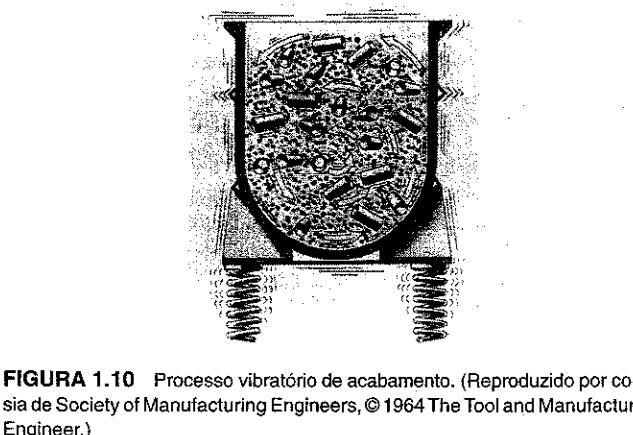
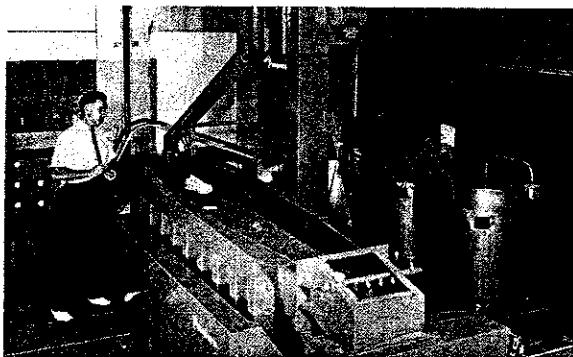


FIGURA 1.10 Processo vibratório de acabamento. (Reproduzido por cortesia de Society of Manufacturing Engineers, © 1964 The Tool and Manufacturing Engineer.)

Alguns exemplos de sistemas de dois e três graus de liberdade são mostrados nas figuras 1.13 e 1.14, respectivamente. A Figura 1.13(a) mostra um sistema de duas massas e duas molas que é descrito pelas duas coordenadas lineares x_1 e x_2 . A Figura 1.13(b) denota um sistema de dois rotores cujo movimento pode ser especificado em termos de θ_1 e θ_2 . O movimento do sistema

mostrado na Figura 1.13(c) pode ser descrito completamente por X e θ ou por x , y e X . No último caso, x e y são limitadas porque $x^2 + y^2 = l^2$, onde l é uma constante.

Nos sistemas mostrados nas figuras 1.14(a) e 1.14(c), as coordenadas x_i ($i = 1, 2, 3$) e θ_i ($i = 1, 2, 3$) podem ser usadas, respectivamente, para descrever o movimento. No caso do sistema mostrado na Figura 1.14(b), θ_i ($i = 1, 2, 3$) especifica as posições das massas m_i ($i = 1, 2, 3$). Um método alternativo para descrever esse sistema é em termos de x_i e y_i ($i = 1, 2, 3$); porém, nesse caso, as restrições $x_i^2 + y_i^2 = l_i^2$ ($i = 1, 2, 3$) têm de ser consideradas.

As coordenadas necessárias para descrever o movimento de um sistema constituem um conjunto de *coordenadas generalizadas*. As coordenadas generalizadas normalmente são denotadas por q_1, q_2, \dots e podem representar coordenadas cartesianas ou não cartesianas.

1.4.4 Sistemas discretos e contínuos

Uma grande quantidade de sistemas práticos pode ser descrita usando um número finito de graus de liberdade, como os sistemas simples mostrados nas figuras 1.11 a 1.14. Alguns sistemas, em especial os que envolvem elementos

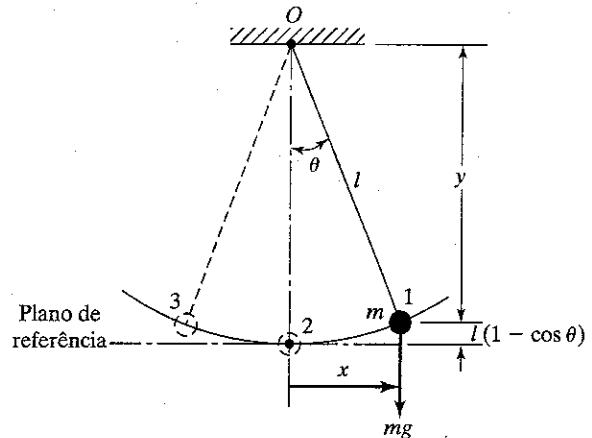


FIGURA 1.11 Um pêndulo simples.

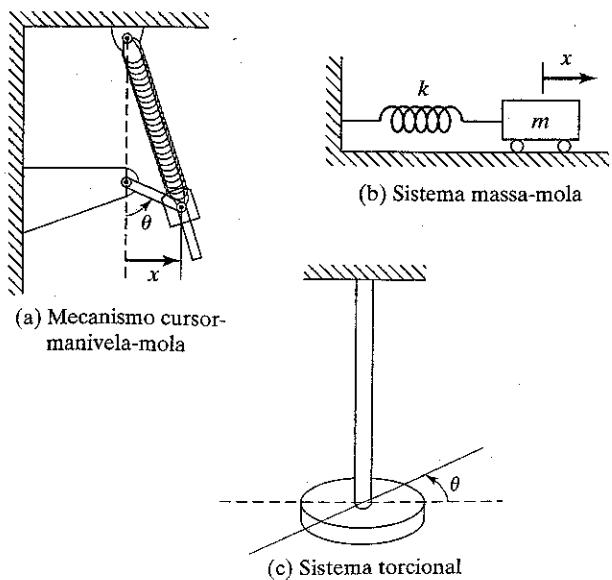


FIGURA 1.12 Sistemas com apenas um grau de liberdade.

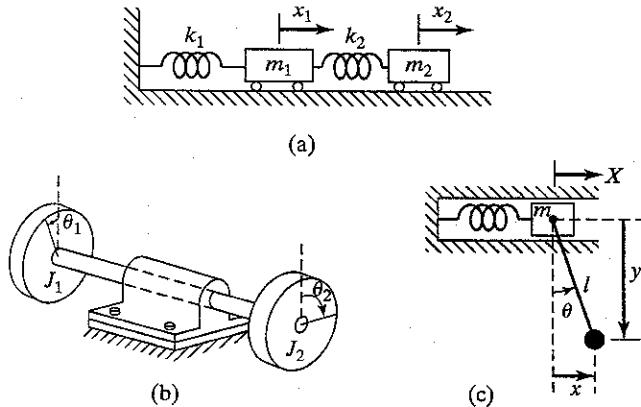


FIGURA 1.13 Sistemas com dois graus de liberdade.

elásticos contínuos, têm um número infinito de graus de liberdade. Como exemplo simples, considere a viga em balanço mostrada na Figura 1.15. Visto que a viga tem um número infinito de pontos de massa, precisamos de um número infinito de coordenadas para especificar sua configuração defletida. O número infinito de coordenadas define sua curva de deflexão elástica. Assim, a viga em balanço tem um número infinito de graus de liberdade.

Grande parte dos sistemas estruturais e de máquinas tem elementos deformáveis (elásticos) e, como consequência, um número infinito de graus de liberdade.

Sistemas com um número finito de graus de liberdade são denominados sistemas *discretos* ou de *parâmetros concentrados*, e os que têm um número infinito de graus de liberdade são denominados sistemas *contínuos* ou *distribuídos*.

Na maioria das vezes, sistemas contínuos são aproximados como sistemas discretos, e as soluções são obtidas de uma maneira mais simples. Embora tratar um sistema como contínuo dê resultados exatos, os métodos analíticos disponíveis para lidar com sistemas contínuos estão limitados a uma pequena seleção de problemas como vigas uniformes, hastes delgadas e placas finas. Por consequência, grande parte dos sistemas práticos são estudados tratando-os como massas,

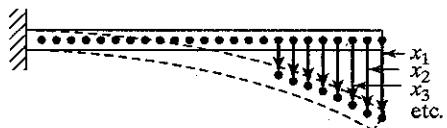


FIGURA 1.15 Uma viga em balanço (um sistema com um número infinito de graus de liberdade).

molas e amortecedores finitos concentrados. Em geral, obtém-se resultados mais precisos aumentando-se o número de massas, molas e amortecedores — isto é, aumentando o número de graus de liberdade.

1.5 Classificação de vibrações

Vibrações podem ser classificadas de várias maneiras. Apresentamos a seguir algumas das classificações importantes.

1.5.1 Vibração livre e vibração forçada

Vibração livre. Se um sistema, após uma perturbação inicial, continuar a vibrar por conta própria, a vibração resultante é conhecida como *vibração livre*. Nenhuma força externa age sobre o sistema. A oscilação de um pêndulo simples é um exemplo de vibração livre.

Vibração forçada. Se um sistema estiver sujeito a uma força externa (muitas vezes, uma força repetitiva), a vibração resultante é conhecida como *vibração forçada*. A oscilação que surge em máquinas, como motores a diesel, é um exemplo de vibração forçada.

Se a frequência da força externa coincidir com uma das frequências naturais do sistema, ocorre uma condição conhecida como *ressonância*, e o sistema sofre oscilações perigosamente grandes. Falhas de estruturas como edifícios, pontes, turbinas e asas de aviões foram associadas à ocorrência de ressonância.

1.5.2 Vibração não amortecida e amortecida

Se nenhuma energia for perdida ou dissipada por atrito ou outra resistência durante a oscilação, a vibração é conhecida como *vibração não amortecida*. Todavia, se qualquer energia for perdida dessa maneira, ela é denominada *vibração*

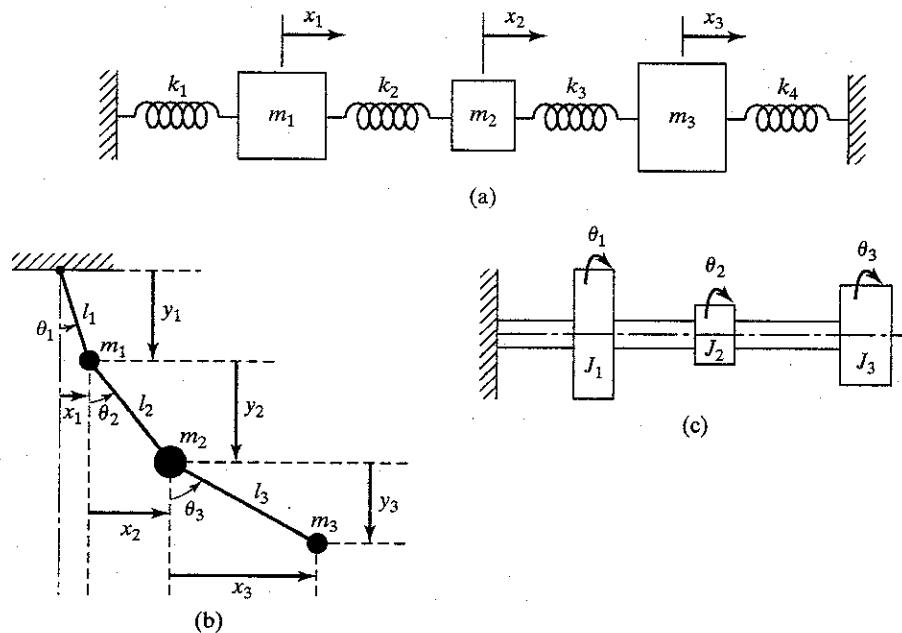


FIGURA 1.14 Sistemas com três graus de liberdade.

amortecida. Em muitos sistemas físicos, a quantidade de amortecimento é tão pequena que pode ser desprezada para a maioria das finalidades de engenharia. Contudo, considerar o amortecimento torna-se extremamente importante na análise de sistema vibratórios próximos à ressonância.

1.5.3 Vibração linear e não linear

Se todos os componentes básicos de um sistema vibratório — a mola, a massa e o amortecedor — comportarem-se linearmente, a vibração resultante é conhecida como *vibração linear*. Contudo, se qualquer dos elementos se comportar não linearmente, a vibração é denominada *vibração não linear*. As equações diferenciais que comandam o comportamento de sistemas vibratórios lineares e não lineares são lineares e não lineares, respectivamente. Se a vibração for linear, o princípio da superposição é válido e as técnicas matemáticas de análise são bem desenvolvidas. Para vibração não linear, o princípio da superposição não é válido e as técnicas de análise são menos bem conhecidas. Uma vez que todos os sistemas vibratórios tendem a comportar-se não linearmente com o aumento da amplitude de oscilação, é bom conhecer vibrações não lineares ao lidar com sistemas vibratórios na prática.

1.5.4 Vibração determinística e aleatória

Se o valor ou magnitude da excitação (força ou movimento) que está agindo sobre um sistema vibratório for conhecido a qualquer dado instante, a excitação é denominada *determinística*. A vibração resultante é conhecida como *vibração determinística*.

Em alguns casos, a excitação é *não determinística* ou *aleatória*; o valor da excitação em dado instante não pode ser previsto. Nesses casos, um grande número de registros da excitação pode exibir alguma regularidade estatística. É possível estimar médias como os valores médios e valores médios ao quadrado da excitação. Exemplos de excitações aleatórias são a velocidade do vento, a aspereza de uma estrada e o movimento do solo durante terremotos. Se a excitação for aleatória, a vibração resultante é denominada *vibração aleatória*. No caso de vibração aleatória, a resposta vibratória do sistema também é aleatória; só pode ser descrita em termos de quantidades estatísticas. A Figura 1.16 mostra exemplos de excitações determinísticas e aleatórias.

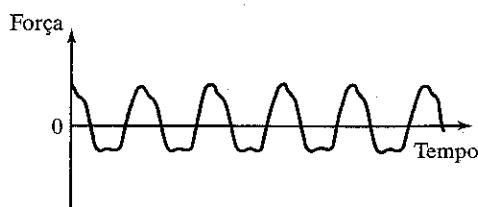
1.6 Procedimento de análise de vibrações

Um sistema vibratório é um sistema dinâmico para o qual as variáveis como as excitações (entradas) e respostas (saídas) são dependentes do tempo. Em geral, a resposta de um sistema vibratório depende das condições iniciais, bem como das excitações externas. A maioria dos sistemas vibratórios encontrados na prática são muito complexos, e é impossível considerar todos

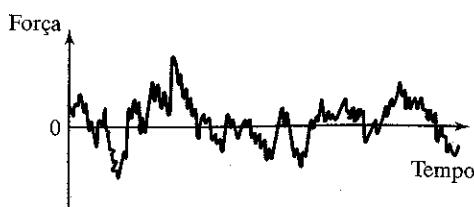
os detalhes para uma análise matemática. Somente as características mais importantes são consideradas na análise para prever o comportamento do sistema sob condições de entradas especificadas. Muitas vezes, o comportamento global do sistema pode ser determinado considerando até mesmo um modelo simples do sistema físico complexo. Assim, a análise de um sistema vibratório normalmente envolve modelagem matemática, obtenção de equações governantes, solução das equações e interpretação dos resultados.

Etapa 1: Modelagem matemática. A finalidade da modelagem matemática é representar todos os aspectos importantes do sistema com o propósito de obter as equações matemáticas (ou analíticas) que governam o comportamento do sistema. O modelo matemático deve incluir detalhes suficientes para conseguir descrever o sistema em termos de equações sem torná-lo muito complexo. O modelo matemático pode ser linear ou não linear, dependendo do comportamento dos componentes do sistema. Modelos lineares permitem soluções rápidas e são simples de manipular; contudo, modelos não lineares às vezes revelam certas características do sistema que não podem ser previstas usando modelos lineares. Assim, é preciso ter uma boa capacidade de discernimento em termos de engenharia para propor um modelo matemático adequado de um sistema vibratório.

Às vezes, o modelo matemático é aperfeiçoado gradativamente para obter resultados mais precisos. Nessa abordagem, em primeiro lugar, é usado um modelo muito grosseiro ou elementar para ter-se uma idéia rápida do comportamento global de sistema. Na seqüência, o modelo é refinado com a inclusão de mais componentes e/ou detalhes de modo que o comportamento do sistema possa ser observado mais de perto. Para ilustrar o procedimento de refinamento usado em modelagem matemática, considere o martelo de forjar mostrado na Figura 1.17(a). O martelo de forjar consiste em um suporte, um martelo de queda conhecido como pilão (ou martelo-pilão), uma bigorna e um bloco de base. A bigorna é um bloco maciço de aço no qual o material é forjado até a forma desejada pelos golpes repetidos do martelo-pilão. A bigorna normalmente é montada sobre um coxim elástico para reduzir a transmissão de vibração para o bloco de base e suporte [1.22]. Para uma primeira aproximação, suporte, bigorna, coxim, bloco de base e solo são modelados como um sistema com um único grau de liberdade como mostra a Figura 1.17(b). Para refinar a aproximação, os pesos do suporte e da bigorna e o peso do bloco de base são representados separadamente por um modelo com dois graus de liberdade, como mostra a Figura 1.17(c). Pode-se refinar ainda mais o modelo considerando impactos excêntricos do martelo-pilão que provocam movimentos verticais e de balanço (rotação) em cada uma das massas mostradas na Figura 1.17(c) no plano do papel.



(a) Uma excitação determinística (periódica)



(b) Uma excitação aleatória

FIGURA 1.16 Excitações determinística e aleatória.

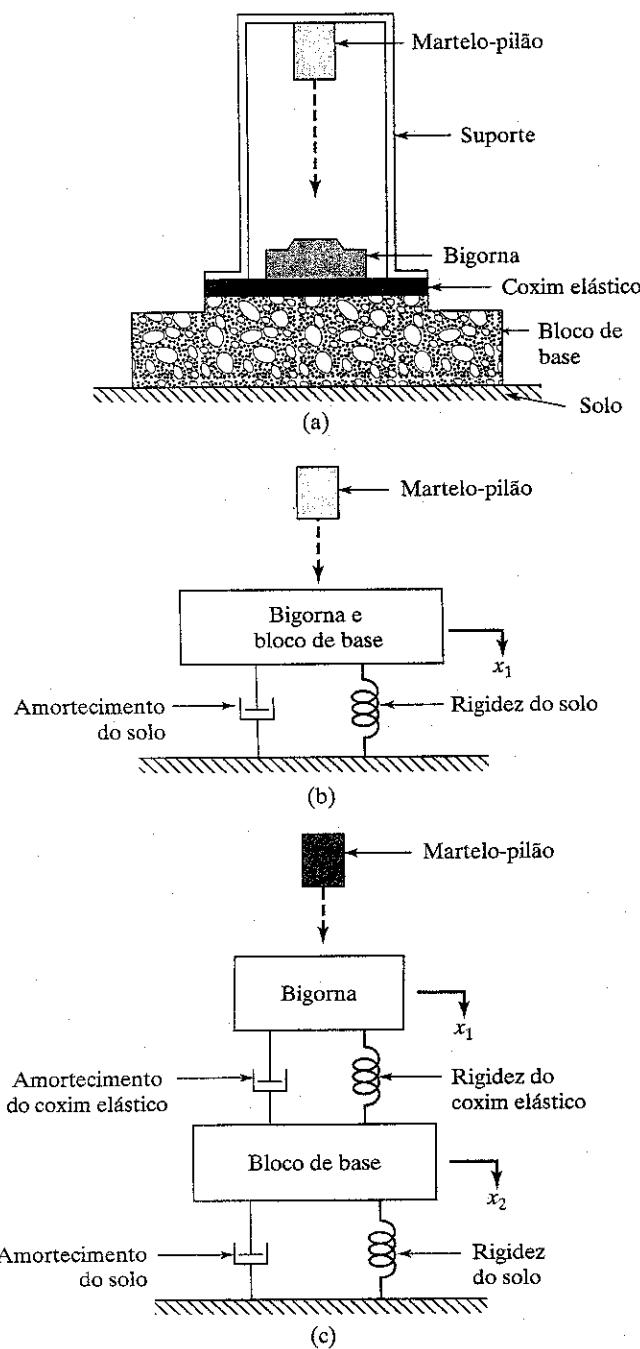


FIGURA 1.17 Modelagem de um martelo de forjar.

Etapa 2: Derivação das equações governantes. Uma vez disponível o modelo matemático, usamos os princípios da dinâmica e derivamos as equações que descrevem a vibração do sistema. As equações de movimento podem ser derivadas convenientemente desenhando-se os diagramas de corpo livre de todas as massas envolvidas. O diagrama de corpo livre de uma massa pode ser obtido isolando-se a massa e indicando todas as forças externas a ela aplicadas, as forças reativas e as forças de inércia. As equações de movimento de um sistema vibratório estão normalmente na forma de um conjunto de equações diferenciais ordinárias para um sistema discreto e equações diferenciais parciais para um sistema contínuo. As equações podem ser lineares ou não lineares dependendo do comportamento dos componentes do sistema. Há várias abordagens que costumam ser usadas para derivar as equações

governantes, entre elas a segunda lei do movimento de Newton, o princípio de D'Alembert e o princípio da conservação da energia.

Etapa 3: Solução das equações governantes. As equações de movimento devem ser resolvidas para determinar a resposta do sistema vibratório. Dependendo da natureza do problema, podemos usar uma das seguintes técnicas para determinar a solução: métodos padronizados para resolver equações diferenciais, métodos que utilizam transformadas de Laplace, métodos matriciais¹ e métodos numéricos. Se as equações governantes forem não lineares, raramente podem ser resolvidas na forma fechada. Além do mais, a solução de equações diferenciais parciais é muito mais elaborada do que a de equações diferenciais ordinárias. Métodos numéricos que envolvem computadores podem ser usados para resolver as equações. Todavia, será difícil tirar conclusões gerais sobre o comportamento do sistema usando resultados de computador.

Etapa 4: Interpretação dos resultados. A solução das equações governantes fornece os deslocamentos, velocidades e acelerações das várias massas do sistema. Esses resultados podem ser interpretados com uma clara visão da finalidade da análise e das possíveis implicações dos resultados no projeto.

EXEMPLO 1.1

Modelo matemático de uma motocicleta

A Figura 1.18(a) mostra uma motocicleta com um motociclista. Desenvolva uma sequência de três modelos matemáticos do sistema para investigar vibrações no sentido vertical. Considere a elasticidade dos pneus, a elasticidade e o amortecimento das longarinas (no sentido vertical), as massas das rodas e a elasticidade, amortecimento e massa do motociclista.

Solução: Começamos com o modelo mais simples e o refinamos gradativamente. Quando são usados os valores equivalentes da massa, rigidez e amortecimento do sistema, obtemos um modelo com um único grau de liberdade da motocicleta com um motociclista como indicado na Figura 1.18(b). Nesse modelo, a rigidez equivalente (k_{eq}) inclui a rigidez dos pneus, longarinas e motociclista. A constante de amortecimento equivalente (c_{eq}) engloba o amortecimento das longarinas e do motociclista. A massa equivalente abrange as massas das rodas, do corpo do veículo e do motociclista. Esse modelo pode ser refinado representando as massas das rodas, a elasticidade dos pneus e a elasticidade e amortecimento das longarinas em separado, como mostra a Figura 1.18(c). Nesse modelo, a massa do corpo do veículo (m_v) e a massa do motociclista (m_r) são mostradas como uma massa única, $m_v + m_r$. Quando são consideradas a elasticidade (como a constante elástica k_r) e o amortecimento (como constante de amortecimento c_r) do motociclista, pode-se obter o modelo refinado mostrado na Figura 1.18(d).

Observe que os modelos mostrados nas figuras 1.18(b) a (d) não são únicos. Por exemplo, combinando as constantes elásticas de ambos os pneus, as massas de ambas as rodas e as constantes elásticas e de amortecimento de ambas as longarinas como quantidades únicas, pode-se obter o modelo mostrado na Figura 1.18(e), em vez do mostrado na Figura 1.18(c). ■

¹ As definições e operações básicas da teoria matricial são dadas no Apêndice A.

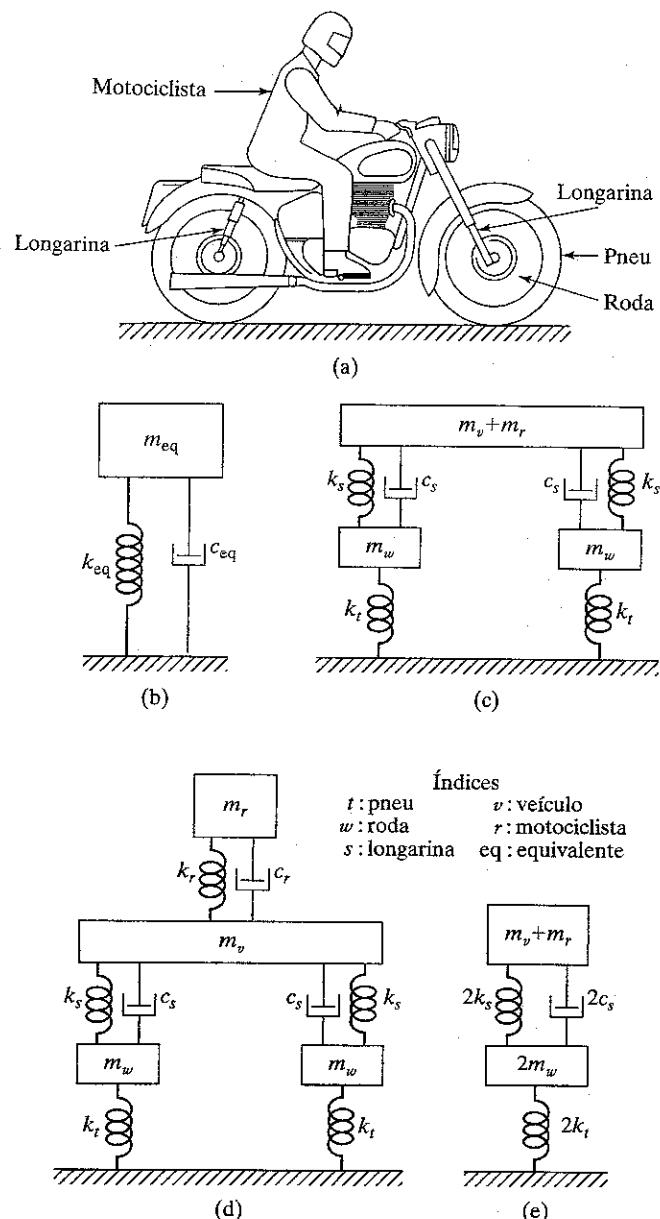


FIGURA 1.18 Motocicleta com um motociclista — um sistema físico e modelo matemático.

1.7 Elementos de mola

Uma mola linear é um tipo de elo mecânico cuja massa e amortecimento são, de modo geral, considerados desprezíveis. Uma força é desenvolvida na mola sempre que houver um movimento relativo entre suas duas extremidades. A força da mola é proporcional à quantidade de deformação e é dada por

$$F = kx \quad (1.1)$$

onde F é a força da mola, x é a deformação (deslocamento de uma extremidade em relação à outra) e k é a *rigidez da mola ou constante elástica*. Se representarmos F e x em um gráfico, obtemos uma linha reta de acordo com a Equação (1.1). O trabalho realizado (U) na deformação de uma mola é armazenado como deformação ou energia potencial na mola, e é dado por

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.2)$$

Molas reais são não lineares e seguem a Equação (1.1) apenas até certa deformação. Quando a deformação ultrapassa certo valor (após o ponto A na Figura 1.19), a tensão ultrapassa o limite de escoamento do material e a relação força-deformação torna-se não linear [1.23, 1.24]. Em muitas aplicações práticas, admitimos que as deflexões são pequenas e usamos a relação linear na Equação (1.1). Ainda que a relação força-deflexão de uma mola seja não linear, como mostra a Figura 1.20, freqüentemente nós a aproximamos como linear usando um processo de linearização [1.24, 1.25]. Para ilustrar o processo de linearização admitimos que a carga de equilíbrio estático F que age sobre a mola causa uma deflexão de x^* . Se uma força incremental ΔF for adicionada a F , a mola sofre uma deflexão equivalente a uma quantidade adicional Δx . A nova força da mola $F + \Delta F$ pode ser expressa usando expansão em série de Taylor ao redor da posição de equilíbrio estático x^* como

$$\begin{aligned} F + \Delta F &= F(x^* + \Delta x) \\ &= F(x^*) + \frac{dF}{dx} \Big|_{x^*} (\Delta x) + \frac{1}{2!} \frac{d^2F}{dx^2} \Big|_{x^*} (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para valores pequenos de Δx , os termos de derivadas de ordem superior podem ser desprezados para obter

$$F + \Delta F = F(x^*) + \frac{dF}{dx} \Big|_{x^*} (\Delta x) \quad (1.4)$$

Visto que $F = F(x^*)$, podemos expressar ΔF como

$$\Delta F = k\Delta x \quad (1.5)$$

onde k é a constante elástica linearizada em x^* dada por

$$k = \frac{dF}{dx} \Big|_{x^*}$$

Podemos usar a Equação (1.5) por simplicidade, porém, às vezes, o erro envolvido na aproximação pode ser muito grande.

Elementos elásticos como vigas também comportam-se como molas. Por exemplo, considere uma viga em balanço com uma massa m na extremidade como mostrado na Figura 1.21. Admitimos, por simplicidade, que a massa da viga é desprezível em comparação com a massa m . Pela resistência dos materiais [1.26], sabemos que a deflexão estática da viga na extremidade livre é dada por

$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{3EI} \quad (1.6)$$

onde $W = mg$ é o peso da massa m , E é o módulo de Young, e I é o momento de inércia da seção transversal da viga. Como consequência, a constante elástica é

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{3EI}{l^3} \quad (1.7)$$

Resultados semelhantes podem ser obtidos para vigas com extremidades em diferentes condições.

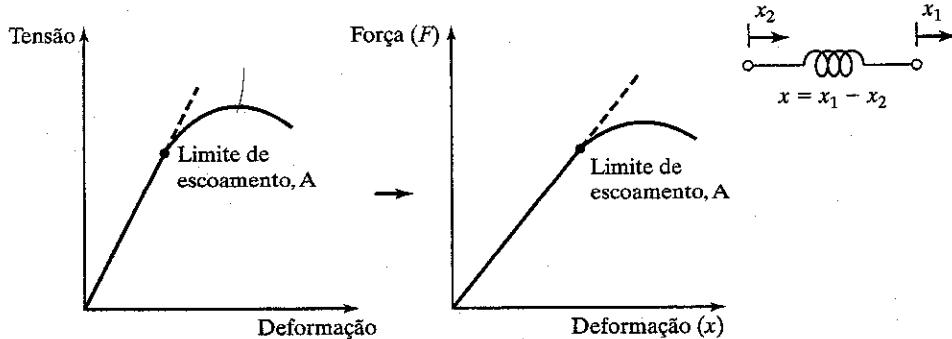


FIGURA 1.19 Não linearidade além do limite de proporcionalidade.

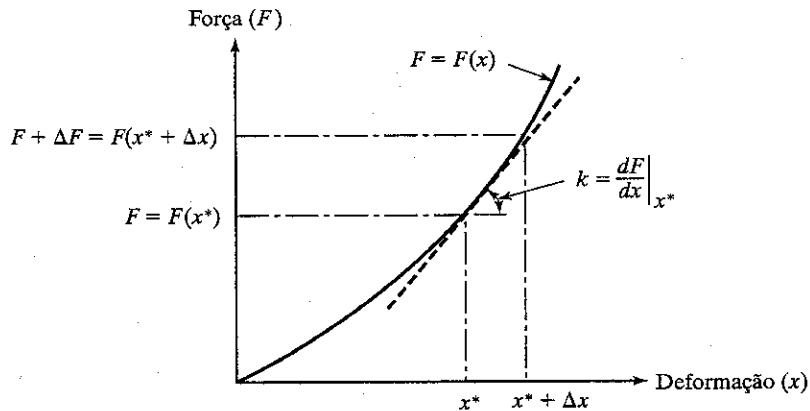


FIGURA 1.20 Processo de linearização.

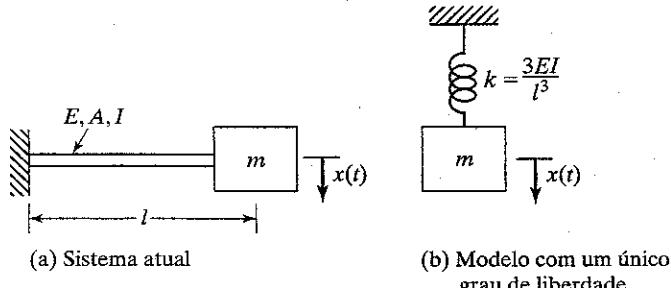


FIGURA 1.21 Viga em balanço com massa na extremidade.

As fórmulas dadas no Apêndice B podem ser usadas para determinar as constantes elásticas de vigas e placas.

1.7.1 Associação de molas

Em muitas aplicações práticas, várias molas lineares são usadas em associação. Essas molas podem ser associadas em uma única mola equivalente como indicado a seguir.

Caso 1: Molas em paralelo. Para derivar uma expressão para a constante elástica equivalente de molas ligadas em paralelo, considere as duas molas mostradas na Figura 1.22(a). Quando é aplicada uma carga W , o sistema sofre uma deflexão estática δ_{st} , como mostra a Figura 1.22(b). Então, o diagrama de corpo livre representado na Figura 1.22(c) fornece a equação de equilíbrio

$$W = k_1 \delta_{st} + k_2 \delta_{st} \quad (1.8)$$

Se k_{eq} é a constante elástica equivalente para a associação das duas molas, então, para a mesma deflexão estática δ_{st} , temos

$$W = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.9)$$

As equações (1.8) e (1.9) resultam em

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (1.10)$$

Em geral, se tivermos n molas com constantes elásticas k_1, k_2, \dots, k_n em paralelo, então, pode-se obter a constante elástica equivalente k_{eq} :

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (1.11)$$

Caso 2: Molas em série. Em seguida, obteremos uma expressão para a constante elástica equivalente de molas ligadas em série considerando as duas molas mostradas na Figura 1.23(a). Sob a ação de uma carga W , as molas 1 e 2 sofrem alongamentos δ_1 e δ_2 , respectivamente, como mostra a Figura 1.23(b). O alongamento total (ou deflexão estática) do sistema, δ_{st} , é dado por

$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2 \quad (1.12)$$

Visto que ambas as molas estão sujeitas à mesma força W , temos o equilíbrio mostrado na Figura 1.23(c):

$$\begin{aligned} W &= k_1 \delta_1 \\ W &= k_2 \delta_2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Se k_{eq} denotar a constante elástica equivalente, então, para a mesma deflexão estática,

$$W = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.14)$$

As equações (1.13) e (1.14) dão

$$k_1 \delta_1 = k_2 \delta_2 = k_{eq} \delta_{st}$$

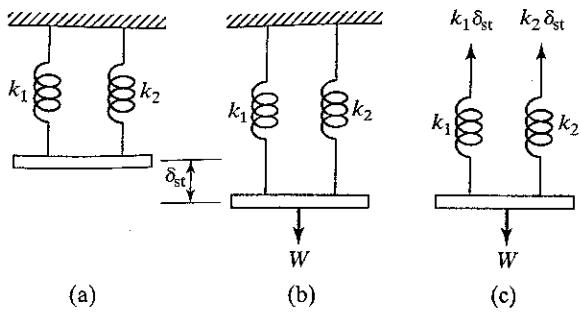


FIGURA 1.22 Molas em paralelo.

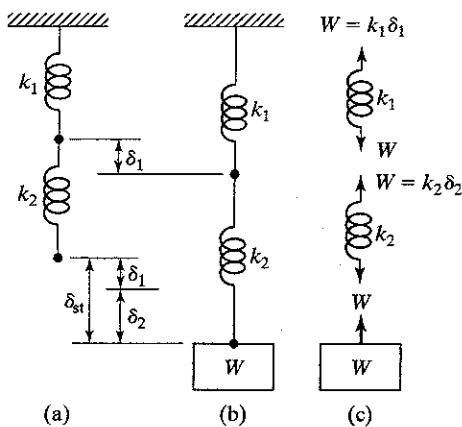


FIGURA 1.23 Molas em série.

OU

$$\delta_1 = \frac{k_{\text{eq}} \delta_{\text{st}}}{k_1} \quad \text{and} \quad \delta_2 = \frac{k_{\text{eq}} \delta_{\text{st}}}{k_2} \quad (1.15)$$

Substituindo esses valores de δ_1 e δ_2 na Equação (1.12), obtemos

$$\frac{k_{\text{eq}} \delta_{\text{st}}}{k_1} + \frac{k_{\text{eq}} \delta_{\text{st}}}{k_2} = \delta_{\text{st}}$$

isto é,

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (1.16)$$

A Equação (1.16) pode ser generalizada para o caso de n molas em série:

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \quad (1.17)$$

Em certas aplicações, as molas estão ligadas a componentes rígidos como polias, alavancas e engrenagens. Nesses casos, pode-se determinar uma constante elástica equivalente usando equivalência de energia, como ilustrado no Exemplo 1.5.

EXEMPLO 1.2

k equivalente de um sistema de suspensão

A Figura 1.24 mostra o sistema de suspensão de um vagão ferroviário de carga com um arranjo de molas em paralelo. Determine a constante elástica equivalente da suspensão se cada uma das três molas helicoidais for fabricada em aço com um módulo de elasticidade transversal $G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

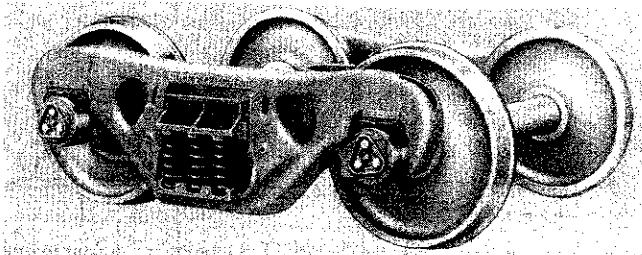


FIGURA 1.24 Arranjo em paralelo de molas em um vagão ferroviário de carga. (Cortesia de Buckeye Steel Castings Company.)

e tiver cinco espiras efetivas, diâmetro médio do enrolamento $D = 20$ cm, e diâmetro do arame $d = 2$ cm.

Solução: a rigidez de cada mola helicoidal é dada por

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 n} = \frac{(0,02)^4 (80 \times 10^9)}{8(0,2)^3(5)} = 40.000,0 \text{ N/m}$$

(Consulte a fórmula na capa interna.)

Uma vez que as três molas são idênticas e paralelas, a constante elástica equivalente do sistema de suspensão é dada por

$$k_{\text{eq}} = 3k = 3(40.000,0) = 120.000,0 \text{ N/m}$$

EXEMPLO 1.3

Constante elástica torcional de um eixo de um porpulsor a hélice

Determine a constante elástica torcional do eixo de hélice em aço mostrado na Figura 1.25.

Solução: Precisamos considerar os segmentos 12 e 23 do eixo como uma associação de molas. Pela Figura 1.25, pode-se verificar que o torque induzido em qualquer seção transversal do eixo (como AA ou BB) é igual ao torque aplicado à hélice, T . Por consequência, as elasticidades (molas) correspondentes aos dois segmentos 12 e 23 devem ser consideradas como molas em série. As constantes elásticas dos segmentos 12 e 23 do eixo (k_{12} e k_{23}) são dadas por

$$k_{t_{12}} = \frac{GJ_{12}}{l_{12}} = \frac{G\pi(D_{12}^4 - d_{12}^4)}{32l_{12}}$$

$$= \frac{(80 \times 10^9)\pi(0.3^4 - 0.2^4)}{32(2)}$$

$$= 25.5255 \times 10^6 \text{ N.m/rad}$$

$$k_{t_{23}} = \frac{GJ_{23}}{l_{23}} = \frac{G\pi(D_{23}^4 - d_{23}^4)}{32l_{23}}$$

$$= \frac{(80 \times 10^9)\pi(0,25^4 - 0,15^4)}{32(3)}$$

$$= 8,9012 \times 10^6 \text{ N.m/rad}$$

Já que as molas estão em série, a Equação (1.16) resulta em

$$k_{t_{eq}} = \frac{k_{t_{12}} k_{t_{23}}}{k_{t_{12}} + k_{t_{23}}} = \frac{(25,5255 \times 10^6)(8,9012 \times 10^6)}{(25,5255 \times 10^6 + 8,9012 \times 10^6)}$$

$$= 6,5997 \times 10^6 \text{ N.m/rad}$$

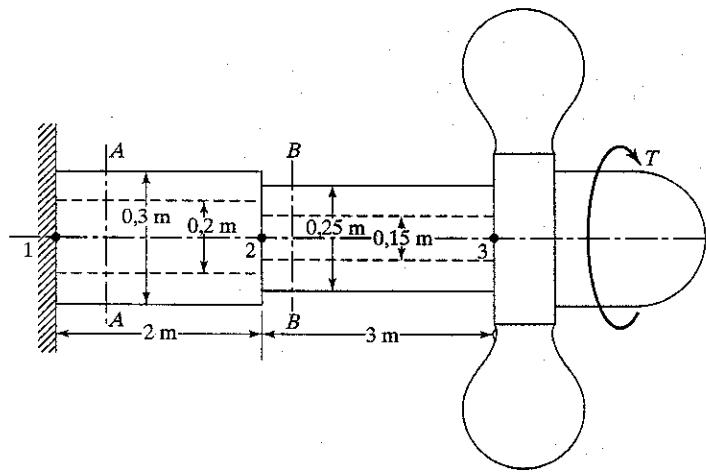


FIGURA 1.25 Eixo de um propulsor a hélice.

EXEMPLO 1.4

k equivalente de um tambor de içamento

Um tambor de içamento equipado com um cabo de aço é montado na extremidade de uma viga em balanço como mostrado na Figura 1.26(a). Determine a constante elástica equivalente do sistema quando o comprimento de suspensão do cabo é l . Admita que o diâmetro efetivo da seção transversal do cabo é d e que o módulo de Young da viga e do cabo é E .

Solução: A constante elástica da viga em balanço é dada por

$$k_b = \frac{3EI}{b^3} = \frac{3E}{b^3} \left(\frac{1}{12} at^3 \right) = \frac{Eat^3}{4b^3} \quad (\text{E.1})$$

A rigidez do cabo sujeito a carregamento axial é

$$k_r = \frac{AE}{l} = \frac{\pi d^2 E}{4l} \quad (\text{E.2})$$

Visto que tanto o cabo quanto a viga em balanço experimentam a mesma carga W , como ilustra a Figura 1.26(b), eles podem ser modelados como molas em série, como mostrado na Figura 1.26(c). A constante elástica equivalente k_{eq} é dada por

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r} = \frac{4b^3}{Eat^3} + \frac{4l}{\pi d^2 E}$$

ou

$$k_{eq} = \frac{E}{4} \left(\frac{\pi at^3 d^2}{\pi d^2 b^3 + lat^3} \right) \quad (\text{E.3})$$

EXEMPLO 1.5

k equivalente de um guindaste

A lança AB do guindaste mostrado na Figura 1.27(a) é uma barra de aço uniforme de comprimento de 10 m e área da seção transversal de 2.500 mm^2 . Um peso W é suspenso enquanto o guindaste permanece estacionário. O cabo $CDEBF$ é feito de aço e tem uma área de seção transversal de 100 mm^2 . Desprezando o efeito do cabo $CDEB$, determine a constante elástica equivalente do sistema na direção vertical.

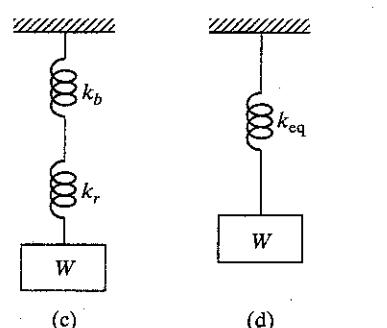
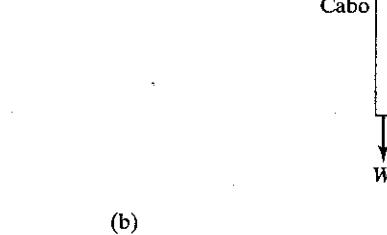
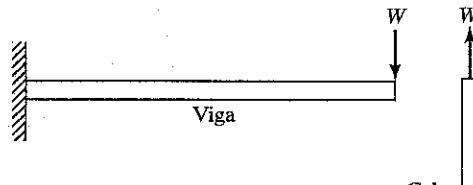
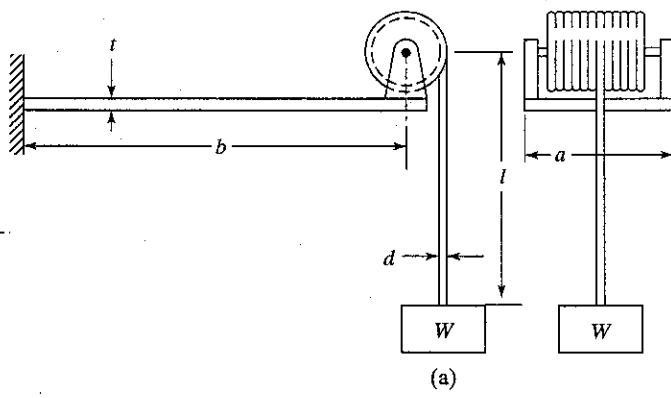


FIGURA 1.26 Tambor de içamento.

Solução: A constante elástica de mola equivalente pode ser determinada usando a equivalência de energias potenciais dos dois sistemas. Visto que a base do guindaste é rígida, o cabo e a lança podem ser considerados fixos nos pontos F e A , respectivamente. Além disso, o efeito do cabo $CDEB$ é desprezível; como consequência, podemos admitir que o peso W age no ponto B como mostrado na Figura 1.27(b).

Um deslocamento vertical x do ponto B provocará uma deformação de $x_2 = x \cos 45^\circ$ na mola k_2 (lança) e de $x_1 = x \cos (90^\circ - \theta)$ na mola k_1 (cabos). O comprimento do cabo FB , l_1 , é dado pela Figura 1.27(b):

$$l_1^2 = 3^2 + 10^2 - 2(3)(10) \cos 135^\circ = 151,426,$$

$$l_1 = 12,3055 \text{ m}$$

O ângulo θ satisfaz a relação

$$l_1^2 + 3^2 - 2(l_1)(3) \cos \theta = 10^2, \quad \cos \theta = 0,8184,$$

$$\theta = 35,0736^\circ$$

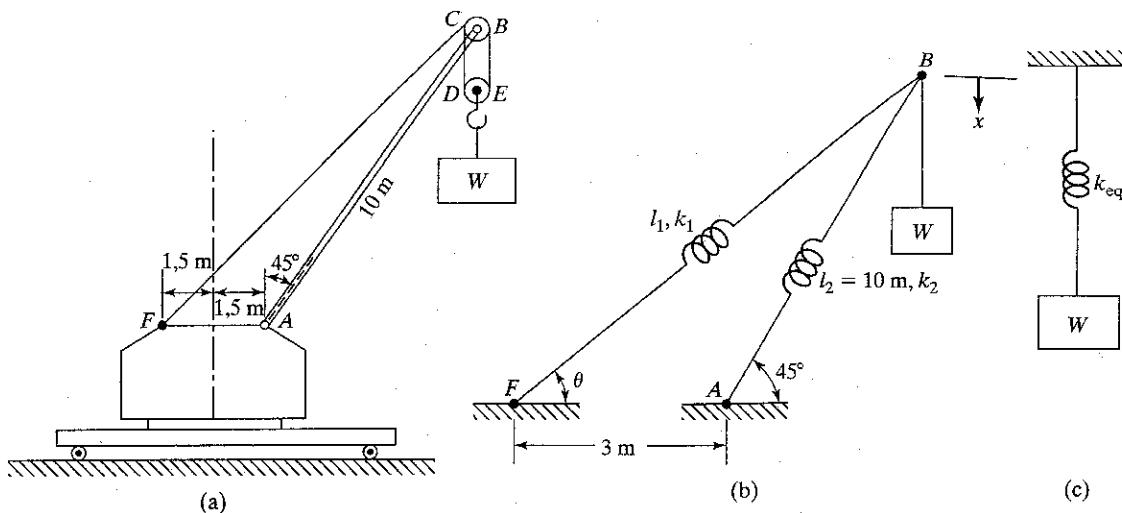


FIGURA 1.27 Guindaste suspendendo uma carga.

A energia potencial total (U) armazenada nas molas k_1 e k_2 pode ser expressa pela Equação (1.2) como

$$U = \frac{1}{2}k_1(x \cos 45^\circ)^2 + \frac{1}{2}k_2[x \cos(90^\circ - \theta)]^2 \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{A_1 E_1}{l_1} = \frac{(100 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{12,3055} \\ &= 1,6822 \times 10^6 \text{ N/m} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{A_2 E_2}{l} = \frac{(2,500 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{10} \\ &= 5,1750 \times 10^7 \text{ N/m} \end{aligned}$$

Uma vez que a mola equivalente na direção vertical sofre uma deformação x , a energia potencial da mola equivalente (U_{eq}) é dada por

$$U_{\text{eq}} = \frac{1}{2}k_{\text{eq}}x^2 \quad (\text{E.2})$$

Se fizermos $U = U_{\text{eq}}$, obtemos a constante elástica equivalente do sistema como

$$k_{\text{eq}} = 26,4304 \times 10^6 \text{ N/m}$$

1.8 Elementos de massa ou inércia

Admite-se que o elemento de massa ou inércia é um corpo rígido; pode ganhar ou perder energia cinética sempre que a velocidade do corpo mudar. Pela segunda lei do movimento de Newton, o produto da massa por sua aceleração é igual à força aplicada à massa. Trabalho é igual à força multiplicada pelo deslocamento na direção da força e o trabalho realizado sobre uma massa é armazenado na forma de energia cinética da massa.

Na maioria dos casos, temos de usar um modelo matemático para representar o sistema vibratório real e, de modo geral, sempre há vários modelos possíveis. A finalidade da análise muitas vezes determina qual é o modelo matemático adequado. Uma vez escolhido o modelo, os elementos de massa ou inércia

do sistema podem ser identificados com facilidade. Por exemplo, considere novamente a viga em balanço com uma massa na extremidade mostrada na Figura 1.21(a). Para uma análise rápida e de razoável precisão, a massa e o amortecimento da viga podem ser desprezados; o sistema pode ser modelado como um sistema massa-mola, como mostrado na Figura 1.21(b). A massa na extremidade, m , representa o elemento de massa, e a elasticidade da viga denota a rigidez da mola. Em seguida, considere um edifício de vários andares sujeito a um terremoto. Admitindo que a massa da estrutura seja desprezível em comparação com a massa dos pisos, o edifício pode ser modelado como um sistema com vários graus de liberdade, como mostrado na Figura 1.28. As massas nos vários níveis de pisos representam os elementos de massa, e as elasticidades dos membros verticais denotam os elementos de mola.

1.8.1 Associação de massas

Em muitas aplicações práticas, várias massas aparecem associadas. Para uma análise simples, podemos substituir essas massas por uma única massa equivalente, como indicado a seguir [1.27].

Caso 1: Massas de translação ligadas por uma barra rígida. Consideremos as massas ligadas a uma barra rígida articulada em uma extremidade, como mostrado na Figura 1.29(a). Podemos supor que a massa equivalente está localizada em qualquer ponto ao longo da barra. Para sermos específicos, supomos que a localização da massa equivalente seja a da massa m_1 . As velocidades das massas m_2 (\dot{x}_2) e m_3 (\dot{x}_3) podem ser expressas em termos da velocidade da massa m_1 (\dot{x}_1) se admitirmos pequenos deslocamentos angulares para a barra como

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1} \dot{x}_1, \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1} \dot{x}_1 \quad (1.18)$$

e

$$\dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}_1 \quad (1.19)$$

Igualando a energia cinética do sistema de três massas à do sistema de massa equivalente, obtemos

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}\dot{x}_{\text{eq}}^2 \quad (1.20)$$

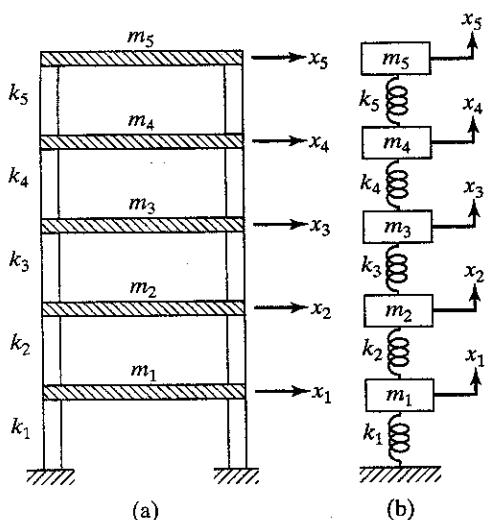


FIGURA 1.28 Idealização de um edifício de vários andares como um sistema com múltiplos graus de liberdade.

Em vista das Equações (1.18) e (1.19), essa equação dá:

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2 m_3 \quad (1.21)$$

Caso 2: Massas de translação e rotacionais acopladas. Considere a massa m , com velocidade de translação \dot{x} , acoplada a outra massa (de momento de inércia de massa J_0) com uma velocidade rotacional $\dot{\theta}$, como no arranjo de cremalheira e pinhão mostrado na Figura 1.30. Essas duas massas podem ser associadas para obter (1) uma única massa equivalente de translação, m_{eq} , ou (2) uma única massa equivalente rotacional, J_{eq} , como mostrado.

1. Massa equivalente de translação. A energia cinética das duas massas é dada por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 \quad (1.22)$$

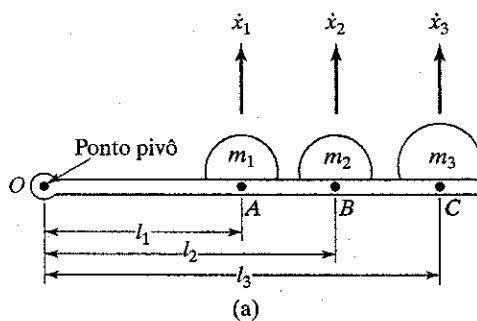


FIGURA 1.29 Massas de translação ligadas por uma barra rígida.

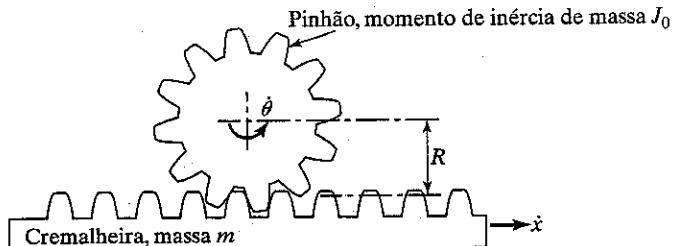


FIGURA 1.30 Massas de translação e rotacional em um arranjo de cremalheira e pinhão.

e a energia cinética da massa equivalente pode ser expressa como

$$T_{eq} = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}_{eq}^2 \quad (1.23)$$

Visto que $x_{eq} = \dot{x}$ e $\dot{\theta} = \dot{x}/R$, a equivalência de T e T_{eq} dá

$$\frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

isto é,

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2} \quad (1.24)$$

2. Massa rotacional equivalente. Aqui $\dot{\theta}_{eq} = \dot{\theta}$ e $\dot{x} = \dot{\theta}R$ e a equivalência de T e T_{eq} leva a

$$\frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}R)^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$$

ou

$$J_{eq} = J_0 + mR^2 \quad (1.25)$$

EXEMPLO 1.6

Massa equivalente de um sistema

Determine a massa equivalente do sistema mostrado na Figura 1.31, no qual a ligação rígida 1 está ligada à polia e gira com ela.

Solução: Supondo pequenos deslocamentos, a massa equivalente (m_{eq}) pode ser determinada pela equivalência das energias cinéticas dos dois sistemas. Quando a massa m é deslocada a uma distância x , a polia e a ligação rígida 1 giram por um ângulo $\theta_p = \theta_1 = x/r_p$. Isso faz que a ligação rígida 2 e o cilindro sejam deslocados de uma distância $x_2 = \theta_p l_1 = xl_1/r_p$. Visto que o cilindro gira sem deslizamento, gira por um ângulo $\theta_c = x_2/r_c = xl_1/r_p r_c$. A energia cinética do sistema (T) pode ser expressa (para pequenos deslocamentos) como:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}_p^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_c\dot{\theta}_c^2 \quad (E.1)$$

onde J_1 , J_p e J_c denotam os momentos de inércia de massa da polia, ligação 1 (ao redor de O) e cilindro, e \dot{x} e \dot{x}_2 representam as velocidades lineares de massa m e link 2, respectivamente. Observando que $J_c = m_c r_c^2/2$ e $J_1 = m_1 l_1^2/3$, a

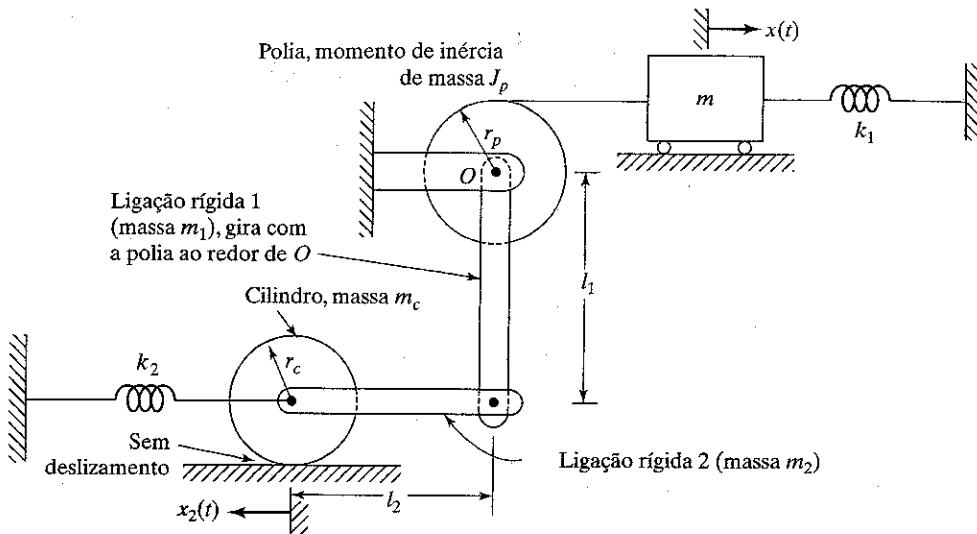


FIGURA 1.31 Sistema considerado para determinar massa equivalente.

Equação (E.1) pode ser reescrita como

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_p\left(\frac{\dot{x}}{r_p}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1l_1^2}{3}\right)\left(\frac{\dot{x}}{r_p}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\dot{x}l_1}{r_p}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_cr_c^2}{2}\right)\left(\frac{\dot{x}l_1}{r_p r_c}\right)^2 + \frac{1}{2}m_c\left(\frac{\dot{x}l_1}{r_p}\right)^2 \quad (\text{E.2})$$

Igualando a Equação (E.2) à energia cinética do sistema equivalente

$$T = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}\dot{x}^2 \quad (\text{E.3})$$

obtemos a massa equivalente do sistema como

$$\begin{aligned} m_{\text{eq}} = m &+ \frac{J_p}{r_p^2} + \frac{1}{3}\frac{m_1l_1^2}{r_p^2} + \frac{m_2l_1^2}{r_p^2} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{m_cr_c^2}{r_p^2} + m_c\frac{l_1^2}{r_p^2} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

EXEMPLO 1.7

Mecanismo came-seguidor

Um mecanismo came-seguidor (Figura 1.32) é usado para converter o movimento rotativo de um eixo no movimento oscilatório ou recíproco de uma válvula. O sistema de rolete de came consiste em uma haste de empuxo (comando de válvula) de massa m_v , um balancim de massa m_r e um momento de inércia de massa J_r ao redor de seu C.G., uma válvula de massa m_p e uma mola da válvula de massa desprezível [1.28–1.30]. Determine a massa equivalente (m_{eq}) desse sistema came-seguidor supondo que a localização de (m_{eq}) seja (i) o ponto A e (ii) o ponto C.

Solução: A massa equivalente do sistema de came-seguidor pode ser determinada usando a equivalência das energias cinéticas dos dois sistemas. Devido a um deslocamento vertical x da haste de comando da válvula, o balancim gira de um ângulo $\theta_r = x/l_1$ ao redor do ponto pivô, a válvula desloca-se

para baixo por uma distância $x_v = \theta_r l_2 = xl_2/l_1$, e o C.G. do balancim desloca-se para baixo por uma distância $x_r = \theta_r l_3 = xl_3/l_1$. A energia cinética do sistema (T) pode ser expressa como²

$$T = \frac{1}{2}m_p\dot{x}_p^2 + \frac{1}{2}m_v\dot{x}_v^2 + \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2}m_r\dot{x}_r^2 \quad (\text{E.1})$$

onde \dot{x}_p , \dot{x}_r e \dot{x}_v são, respectivamente, as velocidades lineares da haste de comando, do C.G. do balancim e da válvula e $\dot{\theta}_r$ é a velocidade angular do balancim.

(i) Se denotarmos a massa equivalente colocada no ponto A por m_{eq} , com $\dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}$, a energia cinética do sistema de massa equivalente T_{eq} é dada por

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}\dot{x}_{\text{eq}}^2 \quad (\text{E.2})$$

Igualando T e T_{eq} , e observando que

$$\dot{x}_p = \dot{x}, \quad \dot{x}_v = \frac{\dot{x}l_2}{l_1}, \quad \dot{x}_r = \frac{\dot{x}l_3}{l_1} \quad \text{e} \quad \dot{\theta}_r = \frac{\dot{x}}{l_1}$$

obtemos

$$m_{\text{eq}} = m_p + \frac{J_r}{l_1^2} + m_v\frac{l_2^2}{l_1^2} + m_r\frac{l_3^2}{l_1^2} \quad (\text{E.3})$$

(ii) De maneira semelhante, se a massa equivalente estiver localizada no ponto C, $\dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}_v$ e

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}\dot{x}_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}\dot{x}_v^2 \quad (\text{E.4})$$

Igualando (E.4) e (E.1), temos

$$m_{\text{eq}} = m_p + \frac{J_r}{l_2^2} + m_p\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 + m_r\left(\frac{l_3}{l_2}\right)^2 \quad (\text{E.5})$$

1.9 Elementos de amortecimento

Em muitos sistemas práticos, a energia de vibração é gradualmente convertida em calor ou som. Em virtude da redu-

² Se a mola da válvula tiver uma massa m_s , então sua massa equivalente será $\frac{1}{3}m_s$ (Exemplo 2.8). Assim, a energia cinética da mola da válvula será $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_s)\dot{x}_v^2$.

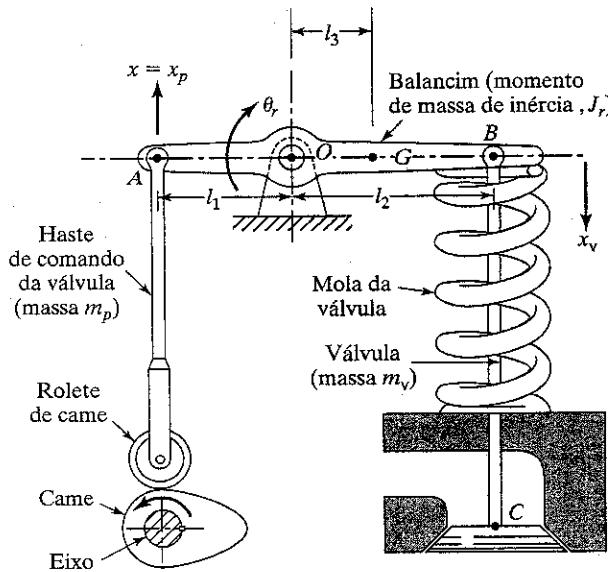


FIGURA 1.32 Sistema came-seguidor.

ção da energia, a resposta, tal como o deslocamento do sistema, diminui gradativamente. O mecanismo pelo qual a energia de vibração é gradativamente convertida em calor ou som é conhecido como *amortecimento*. Embora a quantidade de energia convertida em calor ou som seja relativamente pequena, é importante considerar o amortecimento para uma previsão precisa da reposta de vibração de um sistema. Admite-se que um amortecedor não tem nem massa nem elasticidade, e que a força de amortecimento só existe se houver uma velocidade relativa entre as suas duas extremidades. É difícil determinar as causas do amortecimento em sistemas práticos. Como consequência, ele é modelado como um ou mais dos tipos descritos a seguir.

Amortecimento viscoso. Amortecimento viscoso é o mecanismo de amortecimento mais comumente usado em análise de vibrações. Quando sistemas mecânicos vibram em um meio fluido como ar, gás, água e óleo, a resistência oferecida pelo fluido ao corpo em movimento faz que a energia seja dissipada. Nesse caso, a quantidade de energia dissipada depende de muitos fatores como o tamanho e a forma do corpo em vibração, a viscosidade do fluido, a freqüência de vibração e a velocidade do corpo em vibração. No amortecimento viscoso, a força de amortecimento é proporcional à velocidade do corpo vibratório. Exemplos típicos de amortecimento viscoso são (1) película de fluido entre superfícies deslizantes, (2) fluxo de fluido ao redor de um pistão dentro de um cilindro, (3) fluxo de fluido através de um orifício e (4) película de fluido ao redor de um mancal de apoio.

Amortecimento Coulomb ou por atrito seco. Aqui, a magnitude da força de amortecimento é constante, mas no sentido oposto ao movimento do corpo vibratório. O amortecimento, nesse caso, é causado pelo atrito entre superfícies em contato que estejam secas ou não tenham lubrificação suficiente.

Amortecimento material ou sólido ou por histerese. Quando um material é deformado, ele absorve e dissipa energia [1.31]. O efeito deve-se ao atrito entre os planos internos, que deslizam ou escorregem enquanto as deformações ocorrem. Quando um corpo com amortecimento material é sujeito à vibração, o

diagrama tensão-deformação mostra um ciclo de histerese como indicado na Figura 1.33(a). A área desse ciclo denota a energia perdida por unidade de volume do corpo por ciclo devido ao amortecimento.³

1.9.1. Construção de amortecedores viscosos

Um amortecedor viscoso pode ser construído usando-se duas placas paralelas separadas por uma distância h , com um fluido de viscosidade μ entre as placas (Figura 1.34). Considere que uma das placas é fixa e a outra está movimentando-se com uma velocidade v em seu próprio plano. As camadas de fluido em contato com a placa em movimento movem-se com uma velocidade v , enquanto as que estão em contato com a placa fixa não se movem. Admite-se que as velocidades das camadas intermediárias de fluido variam linearmente entre 0 e v , como mostra a Figura 1.34. Segundo a lei de Newton de fluxo viscoso, a tensão de cisalhamento (τ) desenvolvida na camada de fluido a uma distância y da placa fixa é dada por

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.26)$$

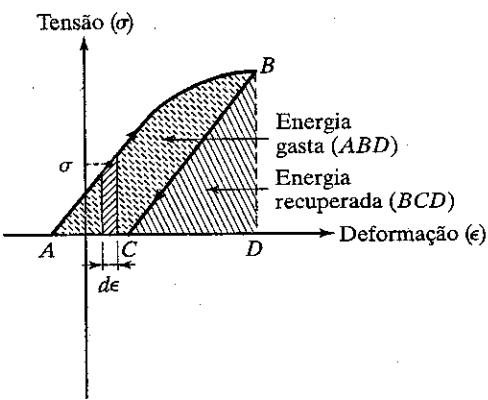
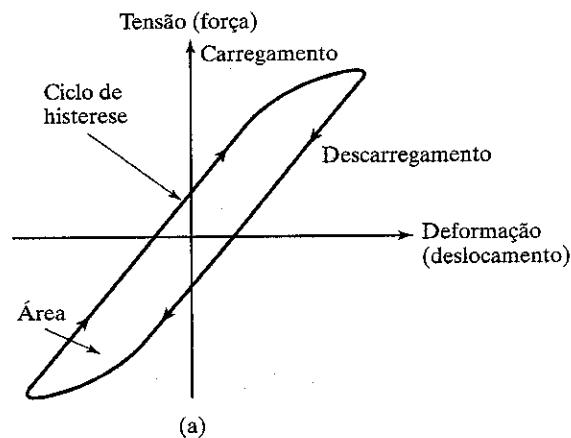


FIGURA 1.33 Ciclo de histerese para materiais elásticos.

³ Quando a carga aplicada a um corpo elástico é aumentada, a tensão e a deformação no corpo também aumentam. A área sob a curva, dada por

$$u = \int \sigma d\epsilon$$

denota a energia gasta (trabalho realizado) por unidade de volume do corpo. Quando a carga aplicada ao corpo for diminuída, a energia será recuperada. Quando o caminho de descarregamento é diferente do caminho de carregamento, a área ABC na Figura 1.33(b) — a área do ciclo de histerese na Figura 1.33(a) — denota a energia perdida por unidade de volume do corpo.

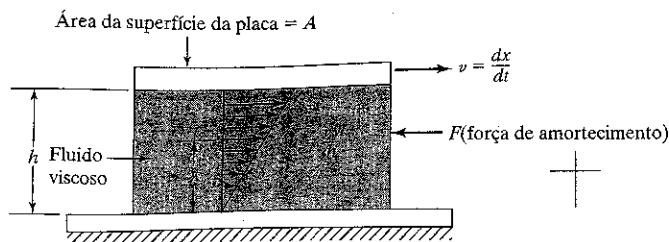


FIGURA 1.34 Placas paralelas com um fluido viscoso entre elas.

onde $du/dy = v/h$ é o gradiente de velocidade. A força de cisalhamento ou de resistência (F) desenvolvida na superfície inferior da placa em movimento é

$$F = \tau A = \frac{\mu A v}{h} = cv \quad (1.27)$$

onde A é a área da superfície da placa em movimento e

$$c = \frac{\mu A}{h} \quad (1.28)$$

é denominada constante de amortecimento.

Se um amortecedor for não linear, normalmente é usado um procedimento de linearização ao redor da velocidade de operação (v^*), como no caso de uma mola não linear. O processo de linearização fornece a constante de amortecimento equivalente como

$$c = \left. \frac{dF}{dv} \right|_{v^*} \quad (1.29)$$

1.9.2 Associação de amortecedores

Quando amortecedores aparecem em associação, eles podem ser substituídos por um amortecedor equivalente adotando-se um procedimento semelhante ao descrito nas seções 1.7 e 1.8 (Problema 1.35).

EXEMPLO 1.8

Folga em um mancal

Verificou-se que um mancal, que pode ser aproximado como duas placas planas separadas por uma fina película de lubrificante (Figura 1.35), oferece uma resistência de 400 N quando é usado óleo SAE30 como lubrificante e a velocidade relativa entre as placas é 10 m/s. Se a área das placas (A) for 0,1 m², determine a folga entre as placas. Suponha que a viscosidade absoluta do óleo SAE30 seja 50 μ reyn ou 0,3445 Pa.s.

Solução: Visto que a força de resistência (F) pode ser expressa como $F = cv$, onde c é a constante de amortecimento e v é a velocidade, temos

$$c = \frac{F}{v} = \frac{400}{10} = 40 \text{ N} \cdot \text{s/m} \quad (E.1)$$

Modelando o mancal como um amortecedor do tipo placa plana, a constante de amortecimento é dada pela Equação (1.28):

$$c = \frac{\mu A}{h} \quad (E.2)$$

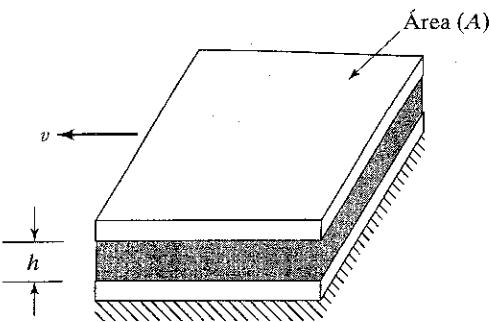


FIGURA 1.35 Placas planas separadas por uma fina película de lubrificante.

Usando os dados conhecidos, a Equação (E.2) dá

$$c = 40 = \frac{(0,3445)(0,1)}{h} \quad \text{ou} \quad h = 0,86125 \text{ mm} \quad (E.3)$$

EXEMPLO 1.9

Amortecedor a êmbolo (pistão-cilindro)

Desenvolva uma expressão para a constante de amortecimento do amortecedor a êmbolo mostrado na Figura 1.36(a).

Solução: A constante de amortecimento do amortecedor pode ser determinada usando-se a equação da tensão de cisalhamento para fluxo de fluido viscoso e a equação da taxa de fluxo de fluido. Como mostrado na Figura 1.36(a), o amortecedor a êmbolo consiste em um pistão de diâmetro D e comprimento l movendo-se com velocidade v_0 dentro de um cilindro cheio de um líquido de viscosidade μ [1.24, 1.32]. Sejam d a folga entre o pistão e a parede do cilindro e v e τ a velocidade e a tensão de cisalhamento a uma distância y da superfície móvel e $(v - dv)$ e $(\tau + d\tau)$ a velocidade e tensão de cisalhamento a uma distância $(y + dy)$ da superfície móvel (Figura 1.36b). O sinal negativo para dv mostra que a velocidade diminui à medida que nos movimentamos em direção à parede do cilindro. A força viscosa sobre esse anel circular é igual a

$$F = \pi D l \, d\tau = \pi D l \frac{d\tau}{dy} dy \quad (E.1)$$

Porém, a tensão de cisalhamento é dada por

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy} \quad (E.2)$$

onde o sinal negativo é consistente com um gradiente de velocidade decrescente [1.33]. Usando a Equação (E.2) na Equação (E.1), obtemos

$$F = -\pi D l \, dy \mu \frac{d^2 v}{dy^2} \quad (E.3)$$

A força sobre o pistão causará uma diferença de pressão nas extremidades do elemento, dada por

$$P = \frac{P}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} = \frac{4P}{\pi D^2} \quad (E.4)$$

a tensão e a
, dada por

me do corpo.
á recuperada.
io de carrega-
e histerese na
me do corpo.

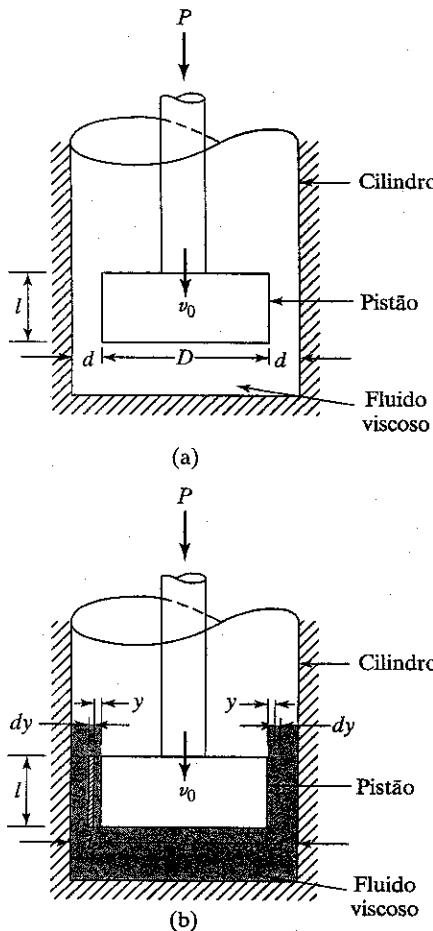


FIGURA 1.36 Um amortecedor de êmbolo.

Desse modo, a força devido à pressão na extremidade do elemento é

$$p(\pi D dy) = \frac{4P}{D} dy \quad (E.5)$$

onde $(\pi D dy)$ denota a área anular entre y e $(y + dy)$. Se admitirmos velocidade média uniforme no sentido do movimento do fluido, as forças dadas nas equações (E.3) e (E.5) devem ser iguais. Assim, obtemos

$$\frac{4P}{D} dy = -\pi D l dy \mu \frac{d^2 v}{dy^2}$$

ou

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{4P}{\pi D^2 l \mu} \quad (E.6)$$

Integrando essa equação duas vezes e usando as condições de contorno $v = -v_0$ em $y = 0$ e $v = 0$ em $y = d$, obtemos

$$v = \frac{2P}{\pi D^2 l \mu} (yd - y^2) - v_0 \left(1 - \frac{y}{d} \right) \quad (E.7)$$

A taxa de fluxo pelo espaço de folga pode ser obtida integrando-se a taxa de fluxo por todo um elemento entre os limites $y = 0$ e $y = d$:

$$Q = \int_0^d v \pi D dy = \pi D \left[\frac{2Pd^3}{6\pi D^2 l \mu} - \frac{1}{2} v_0 d \right] \quad (E.8)$$

O volume do líquido que escoa através do espaço de folga por segundo deve ser igual ao volume deslocado por segundo pelo pistão. Por consequência, a velocidade do pistão será igual à essa taxa de fluxo dividida pela área do pistão. Isso dá

$$v_0 = \frac{Q}{\left(\frac{\pi D^2}{4} \right)} \quad (E.9)$$

As equações (E.9) e (E.8) levam a

$$P = \left[\frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2d}{D} \right)}{4d^3} \right] \mu v_0 \quad (E.10)$$

Expressando a força como $P = cv_0$, podemos determinar a constante de amortecimento c :

$$c = \mu \left[\frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2d}{D} \right)}{4d^3} \right] \quad (E.11)$$

EXEMPLO 1.10

Constante elástica equivalente e constante de amortecimento equivalente de um suporte de máquina-ferramenta

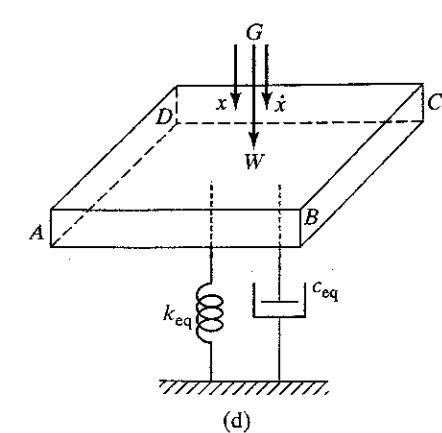
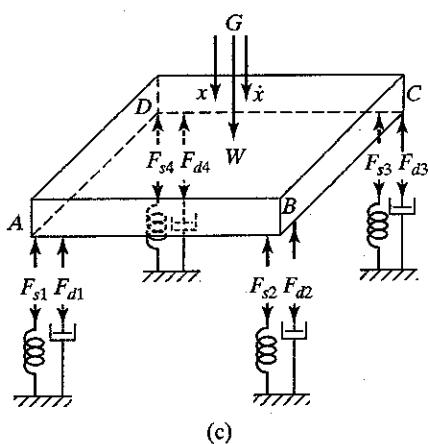
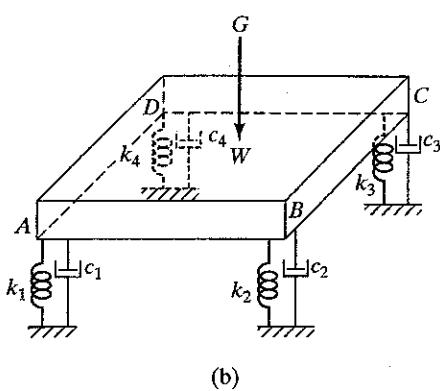
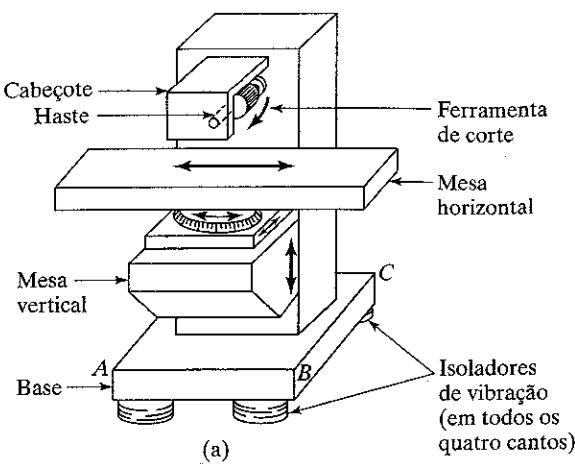
Uma fresadora de precisão está apoiada em quatro suportes isoladores de choque como mostrado na Figura 1.37(a). A elasticidade e o amortecimento de cada isolador de choque podem ser modeladas como uma mola e um amortecedor viscoso, como mostrado na Figura 1.37(b). Determine a constante elástica equivalente, k_{eq} , e a constante de amortecimento equivalente, c_{eq} , do suporte da máquina-ferramenta em termos das constantes elásticas (k_i) e das constantes de amortecimento (c_i) dos apoios.

Solução: Os diagramas de corpo livre das quatro molas e quatro amortecedores são mostrados na Figura 1.37(c). Admitindo-se que o centro de massa, G , esteja localizado em posição simétrica em relação às quatro molas e quatro amortecedores, observamos que todas as molas estarão sujeitas ao mesmo deslocamento, x , e todos os amortecedores estarão sujeitos à mesma velocidade relativa \dot{x} , onde x e \dot{x} denotam, respectivamente, o deslocamento e a velocidade do centro de massa, G . Como consequência, as forças que agem sobre as molas (F_{si}) e amortecedores (F_{di}) podem ser expressas como

$$\begin{aligned} F_{si} &= k_i x; \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ F_{di} &= c_i \dot{x}; \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (E.1)$$

Denominemos as forças totais que agem sobre todas as molas e todos os amortecedores como F_s e F_d , respectivamente (Figura 1.37d). Assim, as equações de equilíbrio de força podem ser expressas como

$$\begin{aligned} F_s &= F_{s1} + F_{s2} + F_{s3} + F_{s4} \\ F_d &= F_{d1} + F_{d2} + F_{d3} + F_{d4} \end{aligned} \quad (E.2)$$



por
1(a).
que
edor
cons-
men-
a em
amor-

e qua-
itindo-
osição
cedo-
itas ao
estarão
enotam,
entro de
sobre as
as como

(E.1)

: todas as
espectiva-
equilíbrio de

(E.2)

onde $F_s + F_d = W$, e W denota a força vertical total (incluindo a força de inércia) que age sobre a máquina de fresar. Pela Figura 1.37(d), temos

$$\begin{aligned} F_s &= k_{eq}x \\ F_d &= c_{eq}\dot{x} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

A Equação (E.2) juntamente com as equações (E.1) e (E.3), dão

$$\begin{aligned} k_{eq} &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 4k \\ c_{eq} &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 4c \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

quando $k_i = k$ e $c_i = c$ para $i = 1, 2, 3, 4$,

Observação: Se o centro de massa, G , não estiver localizado em posição simétrica em relação às quatro molas e aos quatro amortecedores, a i -ésima mola sofre um deslocamento de x_i e o i -ésimo amortecedor experimenta uma velocidade de \dot{x}_i , onde x_i e \dot{x}_i podem ser relacionadas com o deslocamento x e a velocidade \dot{x} do centro de massa da máquina de fresar, G . Nesse caso, as equações (E.1) e (E.4) precisam ser modificadas de acordo com isso.

1.10 Movimento harmônico

Movimento oscilatório pode repetir-se regularmente, como no caso de um pêndulo simples, ou pode apresentar considerável irregularidade, como acontece com o movimento do solo durante um terremoto. Se o movimento for repetido a intervalos de tempo iguais, é denominado *movimento periódico*. O tipo mais simples de movimento periódico é o *movimento harmônico*. O movimento imprimido à massa m devido ao mecanismo corredizo (jugo escocês) mostrado na Figura 1.38 é um exemplo de movimento harmônico simples [1.24, 1.34, 1.35]. Nesse sistema, uma manivela de raio A gira ao redor do ponto O . A outra extremidade da manivela, P , desliza por uma haste entalhada que reproduz o movimento na guia vertical R . Quando a manivela gira a uma velocidade angular ω o ponto S na extremidade da haste entalhada e , por consequência, a massa m do sistema massa-mola, são deslocados de suas posições centrais por uma quantidade x (no tempo t) dada por

$$x = A \operatorname{sen} \theta = A \operatorname{sen} \omega t \quad (\text{1.30})$$

Esse movimento é mostrado pela curva senoidal na Figura 1.38. A velocidade da massa m no tempo t é dada por

$$\frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t \quad (\text{1.31})$$

e a aceleração por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 x \quad (\text{1.32})$$

Pode-se ver que a aceleração é diretamente proporcional ao deslocamento. Tal vibração, com a aceleração proporcional ao deslocamento e dirigida à posição média é conhecida como *movimento harmônico simples*. O movimento dado por $x = A \cos \omega t$ é outro exemplo de movimento harmônico simples. A Figura 1.38 mostra claramente a semelhança entre movimento cíclico (harmônico) e movimento senoidal.

FIGURA 1.37 Fresadora horizontal.

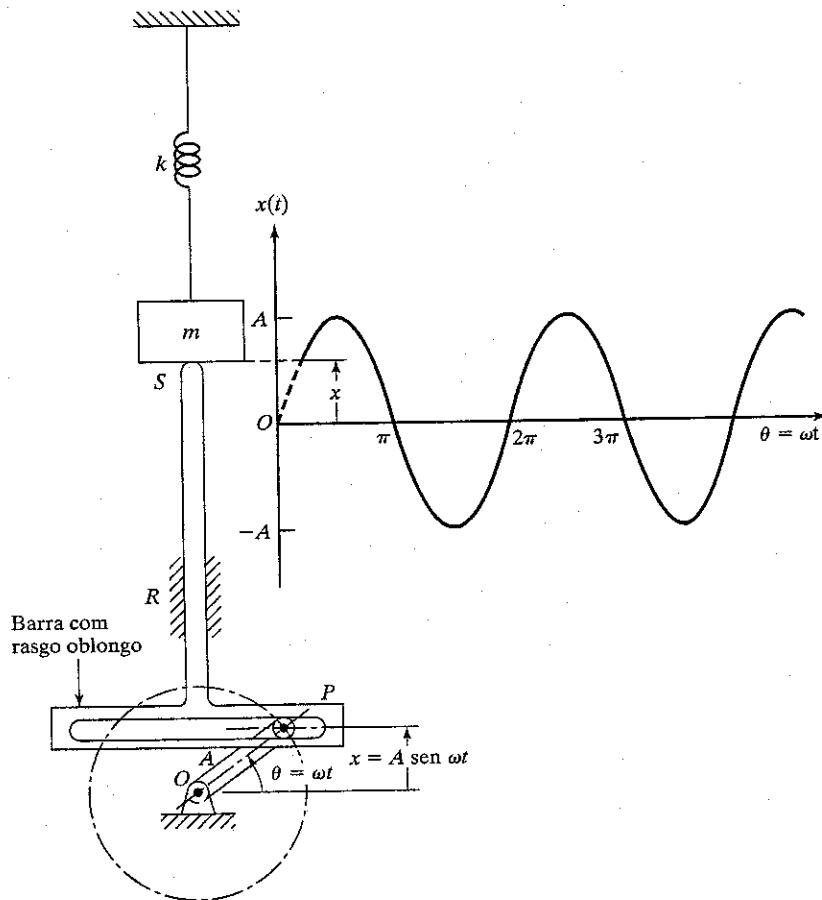


FIGURA 1.38 Mecanismo Scotch Yoke.

1.10.1. Representação vetorial de movimento harmônico

Movimento harmônico pode ser representado convenientemente por meio de um vetor \vec{OP} de magnitude A que gira a uma velocidade angular constante ω . Na Figura 1.39, a projeção da extremidade do vetor $X = \vec{OP}$ sobre o eixo vertical é dada por

$$y = A \sin \omega t \quad (1.33)$$

e sua projeção sobre o eixo horizontal por

$$x = A \cos \omega t \quad (1.34)$$

1.10.2 Representação de movimento harmônico por números complexos

Como acabamos de ver, o método vetorial de representação de movimento harmônico requer a descrição de ambos os componentes, horizontal e vertical. É mais conveniente representar movimento harmônico usando uma representação por números complexos. Qualquer vetor \vec{X} no plano xy pode ser representada como um número complexo:

$$\vec{X} = a + ib \quad (1.35)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e a e b denotam os componentes x e y de \vec{X} respectivamente (Figura 1.40). Os componentes a e b também são denominados as partes *real* e *imaginária* do vetor \vec{X} . Se A denota o módulo ou valor absoluto do vetor \vec{X} , e θ representa o argumento ou o ângulo entre o vetor e o eixo x , então \vec{X} também pode ser expressa como:

$$\vec{X} = A \cos \theta + iA \sin \theta \quad (1.36)$$

com

$$A = (a^2 + b^2)^{1/2} \quad (1.37)$$

e

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a} \quad (1.38)$$

Observando que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ..., $\cos \theta$, e $i \sin \theta$ podem ser expandidos em uma série como

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \\ &= 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} i \sin \theta &= i \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right] \\ &= i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \end{aligned} \quad (1.40)$$

As equações (1.39) e (1.40) dão

$$(\cos \theta + i \sin \theta) = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = e^{i\theta} \quad (1.41)$$

e

$$(\cos \theta - i \sin \theta) = 1 - i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} - \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = e^{-i\theta} \quad (1.42)$$

Assim, a Equação (1.36) pode ser expressa como

$$\vec{X} = A (\cos \theta + i \sin \theta) = Ae^{i\theta} \quad (1.43)$$

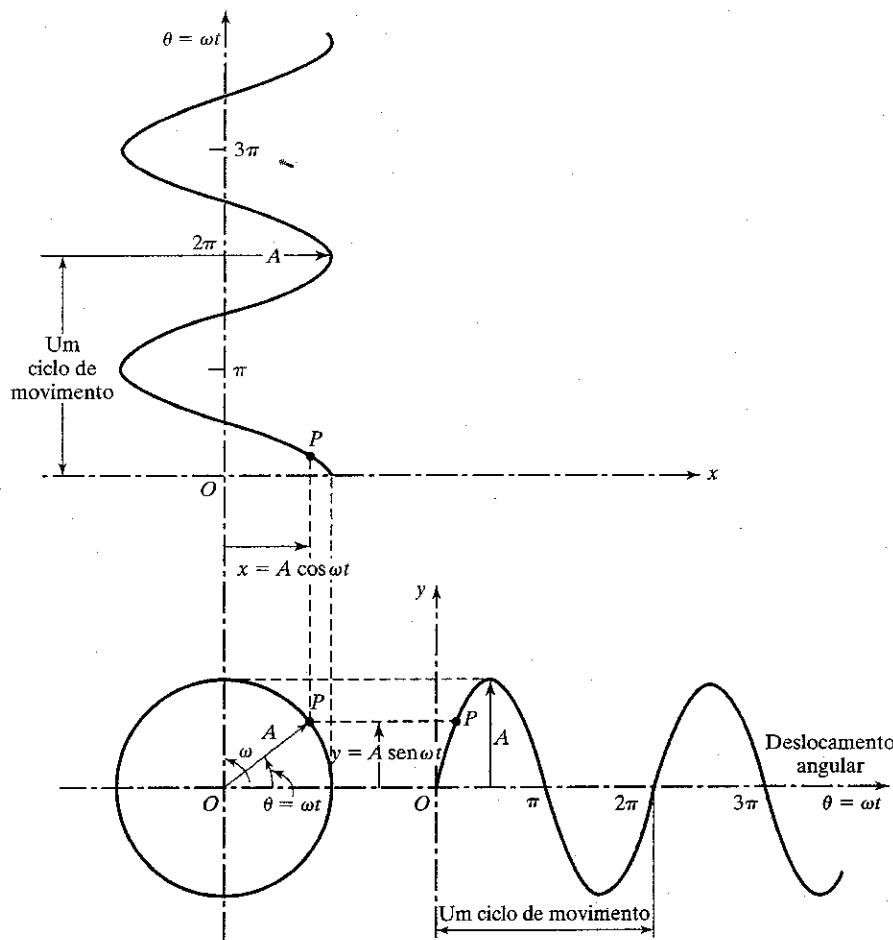


FIGURA 1.39 Movimento harmônico como a projeção da extremidade de um vetor girante.

1.10.3. Álgebra de números complexos

Números complexos podem ser representados sem usar a notação vetorial, como

$$z = a + ib \quad (1.44)$$

onde a e b denotam as partes real e imaginária de z . A adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos podem ser executadas utilizando-se as regras comuns da álgebra. Seja

$$z_1 = a_1 + ib_1 = A_1 e^{i\theta_1} \quad (1.45)$$

$$z_2 = a_2 + ib_2 = A_2 e^{i\theta_2} \quad (1.46)$$

onde

$$A_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}; j = 1, 2 \quad (1.47)$$

y (Imaginário)

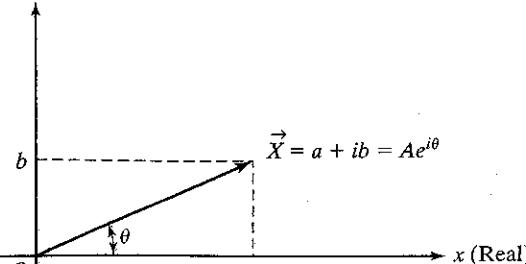


FIGURA 1.40 Representação de um número complexo.

e

$$\theta_j = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{b_j}{a_j}\right); j = 1, 2 \quad (1.48)$$

A soma e a diferença de z_1 e z_2 podem ser calculadas como

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= A_1 e^{i\theta_1} + A_2 e^{i\theta_2} = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= A_1 e^{i\theta_1} - A_2 e^{i\theta_2} = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \end{aligned} \quad (1.50)$$

1.10.4 Operações com funções harmônicas

Usando representação por números complexos, o vetor girante \vec{X} da Figura 1.39 pode ser escrito como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t} \quad (1.51)$$

onde ω denota a freqüência circular (rad/s) de rotação do vetor \vec{X} no sentido anti-horário. A diferenciação do movimento harmônico em relação ao tempo dada pela Equação (1.51) resulta em

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{i\omega t}) = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega \vec{X} \quad (1.52)$$

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(i\omega Ae^{i\omega t}) = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2 \vec{X} \quad (1.53)$$

Assim, o deslocamento, a velocidade e a aceleração podem ser expressos como⁴

$$\text{deslocamento} = \text{Re}[Ae^{i\omega t}] = A \cos \omega t \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \text{velocidade} &= \text{Re}[i\omega Ae^{i\omega t}] = -\omega A \sin \omega t \\ &= \omega A \cos(\omega t + 90^\circ) \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \text{aceleração} &= \text{Re}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = -\omega^2 A \cos \omega t \\ &= \omega^2 A \cos(\omega t + 180^\circ) \end{aligned} \quad (1.56)$$

onde Re denota a parte real. Essas quantidades são mostradas como vetores girantes na Figura 1.41. Pode-se ver que o vetor aceleração está deslocado de 90° em relação ao vetor velocidade, e este está deslocado de 90° em relação ao vetor deslocamento.

Funções harmônicas podem ser somadas vetorialmente, como mostra a Figura 1.42. Se $\text{Re}(\vec{X}_1) = A_1 \cos \omega t$ e $\text{Re}(\vec{X}_2) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$, então a magnitude do vetor resultante \vec{X} é dada por

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos \theta)^2 + (A_2 \sin \theta)^2} \quad (1.57)$$

e o ângulo α por

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A_2 \sin \theta}{A_1 + A_2 \cos \theta}\right) \quad (1.58)$$

Uma vez que as funções originais são dadas como componentes reais, a soma $\vec{X}_1 + \vec{X}_2$ é dada por $\text{Re}(\vec{X}) = A \cos(\omega t + \alpha)$.

EXEMPLO 1.11

Adição de movimentos harmônicos

Determine a soma dos dois movimentos harmônicos $x_1(t) = 10 \cos \omega t$ e $x_2(t) = 15 \cos(\omega t + 2)$.

Solução:

Método 1: Usando relações trigonométricas: Já que a frequência circular é a mesma para ambas, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, expressamos a soma como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) = x_1(t) + x_2(t) \quad (E.1)$$

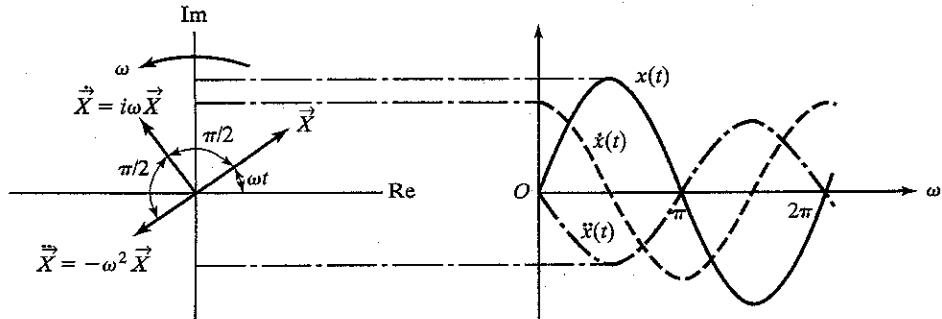


FIGURA 1.41 Deslocamento, velocidade e acelerações como vetores girantes.

⁴ Se o deslocamento harmônico for dado originalmente como $x(t) = A \sin \omega t$, então, temos deslocamento = $\text{Im}[Ae^{i\omega t}] = A \sin \omega t$

velocidade = $\text{Im}[i\omega Ae^{i\omega t}] = \omega A \sin(\omega t + 90^\circ)$

aceleração = $\text{Im}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = \omega^2 A \sin(\omega t + 180^\circ)$

onde Im denota a parte imaginária.

Isto é,

$$\begin{aligned} A(\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha) \\ = 10 \cos \omega t + 15 \cos(\omega t + 2) \\ = 10 \cos \omega t + 15(\cos \omega t \cos 2 - \sin \omega t \sin 2) \end{aligned} \quad (E.2)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \cos \omega t(A \cos \alpha - \sin \omega t(A \sin \alpha)) \\ = \cos \omega t(10 + 15 \cos 2) \\ - \sin \omega t(15 \sin 2) \end{aligned} \quad (E.3)$$

Igualando os coeficientes correspondentes de $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ de ambos os lados, obtemos

$$A \cos \alpha = 10 + 15 \cos 2$$

$$A \sin \alpha = 15 \sin 2$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(10 + 15 \cos 2)^2 + (15 \sin 2)^2} \\ &= 14,1477 \end{aligned} \quad (E.4)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{15 \sin 2}{10 + 15 \cos 2}\right) = 74,5963^\circ \quad (E.5)$$

Método 2: Usando vetores: Para um valor arbitrário de ωt , os movimentos harmônicos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ podem ser denotados graficamente como mostrado na Figura 1.43. A adição vetorial dá o vetor resultante $x(t)$:

$$x(t) = 14,1477 \cos(\omega t + 74,5963^\circ) \quad (E.6)$$

Método 3: Usando representação por números complexos: Os dois movimentos harmônicos podem ser denotados na forma de números complexos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \text{Re}[A_1 e^{i\omega t}] = \text{Re}[10e^{i\omega t}] \\ x_2(t) &= \text{Re}[A_2 e^{i(\omega t+2)}] = \text{Re}[15e^{i(\omega t+2)}] \end{aligned} \quad (E.7)$$

A soma de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ pode ser expressa como

$$x(t) = \text{Re}[A e^{i(\omega t+\alpha)}] \quad (E.8)$$

onde A e α podem ser determinados pelas equações (1.47) e (1.48) como $A = 14,1477$ e $\alpha = 74,5963^\circ$.

1.10.5 Definições e terminologia

As seguintes definições e terminologia são úteis quando se trata de movimento harmônico e outras funções periódicas.

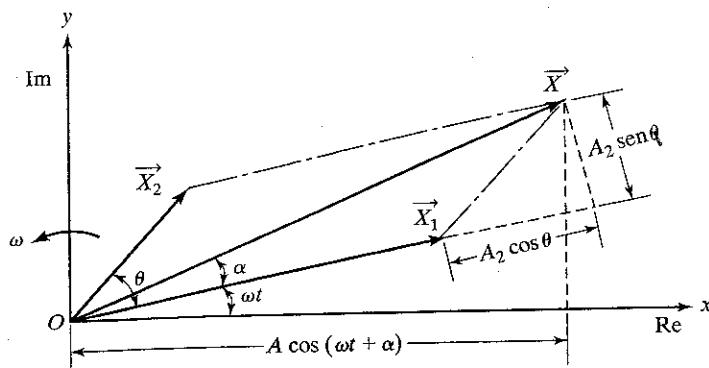


FIGURA 1.42 Adição vetorial de funções harmônicas.

Ciclo. O movimento de um corpo vibratório de sua posição de repouso ou equilíbrio até sua posição extrema em um sentido, então até a posição de equilíbrio, daí até sua posição extrema no outro sentido e de volta à posição de equilíbrio é denominada um *ciclo* de vibração.

Uma revolução (isto é, deslocamento angular de 2π radianos) do pino P na Figura 1.38 ou uma revolução do vetor \overrightarrow{OP} na Figura 1.39 constitui um ciclo.

Amplitude. O máximo deslocamento de um corpo vibratório em relação à sua posição de equilíbrio é denominado *amplitude* de vibração. Nas figuras 1.38 e 1.39, a amplitude de vibração é igual a A .

Período de oscilação. O tempo que leva para concluir um ciclo de movimento é conhecido como *período de oscilação* ou *período* e é denotado por τ . É igual ao tempo requerido para o vetor \overrightarrow{OP} na Figura 1.39 girar um ângulo de 2π e, por consequência,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.59)$$

onde ω é denominada freqüência circular.

Freqüência de oscilação. O número de ciclos por unidade de tempo é denominado *freqüência de oscilação* ou simplesmente *freqüência* e é denotado por f . Assim

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.60)$$

Nesse caso, ω é denominada freqüência circular para distinguir-la da freqüência linear $f = \omega/2\pi$. A variável ω denota a velocidade angular do movimento cíclico; f é medida em ciclos por segundo (Hertz), enquanto ω é medida em radianos por segundo.

Ângulo de fase. Considere dois movimentos vibratórios denotados por

$$x_1 = A_1 \sen \omega t \quad (1.61)$$

$$x_2 = A_2 \sen (\omega t + \phi) \quad (1.62)$$

Os dois movimentos harmônicos dados pelas equações (1.61) e (1.62) são denominados *síncronos* porque têm a mesma freqüência ou velocidade angular, ω . Duas oscilações síncronas não precisam ter a mesma amplitude e não devem atingir seus valores máximos ao mesmo tempo. Os movimentos dados pelas equações (1.61) e (1.62) podem ser representados graficamente como mostra a Figura 1.44. Nessa figura, o

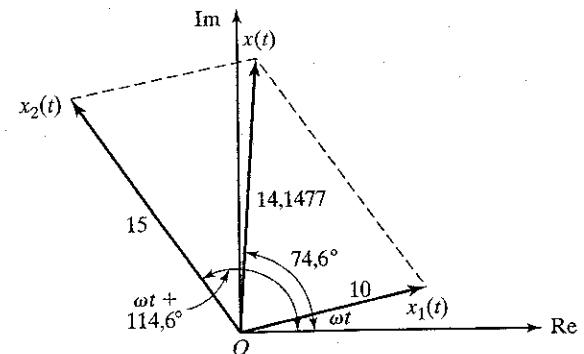


FIGURA 1.43 Adição de movimentos harmônicos.

segundo vetor $\overrightarrow{Ox_2}$ está à frente do primeiro, $\overrightarrow{Ox_1}$, por um ângulo ϕ , conhecido como *ângulo de fase*. Isso significa que o máximo do segundo vetor ocorreria ϕ radianos antes do que o do primeiro vetor. Observe que, em vez dos máximos, quaisquer outros pontos correspondentes podem ser considerados para determinar o ângulo de fase. Nas equações (1.61) e (1.62) ou na Figura 1.44, diz-se que os dois vetores têm uma *diferença de fase* de ϕ .

Freqüência natural. Se, após uma perturbação inicial, um sistema continuar a vibrar por si próprio sem a ação de forças externas, a freqüência com que ele oscila é conhecida como sua *freqüência natural*. Como veremos adiante, um sistema vibratório com n graus de liberdade terá, em geral, n freqüências naturais de vibração distintas.

Batimentos. Quando dois movimentos harmônicos cujas freqüências estão próximas uma da outra são somados, o movimento resultante exibe um fenômeno conhecido como batimentos. Por exemplo, se

$$x_1(t) = X \cos \omega t \quad (1.63)$$

$$x_2(t) = X \cos (\omega + \delta)t \quad (1.64)$$

onde δ é uma quantidade pequena, a soma desses movimentos dá

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X [\cos \omega t + \cos (\omega + \delta)t] \quad (1.65)$$

Usando a relação

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \quad (1.66)$$

A Equação (1.65) pode ser reescrita como

$$x(t) = 2X \cos \frac{\delta t}{2} \cos \left(\omega + \frac{\delta}{2} \right) t \quad (1.67)$$

Essa equação é mostrada em gráfico na Figura 1.45. Pode-se ver que o movimento resultante, $x(t)$, representa uma onda co-senoidal com freqüência $\omega + \delta/2$, que é aproximadamente igual a ω , e com uma amplitude variável de $2X \cos \delta t/2$. Sempre que a amplitude alcançar um máximo, ela é denominada um batimento. A freqüência (δ) à qual a amplitude aumenta gradativamente e depois diminui até desaparecer entre 0 e $2X$ é conhecida como freqüência de batimento. O fenômeno de batimentos é freqüentemente observado em máquinas, estruturas e centrais elétricas. Por exemplo, em máquinas e estruturas,

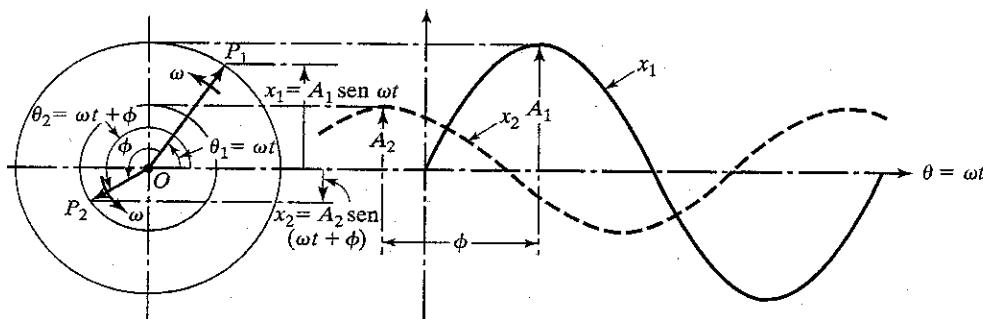


FIGURA 1.44 Diferença de fase entre dois vetores.

o fenômeno do batimento ocorre quando a freqüência excitadora está próxima da freqüência natural do sistema (Seção 3.3.2).

Oitava. Quando o valor máximo de uma faixa de freqüência é duas vezes seu valor mínimo, ela é conhecido como uma faixa de oitava. Por exemplo, cada uma das faixas 75–150 Hz, 150–300 Hz e 300–600 Hz pode ser denominada uma faixa de oitava. Em cada caso, diz-se que os valores máximo e mínimo da freqüência, cuja razão é 2:1, diferem por uma *oitava*.

Decibel. As várias quantidades encontradas na área da vibração e do som (como deslocamento, velocidade, aceleração, pressão e força) são freqüentemente representadas usando a notação de *decibel*. Um decibel (dB) é definido originalmente como uma razão entre potências elétricas, P/P_0 , como

$$\text{dB} = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right) \quad (1.68)$$

onde P_0 é algum valor de referência de potência. Visto que a potência elétrica é proporcional ao quadrado da tensão (X), o decibel também pode ser expresso como

$$\text{dB} = 10 \log\left(\frac{X}{X_0}\right)^2 = 20 \log\left(\frac{X}{X_0}\right) \quad (1.69)$$

onde X_0 é uma tensão de referência especificada. Na prática, a Equação (1.69) também é usada para expressar as razões entre outras quantidades como deslocamentos, velocidades, acelerações e pressões. De modo geral, os valores de referência de X_0 na Equação (1.69) são geralmente considerados como 2×10^{-5} N/m² para pressão e $1 \mu\text{g} = 9,81 \times 10^{-6}$ m/s² para aceleração.

1.11 Análise harmônica⁵

Embora o movimento harmônico seja o mais simples de tratar, o movimento de muitos sistemas vibratórios não é

harmônico. Contudo, em muitos casos, as vibrações são periódicas — por exemplo, o tipo mostrado na Figura 1.46(a). Felizmente, qualquer função periódica de tempo pode ser representada por série de Fourier como uma soma infinita de termos em seno e co-seno [1.36].

1.11.1. Expansão por série de Fourier

Se $x(t)$ é uma função periódica com período τ , sua representação por série de Fourier é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2 \omega t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2 \omega t + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t) \end{aligned} \quad (1.70)$$

onde $\omega = 2\pi/\tau$ é a freqüência fundamental e $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ são coeficientes constantes. Para determinar os coeficientes a_n e b_n , multiplicamos a Equação (1.70) por $\cos n \omega t$ e $\sin n \omega t$, respectivamente, e integramos sobre um período $\tau = 2\pi/\omega$ por exemplo, de 0 a $2\pi/\omega$. Então, percebemos que todos os termos, exceto um do lado direito da equação, serão zero, e obtemos

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) dt = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau x(t) dt \quad (1.71)$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cos n \omega t dt = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau x(t) \cos n \omega t dt \quad (1.72)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \sin n \omega t dt = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau x(t) \sin n \omega t dt \quad (1.73)$$

A interpretação física da Equação (1.70) é que qualquer função periódica pode ser representada como uma soma de

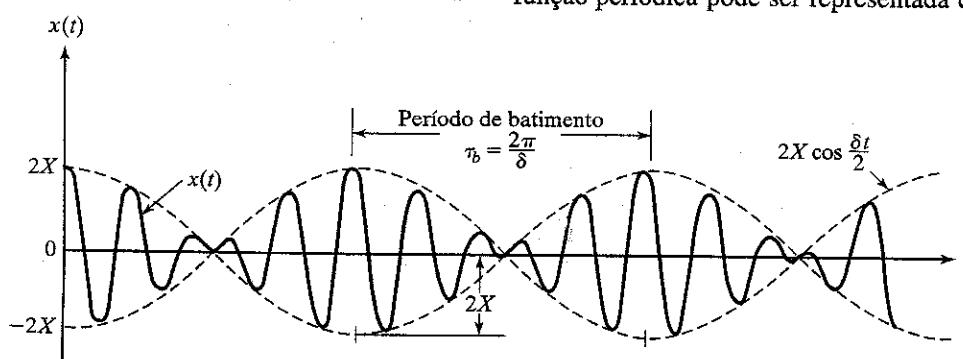


FIGURA 1.45 Fenômeno de batimentos.

⁵ A análise harmônica forma a base para a Seção 4.2.

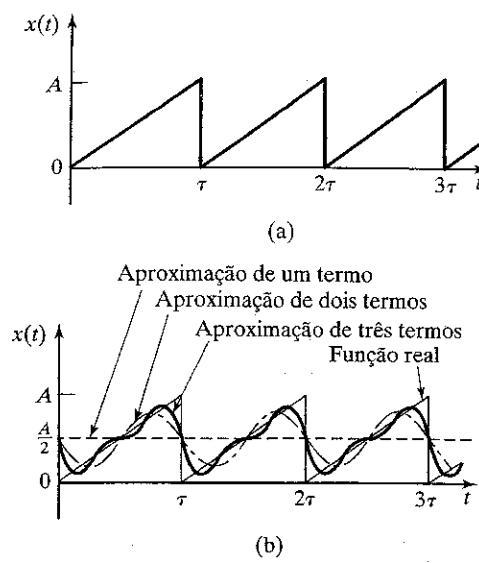


FIGURA 1.46 Uma função periódica.

funções harmônicas. Embora a série na Equação (1.70) seja uma soma infinita, podemos aproximar a maioria das funções periódicas com a ajuda de apenas algumas funções harmônicas. Por exemplo, a onda triangular da Figura 1.46(a) pode ser representada muito aproximadamente pela soma de apenas três funções harmônicas, como mostra a Figura 1.46(b).

A série de Fourier também pode ser representada pela soma de termos somente em seno ou termos somente em co-seno. Por exemplo, a série que usa apenas termos em co-seno pode ser expressa como

$$x(t) = d_0 + d_1 \cos(\omega t - \phi_1) + d_2 \cos(2\omega t - \phi_2) + \dots \quad (1.74)$$

onde

$$d_0 = a_0/2 \quad (1.75)$$

$$d_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \quad (1.76)$$

e

$$\phi_n = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (1.77)$$

Fenômeno de Gibbs. Quando uma função periódica é representada por uma série de Fourier, pode-se observar um comportamento anômalo. Por exemplo, a Figura 1.47 mostra uma onda triangular e sua representação por série de Fourier usando números diferentes de termos. À medida que o número de termos (n) aumenta, pode-se perceber que a aproximação melhora em todos os lugares, exceto na vizinhança da descontinuidade (ponto P na Figura 1.47). Nesse caso, o desvio em relação à verdadeira forma da onda estreita-se cada vez mais, porém não diminui quase nada em relação à amplitude. Observou-se que o erro na amplitude permanece em aproximadamente 9%, mesmo quando $k \rightarrow \infty$. Esse comportamento é conhecido como fenômeno de Gibbs, nome que se deve a seu descobridor.

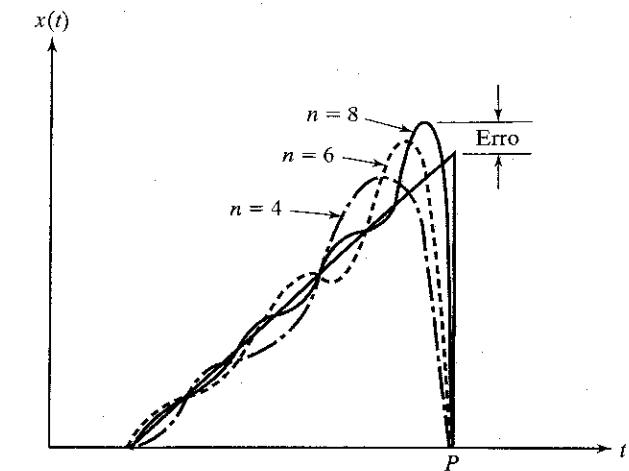


FIGURA 1.47 Fenômeno de Gibbs.

1.11.2 Série de Fourier complexa

Uma série de Fourier também pode ser representada por números complexos. Observando-se pelas equações (1.41) e (1.42) que

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (1.78)$$

e

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t \quad (1.79)$$

$\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ podem ser expressos como

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (1.80)$$

e

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (1.81)$$

Assim, a Equação (1.70) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left(\frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \right) \right\} \\ &= e^{i(0)\omega t} \left(\frac{a_0}{2} - \frac{ib_0}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{in\omega t} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \right) + e^{-in\omega t} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.82)$$

onde $b_0 = 0$. Definindo os coeficientes complexos de Fourier c_n e c_{-n} como

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (1.83)$$

e

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (1.84)$$

a Equação (1.82) pode ser expressa como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (1.85)$$

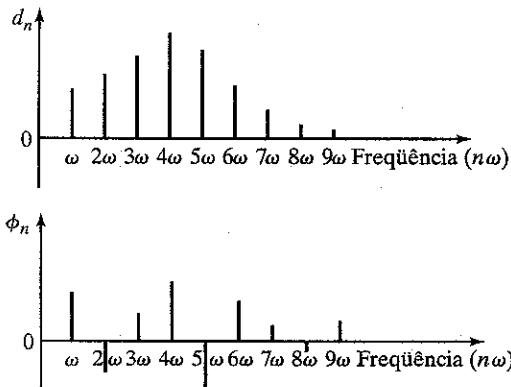


FIGURA 1.48 Espectro de freqüência de uma típica função periódica de tempo.

Os coeficientes de Fourier podem ser determinados usando as equações (1.71) a (1.73), como

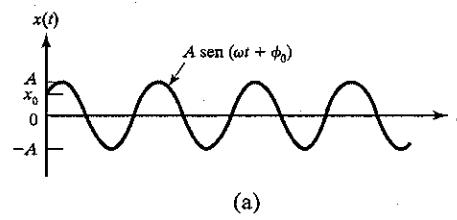
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(t) [\cos n\omega t - i \sin n\omega t] dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(t) e^{-in\omega t} dt \end{aligned} \quad (1.86)$$

1.11.3 Espectro de freqüência

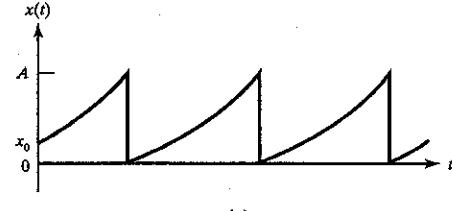
As funções harmônicas $a_n \cos n\omega t$ ou $b_n \sin n\omega t$ na Equação (1.70) são denominadas as *harmônicas* de ordem n da função periódica $x(t)$. A harmônica de ordem n tem um período τ/n . Essas harmônicas podem ser representadas como linhas verticais em um diagrama de amplitude (a_n e b_n ou d_n e ϕ_n) em relação à freqüência ($n\omega$) denominado *espectro de freqüência* ou *diagrama espectral*. A Figura 1.48 mostra um espectro de freqüência típico.

1.11.4 Representações no domínio do tempo e da freqüência

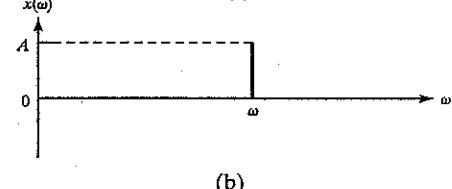
A expansão por série de Fourier permite a descrição de qualquer função periódica usando uma representação no domínio do tempo ou da freqüência. Por exemplo, uma função harmônica dada por $x(t) = A \sen \omega t$ no domínio do tempo (Figura 1.49a) pode ser representada pela amplitude e pela freqüência ω no domínio da freqüência (Figura 1.49b). De modo semelhante, uma função periódica, tal como uma onda triangular, pode ser representada no domínio do tempo, como mostrado na Figura 1.49(c), ou no domínio da freqüência, como indicado na Figura 1.49(d). Observe que as amplitudes d_n e os ângulos de fase ϕ_n correspondentes às freqüências ω_n podem ser usados no lugar das amplitudes a_n e b_n para representação no domínio da freqüência. Usar uma integral de Fourier (considerada na Seção 14.9) permite a representação de funções pares não periódicas em um domínio do tempo ou em um domínio da freqüência. A Figura 1.49 mostra que a representação no domínio da freqüência não dá as condições iniciais. Todavia, essas condições são freqüentemente consideradas desnecessárias em muitas aplicações práticas, e somente as condições de regime permanente são de principal interesse.



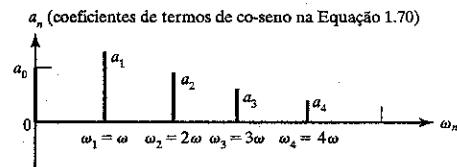
(a)



(c)



(b)



(d)

FIGURA 1.49 Representação de uma função nos domínios do tempo e da freqüência.

1.11.5. Funções pares e ímpares

Uma função par satisfaz a relação

$$x(-t) = x(t) \quad (1.87)$$

Nesse caso, a expansão por série de Fourier de $x(t)$ contém somente termos em co-seno:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \quad (1.88)$$

onde a_0 e a_n são dados pelas Equações (1.71) e (1.72), respectivamente. Uma função ímpar satisfaz a relação

$$x(-t) = -x(t) \quad (1.89)$$

Nesse caso, a expansão por série de Fourier de $x(t)$ contém somente termos em seno:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen n\omega t \quad (1.90)$$

onde b_n é dado pela Equação (1.73). Em alguns casos, determinada função pode ser considerada par ou ímpar, dependendo da localização dos eixos coordenados. Por exemplo, o deslocamen-

to em relação ao eixo vertical de (a) para (b) ou (c) na Figura 1.50(i) a tornará uma função ímpar ou par. Isso significa que precisamos calcular somente os coeficientes b_n ou a_n . De maneira semelhante, um deslocamento de (d) para (e) no eixo do tempo equivale a somar uma constante igual à quantidade de deslocamento. No caso da Figura 1.50(ii), quando a função é considerada uma função ímpar, a expansão por série de Fourier torna-se (Problema 1.65):

$$x_1(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \quad (1.91)$$

Por outro lado, se a função for considerada uma função par, como mostra a Figura 1.50(iii), sua expansão por série de Fourier torna-se (Problema 1.65):

$$x_2(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cos \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \quad (1.92)$$

Visto que as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ representam a mesma onda, exceto pela localização da origem, também existe uma relação entre suas expansões por série de Fourier. Observando que

$$x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) = x_2(t) \quad (1.93)$$

determinamos, pela Equação (1.91),

$$\begin{aligned} x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) &= \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin \frac{2\pi(2n-1)}{\tau} \left(t + \frac{\tau}{4}\right) \\ &= \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \\ &\quad \sin \left\{ \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} + \frac{2\pi(2n-1)}{4} \right\} \end{aligned} \quad (1.94)$$

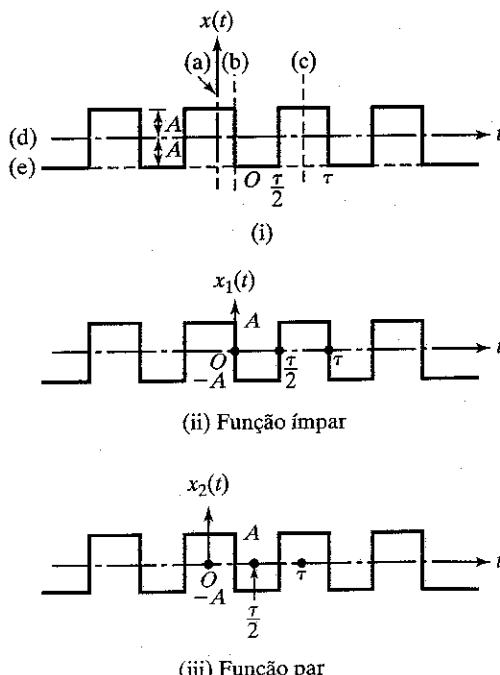


FIGURA 1.50 Funções pares e ímpares.

Usando a relação $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, a Equação (1.94) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) &= \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)} \sin \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \right. \\ &\quad \cos \frac{2\pi(2n-1)}{4} + \cos \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \\ &\quad \left. \sin \frac{2\pi(2n-1)}{4} \right\} \end{aligned} \quad (1.95)$$

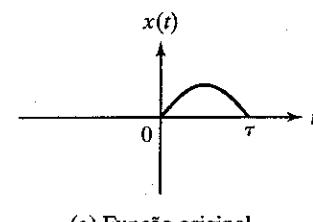
Visto que $\cos[2\pi(2n-1)/4] = 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, e $\sin[2\pi(2n-1)/4] = (-1)^{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, a Equação (1.95) reduz-se a

$$x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cos \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \quad (1.96)$$

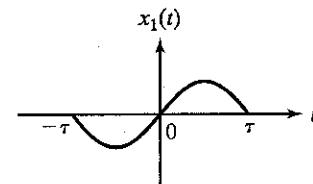
que podemos verificar que é igual à Equação (1.92).

1.11.6 Expansões em meia-faixa

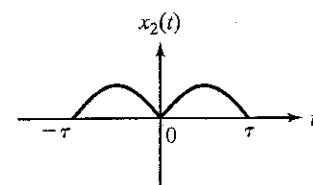
Em algumas aplicações práticas, a função $x(t)$ é definida somente no intervalo 0 a τ como mostrado na Figura 1.51(a). Nesse caso, não há nenhuma condição de periodicidade da função, já que a própria função não é definida fora do intervalo 0 a τ . Todavia, podemos estendê-la arbitrariamente para incluir o intervalo $-\tau$ a 0 como mostrado na Figura 1.51(b) ou na Figura 1.51(c). A extensão da função indicada na Figura 1.51(b) resulta em uma função ímpar, $x_1(t)$ ao passo que a extensão da função mostrada na Figura 1.51(c) resulta em uma função par $x_2(t)$. Assim, a expansão por série de Fourier de $x_1(t)$ resulta em termos somente de seno e a de $x_2(t)$ envolve somente termos



(a) Função original



(b) Extensão como uma função ímpar



(c) Extensão como uma função par

FIGURA 1.51 Extensão de uma função por expansões de meia-faixa.

de co-seno. Essas expansões por série de Fourier de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são conhecidas como expansões de meia-faixa [1.37]. Qualquer dessas expansões de meia-faixa pode ser usada para determinar $x(t)$ no intervalo 0 a τ .

1.11.7 Cálculo numérico de coeficientes

Para formas muito simples da função $x(t)$, as integrais das equações (1.71) a (1.73) podem ser avaliadas com facilidade. Contudo, a integração torna-se complicada se $x(t)$ não tiver uma forma simples. Em algumas aplicações práticas, como no caso da determinação experimental da amplitude de vibração usando um transdutor de vibrações, a função $x(t)$ não está disponível na forma de uma expressão matemática; somente os valores de $x(t)$ em vários pontos t_1, t_2, \dots, t_N estão disponíveis, como mostra a Figura 1.52. Nesses casos, os coeficientes a_n e b_n das equações (1.71) a (1.73) podem ser avaliados usando um procedimento de integração numérica como a regra trapezoidal ou a de Simpson [1.38].

Vamos supor que t_1, t_2, \dots, t_N sejam um número par de pontos equidistantes no período τ ($N = \text{par}$) com os valores correspondentes de $x(t)$ dados por $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_N = x(t_N)$, respectivamente. A aplicação da regra trapezoidal dá os coeficientes a_n e b_n (fazendo $\tau = N\Delta t$) como:⁶

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.97)$$

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cos \frac{2n\pi t_i}{\tau} \quad (1.98)$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i \sin \frac{2n\pi t_i}{\tau} \quad (1.99)$$

EXEMPLO 1.12

Expansão por série de Fourier

Determine a expansão por série de Fourier do movimento da válvula no sistema came-seguidor mostrado na Figura 1.53.

Solução: Se $y(t)$ denotar o movimento vertical da haste de comando da válvula, o movimento da válvula, $x(t)$, pode ser determinado pela relação:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y(t)}{l_1} = \frac{x(t)}{l_2}$$

ou

$$x(t) = \frac{l_2}{l_1} y(t) \quad (E.1)$$

onde

$$y(t) = Y \frac{t}{\tau}; 0 \leq t \leq \tau \quad (E.2)$$

⁶ N precisa ser um número par para a regra de Simpson, mas não para a regra trapezoidal. As equações (1.97) a (1.99) supõem que a condição de periodicidade $x_0 = x_N$ seja válida.

e o período é dado por $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. Definindo

$$A = \frac{Yl_2}{l_1}$$

$x(t)$ pode ser expressa como

$$x(t) = A \frac{t}{\tau}; 0 \leq t \leq \tau \quad (E.3)$$

A Equação (E.3) é mostrada na Figura 1.46(a). Para calcular os coeficientes de Fourier a_n e b_n , usamos as Equações (1.71) a (1.73):

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} A \frac{t}{\tau} dt = \frac{\omega A}{\pi \tau} \left(\frac{t^2}{2} \right)_0^{2\pi/\omega} = A \quad (E.4)$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cos n\omega t dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} A \frac{t}{\tau} \cos n\omega t dt \\ = \frac{A \omega}{\pi \tau} \int_0^{2\pi/\omega} t \cos n\omega t dt = \frac{A}{2\pi^2} \left[\frac{\cos n\omega t}{n^2} + \frac{\omega t \sin n\omega t}{n} \right]_0^{2\pi/\omega} \\ = 0, n = 1, 2, \dots \quad (E.5)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \sin n\omega t dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} A \frac{t}{\tau} \sin n\omega t dt \\ = \frac{A \omega}{\pi \tau} \int_0^{2\pi/\omega} t \sin n\omega t dt = \frac{A}{2\pi^2} \left[\frac{\sin n\omega t}{n^2} - \frac{\omega t \cos n\omega t}{n} \right]_0^{2\pi/\omega} \\ = -\frac{A}{n\pi}, n = 1, 2, \dots \quad (E.6)$$

Como consequência, a expansão por série de Fourier de $x(t)$ é

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sin \omega t - \frac{A}{2\pi} \sin 2\omega t - \dots \\ = \frac{A}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left\{ \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right\} \right] \quad (E.7)$$

Os três primeiros termos são mostrados no gráfico da Figura 1.46(b). Pode-se ver que a aproximação chega ao formato de dente de serra mesmo com um número pequeno de termos.

EXEMPLO 1.13

Análise numérica de Fourier

As variações da pressão da água dentro de um cano mediadas a intervalos de 0,01 segundo são dadas na Tabela 1.1. Essas variações são de natureza repetitiva. Faça uma análise harmônica das variações da pressão e determine as três primeiras harmônicas da expansão por série de Fourier.

Solução: Visto que as variações de pressão dadas repetem-se a cada 0,12 segundo o período é $\tau = 0,12$ s e a freqüência circular da primeira harmônica é 2π radianos por 0,12 s ou

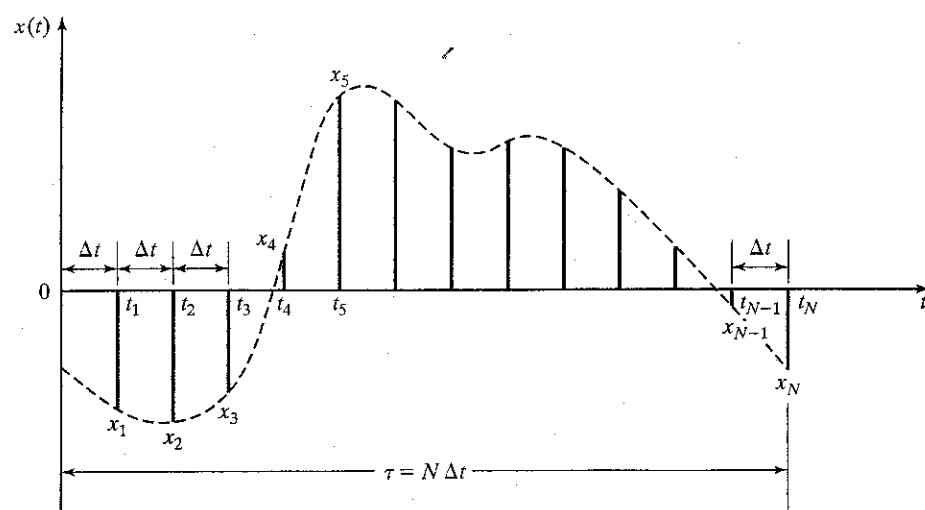
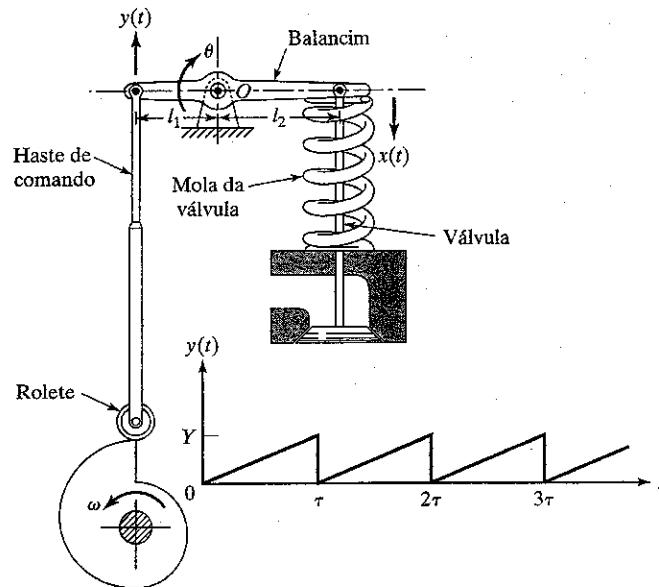
FIGURA 1.52 Valores da função periódica $x(t)$ em pontos discretos t_1, t_2, \dots, t_N 

FIGURA 1.53 Sistema came-seguidor.

TABELA 1.1

Estação de tempo, i	Tempo (s), t_i	Pressão (kN/m^2), p_i
0	0	0
1	0,01	20
2	0,02	34
3	0,03	34
4	0,04	42
5	0,05	49
6	0,06	53
7	0,07	70
8	0,08	60
9	0,09	36
10	0,10	22
11	0,11	16
12	0,12	7
		0

TABELA 1.2

i	t_i	p_i	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$	
			$p_i \cos \frac{2\pi t_i}{0,12}$	$p_i \sin \frac{2\pi t_i}{0,12}$	$p_i \cos \frac{4\pi t_i}{0,12}$	$p_i \sin \frac{4\pi t_i}{0,12}$	$p_i \cos \frac{6\pi t_i}{0,12}$	$p_i \sin \frac{6\pi t_i}{0,12}$
1	0,01	20.000	17.320	10.000	10.000	17.320	0	20.000
2	0,02	34.000	17.000	29.444	-17.000	29.444	-34.000	0
3	0,03	42.000	0	42.000	-42.000	0	0	-42.000
4	0,04	49.000	-24.500	42.434	-24.500	-42.434	49.000	0
5	0,05	53.000	-45.898	26.500	26.500	-45.898	0	53.000
6	0,06	70.000	-70.000	0	70.000	0	-70.000	0
7	0,07	60.000	-51.960	-30.000	30.000	51.960	0	-60.000
8	0,08	36.000	-18.000	-31.176	-18.000	31.176	36.000	0
9	0,09	22.000	0	-22.000	-22.000	0	-16.000	22.000
10	0,10	16.000	8.000	-13.856	-8.000	-13.856	0	0
11	0,11	7.000	6.062	-3.500	3.500	-6.062	0	-7.000
12	0,12	0	0	0	0	0	0	0
$\sum_{i=1}^{12} ()$		409.000	-161.976	49.846	8.500	21.650	-35.000	-14.000
$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} ()$		68.166,7	-26.996,0	8.307,7	1.416,7	3.608,3	-5.833,3	-2.333,3

$\omega = 2\pi/0,12 = 52,36 \text{ rad/s}$. Como o número de valores observados em cada onda (N) é 12, obtemos, pela Equação (1.97)

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} p_i = 68166,7 \quad (\text{E.1})$$

Os coeficientes a_n e b_n podem ser determinados pelas equações (1.98) e (1.99):

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i \cos \frac{2n\pi t_i}{\tau} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} p_i \cos \frac{2n\pi t_i}{0,12} \quad (\text{E.2})$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i \sin \frac{2n\pi t_i}{\tau} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} p_i \sin \frac{2n\pi t_i}{0,12} \quad (\text{E.3})$$

Os cálculos envolvidos nas equações (E.2) e (E.3) são mostrados na Tabela 1.2. Por esses cálculos, pode-se obter a expansão por série de Fourier das variações de pressão $p(t)$ (Equação 1.70):

$$\begin{aligned} p(t) = & 34083,3 - 26996,0 \cos 52,36t + 8307,7 \sin 52,36t \\ & + 1.416,7 \cos 104,72t + 3.608,3 \sin 104,72t \\ & - 5.833,3 \cos 157,08t \\ & - 2.333,3 \sin 157,08t + \dots \text{N/m}^2 \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

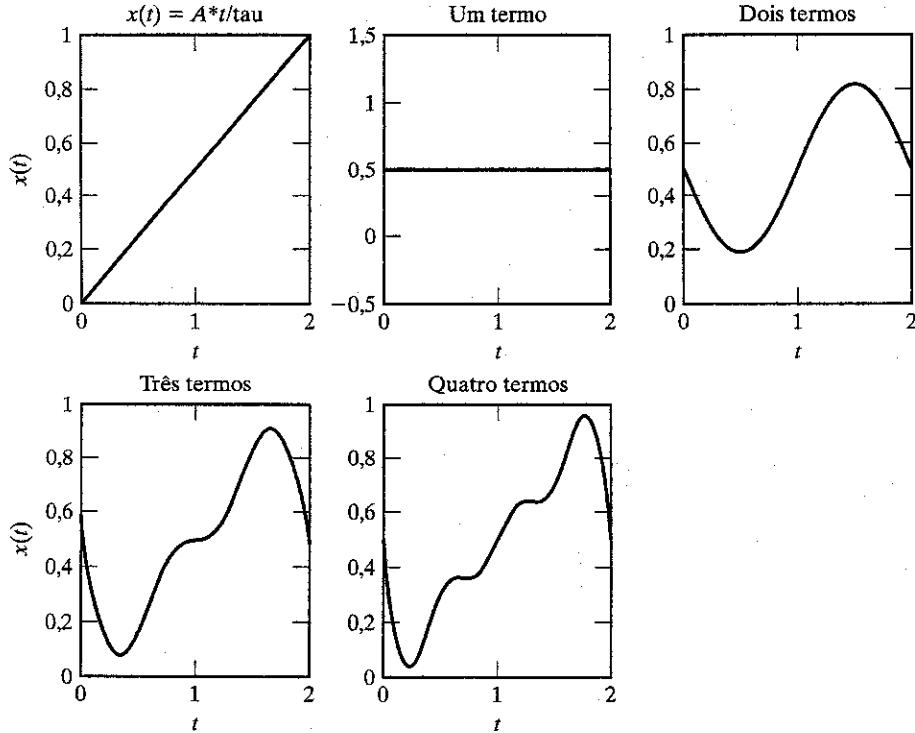
1.12 Exemplos usando MATLAB⁷

EXEMPLO 1.14

Representação gráfica de série de Fourier usando MATLAB

Represente em gráfico a função

$$x(t) = A \frac{t}{\tau}, \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (\text{E.1})$$



e sua representação por série de Fourier com quatro termos

$$\bar{x}(t) = \frac{A}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t \right) \right\} \quad (\text{E.2})$$

para $0 \leq t \leq \tau$ com $A = 1$, $\omega = \pi$ e, $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2$

Solução Escreve-se um programa MATLAB para representar em gráfico as Equações (E.1) e (E.2) com números diferentes de termos, como mostrado a seguir:

```
%ex1_14.m
%plot the function x(t) = A * t / tau
A = 1;
w = pi;
tao = 2;
for i = 1: 101
    t(i) = tao * (i-1)/100;
    x(i) = A * t(i) / tao;
end
subplot(231);
plot(t,x);
ylabel('x(t)');
xlabel('t');
title('x(t) = A*t/tau');
for i = 1: 101
    x1(i) = A / 2;
end
subplot(232);
plot(t,x1);
xlabel('t');
title('One term');
for i = 1: 101
    x2(i) = A/2 - A * sin(w*t(i)) / pi;
end
subplot(233);
plot(t,x2);
xlabel('t');
title('Two terms');
for i = 1: 101
    x3(i) = A/2 - A * sin(w*t(i)) / pi - A *
sin(2*w*t(i)) / (2*pi);
end
subplot(234);
```

⁷ Os códigos-fonte de todos os programas MATLAB são dados no site Web do livro.

```

plot(t,x3);
ylabel('x(t)');
xlabel('t');
title('Three terms');
for i = 1: 101
    t(i) = tau * (i-1)/100;
    x4(i) = A/2 - A * sin(w*t(i)) / pi - A *
sin(2*w*t(i)) / (2*pi)
    - A * sin(3*w*t(i)) / (3*pi);
end
subplot(235);
plot(t,x4);
xlabel('t');
title('Four terms');

```

```

% ex1_15.m
% Plot the Phenomenon of beats
A 5 1;
w 5 20;
delta 5 1;
for i 5 1: 1001
    t(i) 5 15 * (i-1)/1000;
    x(i) 5 2 * A * cos (delta*t(i)/2) * cos ((w 1 delta/2)
*t(i));
end
plot (t,x);
xlabel ('t');
ylabel ('x(t)');
title ('Phenomenon of beats');

```

EXEMPLO 1.15

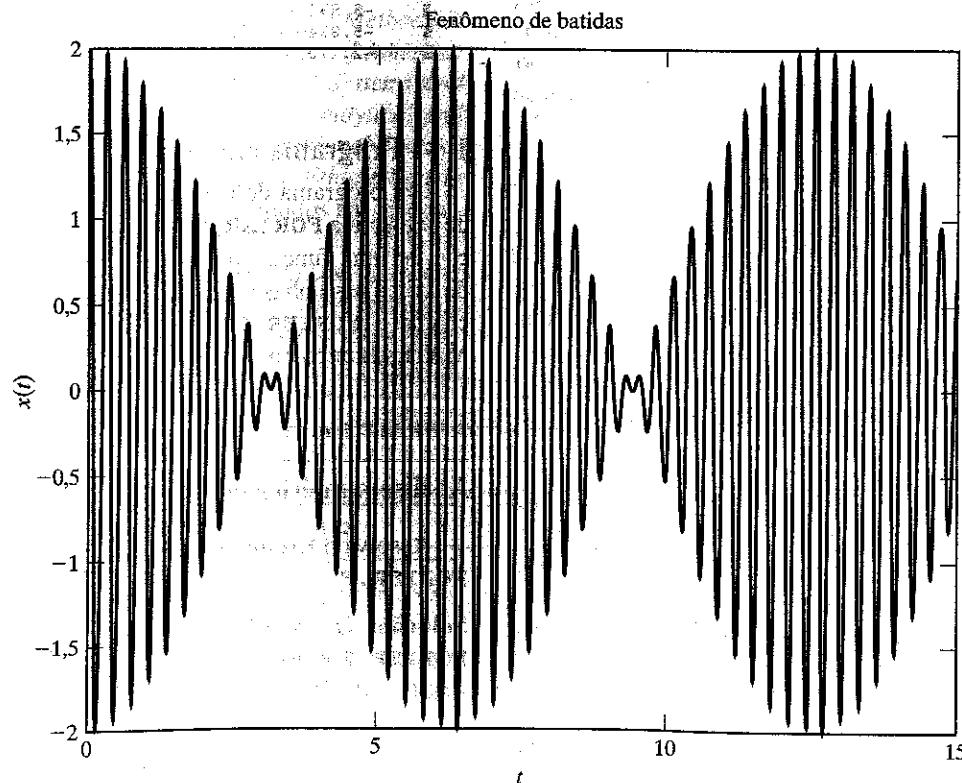
Representação gráfica de batimentos

Uma massa está sujeita a dois movimentos harmônicos dados por $x_1(t) = X \cos \omega t$ e $x_2(t) = X \cos (\omega + \delta)t$ com $X = 1$ cm, $\omega = 20$ rad/s e $\delta = 1$ rad/s. Represente o movimento resultante da massa em gráfico usando MATLAB e identifique a freqüência de batimento.

Solução: O movimento resultante da massa, $x(t)$, é dado por

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\
&= X \cos \omega t + X \cos (\omega + \delta)t \\
&= 2X \cos \frac{\delta t}{2} \cos \left(\omega + \frac{\delta}{2} \right) t
\end{aligned} \tag{E.1}$$

Pode-se ver que o movimento exibe o fenômeno de batimentos com um freqüência de batimento $\omega_b = (\omega + \delta) - \omega = \delta = 1$ rad/s. A Equação (E.1) é representada em gráfico usando MATLAB como mostrado a seguir.



EXEMPLO 1.16

Análise numérica de Fourier usando MATLAB

Faça uma análise harmônica das variações de pressão dadas na Tabela 1.1 e determine as cinco primeiras harmônicas da expansão por série de Fourier.

Solução: Para determinar as cinco primeiras harmônicas das variações de pressão (isto é, $a_0, a_1, \dots, a_5, b_1, \dots, b_5$), desenvolvemos um programa MATLAB de finalidade geral para a análise harmônica de uma função $x(t)$ usando as equações (1.97) a (1.99). O programa, denominado Program1.m, requer os seguintes dados de entrada:

n = número de pontos equidistantes nos quais os valores de $x(t)$ são conhecidos

m = número de coeficientes de Fourier a calcular

tempo = período da função $x(t)$

x = arranjo de dimensão n , contendo os valores conhecidos de $x(t)$. $x(i) = x(t_i)$

t = arranjo de dimensão n , contendo os valores conhecidos de t . $t(i) = t_i$

Os seguintes resultados são gerados pelo programa:

a_0 da Equação (1.97)
 $i, a(i), b(i); i = 1, 2, \dots, m$

onde $a(i)$ e $b(i)$ denotam os valores calculados de a_i e b_i dados pelas Equações (1.98) e (1.99), respectivamente.

```
>> program1
Fourier series expansion of the function x(t)
Data:
Number of data points in one cycle = 12
Number of Fourier Coefficients required = 5
Time period = 1.200000e_001

Station i Time at station i: t(i) x(i) at t(i)
1 1.000000e_002 2.000000e1004
2 2.000000e_002 3.400000e1004
3 3.000000e_002 4.200000e1004
4 4.000000e_002 4.900000e1004
5 5.000000e_002 5.300000e1004
6 6.000000e_002 7.000000e1004
7 7.000000e_002 6.000000e1004
8 8.000000e_002 3.600000e1004
9 9.000000e_002 2.200000e1004
11 1.000000e_001 1.600000e1004
10 1.100000e_001 7.000000e1003
12 1.200000e_001 0.000000e1000

Results of Fourier analysis:
azero=6.816667e+004

values of i a(i) b(i)
1 -2.699630e1004 8.307582e1003
2 1.416632e1003 3.608493e1003
3 -5.833248e1003 -2.333434e1003
4 -5.834026e1002 2.165061e1003
5 -2.170284e1003 -6.411708e1002
```

1.13 Programa em C++

Um programa em C++ interativo denominado **Program1.cpp**⁸ é dado para a análise de harmônicas de uma função $x(t)$. Os parâmetros de entrada e de saída do programa são semelhantes aos do programa MATLAB dados no Exemplo 1.16 e também são descritos nas linhas de comentários do programa.

EXEMPLO 1.17

Análise numérica de Fourier Usando C++

Resolva o Exemplo 1.13 com $M = 5$ usando o programa **Program1.cpp**.

Solução: Os dados de entrada são digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são dadas a seguir.

```
Results of Program1.cpp:
Please input the data:
Please input n:
12
Please input m:
5
Please input time:
0.12
Please input the value of x[i], i = 0, ... n-1:
20000.0
34000.0
```

⁸ Os códigos-fonte de todos os programas em C++ são dados no site Web deste livro.

```
42000.0
49000.0
53000.0
70000.0
60000.0
36000.0
22000.0
16000.0
7000.0
0.0
Please input the value of t[i], i = 0, ... n-1:
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.10
0.11
0.12

FOURIER SERIES EXPANSION OF THE FUNCTION X(T)
DATA:
NUMBER OF DATA POINTS IN ONE CYCLE = 12
NUMBER OF FOURIER COEFFICIENTS REQUIRED = 5
TIME PERIOD = 1.200000e-001

TIME AT VARIOUS STATIONS, T(I) =
1.000000e-002 2.000000e-002 3.000000e-002 4.000000e-002
5.000000e-002 6.000000e-002 7.000000e-002 8.000000e-002
9.000000e-002 1.000000e-001 1.100000e-001 1.200000e-001

KNOWN VALUES OF X(I) AT T(I) =
2.000000e+004 3.400000e+004 4.200000e+004 4.900000e+004
5.300000e+004 7.000000e+004 6.000000e+004 3.600000e+004
2.200000e+004 1.600000e+004 7.000000e+003 0.000000e+000

RESULTS OF FOURIER ANALYSIS:
AZERO = 6.816667e+004

VALUES OF I, A(I) AND B(I) ARE
1 -2.699630e+004 8.307582e+003
2 1.416632e+003 3.608493e+003
3 -5.833248e+003 -2.333434e+003
4 -5.834026e+002 2.165061e+003
5 -2.170284e+003 -6.411708e+002
```

1.14 Programa em FORTRAN

Um programa de computador em FORTRAN, na forma de sub-rotina **FORIER.F**, é dado para a análise de harmônicas de uma função $x(t)$. Os argumentos da sub-rotina são descritos nas linhas de comentário do programa principal que chama o **FORIER.F** e são semelhantes aos do programa MATLAB dado no Exemplo 1.16.

EXEMPLO 1.18

Análise numérica de Fourier usando FORTRAN

Resolva o Exemplo 1.13 com $M = 5$ usando a sub-rotina **FORIER.F**.

Solução: O programa principal que chama a sub-rotina **FORIER.F** e a sub-rotina **FORIER.F** é dado como **PROGRAM1.F**.⁹ O resultado do programa é dado a seguir.

⁹ Os códigos-fonte de todos os programas em FORTRAN são dados no site Web deste livro.

```

FOURIER SERIES EXPANSION OF THE FUNCTION X(T)
DATA:
NUMBER OF DATA POINTS IN ONE CYCLE = 12
NUMBER OF FOURIER COEFFICIENTS REQUIRED = 5
TIME PERIOD = 0.12000000E+00

TIME AT VARIOUS STATIONS, T(I) =
0.99999998E-02 0.20000000E-01 0.29999999E-01 0.39999999E-01
0.50000001E-01 0.59999999E-01 0.70000000E-01 0.79999998E-01
0.90000004E-01 0.10000000E+00 0.11000000E+00 0.12000000E+00

KNOWN VALUES OF X(I) AT T(I) =
0.20000000E+05 0.34000000E+05 0.42000000E+05 0.49000000E+05
0.53000000E+05 0.70000000E+05 0.60000000E+05 0.36000000E+05
0.22000000E+05 0.16000000E+05 0.70000000E+04 0.00000000E+00

RESULTS OF FOURIER ANALYSIS:

AZERO 5 0.68166664E+05

VALUES OF I, A(I) AND (I) ARE
1 -0.26996299E_05 0.83075869E_04
2 0.14166348E_04 0.36084932E_04
3 -0.58332480E_04 -0.23334373E_04
4 -0.58340521E_03 0.21650562E_04
5 -0.21702822E_04 -0.64117188E_03

```

1.15 Literatura de vibrações

A literatura sobre vibrações é ampla e diversa. Há vários livros didáticos disponíveis [1.39], e dezenas de periódicos técnicos publicam regularmente artigos relacionados com vibrações. Isso acontece primariamente porque a vibração afeta um grande número de disciplinas, desde a ciência da resistência de materiais e a análise de maquinaria até estruturas de naves espaciais. Pesquisadores em muitas áreas devem dar atenção à pesquisa de vibrações.

Os periódicos de maior circulação que publicam artigos relacionados com vibrações são *ASME Journal of Vibration and Acoustics*; *ASME Journal of Applied Mechanics*; *Journal of Sound and Vibration*; *AIAA Journal*; *ASCE Journal of Engineering Mechanics*; *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*; *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*; *International Journal of Solids and Structures*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; *Journal of the Acoustical Society of America*; *Sound and Vibration*; *Vibrations, Mechanical Systems and Signal Processing*; *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*; *JSME International Journal Series III—Vibration Control Engineering e Vehicle System Dynamics*. Muitos desses periódicos são citados nas referências dos capítulos.

Além destes, há também *Shock and Vibration Digest*, *Applied Mechanics Reviews* and *Noise e Vibration Worldwide*, periódicos mensais de resenha, que contêm curtas discussões sobre quase todos os artigos publicados sobre vibrações. Fórmulas e soluções em engenharia de vibrações podem ser encontrados imediatamente nas referências. [1.40–1.42.]

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1.1 D. C. Miller, *Anecdotal history of the science of sound*, Nova York: Macmillan, 1935.
- 1.2 N. F. Rieger, “The quest for $\sqrt{k/m}$: notes on the development of vibration analysis, Part I. Genius awakening”, *Vibrations*, v. 3, n. 3/4, dez. 1987, p. 3-10.
- 1.3 Chinese Academy of Sciences (compilador), *Ancient China's technology and science*, Pequim: Foreign Languages Press, 1983.
- 1.4 R. Taton (editor), *Ancient and medieval science: from the beginnings to 1450*, A. J. Pomerans (tradução), Nova York: Basic Books, 1957.
- 1.5 S. P. Timoshenko, *History of strength of materials*, Nova York: McGraw-Hill, 1953.
- 1.6 R. B. Lindsay, “The story of acoustics”, *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 39, n. 4, 1966, p. 629-644.
- 1.7 J. T. Cannon e S. Dostrovsky, *The evolution of dynamics: vibration theory from 1687 to 1742*, Nova York: Springer-Verlag, 1981.
- 1.8 L. L. Bucciarelli e N. Dworsky, *Sophie Germain: an essay in the history of the theory of elasticity*, Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing, 1980.
- 1.9 J. W. Strutt (Baron Rayleigh), *The theory of sound*, Nova York: Dover, 1945.
- 1.10 R. Burton, *Vibration and impact*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958.
- 1.11 A. H. Nayfeh, *Perturbation methods*, Nova York: Wiley, 1973.
- 1.12 S. H. Crandall e W. D. Mark, *Random vibration in mechanical systems*, Nova York: Academic Press, 1963.
- 1.13 J. D. Robson, *Random vibration*, Edinburgh: Edinburgh University Press, 1964.
- 1.14 S. S. Rao, *The finite element method in engineering* (2. ed.), Oxford: Pergamon Press, 1989.
- 1.15 M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp, “Stiffness and deflection analysis of complex structures”, *Journal of Aeronautical Sciences*, v. 23, 1956, p. 805-824.
- 1.16 D. Radaj et al., “Finite element analysis, an automóvel engineer's tool”, *International conference on vehicle structural mechanics: finite element application to design*, Detroit: Society of Automotive Engineers, 1974.
- 1.17 R. E. D. Bishop, *Vibration* (2. ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
- 1.18 M. H. Richardson e K. A. Ramsey, “Integration of dynamic testing into the product elabore o projeto cycle”, *Sound and vibration*, v. 15, n. 11 nov. 1981, p. 14-27.
- 1.19 M. J. Griffin e E. M. Whitham, “The discomfort produced by impulsive whole-body vibration”, *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 65, n. 5, 1980, p. 1277-1284.
- 1.20 J. E. Ruzicka, “Fundamental concepts of vibration control”, *Sound and vibration*, v. 5, n. 7 jul. 1971, p. 16-23.
- 1.21 T. W. Black, “Vibratory finishing goes automatic” (Part 1: Types of machines; Part 2: Steps to automation), *Tool and manufacturing engineer*, jul. 1964, p. 53-56; e ago. 1964, p. 72-76.
- 1.22 S. Prakash e V. K. Puri, *Foundations for machines; analysis and design*, Nova York: Wiley, 1988.
- 1.23 L. Meirovitch, *Fundamentals of vibrations*, Nova York: McGraw-Hill, 2001.
- 1.24 A. Dimarogonas, *Vibration for engineers*, (2. ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- 1.25 E. O. Doebelin, *System modeling and response*, Nova York: Wiley, 1980.
- 1.26 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of materials* (2. ed.), Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1982.
- 1.27 I. Cochin, *Analysis and design of dynamic systems*, Nova York: Harper & Row, 1980.
- 1.28 F. Y. Chen, *Mechanics and design of cam mechanisms*, Nova York: Pergamon Press, 1982.

- 1.29 W. T. Thomson, *Theory of vibration with applications* (4. ed.), Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1993.
- 1.30 N. O. Myklestad, *Fundamentals of vibration analysis*, Nova York: McGraw-Hill, 1956.
- 1.31 C. W. Bert, "Material damping: an introductory review of mathematical models, measures, and experimental techniques", *Journal of Sound and Vibration*, v. 29, n. 2, 1973, p. 129-153.
- 1.32 J. M. Gasiorek e W. G. Carter, *Mechanics of fluids for mechanical engineers*, Nova York: Hart Publishing, 1968.
- 1.33 A. Mironer, *Engineering fluid mechanics*, Nova York: McGraw-Hill, 1979.
- 1.34 F. P. Beer e E. R. Johnston, *Vector mechanics for engineers* (3. ed.), Nova York: McGraw-Hill, 1962.
- 1.35 A. Higdon and W. B. Stiles, *Engineering mechanics* (2. ed.), Nova York: Prentice-Hall, 1955.
- 1.36 E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics* (4. ed.), Nova York: Wiley, 1979.
- 1.37 M. C. Potter e J. Goldberg, *Mathematical methods* (2. ed.), Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1987.
- 1.38 S. S. Rao, *Applied numerical methods for engineers and scientists*, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- 1.39 N. F. Rieger, "The literature of vibration engineering", *Shock and Vibration Digest*, v. 14, n. 1, jan. 1982, p. 5-13.
- 1.40 R. D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Nova York: Van Nostrand Reinhold, 1979.
- 1.41 W. D. Pilkey e P. Y. Chang, *Modern formulas for statics and dynamics*, Nova York: McGraw-Hill, 1978.
- 1.42 C. M. Harris (editor), *Shock and vibration handbook* (3. ed.), Nova York: McGraw-Hill, 1988.
- 1.43 J. E. Shigley e C. R. Mischke, *Mechanical engineering design* (5. ed.), McGraw-Hill, Nova York: 1989.
- 1.44 N. P. Chironis (editor), *Machine Devices and instrumentation*, Nova York: McGraw-Hill, 1966.
- 1.45 D. Morrey e J. E. Mottershead, "Vibratory bowl feeder design using numerical modelling techniques", em *Modern practice in stress and vibration analysis*, J. E. Mottershead (editor), Oxford: Pergamon Press, 1989, p. 211-217.
- 1.46 K. McNaughton (editor), *Solids handling*, Nova York: McGraw-Hill, 1981.
- 1.47 M. M. Kamal e J. A. Wolf, Jr. (editores), *Modern automotive structural analysis*, Van Nostrand Reinhold, Nova York: 1982.
- 1.48 D. J. Inman, *Engineering vibration*, (2. ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001.
- 1.49 J. H. Ginsberg, *Mechanical and structural vibrations: theory and applications*, Nova York: John Wiley, 2001.

QUESTÕES DE REVISÃO

- 1.1 Dê respostas curtas para as seguintes questões.
- Dê dois exemplos de maus e dois de bons efeitos da vibração.
 - Quais são as três partes elementares de um sistema vibratório?
 - Defina o grau de liberdade de um sistema vibratório.
 - Qual é a diferença entre um sistema discreto e um sistema contínuo? É possível resolver qualquer problema de vibração como um sistema discreto?
 - Em análise de vibrações, o amortecimento pode ser sempre desprezado?
 - Um problema de vibração não linear pode ser identificado pelo exame de sua equação diferencial governante?
 - Qual é a diferença entre vibração determinística e vibração aleatória? Dê dois exemplos práticos de cada uma.
 - Quais são os métodos disponíveis para resolver as equações governantes de um problema de vibração?
 - Como acoplar diversas molas para aumentar a rigidez global?
 - Defina rigidez de mola e constante de amortecimento.
 - Quais são os tipos comuns de amortecimento?
 - Dê três modos diferentes de expressar uma função periódica em termos de suas harmônicas.
 - Defina esses termos: ciclo, amplitude, ângulo de fase, frequência linear, período e frequência natural.
 - Qual é a relação entre τ , ω e f ?
 - Como podemos obter frequência, fase e amplitude de um movimento harmônico pelo vetor girante correspondente?
 - Como somar dois movimentos harmônicos com frequências diferentes?
 - O que são batimentos?
 - Defina os termos *decibel* e *oitava*.
 - Explique o fenômeno de Gibbs.
 - O que são expansões de meia-faixa?
- 1.2 Indique se cada uma das seguintes afirmativas é verdadeira ou falsa.
- Se houver perda de energia por qualquer modo durante vibração, o sistema pode ser considerado amortecido.
 - O princípio da superposição é válido para sistemas lineares e não lineares.
 - A frequência à qual um sistema submetido a uma perturbação inicial vibra por conta própria é conhecida como frequência natural.
 - Qualquer função periódica pode ser expandida em uma série de Fourier.
 - Um movimento harmônico é um movimento periódico.
 - A massa equivalente de várias massas em lugares diferentes pode ser determinada usando a equivalência de energia cinética.
 - As coordenadas generalizadas não são necessariamente coordenadas cartesianas.
 - Sistema discreto é o mesmo que sistema de parâmetros concentrados.
 - Considere a soma de movimentos harmônicos $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ com $x_1(t) = 15 \cos \omega t$ e $x_2(t) = 20 \cos(\omega t + 1)$. A amplitude A é dada por 30,808.
 - Considere a soma de movimentos harmônicos $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ com $x_1(t) = 15 \cos \omega t$ e $x_2(t) = 20 \cos(\omega t + 1)$. O ângulo de fase α é dado por 1,57 rad.
- 1.3 Preencha os espaços em branco com a palavra adequada.
- Sistemas sofrem oscilações perigosamente grandes a _____.
 - Vibração não amortecida é caracterizada por nenhuma perda de _____.

3. Um sistema vibratório consiste em uma mola, um amortecedor, e ____.
4. Se um movimento se repetir após intervalos de tempo iguais, ele é denominado um movimento ____.
5. Quando a aceleração é proporcional ao deslocamento e dirigida à posição média, o movimento é denominado harmônico ____.
6. O tempo que leva para completar um ciclo de movimento é denominado ____ de vibração.
7. O número de ciclos por unidade de tempo é denominado ____ de vibração.
8. Diz-se que dois movimentos harmônicos que têm a mesma freqüência são ____.
9. A diferença angular entre a ocorrência de pontos semelhantes em dois movimentos harmônicos é denominada ____.
10. Pode-se considerar que sistemas contínuos ou distribuídos têm um número ____ de graus de liberdade.
11. Sistemas que têm um número finito de graus de liberdade são denominados sistemas ____.
12. O grau de liberdade de um sistema denota o número mínimo de ____ independentes necessários para descrever as posições de todas as partes do sistema em qualquer instante do tempo.
13. Se um sistema vibrar devido apenas à perturbação inicial, é denominado vibração ____.
14. Se um sistema vibrar devido a uma excitação externa, é denominado vibração ____.
15. Ressonância denota a coincidência da freqüência de uma excitação externa com uma freqüência ____ do sistema.
16. Uma função $f(t)$ é denominada uma função ímpar se ____.
17. As expansões de ____ faixa podem ser usadas para representar funções definidas somente no intervalo 0 a τ .
18. Análise ____ trata da representação por série de Fourier de funções periódicas.

1.4 Selecione a resposta mais adequada entre as múltiplas opções dadas.

1. O primeiro sismógrafo do mundo foi inventado:
(a) no Japão. (b) na China. (c) no Egito.
2. Os primeiros experimentos com um pêndulo simples foram realizados por:
(a) Galileu. (b) Pitágoras. (c) Aristóteles.
3. A obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* foi publicada por:
(a) Galileu. (b) Pitágoras. (c) Newton.
4. Formas modais de placas, obtidas com a colocação de areia sobre placas vibratórias, foram observadas pela primeira vez por:
(a) Chladni. (b) D'Alembert. (c) Galileu.
5. A teoria de viga grossa foi apresentada pela primeira vez por:
(a) Mindlin. (b) Einstein. (c) Timoshenko.
6. O grau de liberdade de um pêndulo simples é:
(a) 0. (b) 1. (c) 2.
7. A vibração pode ser classificada em:
(a) um modo. (b) dois modos. (c) vários modos.

8. O fenômeno de Gibbs denota um comportamento anômalo na representação por série de Fourier de uma:
(a) função harmônica.
(b) função periódica.
(c) função aleatória.
 9. A representação gráfica das amplitudes e ângulos de fase dos vários componentes da freqüência de uma função periódica é conhecida como:
(a) diagrama espectral.
(b) diagrama de freqüência.
(c) diagrama harmônico.
 10. Quando um sistema vibra em um meio fluido, o amortecimento é:
(a) viscoso. (b) Coulomb. (c) sólido.
 11. Quando partes de um sistema vibratório deslizam sobre uma superfície seca, o amortecimento é:
(a) viscoso. (b) Coulomb. (c) sólido.
 12. Quando a curva tensão-deformação do material de um sistema vibratório exibe um ciclo de histerese, o amortecimento é:
(a) viscoso. (b) Coulomb. (c) sólido.
 13. A constante elástica equivalente de duas molas paralelas com rigidez k_1 e k_2 , respectivamente, é:
(a) $k_1 + k_2$ (b) $\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$ (c) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
 14. A constante elástica equivalente de duas molas em série com rigidez k_1 e k_2 , respectivamente, é:
(a) $k_1 + k_2$ (b) $\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$ (c) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
 15. A constante elástica de uma viga em balanço com uma massa m na extremidade é
(a) $\frac{3EI}{\beta^3}$ (b) $\frac{\beta^3}{3EI}$ (c) $\frac{Wl^3}{3EI}$
 16. Se $f(-t) = f(t)$, diz-se que a função $f(t)$ é:
(a) par. (b) ímpar. (c) contínua.
- 1.5** Ligue as afirmações correspondentes.
- | | |
|------------------------------|---|
| (1) Pitágoras (582–507 a.C.) | (a) publicou um livro sobre a teoria do som. |
| (2) Euclides (300 a.C.) | (b) primeira pessoa a investigar sons musicais com base científica. |
| (3) Zhang Heng (132 d.C.) | (c) escreveu um tratado denominado <i>Introdução aos Harmônicos</i> . |
| (4) Galileu (1564–1642) | (d) fundador da ciência experimental moderna. |
| (5) Rayleigh (1877) | (e) inventou o primeiro sismógrafo do mundo. |
- 1.6** Ligue as afirmações correspondentes.
- | | |
|--|---|
| (1) Desbalanceamento | (a) pode causar falha de turbinas e motores de aeronaves. |
| (2) Vibração em máquinas-ferramentas durante corte de metal. | (b) causa desconforto em atividade humana. |
| (3) Vibração de pá e disco. | (c) pode fazer que rodas de locomotivas se afastem do trilho. |
| (4) Vibração induzida pelo vento. | (d) pode causar falha em pontes. |
| (5) Transmissão de vibração. | (e) pode dar origem a trepidação. |

1.7 Considere quatro molas com as constantes elásticas:

$$k_1 = 20 \text{ lb/in}, k_2 = 50 \text{ lb/in}, k_3 = 100 \text{ lb/in}, k_4 = 200 \text{ lb/in}.$$

Ligue as constantes elásticas equivalentes.

- | | |
|---|--------------------|
| (1) k_1, k_2, k_3 e k_4 estão em paralelo | (a) 18,9189 lb/in. |
| (2) k_1, k_2, k_3 e k_4 estão em série | (b) 370,0 lb/in. |
| (3) k_1 e k_2 estão em paralelo ($k_{eq} = k_{12}$) | (c) 11,7647 lb/in. |
| (4) k_3 e k_4 estão paralelo ($k_{eq} = k_{34}$) | (d) 300,0 lb/in. |
| (5) k_1, k_2 , e k_3 estão em paralelo ($k_{eq} = k_{123}$) | (e) 70,0 lb/in. |
| (6) k_{123} está em série com k_4 | (f) 170,0 lb/in. |
| (7) k_2, k_3 e k_4 estão em paralelo ($k_{eq} = k_{234}$) | (g) 350,0 lb/in. |
| (8) k_1 e k_{234} estão em série | (h) 91,8919 lb/in. |

PROBLEMAS

Os problemas estão organizados da seguinte maneira:

Problemas	Seção correspondente	Tópico correspondente
1.1 a 1.6	1.6	Procedimento de análise de vibrações
1.7 a 1.29	1.7	Elementos de mola
1.13, 1.29 a 1.34	1.8	Elementos de massa
1.35 a 1.42	1.9	Elementos de amortecimento
1.43 a 1.63	1.10	Movimento harmônico
1.64 a 1.75	1.11	Análise de harmônicas
1.76 a 1.80	1.12	Programas MATLAB
1.81 a 1.84	1.13	Programas em C++
1.85 a 1.88	1.14	Programas em FORTRAN
1.89 a 1.94	—	Exercícios de projeto

1.1* O estudo da reação de um corpo humano sujeito à vibração/choque é importante em muitas aplicações. Quando em pé, as massas da cabeça, parte superior do torso, quadris e pernas e a elasticidade/amortecimento do pescoço, coluna vertebral, abdômen e pernas influenciam a resposta característica. Desenvolva uma seqüência de três aproximações melhoradas para modelar o corpo humano.

1.2* A Figura 1.54 mostra um corpo humano e um sistema de cintos de segurança no momento da colisão de um automóvel [1.47]. Sugira um modelo matemático simples considerando a elasticidade, massa e amortecimento do banco, do corpo humano e do sistema de cintos de segurança para uma análise de vibrações do sistema.

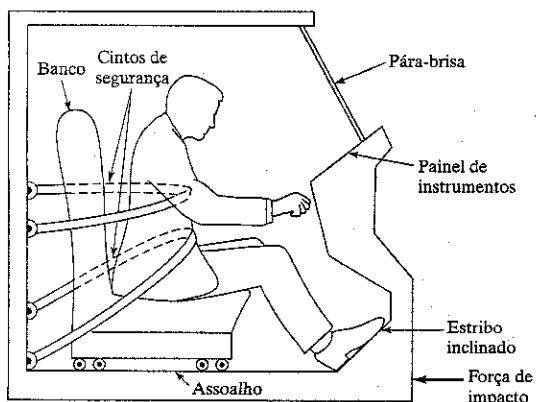


FIGURA 1.54 Um corpo humano e um sistema de cintos de segurança.

* O asterisco denota um tipo de exercício de projeto ou um problema que não tem uma solução única.

1.3* Um motor alternativo está montado sobre uma base, como mostra a Figura 1.55. As forças e momentos de desbalanceamentos desenvolvidos no motor são transmitidos ao suporte e à base. Uma proteção elástica é colocada entre o motor e o bloco da base para reduzir a transmissão da vibração. Desenvolva dois modelos matemáticos do sistema usando um refinamento gradual do processo de modelagem.

1.4* Um automóvel que trafega por uma estrada em mau estado (Figura 1.56) pode ser modelado considerando: (a) peso da carroceria, passageiros, bancos, rodas da frente e rodas traseiras; (b) elasticidade dos pneus (suspenção), molas principais e bancos; e (c) amortecimento dos bancos, absorvedores de choque e pneus. Desenvolva três modelos matemáticos do sistema usando um refinamento gradual no processo de modelagem

1.5* As consequências de uma colisão frontal entre dois automóveis podem ser estudadas considerando o impacto do automóvel contra uma barreira, como mostra a Figura 1.57. Construa um modelo matemático considerando as massas da carroceria do automóvel, motor, transmissão e suspensão e a elasticidade dos pára-choques, radiador, carroceria em chapas metálicas, sistema de transmissão e suportes do motor.

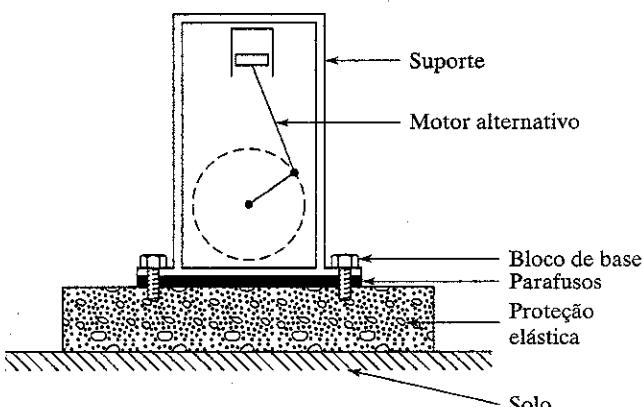


FIGURA 1.55 Um motor alternativo sobre uma base.

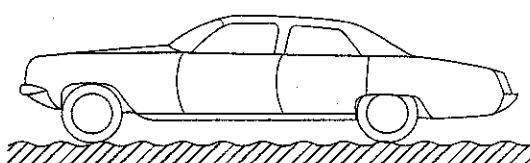


FIGURA 1.56 Um automóvel trafegando por uma rodovia em mau estado.

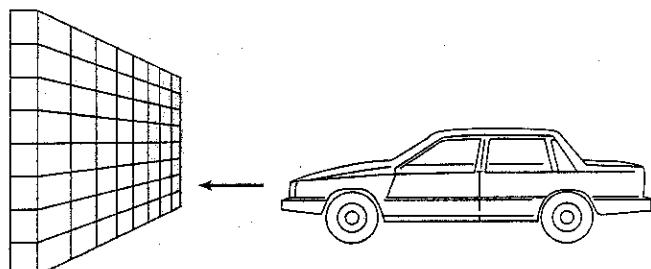


FIGURA 1.57 Colisão de um automóvel contra uma barreira.

1.6* Desenvolva um modelo matemático para o trator e arado mostrados na Figura 1.58 considerando massa, elasticidade e amortecimento dos pneus, absorvedores de choque e arado (lâminas).

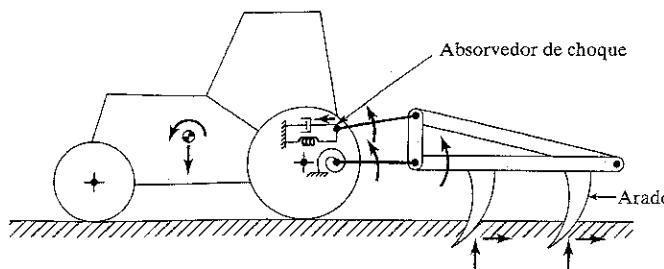


FIGURA 1.58 Um trator com arado.

- 1.7 Determine a constante elástica equivalente do sistema mostrado na Figura 1.59.
- 1.8 Na Figura 1.60, determine a constante elástica equivalente do sistema na direção de θ .
- 1.9 Determine a constante elástica torcional equivalente do sistema mostrado na Figura 1.61. Admita que k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são constantes torcionais e que k_5 e k_6 são constantes elásticas lineares.

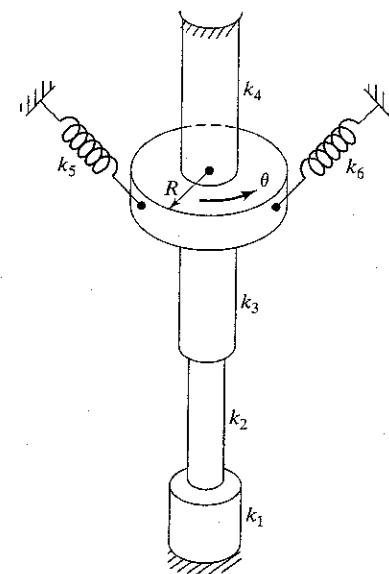


FIGURA 1.61

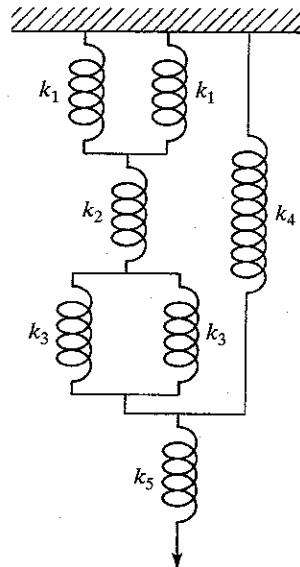


FIGURA 1.59 Molas em série-paralelo.

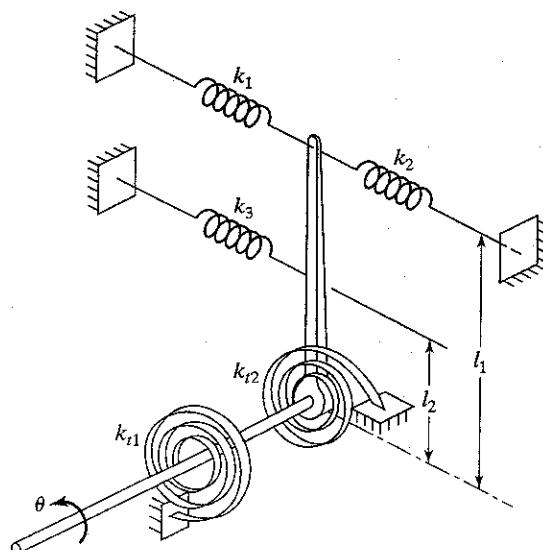


FIGURA 1.60

- 1.10 Uma máquina de massa $m = 500$ kg está montada sobre uma viga de aço simplesmente apoiada de comprimento $l = 2$ m, seção transversal retangular (profundidade = 0,1 m, largura = 1,2 m) e módulo de Young $E = 2,06 \times 10^{11}$ N/m². Para reduzir a deflexão vertical da viga, uma mola de rigidez k é acoplada ao ponto central do vão, como mostra a Figura 1.62. Determine o valor de k necessário para reduzir a deflexão da viga em.
 - a. 25 por cento de seu valor original.
 - b. 50 por cento de seu valor original.
 - c. 75 por cento de seu valor original.
 Admita que a massa da viga seja desprezível.
- 1.11 Quatro barras rígidas idênticas — cada uma de comprimento a — estão conectadas a uma mola de rigidez k para formar uma estrutura que deve suportar uma carga vertical P , como mostrado nas Figuras 1.63(a) e (b). Determine a constante elástica equivalente do sistema (k_{eq}) para cada caso, desprezando as massas das barras e o atrito nas junções.
- 1.12 O tripé mostrado na Figura 1.64 é usado para montar um instrumento eletrônico que determina a distância entre dois pontos no espaço. As hastes de apoio do tripé estão localizadas simetricamente em relação ao ponto médio do eixo vertical e cada uma faz um ângulo α com a vertical. Se cada haste de apoio tiver um comprimento l e rigidez axial k , determine a rigidez equivalente do tripé no sentido vertical.
- 1.13 Determine a constante elástica equivalente e a massa equivalente do sistema mostrado na Figura 1.65 com relação a θ . Admita que as barras AOB e CD sejam rígidas com massa desprezível.

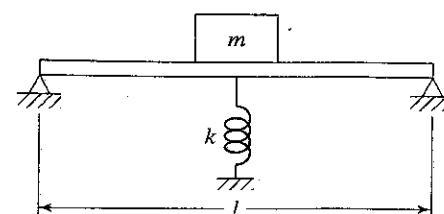


FIGURA 1.62

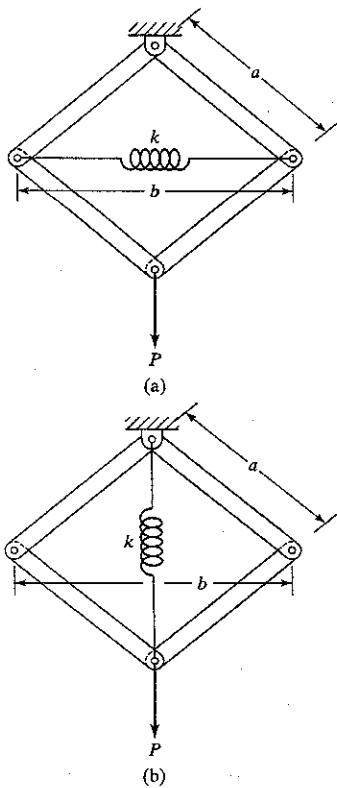


FIGURA 1.63

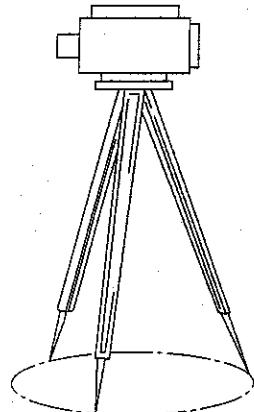


FIGURA 1.64

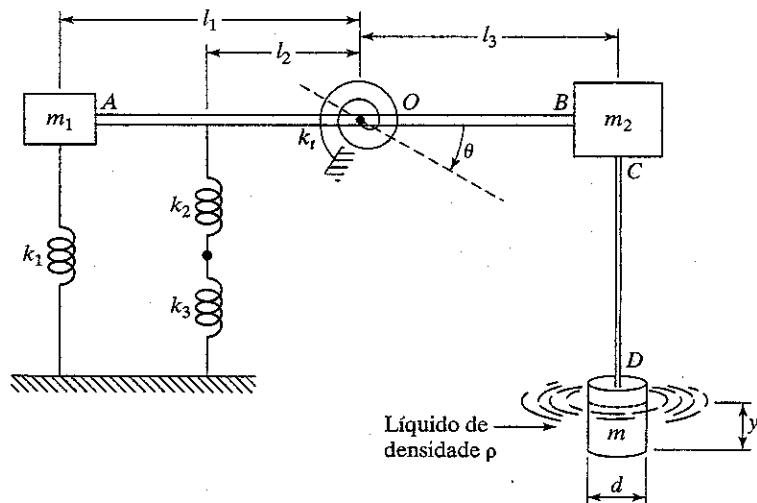


FIGURA 1.65

- 1.14** Determine o comprimento do eixo oco uniforme equivalente de diâmetro interno d e espessura t que tem a mesma constante elástica axial que o eixo cônicamente sólido mostrado na Figura 1.66.

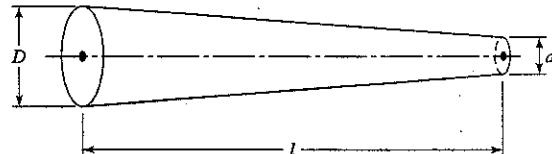


FIGURA 1.66

- 1.15** A característica força-deflexão de uma mola é descrita por $F = 500x + 2x^3$, onde a força (F) é expressa em Newtons e a deflexão (x) é expressa em milímetros. Determine (a) a constante elástica linearizada em $x = 10$ mm e (b) as forças da mola em $x = 9$ mm e $x = 11$ mm usando a constante elástica linearizada. Determine também o erro nas forças da mola determinadas em (b).

- 1.16** A Figura 1.67 mostra uma mola de ar. Esse tipo de mola costuma ser usado para obter freqüências naturais muito baixas e, ao mesmo tempo, manter deflexão zero sob cargas estáticas. Determine a constante elástica dessa mola de ar admitindo que a pressão p e o volume v mudam adiabaticamente quando a massa m se move.

Sugestão:

$pv^\gamma = \text{constante}$ para um processo adiabático, onde γ é a razão entre calores específicos. Para o ar, $\gamma = 1,4$.

- 1.17** Determine a constante elástica equivalente do sistema mostrado na Figura 1.68 no sentido da carga P .

- 1.18*** Elabore o projeto de uma mola de ar usando um recipiente cilíndrico e um pistão para conseguir uma constante elástica de 75 lb/in. Admita que a máxima pressão de ar disponível seja 200 psi.

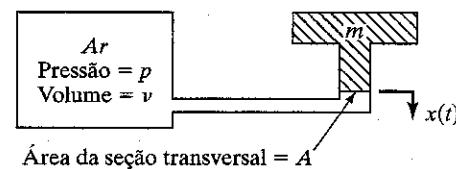


FIGURA 1.67

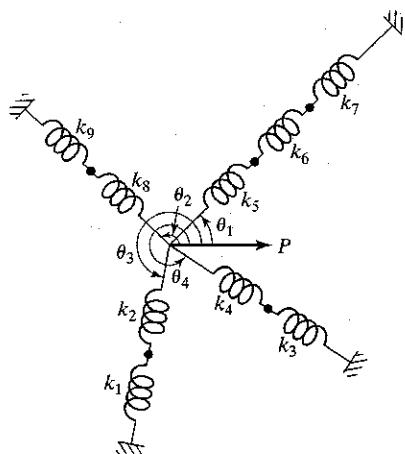


FIGURA 1.68

- 1.19** A relação força (F)-deflexão (x) de uma mola não linear é dada por

$$F = ax + bx^3$$

onde a e b são constantes. Determine a constante elástica linear equivalente quando a deflexão é 0,01 m com $a = 20.000 \text{ N/m}$ e $b = 40 \times 10^6 \text{ N/m}^3$.

- 1.20** Duas molas não lineares, S_1 e S_2 , são ligadas de dois modos diferentes como indicado na Figura 1.69. A força, F_i , na mola S_i está relacionada com sua deflexão (x_i) por

$$F_i = a_i x_i + b_i x_i^3, i = 1, 2$$

onde a_i e b_i são constantes. Se uma constante elástica linear equivalente, k_{eq} , for definida por $W = k_{eq}x$, onde x é a deflexão total do sistema, determine uma expressão para k_{eq} em cada caso.

- 1.21*** Projete uma mola helicoidal de compressão em aço que satisfaça os seguintes requisitos:

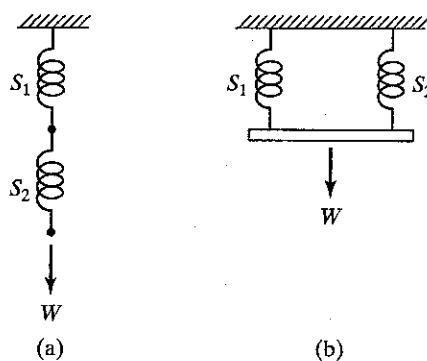


FIGURA 1.69

Rigidez da mola (k) $\geq 8.000 \text{ N/mm}$.

Freqüência natural fundamental de vibração (f_1) $\geq 0,4 \text{ Hz}$.
Índice da mola (D/d) ≥ 6 .

Número de espiras ativas (N) ≥ 10 .

A rigidez e a freqüência natural fundamental da mola são dadas por [1.43]:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3N} \quad \text{e} \quad f_1 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{W}}}$$

onde G = módulo de elasticidade transversal, d = diâmetro do arame, D = diâmetro do enrolamento, W = peso da mola e g = aceleração devido à gravidade.

- 1.22** Determine a constante elástica da barra bimetálica mostrada na Figura 1.70 em movimento axial.

- 1.23** Um eixo de hélice cônicamente sólido em aço é mostrado na Figura 1.71. Determine a constante torcional do eixo.

- 1.24** Um eixo de hélice composto fabricado em aço e alumínio é mostrado na Figura 1.72.

(a) Determine a constante torcional do eixo.

(b) Determine a constante torcional do eixo composto quando o diâmetro interno do tubo de alumínio for 5 cm em vez de 10 cm.

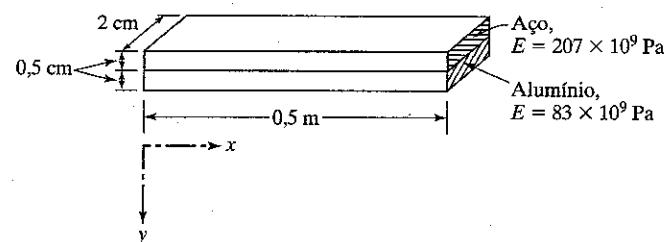


FIGURA 1.70

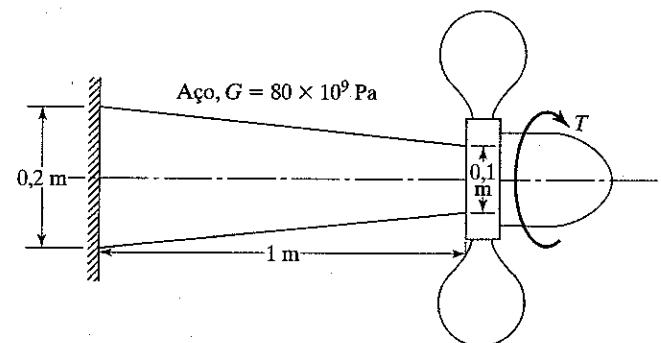


FIGURA 1.71

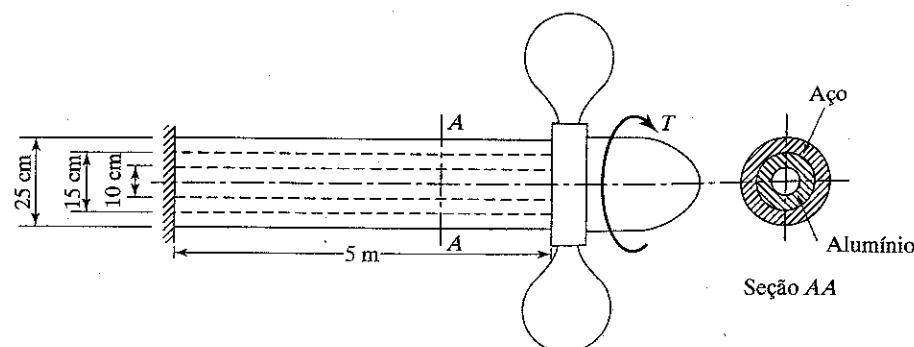


FIGURA 1.72

- 1.25 Considere duas molas helicoidais com as seguintes características:

Mola 1: material: aço; número de espiras: 10; diâmetro médio do enrolamento: 12 in; diâmetro do arame: 2 in; comprimento livre: 15 in; módulo de elasticidade transversal: 12×10^6 psi.

Mola 2: material: alumínio; número de espiras: 10; diâmetro médio do enrolamento: 10 in; diâmetro do arame: 1 in; comprimento livre: 15 in; módulo de elasticidade transversal: 4×10^6 psi.

Determine a constante elástica equivalente quando (a) a mola 2 é colocada dentro da mola 1, e (b) a mola 2 é colocada sobre a mola 1.

- 1.26 Resolva o Problema 1.25 admitindo que os diâmetros dos arames das molas 1 e 2 sejam 1,0 in e 0,5 in em vez de 2,0 in e 1,0 in, respectivamente.

- 1.27 A lança *AD* da escavadeira mostrada na Figura 1.73 pode ser aproximada como um tubo de aço com diâmetro externo 10 in, diâmetro interno 9,5 in e comprimento 100 in, com um coeficiente de amortecimento viscoso de 0,4. A lança *DE* pode ser aproximada como um tubo de aço de diâmetro externo 7 in, diâmetro interno 6,5 in e comprimento 75 in, com um coeficiente de amortecimento viscoso de 0,3. Estime a constante elástica equivalente e o coeficiente de amortecimento equivalente da escavadeira admitindo que a base *AC* seja fixa.

- 1.28 Um trocador de calor consiste em seis tubos de aço inoxidável idênticos conectados em paralelo como mostra a Figura 1.74. Se cada tubo tiver diâmetro externo de 0,30 in, diâmetro

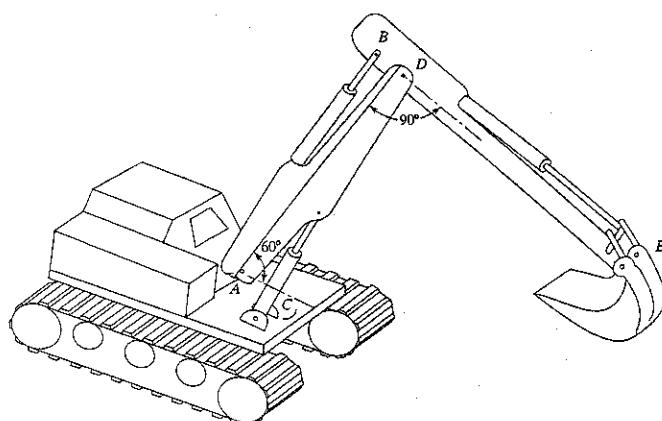


FIGURA 1.73 Uma escavadeira.

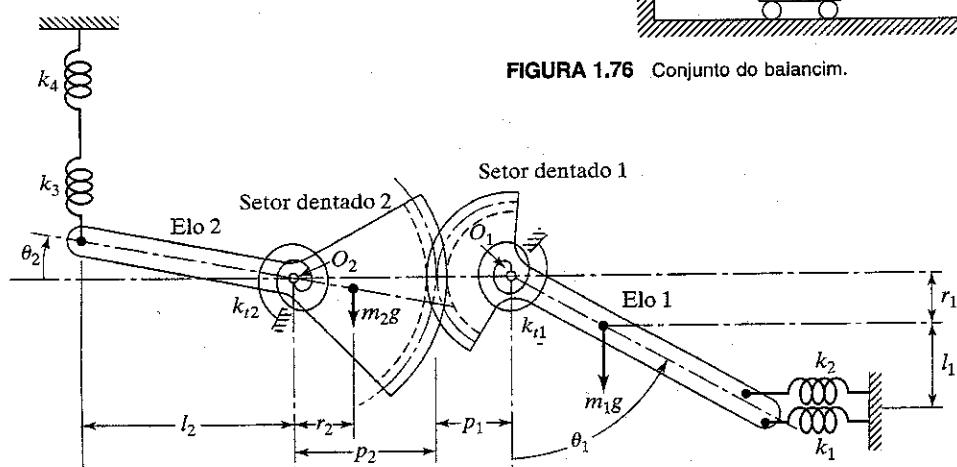


FIGURA 1.75 Dois setores dentados.

interno de 0,29 in e comprimento de 50 in, determine a rigidez axial e a rigidez torcional ao redor do eixo longitudinal do trocador de calor.

- 1.29 Dois setores dentados localizados nas extremidades dos elos 1 e 2 estão engrenados e giram ao redor de O_1 e O_2 como mostra a Figura 1.75. Se os elos 1 e 2 forem ligados às molas k_1 a k_4 e k_{t1} e k_{t2} como mostrado, determine a rigidez torcional equivalente da mola e o momento de inércia de massa equivalente do sistema com referência a θ_1 . Admita que (a) o momento de inércia de massa do elo 1 (incluindo o setor dentado) ao redor de O_1 é J_1 e que o do elo 2 (incluindo o setor dentado) ao redor de O_2 é J_2 e (b) os ângulos θ_1 e θ_2 são pequenos.

- 1.30 Na Figura 1.76, determine a massa equivalente do conjunto do balancim em relação à coordenada x .

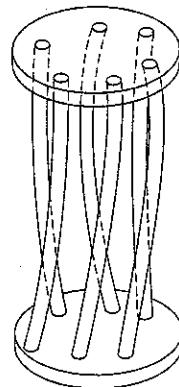


FIGURA 1.74 Um trocador de calor.

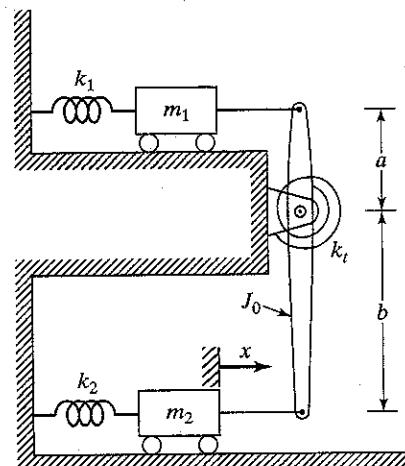


FIGURA 1.76 Conjunto do balancim.

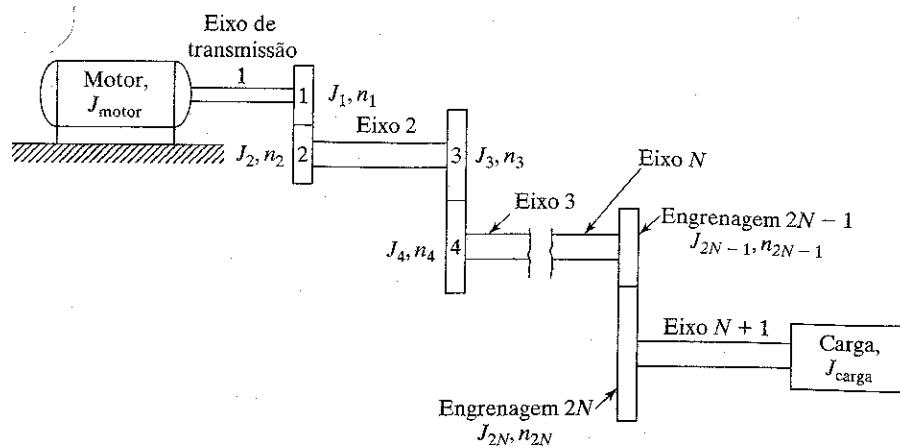


FIGURA 1.77

- 1.31 Determine o momento de inércia de massa equivalente do trem de engrenagens mostrado na Figura 1.77 em relação ao eixo de transmissão. Na Figura 1.77, J_i e n_i denotam o momento de inércia de massa e o número de dentes, respectivamente, da engrenagem i , $i = 1, 2, \dots, 2N$.
- 1.32 Duas massas com momentos de inércia de massa J_1 e J_2 são colocadas sobre eixos giratórios rígidos conectados por engrenagens, como mostra a Figura 1.78. Se o número de dentes das engrenagens 1 e 2 forem n_1 e n_2 , respectivamente, determine o momento de inércia de massa equivalente correspondente a θ_1 .
- 1.33 A Figura 1.79 mostra um modelo simplificado de uma bomba de petróleo na qual o movimento rotativo da alavanca é con-

vertido no movimento alternativo do pistão. Determine a massa equivalente, m_{eq} , do sistema no ponto A.

- 1.34 Determine a massa equivalente do sistema mostrado na Figura 1.80.
- 1.35 Determine uma única constante de amortecimento equivalente para os seguintes casos.
- Quando três amortecedores estão em paralelo.
 - Quando três amortecedores estão em série.
 - Quando três amortecedores estão conectados a uma barra rígida (Figura 1.81) e o amortecedor equivalente está no ponto c_1 .
 - Quando três amortecedores torcionais estão localizados a eixos engrenados (Figura 1.82) e o amortecedor equivalente está no ponto c_{11} .

Sugestão: A energia dissipada por um amortecedor viscoso em um ciclo durante movimento harmônico circular é dada por $\pi c \omega X^2$, onde c é a constante de amortecimento, ω é a freqüência e X é a amplitude de oscilação.

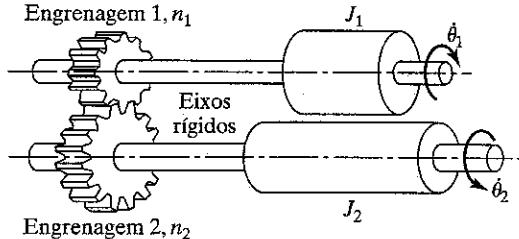


FIGURA 1.78 Massas rotacionais em eixos engrenados.

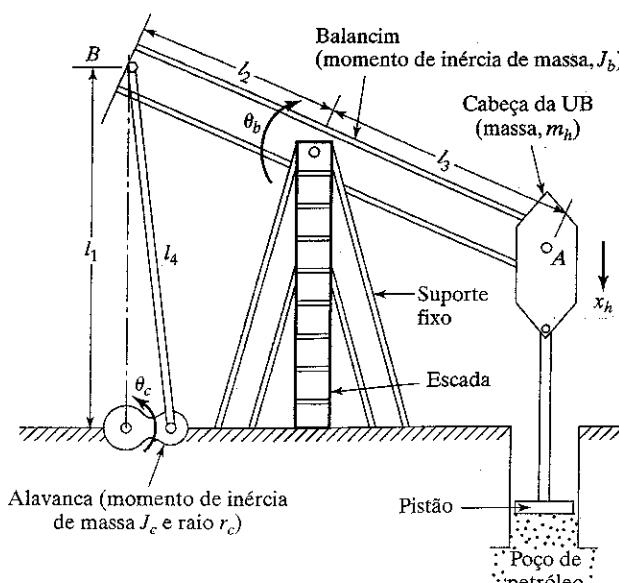


FIGURA 1.79

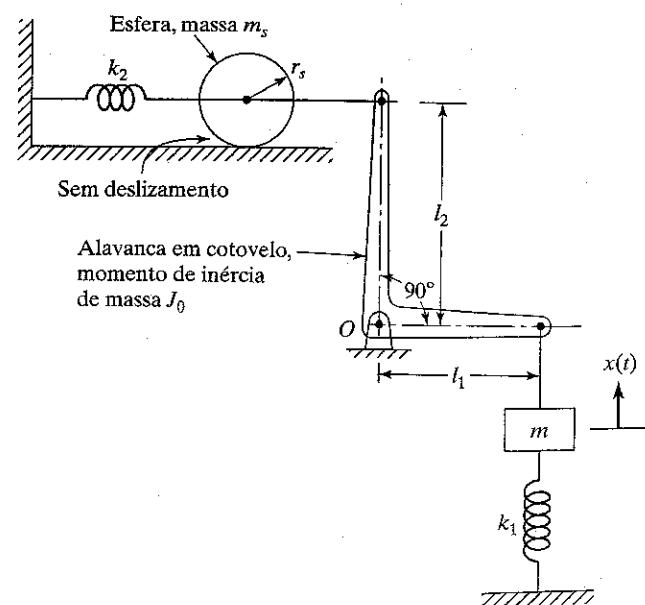


FIGURA 1.80

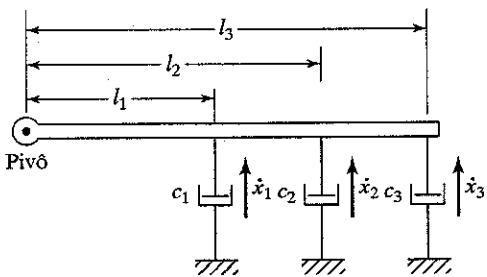


FIGURA 1.81 Amortecedores conectados a uma barra rígida.

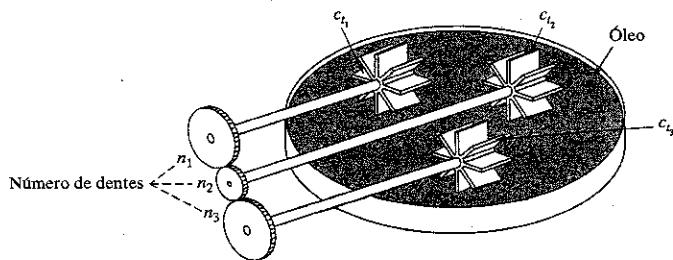


FIGURA 1.82 Amortecedores localizados em eixos engrenados.

- 1.36*** Elabore o projeto de um amortecedor viscoso do tipo pistão-cilindro para conseguir uma constante de amortecimento de 1 lb-s/in usando um fluido de viscosidade 4μ reyn (1 reyn = 1 lb-s/in²).
- 1.37*** Elabore o projeto de um absorvedor de choque (amortecedor do tipo pistão-cilindro) para obter uma constante de amortecimento de 10^5 lb-s/in usando óleo SAE30 a 21,1 °C. O diâmetro do pistão tem de ser menor que 2,5 in.
- 1.38** Desenvolva uma expressão para a constante de amortecimento de um amortecedor rotacional mostrado na Figura 1.83 em termos de D , d , l , h , ω e μ , onde ω denota a velocidade angular constante do cilindro interno e d e h representam as folgas radial e axial entre os cilindros interno e externo.
- 1.39** A relação força (F) – velocidade (\dot{x}) de um amortecedor não linear é dada por

$$F = a\dot{x} + b\dot{x}^2$$

onde a e b são constantes. Determine a constante de amortecimento linear equivalente quando a velocidade relativa é 5 m/s com $a = 5$ N-s/m e $b = 0,2$ N-s²/m².

- 1.40** A constante de amortecimento (c) devido ao deslizamento por atrito superficial de uma placa retangular que se move em um fluido de viscosidade μ é dada por (Figura 1.84).

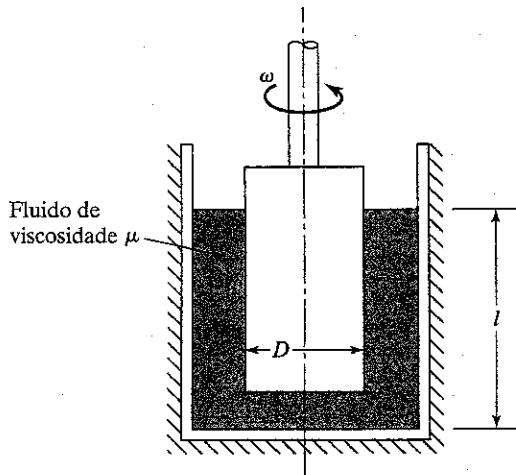


FIGURA 1.83

$$c = 100 \mu l^2 d$$

Elabore o projeto de um amortecedor do tipo placa (mostrado na Figura 1.35) que resulte em uma constante de amortecimento idêntica para o mesmo fluido.

- 1.41** A constante de amortecimento (c) do amortecedor pistão-cilindro mostrado na Figura 1.85 é dada por [1.27]:

$$c = \frac{6\pi\mu l}{h^3} \left[\left(a - \frac{h}{2} \right)^2 - r^2 \right] \left[\frac{a^2 - r^2}{a - \frac{h}{2}} - h \right]$$

Determine a constante de amortecimento do amortecedor para os seguintes dados: $\mu = 0,3445$ Pa-s, $l = 10$ cm, $h = 0,1$ cm, $a = 2$ cm, $r = 0,5$ cm.

- 1.42** No Problema 1.41, usando os dados apresentados como referência, determine a variação da constante de amortecimento c quando:
- (a) r varia de 0,5 cm a 1,0 cm.
 - (b) h varia de 0,05 cm a 0,10 cm.
 - (c) a varia de 2 cm a 4 cm.
- 1.43** Expresse o número complexo $5 + 2i$ na forma exponencial $Ae^{i\theta}$.
- 1.44** Some os dois números complexos $(1 + 2i)$ e $(3 - 4i)$ e expresse o resultado na forma $Ae^{i\theta}$.
- 1.45** Subtraia o número complexo $(1 + 2i)$ de $(3 - 4i)$ e expresse o resultado na forma $Ae^{i\theta}$.
- 1.46** Determine o produto dos números complexos $z_1 = (1 + 2i)$ e $z_2 = (3 - 4i)$ e expresse o resultado na forma $Ae^{i\theta}$.
- 1.47** Determine o quociente, z_1/z_2 , dos números complexos $z_1 = (1 + 2i)$ e $z_2 = (3 - 4i)$ e expresse o resultado na forma $Ae^{i\theta}$.
- 1.48** A base de um motor alternativo está sujeita a movimentos harmônicos nas direções x e y :

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos \omega t \\ y(t) &= Y \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

onde X e Y são as amplitudes, ω é a velocidade angular e ϕ é a diferença de fase.

- (a) Verifique se a resultante dos dois movimentos satisfaz a equação da elipse dada por (Figura 1.86):

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} - 2 \frac{xy}{XY} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (\text{E.1})$$

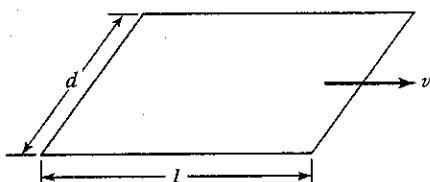


FIGURA 1.84

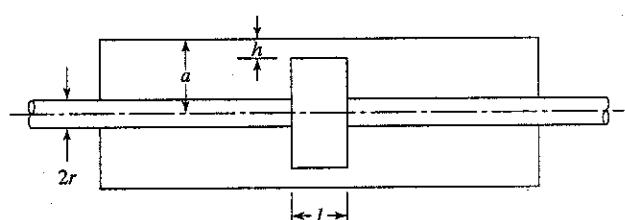


FIGURA 1.85

- (b)** Discuta a natureza do movimento resultante dado pela Equação (E.1) para os casos especiais de $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, e $\phi = \pi$.

Observação: A figura elíptica representada pela Equação (E.1) é conhecida como uma figura de Lissajous e é útil para interpretar certos tipos de resultados experimentais (movimentos) exibidos por osciloscópios.

- 1.49** A base de um compressor de ar está sujeita a movimentos harmônicos (com a mesma freqüência) em duas direções perpendiculares. O movimento resultante exibido na tela de um osciloscópio é como o mostrado na Figura 1.87. Determine as amplitudes de vibração nas duas direções e a diferença de fase entre elas.
- 1.50** Uma máquina está sujeita ao movimento $x(t) = A \cos(50t + \alpha)$ mm. As condições iniciais são dadas por $x(0) = 3$ mm e $\dot{x}(0) = 1,0$ m/s.
- Determine as constantes A e α .
 - Expresse o movimento na forma $x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$, e identifique as constantes A_1 e A_2 .
- 1.51** Mostre que qualquer associação linear de $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ tal que $x(t) = A_1 \cos \omega t + \cos \omega t \sin \omega t$ (A_1, A_2 = constantes) representa um movimento harmônico simples.
- 1.52** Determine a soma de dois movimentos harmônicos $x_1(t) = 5 \cos(3t + 1)$ e $x_2(t) = 10 \cos(3t + 2)$. Use:
- relações trigonométricas.

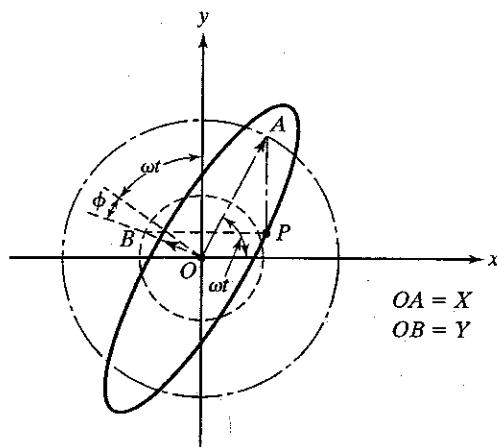


FIGURA 1.86 Figura de Lissajous.

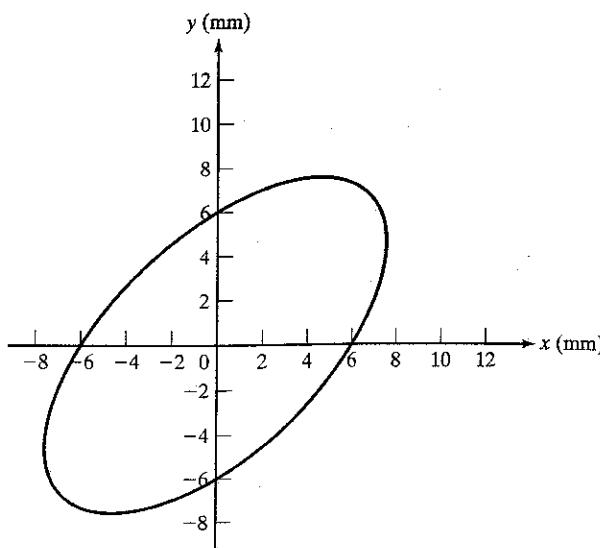


FIGURA 1.87

- (b)** adição vetorial.

- (c)** representação por número complexo.

- 1.53** Se um dos componentes do movimento harmônico $x(t) = 10 \sin(\omega t + 60^\circ)$ for $x_1(t) = 5 \sin(\omega t + 30^\circ)$, determine o outro componente.
- 1.54** Considere os dois movimentos harmônicos $x_1(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} t$ e $x_2(t) \sin \pi t$. A soma $x_1(t) + x_2(t)$ é um movimento periódico? Se a resposta for positiva, qual é o seu período?
- 1.55** Considere dois movimentos harmônicos de freqüências diferentes: $x_1(t) = \cos 2t$ e $x_2(t) = \cos 3t$. A soma $x_1(t) + x_2(t)$ é um movimento harmônico? Se a resposta for positiva, qual é o seu período?
- 1.56** Considere os dois movimentos harmônicos $x_1(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} t$ e $x_2(t) = \cos \pi t$. A diferença $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é um movimento harmônico? Se a resposta for positiva, qual é o seu período?
- 1.57** Determine as amplitudes máxima e mínima do movimento combinado $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ quando $x_1(t) = 3 \sin 30t$ e $x_2(t) = 3 \sin 29t$. Determine também a freqüência de batimentos correspondente a $x(t)$.
- 1.58** Uma máquina está sujeita a dois movimentos harmônicos, e o movimento resultante apresentado na tela de um osciloscópio é mostrado na Figura 1.88. Determine as amplitudes e freqüências dos dois movimentos.
- 1.59** Um movimento harmônico tem uma amplitude de 0,05 m e uma freqüência de 10 Hz. Determine seu período, velocidade máxima e aceleração máxima.
- 1.60** Um acelerômetro montado na estrutura de um edifício indica que ela está vibrando harmonicamente a 15 cps, com uma aceleração máxima de 0,5 g. Determine a amplitude e a velocidade máxima da estrutura do edifício.
- 1.61** Os resultados da medição da amplitude máxima e da aceleração máxima da base de uma bomba centrifuga são $x_{\max} = 0,25$ mm e $\ddot{x}_{\max} = 0,4$ g. Determine a velocidade de operação da bomba.
- 1.62** O valor rms (valor quadrático médio) de uma função, $x(t)$, é definido como a raiz quadrada da média dos valores de $x(t)$ ao quadrado durante um período τ :

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [x(t)]^2 dt}$$

Usando essa definição, determine o valor rms da função

$$x(t) = X \sin \omega t = X \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

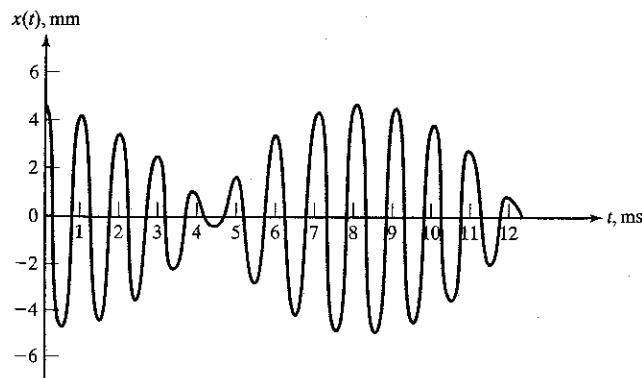


FIGURA 1.88

- 1.63** Usando a definição dada no Problema 1.58, determine o valor rms da função mostrada na Figura 1.46(a).
- 1.64** Prove que os componentes de uma série de Fourier de senos (b_n) são zero para funções pares, isto é, quando $x(-t) = x(t)$. Prove também que os componentes de uma série de Fourier de co-senos (a_0 e a_n) são zero para funções ímpares, isto é, quando $x(-t) = -x(t)$.
- 1.65** Determine as expansões por série de Fourier das funções mostradas nas Figuras 1.50 (ii) e (iii). Além disso, determine suas expansões por série de Fourier quando o eixo do tempo é deslocado para baixo por uma distância A .
- 1.66** A força de impacto criada por um martelo de forjar pode ser modelada como mostra a Figura 1.89. Determine a expansão por série de Fourier da força de impacto.
- 1.67** Determine a expansão por série de Fourier da função periódica mostrada na Figura 1.90. Além disso, represente em gráfico o espectro de freqüência correspondente.
- 1.68** Determine a expansão por série de Fourier da função periódica mostrada na Figura 1.91. Além disso, represente em gráfico o espectro de freqüência correspondente.
- 1.69** Determine a expansão por série de Fourier da função periódica mostrada na Figura 1.92. Além disso, represente em gráfico o espectro de freqüência correspondente.

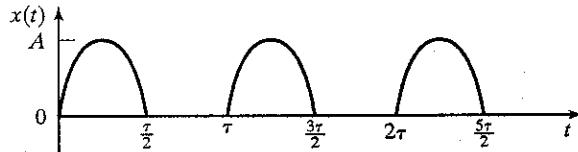


FIGURA 1.89

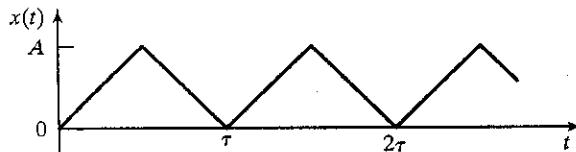


FIGURA 1.90

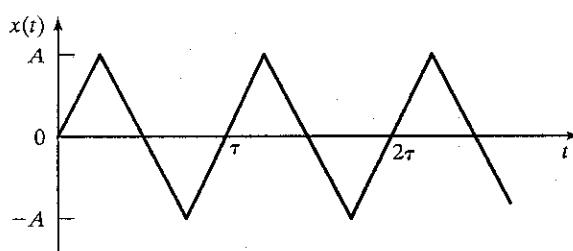


FIGURA 1.91

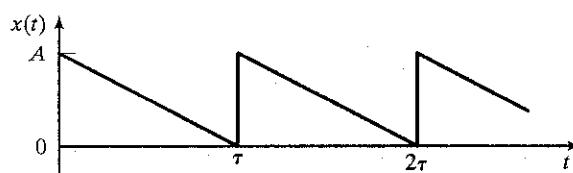


FIGURA 1.92

- 1.70** A série de Fourier de uma função periódica, $x(t)$, é uma série infinita dada por

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (\text{E.1})$$

onde

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) dt \quad (\text{E.2})$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cos n\omega t dt \quad (\text{E.3})$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \sin n\omega t dt \quad (\text{E.4})$$

ω é a freqüência circular e $2\pi/\omega$ é o período. Em vez de incluir o número infinito de termos na Equação (E.1), freqüentemente ela é truncada conservando-se apenas os termos em k

$$x(t) \approx \tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^k (\tilde{a}_n \cos n\omega t + \tilde{b}_n \sin n\omega t) \quad (\text{E.5})$$

de modo que o erro, $e(t)$, torna-se

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \quad (\text{E.6})$$

Determine os coeficientes \tilde{a}_0 , \tilde{a}_n e \tilde{b}_n que minimizam o quadrado do erro em um período:

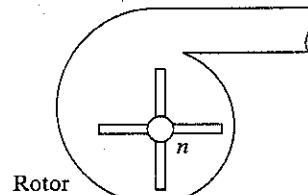
$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} e^2(t) dt \quad (\text{E.7})$$

Compare as expressões de \tilde{a}_0 , \tilde{a}_n e \tilde{b}_n com as equações (E.2) a (E.4) e faça sua(s) observação(s).

- 1.71** Execute uma análise harmônica, incluindo as três primeiras harmônicas, da função dada a seguir:

t_i	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18
x_i	9	13	17	29	43	59	63	57	49
t_i	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32		
x_i	35	35	41	47	41	13	7		

- 1.72** Em um ventilador centrífugo (Figura 1.93a), em qualquer ponto o ar está sujeito a um impulso toda vez que a pá passa pelo ponto, como mostrado na Figura 1.93(b). A freqüência desses impulsos é determinada pela velocidade de rotação do rotor n e pelo número de pás, N , do rotor. Determine as primeiras três harmônicas da variação de pressão mostrada na Figura 1.93(b) para $n = 100$ rpm e $N = 4$.



(a) Ventilador centrífugo

FIGURA 1.93 (a)

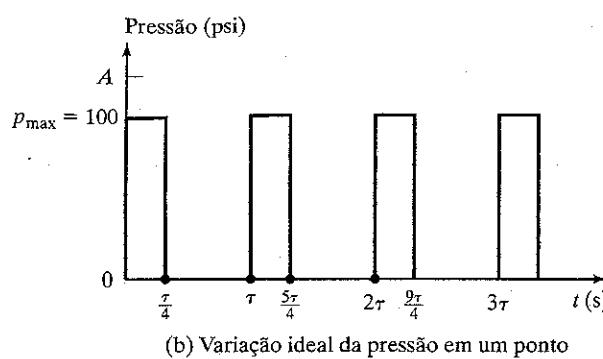


FIGURA 1.93 (b)

- 1.73** Resolva o Problema 1.72 usando os valores 200 rpm e 6 para n e N em vez de 100 rpm e 4, respectivamente.
- 1.74** A variação do torque (M_t) de um motor de combustão interna em relação ao tempo é dada na Tabela 1.3. Execute uma análise harmônica do torque. Determine as amplitudes das três primeiras harmônicas.

TABELA 1.3

t(s)	$M_t(N \cdot m)$	t(s)	$M_t(N \cdot m)$	t(s)	$M_t(N \cdot m)$
0,00050	770	0,00450	1.890	0,00850	1.050
0,00100	810	0,00500	1.750	0,00900	990
0,00150	850	0,00550	1.630	0,00950	930
0,00200	910	0,00600	1.510	0,01000	890
0,00250	1.010	0,00650	1.390	0,01050	850
0,00300	1.170	0,00700	1.290	0,01100	810
0,00350	1.370	0,00750	1.190	0,01150	770
0,00400	1.610	0,00800	1.110	0,01200	750

- 1.75** Faça uma análise harmônica das funções mostradas na Figura 1.94 incluindo as três primeiras harmônicas.
- 1.76** Represente em gráfico a expansão por série de Fourier da função $x(t)$ determinada no Problema 1.71 usando MATLAB.
- 1.77** Use MATLAB para representar em gráfico a variação da força em relação ao tempo usando a expansão por série de Fourier determinada no Problema 1.75.
- 1.78** Use MATLAB para representar em gráfico as variações da constante de amortecimento c em relação a r , h e a como determinadas no Problema 1.42.

- 1.79** Use MATLAB para representar em gráfico as variações da rigidez da mola (k) com deformação (x) dada pelas relações:
 a. $k = 1.000x - 100x^2$; $0 \leq x \leq 4$.
 b. $k = 500 + 100x^2$; $0 \leq x \leq 4$.
- 1.80** Uma massa está sujeita a dois movimentos harmônicos dados por $x_1(t) = \sin 30t$ e $x_2(t) = 3 \sin 29t$. Represente em gráfico o movimento resultante da massa usando MATLAB e identifique a frequência de batimento e o período de batimento.
- 1.81** Resolva o Problema 1.74 usando o programa em C++ da Seção 1.13.
- 1.82** Resolva o Problema 1.71 usando o programa em C++ da Seção 1.13.
- 1.83** Determine as seis primeiras harmônicas da função mostrada na Figura 1.94 usando o programa em C++ da Seção 1.13.
- 1.84** Use o programa em C++ da seção 1.13 para realizar uma análise harmônica da função mostrada na Figura 1.95, incluindo as dez primeiras harmônicas.
- 1.85** Resolva o Problema 1.74 usando a sub-rotina FORIER da Seção 1.14.
- 1.86** Resolva o Problema 1.71 usando a sub-rotina FORIER da Seção 1.14.
- 1.87** Determine as seis primeiras harmônicas da função mostrada na Figura 1.94 usando a sub-rotina FORIER da Seção 1.14.
- 1.88** Use a sub-rotina FORIER da Seção 1.14 para realizar uma análise harmônica da função mostrada na Figura 1.95, incluindo as dez primeiras harmônicas.

EXERCÍCIOS DE PROJETO

- 1.89*** Um mecanismo de manivela corrediça é mostrado na Figura 1.96. Derive uma expressão para o movimento do pistão P em termos do comprimento da manivela r , comprimento da biela l e da velocidade angular constante da manivela, ω .
 a. Discuta a viabilidade de usar o mecanismo para a geração de movimento harmônico.
 b. Determine o valor de l/r para o qual a amplitude de toda harmônica mais alta é menor que a da primeira harmônica por um fator de no mínimo 25.
- 1.90*** A tabela de vibrações mostrada na Figura 1.97 é usada para testar a vibração de certos componentes eletrônicos. O equipamento de teste consiste em duas engrenagens de acionamento idênticas, G_1 e G_2 que giram ao redor dos eixos O_1 e O_2

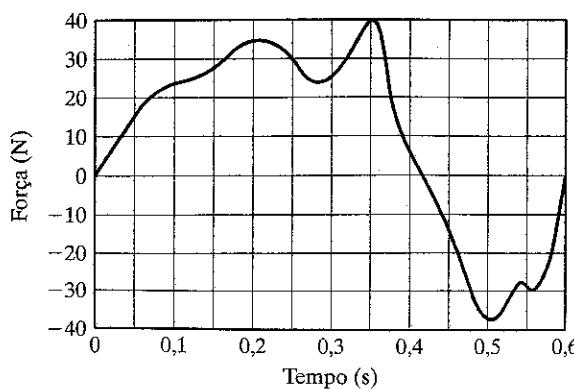


FIGURA 1.94

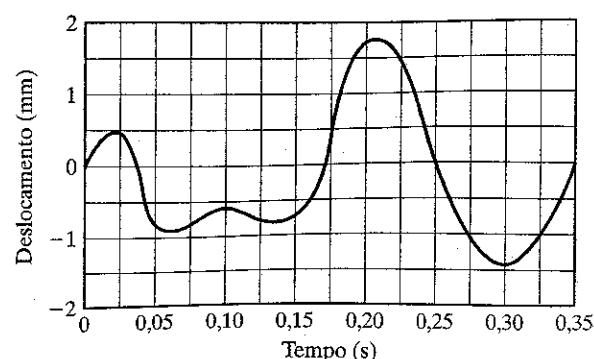


FIGURA 1.95

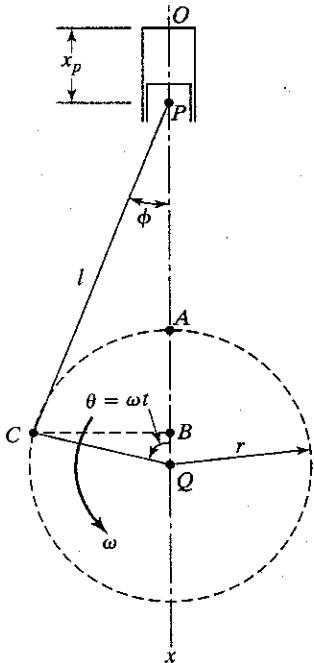


FIGURA 1.96

ligados ao suporte F . Duas massas iguais, m cada, são colocadas em posição simétrica ao redor do ponto médio do eixo vertical como mostra a Figura 1.97. Durante rotação, uma força vertical desbalanceada de magnitude $P = 2m\omega^2r \cos \theta$, onde $\theta = \omega t$ e ω = velocidade angular das engrenagens, será desenvolvida e provocará vibração na mesa. Elabore o projeto de uma mesa vibratória que possa desenvolver uma força na faixa de 0 a 100 N em uma faixa de freqüência de 25 a 50 Hz.

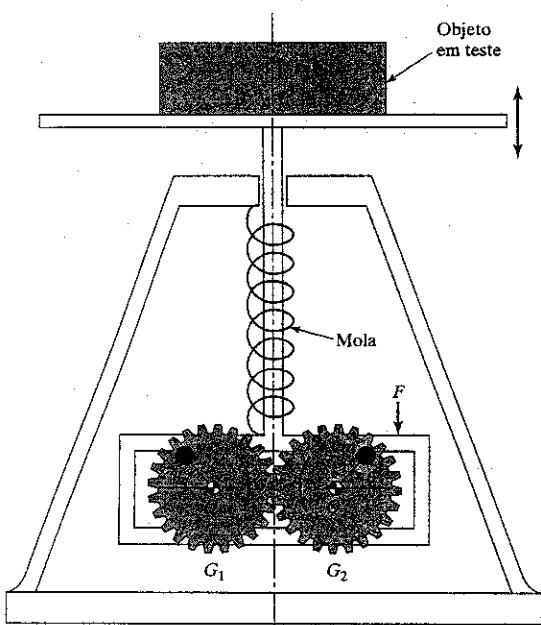


FIGURA 1.97 Uma mesa de vibração.

1.91* O arranjo mostrado na Figura 1.98 é usado para regular o peso do material alimentado por uma tremonha a uma esteira transportadora [1.44]. A manivela impõe um movimento alternativo à haste atuadora por meio da cunha. A amplitude do movimento comunicado à haste atuadora pode ser variado elevando ou baixando a cunha. Visto que a esteira transportadora é articulada no ponto O , qualquer sobrecarga na esteira faz que a alavanca OA se incline para baixo, o que, por consequência, eleva a cunha. Isso resulta na redução da amplitude da haste atuadora e, portanto, na taxa de alimentação. Elabore o projeto de sistema de regulação de peso como esse que mantenha um peso de $10 \pm 0,1$ lb por minuto.

1.92* A Figura 1.99 mostra um compactador vibratório. O equipamento consiste em um came de placa com três ressaltos perfilados e um sistema came-seguidor oscilante. À medida que o came gira, o rolete desce após cada elevação. Por correspondência, o peso conectado à extremidade do seguidor também sobe e desce. O contato entre o rolete e o came é mantido pela mola. Elabore o projeto de um compactador vibratório que possa aplicar uma força de 200 lb a uma freqüência de 50 Hz.

1.93* Alimentadores de caçamba vibratória são muito utilizados em processos automáticos quando um grande volume de partes idênticas tem de ser dirigido e entregue a uma taxa constante a uma estação de trabalho para usinagem adicional [1.45, 1.46]. Basicamente, um alimentador de caçamba vibratória é separado da base por um conjunto de componentes elásticos inclinados (molas), como mostrado na Figura 1.100. Uma bobina eletromagnética montada entre a caçamba e a base proporciona força propulsora à caçamba. O movimento vibratório da caçamba faz que os componentes se movimentem ao longo da guia de distribuição em espiral localizada no interior da caçamba com um movimento trepidante. Há ranhuras especiais em posições adequadas ao longo da guia espiral que servem para rejeitar peças defeituosas ou fora da faixa de tolerância ou que estão dirigidas à estação de trabalho incorreta. Quais fatores devem ser considerados na elaboração do projeto de tais alimentadores de caçamba vibratória?

1.94* O trocador de calor de gaiola e tubos mostrado na Figura 1.101(a) pode ser modelado como mostrado na Figura 1.101(b) para uma análise simplificada de vibrações. Determine a área transversal dos tubos de modo que a rigidez total do trocador de calor seja maior que 200×10^6 N/m na direção axial e 20×10^6 Nm/rad na direção tangencial. Admita que os tubos tenham o mesmo comprimento e a mesma seção transversal e sejam uniformemente espaçados.

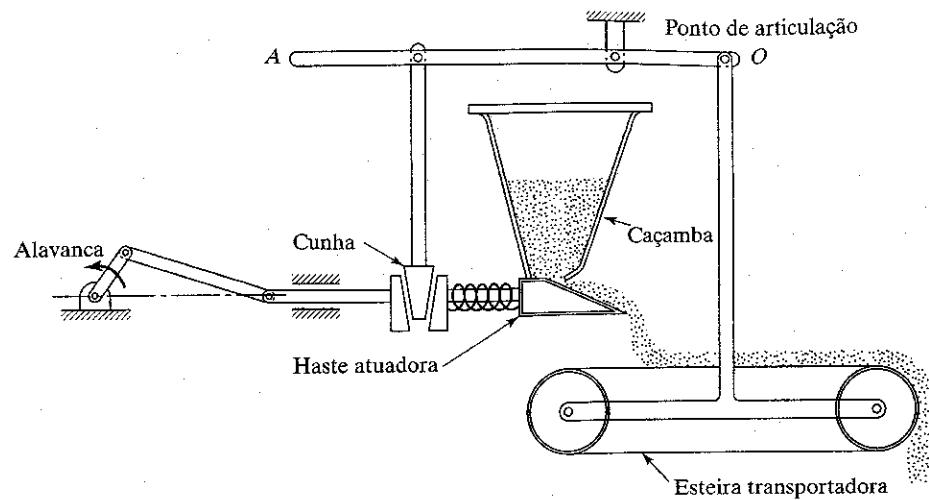


FIGURA 1.98 Um sistema vibratório de regulação de peso.

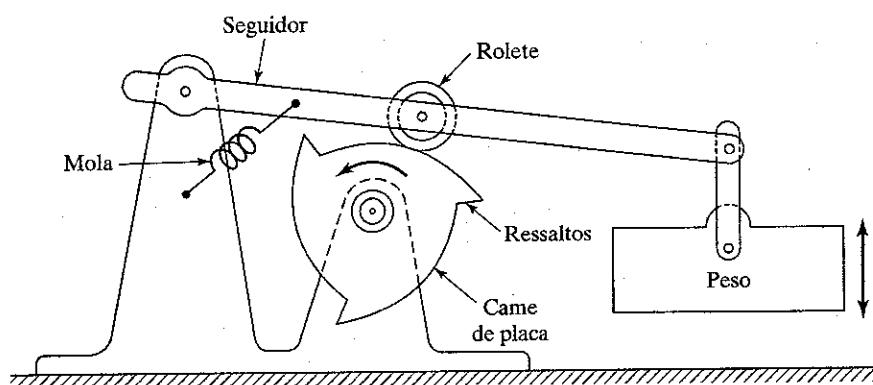


FIGURA 1.99 Um compactador vibratório.

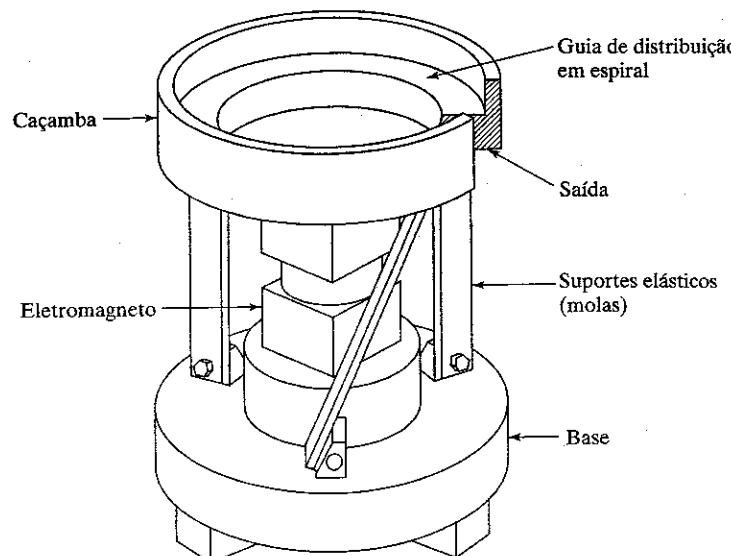


FIGURA 1.100 Um alimentador de caçamba vibratória.

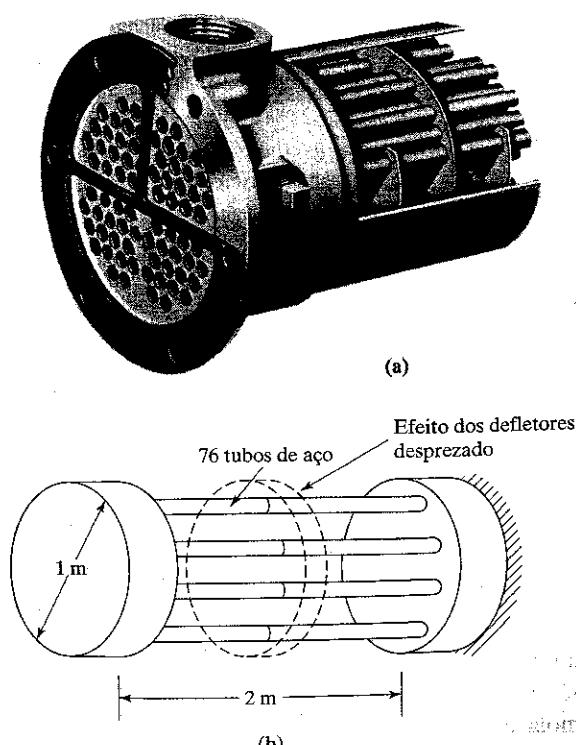


FIGURA 1.101 (Parte (a) cortesia de Young Radiator Company)



Sir Isaac Newton (1642–1727), filósofo natural inglês, foi professor de matemática na Universidade de Cambridge e presidente da Royal Society (Sociedade Real). Sua obra, *Principia mathematica* (1687), que trata das leis e condições do movimento, é considerada a maior obra científica já produzida. As definições de força, massa e momento e suas três leis do movimento aparecem por toda a dinâmica. Com muita propriedade, a unidade de força denominada newton no Sistema Internacional de Medidas (SI) é o peso aproximado de uma maçã média, que o inspirou a estudar as leis da gravidade.
(Fotografia por cortesia de David Eugene Smith, *History of mathematics*, v. I — general survey of the history of elementary mathematics. Nova York: Dover Publications, Inc., 1958.)

CAPÍTULO DOIS

Vibração livre de sistemas com um grau de liberdade

2.1 Introdução

Diz-se que um sistema sofre vibração livre quando oscila somente sob uma perturbação inicial, sem a ação de nenhuma força após essa perturbação inicial. As oscilações do pêndulo de um relógio de armário, o movimento oscilatório vertical que um ciclista sente após bater contra uma saliência da estrada e o movimento de uma criança em um balanço após o empurrão inicial representam alguns exemplos de vibração livre.

A Figura 2.1(a) mostra um sistema massa-mola que representa o sistema vibratório mais simples possível. É denominando um sistema com um grau de liberdade visto que a coordenada (x) é suficiente para especificar a posição da massa a qualquer tempo. Não há nenhuma força externa aplicada à massa; por consequência, o movimento resultante de uma perturbação inicial será vibração livre. Uma vez que não existe nenhum elemento que cause dissipação de energia durante o movimento da massa, a amplitude do movimento permanece constante ao longo do tempo; é um sistema *não amortecido*. Na prática, exceto no vácuo, a amplitude de vibração livre diminui gradativamente com o tempo devido à resistência oferecida pelo meio circundante (como o ar). Tais vibrações são denominadas *amortecidas*. O estudo da vibração livre de sistemas com um grau de liberdade, amortecidos e não amortecidos, é fundamental para o entendimento de questões mais avançadas de vibrações.

Vários sistemas mecânicos e estruturais podem ser idealizados como sistemas com um grau de liberdade. Em muitos sistemas práticos, a massa é distribuída, porém, para uma análise simples, ela pode ser aproximada por uma massa única pontual. De maneira semelhante, a elasticidade do sistema, que pode estar distribuída por todo o sistema, também pode ser idealizada por uma única mola. No caso do sistema came-seguidor, como mostra a Figura 1.32, por exemplo, as várias massas foram substituídas por uma massa equivalente (m_{eq}) no Exemplo 1.7. Os elementos do sistema came-seguidor (haste de comando, balancim, válvula e mola da válvula) são todos elásticos, mas podem ser reduzidos a uma única mola equivalente de rigidez k_{eq} . Assim, para uma análise simples, o sistema came-seguidor pode ser idealizado como

um sistema massa-mola com um grau de liberdade, como mostra a Figura 2.2.

De maneira semelhante, a estrutura apresentada na Figura 2.3 pode ser considerada uma viga em balanço fixada no solo. Para o estudo da vibração transversal, a massa que está na parte superior pode ser considerada uma massa pontual, e a estrutura de suporte (viga) pode ser aproximada como uma mola para obter o modelo com um grau de liberdade exposto na Figura 2.4. A estrutura de edifício mostra a Figura 2.5(a) também pode ser idealizada como um sistema massa-mola, como se pode ver na Figura 2.5(b). Nesse caso, visto que a constante elástica da mola, k , é a mera razão entre força e deflexão, ela pode ser determinada pelas propriedades geométricas e materiais das colunas. A massa do sistema idealizado é igual à massa do piso, se considerarmos que a massa das colunas é desprezível.

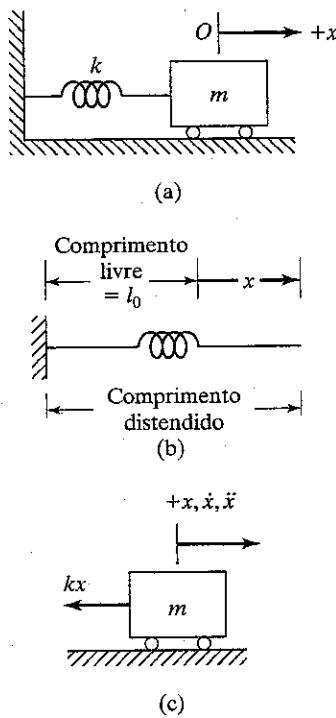


FIGURA 2.1 Um sistema massa-mola em posição horizontal.

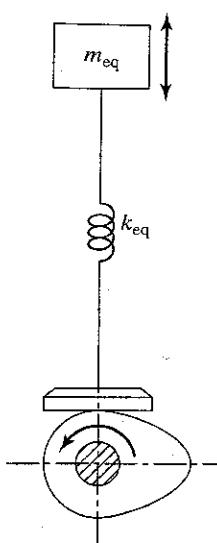


FIGURA 2.2 Sistema massa-mola equivalente para o sistema came-seguidor da Figura 1.32.



FIGURA 2.3 A agulha espacial (estrutura).

2.2 Vibração livre de um sistema de translação não amortecido

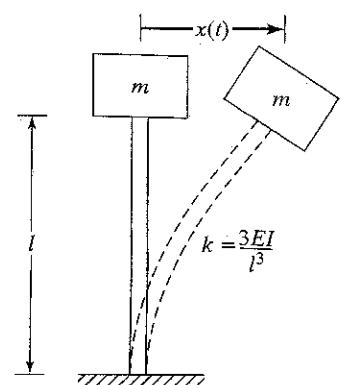
2.2.1 Equação do movimento pela segunda lei do movimento de Newton

Nesta seção, usaremos a segunda lei do movimento de Newton para obter a equação de movimento. O procedimento que usaremos pode ser resumido da seguinte maneira:

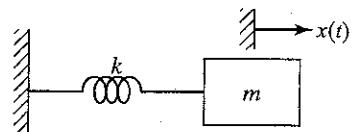
1. Selecione uma coordenada adequada para descrever a posição da massa ou do corpo rígido no sistema. Use uma coordenada linear para descrever o movimento linear de uma massa pontual ou do centróide de um corpo rígido e uma coordenada angular para descrever o movimento angular de um corpo rígido.
2. Determine a configuração de equilíbrio estático do sistema e meça o deslocamento da massa ou corpo rígido em relação à sua posição de equilíbrio.
3. Desenhe o diagrama de corpo livre da massa ou corpo rígido quando submetida a um deslocamento positivo e a uma velocidade. Indique todas as forças ativas e reativas que agem sobre a massa ou corpo rígido.
4. Aplique a segunda lei do movimento de Newton à massa ou corpo rígido mostrada no diagrama de corpo livre. A segunda lei do movimento de Newton pode ser enunciada como: *A taxa de variação do momento linear é igual à força que age sobre a massa ou corpo.*

Assim, se a massa m for deslocada por uma distância $\vec{x}(t)$ quando uma força resultante $\vec{F}(t)$ agir sobre ela na mesma direção, a segunda lei do movimento de Newton resulta em

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right)$$



(a) Idealização da estrutura alta



(b) Sistema massa-mola equivalente

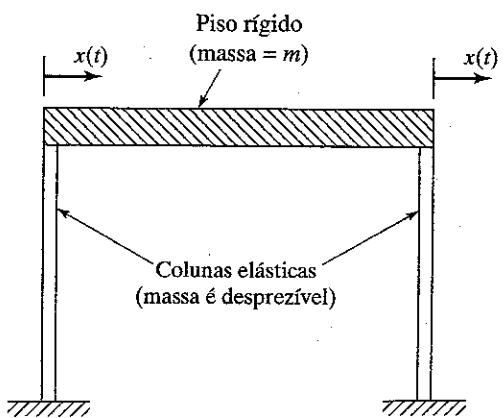
FIGURA 2.4 Modelagem de estrutura alta como sistema massa-mola.

Se a massa m for constante, essa equação se reduz a

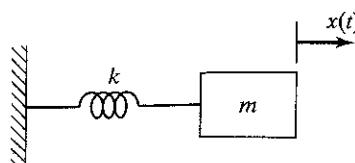
$$\vec{F}(t) = m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = m \ddot{\vec{x}} \quad (2.1)$$

onde

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2}$$



(a) Estrutura do edifício



(b) Sistema massa-mola equivalente

FIGURA 2.5 Idealização da estrutura de um edifício.

é a aceleração da massa. A Equação (2.1) pode ser enunciada em palavras como:

Força resultante sobre a massa = Massa × Aceleração

Para um corpo rígido sujeito a movimento rotacional, a lei de Newton resulta em

$$\vec{M}(t) = J\ddot{\theta} \quad (2.2)$$

onde \vec{M} é o momento resultante que age sobre o corpo, e $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta} = d^2\theta(t)/dt^2$ são o deslocamento angular e a aceleração angular resultantes, respectivamente. A Equação (2.1) ou a Equação (2.2) representa a equação de movimento do sistema vibratório.

Agora, o procedimento é aplicado ao sistema não amortecido com um grau de liberdade mostrado na Figura 2.1(a). Nesse caso, a massa está apoiada sobre roletes sem atrito e pode ter movimento de translação no sentido horizontal. Quando a massa é deslocada a uma distância $+x$ em relação à sua posição de equilíbrio estático, a força na mola é kx , e o diagrama de corpo livre da massa pode ser representado como mostra a Figura 2.1(c). A aplicação da Equação (2.1) à massa m resulta na equação de movimento

$$F(t) = -kx = m\ddot{x}$$

ou

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

2.2.2 Equação do movimento por outros métodos

Como afirmamos na Seção 1.6, as equações de movimento de um sistema vibratório podem ser derivadas por vários métodos. Nesta seção, consideraremos a aplicação do princípio de D'Alembert, do princípio dos deslocamentos virtuais e do princípio da conservação da energia.

Princípio de D'Alembert. As equações de movimento, Equações (2.1) e (2.2), podem ser reescritas como

$$\vec{F}(t) - m\ddot{x} = 0 \quad (2.4a)$$

$$\vec{M}(t) - J\ddot{\theta} = 0 \quad (2.4b)$$

Essas equações podem ser consideradas equações de equilíbrio contanto que $-m\ddot{x}$ e $-J\ddot{\theta}$ sejam tratados como uma força e um momento fictícias. Essa força (ou momento) fictícia é conhecida como força de inércia (ou momento de inércia), e o

estado de equilíbrio artificial subentendido pela Equação (2.4a) ou (2.4b) é conhecido como equilíbrio dinâmico. Esse princípio, subentendido na Equação (2.4a) ou (2.4b), é denominado princípio de D'Alembert. A aplicação desse princípio ao sistema mostrado na Figura 2.1(c) resulta na equação de movimento:

$$-kx - m\ddot{x} = 0 \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

Princípio dos deslocamentos virtuais. O princípio dos deslocamentos virtuais afirma que “se um sistema que está em equilíbrio sob a ação de um conjunto de forças for submetido a um deslocamento virtual, então o trabalho virtual total realizado pelas forças será zero”. Nesse caso, o deslocamento virtual é definido como um deslocamento infinitesimal imaginário que ocorre instantaneamente. Esse deslocamento deve ser possível em termos físicos e compatível com as restrições do sistema. O trabalho virtual é definido como o trabalho realizado por todas as forças, incluindo as forças de inércia no caso de um problema dinâmico, devido a um deslocamento virtual.

Considere um sistema massa-mola em uma posição deslocada como mostrado na Figura 2.6(a), onde x denota o deslocamento da massa. A Figura 2.6(b) mostra o diagrama de corpo livre da massa com as forças reativa e de inércia indicadas. Quando a massa sofre um deslocamento virtual δx , como ilustrado na Figura 2.6(b), o trabalho virtual realizado por força pode ser calculado da seguinte maneira:

Trabalho virtual realizado pela força da mola = $\delta W_s = -(kx)\delta x$
Trabalho virtual realizado pela força de inércia = $\delta W_i = -(m\ddot{x})\delta x$

Quando o trabalho virtual total realizado por todas as forças iguala-se a zero, obtemos

$$-m\ddot{x}\delta x - kx\delta x = 0 \quad (2.5)$$

Uma vez que o deslocamento virtual pode ter um valor arbitrário, $\delta x \neq 0$, a Equação (2.5) dá a equação de movimento do sistema massa-mola como

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

Princípio da conservação da energia. Diz-se que um sistema é conservativo se nenhuma energia for perdida devido a atrito ou membros não elásticos que dissipam energia. Se nenhum trabalho for realizado sobre um sistema conservativo por forças externas (com exceção da força da gravidade ou outras forças potenciais), então a energia total do sistema

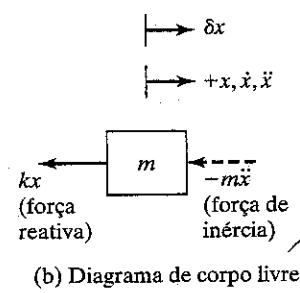
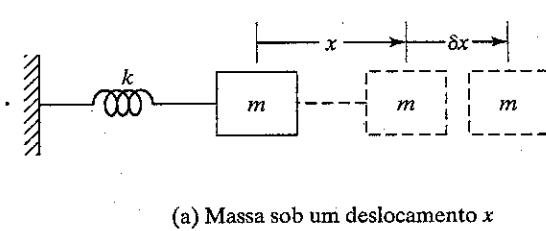


FIGURA 2.6 Massa sob deslocamento virtual.

permanece constante. Visto que a energia de um sistema vibratório é parcialmente potencial e parcialmente cinética, a soma dessas duas energias permanece constante. A energia cinética T é armazenada na massa em virtude de sua velocidade, e a energia potencial U é armazenada na mola em virtude de sua deformação elástica. Assim, o princípio de conservação de energia pode ser expresso como:

$$T + U = \text{constante}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad (2.6)$$

As energias cinética e potencial são dadas por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (2.7)$$

e

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.8)$$

A substituição das equações (2.7) e (2.8) na Equação (2.6) dá a equação desejada

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

2.2.3 Equação de movimento de um sistema massa-mola em posição vertical

Considere a configuração do sistema massa-mola mostrado na Figura 2.7(a). A massa está pendurada na extremidade inferior de uma mola cuja extremidade superior, por sua vez,

está ligada a um suporte rígido. Em repouso, a massa pendura em uma posição denominada *posição de equilíbrio estático*, na qual a força da mola dirigida para cima equilibra exatamente a força gravitacional dirigida para baixo que age sobre a massa. Nessa posição, o comprimento da mola é $l_0 + \delta_{st}$, onde δ_{st} é a deflexão estática — o alongamento devido ao peso W da massa m . Pela Figura 2.7(a), constatamos que, para equilíbrio estático,

$$W = mg = k\delta_{st} \quad (2.9)$$

onde g é a aceleração devida à gravidade. Se a massa sofrer uma deflexão até uma distância $+x$ em relação à sua posição de equilíbrio estático, então a força da mola é $-k(x + \delta_{st})$, como mostra a Figura 2.7(c). A aplicação da segunda lei do movimento de Newton à massa m dá

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + W$$

e, visto que $k\delta_{st} = W$, obtemos

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.10)$$

Observe que as equações (2.3) e (2.10) são idênticas. Isso indica que, quando a massa se movimenta em uma direção vertical, podemos ignorar seu peso, contanto que x seja medida em relação à sua posição de equilíbrio estático.

Observação: A Equação (2.10), a equação de movimento do sistema mostrado na Figura 2.7, também pode ser derivada pelo princípio de D'Alembert, o princípio dos deslocamentos virtuais ou pelo princípio de conservação de energia. Por exemplo, se usarmos o princípio de conservação de energia, observaremos que a expressão para a energia cinética, T , permanece igual à Equação (2.7). Todavia, a expressão para

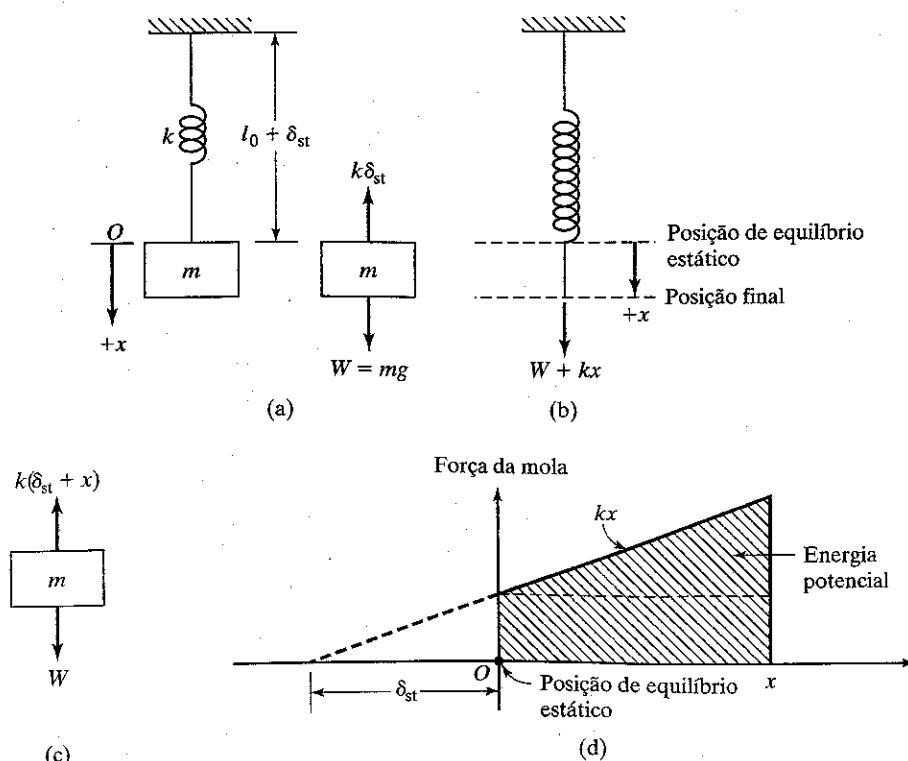


FIGURA 2.7 Um sistema massa-mola em posição vertical.

a energia potencial, U , deve ser derivada considerando o peso da massa. Para tal, observamos que a força da mola na posição de equilíbrio estático ($x = 0$) é mg . Quando a mola sofre uma deflexão por uma quantidade x , sua energia potencial é dada por (ver Figura 2.7d):

$$mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

Ademais, a energia potencial do sistema resultante da mudança na elevação da massa (note que $+x$ é para baixo) é $-mgx$. Assim, a energia potencial líquida do sistema em relação à posição de equilíbrio estático é dada por

U = energia potencial da mola

+ mudança na energia potencial resultante da mudança na elevação da massa m

$$m = mgx + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}kx^2$$

Já que as expressões de T e U permanecem inalteradas, a aplicação do princípio de conservação de energia dá a mesma equação de movimento, Equação (2.3).

2.2.4 Solução

A solução da Equação (2.3) pode ser encontrada admitindo-se que

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.11)$$

onde C e s são constantes a determinar. A substituição da Equação (2.11) na Equação (2.3) dá

$$C(ms^2 + k) = 0$$

Como C não pode ser zero, temos

$$ms^2 + k = 0 \quad (2.12)$$

e, por consequência,

$$s = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} \quad (2.13)$$

onde $i = (-1)^{1/2}$ e

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.14)$$

A Equação (2.12) é denominada a equação auxiliar ou característica correspondente à equação diferencial Equação (2.3). Os dois valores de s dados pela Equação (2.13) são as raízes da equação característica, também conhecidos como os eigenvalores, autovalores ou valores característicos do problema. Uma vez que ambos os valores de s satisfazem a Equação (2.12), a solução geral da Equação (2.3) pode ser expressa como

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (2.15)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Usando as identidades

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t$$

a Equação (2.15) pode ser reescrita como

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.16)$$

onde A_1 e A_2 são novas constantes. As constantes C_1 e C_2 ou A_1 e A_2 podem ser determinadas pelas condições iniciais do sistema. Duas condições devem ser especificadas para avaliar essas constantes inequivocamente. Observe que o número de condições a especificar é igual à ordem da equação diferencial governante. No presente caso, se os valores do deslocamento $x(t)$ e da velocidade $\dot{x}(t) = (dx(t)/dt)$ forem especificados como x_0 e \dot{x}_0 em $t = 0$, temos, pela Equação (2.16),

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= \omega_n A_2 = \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por consequência, $A_1 = x_0$ e $A_2 = \dot{x}_0/\omega_n$. Assim, a solução da Equação (2.3) sujeita às condições iniciais da Equação (2.17) é dada por

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.18)$$

2.2.5 Movimento harmônico

As equações (2.15), (2.16) e (2.18) são funções harmônicas do tempo. O movimento é simétrico em relação à posição de equilíbrio da massa m . A velocidade é um máximo, e a aceleração é zero toda vez que a massa passa por essa posição. Nos deslocamentos extremos, a velocidade é zero e a aceleração é um máximo. Visto que isso representa movimento harmônico simples (ver Seção 1.10), o próprio sistema massa-mola é denominado um *oscilador harmônico*. A quantidade ω_n dada pela Equação (2.14) representa a frequência natural de vibração do sistema.

A Equação (2.16) pode ser expressa de uma forma diferente com a introdução da notação

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos \phi \\ A_2 &= A \sin \phi \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde A e ϕ são as novas constantes, que podem ser expressas em termos de A_1 e A_2 como

$$\begin{aligned} A &= (A_1^2 + A_2^2)^{1/2} = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} = \text{amplitude} \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n} \right) = \text{ângulo de fase} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Introduzindo a Equação (2.19) na Equação (2.16), a solução pode ser escrita como

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad (2.21)$$

Usando as relações

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 \sin \phi_0 \\ A_2 &= A_0 \cos \phi_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

a Equação (2.16) também pode ser expressa como

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \phi_0) \quad (2.23)$$

onde

$$A_0 = A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.24)$$

e

$$\phi_0 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \right) \quad (2.25)$$

A natureza da oscilação harmônica pode ser representada em gráfico, como mostra a Figura 2.8(a). Se \vec{A} denotar um vetor de magnitude A , que faz um ângulo $\omega_n t - \phi$ com o eixo vertical (x), então a solução, Equação (2.21), pode ser vista como a projeção do vetor \vec{A} sobre o eixo x . As constantes A_1 e A_2 da Equação (2.16), dadas pela Equação (2.19), são simplesmente as componentes retangulares de \vec{A} ao longo dos dois eixos ortogonais que fazem os ângulos ϕ e $-(\frac{\pi}{2} - \phi)$ em relação ao vetor \vec{A} . Visto que o ângulo $\omega_n t - \phi$ é uma função linear do tempo, ele aumenta linearmente com o tempo; assim, todo o diagrama gira em sentido anti-horário a uma velocidade angular ω_n . Enquanto o diagrama (Figura 2.8a) gira, a projeção de \vec{A} sobre o eixo x varia harmonicamente, de modo que o movimento se repete toda vez que o vetor percorre um ângulo de 2π . A projeção de \vec{A} , ou seja, $x(t)$, é mostrada em gráfico como uma função de $\omega_n t$ na Figura 2.8(b) e como uma função de t na Figura 2.8(c). O ângulo de fase ϕ também pode ser interpretado como o ângulo entre a origem e o primeiro pico.

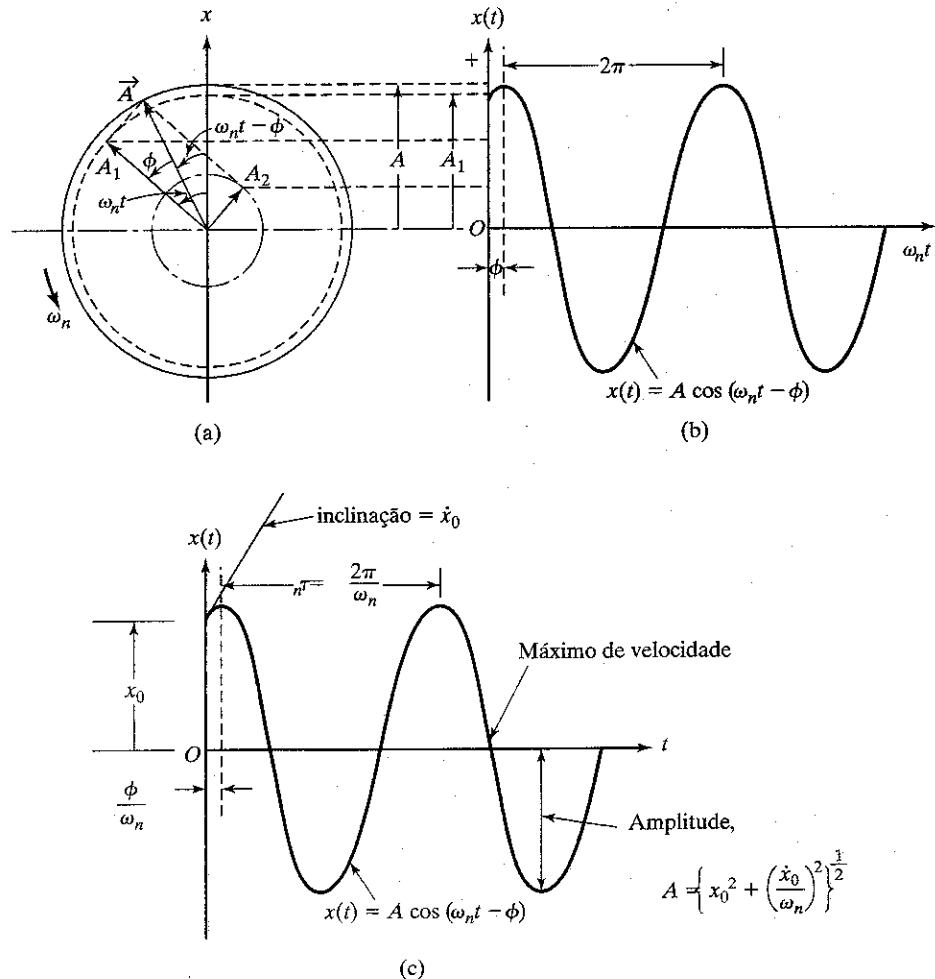


FIGURA 2.8 Representação gráfica do movimento de um oscilador harmônico.

Observe os seguintes aspectos do sistema massa-mola:

- Se o sistema massa-mola estiver em uma posição vertical, como mostrado na Figura 2.7(a), a freqüência natural circular pode ser expressa como

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2} \quad (2.26)$$

A constante elástica da mola, k , pode ser expressa em termos da massa m pela Equação (2.9) como

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{mg}{\delta_{st}} \quad (2.27)$$

A substituição de Equação (2.27) na Equação (2.14) dá

$$\omega_n = \left(\frac{g}{\delta_{st}} \right)^{1/2} \quad (2.28)$$

Por consequência, a freqüência natural em ciclos por segundo e o período natural são dados por

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{g}{\delta_{st}} \right)^{1/2} \quad (2.29)$$

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi \left(\frac{\delta_{st}}{g} \right)^{1/2} \quad (2.30)$$

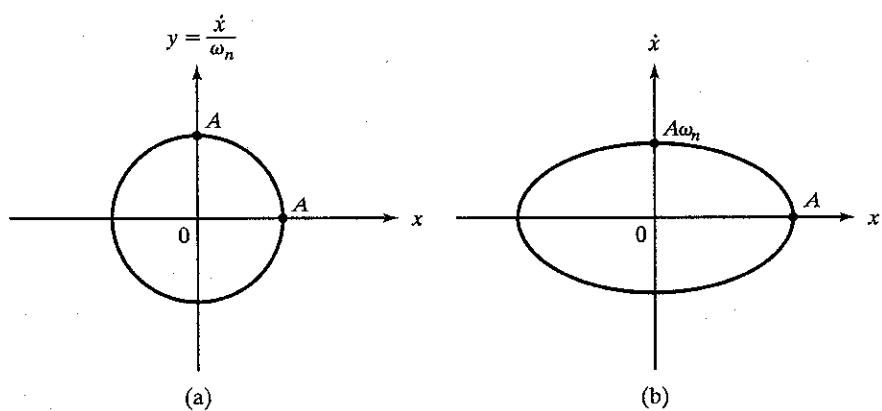


FIGURA 2.9 Representação de plano de fase de um sistema não amortecido.

Assim, quando a massa vibra em sentido vertical, podemos calcular a freqüência natural e o período de vibração pela simples medição da deflexão estática δ_{st} . Não é necessário saber qual é a rigidez da mola, k , e a massa da mola, m .

2. Pela Equação (2.21), a velocidade $\dot{x}(t)$ e a aceleração $\ddot{x}(t)$ da massa m no tempo t pode ser obtida como

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -\omega_n A \sin(\omega_n t - \phi) \\ &= \omega_n A \cos\left(\omega_n t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \ddot{x}(t) &= \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \phi) \\ &= \omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \phi + \pi)\end{aligned}\quad (2.31)$$

A Equação (2.31) mostra que a velocidade está adiantada (defasada) em relação ao deslocamento por $\pi/2$ e a aceleração está adiantada (defasada) em relação ao deslocamento por π .

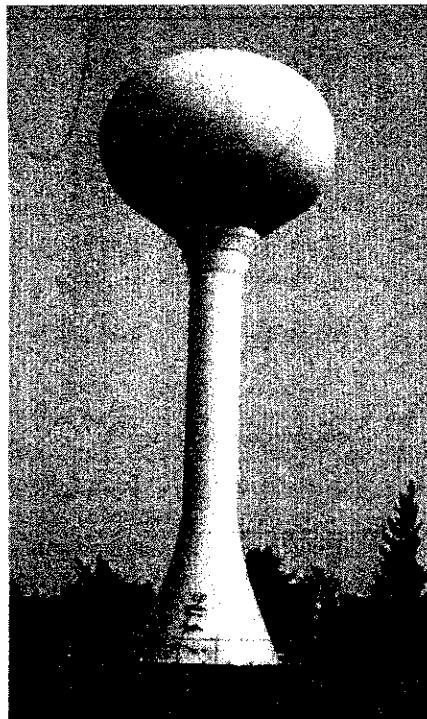
3. Se o deslocamento inicial (x_0) for zero, a Equação (2.21) torna-se

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \cos\left(\omega_n t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.32)$$

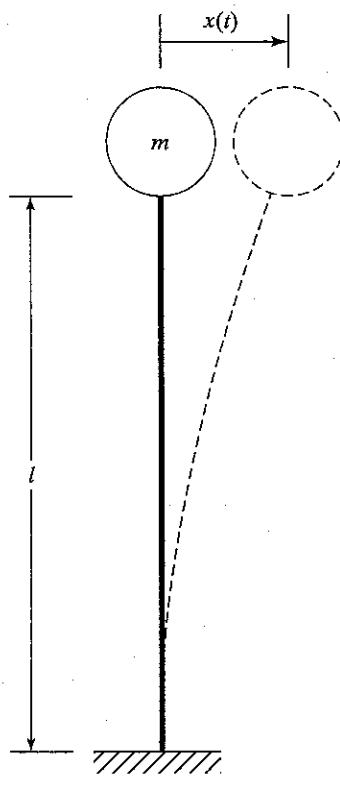
Contudo, se a velocidade inicial (\dot{x}_0) for zero, a solução torna-se

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t \quad (2.33)$$

4. A resposta de um sistema com um grau de liberdade pode ser representada no plano deslocamento (x) – velocidade (\dot{x}), conhecido como espaço de estado ou plano de fase.



(a)



(b)

FIGURA 2.10 Reservatório elevado. (Fotografia por cortesia de West Lafayette Water Company.)

Para isso, consideramos o deslocamento dado pela Equação (2.21) e a velocidade correspondente:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$$

ou

$$\cos(\omega_n t - \phi) = \frac{x}{A}$$

$$\dot{x}(t) = -A \omega_n \sin(\omega_n t - \phi) \quad (2.34)$$

ou

$$\sin(\omega_n t - \phi) = -\frac{\dot{x}}{A \omega_n} = -\frac{y}{A} \quad (2.35)$$

onde $y = \dot{x}/\omega_n$. Elevando ao quadrado e somando as equações (2.34) e (2.35), obtemos

$$\cos^2(\omega_n t - \phi) + \sin^2(\omega_n t - \phi) = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \quad (2.36)$$

O gráfico da Equação (2.36) no plano (x, y) é um círculo, como mostra a Figura 2.9(a), e constitui a representação de plano de fase ou espaço de estado do sistema não amortecido. O raio do círculo, A , é determinado pelas condições iniciais de movimento. Observe que o gráfico da Equação (2.36) no plano (x, \dot{x}) será uma elipse, como mostrado na Figura 2.9(b).

EXEMPLO 2.1

Resposta harmônica de uma caixa d'água

A coluna da caixa d'água mostrada na Figura 2.10(a) tem 300 ft de altura e é feita de concreto reforçado com uma seção transversal tubular de 8 ft de diâmetro interno e 10 ft de diâmetro externo. A caixa d'água pesa 6×10^5 lb quando está cheia. Desprezando a massa da coluna e admitindo que o módulo de Young do concreto reforçado seja 4×10^6 psi, determine o seguinte:

- a freqüência natural e o período natural de vibração transversal da caixa d'água;
- a resposta de vibração da caixa d'água resultante de um deslocamento transversal inicial de 10 in;
- os valores máximos da velocidade e da aceleração experimentados pela caixa d'água.

Solução: Admitindo que a caixa d'água seja uma massa puntual, que a coluna tenha uma seção transversal uniforme e que a massa da coluna seja desprezível, o sistema pode ser modelado como uma viga em balanço com uma carga concentrada (peso) na extremidade livre, como mostra a Figura 2.10(b).

- A deflexão transversal da viga, δ , devido à carga P é dada por $\frac{Pl^3}{3EI}$, onde l é o comprimento, E é o módulo de Young, e I é o momento de inércia da área da seção transversal da viga. A rigidez da viga (coluna do reservatório) é dada por

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{3EI}{l^3}$$

No caso presente, $l = 3600$ in, $E = 4 \times 10^6$ psi,

$$I = \frac{\pi}{64} (d_0^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64} (120^4 - 96^4) = 600,9554 \times 10^4 \text{ in}^4$$

e, por consequência,

$$k = \frac{3(4 \times 10^6)(600,9554 \times 10^4)}{3,600^3} = 1.545,6672 \text{ lb/in}$$

A freqüência natural da caixa d'água na direção transversal é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.545,6672 \times 386,4}{6 \times 10^5}} = 0,9977 \text{ rad/s}$$

O período natural de vibração transversal do reservatório é dado por

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{0,9977} = 6,2977 \text{ s}$$

- Usando o deslocamento inicial de $x_0 = 10$ in e considerando a velocidade inicial da caixa d'água (\dot{x}_0) como zero, a resposta harmônica da caixa d'água pode ser expressa, pela Equação (2.23), como

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \phi_0)$$

onde a amplitude do deslocamento transversal (A_0) é dada por

$$A_0 = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} = x_0 = 10 \text{ in}$$

e o ângulo de fase (ϕ_0)

$$\phi_0 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_0 \omega_n}{0} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Assim,

$$x(t) = 10 \sin \left(0,9977t + \frac{\pi}{2} \right) = 10 \cos 0,9977t \text{ in} \quad (E.1)$$

- A velocidade da caixa d'água pode ser determinada diferenciando-se a Equação (E.1) como

$$\dot{x}(t) = 10(0,9977) \cos \left(0,9977t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (E.2)$$

e, por consequência,

$$\dot{x}_{\max} = A_0 \omega_n = 10(0,9977) = 9,977 \text{ in/s}$$

A aceleração da caixa d'água pode ser determinada diferenciando-se a Equação (E.2) como

$$\ddot{x}(t) = -10(0,9977)^2 \sin \left(0,9977t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (E.3)$$

e, como consequência, o máximo valor de aceleração é dado por

$$\ddot{x}_{\max} = A_0 (\omega_n)^2 = 10(0,9977)^2 = 9,9540 \text{ in/s}^2$$

EXEMPLO 2.2

Resposta de vibração livre devido a impacto

Uma viga em balanço suporta uma massa M na extremidade livre como mostrado na Figura 2.11(a). A massa m cai de uma altura h sobre a massa M e adere a ela sem ricochetear. Determine a vibração transversal resultante da viga.

Solução: Quando a massa m cai de uma altura h , atinge a massa M com uma velocidade de $v_m = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração devida à gravidade. Visto que a massa m adere à massa M sem ricochetear, a velocidade da massa combinada ($M + m$) imediatamente após o impacto (\dot{x}_0) pode ser determinada usando o princípio de conservação do momento:

$$mv_m = (M + m)\dot{x}_0$$

ou

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M + m} \right) v_m = \left(\frac{m}{M + m} \right) \sqrt{2gh} \quad (\text{E.1})$$

A posição de equilíbrio estático da viga com a nova massa ($M + m$) está localizada a uma distância de $\frac{mg}{k}$ abaixo da posição de equilíbrio estático da massa original (M), como mostrado na Figura 2.11(c). Nesse caso, k denota a rigidez da viga em balanço, dada por

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

Uma vez que a vibração livre da viga com a nova massa ($M + m$) ocorre em relação à sua própria posição de equilíbrio estático, as condições iniciais do problema podem ser enunciadas como

$$x_0 = -\frac{mg}{k}, \quad \dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M + m} \right) \sqrt{2gh} \quad (\text{E.2})$$

Assim, a vibração transversal livre resultante da viga pode ser expressa como (ver Equação (2.21)):

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$$

onde

$$A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n} \right)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M + m}} = \sqrt{\frac{3EI}{l^3(M + m)}}$$

e x_0 e \dot{x}_0 são dados pela Equação (E.2).

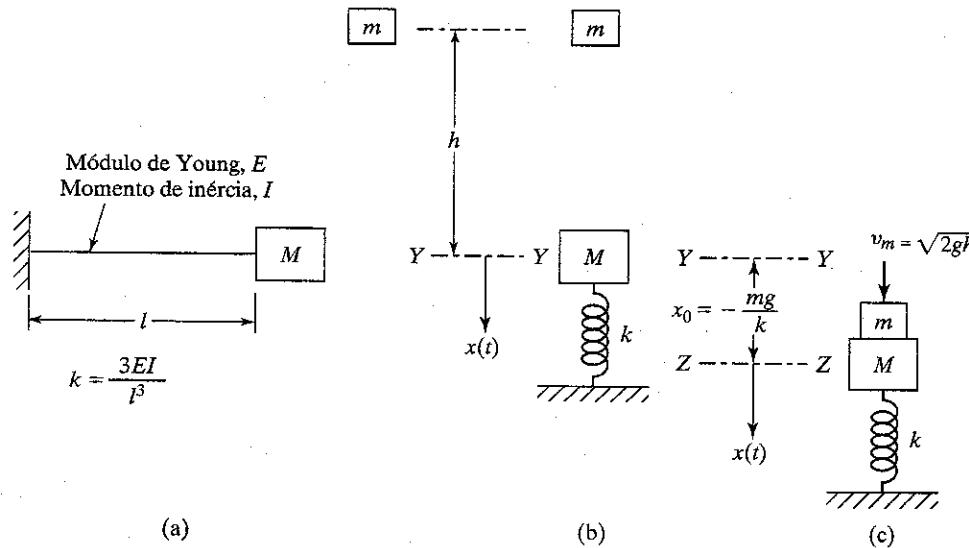
EXEMPLO 2.3

Módulo de Young pela medição da freqüência natural

Constata-se que uma viga simplesmente apoiada com seção transversal quadrada de 5 mm × 5 mm e comprimento de 1 m, que suporta uma massa de 2,3 kg em seu ponto médio, tem uma freqüência natural de vibração transversal de 30 rad/s. Determine o módulo de Young da viga.

Solução: Desprezando o peso próprio da viga, a freqüência natural de vibração transversal da viga pode ser expressa como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E.1})$$



YY = posição de equilíbrio estático de M
ZZ = posição de equilíbrio estático de $M + m$

FIGURA 2.11 Resposta devido a impacto.

onde

$$k = \frac{192EI}{l^3} \quad (\text{E.2})$$

onde E é o módulo de Young, l é o comprimento e I é o momento de inércia da área da viga:

$$I = \frac{1}{12}(5 \times 10^{-3})(5 \times 10^{-3})^3 = 0,5208 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

Como $m = 2,3 \text{ kg}$, $l = 1,0 \text{ m}$ e $\omega_n = 30,0 \text{ rad/s}$, as equações (E.1) e (E.2) dão

$$k = \frac{192EI}{l^3} = m\omega_n^2$$

ou

$$E = \frac{m\omega_n^2 l^3}{192I} = \frac{2,3(30,0)^2(1,0)^3}{192(0,5208 \times 10^{-10})} = 207,0132 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Isso indica que o material da viga é provavelmente aço-carbono.

EXEMPLO 2.4

Freqüência natural da caçamba de um caminhão de bombeiros

A caçamba de um caminhão de bombeiros está localizada na extremidade de uma lança telescópica, como mostrado na Figura 2.12(a). A caçamba, mais o bombeiro, pesam 2.000 N. Determine a freqüência natural de vibração da caçamba no sentido vertical.

Dados: Módulo de Young do material: $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$; Comprimentos: $l_1 = l_2 = l_3 = 3 \text{ m}$; áreas de seções transversais: $A_1 = 20 \text{ cm}^2$, $A_2 = 10 \text{ cm}^2$, $A_3 = 5 \text{ cm}^2$.

Solução: Para determinar a freqüência natural de vibração do sistema, determinamos a rigidez equivalente da lança no sentido vertical e usamos uma idealização com um grau de liberdade. Para isso, admitimos que a massa da lança telescópica é desprezível e que ela só pode se deformar na direção axial (sem curvatura). Visto que a força induzida em qualquer seção transversal $O_1 O_2$ é igual à carga axial aplicada na extremidade da lança, como mostrado na Figura 2.12(b), a rigidez axial da lança (k_b) é dada por

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{k_{b_1}} + \frac{1}{k_{b_2}} + \frac{1}{k_{b_3}} \quad (\text{E.1})$$

onde k_{bi} denota a rigidez axial do i -ésimo segmento da lança:

$$k_{bi} = \frac{A_i E_i}{l_i}; i = 1, 2, 3 \quad (\text{E.2})$$

Pelos dados conhecidos ($l_1 = l_2 = l_3 = 3 \text{ m}$, $A_1 = 20 \text{ cm}^2$, $A_2 = 10 \text{ cm}^2$, $A_3 = 5 \text{ cm}^2$, $E_1 = E_2 = E_3 = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$),

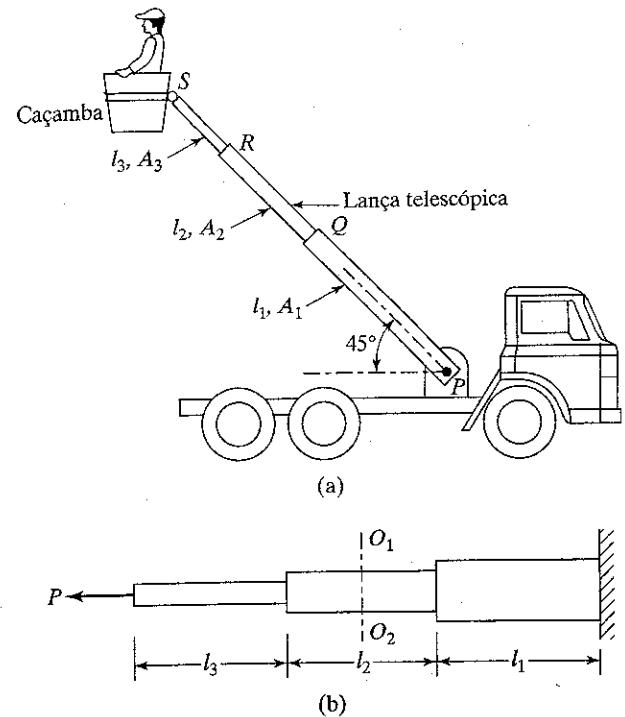


FIGURA 2.12 Lança telescópica de um caminhão de bombeiros.

$$k_{b_1} = \frac{(20 \times 10^{-4})(2,1 \times 10^{11})}{3} = 14 \times 10^7 \text{ N/m}$$

$$k_{b_2} = \frac{(10 \times 10^{-4})(2,1 \times 10^{11})}{3} = 7 \times 10^7 \text{ N/m}$$

$$k_{b_3} = \frac{(5 \times 10^{-4})(2,1 \times 10^{11})}{3} = 3,5 \times 10^7 \text{ N/m}$$

Assim, a Equação (E.1) dá

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{14 \times 10^7} + \frac{1}{7 \times 10^7} + \frac{1}{3,5 \times 10^7} = \frac{1}{2 \times 10^7}$$

ou

$$k_b = 2 \times 10^7 \text{ N/m}$$

A rigidez da lança telescópica no sentido vertical, k , pode ser determinada como

$$k = k_b \cos^2 45^\circ = 10^7 \text{ N/m}$$

A freqüência natural de vibração da caçamba no sentido vertical é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(10^7)(9,81)}{2.000}} = 221,4723 \text{ rad/s}$$

EXEMPLO 2.5

Freqüência natural de sistema de polias

Determine a freqüência natural do sistema mostrado na Figura 2.13(a). Admita que as polias não tenham atrito e a massa seja desprezível.

Solução: Para determinar a freqüência natural, determinamos a rigidez equivalente do sistema e o resolvemos como um problema com um grau de liberdade. Como as polias não têm atrito nem massa, a tensão no cabo é constante e igual ao peso W da massa m . Considerando o equilíbrio estático das polias e a massa (ver Figura 2.13(b)), podemos ver que a força que age para cima sobre a polia 1 é $2W$ e que a força que age para baixo sobre a polia 2 é $2W$. O centro da polia 1 (ponto A) move-se para cima por uma distância $2W/k_1$, e o centro da polia 2 (ponto B) move-se para baixo por uma distância $2W/k_2$. Assim, o movimento total da massa m (ponto O) é

$$2\left(\frac{2W}{k_1} + \frac{2W}{k_2}\right)$$

porque o cabo de cada lado da polia está livre para mover a massa para baixo. Se denotarmos a constante elástica equivalente do sistema por k_{eq} ,

$$\frac{\text{Peso da massa}}{\text{Constante elástica equivalente}} = \text{Deslocamento líquido da massa}$$

$$\frac{W}{k_{eq}} = 4W\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{4W(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$$

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)} \quad (\text{E.1})$$

Se a massa m for deslocada até uma distância x em relação à posição de equilíbrio estático, a equação de movimento da massa poderá ser escrita como

$$m\ddot{x} + k_{eq}x = 0 \quad (\text{E.2})$$

e, por consequência, a freqüência natural será dada por

$$\omega_n = \left(\frac{k_{eq}}{m}\right)^{1/2} = \left[\frac{k_1 k_2}{4m(k_1 + k_2)}\right]^{1/2} \text{ rad/s} \quad (\text{E.3})$$

ou

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}\right]^{1/2} \text{ ciclos/s} \quad (\text{E.4})$$

2.3 Vibração livre de um sistema torcional não amortecido

Se um corpo rígido oscilar em relação a um eixo de referência específico, o movimento resultante será denominado *vibração por torção*. Nesse caso, o deslocamento do corpo é medido em termos de uma coordenada angular. Em um problema de vibração por torção, o momento restaurador pode ser resultante da torção de um membro elástico ou de um momento desbalanceado de uma força ou conjugado.

A Figura 2.14 mostra um disco com momento de inércia de massa polar J_0 montado em uma extremidade de um eixo circular sólido cuja outra extremidade é fixa. Seja θ a rotação angular do disco em relação ao eixo do eixo; θ também

representa o ângulo de torção do eixo. Pela teoria da torção de eixos circulares [2.1], temos a relação

$$M_t = \frac{G I_o}{l} \quad (2.37)$$

onde M_t é o torque que produz a torção θ , G é o módulo de elasticidade transversal, l é o comprimento do eixo, I_o é o momento de inércia polar da seção transversal do eixo, dado por

$$I_o = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.38)$$

e d é o diâmetro do eixo. Se o disco for deslocado a uma distância θ em relação à sua posição de equilíbrio, o eixo dará um torque restaurador de magnitude M_t . Assim, o eixo age como uma mola torcional com uma constante de elasticidade torcional

$$k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{G I_o}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l} \quad (2.39)$$

2.3.1 Equação de movimento

A equação do movimento angular do disco em relação a seu eixo pode ser derivada pela segunda lei de Newton ou por qualquer dos métodos discutidos na Seção 2.2.2. Considerando o diagrama de corpo livre do disco (Figura 2.14(b)), podemos derivar a equação de movimento aplicando a segunda lei do movimento de Newton:

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad (2.40)$$

que podemos verificar que é idêntica à Equação (2.3) se o momento de inércia de massa polar J_0 , o deslocamento angular

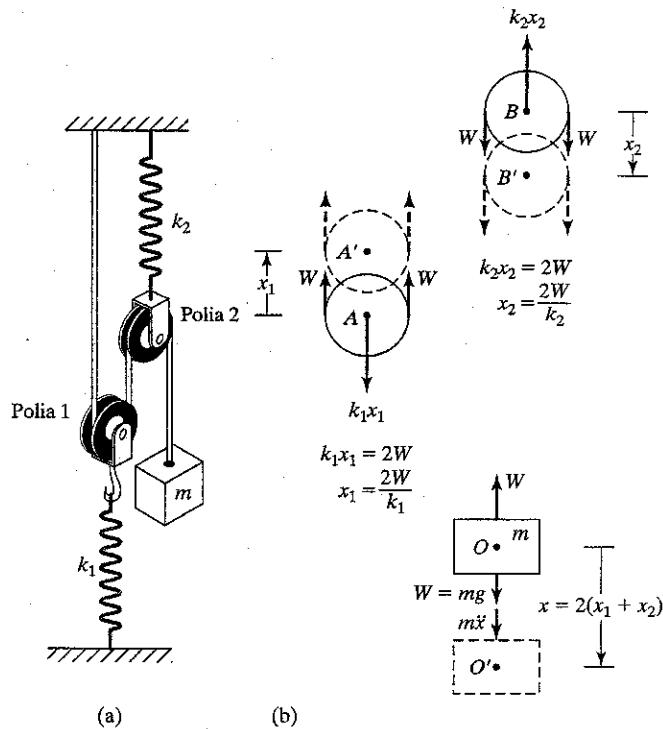


FIGURA 2.13 Sistema de polias.

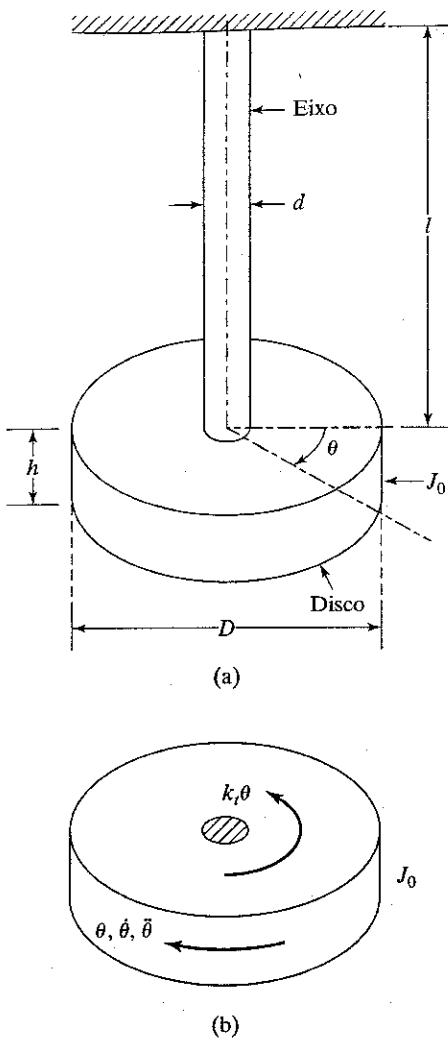


FIGURA 2.14 Vibração por torção de um disco.

θ e k_t a constante elástica torcional, forem substituídos pela massa m , deslocamento x e constante elástica linear k , respectivamente. Assim, a freqüência natural circular do sistema torcional é

$$\omega_n = \left(\frac{k_t}{J_0} \right)^{1/2} \quad (2.41)$$

e o período e a freqüência de vibração em ciclos por segundo são

$$\tau_n = 2\pi \left(\frac{J_0}{k_t} \right)^{1/2} \quad (2.42)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_t}{J_0} \right)^{1/2} \quad (2.43)$$

Observe os seguintes aspectos desse sistema:

- Se a seção transversal do eixo que suporta o disco não for circular, deve-se usar uma constante elástica torcional adequada [2.4, 2.5].
- O momento de inércia de massa polar de um disco é dado por

$$J_0 = \frac{\rho h \pi D^4}{32} = \frac{WD^2}{8g}$$

onde ρ é a densidade da massa, h é a espessura, D é o diâmetro e W é o peso do disco.

- O sistema de mola de torção-inércia mostrado na Figura 2.14 é denominado *pêndulo de torção*. Uma das mais importantes aplicações de um pêndulo de torção é em relógios mecânicos, nos quais um sistema catraca-lingüeta converte a oscilação regular de um pequeno pêndulo de torção nos movimentos dos ponteiros.

2.3.2 Solução

A solução geral da Equação (2.40) pode ser obtida, como no caso da Equação (2.3):

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.44)$$

onde ω_n é dada pela Equação (2.41) e A_1 e A_2 podem ser determinados pelas condições iniciais. Se

$$\theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{e} \quad \dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0 \quad (2.45)$$

as constantes A_1 e A_2 podem ser determinadas:

$$\begin{aligned} A_1 &= \theta_0 \\ A_2 &= \dot{\theta}_0 / \omega_n \end{aligned} \quad (2.46)$$

Também podemos verificar que a Equação (2.44) representa um movimento harmônico simples.

EXEMPLO 2.6

Freqüência natural de pêndulo composto

Qualquer corpo rígido articulado em um ponto que não seja seu centro de massa oscilará em relação ao ponto de articulação sob sua própria força gravitacional. Tal sistema é conhecido como um pêndulo composto (Figura 2.15). Determine a freqüência natural desse sistema.

Solução: Seja O o ponto de suspensão e G o centro de massa do pêndulo composto, como mostrado na Figura 2.15. O corpo rígido oscila no plano xy de modo que a coordenada θ possa ser usada para descrever seu movimento. A distância entre O e G é denotada por d , e o momento de inércia de massa do corpo em relação ao eixo z (perpendicular a ambos, x e y) é denotado por J_0 . Para um deslocamento θ , o torque restaurador (devido ao peso do corpo, W) é $(Wd \operatorname{sen} \theta)$, e a equação de movimento é

$$J_0 \ddot{\theta} + Wd \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (E.1)$$

Observe que a Equação (E.1) é uma equação diferencial não linear ordinária de segunda ordem. Embora seja possível determinar uma solução exata para essa equação (ver Seção 13.3), não é possível determinar soluções exatas para a maioria das equações diferenciais não lineares. Uma solução aproximada da Equação (E.1) pode ser determinada por um de dois métodos. Pode-se usar um procedimento numérico para integrar a Equação (E.1). Como alternativa, a Equação (E.1) pode ser aproximada por uma equação linear cuja solução exata pode ser determinada com facilidade. Para usar essa última abordagem, consideraremos pequenos deslocamentos angulares, de

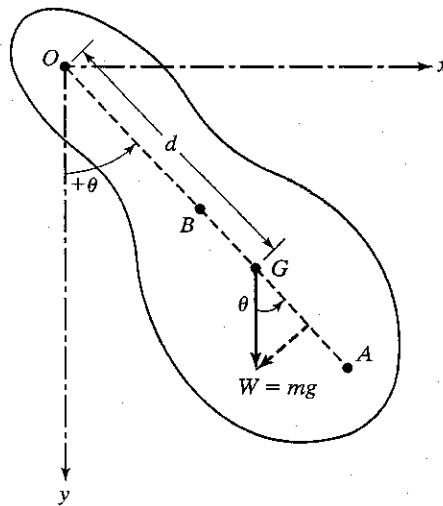


FIGURA 2.15 Pêndulo composto.

modo que θ é pequeno e $\sin \theta \approx \theta$. Por consequência, a Equação (E.1) pode ser aproximada pela equação linear:

$$J_0 \ddot{\theta} + Wd\theta = 0 \quad (\text{E.2})$$

Isso dá a freqüência natural do pêndulo composto:

$$\omega_n = \left(\frac{Wd}{J_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{mgd}{J_0} \right)^{1/2} \quad (\text{E.3})$$

Comparando a Equação (E.3) com a freqüência natural de um pêndulo simples, $\omega_n = (g/l)^{1/2}$ (ver Problema 2.61), podemos determinar o comprimento do pêndulo simples equivalente:

$$l = \frac{J_0}{md} \quad (\text{E.4})$$

Se J_0 for substituído por mk_0^2 , onde k_0 é o raio de giração do corpo em relação a O , as equações (E.3) e (E.4) tornam-se

$$\omega_n = \left(\frac{gd}{k_0^2} \right)^{1/2} \quad (\text{E.5})$$

$$l = \left(\frac{k_0^2}{d} \right) \quad (\text{E.6})$$

Se k_G denotar o raio de giração do corpo ao redor de G , temos

$$k_0^2 = k_G^2 + d^2 \quad (\text{E.7})$$

e a Equação (E.6) torna-se

$$l = \left(\frac{k_G^2}{d} + d \right) \quad (\text{E.8})$$

Se a linha OG for estendida até o ponto A , de modo que

$$GA = \frac{k_G^2}{d} \quad (\text{E.9})$$

a Equação (E.8) torna-se

$$l = GA + d = OA \quad (\text{E.10})$$

Por consequência, pela Equação (E.5), ω_n é dada por

$$\omega_n = \left\{ \frac{g}{(k_0^2/d)} \right\}^{1/2} = \left(\frac{g}{l} \right)^{1/2} = \left(\frac{g}{OA} \right)^{1/2} \quad (\text{E.11})$$

Essa equação mostra que, quer o corpo seja articulado em relação a O ou a A , sua freqüência natural é a mesma. O ponto A é denominado o *centro de percussão*.

Centro de percussão. O conceito de pêndulo composto e de centro de percussão pode ser usado em muitas aplicações práticas:

1. Um martelo pode ter uma forma tal que seu centro de percussão esteja situado na cabeça (malho) e o centro de rotação, no cabo (Figura 2.16(a)). Nesse caso, a força de impacto na cabeça do martelo não causará nenhuma reação anormal no cabo.
2. No caso de um taco de beisebol, se, de um lado, a bola bater no centro de percussão do taco enquanto o centro de rotação estiver nas mãos, o batedor não sentirá nenhuma reação perpendicular (Figura 2.16(b)) ao taco. Do outro lado, se a bola bater perto da extremidade livre do taco ou perto das mãos, o batedor sentirá dor nas mãos como resultado da reação perpendicular ao taco.
3. No ensaio de materiais Izod (impacto), o corpo de prova é entalhado adequadamente e preso a uma morsa fixada na base da máquina (ver Figura 2.16(c)). Um pêndulo é solto de uma altura padronizada, e a extremidade livre do

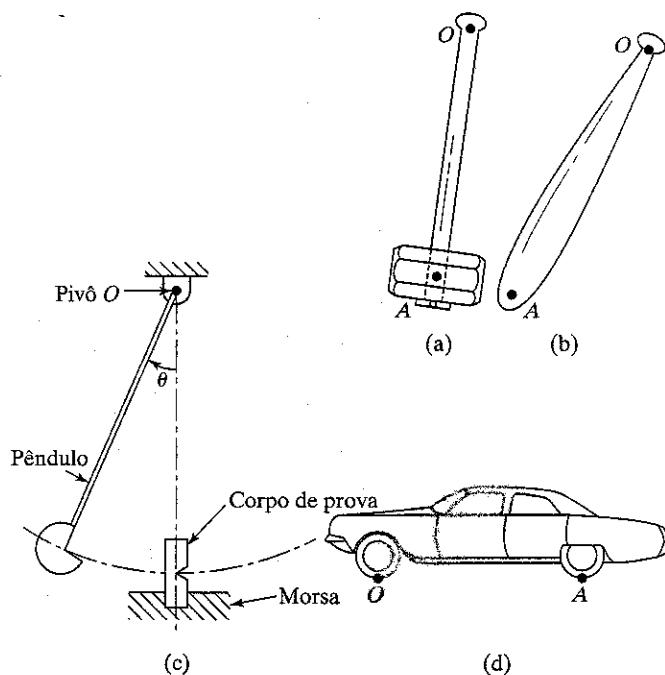


FIGURA 2.16 Aplicações de centro de percussão.

corpo de prova é atingida pelo pêndulo quando ele passa por sua posição mais baixa. A deformação e o encurvamento do pêndulo podem ser reduzidos se o centro de percussão estiver localizado perto da borda de impacto. Nesse caso, o pivô estará livre de qualquer reação impulsiva.

4. Quando as rodas dianteiras de um automóvel (mostrado na Figura 2.16(d)) batem contra uma saliência, os passageiros não sentem nenhuma reação se o centro de percussão do veículo estiver localizado próximo ao eixo traseiro. De maneira semelhante, se as rodas traseiras baterem em uma saliência no ponto *A*, nenhuma reação será sentida no eixo dianteiro (ponto *O*), se o centro de percussão estiver próximo ao eixo dianteiro. Portanto, é desejável que o centro de oscilação do veículo esteja em um eixo e o centro de percussão, no outro [2.2].

2.4 Condições de estabilidade

Considere uma barra rígida uniforme articulada em uma das extremidades e conectada simetricamente a duas molas na outra extremidade, como mostrado na Figura 2.17(a). Suponha que a massa da barra seja *m* e que as molas não estejam distendidas quando a barra estiver na posição vertical. Quando a barra for deslocada por um ângulo θ , a força da mola em cada mola é $kl \operatorname{sen} \theta$; a força total da mola será $2kl \operatorname{sen} \theta$. A força da gravidade $W = mg$ age no sentido vertical de cima para baixo, passando pelo centro de gravidade, *G*. O momento em relação ao ponto de rotação *O* devido à aceleração angular $\ddot{\theta}$ é $J_0 \ddot{\theta} = (ml^2/3) \ddot{\theta}$. Assim, a equação de movimento da barra para rotação em relação ao ponto *O* pode ser escrita como

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\theta} + (2kl \operatorname{sen} \theta) l \cos \theta - W \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (2.47)$$

Para pequenas oscilações, a Equação (2.47) reduz-se a

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\theta} + 2kl^2 \theta - \frac{Wl}{2} \theta = 0$$

ou

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{3Wl - 12kl^2}{2ml^2} \right) \theta = 0 \quad (2.48)$$

A solução da Equação (2.48) depende do sinal de $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2$, como discutiremos a seguir.

Caso 1. Quando $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 > 0$, a solução da Equação (2.48) representa oscilações estáveis e pode ser expressa como

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \operatorname{sen} \omega_n t \quad (2.49)$$

onde A_1 e A_2 são constantes e

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3Wl - 12kl^2}{2ml^2}} \quad (2.50)$$

Caso 2. Quando $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 = 0$, a Equação (2.48) reduz-se a $\ddot{\theta} = 0$, e a solução pode ser obtida diretamente integrando duas vezes

$$\theta(t) = C_1 t + C_2 \quad (2.51)$$

Para as condições iniciais $\theta(t = 0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$, a solução torna-se

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \quad (2.52)$$

A Equação (2.52) mostra que o deslocamento angular aumenta linearmente a uma velocidade constante $\dot{\theta}_0$. Contudo, se $\dot{\theta}_0 = 0$, a Equação (2.52) denota uma posição de equilíbrio estático com $\theta = \theta_0$ — isto é, o pêndulo permanece em sua posição original, definida por $\theta = \theta_0$.

Caso 3. Quando $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 < 0$, definimos

$$\alpha = \sqrt{\frac{3Wl - 12kl^2}{2ml^2}}^{1/2}$$

e expressamos a solução da Equação (2.48) como

$$\theta(t) = B_1 e^{\alpha t} + B_2 e^{-\alpha t} \quad (2.53)$$

onde B_1 e B_2 são constantes. Para as condições iniciais $\theta(t = 0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$, a Equação (2.53) torna-se

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha} [(\alpha\theta_0 + \dot{\theta}_0)e^{\alpha t} + (\alpha\theta_0 - \dot{\theta}_0)e^{-\alpha t}] \quad (2.54)$$

A Equação (2.54) mostra que $\theta(t)$ aumenta exponencialmente com o tempo; por consequência, o movimento é instável. A razão física para isso é que o momento restaurador devido à mola ($2kl^2\theta$), que tenta trazer o sistema para a posição de equilíbrio, é menor do que o momento não restaurador devido à gravidade $[-W(l/2)\theta]$, que tenta afastar a massa da posição de equilíbrio. Embora as condições de estabilidade sejam ilustradas com referência à Figura 2.17 nesta seção, condições similares precisam ser examinadas na análise de vibração de muitos sistemas de engenharia.

2.5 Método da energia de Rayleigh

Na Seção 2.2.2, a equação de movimento para um sistema com um grau de liberdade foi derivada pelo método da energia. Nesta seção, usaremos o método da energia para determinar as freqüências naturais de sistemas com um grau de liberdade. O princípio da conservação da energia, no

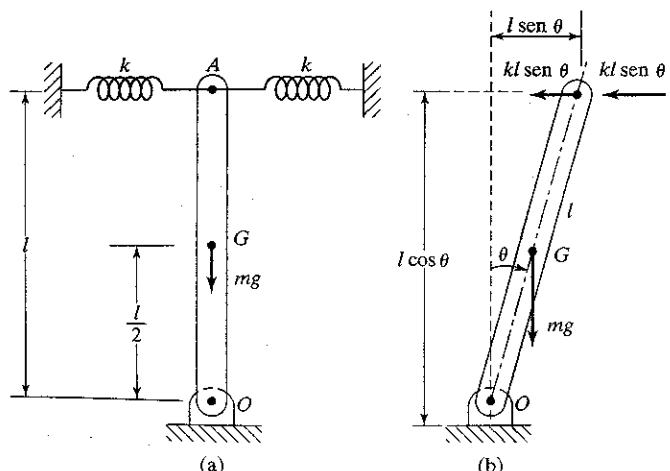


FIGURA 2.17 Estabilidade de uma barra rígida.

contexto de um sistema vibratório não amortecido, pode ser enunciado novamente como

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \quad (2.55)$$

onde os índices 1 e 2 denotam dois instantes diferentes no tempo. Especificamente, usamos o índice 1 para denotar o instante em que a massa está passando por sua posição de equilíbrio estático e escolhemos $U_1 = 0$ como referência para a energia potencial. Se o índice 2 indicar o instante correspondente ao máximo deslocamento da massa, temos $T_2 = 0$. Assim, a Equação (2.55) torna-se

$$T_1 + 0 = 0 + U_2 \quad (2.56)$$

Se o sistema estiver em movimento harmônico, então T_1 e U_2 denotam os valores máximos de T e U , respectivamente, e a Equação (2.56) torna-se

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (2.57)$$

A aplicação da Equação (2.57), que também é conhecida como *método da energia de Rayleigh*, dá a freqüência natural do sistema diretamente, como ilustrado nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 2.7

Manômetro para motor a diesel

O escapamento de um motor a diesel de um cilindro e quatro tempos deve ser ligado a um silenciador e, então, a pressão deve ser medida com um manômetro simples em U (Figura 2.18). Calcule o comprimento mínimo do tubo do manômetro de modo que a freqüência natural de oscilação da coluna de mercúrio seja 3,5 vezes mais lenta que a freqüência das variações de pressão no silenciador a uma velocidade do motor de 600 rpm. A freqüência de variação de pressão no silenciador é igual a

$$\frac{\text{Número de cilindros} \times \text{Velocidade do motor}}{2}$$

Solução:

1. *Freqüência natural de oscilação da coluna de líquido:* Consideremos o plano de referência da Figura 2.18 como a posição de equilíbrio do líquido. Se o deslocamento da

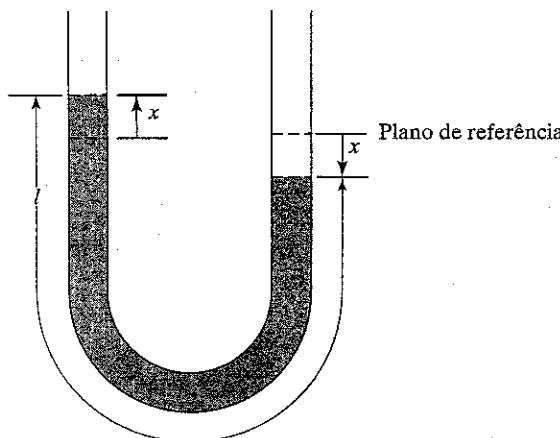


FIGURA 2.18 Manômetro de tubo em U.

coluna de líquido em relação à posição de equilíbrio for denotado por x , a variação na energia potencial é dada por

U = energia potencial da coluna de líquido elevada + energia potencial da coluna de líquido comprimida

= (peso do mercúrio elevado \times deslocamento do C.G. do segmento) + (peso do mercúrio comprimido \times deslocamento do C.G. do segmento)

$$= (Ax\gamma)\frac{x}{2} + (Ax\gamma)\frac{x}{2} = A\gamma x^2 \quad (E.1)$$

onde A é a área da seção transversal da coluna de mercúrio, e γ é o peso específico do mercúrio. A variação na energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\text{massa do mercúrio})(\text{velocidade})^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{Al\gamma}{g} x^2 \end{aligned} \quad (E.2)$$

onde l é o comprimento da coluna de mercúrio. Admitindo-se movimento harmônico, podemos escrever

$$x(t) = X \cos \omega_n t \quad (E.3)$$

onde X é o deslocamento máximo, e ω_n é a freqüência natural. A substituição da Equação (E.3) nas equações (E.1) e (E.2), dá

$$U = U_{\max} \cos^2 \omega_n t \quad (E.4)$$

$$T = T_{\max} \sin^2 \omega_n t \quad (E.5)$$

onde

$$U_{\max} = A\gamma X^2 \quad (E.6)$$

e

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{Ayl\omega_n^2}{g} X^2 \quad (E.7)$$

Igualando U_{\max} a T_{\max} , obtemos a freqüência natural:

$$\omega_n = \left(\frac{2g}{l} \right)^{1/2} \quad (E.8)$$

2. *Comprimento da coluna de mercúrio:* a freqüência de variações de pressão no silenciador é

$$\begin{aligned} &= \frac{1 \times 600}{2} \\ &= 300 \text{ rpm} \\ &= \frac{300 \times 2\pi}{60} = 10\pi \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (E.9)$$

Assim, a freqüência de oscilações da coluna de líquido no manômetro é $10\pi/3,5 = 9,0 \text{ rad/s}$. Pela Equação (E.8), obtemos

$$\left(\frac{2g}{l} \right)^{1/2} = 9,0 \quad (E.10)$$

ou

$$l = \frac{2,0 \times 9,81}{(9,0)^2} = 0,243 \text{ m} \quad (E.11)$$

EXEMPLO 2.8**Efeito da massa sobre a ω_n de uma mola**

Determine o efeito da massa da mola sobre a freqüência natural do sistema massa-mola mostrado na Figura 2.19.

Solução: Para determinar o efeito da massa da mola sobre a freqüência natural do sistema massa-mola, somamos a energia cinética do sistema à da massa ligada à mola e usamos o método da energia para determinar a freqüência natural. Seja l o comprimento total da mola. Se x denotar o deslocamento da extremidade inferior da mola (ou massa m), o deslocamento até a distância y em relação ao suporte é dado por $y(x/l)$. De forma similar, se \dot{x} denotar a velocidade da massa m , a velocidade de um elemento de mola localizado à distância y em relação ao suporte é dada por $y(\dot{x}/l)$. A energia cinética do elemento de mola de comprimento dy é

$$dT_s = \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{l} dy \right) \left(\frac{y\dot{x}}{l} \right)^2 \quad (\text{E.1})$$

onde m_s é a massa da mola. A energia cinética total do sistema pode ser expressa como

$T = \text{Energia cinética da massa } (T_m) + \text{Energia cinética da mola } (T_s)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \int_{y=0}^l \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{l} dy \right) \left(\frac{y^2 \dot{x}^2}{l^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_s}{3} \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

A energia potencial total do sistema é dada por

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{E.3})$$

Admitindo um movimento harmônico

$$x(t) = X \cos \omega_n t \quad (\text{E.4})$$

onde X é o deslocamento máximo da massa e ω_n é a freqüência natural, as energias cinética e potencial máximas podem ser expressas como

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_s}{3} \right) X^2 \omega_n^2 \quad (\text{E.5})$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} kX^2 \quad (\text{E.6})$$

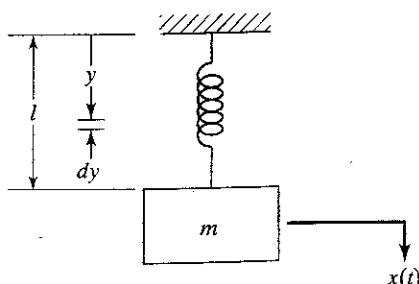


FIGURA 2.19 Massa equivalente de uma mola.

Igualando T_{\max} e U_{\max} , obtemos a expressão para a freqüência natural:

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m + \frac{m_s}{3}} \right)^{1/2} \quad (\text{E.7})$$

Assim, o efeito da massa da mola pode ser levado em conta adicionando-se um terço de sua massa à massa principal [2.3]. ■

EXEMPLO 2.9**Efeito da massa da coluna sobre a freqüência natural da caixa d'água**

Determine a freqüência natural de vibração transversal da caixa d'água considerada no Exemplo 2.1 e Figura 2.10 incluindo a massa da coluna.

Solução: Para incluir a massa da coluna, determinamos a massa equivalente da coluna na extremidade livre usando a equivalência de energia cinética e um modelo com um grau de liberdade para determinar a freqüência natural de vibração. A coluna do reservatório é considerada como uma viga em balanço fixa em uma extremidade (solo) que suporta uma massa M (reservatório de água) na outra extremidade. A deflexão estática de uma viga em balanço sob uma carga concentrada em uma extremidade é dada por (ver Figura 2.20):

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{Px^2}{6EI} (3l - x) = \frac{y_{\max} x^2}{2l^3} (3l - x) \\ &= \frac{y_{\max}}{2l^3} (3x^2 l - x^3) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

A máxima energia cinética da viga em si (T_{\max}) é dada por

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{m}{l} \{\dot{y}(x)\}^2 dx \quad (\text{E.2})$$

onde m é a massa total e (m/l) é a massa por unidade de comprimento da viga. A Equação (E.1) pode ser usada para expressar a variação de velocidade $\dot{y}(x)$, como

$$\dot{y}(x) = \frac{\dot{y}_{\max}}{2l^3} (3x^2 l - x^3) \quad (\text{E.3})$$

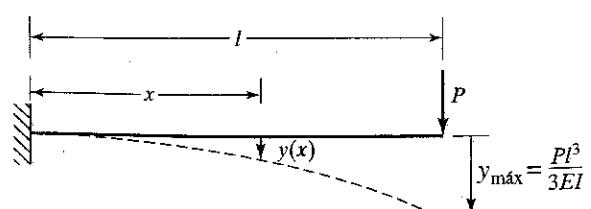


FIGURA 2.20 Massa equivalente da coluna.

e, por consequência, a Equação (E.2) torna-se

$$T_{\max} = \frac{m}{2l} \left(\frac{\dot{y}_{\max}}{2l^3} \right)^2 \int_0^l (3x^2l - x^3)^2 dx \\ = \frac{1}{2} \frac{m \dot{y}_{\max}^2}{l} \left(\frac{33}{35} l^7 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{33}{140} m \right) \dot{y}_{\max}^2 \quad (\text{E.4})$$

Se m_{eq} denotar a massa equivalente da viga em balanço (caixa d'água) na extremidade livre, sua energia cinética máxima pode ser expressa como

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{y}_{\max}^2 \quad (\text{E.5})$$

Igualando as equações (E.4) e (E.5), obtemos

$$m_{\text{eq}} = \frac{33}{140} m \quad (\text{E.6})$$

Assim, a massa efetiva total que age na extremidade da viga em balanço é dada por

$$M_{\text{eff}} = M + m_{\text{eq}} \quad (\text{E.7})$$

onde M é a massa do reservatório de água. A frequência natural de vibração transversal da caixa d'água é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M_{\text{eff}}}} = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{33}{140} m}} \quad (\text{E.8})$$

2.6 Vibração livre com amortecimento viscoso

2.6.1 Equação de movimento

Como afirmamos na Seção 1.9, a força de amortecimento viscoso, F , é proporcional à velocidade \dot{x} ou v e pode ser expressa como

$$F = -c\dot{x} \quad (2.58)$$

onde c é a constante de amortecimento ou coeficiente de amortecimento viscoso, e o sinal negativo indica que a força de amortecimento é oposta ao sentido da velocidade. Um sistema com um grau de liberdade com um amortecedor viscoso é mostrado na Figura 2.21. Se x for medida em relação à posição de equilíbrio da massa m , a aplicação da lei de Newton dá a equação de movimento:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.59)$$

2.6.2 Solução

Para resolver a Equação (2.59), admitimos uma solução na forma

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.60)$$

onde C e s são constantes indeterminadas. A inserção dessa função na Equação (2.59) resulta na equação característica

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.61)$$

cujas raízes são

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \\ = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.62)$$

Estas raízes dão duas soluções para a Equação (2.59):

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = C_2 e^{s_2 t} \quad (2.63)$$

Assim, a solução geral da Equação (2.59) é dada por uma combinação das duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \\ = C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \quad (2.64)$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema.

Constante de amortecimento crítico e o fator de amortecimento. O amortecimento crítico c_c é definido como o valor da constante de amortecimento c para o qual o radical na Equação (2.62) torna-se zero:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

ou

$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \quad (2.65)$$

Para qualquer sistema amortecido, o fator de amortecimento ζ é definido como a razão entre a constante de amortecimento e a constante de amortecimento crítico:

$$\zeta = c/c_c \quad (2.66)$$

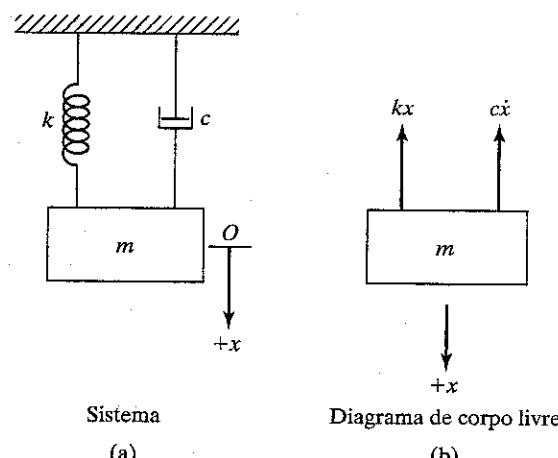


FIGURA 2.21 Sistema com um grau de liberdade com amortecedor viscoso.

Pelas equações (2.66) e (2.65), podemos escrever

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c} \cdot \frac{c_c}{2m} = \zeta \omega_n \quad (2.67)$$

e, por consequência,

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \quad (2.68)$$

Assim, a solução, Equação (2.64), pode ser escrita como

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} \quad (2.69)$$

A natureza das raízes s_1 e s_2 e, por consequência, o comportamento da solução, Equação (2.69), depende da magnitude do amortecimento. Pode-ser perceber que o caso $\zeta = 0$ resulta nas vibrações não amortecidas discutidas na Seção 2.2. Por consequência, admitimos que $\zeta \neq 0$ e consideramos os três casos seguintes.

Caso 1. Sistema subamortecido

($\zeta < 1$ ou $c < c_c$ ou $c/2m < \sqrt{k/m}$). Para essa condição, ($\zeta^2 - 1$) é negativo e as raízes s_1 e s_2 podem ser expressas como

$$s_1 = (-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2}) \omega_n$$

$$s_2 = (-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2}) \omega_n$$

e a solução, Equação (2.69), pode ser escrita de formas diferentes:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2}) \omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2}) \omega_n t} \\ &= e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ C_1 e^{i\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t} \right\} \\ &= e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ (C_1 + C_2) \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right. \\ &\quad \left. + i(C_1 - C_2) \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\} \\ &= e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ C'_1 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right. \\ &\quad \left. + C'_2 \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\} \\ &= X e^{-\zeta \omega_n t} \sin \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi \right) \\ &= X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t - \phi_0 \right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde (C'_1, C'_2) , (X, ϕ) e (X_0, ϕ_0) são constantes arbitrárias a ser determinadas pelas condições iniciais.

Para as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, podemos determinar C'_1 e C'_2 :

$$C'_1 = x_0 \quad \text{e} \quad C'_2 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \quad (2.71)$$

e, por consequência, a solução torna-se

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ x_0 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\} \end{aligned} \quad (2.72)$$

As constantes (X, ϕ) e (X_0, ϕ_0) podem ser expressas como

$$X = X_0 = \sqrt{(C'_1)^2 + (C'_2)^2} \quad (2.73)$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}(C'_1/C'_2) \quad (2.74)$$

$$\phi_0 = \operatorname{tg}^{-1}(-C'_2/C'_1) \quad (2.75)$$

O movimento descrito pela Equação (2.72) é um movimento harmônico amortecido de freqüência angular $\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$; porém, por causa do fator $e^{-\zeta \omega_n t}$, a amplitude diminui exponencialmente com o tempo, como mostra a Figura 2.22. A quantidade

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (2.76)$$

é denominada a *freqüência de vibração amortecida*. Pode-se ver que a freqüência de vibração amortecida ω_d é sempre menor do que a freqüência natural não amortecida ω_n . A redução na freqüência de vibração amortecida com o aumento da quantidade de amortecimento, dada pela Equação (2.76), é mostrada em gráfico na Figura 2.23. O caso subamortecido é muito importante no estudo de vibrações mecânicas porque é o único que resulta em um movimento oscilatório [2.10].

Caso 2. Sistema criticamente amortecido

($\zeta = 1$ ou $c = c_c$ ou $c/2m = \sqrt{k/m}$). Nesse caso, as duas raízes s_1 e s_2 da Equação (2.68) são iguais:

$$s_1 = s_2 = -\frac{c}{2m} = -\omega_n \quad (2.77)$$

Por causa das raízes repetidas, a solução de Equação (2.59) é dada por [2.6]¹

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (2.78)$$

A aplicação das condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ para esse caso dá

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0 \\ C_2 &= \dot{x}_0 + \omega_n x_0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

¹ A Equação (2.78) também pode ser obtida fazendo ζ aproximar-se da unidade no limite na Equação (2.72). Quando $\zeta \rightarrow 1$, $\omega_n \rightarrow 0$; por consequência, $\cos \omega_d t \rightarrow 1$ e $\sin \omega_d t \rightarrow \omega_d t$. Assim, a Equação (2.72) dá

$$x(t) = e^{-\omega_n t} (C'_1 + C'_2 \omega_d t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}$$

onde $C_1 = C'_1$ e $C_2 = C'_2 \omega_d$ são novas constantes.

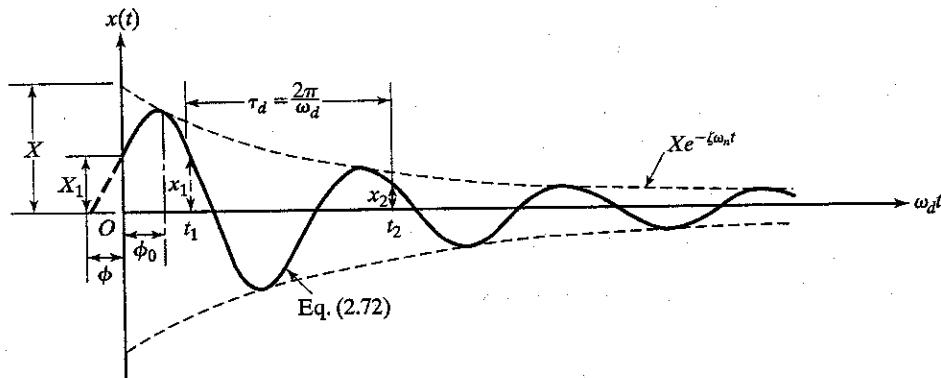


FIGURA 2.22 Solução não amortecida.

e a solução torna-se

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t]e^{-\omega_n t} \quad (2.80)$$

Pode-se ver que o movimento representado pela Equação (2.80) é aperiódico (isto é, não periódico). Visto que $e^{-\omega_n t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, o movimento eventualmente diminuirá até zero, como indicado na Figura 2.24.

Caso 3. Sistema superamortecido

$(\zeta > 1$ ou $c > c_c$ ou $c/2m > \sqrt{k/m}$) $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$, a Equação (2.68) mostra que as raízes s_1 e s_2 são reais e distintas e são dadas por

$$s_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0$$

$$s_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0$$

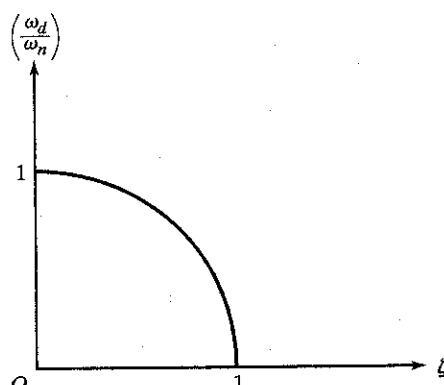
com $s_2 \ll s_1$. Nesse caso, a solução, Equação (2.69), pode ser expressa como

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2.81)$$

Para as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, podemos obter as constantes C_1 e C_2 :

$$C_1 = \frac{x_0\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$C_2 = \frac{-x_0\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (2.82)$$

FIGURA 2.23 Variação de ω_d com amortecimento.

A Equação (2.81) mostra que o movimento é aperiódico, independentemente das condições iniciais impostas ao sistema. Visto que as raízes s_1 e s_2 são ambas negativas, o movimento diminui exponencialmente com o tempo, como mostra a Figura 2.24.

Observe os seguintes aspectos desses sistemas:

1. A natureza das raízes s_1 e s_2 com a variação dos valores de amortecimento c ou ζ pode ser mostrada em um plano complexo. Na Figura 2.25, os eixos horizontal e vertical são escolhidos como os eixos real e imaginário. O semi-círculo representa o lugar geométrico das raízes s_1 e s_2 para diferentes valores de ζ na faixa $0 < \zeta < 1$. Essa figura permite-nos ver instantaneamente o efeito do parâmetro ζ no comportamento do sistema. Constatamos que, para $\zeta = 0$, obtemos as raízes imaginárias $s_1 = +i\omega_n$ e $s_2 = -i\omega_n$, o que resulta na solução dada na Equação (2.15). Para $0 < \zeta < 1$, as raízes s_1 e s_2 são conjugadas complexas e localizadas simetricamente em relação ao eixo real. À medida que o valor de ζ aproxima-se de 1, ambas as raízes aproximam-se do ponto $-\omega_n$ no eixo real. Se $\zeta > 1$, ambas as raízes estarão no eixo real, uma crescendo e a outra decrescendo. No limite, quando $\zeta \rightarrow \infty$, $s_1 \rightarrow 0$ e $s_2 \rightarrow -\infty$. Pode-se ver que o valor $\zeta = 1$ representa um estágio de transição, abaixo do qual ambas as raízes são complexas e acima do qual ambas as raízes são reais.
2. Um sistema criticamente amortecido terá o menor amortecimento requerido para movimento aperiódico; por consequência, à massa retorna à posição de repouso no menor tempo possível, sem ultrapassar o limite. A propriedade de amortecimento crítico é usada em muitas aplicações práticas. Por exemplo, armas de fogo de grande porte têm amortecedores de mola com valor de amortecimento crítico, para que voltem à sua posição original após o recuo no tempo mínimo, sem vibrar. Se o amortecimento fornecido fosse maior que o valor crítico, haveria alguma demora antes do próximo tiro.
3. A resposta amortecida livre de um sistema com um grau de liberdade pode ser representada em plano de fase ou espaço de estado como indicado na Figura 2.26.

2.6.3 Decremento logarítmico

O decremento logarítmico representa a taxa de redução da amplitude de uma vibração livremente amortecida. É definido como o logaritmo natural da razão entre duas amplitudes sucessivas. Vamos representar por t_1 e t_2 os tempos correspondentes a duas amplitudes (deslocamentos) consecutivas

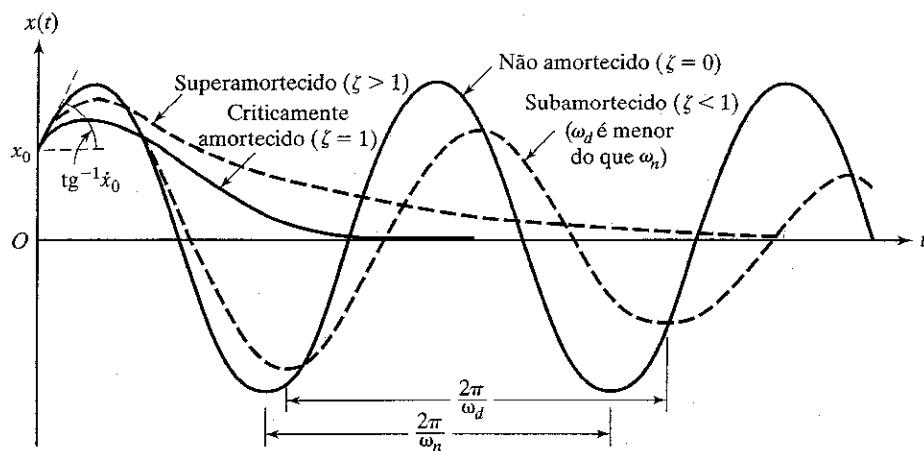


FIGURA 2.24 Comparação entre movimentos com tipos diferentes de amortecimento.

medidas com um ciclo de diferença entre uma e outra para um sistema não amortecido, como na Figura 2.22. Pela Equação (2.70), podemos expressar a razão

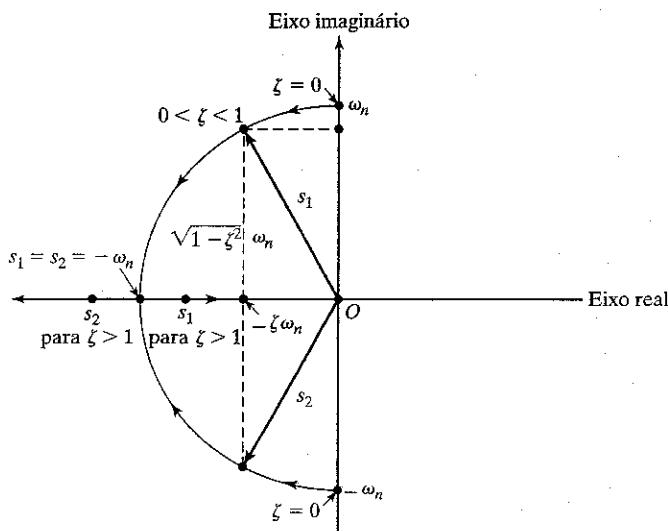
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_0 e^{-\zeta \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)}{X_0 e^{-\zeta \omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \phi_0)} \quad (2.83)$$

Porém, $t_2 = t_1 + \tau_d$ onde $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ é o período de vibração amortecida. Por consequência, $\cos(\omega_d t_2 - \phi_0) = \cos(2\pi + \omega_d t_1 - \phi_0) = \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)$ e a Equação (2.83) pode ser escrita como

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta \omega_n t_1}}{e^{-\zeta \omega_n (t_1 + \tau_d)}} = e^{\zeta \omega_n \tau_d} \quad (2.84)$$

O decremento logarítmico δ pode ser obtido pela Equação (2.84):

$$\begin{aligned} \delta &= \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n \tau_d = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2 \omega_n}} \\ &= \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d} \cdot \frac{c}{2m} \end{aligned} \quad (2.85)$$

FIGURA 2.25 Lugar geométrico de s_1 e s_2 .

Para pequeno amortecimento, a Equação (2.85) pode ser aproximada:

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad \text{se} \quad \zeta \ll 1 \quad (2.86)$$

A Figura 2.27 mostra a variação do decremento logarítmico δ com ζ como dado pelas equações (2.85) e (2.86). Pode-se observar que, para valores até $\zeta = 0,3$, é difícil distinguir uma curva da outra.

O decremento logarítmico é adimensional e, na realidade, é outra forma do fator de amortecimento adimensional ζ . Uma vez conhecido δ , ζ pode ser determinado resolvendo-se a Equação (2.85):

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad (2.87)$$

Se usarmos a Equação (2.86) em vez da Equação (2.85), temos

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (2.88)$$

Se o amortecimento no sistema dado não for conhecido, podemos determiná-lo por meios experimentais medindo quaisquer dois deslocamentos consecutivos x_1 e x_2 . Tomando o logaritmo natural da razão entre x_1 e x_2 , obtemos δ . Pela Equação (2.87), podemos calcular o fator de amortecimento ζ . Na verdade, o fator de amortecimento ζ também pode ser deter-

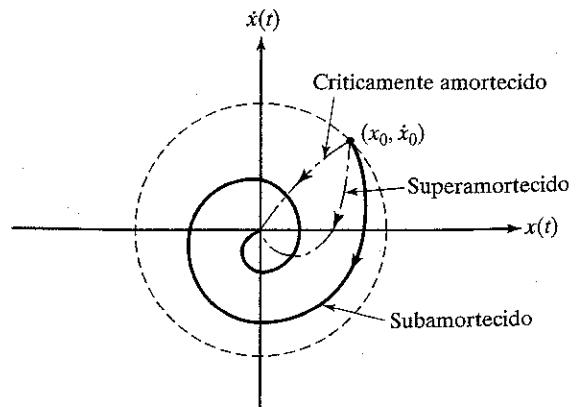


FIGURA 2.26 Plano de fase de um sistema amortecido.

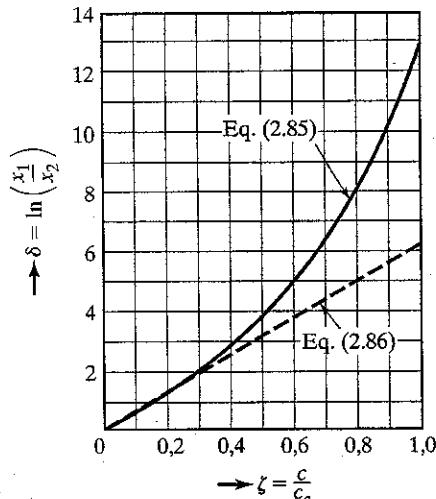


FIGURA 2.27 Variação do decremento logarítmico com amortecimento.

minado medindo-se dois deslocamentos separados por qualquer número completo de ciclos. Se x_1 e x_{m+1} denotarem as amplitudes correspondentes aos tempos t_1 e $t_{m+1} = t_1 + m\tau_d$, onde m é um número inteiro, obtemos

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \frac{x_3}{x_4} \dots \frac{x_m}{x_{m+1}} \quad (2.89)$$

Visto que quaisquer dois deslocamentos sucessivos separados por uma ciclo satisfazem a equação

$$\frac{x_j}{x_{j+1}} = e^{\zeta \omega_n \tau_d} \quad (2.90)$$

A Equação (2.89) torna-se

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = (e^{\zeta \omega_n \tau_d})^m = e^{m\zeta \omega_n \tau_d} \quad (2.91)$$

As Equações (2.91) e (2.85) dão

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \left(\frac{x_1}{x_{m+1}} \right) \quad (2.92)$$

que pode ser substituído na Equação (2.87) ou Equação (2.88) para obter o fator de amortecimento viscoso ζ .

2.6.4 Energia dissipada em amortecimento viscoso

Em um sistema amortecido viscosamente, a taxa de variação da energia com o tempo (dW/dt) é dada por

$$\frac{dW}{dt} = \text{força} \times \text{velocidade} = Fv = -cv^2 = -c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (2.93)$$

pela Equação (2.58). O sinal negativo na Equação (2.93) denota que a energia dissipase com o tempo. Suponha um movimento harmônico simples como $x(t) = X \sen \omega_d t$, onde X é a amplitude do movimento e a energia dissipada em um ciclo completo é dada por²

² No caso de um sistema amortecido, o movimento harmônico simples $x(t) = X \cos \omega_d t$ só é possível quando a resposta de regime permanente é considerada sob uma força harmônica de freqüência ω_d (ver Seção 3.4). A perda de energia devida ao amortecedor é fornecida pela excitação sob vibração forçada em regime permanente [2.7].

$$\Delta W = \int_{t=0}^{2\pi/\omega_d} c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = \int_0^{2\pi} c X^2 \omega_d \cos^2 \omega_d t \cdot d(\omega_d t) \\ = \pi c \omega_d X^2 \quad (2.94)$$

Isso mostra que a energia dissipada é proporcional ao quadrado da amplitude do movimento. Observe que ela não é uma constante para valores de amortecimento e amplitude determinados, visto que ΔW também é função da freqüência ω_d .

A Equação (2.94) é válida mesmo quando há uma mola de rigidez k em paralelo ao amortecedor viscoso. Para ver isso, considere o sistema mostrado na Figura 2.28. A força total resistente ao movimento pode ser expressa como

$$F = -kx - cv = -kx - c\dot{x} \quad (2.95)$$

Se admitirmos movimento harmônico simples

$$x(t) = X \sen \omega_d t \quad (2.96)$$

como antes, a Equação (2.95) torna-se

$$F = -kX \sen \omega_d t - c\omega_d X \cos \omega_d t \quad (2.97)$$

A energia dissipada em um ciclo completo será

$$\Delta W = \int_{t=0}^{2\pi/\omega_d} Fv dt \\ = \int_0^{2\pi/\omega_d} kX^2 \omega_d \sen \omega_d t \cdot \cos \omega_d t \cdot d(\omega_d t) \\ + \int_0^{2\pi/\omega_d} c\omega_d X^2 \cos^2 \omega_d t \cdot d(\omega_d t) = \pi c \omega_d X^2 \quad (2.98)$$

que podemos ver que é idêntica à Equação (2.94). Esse resultado é esperado, visto que a força da mola não realizará nenhum trabalho durante um ciclo completo ou qualquer número inteiro de ciclos.

Também podemos calcular a fração da energia total do sistema vibratório que é dissipada em cada ciclo de movimento ($\Delta W/W$), como segue. A energia total do sistema W pode ser expressa como a máxima energia potencial ($\frac{1}{2}kX^2$) ou como a máxima energia cinética ($\frac{1}{2}m v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}mX^2\omega_d^2$). As duas serão aproximadamente iguais para valores pequenos de amortecimento. Assim,

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi c \omega_d X^2}{\frac{1}{2}m \omega_d^2 X^2} = 2 \left(\frac{2\pi}{\omega_d} \right) \left(\frac{c}{2m} \right) \\ = 2\delta \approx 4\pi\zeta = \text{constante} \quad (2.99)$$

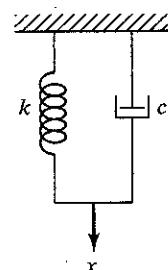


FIGURA 2.28 Mola e amortecedor em paralelo.

pelas equações (2.85) e (2.88). A quantidade $\Delta W/W$ é denominada *capacidade de amortecimento específico* e é útil para comparar a capacidade de amortecimento de materiais de engenharia. Outra quantidade, conhecida como *coeficiente de perda*, também é usada para comparar a capacidade de amortecimento de materiais de engenharia. O coeficiente de perda é definido como a razão entre a energia dissipada por radiano e a energia total de deformação:

$$\text{coeficiente de perda} = \frac{(\Delta W/2\pi)}{W} = \frac{\Delta W}{2\pi W} \quad (2.100)$$

2.6.5 Sistemas torcionais com amortecimento viscoso

Os métodos apresentados nas seções 2.6.1 a 2.6.4 para vibrações lineares com amortecimento viscoso podem ser estendidos diretamente para vibrações por torção (angulares) viscosamente amortecidas. Para isso, considere um sistema torcional com um grau de liberdade com um amortecedor viscoso, como mostrado na Figura 2.29(a). O torque de amortecimento viscoso é dado por (Figura 2.29b):

$$T = -c_t \dot{\theta} \quad (2.101)$$

onde c_t é a constante de amortecimento viscoso por torção, $\dot{\theta} = d\theta/dt$ é a velocidade angular do disco, e o sinal negativo denota que o torque de amortecimento está no sentido oposto ao da velocidade angular. A equação de movimento pode ser derivada como

$$J_0 \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad (2.102)$$

onde J_0 = momento de inércia de massa do disco, k_t = constante elástica do sistema (torque restaurador por unidade de deslocamento angular), e θ = deslocamento angular do disco. A solução da Equação (2.102) pode ser determinada exatamente como no caso de vibrações lineares. Por exemplo, no caso de um sistema subamortecido, a freqüência de vibração amortecida é dada por

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (2.103)$$

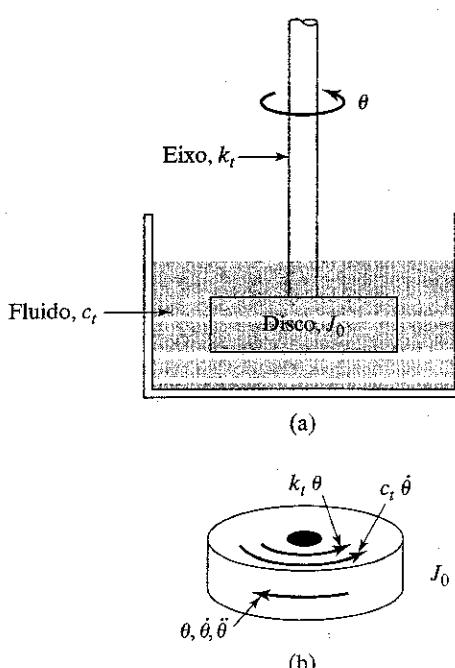


FIGURA 2.29 Amortecedor viscoso por torção.

onde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \quad (2.104)$$

e

$$\zeta = \frac{c_t}{c_{tc}} = \frac{c_t}{2J_0\omega_n} = \frac{c_t}{2\sqrt{k_t J_0}} \quad (2.105)$$

onde c_{tc} é a constante crítica de amortecimento por torção.

EXEMPLO 2.10

Resposta da bigorna de um martelo de forjar

A bigorna de um martelo de forjar pesa 5.000 N e está montada sobre uma base que tem uma rigidez de 5×10^6 N/m e um amortecimento viscoso constante de 10.000 N.s/m. Durante determinada operação de forjamento, o martelo-pilão (isto é, o martelo de queda, martelo ou pilão) com peso de 1.000 N é acionado e cai de uma altura de 2 m sobre a bigorna (Figura 2.30(a)). Se a bigorna estiver em repouso antes do impacto do pilão, determine a resposta da bigorna após o impacto. Considere que o coeficiente de restituição entre a bigorna e o pilão seja 0,4.

Solução: Em primeiro lugar, usamos o princípio de conservação de momento e a definição do coeficiente de restituição para determinar a velocidade inicial da bigorna. Vamos denotar as velocidades do pilão um pouco antes e um pouco depois do impacto contra a bigorna por v_{t1} e v_{t2} , respectivamente. De maneira semelhante, v_{a1} e v_{a2} representam, respectivamente, as velocidades da bigorna um pouco antes e um pouco depois do impacto (Figura 2.30(b)). Observe que o deslocamento da bigorna é medido em relação à sua posição de equilíbrio estático e admitimos que todas as velocidades sejam positivas quando agem de cima para baixo. O princípio de conservação de momento dá

$$M(v_{a2} - v_{a1}) = m(v_{t1} - v_{t2}) \quad (E.1)$$

onde $v_{a1} = 0$ (a bigorna está em repouso antes do impacto) e v_{t1} pode ser determinada igualando sua energia cinética um pouco antes do impacto com sua energia potencial antes de cair de uma altura de $h = 2$ m:

$$\frac{1}{2}mv_{t1}^2 = mgh \quad (E.2)$$

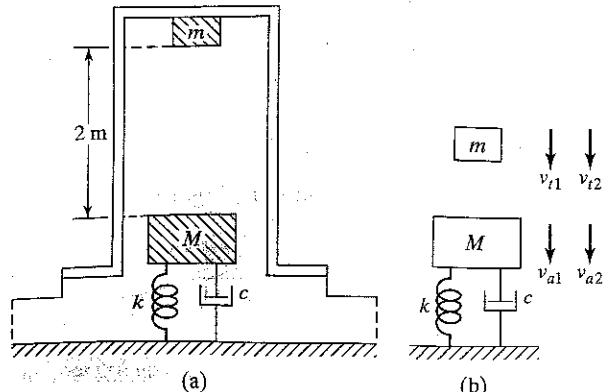


FIGURA 2.30 Martelo de forjar.

ou

$$v_{i1} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 2} = 6,26099 \text{ m/s}$$

Assim, a Equação (E.1) torna-se

$$\frac{5.000}{9,81}(v_{a2} - 0) = \frac{1.000}{9,81}(6,26099 - v_{i2})$$

isto é,

$$510,204082 v_{a2} = 638,87653 - 102,040813 v_{i2} \quad (\text{E.3})$$

A definição do coeficiente de restituição (r) dá:

$$r = -\left(\frac{v_{a2} - v_{i2}}{v_{a1} - v_{i1}}\right) \quad (\text{E.4})$$

isto é,

$$0,4 = -\left(\frac{v_{a2} - v_{i2}}{0 - 6,26099}\right)$$

isto é,

$$V_{a2} = V_{i2} + 2.504396 \quad (\text{E.5})$$

A solução das equações (E.3) e (E.5) dá

$$v_{a2} = 1,460898 \text{ m/s}; v_{i2} = -1,043498 \text{ m/s}$$

Assim, as condições iniciais da bigorna são dadas por

$$x_0 = 0; \dot{x}_0 = 1,460898 \text{ m/s}$$

O fator de amortecimento é igual a

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}} = \frac{1.000}{2\sqrt{(5 \times 10^6)} \left(\frac{5.000}{9,81} \right)} = 0,0989949$$

As freqüências naturais não amortecidas e amortecidas da bigorna são dadas por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{5 \times 10^6}{\left(\frac{5.000}{9,81} \right)}} = 98,994949 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 98,994949 \sqrt{1 - 0,0989949^2} \\ &= 98,024799 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

A resposta ao deslocamento da bigorna é dada pela Equação (2.72):

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_n t \right\} \\ &= e^{-0,0989949t} \{ \cos 98,024799t + 0,01490335 \sin 98,024799t \} \text{ m} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.11

Amortecedor de choque para uma motocicleta

O projeto de um absorvedor de choque subamortecido para uma motocicleta de 200 kg de massa (Figura 2.31(a)) deve atender às seguintes especificações: quando o amortecedor estiver sujeito a uma velocidade vertical inicial devida a uma saliência na estrada, a curva deslocamento-tempo resultante deve ser como a indicada na Figura 2.31(b). Determine as constantes de rigidez e amortecimento necessárias para o amortecedor se o período de vibração amortecida for de 2 s e a amplitude x_1 tiver de ser reduzida a um quarto em um meio-ciclo (isto é, $x_{1,5} = x_1/4$). Determine também a velocidade inicial mínima que resulta em um deslocamento máximo de 250 mm.

Abordagem: usamos a equação para o decreto logarítmico em termos do fator de amortecimento, equação para o período de vibração amortecida, tempo correspondente ao deslocamento máximo para um sistema subamortecido e envelope que passa pelos pontos máximos de um sistema subamortecido.

Solução: Visto que $x_{1,5} = x_1/4$, $x_2 = x_{1,5}/4 = x_1/16$. Por consequência, o decreto logarítmico torna-se

$$\delta = \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \ln(16) = 2,7726 = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{E.1})$$

pela qual o valor de ζ pode ser determinado como $\zeta = 0,4037$. O período de vibração amortecida é dado como 2 s. Por consequência,

$$2 = \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{2\sqrt{1 - (0,4037)^2}} = 3,4338 \text{ rad/s}$$

A constante de amortecimento crítico pode ser obtida por:

$$c_c = 2m\omega_n = 2(200)(3,4338) = 1.373,54 \text{ N.s/m}$$

Assim, a constante de amortecimento é dada por

$$c = \zeta c_c = (0,4037)(1.373,54) = 554,4981 \text{ N.s/m}$$

e a rigidez por

$$k = m\omega_n^2 = (200)(3,4338)^2 = 2.358,2652 \text{ N/m}$$

O deslocamento da massa atingirá seu valor máximo no tempo t_1 , dado por

$$\sin \omega_d t_1 = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

(Ver Problema 2.86.) Isso dá

$$\sin \omega_d t_1 = \sin \pi t_1 = \sqrt{1 - (0,4037)^2} = 0,914$$

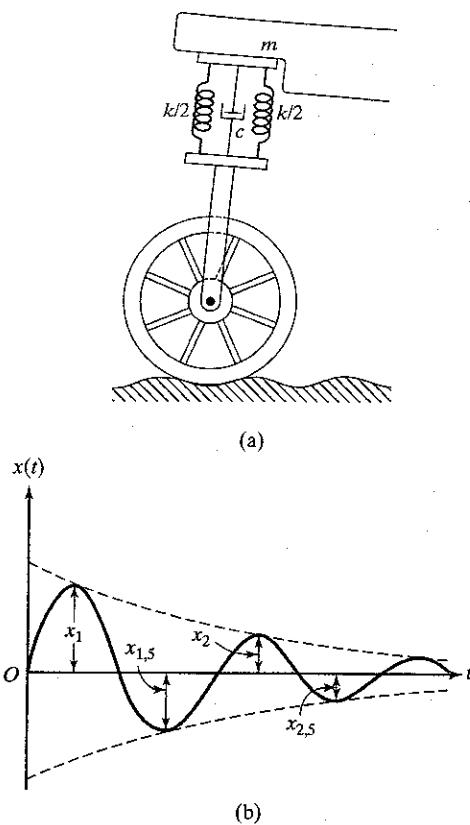


FIGURA 2.31 Amortecedor para uma motocicleta.

ou

$$t_1 = \frac{\sin^{-1}(0,9149)}{\pi} = 0,3678 \text{ s}$$

O envelope que passa pelos pontos máximos (ver Problema 2.86) é dado por

$$x = \sqrt{1 - \zeta^2} X e^{-\zeta \omega_n t} \quad (\text{E.2})$$

Já que $x = 250 \text{ mm}$, a Equação (E.2) dá, em t_1 ,

$$0,25 = \sqrt{1 - (0,4037)^2} X e^{-(0,4037)(3,4338)(0,3678)}$$

ou

$$X = 0,4550 \text{ m}$$

A velocidade da massa pode ser obtida diferenciando o deslocamento

$$\dot{x}(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t$$

como

$$\dot{x}(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} (-\zeta \omega_n \operatorname{sen} \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t) \quad (\text{E.3})$$

Quando $t = 0$, a Equação (E.3) dá

$$\begin{aligned} \dot{x}(t=0) &= \dot{x}_0 = X \omega_d = X \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \\ &= (0,4550)(3,4338) \sqrt{1 - (0,4037)^2} \\ &= 1,4294 \text{ m/s} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.12

Análise de um canhão

O diagrama esquemático de um canhão de grande porte é mostrado na Figura 2.32 [2.8]. Quando a arma é disparada, gases sob alta pressão aceleram o projétil no interior do cano até uma velocidade muito alta. A força de reação empurra o cano do canhão no sentido contrário ao do projétil. Visto que é desejável que o canhão volte à posição de repouso no menor tempo possível sem oscilação, ele é forçado a fazer uma translação para trás contra um sistema mola-amortecedor criticamente amortecido denominado *mecanismo de recuo*. Em um caso particular, o cano do canhão e o mecanismo de recuo têm uma massa de 500 kg com uma mola de recuo de rigidez 10.000 N/m. O recuo do canhão após um disparo é 0,4 m. Determine (1) o coeficiente de amortecimento crítico do amortecedor, (2) a velocidade inicial de recuo do canhão e (3) o tempo que leva para o canhão retornar até uma posição a 0,1 m de sua posição inicial.

Solução:

1. A freqüência natural não amortecida do sistema é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10.000}{500}} = 4,4721 \text{ rad/s}$$

e o coeficiente de amortecimento crítico (Equação 2.65) do amortecedor é

$$c_c = 2m\omega_n = 2(500)(4,4721) = 4.472,1 \text{ N.s/m}$$

2. A resposta de um sistema criticamente amortecido é dada pela Equação (2.78):

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \quad (\text{E.1})$$

onde $C_1 = x_0$ e $C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0$. O tempo t_1 no qual $x(t)$ alcança um valor máximo pode ser obtido fazendo $\dot{x}(t) = 0$. A diferenciação da Equação (E.1) dá

$$\dot{x}(t) = C_2 e^{-\omega_n t} - \omega_n(C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

Por consequência, $\dot{x}(t) = 0$ dá

$$t_1 = \left(\frac{1}{\omega_n} - \frac{C_1}{C_2} \right) \quad (\text{E.2})$$

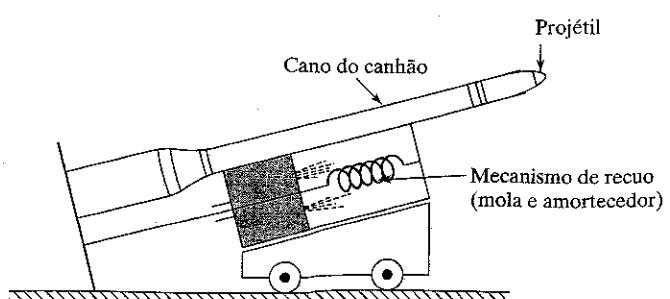


FIGURA 2.32 Recuo de canhão.

Nesse caso, $x_0 = C_1 = 0$; por consequência, a Equação (E.2) resulta em $t_1 = 1/\omega_n$. Visto que o valor máximo de $x(t)$ ou a distância de recuo é dada como $x_{\max} = 0,4$ m, temos

$$x_{\max} = x(t = t_1) = C_2 t_1 e^{-\omega_n t_1} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} e^{-1} = \frac{\dot{x}_0}{e \omega_n}$$

ou

$$\dot{x}_0 = x_{\max} \omega_n e = (0,4)(4,4721)(2,7183) = 4,8626 \text{ m/s}$$

3. Se t_2 denotar o tempo que leva para o canhão voltar a uma posição a 0,1 m em relação à sua posição inicial, temos

$$0,1 = C_2 t_2 e^{-\omega_n t_2} = 4,8626 t_2 e^{-4,4721 t_2} \quad (\text{E.3})$$

A solução da Equação (E.3) dá $t_2 = 0,8258$ s. ■

2.7 Vibração livre com amortecimento Coulomb

Em muitos sistemas mecânicos são usados amortecedores *Coulomb* ou de *atrito seco* em razão de sua simplicidade de mecânica e conveniência [2.9]. Além disso, sempre que os componentes de uma estrutura vibratória deslizam um em relação ao outro, o amortecimento por atrito aparece internamente. Como afirmamos na Seção 1.9, o amortecimento Coulomb surge quando corpos deslizam sobre superfícies secas. A lei de Coulomb do atrito seco afirma que, quando dois corpos estão em contato, a força requerida para produzir deslizamento é proporcional à força normal que age no plano de contato. Assim, a força de atrito F é dada por

$$F = \mu N = \mu W = \mu mg \quad (\text{2.106})$$

onde N é a força normal, igual ao peso da massa ($W = mg$) e μ é o coeficiente de deslizamento ou atrito cinético. O valor do coeficiente de atrito (μ) depende dos materiais em contato e da condição das superfícies em contato. Por exemplo, $\mu \approx 0,1$ para metal sobre metal (com lubrificação), 0,3 para metal sobre metal (sem lubrificação) e aproximadamente 1,0 para borracha sobre metal. A força de atrito age na direção oposta à da velocidade. O amortecimento Coulomb às vezes é denominado *amortecimento constante*, uma vez que a força de amortecimento é independente do deslocamento e da velocidade; ela depende somente da força normal N entre as superfícies deslizantes.

2.7.1 Equação de movimento

Considere um sistema com um grau de liberdade com atrito seco como mostrado na Figura 2.33(a). Uma vez que a força de

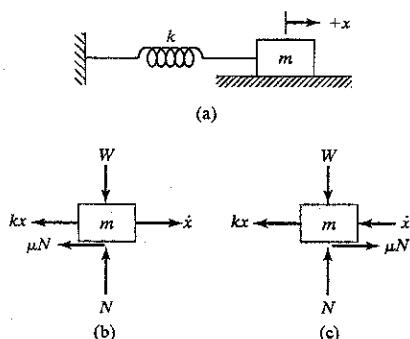


FIGURA 2.33 Sistema massa-mola com amortecimento Coulomb.

atraito varia com a direção da velocidade, precisamos considerar dois casos, como indicado nas figuras 2.33(b) e (c).

Caso 1. Quando x é positivo e dx/dt é positiva ou quando x é negativo, e dx/dt é positiva (isto é, para o meio-ciclo durante o qual a massa se movimenta da esquerda para a direita), a equação de movimento pode ser obtida pela segunda lei de Newton (ver Figura 2.33(b))

$$m\ddot{x} = -kx - \mu N \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + kx = -\mu N \quad (\text{2.107})$$

Esta é uma equação diferencial não-homogênea de segunda ordem. A solução pode ser verificada substituindo a Equação (2.108) na Equação (2.107)

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \quad (\text{2.108})$$

onde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ é a freqüência de vibração e A_1 e A_2 são constantes cujos valores dependem das condições iniciais desse meio-ciclo.

Caso 2. Quando x é positivo e dx/dt é negativa ou quando x é negativo e dx/dt é negativa (isto é, para o meio-ciclo durante o qual a massa se movimenta da direita para a esquerda), a equação de movimento pode ser derivada pela Figura 2.33(c) como

$$-kx + \mu N = m\ddot{x} \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + kx = \mu N \quad (\text{2.109})$$

A solução da Equação (2.109) é dada por

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \quad (\text{2.110})$$

onde A_3 e A_4 são constantes a ser determinadas pelas condições iniciais desse meio-ciclo. O termo $\mu N/k$ que aparece nas Equações (2.108) e (2.110) é uma constante que representa o deslocamento virtual da mola sob a força μN , se ela fosse aplicada como uma força estática. As equações (2.108) e (2.110) indicam que em cada meio-ciclo o movimento é harmônico, e a posição de equilíbrio muda de $\mu N/k$ para $-(\mu N/k)$ a cada meio-ciclo, como mostrado na Figura 2.34.

2.7.2 Solução

As equações (2.107) e (2.109) podem ser expressas como uma única equação (usando $N = mg$):

$$m\ddot{x} + \mu m g \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = 0 \quad (\text{2.111})$$

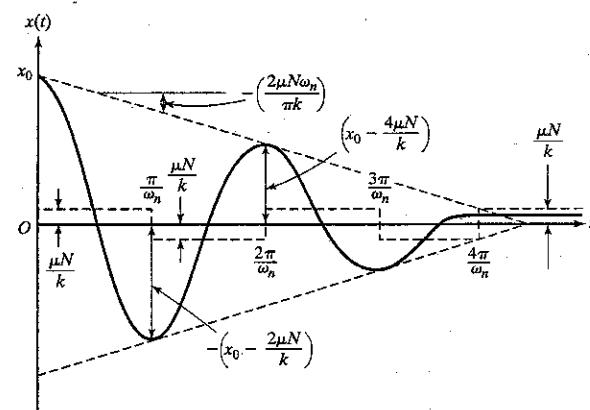


FIGURA 2.34 Movimento da massa com amortecimento Coulomb.

onde $\text{sgn}(y)$ é denominada função signum cujo valor é definido como 1 para $y > 0$, -1 para $y < 0$, e 0 para $y = 0$. Podemos ver que a Equação (2.111) é uma equação diferencial não linear para a qual não existe um solução analítica simples. Métodos numéricos podem ser usados para resolver a Equação (2.111) convenientemente (ver Exemplo 2.19). Todavia, a Equação (2.111) pode ser resolvida analiticamente se dividirmos o eixo do tempo em segmentos separados por $\dot{x} = 0$ (isto é, intervalos de tempo com direções de movimento diferentes). Para determinar a solução usando esse procedimento, vamos admitir que as condições iniciais sejam

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.112)$$

Isto é, o sistema começa com velocidade zero e deslocamento x_0 em $t = 0$. Visto que $x = x_0$ em $t = 0$, o movimento começa da direita para a esquerda. Vamos denotar por x_0, x_1, x_2, \dots as amplitudes do movimento em meios-ciclos sucessivos. Pelas equações (2.110) e (2.112), podemos avaliar as constantes A_3 e A_4 :

$$A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}, \quad A_4 = 0$$

Assim, a Equação (2.110) torna-se

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \quad (2.113)$$

Essa solução é válida apenas para metade do ciclo, isto é, para $0 \leq t \leq \pi/\omega_n$. Quando $t = \pi/\omega_n$, a massa estará em sua posição extrema esquerda e seu deslocamento em relação à posição de equilíbrio pode ser determinado pela Equação (2.113):

$$\begin{aligned} -x_1 &= x\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \pi + \frac{\mu N}{k} \\ &= -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) \end{aligned}$$

Uma vez que o movimento começou com um deslocamento de $x = x_0$ e, em um meio-ciclo, o valor de x tornou-se $[-x_0 - (2\mu N/k)]$, a redução em magnitude de x no tempo π/ω_n é $2\mu N/k$.

No segundo meio-ciclo, a massa movimenta-se da esquerda para a direita, portanto a Equação (2.108) deve ser usada. As condições iniciais para esse meio-ciclo são

$$\begin{aligned} x(t=0) &= \text{valor de } x \text{ em } t = \frac{\pi}{\omega_n} \text{ na Equação (2.113)} \\ &= -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x}(t=0) &= \text{valor de } \dot{x} \text{ em } t = \frac{\pi}{\omega_n} \text{ na Equação (2.113)} \\ &= \left\{ \text{valor de } -\omega_n \left(x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \sin \omega_n t \text{ em } t = \frac{\pi}{\omega_n} \right\} = \end{aligned}$$

Assim, as constantes na Equação (2.108) tornam-se

$$-A_1 = -x_0 + \frac{3\mu N}{k}, \quad A_2 = 0$$

de modo que a Equação (2.108) pode ser escrita como

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k} \right) \cos \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \quad (2.114)$$

Essa equação é válida somente pra o segundo meio-ciclo — isto é, para $\pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n$. No final desse meio-ciclo, o valor de $x(t)$ é

$$x_2 = x\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) \text{ na Equação (2.114)} = x_0 - \frac{4\mu N}{k}$$

e

$$x\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) \text{ na Equação (2.114)} = 0$$

Estas se tornam as condições iniciais para o terceiro meio-ciclo, e o procedimento pode ser continuado até o movimento parar. O movimento pára quando $x_n \leq \mu N/k$, visto que, então, a força restauradora exercida pela mola (kx) será menor que a força de atrito μN . Assim, o número de meios-ciclos (r) que transcorrem antes de o movimento cessar é dado por

$$x_0 - r \frac{2\mu N}{k} \leq \frac{\mu N}{k}$$

isto é,

$$r \geq \left\{ \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}} \right\} \quad (2.115)$$

Observe as seguintes características de um sistema com amortecimento Coulomb:

1. A equação de movimento é não linear com amortecimento Coulomb, ao passo que é linear com amortecimento viscoso.
2. A freqüência natural do sistema permanece inalterada com a adição de amortecimento Coulomb, ao passo que é reduzida com a adição de amortecimento viscoso.
3. O movimento é periódico com amortecimento Coulomb, ao passo que pode ser não-periódico em um sistema viscosamente amortecido (superamortecido).
4. O sistema entra em repouso após algum tempo com amortecimento Coulomb, ao passo que, teoricamente, o movimento continua para sempre (talvez com uma amplitude infinitesimalmente pequena) com amortecimento viscoso e por histerese.
5. A amplitude é reduzida linearmente com amortecimento Coulomb, ao passo que a redução é exponencial com amortecimento viscoso.
6. Em cada ciclo sucessivo a amplitude do movimento é reduzida pela quantidade $4\mu N/k$, de modo que as amplitudes

no final de quaisquer dois ciclos consecutivos estão relacionadas:

$$X_m = X_{m-1} - \frac{4\mu N}{k} \quad (2.116)$$

Como a amplitude é reduzida por uma quantidade $4\mu N/k$ em um ciclo (isto é, no tempo $2\pi/\omega_n$), a inclinação das retas do envelope (representadas por linhas tracejadas) na Figura 2.34 é

$$-\left(\frac{4\mu N}{k}\right) / \left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) = -\left(\frac{2\mu N \omega_n}{\pi k}\right)$$

A posição final da massa normalmente é afastada em relação à posição de equilíbrio ($x = 0$) e representa um deslocamento permanente no qual a força de atrito é travada. Leves batidinhas normalmente farão a massa chegar à sua posição de equilíbrio.

2.7.3 Sistemas torcionais com amortecimento

Coulomb

Se um torque de atrito constante agir sobre um sistema torcional, a equação que controla as oscilações angulares do sistema podem ser derivadas, semelhantes às equações (2.107) e (2.109), como

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = -T \quad (2.117)$$

e

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = T \quad (2.118)$$

onde T denota o torque de amortecimento constante (semelhante a μN para vibrações lineares). As soluções das equações (2.117) e (2.118) são semelhantes às das vibrações lineares. Em particular, a freqüência de vibração é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \quad (2.119)$$

e a amplitude do movimento ao final do r -ésimo meio-ciclo (θ_r) é dada por

$$\theta_r = \theta_0 - r \frac{2T}{k_t} \quad (2.120)$$

onde θ_0 é o deslocamento angular inicial em $t = 0$ (com $\dot{\theta} = 0$ em $t = 0$). O movimento cessa quando

$$r \geq \left\{ \frac{\theta_0 - \frac{T}{k_t}}{\frac{2T}{k_t}} \right\} \quad (2.121)$$

EXEMPLO 2.13

Coeficiente de atrito em relação a posições medidas de massa

Um bloco de metal colocado sobre uma superfície irregular está ligado a uma mola e recebe um deslocamento inicial

de 10 cm em relação à sua posição de equilíbrio. Após cinco ciclos de oscilação em 2 s, constata-se que a posição final do bloco de metal é 1 cm em relação à sua posição de equilíbrio. Determine o coeficiente de atrito entre a superfície e o bloco de metal.

Solução: Visto que foi constatado que ocorreram cinco ciclos de oscilação em 2 s, o período (τ_n) é $2/5 = 0,4$ s e, por consequência, a freqüência de oscilação é $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{\tau_n} = \frac{2\pi}{0,4} = 15,708$ rad/s. Uma vez que a amplitude de oscilação reduz-se de

$$\frac{4\mu N}{k} = \frac{4\mu mg}{k}$$

em cada ciclo, a redução da amplitude em cinco ciclos é

$$5 \left(\frac{4\mu mg}{k} \right) = 0,10 - 0,01 = 0,09 \text{ m}$$

ou

$$\mu = \frac{0,09k}{20mg} = \frac{0,09\omega_n^2}{20g} = \frac{0,09(15,708)^2}{20(9,81)} = 0,1132$$

EXEMPLO 2.14

Polia sujeita a amortecimento Coulomb

Um eixo de aço com 1 m de comprimento e 50 mm de diâmetro está fixado em uma extremidade e suporta uma polia de momento de inércia de massa de 25 kg/m^2 na outra extremidade. Um freio de lona exerce um torque de atrito constante de 400 N/m ao redor da circunferência da polia. Se a polia for deslocada de 6° e então solta, determine (1) o número de ciclos antes de a polia atingir o repouso e (2) a posição final de acomodação da polia.

Solução: (1) O número de meios-ciclos que transcorrem antes de o movimento angular da polia cessar é dado pela Equação (2.121)

$$r \geq \left\{ \frac{\theta_0 - \frac{T}{k_t}}{\frac{2T}{k_t}} \right\} \quad (E.1)$$

onde $\theta_0 =$ deslocamento angular inicial = $6^\circ = 0,10472$ rad, $k_t =$ constante elástica torcional do eixo dada por

$$k_t = \frac{GJ}{l} = \frac{(8 \times 10^{10}) \left\{ \frac{\pi}{32} (0,05)^4 \right\}}{1} = 49.087,5 \text{ N.m/rad}$$

e $T =$ torque de atrito constante aplicado à polia = 400 N/m. A Equação (E.1) dá

$$r \geq \frac{0,10472 - \left(\frac{400}{49.087,5} \right)}{\left(\frac{800}{49.087,5} \right)} = 5,926$$

Assim, o movimento cessa após seis meios-ciclos.

(2) O deslocamento angular após seis meios-ciclos é dado pela Equação (2.120).

$$\theta = 0,10472 - 6 \times 2 \left(\frac{400}{49.087,5} \right) = 0,006935 \text{ rad} = 0,39734^\circ$$

Assim, a polia pára a $0,39734^\circ$ em relação à posição de equilíbrio do mesmo lado do deslocamento inicial.

2.8 Vibração livre com amortecimento por histerese

Considere o conjunto mola-amortecedor viscoso mostrado na Figura 2.35(a). Para esse sistema, a força F necessária para causar um deslocamento $x(t)$ é dada por

$$F = kx + cx \quad (2.122)$$

Para um movimento harmônico de freqüência ω e amplitude X ,

$$x(t) = X \sen \omega t \quad (2.123)$$

As equações (2.122) e (2.123) dão

$$\begin{aligned} F(t) &= kX \sen \omega t + cX\omega \cos \omega t \\ &= kx \pm c\omega \sqrt{X^2 - (X \sen \omega t)^2} \\ &= kx \pm c\omega \sqrt{X^2 - x^2} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Quando construímos um gráfico de F em relação a x , a Equação (2.124) representa um laço fechado, como mostrado na Figura 2.35(b). A área do laço denota a energia dissipada pelo amortecedor em um ciclo de movimento e é dada por

$$\begin{aligned} \Delta W &= \oint F dx \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} (kX \sen \omega t + cX\omega \cos \omega t)(\omega X \cos \omega t) dt \\ &= \pi\omega c X^2 \end{aligned} \quad (2.125)$$

A Equação (2.125) também foi derivada na Seção 2.6.4 (ver Equação 2.98).

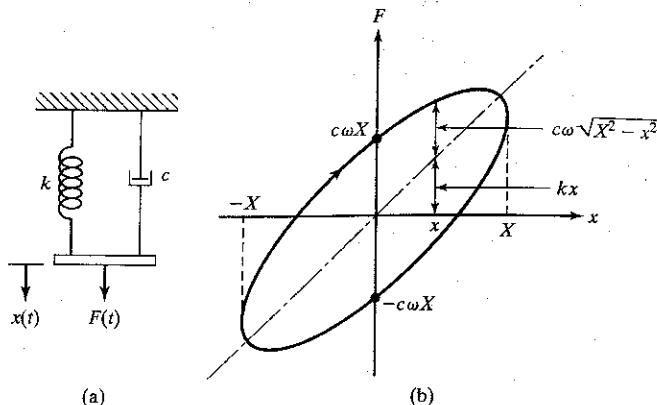


FIGURA 2.35 Sistema mola-amortecedor viscoso.

Como afirmamos na Seção 1.9, o amortecimento causado pelo atrito entre os planos internos que escorregam ou deslizam à medida que o material se deforma é denominado amortecimento por histerese (ou amortecimento sólido, ou estrutural). Tal amortecimento gera um laço de histerese que se formará na curva tensão-deformação ou força-deslocamento (ver Figura 2.36(a)). A perda de energia em um ciclo de carregamento e descarregamento é igual à área envolvida pelo laço de histerese [2.11–2.13]. A similaridade entre as figuras 2.35(b) e 2.36(a) pode ser usada para definir uma constante de amortecimento por histerese. Constatou-se experimentalmente que a perda de energia por ciclo devido a atrito interno independe da freqüência, mas é aproximadamente proporcional ao quadrado da amplitude. Para conseguir esse comportamento observado da Equação (2.125), considera-se que o coeficiente de amortecimento c é inversamente proporcional à freqüência como

$$c = \frac{h}{\omega} \quad (2.126)$$

onde h é denominada a constante de amortecimento por histerese. As equações (2.125) e (2.126) dão

$$\Delta W = \pi h X^2 \quad (2.127)$$

Rigidez complexa. Na Figura 2.35(a), a mola e o amortecedor estão ligados em paralelo e, para um movimento harmônico geral, $x = X e^{i\omega t}$, a força é dada por

$$F = kX e^{i\omega t} + c\omega iX e^{i\omega t} = (k + i\omega c)x \quad (2.128)$$

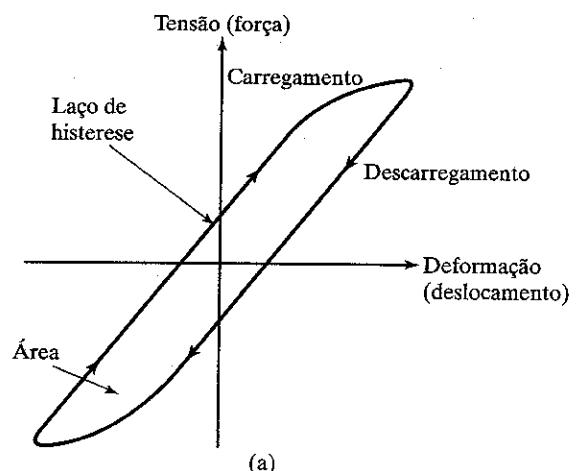


FIGURA 2.36 Laço de histerese.

De maneira semelhante, se uma mola e um amortecedor por histerese forem ligados em paralelo, como mostrado na Figura 2.36(b), a relação força-deslocamento pode ser expressa como

$$F = (k + ih)x \quad (2.129)$$

onde

$$k + ih = k \left(1 + i \frac{h}{k}\right) = k(1 + i\beta) \quad (2.130)$$

é denominada a rigidez complexa do sistema e $\beta = h/k$ é uma constante que indica uma medida adimensional de amortecimento.

Resposta do sistema. Em termos de β , a perda de energia por ciclo pode ser expressa como

$$\Delta W = \pi k \beta X^2 \quad (2.131)$$

Sob amortecimento por histerese, o movimento pode ser considerado como aproximadamente harmônico (visto que ΔW é pequeno), e a diminuição na amplitude por ciclo pode ser determinada usando equilíbrio de energia. Por exemplo, as energias nos pontos P e Q (separadas por metade de um ciclo) na Figura 2.37 estão relacionadas como

$$\frac{kX_j^2}{2} - \frac{\pi k \beta X_j^2}{4} - \frac{\pi k \beta X_{j+0.5}^2}{4} = \frac{kX_{j+0.5}^2}{2}$$

ou

$$\frac{X_j}{X_{j+0.5}} = \sqrt{\frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta}} \quad (2.132)$$

De maneira análoga, as energias nos pontos Q e R dão

$$\frac{X_{j+0.5}}{X_{j+1}} = \sqrt{\frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta}} \quad (2.133)$$

A multiplicação das equações (2.132) e (2.133) dá

$$\begin{aligned} \frac{X_j}{X_{j+1}} &= \frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta} = \frac{2 - \pi\beta + 2\pi\beta}{2 - \pi\beta} \approx 1 + \pi\beta \\ &= \text{constante} \end{aligned} \quad (2.134)$$

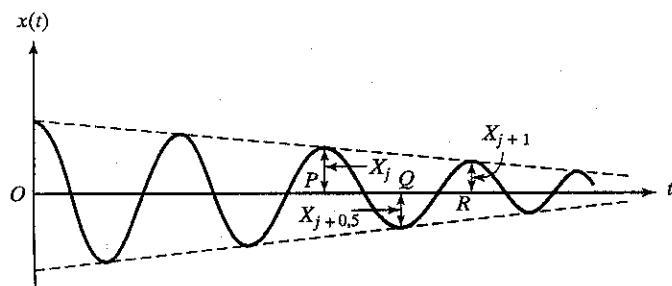


FIGURA 2.37 Resposta de um sistema amortecido por histerese.

O decremento logarítmico por histerese pode ser definido como

$$\delta = \ln \left(\frac{X_j}{X_{j+1}} \right) \approx \ln (1 + \pi\beta) \approx \pi\beta \quad (2.135)$$

Já que consideramos que o movimento seja aproximadamente harmônico, a freqüência correspondente é definida por [2.10]

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.136)$$

O fator de amortecimento viscoso equivalente ζ_{eq} pode ser determinado igualando-o à relação para o decremento logarítmico δ .

$$\delta \approx 2\pi\zeta_{eq} \approx \pi\beta = \frac{\pi h}{k}$$

$$\zeta_{eq} = \frac{\beta}{2} = \frac{h}{2k} \quad (2.137)$$

Assim, a constante de amortecimento equivalente c_{eq} é dada por

$$c_{eq} = c_c \cdot \zeta_{eq} = 2\sqrt{mk} \cdot \frac{\beta}{2} = \beta\sqrt{mk} = \frac{\beta k}{\omega} = \frac{h}{\omega} \quad (2.138)$$

Observe que o método para determinar um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente para um sistema estruturalmente amortecido só é válido para excitação harmônica. A análise que acabamos de fazer supõe que a resposta do sistema seja aproximadamente harmônica à freqüência ω .

EXEMPLO 2.15

Estimativa de constante de amortecimento por histerese

As medições experimentais realizadas em uma estrutura resultaram nos dados de força-deflexão mostrados na Figura 2.38. A partir desses dados, estime a constante de amortecimento por histerese β e o decremento logarítmico δ .

Solução:

Abordagem: Igualamos a energia dissipada em um ciclo (área envolvida pelo laço de histerese) a ΔW da Equação (2.127).

A energia dissipada em cada ciclo completo de carga é dada pela área envolvida pela curva de histerese. Cada quadrado da Figura 2.38 equivale a $100 \times 2 = 200$ N/mm. A área envolvida pelo laço pode ser determinada como área $ACB +$ área $ABDE +$ área $DFE = \frac{1}{2}(AB)(CG) + (AB)(AE) + \frac{1}{2}(DE)(FH) = \frac{1}{2}(1,25)(1,8) + (1,25)(8) + \frac{1}{2}(1,25)(1,8) = 12,25$ unidades quadradas. Essa área representa uma energia de $12,25 \times 200/1.000 = 2,5$ N/m. Pela Equação (2.127), temos

$$\Delta W = \pi h X^2 = 2,5 \text{ N.m} \quad (E.1)$$

Visto que a deflexão máxima X é 0,008 m e a inclinação da curva força-deflexão (dada, aproximadamente, pela inclinação da reta OF) é $k = 400/8 = 50$ N/mm = 50.000 N/m, a

constante de amortecimento por histerese h é dada por

$$h = \frac{\Delta W}{\pi X^2} = \frac{2,5}{\pi(0,008)^2} = 12.433,95 \quad (\text{E.2})$$

e, por consequência,

$$\beta = \frac{h}{k} = \frac{12.433,95}{50.000} = 0,248679$$

O decremento logarítmico pode ser determinado

$$\delta \approx \pi\beta = \pi(0,248679) = 0,78125 \quad (\text{E.3})$$

EXEMPLO 2.16

Resposta de uma estrutura de ponte com amortecimento por histerese

Uma estrutura de ponte é modelada como um sistema com um grau de liberdade com uma massa equivalente de $5 \times 10^5 \text{ kg}$ e uma rigidez equivalente de $25 \times 10^6 \text{ N/m}$.

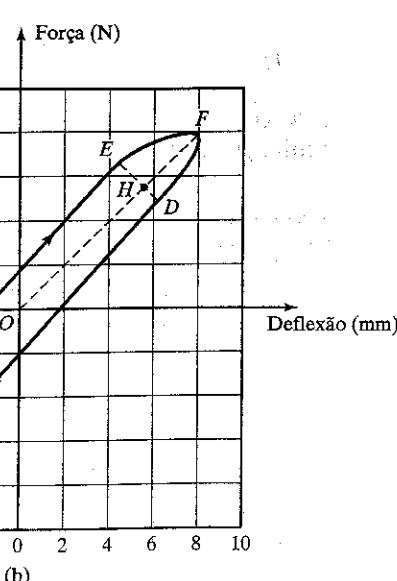
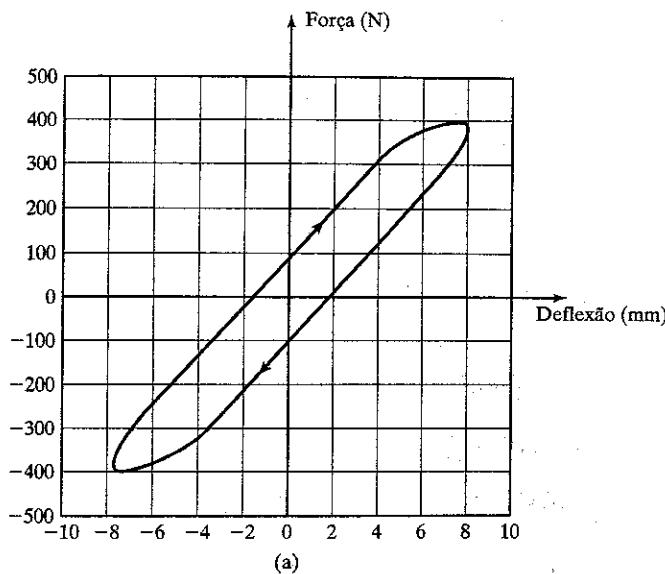


FIGURA 2.38 Curva carga-deflexão.

Durante um teste de vibração livre, constatou-se que a razão entre amplitudes sucessivas era 1,04. Estime a constante de amortecimento estrutural (β) e a resposta de vibração livre aproximada da ponte.

Solução: Usando a razão entre amplitudes sucessivas, a Equação (2.135) dá o decremento logarítmico por histerese (δ) como

$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) = \ln(1,04) = \ln(1 + \pi\beta)$$

ou

$$1 + \pi\beta = 1,04 \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{0,04}{\pi} = 0,0127$$

O coeficiente de amortecimento viscoso equivalente (c_{eq}) pode ser determinado pela Equação (2.138) como

$$c_{eq} = \frac{\beta k}{\omega} = \frac{\beta k}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \beta \sqrt{km} \quad (\text{E.1})$$

Usando os valores conhecidos da rigidez equivalente (k) e da massa equivalente (m) da ponte, a Equação (E.1) dá

$$\begin{aligned} c_{eq} &= (0,0127) \sqrt{(25 \times 10^6)(5 \times 10^5)} \\ &= 44,9013 \times 10^3 \text{ N.s/m} \end{aligned}$$

A constante de amortecimento crítico equivalente da ponte pode ser calculada pela Equação (2.65) como

$$\begin{aligned} c_c &= 2\sqrt{km} = 2\sqrt{(25 \times 10^6)(5 \times 10^5)} \\ &= 7.071,0678 \times 10^3 \text{ N.s/m} \end{aligned}$$

Uma vez que $c_{eq} < c_c$, a ponte é subamortecida, e, por consequência, sua resposta de vibração livre é dada pela Equação (2.72) como

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x_0 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\}$$

onde

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{44,9013 \times 10^3}{7.071,0678 \times 10^3} = 0,0063$$

e x_0 e \dot{x}_0 denotam o deslocamento inicial e a velocidade inicial dados à ponte no início da vibração livre.

2.9 Exemplos com a utilização do MATLAB

EXEMPLO 2.17

Variações da freqüência natural e período com deflexão estática

Desenhe um gráfico com as variações da freqüência natural e do período com deflexão estática para um sistema não amortecido com a utilização do MATLAB.

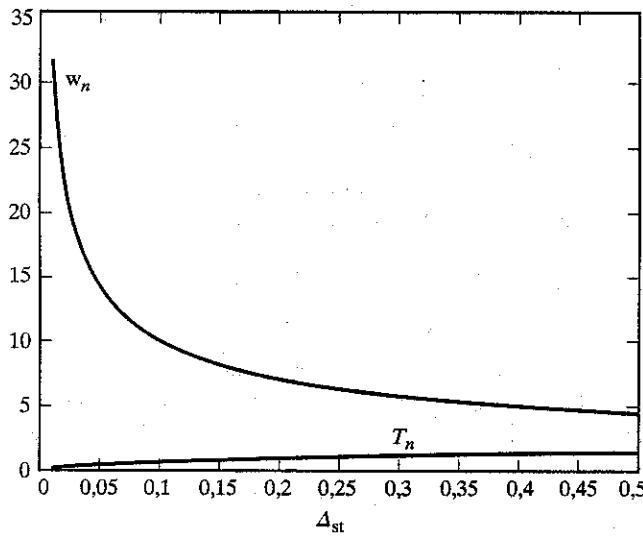
Solução: A freqüência natural (ω_n) e o período (T_n) são dados pelas equações (2.28) e (2.30):

$$\omega_n = \left(\frac{g}{\delta_{st}} \right)^{1/2}, \quad T_n = 2\pi \left(\frac{\delta_{st}}{g} \right)^{1/2}$$

Usando $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, ω_n e T_n são representados em gráfico na faixa de $\delta_{st} = 0$ a $0,5$ com a utilização do MATLAB.

```
% Ex2_17.m
g = 9.81;
for i = 1: 101
    t(i) = 0.01 + (0.5-0.01) * (i-1)/100;
    w(i) = (g/t(i))^0.5;
    tau(i) = 2 * pi * (t(i)/g)^0.5;
end
plot(t,w);
gtext('w_n');
hold on;
plot(t, tau);
gtext('T_n');
xlabel('Delta_s_t');
title('Example 2.17');
```

Exemplo 2.17



Variações de freqüência natural e período.

EXEMPLO 2.18

Resposta de vibração livre de um sistema massa-mola

Um sistema massa-mola com uma massa de $20 \text{ lb.s}^2/\text{in}$ e rigidez de 500 lb/in é sujeito a um deslocamento inicial de $x_0 = 3,0 \text{ in}$ e a uma velocidade inicial de $\dot{x}_0 = 4,0 \text{ in/s}$. Desenhe gráficos para as variações de tempo, deslocamento da massa, velocidade e aceleração com a utilização do MATLAB.

Solução: O deslocamento de um sistema não amortecido pode ser expresso como (ver Equação (2.23)):

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \phi_0) \quad (\text{E.1})$$

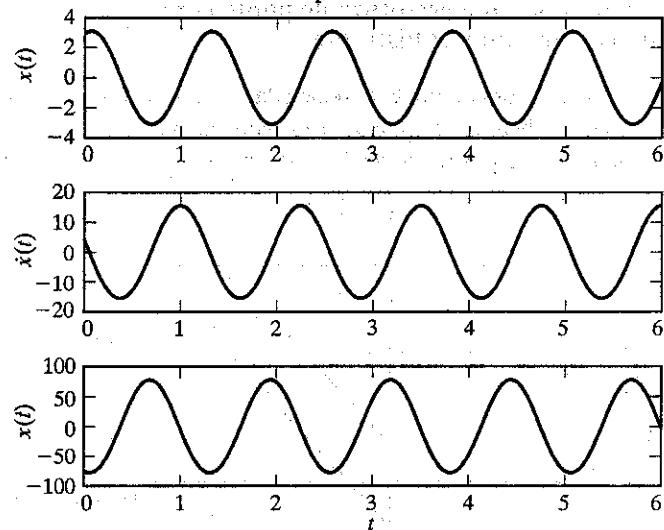
onde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500}{20}} = 5 \text{ rad/s}$$

$$A_0 = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[(3,0)^2 + \left(\frac{4,0}{5,0} \right)^2 \right]^{1/2} = 3,1048 \text{ in}$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{(3,0)(5,0)}{4,0} \right) = 75,0686^\circ = 1,3102 \text{ rad}$$

Exemplo 2.18



Resposta de um sistema não amortecido.

Assim, a Equação (E.1) dá

$$x(t) = 3,1048 \sin(5t + 1,3102) \text{ in} \quad (\text{E.2})$$

$$\dot{x}(t) = 15,524 \cos(5t + 1,3102) \text{ in/s} \quad (\text{E.3})$$

$$\ddot{x}(t) = -77,62 \sin(5t + 1,3102) \text{ in/s}^2 \quad (\text{E.4})$$

As equações (E.2) a (E.4) são representadas em gráfico com a utilização do MATLAB na faixa de $t = 0$ a 6 s .

```
% EX2_18.m
for i = 1: 101
    t(i) = 6 * (i-1)/100;
    x(i) = 3.1048 * sin(5 * t(i) + 1.3102);
    x1(i) = 15.524 * cos(5 * t(i) + 1.3102);
    x2(i) = -77.62 * sin(5 * t(i) + 1.3102);
end
subplot (311);
plot (t,x);
ylabel ('x(t)');
title ('Example 2.18');
subplot (312);
plot (t,x1);
ylabel ('x^(.t)');
subplot (313);
plot (t,x2);
ylabel ('x^(..t)');
```

EXEMPLO 2.19

Resposta de vibração livre de um sistema com amortecimento Coulomb

Determine a resposta de vibração livre de um sistema massa-mola sujeito a amortecimento Coulomb para as seguintes condições iniciais: $x(0) = 0,5 \text{ m}$, $\dot{x}(0) = 0$

Dados: $m = 10 \text{ kg}$, $k = 200 \text{ N/m}$, $\mu = 0,5$

Solução: A equação do movimento pode ser expressa como

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = 0 \quad (\text{E.1})$$

Para resolver a equação diferencial de segunda ordem, Equação (E.1), com a utilização do método de Runge-Kutta (ver Apêndice F), reescrevemos a Equação (E.1) como um conjunto de duas equações diferenciais de primeira ordem como segue:

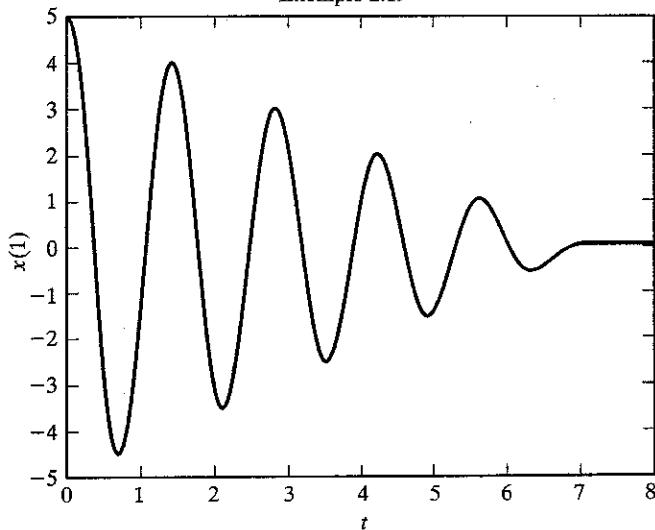
$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{x}_1 &= x_2 \equiv f_1(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

$$\dot{x}_2 = -\mu g \operatorname{sgn}(x_2) - \frac{k}{m} x_1 \equiv f_2(x_1, x_2) \quad (\text{E.3})$$

As equações (E.2) e (E.3) podem ser expressas em notação matricial como

$$\vec{\dot{X}} = \vec{f}(\vec{X}) \quad (\text{E.4})$$

Exemplo 2.19



Solução da Equação (E.4).

onde

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}, \quad \vec{X}(t=0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix}$$

O programa MATLAB `ode23` é usado para determinar a solução da Equação (E.4) como mostrado a seguir:

```
% Ex2_19.m
% This program will use dfuncl.m
tspan = [0: 0.05: 8];
x0 = [5.0; 0.0];
[t, x] = ode23 ('dfuncl', tspan, x0);
plot (t, x(:, 1));
xlabel ('t');
ylabel ('x(1)');
title ('Exemplo 2.19');

% dfuncl.m
function f = dfuncl (t, x)
f = zeros (2, 1);
f(1) = x(2);
f(2) = -0.5 * 9.81 * sign(x(2)) - 200 * x(1) / 10;
```

EXEMPLO 2.20

Resposta de vibração livre de um sistema com amortecimento viscoso com a utilização do MATLAB

Desenvolva um programa MATLAB de finalidade geral, denominado **Program2.m**, para determinar a resposta de vibração livre de um sistema com amortecimento viscoso. Use o programa para determinar a resposta de um sistema com os seguintes dados:

$m = 450,0$, $k = 26.519,2$, $c = 1.000,0$, $x_0 = 0,539657$, $\dot{x}_0 = 1,0$

Solução: **Program2.m** é desenvolvido para aceitar os seguintes dados de entrada:

m = massa

k = rigidez da mola

c = constante de amortecimento

x_0 = deslocamento inicial

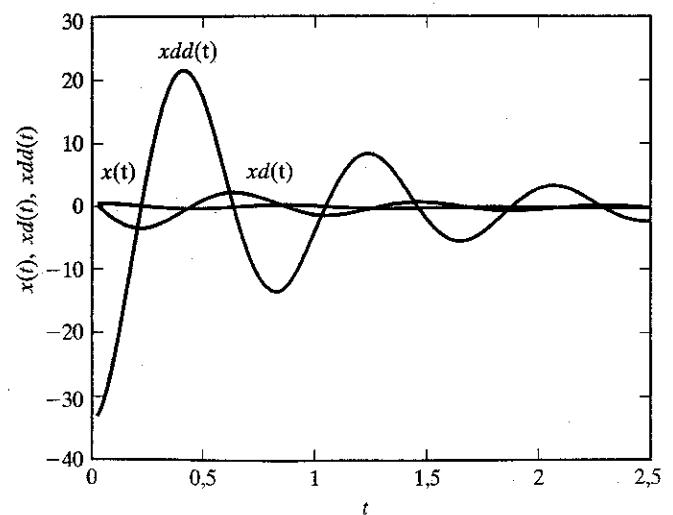
\dot{x}_0 = velocidade inicial

n = número de etapas de tempo nos quais os valores de $x(t)$ devem ser determinados

Δ = intervalo de tempo entre etapas de tempo consecutivas (Δt)

O programa dá a seguinte resposta:

etapa número i , tempo (i), $x(i)$, $\dot{x}(i)$, $\ddot{x}(i)$



Variações de x , \dot{x} e \ddot{x} .

O programa também desenha gráficos para as variações de x , \dot{x} e \ddot{x} em relação ao tempo.

```
>> program2
Free vibration analysis of a single degree of freedom analysis
```

Data:

```
m= 4.5000000e+002
k= 2.65192000e+004
c= 1.0000000e+003
x0= 5.39657000e-001
xdo= 1.0000000e+000
n= 100
delt= 2.5000000e-002
```

System is under damped

Results:

i	time(i)	x(i)	xd(i)	xdd(i)
1	2.500000e-002	5.540992e-001	1.596159e-001	-3.300863e+001
2	5.000000e-002	5.479696e-001	-6.410545e-001	-3.086813e+001
3	7.500000e-002	5.225989e-001	-1.375559e+000	-2.774077e+001
4	1.000000e-001	4.799331e-001	-2.021239e+000	-2.379156e+001
5	1.250000e-001	4.224307e-001	-2.559831e+000	-1.920599e+001
6	1.500000e-001	3.529474e-001	-2.977885e+000	-1.418222e+001
.
96	2.400000e+000	2.203271e-002	2.313895e-001	-1.812621e+000
97	2.425000e+000	2.722809e-002	1.834092e-001	-2.012170e+000
98	2.450000e+000	3.117018e-002	1.314707e-001	-2.129064e+000
99	2.475000e+000	3.378590e-002	7.764312e-002	-2.163596e+000
100	2.500000e+000	3.505350e-002	2.395118e-002	-2.118982e+000

2.10 Programa em C++

Um programa interativo em C++, denominado **Program2.cpp**, é dado para determinar a análise de vibração livre de um sistema com amortecimento viscoso e um grau de liberdade. Os parâmetros de entrada e de saída do programa são semelhantes aos do programa MATLAB dados no Exemplo 2.20.

EXEMPLO 2.21

Resposta de vibração livre de um sistema com amortecimento viscoso com a utilização de C++

Determine a resposta de vibração livre de um sistema com amortecimento viscoso com os parâmetros indicados no Exemplo 2.20.

Solução: Os dados de entrada são digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são dadas a seguir.

```
Please input M, K, C, X0, XDO, DELT:
450. 26519.2 1000. 0.539567 1.0 0.25
```

```
Please input n:
10
```

```
FREE VIBRATION ANALYSIS OF A SINGLE DEGREE OF FREEDOM SYSTEM
```

DATA

```
M = 450
K = 26519.2
C = 1000
X0 = 0.539567
XDO = 1
N = 10
DELT = 0.25
```

SYSTEM IS UNDER DAMPED

RESULTS:

I	TIME(I)	X(I)	XD(I)	XDD(I)
0	0.250000	0.019265	-3.350687	6.310661
1	0.500000	-0.318985	1.062303	16.437608
2	0.750000	0.144699	1.403773	-11.646832

3	1.000000	0.112366	-1.294927	-3.744280
4	1.250000	-0.137887	-0.173140	8.510647
5	1.500000	0.002856	0.827508	-2.007241
6	1.750000	0.077718	-0.304712	-3.902928
7	2.000000	-0.039587	-0.326003	3.057362
8	2.250000	-0.025262	0.334008	0.746486
9	2.500000	0.035048	0.023957	-2.118662

2.11 Programa em FORTRAN

Um programa em FORTRAN, na forma de sub-rotina **FREVIB.F**, é dado para a análise de vibração livre de um sistema com amortecimento viscoso e um grau de liberdade. O sistema pode ser subamortecido, criticamente amortecido, ou superamortecido. Os argumentos da sub-rotina são semelhantes aos descritos para o programa MATLAB dado no Exemplo 2.20.

EXEMPLO 2.22

Vibração livre de um sistema com amortecimento viscoso com a utilização de FORTRAN

Resolva o Exemplo 2.20 com a utilização da sub-rotina **FREVIB.F**.

Solução: O programa principal que chama a sub-rotina **FREVIB.F** e a sub-rotina **FREVIB.F** é dado como **PROGRAM2.F**. A saída do programa é dada a seguir:

```
FREE VIBRATION ANALYSIS OF A SINGLE DEGREE OF FREEDOM SYSTEM
```

DATA

```
M = 0.4500000E+03
K = 0.26519199E+05
C = 0.1000000E+04
X0 = 0.53956699E+00
XDO = 0.1000000E+01
N = 10
DELT = 0.2500000E+00
```

SYSTEM IS UNDER DAMPED

RESULTS:

I	TIME(I)	X(I)	XD(I)	XDD(I)
1	0.250000E+00	0.192649E-01	-0.335069E+01	0.631066E+01
2	0.500000E+00	-0.318985E+00	0.106230E+01	0.164376E+02
3	0.750000E+00	0.144699E+00	0.140377E+01	-0.116468E+02
4	1.000000E+01	0.112366E+00	-0.129493E+01	-0.374428E+01
5	0.125000E+01	-0.137887E+00	-0.173140E+00	0.851066E+01
6	0.150000E+01	0.285635E-02	0.827508E+00	-0.200724E+01
7	0.175000E+01	0.777184E-01	-0.304712E+00	-0.390293E+01
8	0.200000E+01	-0.395868E-01	-0.326002E+00	0.305736E+01
9	0.225000E+01	-0.252620E-01	0.334008E+00	0.746487E+00
10	0.250000E+01	0.350478E-01	0.239573E-01	-0.211866E+01

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- R. W. Fitzgerald, *Mechanics of materials*, 2. ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1982.
- R. F. Steidel, Jr., *An introduction to mechanical vibrations*, 4. ed. Nova York: Wiley, 1989.
- W. Zambrano, "A brief note on the determination of the natural frequencies of a spring-mass system", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, v. 9 out. 1981, p. 331-334; v. 10 jul. 1982, p. 216.
- R. D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode Shape*, Nova York: Van Nostrand Reinhold, 1979.

- 2.5 A. D. Dimarogonas, *Vibration engineering*. Saint Paul: West Publishing, 1976.
- 2.6 E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, 7. ed. Nova York: Wiley, 1993.
- 2.7 S. H. Crandall, “The role of damping in vibration theory”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 11, 1970, p. 3–18.
- 2.8 I. Cochin, *Analysis and design of dynamic systems*, Nova York: Harper & Row, 1980.
- 2.9 D. Sinclair, “Frictional vibrations”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 22, 1955, p. 207–214.
- 2.10 T. K. Caughey e M. E. J. O’Kelly, “Effect of damping on the natural frequencies of linear dynamic systems”, *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 33, 1961, p. 1458–1461.
- 2.11 E. E. Ungar, “The status of engineering knowledge concerning the damping of built-up structures”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 26, 1973, p. 141–154.
- 2.12 W. Pinsker, “Structural damping”, *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 16, 1949, p. 699.
- 2.13 R. H. Scanlan e A. Mendelson, “Structural damping”, *AIAA Journal*, v. 1, 1963, p. 938–939.

PERGUNTAS DE REVISÃO

2.1 Dê respostas curtas ao seguinte:

1. Sugira um método para determinar a constante de amortecimento de um sistema vibratório altamente amortecido que usa amortecimento viscoso.
 2. Você pode aplicar os resultados da Seção 2.2 a sistemas nos quais a força restauradora não é proporcional ao deslocamento, isto é, onde k não é uma constante?
 3. Quais são os parâmetros correspondentes a m , c , k e x para um sistema torcional?
 4. Qual é o efeito de uma redução na massa sobre a freqüência de um sistema?
 5. Qual é o efeito de uma redução na rigidez do sistema sobre o período natural?
 6. Por que a amplitude de vibração livre diminui gradativamente em sistemas práticos?
 7. Por que é importante determinar a freqüência natural de um sistema vibratório?
 8. Quantas constantes arbitrárias deve ter uma solução geral para um equação diferencial de segunda ordem? Como essas constantes são determinadas?
 9. O método da energia pode ser usado para determinar a equação diferencial de movimento de todos os sistemas com um grau de liberdade?
 10. Quais são as premissas adotadas para determinar a freqüência natural de um sistema com um grau de liberdade pelo método da energia?
 11. A freqüência de uma vibração livre amortecida é menor ou maior que a freqüência natural do sistema?
 12. Qual é a utilização do decremento logarítmico?
 13. O amortecimento por histerese é função da tensão máxima?
 14. O que é amortecimento crítico e qual é sua importância?
 15. O que acontece com a energia dissipada por amortecimento?
 16. O que é amortecimento viscoso equivalente? O fator de amortecimento viscoso equivalente é uma constante?
 17. Qual é a razão para estudar a vibração de um sistema com um grau de liberdade?
 18. Como você pode determinar a freqüência natural de um sistema pela medição de sua deflexão estática?
 19. Cite duas aplicações práticas de um pêndulo torcional.
 20. Defina os termos: fator de amortecimento, decremento logarítmico, coeficiente de perda e capacidade de amortecimento específico.
 21. Qual é a diferença entre a resposta de um sistema com amortecimento Coulomb e a de sistemas com outros tipos de amortecimento?
 22. O que é rigidez complexa?
 23. Defina a constante de amortecimento por histerese.
 24. Cite três aplicações práticas do conceito de centro de percussão.
- Indique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:
1. A amplitude de um sistema não amortecido não mudará ao longo do tempo.
 2. Um sistema que vibra no ar pode ser considerado um sistema amortecido.
 3. A equação de movimento de um sistema com um grau de liberdade será a mesma quer a massa movimente-se em um plano horizontal ou em um plano inclinado.
 4. Quando a massa vibra em sentido vertical, seu peso sempre pode ser ignorado na derivação da equação de movimento.
 5. O princípio de conservação de energia pode ser usado para derivar a equação de movimento de sistemas amortecidos e sistemas não amortecidos.
 6. Em alguns casos, a freqüência amortecida de um sistema pode ser maior que a freqüência natural não amortecida.
 7. Em alguns casos, a freqüência amortecida pode ser zero.
 8. A freqüência natural de vibração de um sistema torcional é dada por $\sqrt{\frac{k}{m}}$, onde k e m denotam a constante elástica torcional e o momento polar de inércia de massa, respectivamente.
 9. O método de Rayleigh é baseado no princípio de conservação de energia.
 10. A posição final da massa é sempre a posição de equilíbrio no caso do amortecimento Coulomb.
 11. A freqüência natural não amortecida de um sistema é dada por $\sqrt{g/\delta_{st}}$ onde δ_{st} é a deflexão estática da massa.
 12. Para um sistema não amortecido, a velocidade está à frente do deslocamento por $\pi/2$.
 13. Para um sistema não amortecido, a velocidade está à frente da aceleração por $\pi/2$.
 14. Amortecimento Coulomb pode ser chamado amortecimento constante.
 15. O coeficiente de perda denota a energia dissipada por radiano por unidade de energia de deformação.
 16. O movimento diminui até zero nos casos subamortecido e superamortecido.
 17. O decremento logarítmico pode ser usado para determinar o fator de amortecimento.

18. O laço de histerese da curva tensão-deformação de um material causa amortecimento.
19. A rigidez complexa pode ser usada para determinar a força de amortecimento em um sistema com amortecimento por histerese.
20. No caso de amortecimento por histerese, o movimento pode ser considerado harmônico.

2.3

Preencha os espaços em branco com a palavra adequada:

- A vibração livre de um sistema não amortecido representa permuta entre energias ____ e ____.
- Um sistema que está em movimento harmônico simples é denominado um oscilador ____.
- O relógio mecânico representa um pêndulo ____.
- O centro de ____ pode ser usado com vantagem em um taco de beisebol.
- Com amortecimento viscoso e por histerese, teoricamente, o movimento ____ para sempre.
- A força de amortecimento em amortecimento Coulomb é dada por ____.
- O fator ____ pode ser usado para comparar a capacidade de amortecimento de diferentes materiais de engenharia.
- A vibração por torção ocorre quando um corpo ____ oscila ao redor de um eixo.
- A propriedade de amortecimento ____ é usada em muitas aplicações práticas, como armas de fogo de grande porte.
- O decremento logarítmico denota a taxa à qual a ____ de uma vibração livre amortecida diminui.
- O método de Rayleigh pode ser usado para determinar a freqüência ____ de um sistema diretamente.
- Quaisquer dois deslocamentos sucessivos do sistema separados por um ciclo podem ser usados para determinar o decremento ____.
- A freqüência natural amortecida (ω_d) pode ser expressa em termos da freqüência natural não amortecida (ω_n) como ____.

2.4

Selecione a resposta mais adequada entre as várias opções dadas:

- A freqüência natural de um sistema com massa m e rigidez k é dada por:

(a) $\frac{k}{m}$ (b) $\sqrt{\frac{k}{m}}$ (c) $\sqrt{\frac{m}{k}}$
- Em amortecimento Coulomb, a amplitude do movimento é reduzida em cada ciclo por:

(a) $\frac{\mu N}{k}$ (b) $\frac{2\mu N}{k}$ (c) $\frac{4\mu N}{k}$
- A amplitude de um sistema não amortecido sujeito a um deslocamento inicial 0 e velocidade inicial \dot{x}_0 é dada por:

(a) \dot{x}_0 (b) $\dot{x}_0 \omega_n$ (c) $\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$
- O efeito da massa da mola pode ser considerado adicionando-se a seguinte fração de sua massa à massa vibratória:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$

- Para um amortecedor viscoso com constante de amortecimento c , a força de amortecimento é:

(a) $c\dot{x}$ (b) $c x$ (c) $c\ddot{x}$

- O deslizamento relativo de componentes em um sistema mecânico causa:

- (a) amortecimento por atrito seco;
 (b) amortecimento viscoso;
 (c) amortecimento por histerese.

- Em vibração por torção, o deslocamento é medido em termos de uma:

- (a) coordenada linear;
 (b) coordenada angular;
 (c) coordenada de força.

- O fator de amortecimento, em termos da constante c e da constante de amortecimento crítico (c_c), é dado por

(a) $\frac{c_c}{c}$ (b) $\frac{c}{c_c}$ (c) $\sqrt{\frac{c}{c_c}}$

- A amplitude de um sistema subamortecido sujeito a um deslocamento inicial x_0 e velocidade inicial 0 é dada por:

(a) x_0 (b) $2x_0$ (c) $x_0 \omega_n$

- O ângulo de fase de um sistema não amortecido sujeito a um deslocamento inicial x_0 e velocidade inicial 0 é dado por:

(a) x_0 (b) $2x_0$ (c) 0

- A energia dissipada em razão de amortecimento viscoso é proporcional à seguinte potência da amplitude de movimento:

(a) 1 (b) 2 (c) 3

- Para um sistema criticamente amortecido, o movimento será:

(a) periódico. (b) aperiódico. (c) harmônico.

- A energia dissipada por ciclo em amortecimento viscoso com constante de amortecimento c durante o movimento harmônico simples $x(t) = X \sin \omega_d t$, é dada por:

(a) $\pi c \omega_d X^2$ (b) $\pi \omega_d X^2$ (c) $\pi c \omega_d X$

- Para um sistema vibratório com uma energia total W e uma energia dissipada por ciclo ΔW , a capacidade de amortecimento específico é dada por:

(a) $\frac{W}{\Delta W}$ (b) $\frac{\Delta W}{W}$ (c) ΔW

- Ligue as seguintes afirmativas para um sistema com um grau de liberdade com $m = 1$, $k = 2$ e $c = 0,5$:

- | | |
|---|------------|
| (1) Freqüência natural, ω_n | (a) 1,3919 |
| (2) Freqüência linear, f_n | (b) 2,8284 |
| (3) Período natural, τ_n | (c) 2,2571 |
| (4) Freqüência amortecida, ω_d | (d) 0,2251 |
| (5) Constante de amortecimento crítico, c_c | (e) 0,1768 |
| (6) Fator de amortecimento, ζ | (f) 4,4429 |
| (7) Decremento logarítmico, δ | (g) 1,4142 |

- 2.6** Ligue as afirmativas seguintes para uma massa $m = 5 \text{ kg}$ que se movimenta com velocidade $v = 10 \text{ m/s}$:

Força de amortecimento	Tipo de amortecedor
(1) 20 N	(a) Amortecimento Coulomb com um coeficiente de atrito de 0,3.
(2) 1,5 N	(b) Amortecimento viscoso com um coeficiente de amortecimento de 1 N.s/m.
(3) 30 N	(c) Amortecimento viscoso com um coeficiente de amortecimento de 2 N.s/m.
(4) 25 N	(d) Amortecimento por histerese com um fator de amortecimento por histerese de 12 N/m a uma freqüência de 4 rad/s.
(5) 10 N	(e) Amortecimento quadrático ($\text{força} = av^2$) com constante de amortecimento $a = 0,25 \text{ N.s}^2/\text{m}^2$.

- 2.3** Um sistema massa-mola tem uma freqüência natural de 10 Hz. Quando a constante elástica é reduzida de 800 N/m, a freqüência é alterada em 45 por cento. Determine a massa e a constante elástica do sistema original.

- 2.4** Uma mola helicoidal, quando fixada em uma extremidade e carregada na outra, requer uma força de 100 N para produzir uma elongação de 10 mm. Agora, as extremidades da mola são fixadas rigidamente, uma extremidade acima da outra no sentido vertical, e uma massa de 10 kg é ligada ao ponto médio de seu comprimento. Determine o tempo que transcorre para completar um ciclo de vibração quando a massa é posta para vibrar no sentido vertical.

- 2.5** Uma unidade de resfriamento de ar com peso de 2.000 lb deve ser apoiada por quatro molas de ar (Figura 2.39). Calcule as molas de ar de modo que a freqüência natural de vibração da unidade fique entre 5 rad/s e 10 rad/s.

- 2.6** A velocidade máxima obtida pela massa de um oscilador harmônico simples é 10 cm/s, e o período de oscilação é 2 s. Se a massa for solta com um deslocamento inicial de 2 cm, determine:

- (a) a amplitude;
- (b) a velocidade inicial;
- (c) a aceleração máxima;
- (d) o ângulo de fase.

- 2.7** Três molas e uma massa estão ligadas a uma barra rígida sem peso PQ , como mostra a Figura 2.40. Determine a freqüência natural de vibração do sistema.

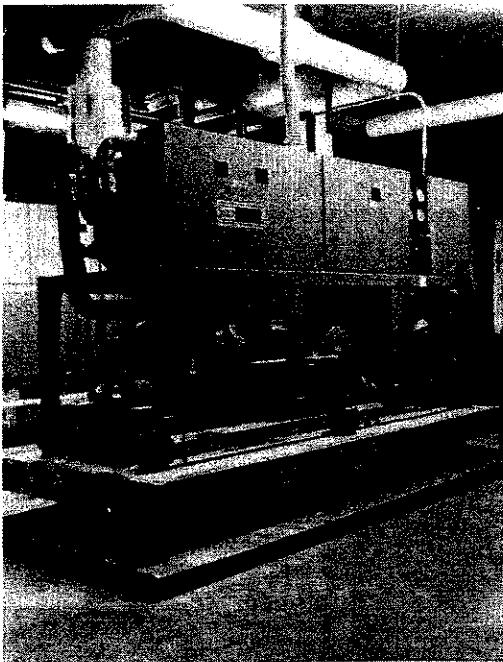


FIGURA 2.39 (Cortesia de Sound and Vibration.)

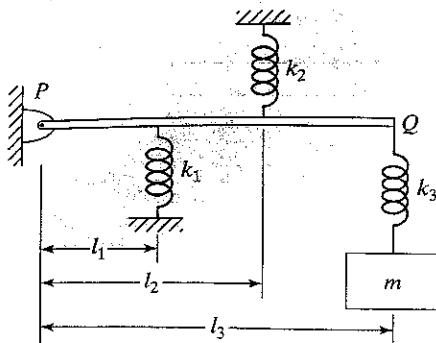


FIGURA 2.40

- 2.1** Uma prensa industrial está montada sobre um coxim de borracha que a isola de sua base. Se o coxim de borracha for comprimido 5 mm pelo peso próprio da prensa, determine a freqüência natural do sistema.

- 2.2** Um sistema massa-mola tem um período natural de 0,21 s. Qual será o novo período se a constante elástica for:

- (a) aumentada em 50 por cento.
- (b) reduzida em 50 por cento?

- 2.8** As molas de suspensão de um automóvel cuja massa é 2.000 kg sofrem uma deflexão de 0,02 m sob condições estáticas. Determine a freqüência natural do automóvel no sentido vertical, considerando o amortecimento desprezível.
- 2.9** Determine a freqüência natural de vibração de um sistema massa-mola colocado sobre um plano inclinado, como mostra a Figura 2.41.
- 2.10** Um vagonete de mina carregado com peso de 5.000 lb está sendo içado por uma polia sem atrito e um cabo de aço, como mostrado na Figura 2.42. Determine a freqüência natural de vibração do vagonete na posição dada.
- 2.11** O sistema de isolamento de um chassis eletrônico que pesa 500 N é formado por quatro molas helicoidais, como mostrado na Figura 2.43. Calcule as molas de modo que a unidade possa ser usada em um ambiente no qual a faixa de freqüência vibratória é 0 a 5 Hz.

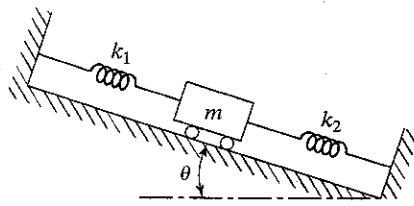


FIGURA 2.41

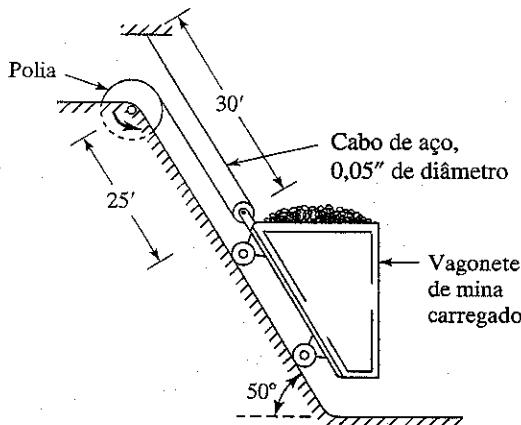


FIGURA 2.42



FIGURA 2.43 Um chassis eletrônico montado sobre isoladores de vibração. (Cortesia de Titan Sesco.)

- 2.12** Determine a freqüência natural do sistema mostrado na Figura 2.44 com e sem as molas k_1 e k_2 no ponto médio da viga elástica.
- 2.13** Determine a freqüência natural do sistema de polias mostrado na Figura 2.45 desprezando o atrito e as massas das polias.
- 2.14** Um peso W é suportado por três polias sem atrito e sem massa e uma mola de rigidez k , como mostrado na Figura 2.46. Determine a freqüência natural de vibração do peso W para pequenas oscilações.

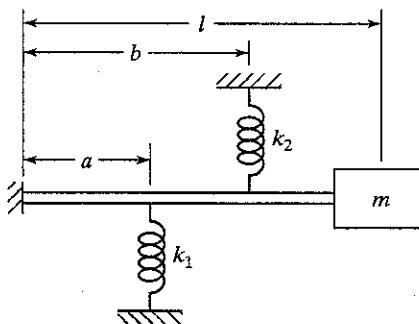


FIGURA 2.44

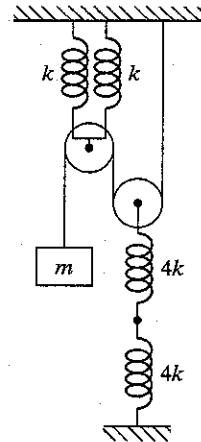


FIGURA 2.45

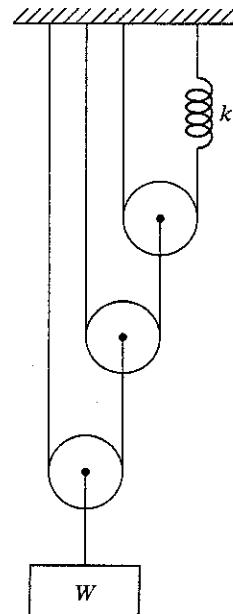


FIGURA 2.46

- 2.15** Um bloco rígido de massa M está montado sobre quatro suportes elásticos, como mostra a Figura 2.47. Uma massa m cai de uma altura l e adere ao bloco rígido sem ricochetear. Se a constante elástica de cada suporte elástico for k , determine a freqüência natural de vibração do sistema:

- (a) sem a massa m ;
 (b) com a massa m .

Determine também o movimento resultante do sistema no caso (b).

- 2.16** Um martelo de forjar atinge uma bigorna com uma velocidade de 50 ft/s (Figura 2.48). O martelo e a bigorna pesam 12 lb e 100 lb, respectivamente. A bigorna é apoiada sobre quatro molas, cada uma com rigidez $k = 100$ lb/in. Determine o movimento resultante da bigorna:

- (a) se o martelo permanecer em contato com a bigorna;
 (b) se o martelo não permanecer em contato com a bigorna após o impacto inicial.

- 2.17** Derive a expressão para a freqüência natural do sistema mostrado na Figura 2.49. Observe que a carga W é aplicada na extremidade da viga 1 e no ponto médio da viga 2.

- 2.18** Uma máquina pesada que pesa 9.810 N está sendo baixada no sentido vertical por um guincho com uma velocidade uniforme de 2 m/s. O cabo de aço que suporta a máquina tem um diâmetro de 0,01 m. O guincho pára repentinamente quando o comprimento do cabo de aço é de 20 m. Determine o período e a amplitude da vibração gerada na máquina.

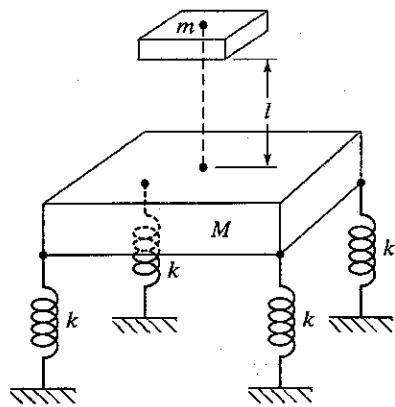


FIGURA 2.47

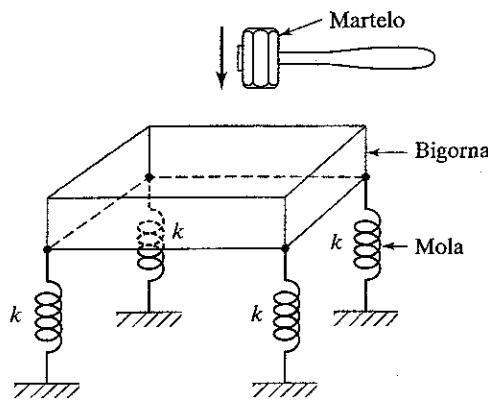


FIGURA 2.48

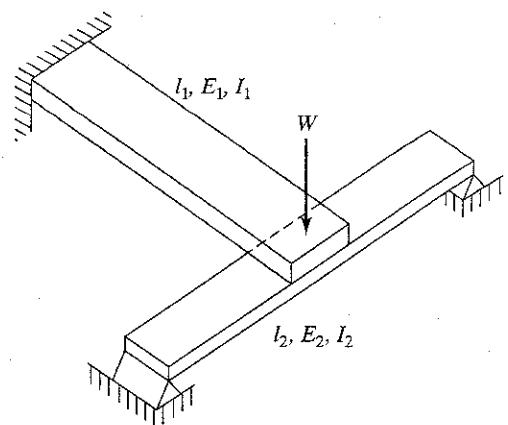


FIGURA 2.49

- 2.19** Constatou-se que a freqüência natural de um sistema massa-mola é 2 Hz. Quando uma massa adicional de 1 kg é acrescentada à massa original m , a freqüência natural é reduzida para 1 Hz. Determine a constante elástica k e a massa m .

- 2.20** Uma chave de comando elétrica é suportada por um guindaste por meio de um cabo de aço de 4 m de comprimento e 0,01 m de diâmetro (Figura 2.50). Se o período natural de vibração axial da chave for 0,1 s, determine a massa da chave.

- 2.21** Um conjunto de quatro hastas rígidas sem peso e uma mola é organizado de dois modos diferentes para suportar um peso W , como mostrado na Figura 2.51. Determine as freqüências naturais de vibração dos dois esquemas.

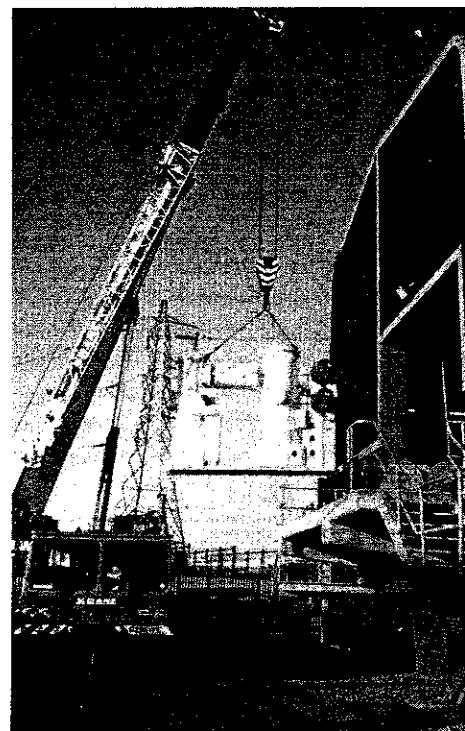


FIGURA 2.50 (Fotografia por cortesia da Institution of Electrical Engineers.)

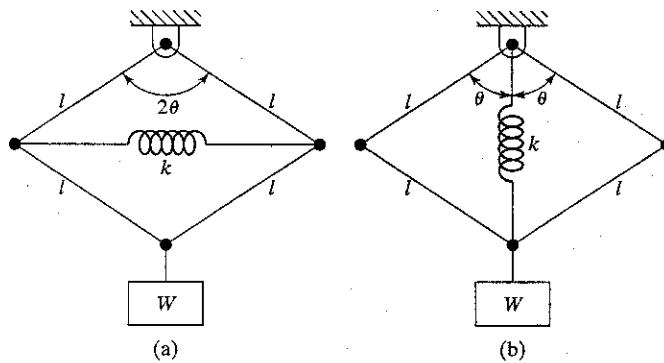


FIGURA 2.51

- 2.22** Um macaco é usado para levantar uma carga W . As hastes do macaco são rígidas, e os collars deslizam livremente no eixo contra as molas de rigidez k_1 e k_2 (Figura 2.52). Determine a freqüência natural de vibração do peso no sentido vertical.

- 2.23** Um peso é suspenso por meio de seis hastes rígidas e duas molas de dois modos diferentes, como mostrado na Figura 2.53. Determine as freqüências naturais de vibração dos dois esquemas.

- 2.24** A Figura 2.54 mostra uma pequena massa m restringida por quatro molas linearmente elásticas, cada uma com um comprimento distendido l e um ângulo de orientação de 45° em relação ao eixo x . Determine a equação do movimento para pequenos deslocamentos da massa na direção x .

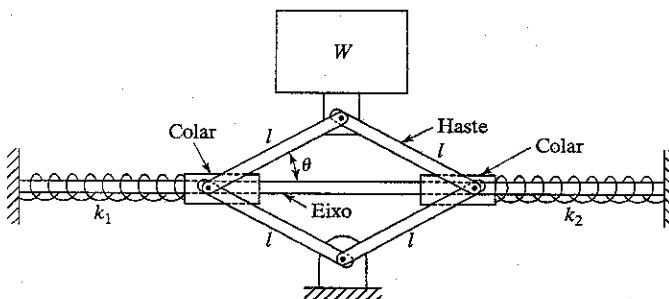


FIGURA 2.52

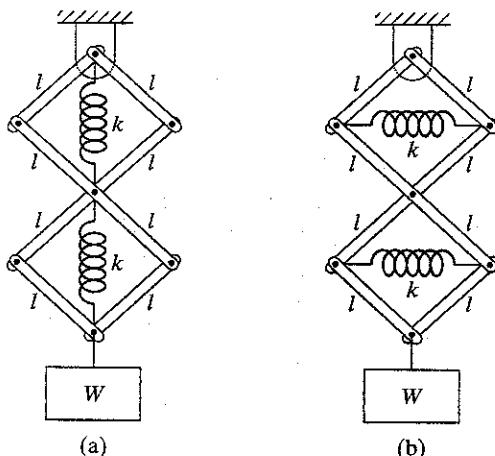


FIGURA 2.53

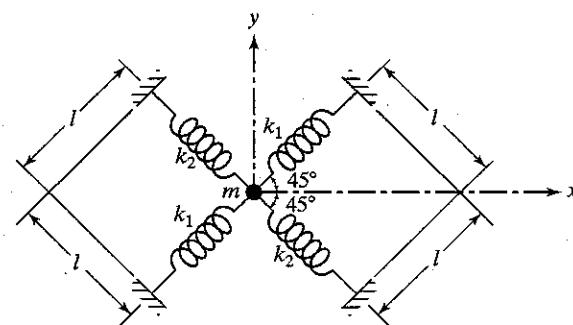


FIGURA 2.54

- 2.25** A massa m é suportada por dois conjuntos de molas orientadas a 30° e 120° em relação ao eixo X , como mostra a Figura 2.55. Deve-se elaborar o projeto de um terceiro par de molas, cada uma com rigidez k_3 , de modo que o sistema tenha uma freqüência natural constante ao vibrar em qualquer direção x . Determine a rigidez necessária da mola k_3 e a orientação das molas em relação ao eixo X .

- 2.26** A massa m está ligada a uma corda que está sob uma tensão T , como mostra a Figura 2.56. Supondo que T permaneça inalterada quando a massa for deslocada na direção normal à corda:

- (a) escreva a equação diferencial de movimento para pequenas vibrações transversais;
 (b) determine a freqüência natural de vibração.

- 2.27** Um praticante de *bungee jumping* que pesa 160 lb amarra uma extremidade de uma corda elástica de comprimento 200 ft e rigidez 10 lb/in a uma ponte e a outra extremidade a si mesmo e pula da ponte (Figura 2.57). Admitindo que a ponte seja rígida, determine o movimento vibratório do rapaz em relação à sua posição de equilíbrio estático.

- 2.28** Um acrobata que pesa 120 lb anda em uma corda esticada, como mostra a Figura 2.58. Se a freqüência natural de vibração na posição dada, no sentido vertical, for 10 rad/s, determine a tensão da corda.

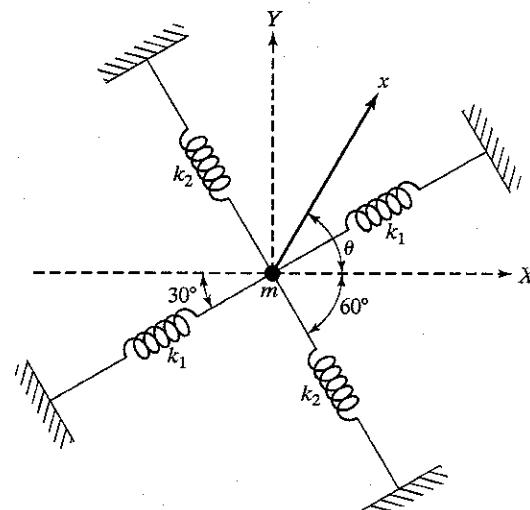


FIGURA 2.55

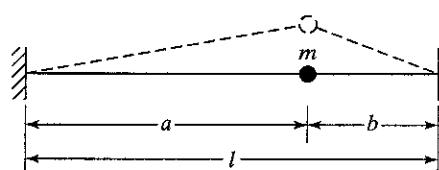


FIGURA 2.56

- 2.29** O diagrama esquemático de um regulador centrífugo é mostrado na Figura 2.59. O comprimento de cada haste é l , a massa de cada esfera é m , e o comprimento livre da mola é h . Se a velocidade do eixo for ω , determine a posição de equilíbrio e a freqüência para pequenas oscilações em relação a essa posição.

- 2.30** No regulador Hartnell mostrado na Figura 2.60, a rigidez da mola é 10^4 N/m , e o peso de cada esfera é 25 N. O comprimento do braço da esfera é 20 cm, e o da manga do braço é 12 cm. A distância entre o eixo de rotação e o ponto de articulação da alavanca angular é 16 cm. A mola é comprimida 1 cm quando o braço da esfera está na vertical. Determine:
 (a) a velocidade do regulador na qual o braço da esfera permanece na posição vertical;
 (b) a freqüência natural de vibração para pequenos deslocamentos em relação à posição vertical dos braços das esferas.

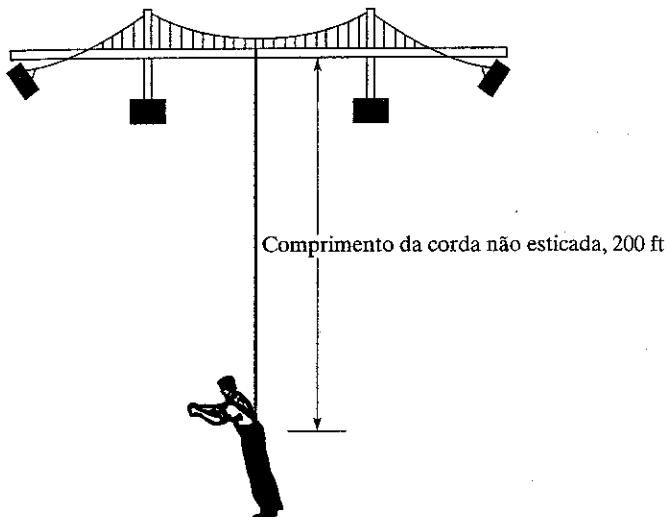


FIGURA 2.57

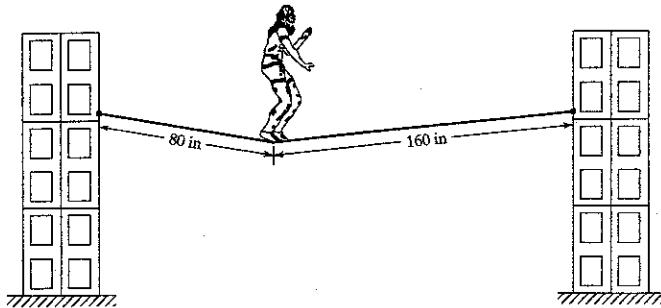


FIGURA 2.58

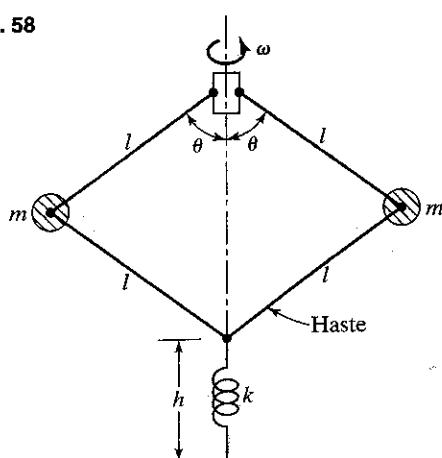


FIGURA 2.59

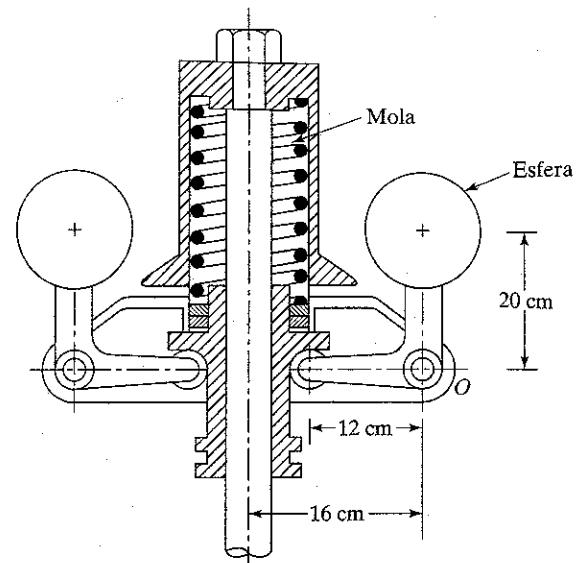


FIGURA 2.60 Regulador Hartnell.

- 2.31** Uma plataforma quadrada $PQRS$ e o carro que ela está suportando têm uma massa combinada M . A plataforma é suspensa por quatro cabos elásticos de um ponto fixo O , como indicado na Figura 2.61. A distância vertical entre o ponto de suspensão O e a posição horizontal de equilíbrio da plataforma é h . Se o lado da plataforma for a e a rigidez de cada cabo for k , determine o período de vibração vertical da plataforma.
- 2.32** O manômetro inclinado mostrado na Figura 2.62 é usado para medir pressão. Se o comprimento total de mercúrio no tubo for L , determine uma expressão para a freqüência natural de oscilação do mercúrio.

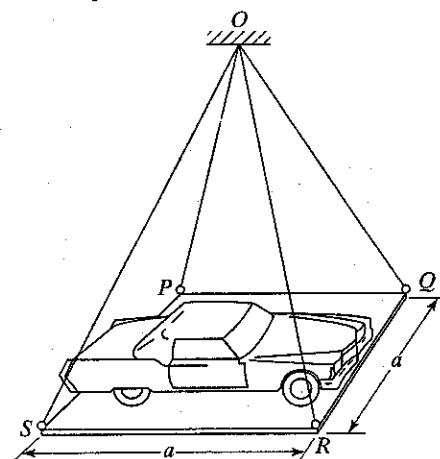


FIGURA 2.61

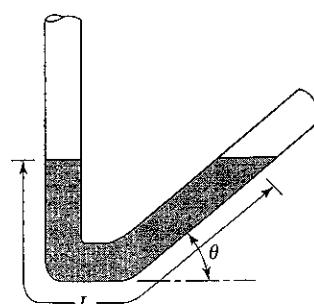


FIGURA 2.62

- 2.33 O caixote de massa 250 kg suspenso por um helicóptero (mostrado na Figura 2.63(a)) pode ser modelado como mostra a Figura 2.63(b). As pás do rotor do helicóptero giram a 300 rpm. Determine o diâmetro dos cabos de aço de modo que a freqüência natural de vibração do caixote seja no mínimo duas vezes a freqüência das pás do rotor.
- 2.34 A calota de um vaso de pressão é içada por um conjunto de cabos de aço de comprimento 2 m, como mostra a Figura 2.64. Constatou-se que o período de vibração axial (no sentido vertical) varia entre 5 e 4,0825 s quando uma massa adicional de 5.000 kg é acrescentada à calota do vaso de pressão. Determine a área da seção transversal equivalente dos cabos e da massa da calota do vaso de pressão.
- 2.35 Um volante está montado em um eixo vertical, como mostra a Figura 2.65. O eixo tem diâmetro d e comprimento l e é fixo em ambas as extremidades. O peso do volante é W , e seu raio de giro é r . Determine a freqüência natural das vibrações longitudinal, transversal e torcional do sistema.

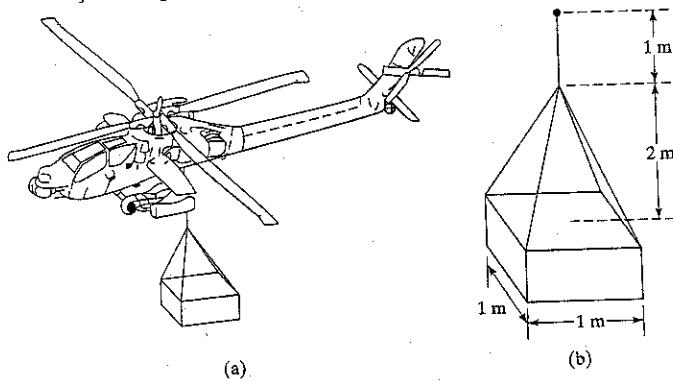


FIGURA 2.63

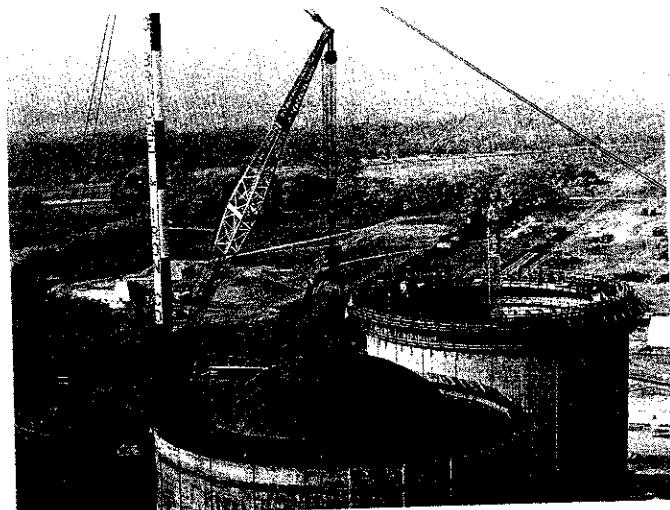


FIGURA 2.64 (Fotografia por cortesia de CBI Industries Inc.)

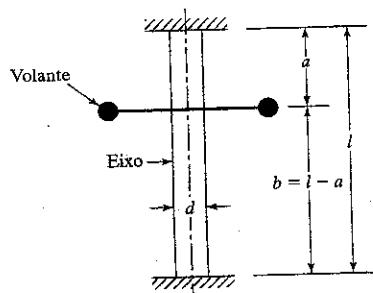


FIGURA 2.65

- 2.36 Uma torre de antena de TV é escorada por quatro cabos, como mostra a Figura 2.66. Cada cabo está sob tensão e é feito de aço, com área de seção transversal de 0,5 in². Para estimar a massa e a rigidez da torre de antena, ela pode ser modelada como uma viga de aço de seção quadrada de lado 1 in. Determine a freqüência natural de vibração de flexão da torre em relação ao eixo y .

- 2.37 A Figura 2.67(a) mostra uma placa de sinalização de tráfego de aço com espessura de $\frac{1}{8}$ in fixada a um poste de aço. O poste tem 72 in de altura, seção transversal de 2 in \times 1/4 in e pode sofrer vibração por torção (em relação ao eixo z) ou vibração por flexão (no plano zx ou no plano yz). Determine o modo de vibração do poste em uma tempestade durante a qual a velocidade do vento tem uma componente de freqüência de 1,25 Hz.

Sugestões:

1. Despreze o peso do poste para determinar as freqüências naturais de vibração.
2. A rigidez torcional de um eixo de seção retangular (Figura 2.67(b)) é dada por

$$k_t = 5,33 \frac{ab^3 G}{l} \left[1 - 0,63 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal.

3. O momento de inércia de massa de um bloco retangular em relação ao eixo OO (Figura 2.67(c)) é dado por

$$I_{OO} = \frac{\rho l}{3} (b^3 h + h^3 b)$$

onde ρ é a densidade do bloco.

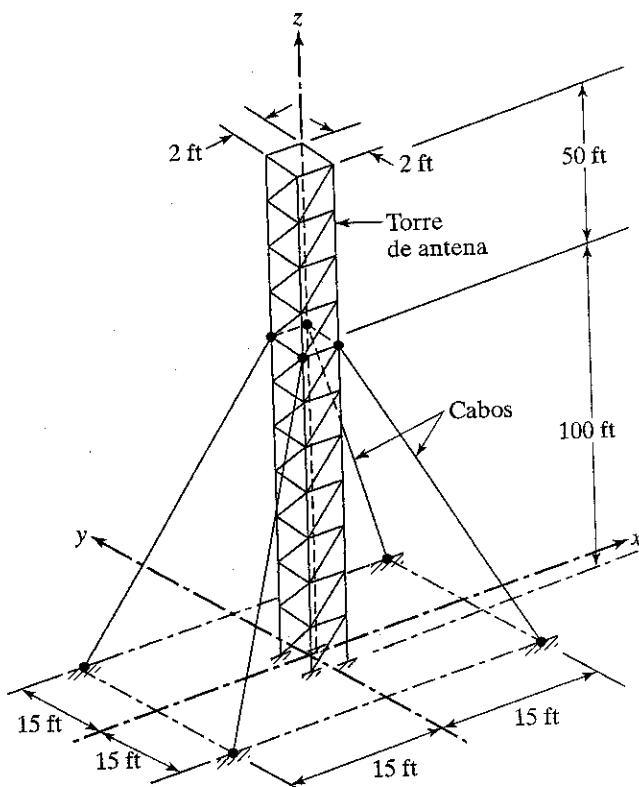


FIGURA 2.66

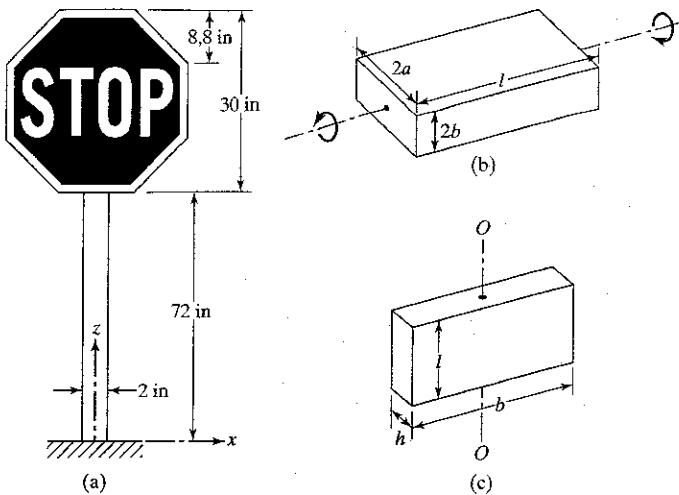


FIGURA 2.67

- 2.38** A estrutura de um edifício é modelada por quatro colunas idênticas, cada uma com peso w , e um piso rígido de peso W , como mostra a Figura 2.68. As colunas são fixadas no solo e têm uma rigidez de flexão EI cada. Determine a freqüência natural de vibração horizontal da estrutura do edifício admitindo que a conexão entre o piso e as colunas seja:
 (a) articulada como mostra a Figura 2.68(a);
 (b) fixa contra rotação como mostra a Figura 2.68(b). Inclua o efeito dos pesos próprios das colunas.
- 2.39** Um braço de robô de seleção e posicionamento, mostrado na Figura 2.69, transporta um objeto que pesa 10 lb. Determine a freqüência natural do braço de robô na direção axial para os seguintes dados: $l_1 = 12$ in, $l_2 = 10$ in, $l_3 = 8$ in; $E_1 = E_2 = E_3 = 10^7$ psi; $D_1 = 2$ in, $D_2 = 1,5$ in, $D_3 = 1$ in; $d_1 = 1,75$ in, $d_2 = 1,25$ in, $d_3 = 0,75$ in.

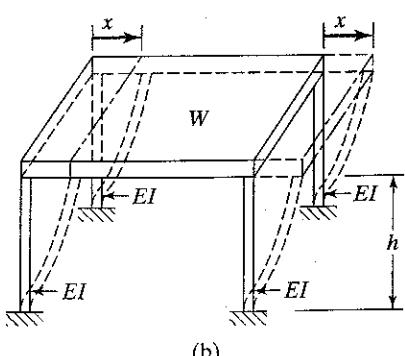
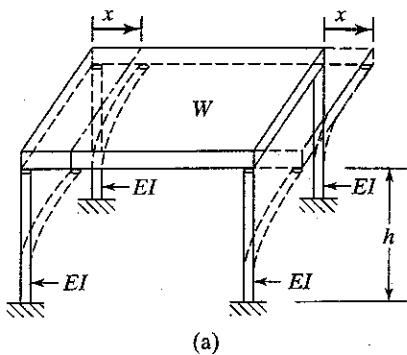


FIGURA 2.68

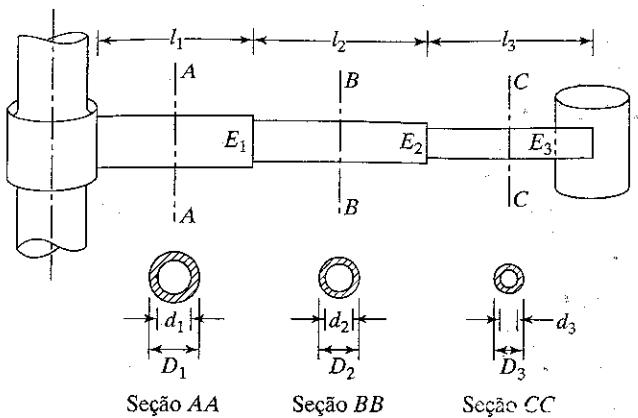


FIGURA 2.69

- 2.40** Uma mola helicoidal de rigidez k é cortada em duas metades, e uma massa m é ligada às duas metades, como mostra a Figura 2.70(a). Verificou-se que o período natural desse sistema é 0,5 s. Se uma mola idêntica for cortada de modo que uma das partes equivalha a um quarto e a outra a três quartos do comprimento original e a massa m for ligada às duas partes como mostra a Figura 2.70(b), qual seria o período natural do sistema?
- 2.41*** A Figura 2.71 mostra um bloco de metal apoiado sobre dois roletes cilíndricos idênticos que giram em direções opostas com a mesma velocidade angular. Quando o centro de gravidade do bloco é deslocado inicialmente por uma distância x , o bloco entra em movimento harmônico simples. Se a freqüência de movimento do bloco for ω , determine o coeficiente de atrito entre o bloco e os roletes.
- 2.42*** Se duas molas idênticas de rigidez k cada forem ligadas ao bloco de metal do Problema 2.41, como mostrado na Figura 2.72, determine o coeficiente de atrito entre o bloco e os roletes.
- 2.43** Em um pátio de ferro-velho, um eletroímã de 3.000 lb de peso está em repouso enquanto sustenta um automóvel de 2.000 lb de peso. A corrente elétrica é desligada, e o automóvel cai. Admitindo que a constante elástica equivalente do conjunto guindaste-cabo de sustentação seja 10.000 lb/in, determine o seguinte:
 (a) a freqüência natural de vibração do eletroímã;
 (b) o movimento resultante do eletroímã;
 (c) a tensão máxima desenvolvida no cabo durante o movimento.

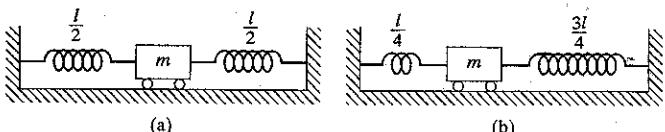


FIGURA 2.70

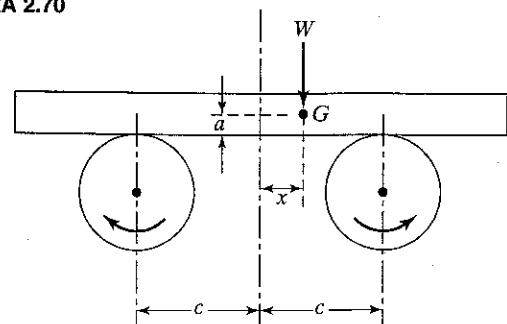


FIGURA 2.71

* O asterisco denota um problema de projeto ou um problema que não tem uma resposta única.

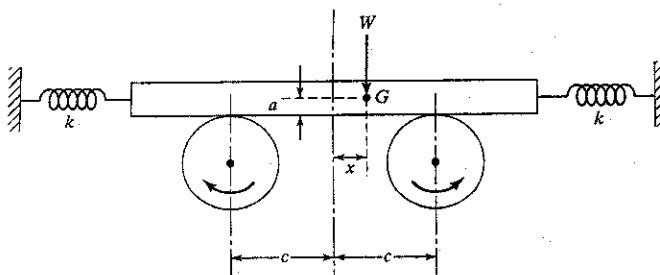


FIGURA 2.72

- 2.44** Derive a equação de movimento do sistema mostrado na Figura 2.73, com a utilização dos seguintes métodos:
 (a) segunda lei do movimento de Newton;
 (b) princípio de D'Alembert;
 (c) princípio do trabalho virtual;
 (d) princípio de conservação de energia.

- 2.45–2.46** Desenhe o diagrama de corpo livre e derive a equação de movimento pela segunda lei do movimento de Newton para cada um dos sistemas mostrados nas figuras 2.74 e 2.75.

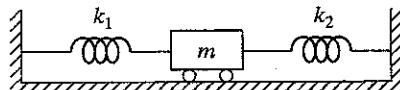


FIGURA 2.73

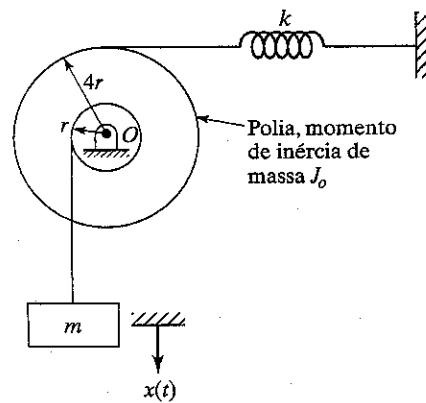


FIGURA 2.74

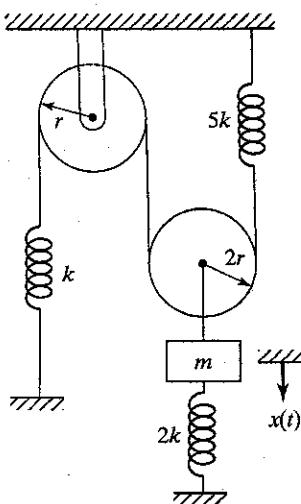


FIGURA 2.75

2.47–2.48 Derive a equação de movimento com a utilização do princípio de conservação de energia para cada um dos sistemas mostrados nas figuras 2.74 e 2.75.

- 2.49** Uma viga de aço de 1 m de comprimento suporta uma massa de 50 kg em sua extremidade livre, como mostra a Figura 2.76. Determine a freqüência natural de vibração transversal da massa modelando-a como um sistema com um grau de liberdade.

- 2.50** Uma viga de aço de 1 m de comprimento suporta uma massa de 50 kg em sua extremidade livre, como mostra a Figura 2.77. Determine a freqüência natural de vibração transversal do sistema modelando-o como um sistema com um grau de liberdade.

- 2.51** Determine o deslocamento, a velocidade e a aceleração da massa de um sistema massa-mola com $k = 500 \text{ N/m}$, $m = 2 \text{ kg}$, $x_0 = 0,1 \text{ m}$ e $\dot{x}_0 = 5 \text{ m/s}$.

- 2.52** Determine o deslocamento (x), a velocidade (\dot{x}) e a aceleração (\ddot{x}) de um sistema massa-mola com $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ para as condições iniciais $x_0 = 0,05 \text{ m}$ e $\dot{x}_0 = 1 \text{ m/s}$. Desenhe gráficos de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ em relação a $t = 0$ a 5 s.

- 2.53** Constatou-se que a resposta de vibração livre de um sistema massa-mola tem uma freqüência de 2 rad/s, uma amplitude de 10 mm e um deslocamento de fase de 1 rad em relação a $t = 0$. Determine as condições iniciais que causaram a vibração livre. Considere que o fator de amortecimento do sistema é 0,1.

- 2.54** Verificou-se que um automóvel tem uma freqüência natural de 20 rad/s sem passageiros e de 17,32 rad/s com passageiros com massa total de 500 kg. Determine a massa e a rigidez do automóvel tratando-o como um sistema com um grau de liberdade.

- 2.55** Um sistema massa-mola com massa 2 kg e rigidez 3.200 N/m tem um deslocamento inicial de $x_0 = 0$. Qual é a máxima velocidade inicial que pode ser imprimida à massa sem que a amplitude de vibração livre ultrapasse um valor de 0,1 m?

- 2.56** Uma mola helicoidal feita de corda de piano com diâmetro d , tem um diâmetro mínimo de enrolamento (D) de 0,5625 in e N espiras ativas (voltas). Consta-se que a mola tem uma freqüência de vibração (f) de 193 Hz e taxa de mola k de 26,4 lb/in. Determine o diâmetro da corda d e o número de espiras N , admitindo que o módulo de elasticidade transversal G é $11,5 \times 10^6 \text{ psi}$ e a densidade em peso ρ é $0,282 \text{ lb/in}^3$. A constante elástica (k) e a freqüência (f) da mola são dadas por

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N}, f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{kg}{W}}$$

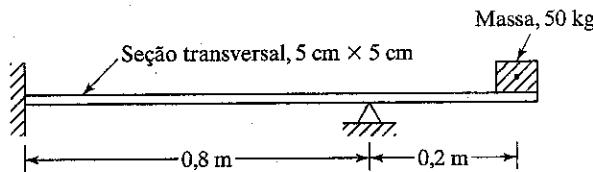


FIGURA 2.76

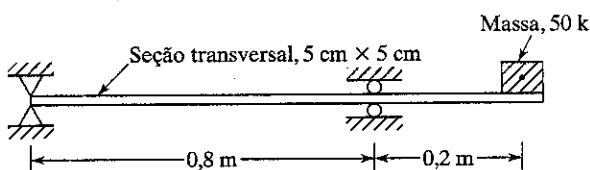
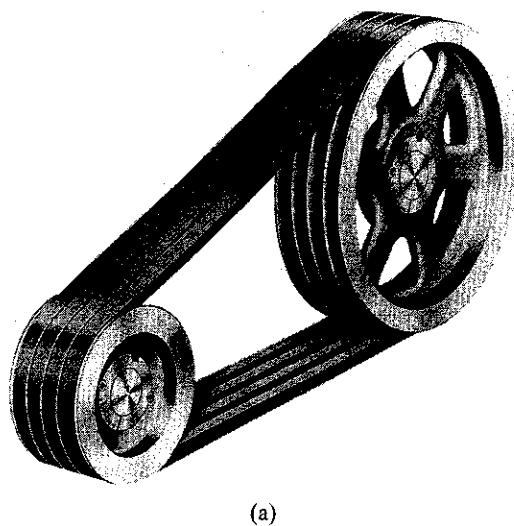


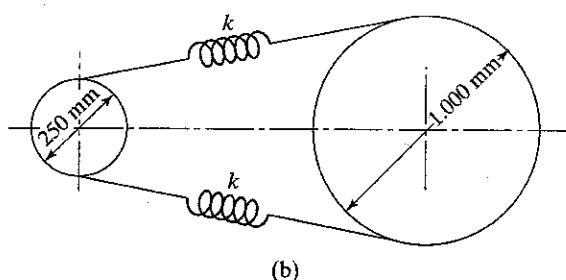
FIGURA 2.77

onde W é o peso da mola helicoidal e g é a aceleração devido à gravidade.

- 2.57** Resolva o Problema 2.56 se o material da mola helicoidal for mudado de corda de piano para alumínio com $G = 4 \times 10^6$ psi e $\rho = 0,1 \text{ lb/in}^3$.
- 2.58** Uma viga de aço em balanço é usada para transportar uma máquina em sua extremidade livre. Para reduzir o peso, foi proposta a substituição da viga de aço por uma viga de alumínio de dimensões idênticas. Determine a mudança esperada na freqüência natural do sistema viga-máquina.
- 2.59** Um pêndulo simples entra em oscilação em relação à sua posição de repouso imprimindo-se a ele uma velocidade angular de 1 rad/s. Constatou-se que ele oscila com uma amplitude de 0,5 rad. Determine a freqüência natural e o comprimento do pêndulo.
- 2.60** Uma polia de 250 mm de diâmetro aciona uma segunda polia de 1.000 mm de diâmetro por meio de uma correia (Figura 2.78). O momento de inércia da polia acionada é 0,2 kg/m². A correia que liga essas duas polias é representada por duas molas, cada uma com rigidez k . Para qual valor de k a freqüência natural será 6 Hz?
- 2.61** Derive uma expressão para a freqüência natural do pêndulo simples mostrado na Figura 1.11. Determine o período de oscilação de um pêndulo simples com massa $m = 5 \text{ kg}$ e comprimento $l = 0,5 \text{ m}$.
- 2.62** Uma massa m é ligada à extremidade de uma barra de massa desprezível e entra em vibração em três configurações diferentes, como indicado na Figura 2.79. Determine a configuração correspondente à mais alta freqüência natural.
- 2.63** A Figura 2.80 mostra uma nave espacial com quatro painéis solares. Cada painel tem as dimensões $5 \text{ ft} \times 3 \text{ ft} \times 1 \text{ ft}$, densidade de peso de $0,1 \text{ lb/in}^3$ e está ligado ao corpo da nave espacial por hastes de alumínio de 12 in de comprimento e 1 in de diâmetro. Considerando que o corpo da espaçonave é muito grande (rígido), determine a freqüência natural de vibração de cada painel em relação ao eixo da haste conectora de alumínio.
- 2.64** Uma das pás de um ventilador elétrico é removida (como mostram as linhas tracejadas na Figura 2.81). O eixo de aço AB , no qual as pás estão montadas, é equivalente a um eixo uniforme de 1 in de diâmetro e 6 in de comprimento. Cada pá pode ser modelada como uma haste delgada uniforme de 2 lb de peso e 12 in de comprimento. Determine a freqüência natural de vibração das três pás restantes em relação ao eixo y .
- 2.65** Um anel pesado de momento de inércia de massa $1,0 \text{ kg/m}^2$ está ligado à extremidade de um eixo oco de duas camadas de 2 m de comprimento (Figura 2.82). Se as duas camadas do eixo forem feitas de aço e bronze, determine o período natural de vibração torcional do anel pesado.
- 2.66** Determine a freqüência natural do pêndulo mostrado na Figura 2.83, quando a massa da barra conectora não é desprezível em comparação com a massa do peso do pêndulo.
- 2.67** Um eixo de aço de 0,05 m de diâmetro e 2 m de comprimento é fixo em uma das extremidades e, na outra extremidade, suporta um disco de aço de 1 m diâmetro e 0,1 m de espessura, como mostra a Figura 2.14. Determine a freqüência de vibração natural por torção do sistema.



(a)



(b)

FIGURA 2.78 (Fotografia por cortesia de Reliance Electric Company.)

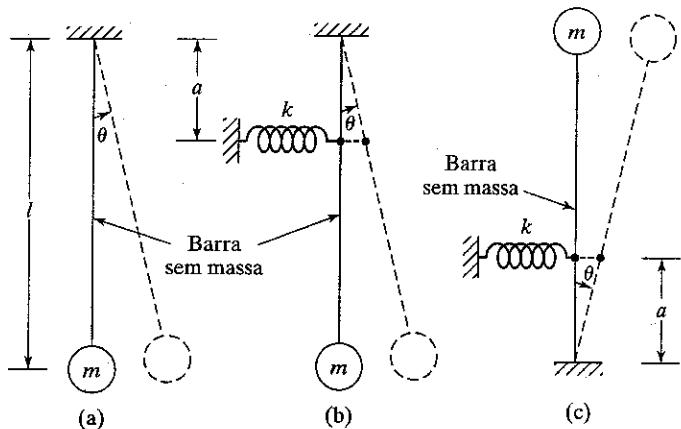


FIGURA 2.79

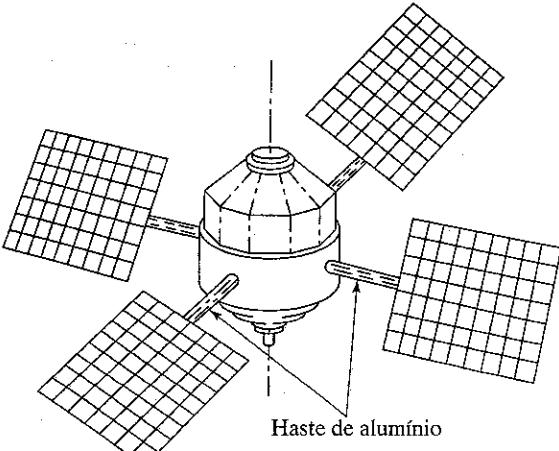


FIGURA 2.80

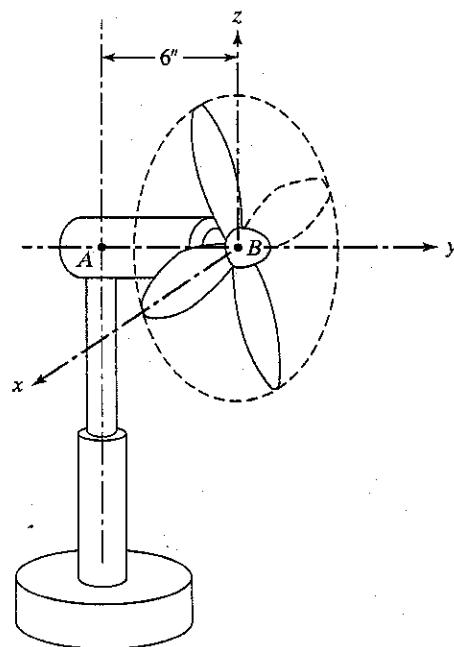


FIGURA 2.81

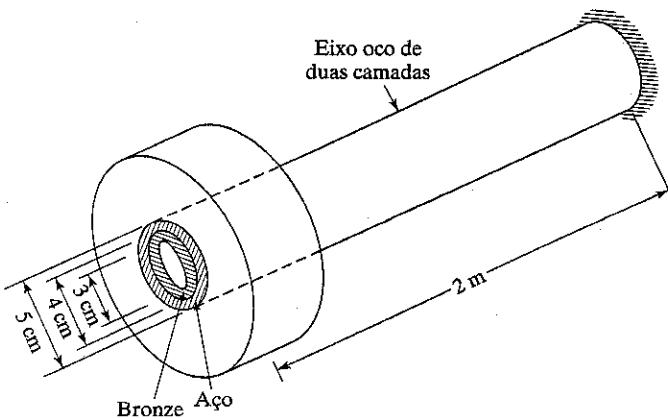


FIGURA 2.82

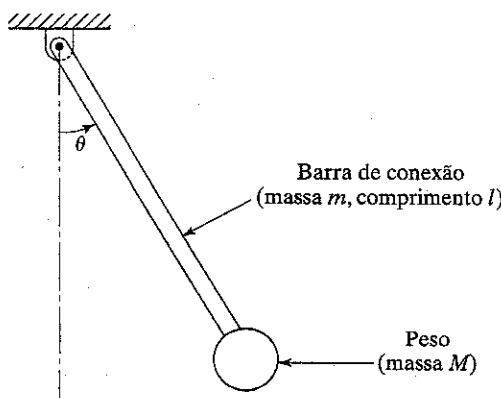


FIGURA 2.83

- 2.68 Uma haste delgada uniforme de massa m e comprimento l é articulada no ponto A e está ligada a quatro molas lineares e a uma mola torcional, como mostra a Figura 2.84. Determine a freqüência natural do sistema se $k = 2.000 \text{ N/m}$, $k_t = 1.000 \text{ N.m/rad}$, $m = 10 \text{ kg}$ e $l = 5 \text{ m}$.

2.69 Um cilindro de massa m e momento de inércia de massa J_0 está livre para rolar sem deslizar, mas é restringido por duas molas com rigidez k_1 e k_2 , respectivamente, como mostra a Figura 2.85. Determine a freqüência natural de vibração do cilindro. Determine também o valor de a que maximiza a freqüência natural.

2.70 Se o pêndulo do Problema 2.61 for colocado dentro de um foguete que se movimenta em sentido vertical com uma aceleração de 5 m/s^2 , qual será seu período de oscilação?

2.71 Determine a equação de movimento da barra rígida uniforme OA de comprimento l e massa m mostrada na Figura 2.86. Determine também sua freqüência natural.

2.72 Um disco circular uniforme é articulado no ponto O, como mostra a Figura 2.87. Determine a freqüência natural do sistema. Determine também a freqüência máxima do sistema variando o valor de b .

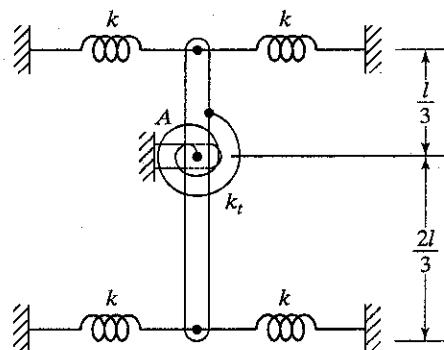


FIGURA 2.84

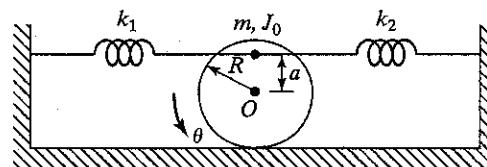


FIGURA 2.85

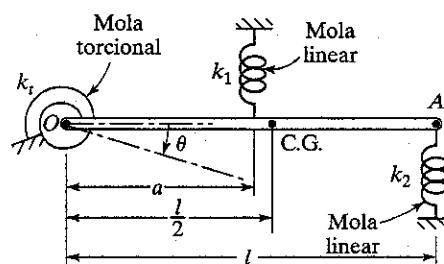


FIGURA 2.86

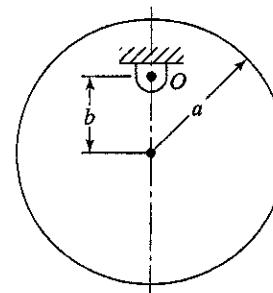


FIGURA 2.87

- 2.73** Derive a equação de movimento do sistema mostrado na Figura 2.88, com a utilização dos seguintes métodos:
 (a) segunda lei do movimento de Newton;
 (b) Princípio de D'Alembert;
 (c) princípio do trabalho virtual.
- 2.74** Determine o efeito do peso próprio sobre a freqüência natural de vibração da viga fixa nas duas extremidades (Figura 2.89).
- 2.75** Use o método de Rayleigh para resolver o Problema 2.7.
- 2.76** Use o método de Rayleigh para resolver o Problema 2.13.
- 2.77** Determine a freqüência natural do sistema mostrado na Figura 2.54.
- 2.78** Use o método de Rayleigh para resolver o Problema 2.26.
- 2.79** Use o método de Rayleigh para resolver o Problema 2.68.
- 2.80** Use o método de Rayleigh para resolver o Problema 2.71.
- 2.81** Um prisma retangular de madeira com densidade ρ_w , altura h e seção transversal $a \times b$ é inicialmente comprimido dentro de uma cuba de óleo e vibra livremente no sentido vertical (Figura 2.90). Use o método de Rayleigh para determinar a freqüência natural de vibração do prisma. Considere que a densidade do óleo é ρ_0 . Se o prisma retangular for substituído por um cilindro circular uniforme de raio r , altura h e densidade ρ_w , ocorrerá alguma alteração na freqüência natural?

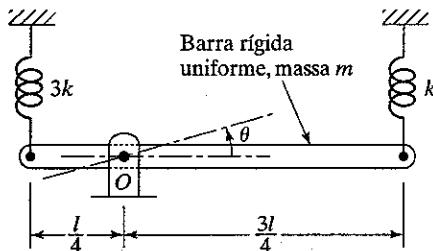


FIGURA 2.88

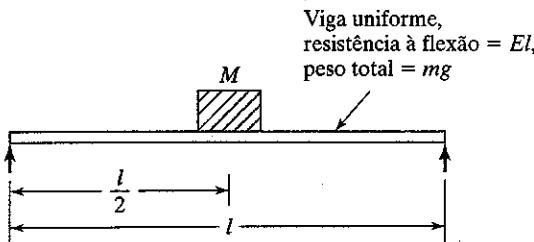


FIGURA 2.89

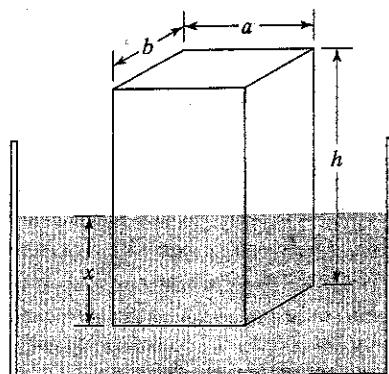


FIGURA 2.90

- 2.82** Use o método da energia para determinar a freqüência natural do sistema mostrado na Figura 2.85.
- 2.83** Use o método da energia para determinar a freqüência natural de vibração do sistema mostrado na Figura 2.74.
- 2.84** Verifica-se que a freqüência de vibração de um pêndulo simples é 0,5 Hz no vácuo e 0,45 Hz em um meio fluido viscoso. Determine a constante de amortecimento, considerando que a massa do peso do pêndulo é 1 kg.

- 2.85** Constatase que a razão entre amplitudes sucessivas de um sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade é 18:1. Determine a razão entre amplitudes sucessivas se a quantidade de amortecimento for:
 (a) duplicada;
 (b) reduzida à metade.

- 2.86** Admitindo que o ângulo de fase seja zero, mostre que a resposta $x(t)$ de um sistema subamortecido com um grau de liberdade alcança um valor máximo quando

$$\operatorname{sen} \omega_d t = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

e um valor mínimo quando

$$\operatorname{sen} \omega_d t = -\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Mostre também que as equações das curvas que passam pelos valores máximos e mínimos de $x(t)$ são dadas, respectivamente, por

$$x = \sqrt{1 - \zeta^2} X e^{-\zeta \omega_n t}$$

$$x = -\sqrt{1 - \zeta^2} X e^{-\zeta \omega_n t}$$

- 2.87** Derive uma expressão para o tempo no qual a resposta de um sistema criticamente amortecido atingirá seu valor máximo. Determine também a expressão para a resposta máxima.

- 2.88** Um absorvedor de choque deve ser calculado para limitar sua máxima ultrapassagem a 15 por cento de seu deslocamento inicial quando solto. Determine o fator de amortecimento ζ_0 requerido. Qual será a máxima ultrapassagem se ζ for igual a:

(a) $\frac{3}{4}\zeta_0$?

(b) $\frac{5}{4}\zeta_0$?

- 2.89** As respostas de vibração livre de um motor elétrico de 500 N de peso montado sobre quatro tipos diferentes de bases são mostradas nas figuras 2.91 (a) e (b). Identifique os seguintes em cada caso:

- (i) a natureza do amortecimento fornecido pela base;
 (ii) a constante elástica e o coeficiente de amortecimento da base;
 (iii) as freqüências naturais não amortecida e amortecida do motor elétrico.

- 2.90** Para sistema massa-mola-amortecedor, $m = 50$ kg e $k = 5.000$ N/m. Determine os seguintes:

- (a) constante de amortecimento crítico, c_c ;
 (b) a freqüência natural amortecida quando $c = c_c/2$;
 (c) o decremento logarítmico.

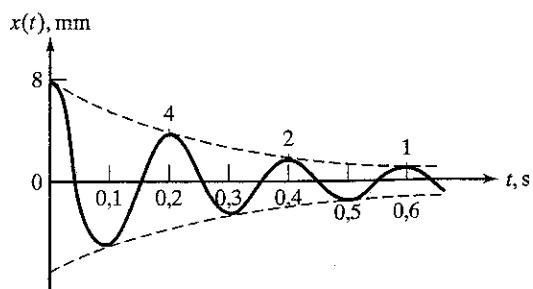


FIGURA 2.91 (a)

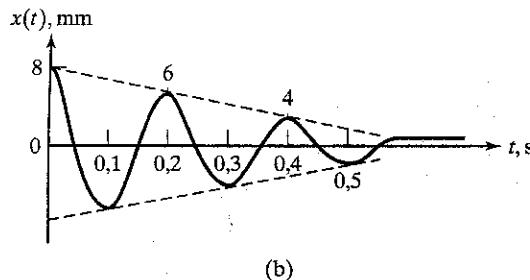


FIGURA 2.91 (b)

~~Corrigida~~

- 2.91** Uma locomotiva de 2.000 kg de massa que está viajando a uma velocidade $v = 10 \text{ m/s}$ é parada no final da via férrea por um sistema mola-amortecedor, como mostra a Figura 2.92. Se a rigidez da mola for $k = 40 \text{ N/mm}$ e a constante de amortecimento for $c = 20 \text{ N.s/mm}$, determine:

(a) o deslocamento máximo da locomotiva após alcançar as molas e o amortecedor;
 (b) o tempo que leva para atingir o deslocamento máximo.

- 2.92** Um pêndulo de torção tem uma freqüência natural de 200 ciclos/min quando vibra no vácuo. O momento de inércia de massa do disco é $0,2 \text{ kg/m}^2$. Então, o pêndulo é imerso em óleo, e verifica-se que sua freqüência natural é 180 ciclos/min. Determine a constante de amortecimento. Se o disco, quando mergulhado em óleo, sofrer um deslocamento inicial de 2° , determine seu deslocamento ao final do primeiro ciclo.

- 2.93** Um garoto que está guiando uma bicicleta pode ser modelado como um sistema massa-mola-amortecedor com peso, rigidez e constante de amortecimento equivalentes de 800 N, 50.000 N/m e 1.000 N.s/m, respectivamente. O assentamento irregular dos blocos de concreto que pavimentam a rua provoca uma redução abrupta no nível da superfície, como indicado na Figura 2.93. Se a velocidade da bicicleta for 5 m/s (18 km/h), determine o deslocamento do garoto no sentido vertical. Suponha que a bicicleta estava livre de vibração vertical antes de passar pelo desnível que provocou seu deslocamento vertical.

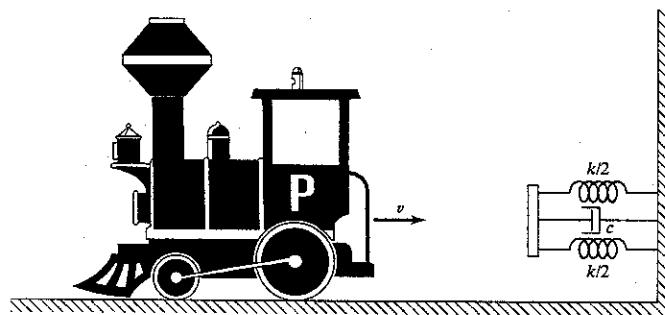


FIGURA 2.92

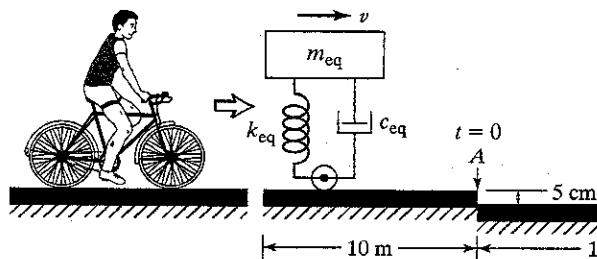


FIGURA 2.93

- 2.94** Um prisma retangular de madeira com 20 lb de peso, 3 ft de altura e seção transversal de $1 \text{ ft} \times 2 \text{ ft}$ flutua e permanece na posição vertical dentro de uma cuba de óleo. Podemos admitir que a resistência ao atrito do óleo seja equivalente a um coeficiente de amortecimento viscoso ζ . Quando o prisma é comprimido por uma distância de 6 in em relação à sua posição de equilíbrio e então solto, constata-se que alcança uma profundidade de 5,5 in ao final de seu primeiro ciclo de oscilação. Determine o valor do fator de amortecimento do óleo.

- 2.95** Um corpo que vibra com amortecimento viscoso realiza 5 oscilações por segundo e, em 50 ciclos, sua amplitude diminui para 10%. Determine o decremento logarítmico e o fator de amortecimento. Qual será a proporção de redução do período de vibração se o amortecimento for eliminado?

- 2.96** A máxima distância de recuo permitível de um canhão é especificada como 0,5 m. Se a velocidade inicial de recuo deve ficar entre 8 e 10 m/s, determine a massa do canhão e a rigidez da mola do mecanismo de recuo. Considere que seja usado um amortecedor de mola criticamente amortecido no mecanismo de recuo e que a massa do canhão deva ser no mínimo 500 kg.

- 2.97** Um sistema viscosamente amortecido tem uma rigidez de 5.000 N/m, constante de amortecimento crítico de 0,2 N.s/mm e um decremento logarítmico de 2,0. Se for imprimida ao sistema uma velocidade inicial de 1 m/s, determine o máximo deslocamento do sistema.

- 2.98** Explique por que um sistema superamortecido nunca passa pela posição de equilíbrio estático quando sofre:

(a) apenas um deslocamento inicial;
 (b) apenas uma velocidade inicial.

- 2.99–2.101** Derive a equação de movimento e determine a freqüência natural de vibração de cada um dos sistemas mostrados nas figuras 2.94 a 2.96.

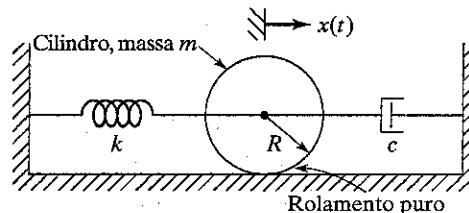


FIGURA 2.94

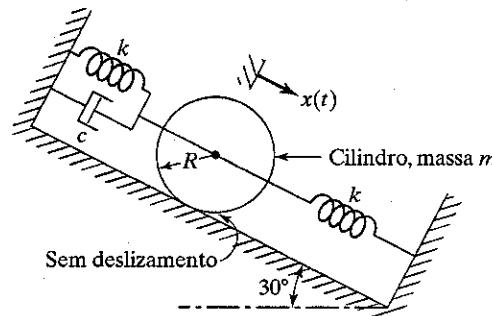
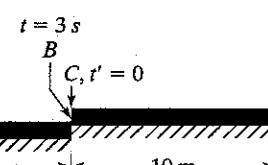


FIGURA 2.95



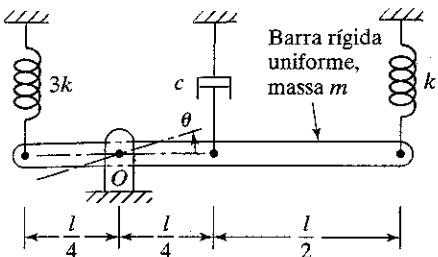


FIGURA 2.96

2.102–2.104 Utilize o princípio do trabalho virtual para derivar a equação de movimento para cada um dos sistemas mostrados nas figuras 2.94 a 2.96.

2.105 Um prisma retangular de madeira de seção transversal 40 cm \times 60 cm, altura 120 cm e massa 40 kg flutua em um fluido, como mostra a Figura 2.90. Quando perturbado, observa-se que ele vibra livremente com um período natural de 0,5 s. Determine a densidade do fluido.

2.106 O sistema mostrado na Figura 2.97 tem uma freqüência natural de 5 Hz para os seguintes dados: $m = 10 \text{ kg}$, $J_0 = 5 \text{ kg/m}^2$, $r_1 = 10 \text{ cm}$, $r_2 = 25 \text{ cm}$. Quando o sistema é perturbado por ser-lhe dado um deslocamento inicial, a amplitude de vibração livre é reduzida de 80 por cento em 10 ciclos. Determine os valores de k e c .

2.107 O rotor de um mostrador está conectado a uma mola torcional e a um amortecedor viscoso torcional de modo a formar um sistema torcional com um grau de liberdade. As divisões da escala graduada são iguais e a posição de equilíbrio do rotor corresponde ao zero da escala. Quando é aplicado um torque de $2 \times 10^{-3} \text{ N/m}$, verifica-se que o deslocamento angular do rotor é de 50° e que o ponteiro mostra 80 divisões na escala. Quando o rotor é solto da posição em que estava, primeiro o ponteiro volta 20 divisões em 1 segundo e, em seguida, 5 divisões em mais 1 segundo. Determine:

- (a) o momento de inércia de massa do rotor;
- (b) o período natural não amortecido do rotor;
- (c) a constante de amortecimento por torção;
- (d) a resistência à torção da mola.

2.108 Determine os valores de ζ e ω_d para os seguintes sistemas viscosamente amortecidos:

- (a) $m = 10 \text{ kg}$, $c = 150 \text{ N.s/m}$, $k = 1.000 \text{ N/m}$;
- (b) $m = 10 \text{ kg}$, $c = 200 \text{ N.s/m}$, $k = 1.000 \text{ N/m}$;
- (c) $m = 10 \text{ kg}$, $c = 250 \text{ N.s/m}$, $k = 1.000 \text{ N/m}$.

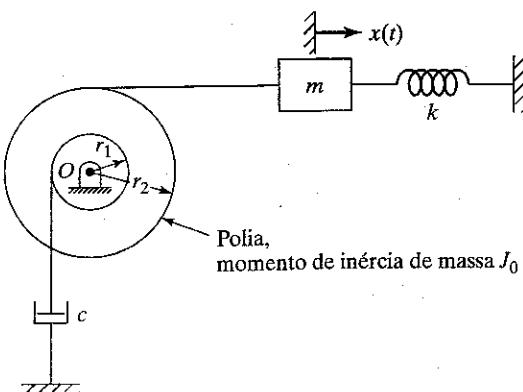


FIGURA 2.97

2.109 Determine a resposta de vibração livre dos sistemas viscosamente amortecidos descritos no Problema 2.108 quando $x_0 = 0,1 \text{ m}$ e $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$.

2.110 Determine a energia dissipada durante um ciclo de movimento harmônico simples dado por $x(t) = 0,2 \text{ sen } \omega_d t$ por um sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade com os seguintes parâmetros:

- (a) $m = 10 \text{ kg}$, $c = 50 \text{ N.s/m}$, $k = 1.000 \text{ N/m}$;
- (b) $m = 10 \text{ kg}$, $c = 150 \text{ N.s/m}$, $k = 1.000 \text{ N/m}$.

2.111 Um sistema com um grau de liberdade consiste em uma massa de 20 kg e uma mola de rigidez 4.000 N/m. Verificou-se que as amplitudes de ciclos sucessivos são 50, 45, 40, 35, ... mm. Determine a natureza e a magnitude da força de amortecimento e a freqüência da vibração amortecida.

2.112 Uma massa de 20 kg desliza para a frente e para trás sobre uma superfície seca devido à ação de uma mola com rigidez de 10 N/mm. Após 4 ciclos completos, verificou-se que a amplitude é de 100 mm. Qual é o coeficiente médio de atrito entre as duas superfícies se a amplitude original era de 150 mm? Quanto tempo transcorreu durante os 4 ciclos?

2.113 Uma massa de 10 kg está ligada a uma mola de rigidez 3.000 N/m e é solta após sofrer um deslocamento inicial de 100 mm. Admitindo que a massa movimenta-se sobre uma superfície horizontal, como mostra a Figura 2.33(a), determine a posição na qual a massa atinge o repouso. Suponha que o coeficiente de atrito entre a massa e a superfície seja 0,12.

2.114 Um peso de 25 N está suspenso por uma mola que tem uma rigidez de 1.000 N/m. O peso vibra no sentido vertical sob uma força de amortecimento constante. Quando o peso é inicialmente puxado para baixo até uma distância de 10 cm em relação à sua posição de equilíbrio estático e então é solto, atinge o repouso após exatamente dois ciclos completos. Determine a magnitude da força de amortecimento.

2.115 Uma massa de 20 kg está suspensa por uma mola de rigidez 10.000 N/m. O movimento vertical da massa está sujeito a atrito Coulomb de magnitude 50 N. Se a mola for inicialmente deslocada para baixo até 5 cm em relação à sua posição de equilíbrio estático, determine:

- (a) o número de meios ciclos transcorridos antes de a massa atingir o repouso;
- (b) o tempo transcorrido antes de a massa atingir o repouso;
- (c) a extensão final da mola.

2.116 O ensaio de impacto de Charpy é um teste dinâmico no qual um corpo de prova é atingido e quebrado por um pêndulo (ou martelo) e a energia absorvida na quebra do corpo de prova é medida. Os valores de energia servem como um guia útil para comparar a resistência ao impacto de diferentes materiais. Como mostrado na Figura 2.98, o pêndulo está suspenso através de um eixo, é solto de determinada posição e cai sobre o corpo de prova provocando sua quebra. Supondo que o pêndulo oscile livremente (sem nenhum corpo de prova), determine:

- (a) uma expressão para a diminuição do ângulo de balanço para cada ciclo provocada por atrito;
- (b) a solução para $\theta(t)$ se o pêndulo for solto de um ângulo θ_0 ;
- (c) o número de ciclos após o qual o movimento cessa. Considere que a massa do pêndulo seja m e que o coeficiente de atrito entre o eixo e o mancal do pêndulo seja μ .

2.117 Determine a constante de amortecimento viscoso equivalente para amortecimento Coulomb para vibração senoidal.

2.118 Um sistema com um grau de liberdade consiste em uma massa, uma mola e um amortecedor sobre o qual agem

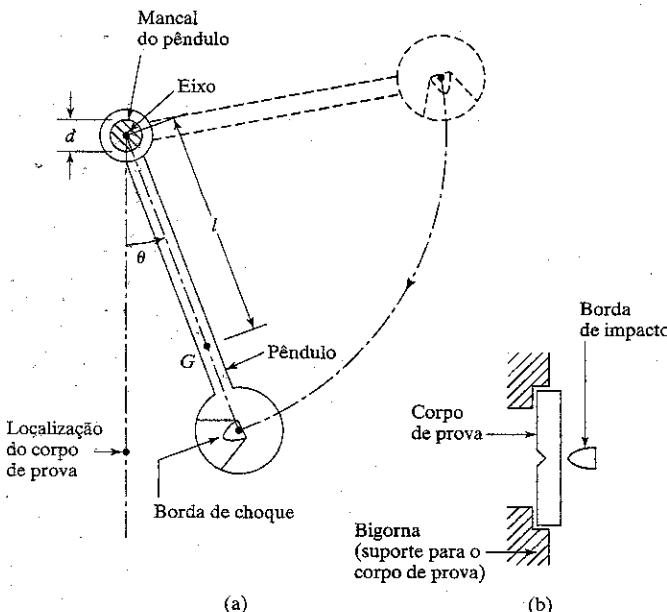


FIGURA 2.98

simultaneamente amortecimento por atrito seco e amortecimento viscoso. Constatase que a amplitude de vibração livre diminui 1 por cento por ciclo quando a amplitude é 20 mm e 2 por cento por ciclo quando a amplitude é 10 mm. Determine o valor de $(\mu N/k)$ para a componente do atrito seco do amortecimento.

- 2.119** Um bloco de metal colocado sobre uma superfície irregular está ligado a uma mola e sofre um deslocamento inicial de 10 cm em relação à sua posição de equilíbrio. Constatase que o período natural de movimento é 1,0 s e que a amplitude decresce 0,5 cm em cada ciclo. Determine:

- o coeficiente de atrito cinético entre o bloco de metal e a superfície;
- o número de ciclos de movimento executados pelo bloco antes de parar.

- 2.120** A massa de um sistema massa-mola com $k = 10.000 \text{ N/m}$ e $m = 5 \text{ kg}$ é posta para vibrar sobre uma superfície irregular. Se a força de atrito for $F = 20 \text{ N}$ e observarmos que a amplitude da massa diminui 50 mm em 10 ciclos, determine o tempo transcorrido para completar os 10 ciclos.

- 2.121** A massa de um sistema massa-mola vibra sobre uma superfície seca com uma inclinação 30° em relação à horizontal, como mostra a Figura 2.99.

- Derive a equação de movimento.
- Determine a resposta do sistema para os seguintes dados:
 $m = 20 \text{ kg}$, $k = 1.000 \text{ N/m}$, $\mu = 0,1$, $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 5 \text{ m/s}$

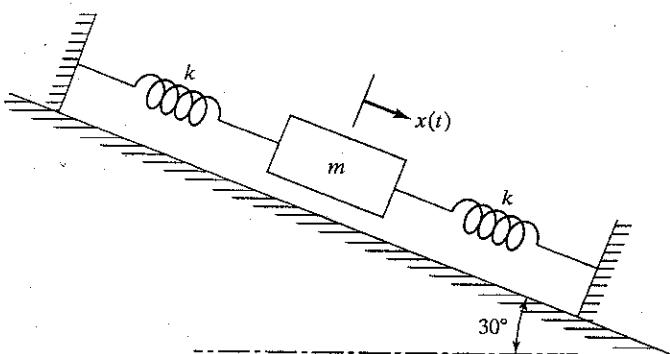


FIGURA 2.99

- 2.122** A massa de um sistema massa-mola é inicialmente deslocada a uma distância de 10 cm em relação à posição em que não está sob tensão pela aplicação de uma força de 25 N, que é igual a 5 vezes o peso da massa. Se a massa for solta dessa posição, por quanto tempo a massa vibrará e a que distância da posição em que não está sob tensão ela parará? Admita um coeficiente de atrito de 0,2.

- 2.123** A curva experimental força-deflexão para uma estrutura composta é mostrada na Figura 2.100. Determine a constante de amortecimento por histerese, o decremento logarítmico e o fator de amortecimento viscoso equivalente correspondentes a essa curva.

- 2.124** Observa-se que um painel feito de material composto reforçado com fibras comporta-se como um sistema com um grau de liberdade de 1 kg massa e rigidez de 2 N/m. Verificou-se que a razão entre amplitudes sucessivas é 1,1. Determine o valor da constante de amortecimento por histerese β , a constante de amortecimento viscoso equivalente c_{eq} e a perda de energia por ciclo para uma amplitude de 10 mm.

- 2.125** Uma viga em balanço embutida com resistência à flexão (rigidez) de 200 N/m suporta uma massa de 2 kg em sua extremidade livre. A massa sofre um deslocamento inicial de 30 mm e então é solta. Se constatarmos que a amplitude seja de 20 mm após 100 ciclos de movimento, estime a constante de amortecimento por histerese β da viga.

- 2.126** Uma massa de 5 kg está ligada à parte superior de uma mola helicoidal, e o sistema entra em vibração pela aplicação de uma deflexão inicial de 25 mm à massa. Verifica-se que a amplitude da massa é reduzida a 10 mm após 100 ciclos de vibração. Considerando uma taxa de mola de 200 N/m para a mola helicoidal, determine o valor do fator de amortecimento por histerese (h) da mola.

- 2.127** Determine a resposta de vibração livre de um sistema massa-mola sujeito a amortecimento Coulomb com a utilização do MATLAB para os seguintes dados:

$$m = 5 \text{ kg}, \quad k = 100 \text{ N/m}, \quad \mu = 0,5, \quad x_0 = 0,4 \text{ m}, \quad \dot{x}_0 = 0$$

- 2.128** Represente em gráfico a resposta de um sistema criticamente amortecido (Equação 2.80) para os seguintes dados com a utilização do MATLAB:

$$(a) x_0 = 10 \text{ mm}, 50 \text{ mm}, 100 \text{ mm}; \dot{x}_0 = 0, \omega_n = 10 \text{ rad/s}$$

$$(b) x_0 = 0, \dot{x}_0 = 10 \text{ mm/s}, 50 \text{ mm/s}, 100 \text{ mm/s}; \omega_n = 10 \text{ rad/s}$$

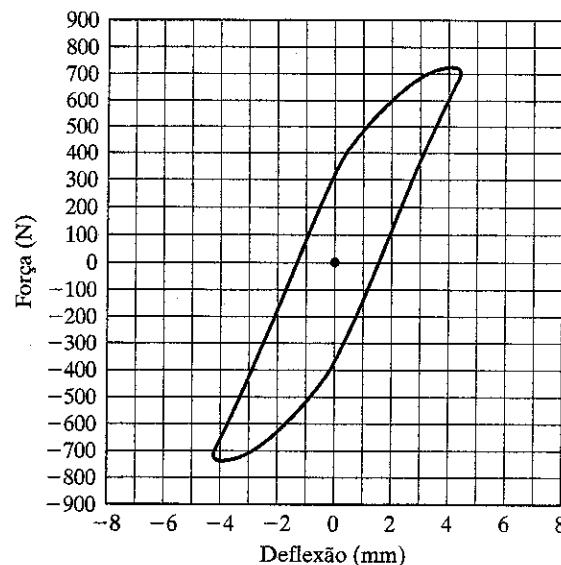


FIGURA 2.100

- 2.129** Represente em gráfico a Equação (2.81), bem como cada um dos dois termos da Equação (2.81) como funções de t com a utilização do MATLAB para os seguintes dados:
 $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$, $\zeta = 2.0$, $x_0 = 20 \text{ mm}$, $\dot{x}_0 = 50 \text{ mm/s}$

- 2.130–2.133** Use o MATLAB Program2.m para representar em gráfico a resposta de vibração livre de um sistema viscosamente amortecido com $m = 4 \text{ kg}$, $k = 2.500 \text{ N/m}$, $x_0 = 100 \text{ mm}$, $\dot{x}_0 = -10 \text{ m/s}$, $\Delta t = 0,01 \text{ s}$, $n = 50$ para os seguintes valores da constante de amortecimento:
(a) $c = 0$;
(b) $c = 100 \text{ N.s/m}$;
(c) $c = 200 \text{ N.s/m}$;
(d) $c = 400 \text{ N.s/m}$.

- 2.134** Determine a resposta do sistema descrito no Problema 2.121 com a utilização do MATLAB.

- 2.135–2.138** Resolva os problemas 2.130 a 2.133 com a utilização do programa em C++ dado na Seção 2.10.

- 2.139–2.142** Resolva os problemas 2.130 a 2.133 com a utilização do programa em FORTRAN dado na Seção 2.11.

EXERCÍCIOS DE PROJETO

- 2.143*** Uma turbina hidráulica de 1.000 kg de massa e 500 kg/m^2 de momento de inércia de massa é montada em um eixo de aço, como mostra a Figura 2.101. A velocidade operacional da turbina é 2.400 rpm. Admitindo que as extremidades do eixo sejam fixas, determine os valores de l , a e d , tais que a frequência natural de vibração da turbina em cada uma das direções axial, transversal e circunferencial seja maior que a velocidade operacional da turbina.

- 2.144*** Calcule as colunas para cada uma das estruturas de edifício mostradas nas figuras 2.68(a) e (b) para peso mínimo, tal que a frequência natural de vibração seja maior do que 50 Hz. O peso do piso (W) é 4.000 lb e o comprimento das colunas (l) é 96 in. Considere que as colunas sejam feitas de aço e tenham uma seção transversal tubular com diâmetro externo d e espessura da parede t .

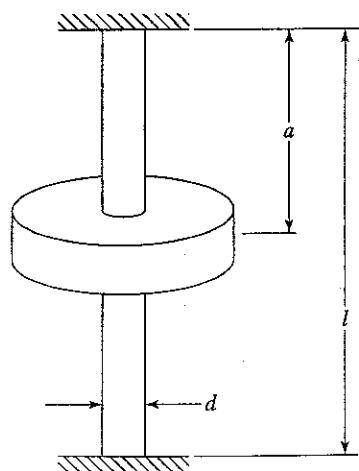


FIGURA 2.101

- 2.145*** Uma das extremidades de uma barra rígida uniforme de massa m está ligada a uma parede por uma junta articulada O , e a outra extremidade suporta uma massa concentrada M , como mostrado na Figura 2.102. A barra gira em relação ao ponto de articulação O contra uma mola torcional e um amortecedor torcional. A proposta é usar esse mecanismo, em conjunto com um contador mecânico, para controlar a entrada em um parque de diversões. Determine as massas m e M , a rigidez da mola torcional (k_t) e a força de amortecimento (F_d) necessárias para satisfazer as seguintes especificações: (1) Pode-se usar um amortecedor viscoso ou um amortecedor Coulomb. (2) A barra deve retornar até um ângulo de fechamento de 5° em menos de 2 segundos quando solta de uma posição inicial de $\theta = 75^\circ$.

- 2.146*** O módulo de excursão lunar foi modelado como uma massa suportada por quatro pernas localizadas em posições simétricas. Cada uma das pernas pode ser aproximada como um sistema mola-amortecedor com massa desprezível (Figura 2.103). Calcule as molas e amortecedores do sistema de modo a obter um período de vibração amortecida entre 1 e 2 s.

- 2.147*** Considere a lança telescópica e a caçamba do caminhão de bombeiros mostrado na Figura 2.12(a). Considere que a lança telescópica $PQRS$ seja suportada por um escora QT , como mostra a Figura 2.104. Determine a seção transversal da escora QT de modo que o período natural de vibração da caçamba com o bombeiro seja igual a 1 s para os dados apresentados adiante. Admita que a seção transversal de cada segmento da lança telescópica e da escora seja circular e oca. Além disso, considere que a escora age como uma mola que se deforma somente na direção axial.

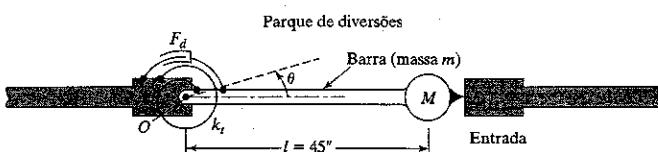


FIGURA 2.102

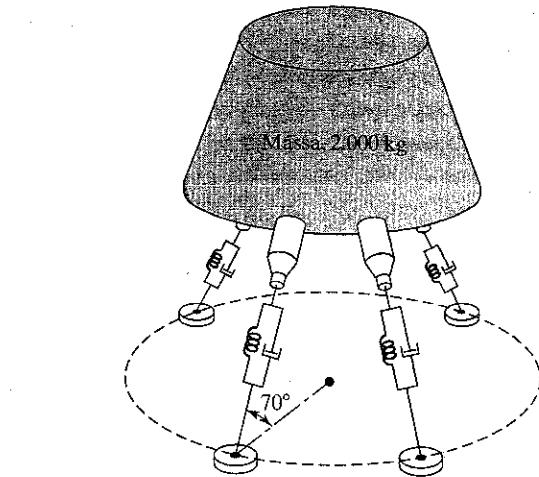


FIGURA 2.103

Dados:

Comprimentos dos segmentos: $PQ = 12 \text{ ft}$, $QR = 10 \text{ ft}$, $RS = 8 \text{ ft}$, $TP = 3 \text{ ft}$.

Módulo de Young da lança telescópica e da escora = $30 \times 10^6 \text{ psi}$.

Diâmetros externos das seções: $PQ = 2,0 \text{ in}$, $QR = 1,5 \text{ in}$, $RS = 1,0 \text{ in}$.

Diâmetros internos das seções: $PQ = 1,75 \text{ in}$, $QR = 1,25 \text{ in}$, $RS = 0,75 \text{ in}$.

Peso da caçamba = 100 lb.

Peso do bombeiro = 200 lb.

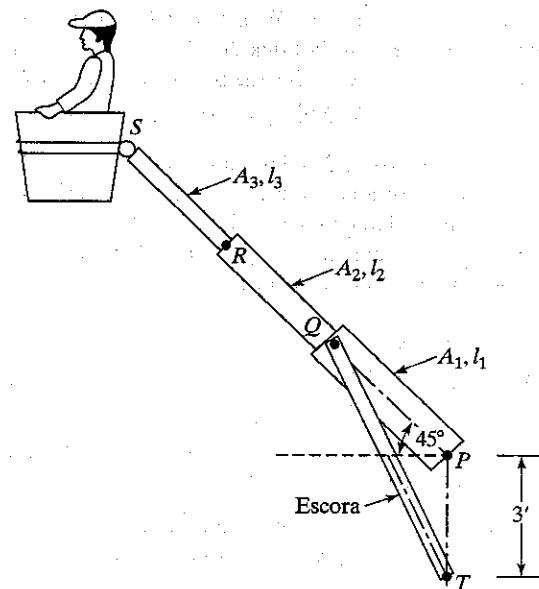
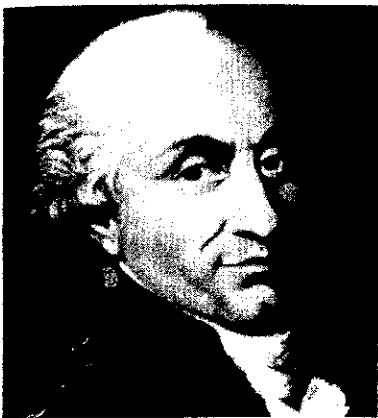


FIGURA 2.104



Charles Augustin de Coulomb (1736–1806), de nacionalidade francesa, foi engenheiro militar e também físico. Seu primeiro trabalho sobre estática e mecânica foi apresentado em 1779, em seu grande livro de memórias, *The theory of simple machines* (A teoria das máquinas simples), que descreve o efeito da resistência e da assim denominada 'Lei da proporcionalidade de Coulomb' entre atrito e pressão normal. Em 1784, ele obteve a solução correta para o problema das pequenas oscilações de um corpo sujeito a torção. Ele é muito famoso por suas leis de força para cargas eletrostáticas e magnéticas. Seu nome é lembrado pela unidade de carga elétrica. (Cortesia de *Applied Mechanics Reviews*.)

CAPÍTULO TRÊS

Vibração excitada harmonicamente

3.1 Introdução

Diz-se que um sistema mecânico ou estrutural sofre vibração forçada sempre que energia externa é fornecida ao sistema durante vibração. A energia externa pode ser fornecida ao sistema por meio de uma força aplicada ou por uma excitação de deslocamento imposta. A natureza da força aplicada ou da excitação de deslocamento pode ser de natureza harmônica, não-harmônica mas periódica, não-periódica ou aleatória. A resposta de um sistema à excitação harmônica é denominada *resposta harmônica*. A excitação não-periódica pode ser de curta ou longa duração. A resposta de um sistema dinâmico a excitações não-periódicas aplicadas repentinamente é denominada *resposta transitória*.

Neste capítulo, consideraremos a resposta dinâmica de um sistema com um grau de liberdade sob excitação harmônicas da forma $F(t) = F_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ ou $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi)$ ou $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \phi)$, onde F_0 é a amplitude, ω é a freqüência e ϕ é o ângulo de fase da excitação harmônica. O valor de ϕ depende do valor de $F(t)$ em $t = 0$ e normalmente é considerado zero. Sob uma excitação harmônica, a resposta do sistema também será harmônica. Se a freqüência de excitação coincidir com a freqüência natural do sistema, a resposta do sistema será muito grande. Essa condição, conhecida como ressonância, deve ser evitada, para impedir falha do sistema. A vibração produzida por uma máquina rotativa desbalanceada, as oscilações de uma chaminé alta provocadas por emissão de vórtices (redemoinhos) sob vento constante e o movimento vertical de um automóvel sobre a superfície senoidal de uma estrada são exemplos de vibração excitada harmonicamente.

3.2 Equação de movimento

Se uma força $F(t)$ agir sobre um sistema massa-mola viscosamente amortecido, como mostra a Figura 3.1, a equação de movimento pode ser obtida pela segunda lei de Newton:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (3.1)$$

Visto que essa equação é não-homogênea, sua solução geral $x(t)$ é dada pela soma da solução homogênea, $x_h(t)$ com a solução particular, $x_p(t)$. A solução homogênea, que é a solução da equação homogênea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.2)$$

representa a vibração livre do sistema e foi discutida no Capítulo 2. Como vimos na Seção 2.6.2, essa vibração livre desaparece com o tempo sob cada uma das três possíveis condições de amortecimento (subamortecimento, amortecimento crítico e superamortecimento) e sob todas as possíveis condições iniciais. Assim, a certa altura, a solução geral da Equação (3.1) reduz-se à solução particular $x_p(t)$, que representa a vibração em regime permanente. O movimento em regime permanente está presente, contanto que a função forçante esteja presente. As variações das soluções homogênea, particular e geral com o tempo para um caso típico são mostradas na Figura 3.2. Podemos perceber que $x_h(t)$ desaparece e $x(t)$ torna-se $x_p(t)$ após algum tempo (τ na Figura 3.2). A parte do movimento que desaparece devido ao amortecimento (a parte da vibração livre) é denominada *transitória*. A taxa à qual o movimento transitório se degrada depende dos valores dos parâmetros do sistema k , c e m . Neste capítulo, exceto na Seção 3.3, ignoraremos o movimento transitório e derivaremos somente a solução particular da Equação (3.1), a qual representa a resposta em regime permanente sob funções forçantes harmônicas.

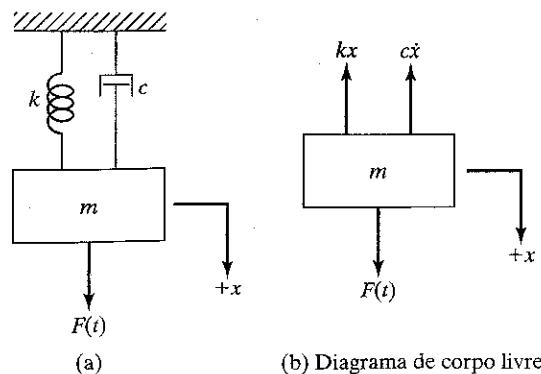


FIGURA 3.1 Um sistema massa-mola amortecedor.

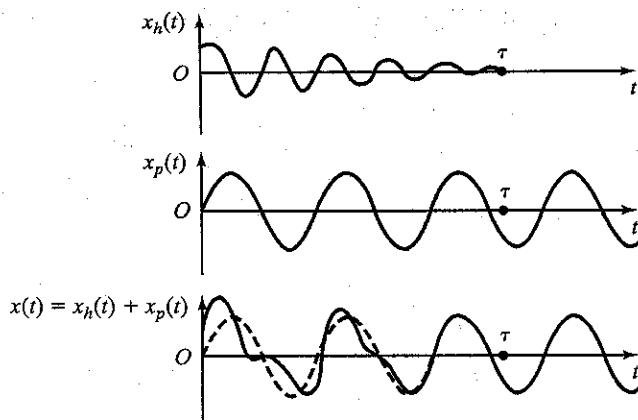


FIGURA 3.2 Soluções homogênea, particular e geral da Equação (3.1) para um caso não amortecido.

3.3 Resposta de um sistema não amortecido à força harmônica

Antes de estudarmos a resposta de um sistema amortecido, consideramos um sistema não amortecido sujeito a uma força harmônica, por simplicidade. Se uma força $F(t) = F_0 \cos \omega t$ agir sobre a massa m de um sistema não amortecido, a equação de movimento, Equação (3.1), reduz-se a

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (3.3)$$

A solução homogênea dessa equação é dada por

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (3.4)$$

onde $\omega_n = (k/m)^{1/2}$ é a freqüência natural do sistema. Como a força excitadora $F(t)$ é harmônica, a solução particular $x_p(t)$ também é harmônica e tem a mesma freqüência ω . Assim, admitimos uma solução na forma

$$x_p(t) = X \cos \omega t \quad (3.5)$$

onde X é uma constante que denota a máxima amplitude de $x_p(t)$. Substituindo a Equação (3.5) na Equação (3.3) e resolvendo para X , obtemos

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.6)$$

onde $\delta_{st} = F_0/k$ denota a deflexão da massa sob uma força F_0 e, às vezes, é denominada *deflexão estática*, porque F_0 é uma força (estática) constante. Assim, a solução total da Equação (3.3) torna-se

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (3.7)$$

Usando as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, constatamos que

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (3.8)$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} x(t) = & \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right) \sin \omega_n t \\ & + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.9)$$

A máxima amplitude X na Equação (3.6) pode ser expressa como

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.10)$$

A quantidade X/δ_{st} representa a razão entre a amplitude dinâmica e a amplitude estática do movimento e é denominada *fator de ampliação, fator de amplificação ou coeficiente de amplitude*. A variação do coeficiente de amplitude, X/δ_{st} , com a razão de freqüências $r = \omega/\omega_n$ (Equação 3.10) é mostrada na Figura 3.3. Por essa figura, podemos constatar que há três tipos de resposta do sistema.

Caso 1. Quando $0 < \omega/\omega_n < 1$, o denominador da Equação (3.10) é positivo, e a resposta é dada pela Equação (3.5) sem alteração. Diz-se que a resposta harmônica do sistema $x_p(t)$ está em fase com a força externa como mostra a Figura 3.4.

Caso 2. Quando $\omega/\omega_n > 1$, o denominador da Equação (3.10) é negativo, e a solução em regime permanente pode ser expressa como

$$x_p(t) = -X \cos \omega t \quad (3.11)$$

onde a amplitude de movimento X é redefinida para ser uma quantidade positiva como

$$X = \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \quad (3.12)$$

As variações de $F(t)$ e $x_p(t)$ com o tempo são mostradas na Figura 3.5. Visto que $x_p(t)$ e $F(t)$ têm sinais opostos, diz-se que a resposta está desfasada de 180° em relação à força externa. Além disso, quando $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$, $X \rightarrow 0$. Assim, a resposta do sistema a uma força harmônica de freqüência muito alta é próxima de zero.

Caso 3. Quando $\omega/\omega_n = 1$, a amplitude X dada pela Equação (3.10) ou Equação (3.12) torna-se infinita. Essa condição, para a qual a freqüência forçante ω é igual à freqüência natural do sistema ω_n , é denominada *ressonância*. Para determinar a resposta para essa condição, reescrevemos a Equação (3.9) como

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \\ & + \delta_{st} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

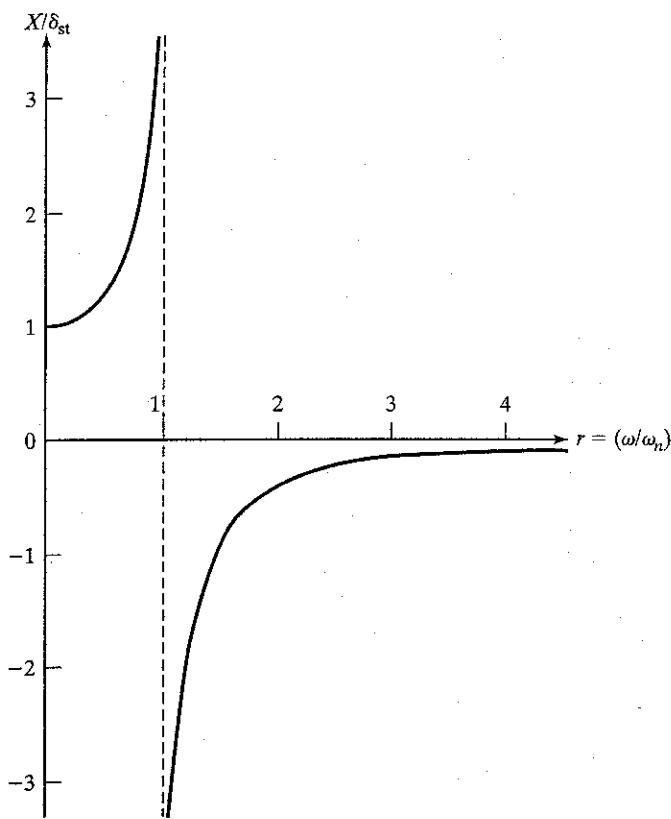
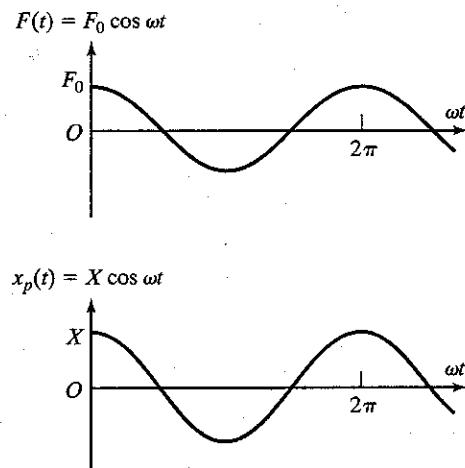
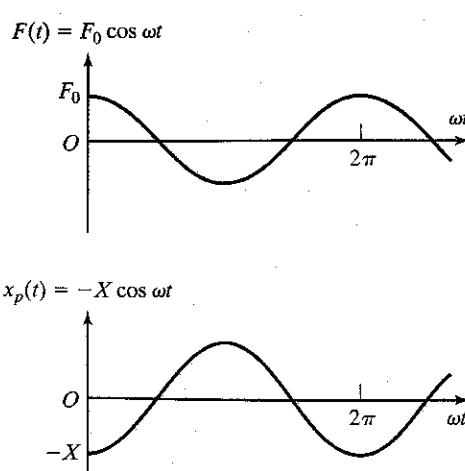


FIGURA 3.3 Fator de amplificação de um sistema não amortecido.

FIGURA 3.4 Resposta harmônica quando $0 < \omega/\omega_n < 1$.FIGURA 3.5 Resposta harmônica quando $\omega/\omega_n > 1$.

Visto que o último termo dessa equação toma uma forma indefinida para $\omega = \omega_n$, aplicamos a regra de L'Hospital [3.1] para avaliar o limite desse termo:

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{\frac{d}{d\omega} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)} \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{t \sin \omega t}{2 \frac{\omega}{\omega_n^2}} \right] = \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assim, a resposta do sistema em ressonância torna-se

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t \quad (3.15)$$

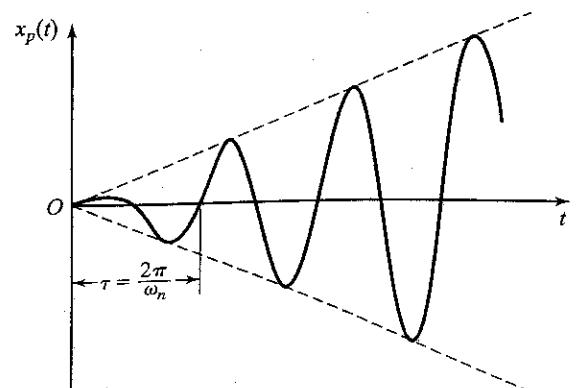
Podemos ver pela Equação (3.15) que, em ressonância, $x(t)$ aumenta indefinidamente. O último termo da Equação (3.15) é mostrado na Figura 3.6, pela qual podemos ver que a amplitude da resposta aumenta linearmente com o tempo.

3.3.1 Resposta total

A resposta total do sistema, Equação (3.7) ou Equação (3.9), também pode ser expressa como

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos (\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \cos \omega t; \\ \text{para } \frac{\omega}{\omega_n} &< 1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos (\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \cos \omega t; \\ \text{para } \frac{\omega}{\omega_n} &> 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

FIGURA 3.6 Resposta quando $\omega/\omega_n = 1$

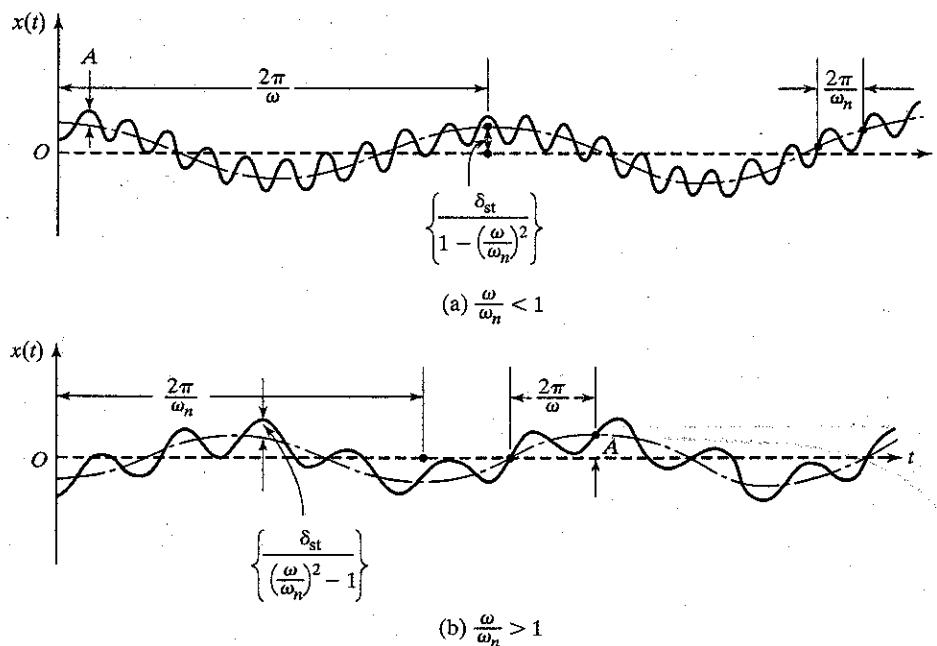


FIGURA 3.7 Resposta total.

onde A e ϕ podem ser determinados como no caso da Equação (2.21). Assim, o movimento completo pode ser expresso como a soma de duas curvas cossenóides de freqüências diferentes. Na Equação (3.16), a freqüência forçante ω é menor que a freqüência natural, e a resposta total é mostrada na Figura 3.7(a). Na Equação (3.17), a freqüência forçante é maior que a freqüência natural, e a resposta total aparece como mostra a Figura 3.7(b).

3.3.2 Fenômeno do batimento

Se a freqüência forçante for próxima, mas não exatamente igual à freqüência natural do sistema, pode ocorrer um fenômeno conhecido como *batimento*. Nesse tipo de vibração, a amplitude aumenta e diminui segundo um padrão regular (ver Seção 1.10.5). O fenômeno do batimento pode ser explicado levando-se em conta a solução dada pela Equação (3.9). Se as condições iniciais forem consideradas como $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, a Equação (3.9) reduz-se a:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(F_0/m)}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \\ &= \frac{(F_0/m)}{\omega_n^2 - \omega^2} \left[2 \sin \frac{\omega + \omega_n}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Suponhamos que a freqüência forçante ω seja ligeiramente menor que a freqüência natural:

$$\omega_n - \omega = 2\varepsilon \quad (3.19)$$

onde ε é uma quantidade pequena positiva. Então, $\omega_n \approx \omega$ e

$$\omega + \omega_n \approx 2\omega \quad (3.20)$$

Multiplicando as equações (3.19) e (3.20), temos

$$\omega_n^2 - \omega^2 = 4\varepsilon\omega \quad (3.21)$$

A utilização das equações (3.19) a (3.21) na Equação (3.18) dá

$$x(t) = \left(\frac{F_0/m}{2\varepsilon\omega} \sin \varepsilon t \right) \sin \omega t \quad (3.22)$$

Já que ε é pequena, a função $\sin \varepsilon t$ varia lentamente; seu período, igual a $2\pi/\varepsilon$, é grande. Assim, podemos considerar que a Equação (3.22) representa vibração com período $2\pi/\varepsilon$ e amplitude variável igual a

$$\left(\frac{F_0/m}{2\varepsilon\omega} \right) \sin \varepsilon t$$

Também podemos observar que curva $\sin \omega t$ passará por vários ciclos, enquanto a onda $\sin \varepsilon t$ passa por apenas um ciclo, como mostra a Figura 3.8. Assim, a amplitude aumenta e diminui continuamente. O tempo entre os pontos de amplitude de zero ou entre os pontos de amplitude máxima é denominado *período de batimento* (τ_b) e é dado por

$$\tau_b = \frac{2\pi}{2\varepsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega} \quad (3.23)$$

e a freqüência de batimento é definida como

$$\omega_b = 2\varepsilon = \omega_n - \omega$$

EXEMPLO 3.1

Placa de suporte de uma bomba

Uma bomba alternativa com 150 lb de peso está montada no meio de uma placa de aço de 0,5 in de espessura, 20 in de largura e 100 in de comprimento, presa por braçadeiras ao longo de duas bordas, como mostra a Figura 3.9. Durante a operação

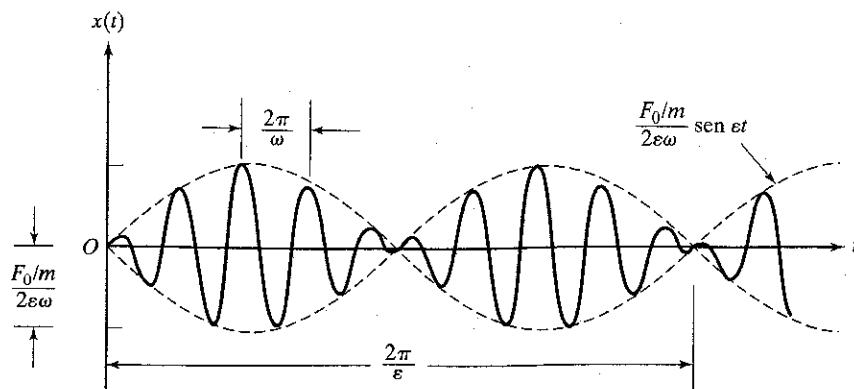


FIGURA 3.8 Fenômeno dos batimentos.

da bomba, a placa é sujeita a uma força harmônica, $F(t) = 50 \cos 62,832 t$ lb. Determine a amplitude de vibração da placa.

Solução: A placa pode ser modelada como uma viga fixa nas duas extremidades com módulo de Young ($E = 30 \times 10^6$ psi), comprimento ($L = 100$ in), e momento de inércia de área ($I = \frac{1}{12} (20)(0,5)^3 = 0,2083$ in 4). A resistência à flexão da viga é dada por

$$k = \frac{192EI}{l^3} = \frac{192(30 \times 10^6)(0,2083)}{(100)^3} = 1.200,0 \text{ lb/in} \quad (\text{E.1})$$

A amplitude da resposta harmônica é dada pela Equação (3.6) com $F_0 = 50$ lb, $m = 150/386,4$ lb.s 2 /in (desprezando-se o peso da placa de aço), $k = 1.200,0$ lb/in e $\omega = 62,832$ rad/s. Assim, a Equação (3.6) dá

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{50}{1.200,0 - (150/386,4)(62,832)^2} = -0,1504 \text{ in} \quad (\text{E.2})$$

O sinal negativo indica que a resposta $x(t)$ da placa está defasada da excitação $F(t)$.

3.4 Resposta de um sistema amortecido à força harmônica

Se a função forçante for dada por $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a equação de movimento torna-se

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (3.24)$$

Espera-se que a solução particular da Equação (3.24) também seja harmônica; admitimos que esteja na forma¹

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi) \quad (3.25)$$

onde X e ϕ são constantes a determinar. X e ϕ denotam a amplitude e o ângulo de fase da resposta, respectivamente. Substituindo a Equação (3.25) na Equação (3.24), chegamos a

$$\begin{aligned} & X[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)] = \\ & = F_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.26)$$

usando as relações trigonométricas

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi$$

$$\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi$$

na Equação (3.26) e igualando os coeficientes de $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ em ambos os lados da equação resultante, obtemos

$$\begin{aligned} X[(k - m\omega^2) \cos \phi + c\omega \sin \phi] &= F_0 \\ X[(k - m\omega^2) \sin \phi - c\omega \cos \phi] &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

A solução de Equação (3.27) dá

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} \quad (3.28)$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (3.29)$$

Inserindo as expressões de X e ϕ das equações (3.28) e (3.29) na Equação (3.25), obtemos a solução particular da Equação (3.24). A Figura 3.10(a) mostra gráficos típicos da função forçante e resposta (em regime permanente). Os vários termos da Equação (3.26) são mostrados sob forma vetorial na Figura 3.10(b). Dividindo o numerador e o denominador da Equação (3.28) por k e fazendo as seguintes substituições

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{freqüência natural não amortecida,}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}; \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n,$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k} = \text{deflexão sob a força estática } F_0,$$

e

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \text{razão de freqüências}$$

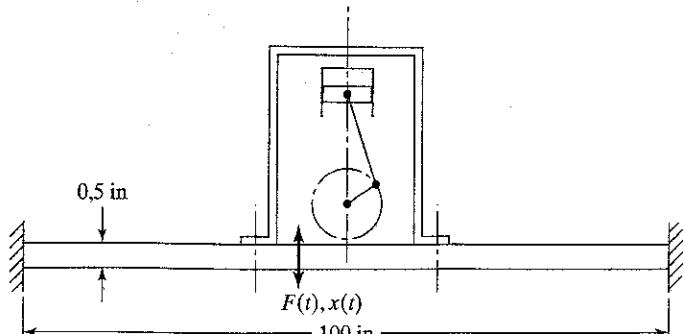


FIGURA 3.9 Placa de suporte de uma bomba desbalanceada.

¹ Alternativamente, podemos supor que $x_p(t)$ esteja na forma $x_p(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, que também envolve duas constantes C_1 e C_2 . Entretanto, o resultado final será o mesmo em ambos os casos.

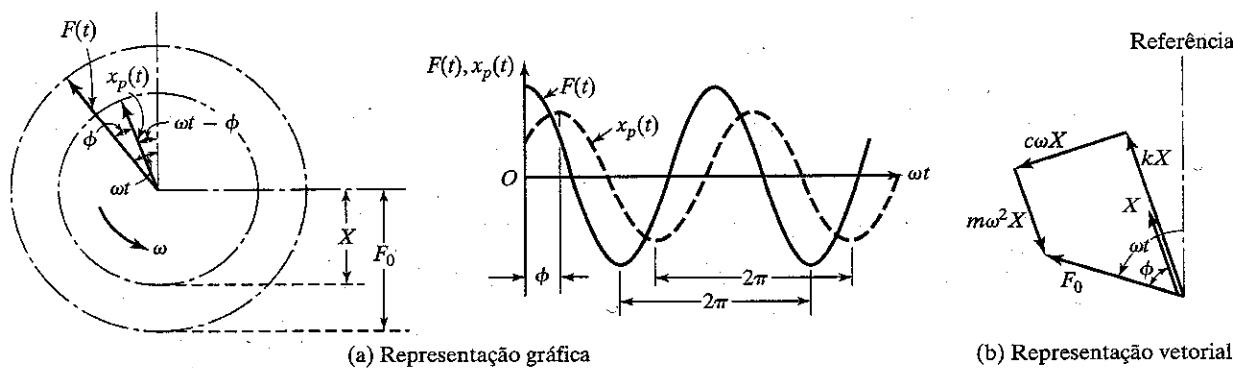


FIGURA 3.10 Representação de função forçante e resposta.

obtemos

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.30)$$

e

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right\} = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \quad (3.31)$$

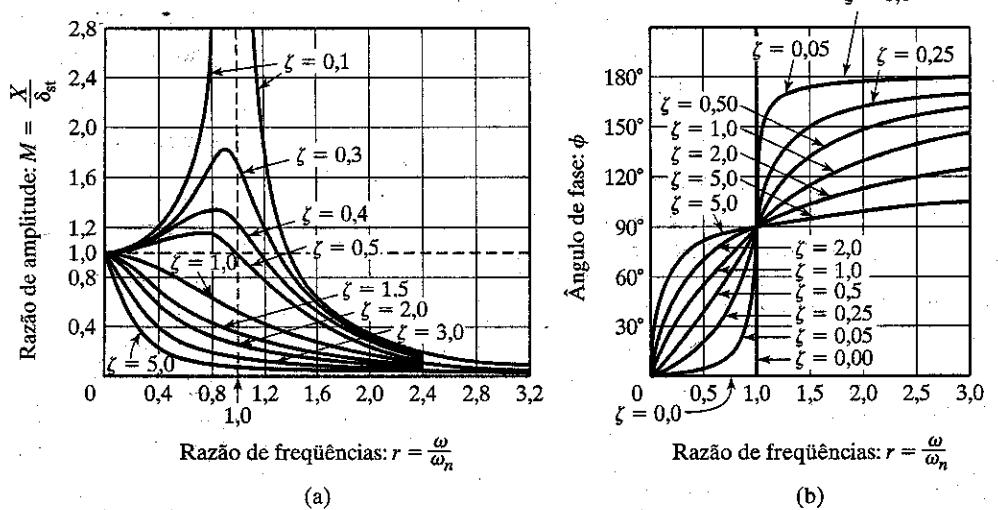
Como dissemos na Seção 3.3, a quantidade $M = X/\delta_{st}$ é denominada *fator de ampliação*, *fator de amplificação* ou *coeficiente de amplitude*. As variações de X/δ_{st} e ϕ com a razão de freqüências r e o fator de amortecimento ζ são mostradas na Figura 3.11.

As seguintes características do fator de amplificação (M) podem ser observadas pela Equação (3.30) e Figura 3.11(a):

- Para um sistema não amortecido ($\zeta = 0$), a Equação (3.30) reduz-se à Equação (3.10) e $M \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 1$.
- Qualquer quantidade de amortecimento ($\zeta > 0$) reduz o fator de amplificação (M) para todos os valores da freqüência forçante.
- Para qualquer valor especificado de r , um valor mais alto de amortecimento reduz o valor de M .
- No caso degenerado de um força constante (quando $r = 0$), o valor de $M = 1$.
- A redução de M na presença de amortecimento é muito significativa na ressonância ou próximo da ressonância.
- A amplitude de vibração forçada torna-se menor com valores crescentes da freqüência forçante (isto é, $M \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$).
- Para $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, o valor máximo de M ocorre quando (ver Problema 3.27)

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \text{ ou } \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (3.32)$$

que podemos observar que é mais baixo que a freqüência natural não amortecida ω_n e a freqüência natural amortecida $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

FIGURA 3.11 Variação de X e ϕ com a razão de freqüências r .

8. O valor máximo de X (quando $r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$) é dado por

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.33)$$

e o valor de X em $\omega = \omega_n$, por

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} \quad (3.34)$$

A Equação (3.33) pode ser usada para a determinação experimental da medida do amortecimento presente no sistema. Se a amplitude máxima da resposta (X)_{max} for medida durante um teste de vibração, o fator de amortecimento do sistema pode ser determinado usando-se a Equação (3.33). Ao contrário, se a quantidade de amortecimento for conhecida, pode-se fazer uma estimativa da máxima amplitude de vibração.

9. Para $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{dM}{dr} = 0$ quando $r = 0$. Para $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, o gráfico de M decresce monotonicamente com valores crescentes de r .

As seguintes características do ângulo de fase podem ser observadas pela Equação (3.31) e Figura 3.11(b):

1. Para um sistema não amortecido ($\zeta = 0$), a Equação (3.31) mostra que o ângulo de fase é 0 para $0 < r < 1$ e 180° para $r > 1$. Isso implica que a excitação e a resposta estão em fase para $0 < r < 1$ e fora de fase para $r > 1$ quando $\zeta = 0$.
2. Para $\zeta > 0$ e $0 < r < 1$, o ângulo de fase é dado por $0 < \phi < 90^\circ$, o que implica que a resposta se atrasa em relação à excitação.
3. Para $\zeta > 0$ e $r > 1$, o ângulo de fase é dado por $90^\circ < \phi < 180^\circ$, o que implica que a resposta se adianta em relação à excitação.
4. Para $\zeta > 0$ e $r = 1$, o ângulo de fase é dado $\phi = 90^\circ$, o que implica que a diferença de fase entre a excitação e a resposta é 90° .
5. Para $\zeta > 0$ e valores grandes de r , o ângulo de fase aproxima-se de 180° , o que implica que a resposta e a excitação estão fora de fase.

3.4.1 Resposta total

A solução completa é dada por $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ onde $x_h(t)$ é dada pela Equação (2.70). Assim, para um sistema subamortecido, temos

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) + X \cos(\omega t - \phi) \quad (3.35)$$

onde

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (3.36)$$

X e ϕ são dados pelas equações (3.30) e (3.31), respectivamente, e X_0 e ϕ_0 podem ser determinados pelas condições iniciais. Para as condições iniciais, $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, a Equação (3.35) dá

$$\begin{aligned} x_0 &= X_0 \cos \phi_0 + X \cos \phi \\ \dot{x}_0 &= -\zeta \omega_n X_0 \cos \phi_0 + \omega_d X_0 \sin \phi_0 \\ &\quad + \omega X \sin \phi \end{aligned} \quad (3.37)$$

A solução de Equação (3.37) dá X_0 e ϕ_0 , como ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3.2

Resposta total de um sistema

Determine a resposta total de um sistema com um grau de liberdade com $m = 10$ kg, $c = 20$ N.s/m, $k = 4.000$ N/m, $x_0 = 0,01$ m, $\dot{x}_0 = 0$ sob as seguintes condições:

- Uma força externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ age sobre o sistema com $F_0 = 100$ N, $\omega = 10$ rad/s.
- Vibração livre com $F(t) = 0$.

Solução:

- Pelos dados fornecidos, obtemos

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.000}{10}} = 20 \text{ rad/s}$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{100}{4.000} = 0,025 \text{ m}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{20}{2\sqrt{(4.000)(10)}} = 0,05$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n = \sqrt{1 - (0,05)^2}(20) = 19,974984 \text{ rad/s}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{10}{20} = 0,5$$

$$X = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$= \frac{0,025}{[(1 - 0,05^2)^2 + (2 \cdot 0,5 \cdot 0,5)^2]^{1/2}}$$

$$= 0,03326 \text{ m} \quad (E.1)$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) =$$

$$= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2 \cdot 0,05 \cdot 0,5}{1 - 0,5^2} \right) = 3,814075^\circ \quad (E.2)$$

Usando as condições iniciais $x_0 = 0,01$ e $\dot{x}_0 = 0$, a Equação (3.37) dá

$$0,01 = X_0 \cos \phi_0 + (0,03326)(0,997785)$$

ou

$$X_0 \cos \phi_0 = -0,023186 \quad (E.3)$$

$$0 = -(0,05)(20) X_0 \cos \phi_0 + X_0 (19,974984) \sin \phi_0$$

$$+ (0,03326)(10) \sin (3,814075^\circ) \quad (E.4)$$

Substituindo o valor de $X_0 \cos \phi_0$ da Equação (E.3) na Equação (E.4), obtemos

$$X_0 \sin \phi_0 = -0,002268 \quad (\text{E.5})$$

A solução das equações (E.3) e (E.5) resulta em

$$X_0 = [(X_0 \cos \phi_0)^2 + (X_0 \sin \phi_0)^2]^{1/2} = 0,023297 \quad (\text{E.6})$$

e

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{X_0 \sin \phi_0}{X_0 \cos \phi_0} = 0,0978176$$

ou

$$\phi_0 = 5,586765^\circ \quad (\text{E.7})$$

b. Para vibração livre, a resposta total é dada por

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) \quad (\text{E.8})$$

Usando as condições iniciais $x(0) = x_0 = 0,01$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0$, X_0 e ϕ_0 da Equação (E.8), podem ser determinados como (ver equações 2.73 e 2.75):

$$\begin{aligned} X_0 &= \left[x_0^2 + \left(\frac{\zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[0,01^2 + \left(\frac{0,05 \cdot 20 \cdot 0,01}{19,974984} \right)^2 \right]^{1/2} = 0,010012 \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d x_0} \right) = \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{0,05 \cdot 20}{19,974984} \right) = -2,865984^\circ \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Observe que as constantes X_0 e ϕ_0 nos casos (a) e (b) são muito diferentes.

3.4.2 Fator de qualidade e largura de banda

Para valores pequenos de amortecimento ($\zeta < 0,05$), podemos tomar

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}} \right)_{\max} \approx \left(\frac{X}{\delta_{st}} \right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} = Q \quad (\text{3.38})$$

O valor do coeficiente de amplitude em ressonância também é denominado *fator Q* ou *fator de qualidade* do sistema, por analogia com algumas aplicações da engenharia elétrica, como o circuito de sintonia de um rádio, no qual o interesse está em uma amplitude em ressonância que seja a maior possível [3.2]. Os pontos R_1 e R_2 onde o fator de amplificação cai para $Q/\sqrt{2}$ são denominados *pontos de meia-potência*, porque a potência absorvida (ΔW) pelo amortecedor (ou pelo resistor em um circuito elétrico) respondendo harmonicamente a dada freqüência é proporcional ao quadrado da amplitude (ver Equação 2.94):

$$\Delta W = \pi c \omega X^2 \quad (\text{3.39})$$

A diferença entre as freqüências associadas com os pontos de meia-potência R_1 e R_2 do sistema é denominada

largura de banda do sistema (Figura 3.12). Para determinar os valores de R_1 e R_2 , fazemos $X/\delta_{st} = X/\delta_{st} = Q/\sqrt{2}$ na Equação (3.30), de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\zeta}$$

ou

$$r^4 - r^2(2 - 4\zeta^2) + (1 - 8\zeta^2) = 0 \quad (3.40)$$

A solução de Equação (3.40) dá

$$r_1^2 = 1 - 2\zeta^2 - 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2},$$

$$r_2^2 = 1 - 2\zeta^2 + 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} \quad (3.41)$$

Para valores pequenos de ζ , a Equação (3.41) pode ser aproximada como

$$r_1^2 = R_1^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 \approx 1 - 2\zeta,$$

$$r_2^2 = R_2^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_n} \right)^2 \approx 1 + 2\zeta \quad (3.42)$$

onde $\omega_1 = \omega|_{R1}$ e $\omega_2 = \omega|_{R2}$. Pela Equação (3.42),

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1)$$

$$= (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 \approx 4\zeta\omega_n^2 \quad (3.43)$$

Usando a relação

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n \quad (3.44)$$

na Equação (3.43), constatamos que a largura de banda $\Delta\omega$ é dada por

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\zeta\omega_n \quad (3.45)$$

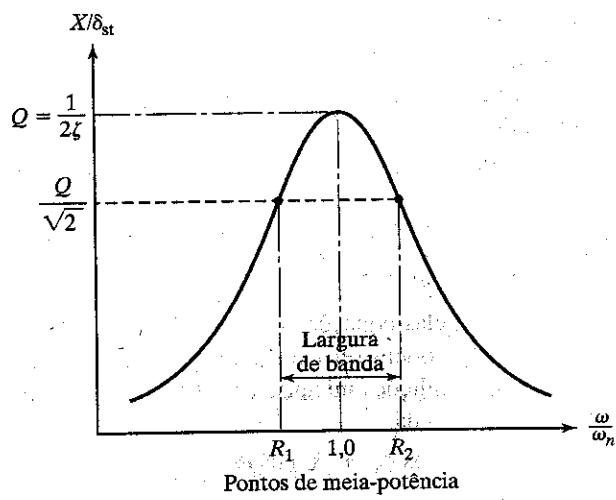


FIGURA 3.12 Curva de resposta harmônica mostrando pontos de meia-potência e largura de banda.

Combinando as equações (3.38) e (3.45), obtemos

$$Q \approx \frac{1}{2\zeta} \approx \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1} \quad (3.46)$$

Podemos ver que o fator de qualidade Q pode ser usado para estimar o amortecimento viscoso equivalente em um sistema mecânico.²

3.5 Resposta de um sistema amortecido a $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

Vamos representar a função forçante harmônica em forma complexa como $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, de modo que a equação de movimento torna-se

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.47)$$

Visto que a excitação real é dada somente pela parte real de $F(t)$, a resposta também será dada somente pela parte real de $x(t)$, onde $x(t)$ é uma quantidade complexa que satisfaz a equação diferencial (3.47). Na Equação (3.47), F_0 é, em geral, um número complexo. Admitindo a solução particular $x_p(t)$

$$x_p(t) = X e^{i\omega t} \quad (3.48)$$

obtemos, por substituição da Equação (3.48) na Equação (3.47),³

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + i\omega} \quad (3.49)$$

Multiplicando o numerador e o denominador do lado direito da Equação (3.49) por $[(k - m\omega^2) - i\omega]$ e separando as partes real e imaginária, obtemos

$$X = F_0 \left[\frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2} - i \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2} \right] \quad (3.50)$$

Usando a relação $x + iy = Ae^{i\phi}$, onde $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\tan \phi = y/x$, a Equação (3.50) pode ser expressa como

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + \omega^2]^{1/2}} e^{-i\phi} \quad (3.51)$$

onde

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (3.52)$$

Assim, a solução em regime permanente, Equação (3.48), torna-se

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad (3.53)$$

² A determinação dos parâmetros do sistema (m , c e k) com base em pontos de meia-potência e outras características de resposta do sistema é considerada na Seção 10.8.

³ A Equação (3.49) pode ser escrita como $Z(i\omega)X = F_0$, onde $Z(i\omega) = -m\omega^2 + i\omega c + k$ é denominada a *impedância mecânica* do sistema [3.8].

Resposta em freqüência. A Equação (3.49) pode ser reescrita na forma

$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} = H(i\omega) \quad (3.54)$$

onde $H(i\omega)$ é conhecida como a *resposta em freqüência complexa* do sistema. O valor absoluto de $H(i\omega)$ dado por

$$|H(i\omega)| = \left| \frac{kX}{F_0} \right| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \quad (3.55)$$

denota o fator de amplificação definido na Equação (3.30). Lembrando que $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, podemos mostrar que as equações (3.54) e (3.55) são relacionadas:

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{-i\phi} \quad (3.56)$$

onde ϕ é dado pela Equação (3.52), que também pode ser expressa como

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \quad (3.57)$$

Assim, a Equação (3.53) pode ser expressa como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \quad (3.58)$$

Podemos ver que a função resposta em freqüência complexa, $H(i\omega)$, contém a magnitude e a fase da resposta em regime permanente. A utilização dessa função na determinação experimental dos parâmetros do sistema (m , c e k) será discutida na Seção 10.8. Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a solução em regime permanente correspondente é dada pela parte real da Equação (3.53):

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \cos(\omega t - \phi) \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{F_0}{k} H(i\omega) e^{i\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

que podemos ver que é igual à Equação (3.25). De maneira semelhante, se $F(t) = F_0 \sin \omega t$, a solução em regime permanente correspondente é dada pela parte imaginária da Equação (3.53):

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \sin(\omega t - \phi) \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Representação vetorial complexa do movimento harmônico. A excitação harmônica e a resposta do sistema amortecido a essa excitação podem ser representadas graficamente no plano

complexo, e pode-se dar uma interessante interpretação ao diagrama resultante. Em primeiro lugar, diferenciamos a Equação (3.58) em relação ao tempo e obtemos

$$\begin{aligned} \text{Velocidade } \dot{x}_p(t) &= i\omega \frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t) \\ \text{Aceleração } \ddot{x}_p(t) &= (i\omega)^2 \frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \\ &= -\omega^2 x_p(t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Já que podemos expressar i como

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (3.62)$$

podemos concluir que a velocidade está à frente do deslocamento pelo ângulo de fase $\pi/2$ e que é multiplicada por ω . De maneira semelhante, -1 pode ser escrito como

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi} \quad (3.63)$$

Por consequência, a aceleração está à frente do deslocamento pelo ângulo de fase π e é multiplicada por ω^2 .

Assim, os vários termos da equação de movimento (3.47) podem ser representados no plano complexo, como mostra a Figura 3.13. A interpretação dessa figura é que a soma dos vetores complexos $m\ddot{x}(t)$, $c\dot{x}(t)$ e $kx(t)$ equilibra $F(t)$, que é exatamente o que é preciso para satisfazer a Equação (3.47). Deve-se notar também que o diagrama inteiro gira com velocidade angular ω no plano complexo. Se quisermos considerar apenas a parte real da resposta, então o diagrama inteiro deve ser projetado no eixo real. De maneira semelhante, se quisermos considerar apenas a parte imaginária da resposta, então o diagrama deve ser projetado no eixo imaginário. Note, na Figura 3.13, que a força $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ é representada como um vetor localizado a um ângulo ωt com o eixo real. Isso implica que F_0 é real. Se F_0 também for complexa, então o vetor força $F(t)$ estará localizado a um ângulo de $(\omega + \Psi)$, onde Ψ é algum ângulo de fase introduzido por F_0 . Nesse caso, todos os outros vetores, a saber, $m\ddot{x}$, $c\dot{x}$ e kx serão deslocados pelo mesmo ângulo Ψ . Isso equivale a multiplicar ambos os lados da Equação (3.47) por $e^{i\Psi}$.

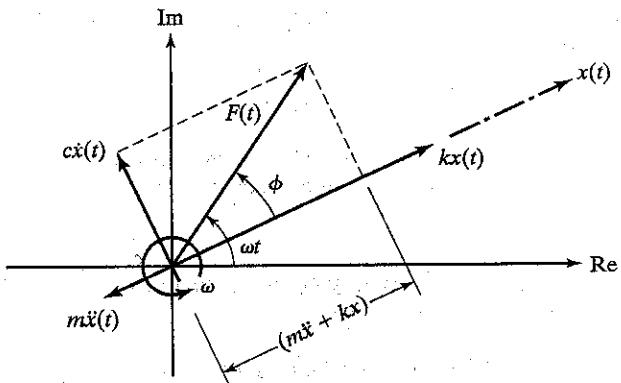


FIGURA 3.13 Representação da Equação (3.47) em um plano complexo.

Se $y(t) = Y \operatorname{sen} \omega t$, a Equação (3.64) torna-se

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= ky + cy = kY \operatorname{sen} \omega t + c\omega Y \operatorname{cos} \omega t \\ &= A \operatorname{sen} (\omega t - \alpha) \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde $A = Y \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$ e $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left[-\frac{c\omega}{k} \right]$. Isso mostra que fornecer excitação à base equivale a aplicar uma força harmônica de magnitude A à massa. Usando a solução indicada pela Equação (3.60), a resposta em regime permanente da massa, $x_p(t)$, pode ser expressa como

$$x_p(t) = \frac{Y \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \operatorname{sen} (\omega t - \phi_1 - \alpha) \quad (3.66)$$

onde

$$\phi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right)$$

Usando identidades trigonométricas, a Equação (3.66) pode ser reescrita de uma forma mais conveniente como

$$x_p(t) = X \operatorname{sen} (\omega t - \phi) \quad (3.67)$$

onde X e ϕ são dados por

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \left[\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

e

$$\begin{aligned} \phi &= \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{mc\omega^3}{k(k - m\omega^2) + (c\omega)^2} \right] = \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2} \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

A razão entre a amplitude da resposta $x_p(t)$ e a do movimento da base movimento $y(t)$, $\frac{X}{Y}$, é denominada *transmissibilidade de deslocamento*. As variações de $\frac{X}{Y} = T_d$ e ϕ , dadas pelas equações (3.68) e (3.69), são mostradas nas figuras 3.15(a) e (b), respectivamente, para diferentes valores de r e ζ .

3.6 Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

Às vezes, a base ou o suporte de um sistema massamola-amortecedor sofre movimento harmônico, como mostra a Figura 3.14(a). Seja $y(t)$ o deslocamento da base e $x(t)$ o deslocamento da massa em relação à sua posição de equilíbrio estático no tempo t . Então, a elongação líquida da mola é $x - y$ e a velocidade relativa entre as duas extremidades do amortecedor é $\dot{x} - \dot{y}$. Pelo diagrama de corpo livre mostrado na Figura 3.14(b), obtemos a equação de movimento:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (3.64)$$

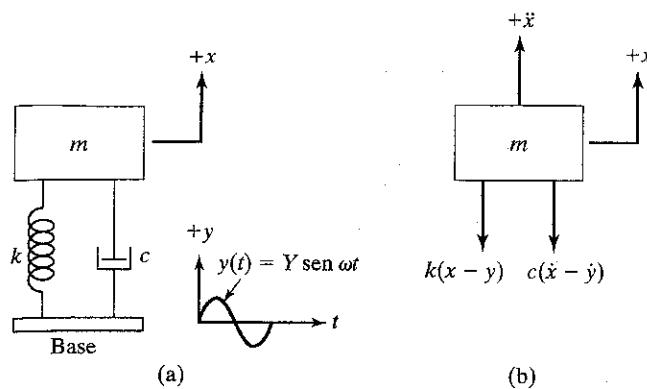


FIGURA 3.14 Excitação de base.

Observe que, se a excitação harmônica de base for expressa em forma complexa como $y(t) = \text{Re}(Ye^{i\omega t})$, a resposta do sistema pode ser expressa, usando a análise da Seção 3.5, como

$$x_p(t) = \text{Re} \left\{ \left(\frac{1 + i2\zeta r}{1 - r^2 + i2\zeta r} \right) Ye^{i\omega t} \right\} \quad (3.70)$$

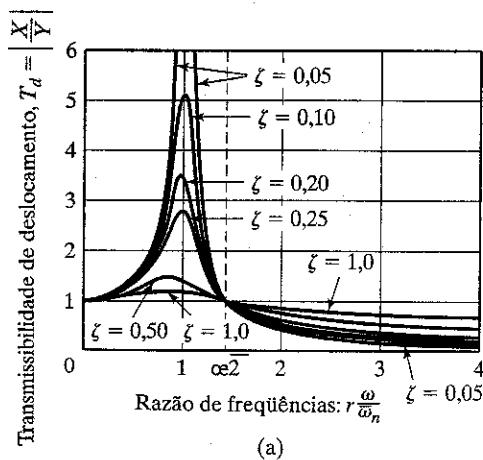
e a transmissibilidade de deslocamento, como

$$\frac{X}{Y} = T_d = [1 + (2\zeta r)^2]^{1/2} |H(i\omega)| \quad (3.71)$$

onde $|H(i\omega)|$ é dada pela Equação (3.55).

Os seguintes aspectos da *transmissibilidade de deslocamento*, $T_d = \frac{X}{Y}$, podem ser observados na Figura 3.15(a):

- O valor de T_d é unitário em $r = 0$ e próximo à unidade para pequenos valores de r .
- Para um sistema não amortecido ($\zeta = 0$), $T_d \rightarrow \infty$ em ressonância ($r = 1$).
- O valor de T_d é menor que a unidade ($T_d < 1$) para valores de $r > \sqrt{2}$ (para qualquer quantidade de amortecimento ζ).
- O valor de $T_d = 1$ para todos os valores de ζ em $r = \sqrt{2}$.

FIGURA 3.15 Variações de T_d e ϕ com r .

- Para $r < \sqrt{2}$, fatores de amortecimento menores levam a valores maiores de T_d . Por outro lado, para $r > \sqrt{2}$, valores menores do fator de amortecimento levam a valores menores de T_d .

- A transmissibilidade de deslocamento, T_d , atinge um máximo para $0 < \zeta < 1$ à razão de freqüências $r = r_m < 1$ dada por (ver Problema 3.49):

$$r_m = \frac{1}{2\zeta} \left[\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1 \right]^{1/2}$$

3.6.1 Força transmitida

Na Figura 3.14, uma força, F , é transmitida para a base ou suporte devido às reações da mola e do amortecedor. Essa força pode ser determinada como

$$F = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x} \quad (3.72)$$

Pela Equação (3.67), a Equação (3.72) pode ser escrita como

$$F = m\omega^2 X \text{ sen}(\omega t - \phi) = F_T \text{ sen}(\omega t - \phi) \quad (3.73)$$

onde F_T é a amplitude ou valor máximo da força transmitida à base dada por

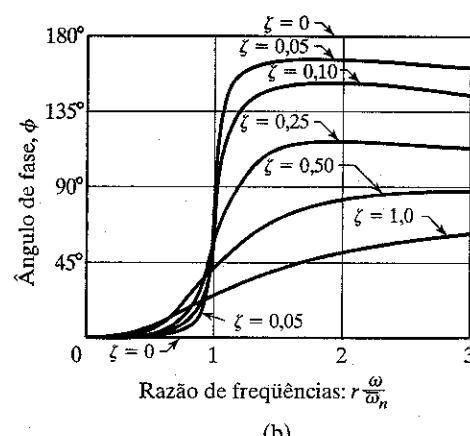
$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (3.74)$$

A razão (F_T/kY) é conhecida como *transmissibilidade de força*.⁴ Observe que a força transmitida está em fase com o movimento da massa $x(t)$. A variação da força transmitida à base com a razão de freqüências r é mostrada na Figura 3.16 para diferentes valores de ζ .

3.6.2 Movimento relativo

Se $z = x - y$ denotar o movimento da massa em relação à base, a equação de movimento, Equação (3.64), pode ser reescrita como

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \text{ sen} \omega t \quad (3.75)$$



⁴ A utilização do conceito de transmissibilidade no projeto de sistemas de isolamento da vibração será discutida no Capítulo 9.

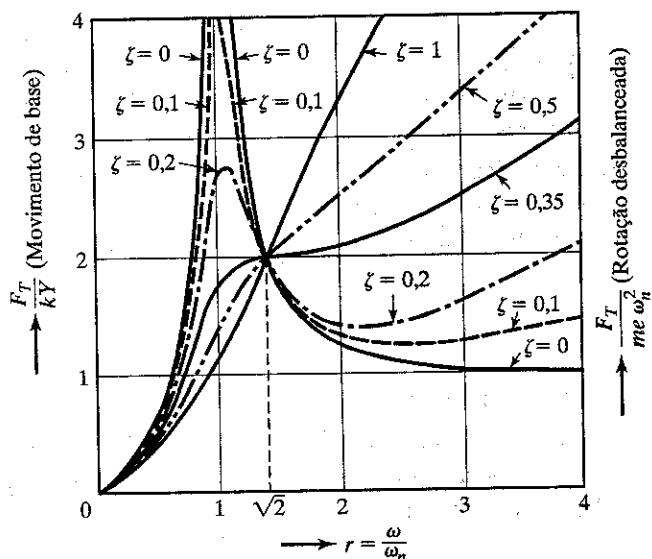


FIGURA 3.16 Transmissibilidade de força.

A solução em regime permanente da Equação (3.75) é dada por

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{m\omega^2 Y \operatorname{sen}(\omega t - \phi_1)}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \\ &= Z \operatorname{sen}(\omega t - \phi_1) \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde Z , a amplitude de $z(t)$, pode ser expressa como

$$\begin{aligned} Z &= \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \\ &= Y \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \end{aligned} \quad (3.77)$$

e ϕ_1 por

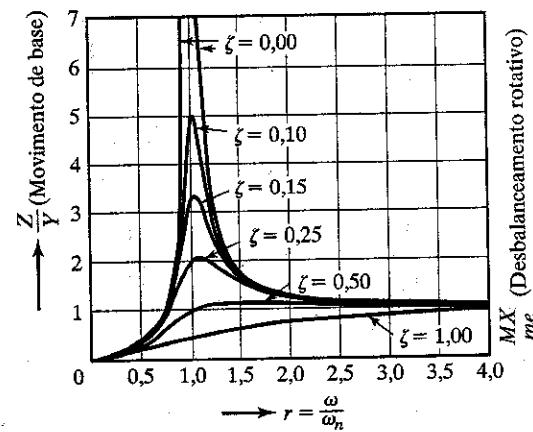
$$\phi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right)$$

A razão Z/Y é mostrada em gráfico na Figura 3.17. A variação de ϕ_1 é a mesma que a de ϕ mostrada na Figura 3.11(b).

EXEMPLO 3.3

Veículo em movimento em uma estrada irregular

A Figura 3.18 mostra um modelo simples de um veículo automotor que pode vibrar no sentido vertical quando percorre uma estrada irregular. O veículo tem 1.200 kg de massa. O sistema de suspensão tem constante elástica de 400 kN/m e fator de amortecimento de $\zeta = 0,5$. Se a velocidade do veículo for 20 km/h, determine a amplitude de deslocamento do veículo. O leito da estrada apresenta variação senoidal com uma amplitude de $Y = 0,05$ m e comprimento de onda de 6 m.

FIGURA 3.17 Variação de (Z/Y) ou (MX/m) com a razão de freqüências $r = (\omega/\omega_n)$.

Solução: A freqüência ω de excitação de base pode ser determinada dividindo a velocidade do veículo v km/h pelo comprimento de um ciclo de irregularidade da estrada:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \left(\frac{v \times 1.000}{3.600} \right) \frac{1}{6} = 0,290889v \text{ rad/s}$$

Para $v = 20$ km/h, $\omega = 5,81778$ rad/s. A freqüência natural do veículo é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400 \times 10^3}{1.200}} = 18,2574 \text{ rad/s}$$

e, por consequência, a razão de freqüências r é

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{5,81778}{18,2574} = 0,318653$$

O coeficiente de amplitude pode ser determinado pela Equação (3.68):

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{1 + (2 \times 0,5 \times 0,318653)^2}{(1 - 0,318653)^2 + (2 \times 0,5 \times 0,318653)^2} \right\}^{1/2} \\ &= 1,469237 \end{aligned}$$

Assim, a amplitude de deslocamento do veículo é dada por

$$X = 1,469237 Y = 1,469237 (0,05) = 0,073462 \text{ m}$$

Isso indica que um solavanco de 5 cm na estrada é transmitido como um solavanco de 7,3 cm ao chassi e aos passageiros do carro. Desse modo, os passageiros sentem um movimento amplificado no caso presente (ver Problema 3.79 para outras situações).

EXEMPLO 3.4

Máquina sobre fundação resiliente

Uma máquina pesada, com 3.000 N de peso, está apoiada sobre uma fundação resiliente. A deflexão estática da fundação

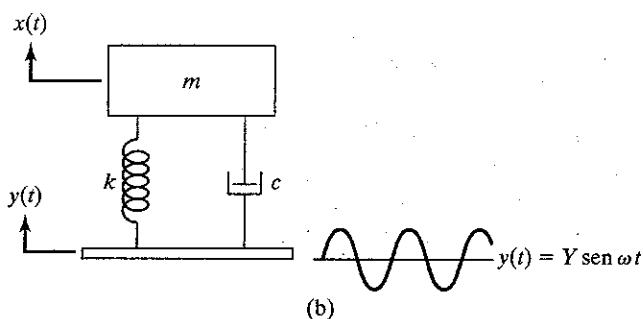
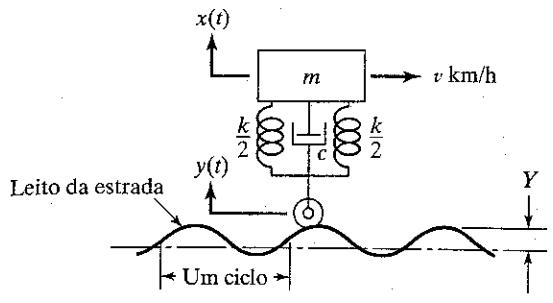


FIGURA 3.18 Veículo em movimento em uma estrada irregular.

devido ao peso da máquina foi determinada como 7,5 cm. Observa-se que a máquina vibra com uma amplitude de 1 cm quando a base da fundação é sujeita a oscilação harmônica na freqüência natural não amortecida do sistema com uma amplitude de 0,25 cm. Determine (a) a constante de amortecimento da fundação, (b) a amplitude da força dinâmica na base e (c) a amplitude do deslocamento da máquina em relação à base.

Solução

- a. A rigidez da fundação pode ser determinada por sua deflexão estática: $k = \text{peso da máquina}/\delta_{st} = 3.000/0,075 = 40.000 \text{ N/m}$

Em ressonância ($\omega = \omega_n$ ou $r = 1$), a Equação (3.68) dá

$$\frac{X}{Y} = \frac{0,010}{0,0025} = 4 = \left[\frac{1 + (2\xi)^2}{(2\xi)^2} \right]^{1/2} \quad (\text{E.1})$$

A solução da Equação (E.1) dá $\xi = 0,1291$. A constante de amortecimento é dada por

$$\begin{aligned} c = \xi \cdot c_c &= \xi 2\sqrt{km} = 0,1291 \times 2 \\ &\times \sqrt{40.000 \times (3.000/9,81)} \\ &= 903,0512 \text{ N.s.m} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

- b. A amplitude da força dinâmica na base em $r = 1$ pode ser determinada pela Equação (3.74):

$$\begin{aligned} F_T &= Yk \left[\frac{1 + 4\xi^2}{4\xi^2} \right]^{1/2} \\ &= kX = 40.000 \times 0,01 = 400 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

- c. A amplitude do deslocamento relativo da máquina em $r = 1$ pode ser obtida pela Equação (3.77):

$$Z = \frac{Y}{2\xi} = \frac{0,0025}{2 \times 0,1291} = 0,00968 \text{ m} \quad (\text{E.4})$$

Pode-se perceber que $X = 0,01 \text{ m}$, $Y = 0,0025 \text{ m}$ e $Z = 0,00968 \text{ m}$; portanto, $Z \neq X - Y$. Isso se deve às diferenças de fase entre x , y e z .

3.7 Resposta de um sistema amortecido ao desbalanceamento rotativo

O desbalanceamento de máquinas rotativas é uma das principais causas de vibração. Um modelo simplificado de tal máquina é mostrado na Figura 3.19. A massa total da máquina é M , e há duas massas excêntricas $m/2$ que giram em sentidos opostos com uma velocidade angular constante ω . A força centrífuga $(m\omega^2)/2$ devida a cada massa causará excitação da massa M . Consideraremos duas massas iguais $m/2$ girando em sentidos opostos para que as componentes horizontais de excitação das duas massas cancelem-se mutuamente. Todavia, as componentes verticais da excitação somam-se e agem ao longo do eixo de simetria $A - A$ na Figura 3.19. Se a posição angular das massas for medida em relação a uma posição horizontal, a componente vertical total da excitação é sempre dada por $F(t) = m\omega^2 \sin \omega t$. A equação de movimento pode ser derivada pelo procedimento usual:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 \sin \omega t \quad (3.78)$$

A solução dessa equação será idêntica à Equação (3.60) se substituirmos m e F_0 por M por $m\omega^2$ respectivamente. Essa solução também pode ser expressa como

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi)$$

$$= \text{Im} \left[\frac{me}{M} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \quad (3.79)$$

onde $\omega_n = \sqrt{k/M}$ e X e ϕ denotam a amplitude e o ângulo de fase de vibração dados por

$$X = \frac{m\omega^2}{[(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} = \frac{me}{M} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(i\omega)| \quad (3.80)$$

e

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - M\omega^2} \right) \quad (3.81)$$

Definindo $\zeta = c/c_c$ e $c_c = 2M\omega_n$, as equações (3.80) e (3.81) podem ser reescritas como

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2]^{1/2}} = r^2 |H(i\omega)| \quad (3.82)$$

e

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right) \quad (3.83)$$

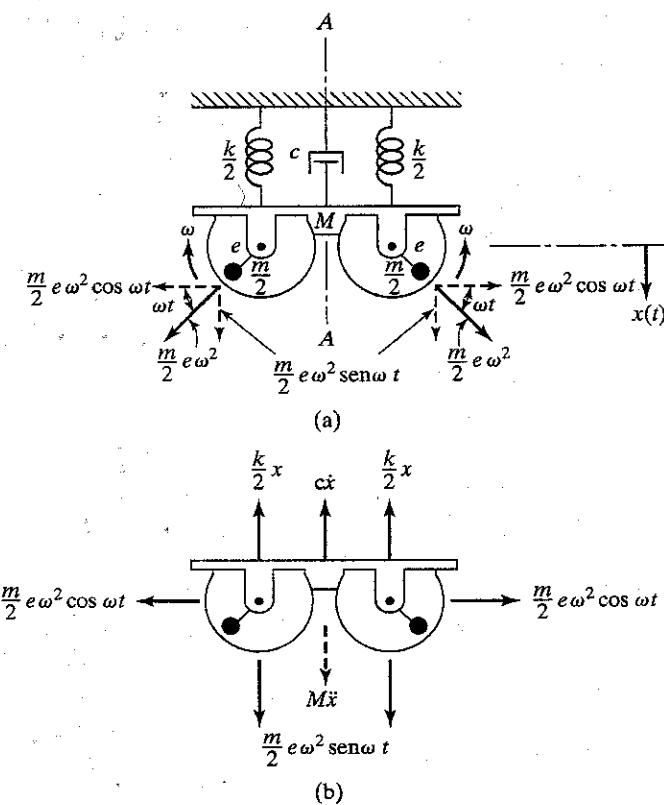


FIGURA 3.19 Massas desbalanceadas em rotação.

A variação de MX/me com r para valores diferentes de ζ é mostrada na Figura 3.17. Por outro lado, o gráfico de ϕ em relação a r permanece como na Figura 3.11(b). As seguintes observações podem ser feitas pelo exame da Equação (3.82) e da Figura 3.17:

1. Todas as curvas começam em amplitude zero. A amplitude próxima à ressonância ($\omega = \omega_n$) é notavelmente afetada por amortecimento. Assim, se a máquina tiver de funcionar próxima à ressonância, será necessário providenciar amortecimento com a finalidade expressa de evitar amplitudes perigosas.
2. As velocidades muito altas (ω grande), MX/me é quase igual à unidade, e o efeito do amortecimento é desprezível.
3. Para $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, o máximo de $\frac{MX}{me}$ ocorre quando

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{MX}{me} \right) = 0 \quad (3.84)$$

A solução da Equação (3.84) dá

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} > 1$$

com o valor máximo correspondente de $\frac{MX}{me}$ dado por

$$\left(\frac{MX}{me} \right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Assim, os picos ocorrem à direita do valor de ressonância de $r = 1$.

4. Para $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\left[\frac{MX}{me} \right]$ não atinge um máximo. Seu valor cresce de 0 em $r = 0$ a 1 em $r \rightarrow \infty$.

EXEMPLO 3.5

Turbina hidráulica Francis

O diagrama esquemático de uma turbina hidráulica Francis é mostrado na Figura 3.20, no qual a água escoa de A , passa pelas pás B e desce até a pista de descarga C . O rotor tem uma massa de 250 kg e um desbalanceamento (me) de 5 kg.mm. A folga radial entre o rotor e o estator é 5 mm. A turbina funciona na faixa de velocidade de 600 a 6.000 rpm. Podemos admitir que o eixo de aço suporta o rotor. Está fixado nos mancais. Determine o diâmetro do eixo de modo que o rotor fique sempre afastado do estator em todas as velocidades de operação da turbina. Suponha que o amortecimento seja desprezível.

Solução: A amplitude máxima do eixo (rotor) devido ao desbalanceamento rotativo pode ser obtida pela Equação (3.80), fazendo $c = 0$, como

$$X = \frac{me\omega^2}{(k - M\omega^2)} = \frac{me\omega^2}{k(1 - r^2)} \quad (E.1)$$

onde $me = 5$ kg.mm, $M = 250$ kg, e o valor-limite de $X = 5$ mm. O valor de ω está na faixa de

$$600 \text{ rpm} = 600 \times \frac{2\pi}{60} = 20\pi \text{ rad/s}$$

a

$$6.000 \text{ rpm} = 6.000 \times \frac{2\pi}{60} = 200\pi \text{ rad/s}$$

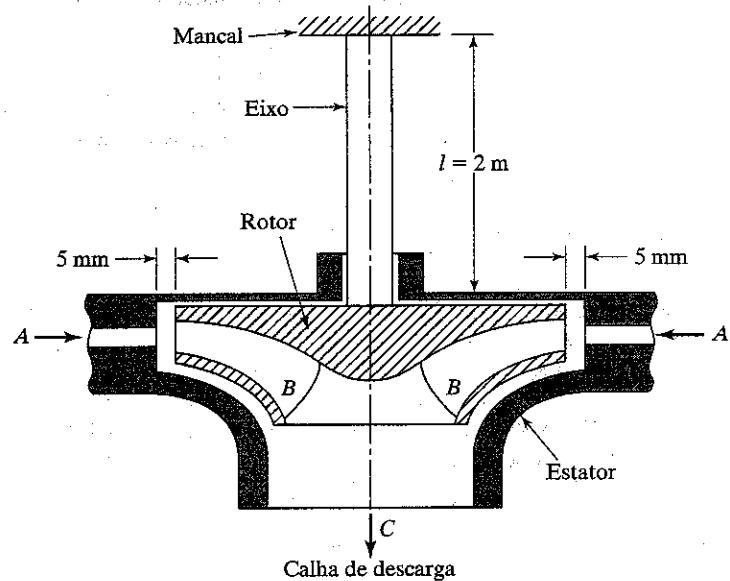


FIGURA 3.20 Turbina hidráulica Francis.

enquanto a freqüência natural do sistema é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{k}{250}} = 0,625\sqrt{k} \text{ rad/s} \quad (\text{E.2})$$

se k estiver em N/m. Para $\omega = 20\pi$ rad/s, a Equação (E.1) dá

$$0,005 = \frac{(5,0 \times 10^{-3}) \times (20\pi)^2}{k \left[1 - \frac{(20\pi)^2}{0,004 k} \right]} = \frac{2\pi^2}{k - 10^5 \pi^2} \quad (\text{E.3})$$

$$k = 10,04 \times 10^4 \pi^2 \text{ N/m}$$

Para $\omega = 200\pi$ rad/s, a Equação (E.1) dá

$$0,005 = \frac{(5,0 \times 10^{-3}) \times (200\pi)^2}{k \left[1 - \frac{(200\pi)^2}{0,004 k} \right]} = \frac{200\pi^2}{k - 10^7 \pi^2} \quad (\text{E.4})$$

$$k = 10,04 \times 10^6 \pi^2 \text{ N/m}$$

Pela Figura 3.17, constatamos que a amplitude de vibração do eixo rotativo pode ser minimizada fazendo $r = \omega/\omega_n$ muito grande. Isso significa que temos de fazer ω_n bem pequena em comparação com ω . Isto é, k tem de ser pequena. Isso pode ser conseguido selecionando-se o valor de k como $10,04 \times 10^4 \pi^2$ N/m. Visto que a rigidez de uma viga em balanço (eixo) que suporta uma carga na extremidade (rotor) é dada por

$$k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3E}{l^3} \left(\frac{\pi d^4}{64} \right) \quad (\text{E.5})$$

podemos determinar o diâmetro da viga (eixo):

$$d^4 = \frac{64kl^3}{3\pi E} = \frac{(64)(10,04 \times 10^4 \pi^2)(2^3)}{3\pi(2,07 \times 10^{11})} = 2,6005 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

ou

$$d = 0,1270 \text{ m} = 127 \text{ mm} \quad (\text{E.6})$$

3.8 Vibração forçada com amortecimento Coulomb

Para um sistema com um grau de liberdade com amortecimento Coulomb ou por atrito seco, sujeito a uma força harmônica $F(t) = F_0 \sin \omega t$ como na Figura 3.21, a equação de movimento é dada por

$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) = F_0 \sin \omega t \quad (3.85)$$

onde o sinal da força de atrito ($\mu N = \mu mg$) é positivo (negativo) quando a massa movimenta-se da esquerda para a direita (da direita para a esquerda). A solução exata da Equação (3.85) é bem complicada. Todavia, podemos esperar que, se a força de amortecimento por atrito seco for grande, o movimento da massa será descontínuo. Por outro lado, se a força de atrito seco for pequena em comparação com a amplitude da força aplicada F_0 , espera-se que a solução em regime permanente seja aproximadamente harmônica. Nesse caso, podemos determinar uma solução da Equação (3.85) determinando um fator de amortecimento viscoso equivalente. Para determinar tal fator, igualamos a energia dissipada devido ao atrito seco à energia dissipada por um amortecedor viscoso equivalente durante um ciclo de movimento completo. Se denotarmos a amplitude de movimento por X , a energia dissipada pela força de atrito μN em um quarto de ciclo é μNX . Por consequência, em um ciclo completo, a energia dissipada por amortecimento por atrito seco é dada por

$$\Delta W = 4\mu NX \quad (3.86)$$

Se denominarmos a constante de amortecimento viscoso equivalente por c_{eq} , a energia dissipada durante um ciclo completo (ver Equação 2.94) será

$$\Delta W = \pi c_{eq} \omega X^2 \quad (3.87)$$

Igualando as equações (3.86) e (3.87), obtemos

$$c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega X} \quad (3.88)$$

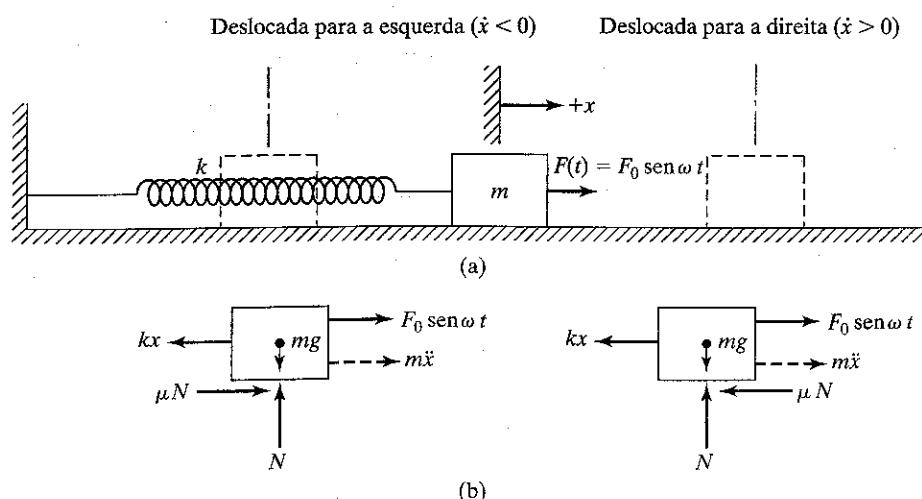


FIGURA 3.21 Sistema com um grau de liberdade e amortecimento Coulomb.

Assim, a resposta em regime permanente é dada por

$$x_p(t) = X \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \quad (3.89)$$

onde a amplitude X pode ser determinada pela Equação (3.60):

$$\begin{aligned} X &= \frac{F_0}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (c_{eq}\omega)^2 \right]^{1/2}} \\ &= \frac{(F_0/k)}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta_{eq}\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.90)$$

com

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n} = \frac{4\mu N}{2m\omega_n\pi\omega X} = \frac{2\mu N}{\pi m\omega\omega_n X} \quad (3.91)$$

Substituindo a Equação (3.91) na Equação (3.90), temos

$$X = \frac{(F_0/k)}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi kX} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.92)$$

A solução dessa equação dá a amplitude X como

$$X = \frac{F_0}{k} \left[\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (3.93)$$

Como já dissemos, a Equação (3.93) só pode ser usada se a força de atrito for pequena em comparação com F_0 . Na verdade, o valor-limite da força de atrito μN pode ser determinado pela Equação (3.93). Para evitar valores imaginários de X , precisamos ter

$$1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2 > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi}$$

Se essa condição não for satisfeita, deve-se usar a análise exata dada na Referência [3.3]. O ângulo de fase ϕ que aparece na Equação (3.89) pode ser determinado pela Equação (3.52):

$$\begin{aligned} \phi &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{c_{eq}\omega}{k - m\omega^2} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2\zeta_{eq}\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right] = \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{\frac{4\mu N}{\pi kX}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.94)$$

Substituindo a Equação (3.93) na Equação (3.94) para X , obtemos

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\left\{ 1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2 \right\}^{1/2}} \right] \quad (3.95)$$

A Equação (3.94) mostra que $\operatorname{tg} \phi$ é uma constante para dado valor de $F_0/\mu N$. ϕ é descontínuo em $\omega/\omega_n = 1$ (ressonância), visto que assume um valor positivo para $\omega/\omega_n < 1$ e um valor negativo para $\omega/\omega_n > 1$. Assim, a Equação (3.95) também pode ser expressa como

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\pm \frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\left\{ 1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2 \right\}^{1/2}} \right] \quad (3.96)$$

A Equação (3.93) mostra que o atrito serve para limitar a amplitude da vibração forçada para $\omega/\omega_n \neq 1$. Contudo, em ressonância ($\omega/\omega_n = 1$), a amplitude torna-se infinita, o que pode ser explicado da seguinte maneira: a energia dirigida para dentro do sistema durante um ciclo quando o sistema é excitado harmonicamente em ressonância é

$$\begin{aligned} \Delta W' &= \int_{\text{ciclo}} F \cdot dx = \int_0^T F \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\tau=2\pi/\omega} F_0 \operatorname{sen} \omega t \cdot [\omega X \cos(\omega t - \phi)] dt \end{aligned} \quad (3.97)$$

Visto que a Equação (3.94) dá $\phi = 90^\circ$ em ressonância, a Equação (3.97) torna-se

$$\Delta W' = F_0 X \omega \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}^2 \omega t dt = \pi F_0 X \quad (3.98)$$

A energia dissipada do sistema é dada pela Equação (3.86). Uma vez que $\pi F_0 X > 4\mu N X$ para X ter um valor real, $\Delta W' > \Delta W$ em ressonância (ver Figura 3.22). Assim, mais energia é dirigida para dentro do sistema por ciclo do que é dissipada do sistema, também por ciclo. Essa energia extra é usada para aumentar a amplitude de vibração. Para a condição sem ressonância ($\omega/\omega_n \neq 1$) o fornecimento de energia pode ser determinado pela Equação (3.97):

$$\begin{aligned} \Delta W' &= \omega F_0 X \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen} \omega t \cos(\omega t - \phi) dt \\ &= \pi F_0 X \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (3.99)$$

Devido à presença de $\operatorname{sen} \phi$ na Equação (3.99), a curva da energia fornecida na Figura 3.22 passa a coincidir com a curva da energia dissipada, portanto a amplitude é limitada. Desse modo, pode-se perceber que a fase do movimento ϕ limita a amplitude do movimento.

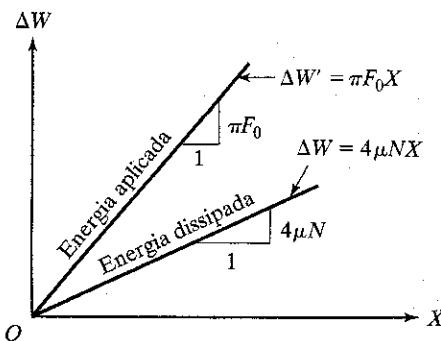


FIGURA 3.22 Energia fornecida e energia dissipada com amortecimento Coulomb.

A resposta periódica de um sistema massa-mola com amortecimento Coulomb sujeito à excitação de base é dada nas referências [3.10, 3.11].

EXEMPLO 3.6

Sistema massa-mola com amortecimento Coulomb

Um sistema massa-mola com 10 kg de massa e uma mola de rigidez de 4.000 N/m vibra sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito é 0,12. Quando sujeito a uma força harmônica de freqüência 2 Hz, constata-se que a massa vibra a uma amplitude de 40 mm. Determine a amplitude da força harmônica aplicada à massa.

Solução: A força vertical (peso) da massa é $N = mg = 10 \times 9,81 = 98,1$ N. A freqüência natural é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.000}{10}} = 20 \text{ rad/s}$$

e a razão de freqüências é

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2 \times 2\pi}{20} = 0,6283$$

A amplitude de vibração X é dada pela Equação (3.93):

$$X = \frac{F_0}{k} \left[\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^2} \right]^{1/2}$$

$$0,04 = \frac{F_0}{4.000} \left[\frac{1 - \left\{ \frac{4(0,12)(98,1)}{\pi F_0} \right\}^2}{(1 - 0,6283^2)^2} \right]^{1/2}$$

A solução dessa equação dá $F_0 = 97,9874$ N.

3.9 Vibração forçada com amortecimento por histerese

Considere um sistema com um grau de liberdade com amortecimento por histerese e sujeito a uma força harmônica $F(t) = F_0 \sin \omega t$, como indicado na Figura 3.23. A equação de movimento da massa pode ser derivada usando a Equação (2.138) como

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega}\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (3.100)$$

onde $(\beta k/\omega)\dot{x} = (h/\omega)\dot{x}$ denota a força de amortecimento.⁵ Embora a solução da Equação (3.100) seja bem complicada para uma função forçante geral $F(t)$, nosso interesse é determinar a resposta sob uma força harmônica.

Podemos admitir que a solução em regime permanente da Equação (3.100) é

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi). \quad (3.101)$$

Substituindo a Equação (3.101) na Equação (3.100), obtemos

$$X = \frac{F_0}{k \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \beta^2 \right]^{1/2}} \quad (3.102)$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\beta}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)} \right] \quad (3.103)$$

A Figura 3.24 mostra as representações gráficas das equações (3.102) e (3.103) para vários valores de β . Uma comparação da Figura 3.24 com a Figura 3.11 para amortecimento viscoso revela o seguinte:

- O coeficiente de amplitude

$$\frac{X}{(F_0/k)}$$

atinge seu valor máximo de $F_0/k\beta$ à freqüência de ressonância ($\omega = \omega_n$) no caso de amortecimento por histerese, enquanto ocorre a uma freqüência abaixo da ressonância ($\omega < \omega_n$) no caso de amortecimento viscoso.

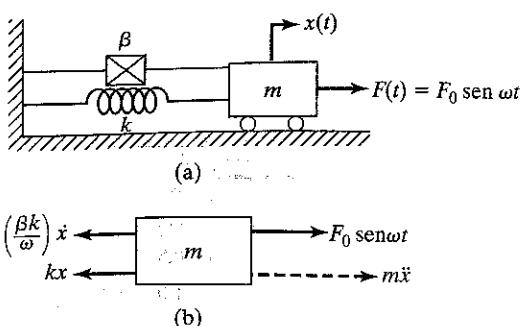


FIGURA 3.23 Sistema com amortecimento por histerese.

⁵ Ao contrário do amortecimento viscoso, aqui podemos perceber que a força de amortecimento é função da freqüência forçante ω (ver Seção 2.8).

2. O ângulo de fase ϕ tem um valor de $\operatorname{tg}^{-1}(\beta)$ em $\omega = 0$ no caso de amortecimento por histerese, ao passo que seu valor é zero em $\omega = 0$ no caso de amortecimento viscoso. Isso indica que a resposta nunca pode estar em fase com a função forçante no caso de amortecimento por histerese.

Observe que, se admitirmos que a excitação harmônica é $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ na Figura 3.23, a equação de movimento torna-se

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega}\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.104)$$

Nesse caso, a resposta $x(t)$ também é uma função harmônica que envolve o fator $e^{i\omega t}$. Por consequência, $\dot{x}(t)$ é dada por $i\omega x(t)$, e a Equação (3.104) torna-se

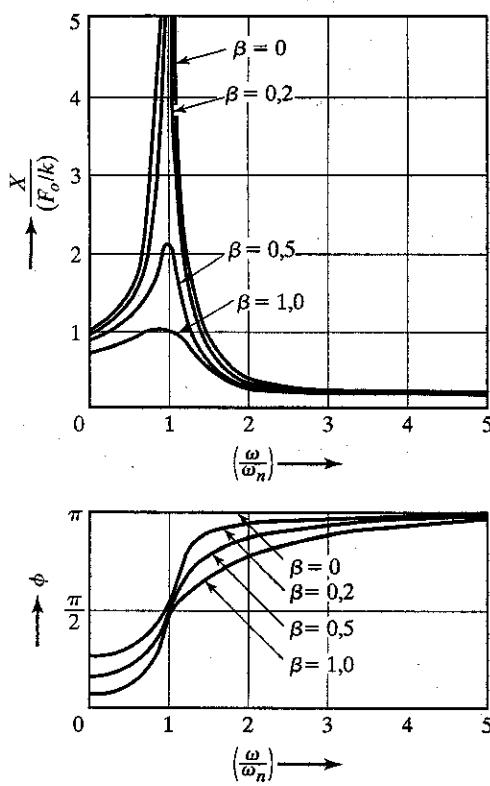
$$m\ddot{x} + k(1 + i\beta)x = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.105)$$

onde a quantidade $k(1 + i\beta)$ é denominada *rigidez complexa* ou *amortecimento complexo* [3.7]. A solução em regime permanente da Equação (3.105) é dada pela parte real de

$$x(t) = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{k \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i\beta \right]} \quad (3.106)$$

3.10 Movimento forçado com outros tipos de amortecimento

O amortecimento viscoso é a forma mais simples de amortecimento para utilizar na prática, visto que resulta em



equações de movimento lineares. Nos casos de amortecimento Coulomb e por histerese, definimos coeficientes de amortecimento viscoso equivalente para simplificar a análise. Mesmo para uma forma mais complexa de amortecimento, definimos uma constante de amortecimento viscoso equivalente, como ilustrado nos exemplos a seguir. A utilização prática do amortecimento equivalente é discutida na Referência [3.12].

EXEMPLO 3.7

Amortecimento quadrático

Determine a constante de amortecimento viscoso equivalente correspondente ao *amortecimento quadrático* ou de *velocidade ao quadrado* que está presente quando um corpo se move em um fluxo de fluido turbulento.

Solução: Admitimos que a força de amortecimento é

$$F_d = \pm a(\dot{x})^2 \quad (E.1)$$

onde a é uma constante, \dot{x} é a velocidade relativa no amortecedor e o sinal negativo (positivo) deve ser usado na Equação (E.1) quando \dot{x} é positiva (negativa). A energia dissipada por ciclo durante movimento harmônico $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$ é dada por

$$\begin{aligned} \Delta W &= 2 \int_{-X}^X a(\dot{x})^2 dx = 2X^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\omega^2 \cos^3 \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{8}{3} \omega^2 a X^3 \end{aligned} \quad (E.2)$$

Igualando essa energia à energia dissipada em um amortecedor viscoso equivalente (ver Equação 2.94)

$$\Delta W = \pi c_{eq} \omega X^2 \quad (E.3)$$

obtemos a constante de amortecimento viscoso equivalente (c_{eq})

$$c_{eq} = \frac{8}{3\pi} a \omega X \quad (E.4)$$

Podemos observar que c_{eq} não é uma constante, mas varia com ω e X . A amplitude da resposta em regime permanente pode ser determinada pela Equação (3.30):

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta_{eq}r)^2}} \quad (E.5)$$

onde $r = \omega/\omega_n$ e

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n} \quad (E.6)$$

Usando as equações (E.4) e (E.6), a Equação (E.5) pode ser resolvida para obter

$$\begin{aligned} X &= \frac{3\pi m}{8ar^2} \left[-\frac{(1 - r^2)^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{(1 - r^2)^4}{4} + \left(\frac{8ar^2\delta_{st}}{3\pi m} \right)^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (E.7)$$

FIGURA 3.24 Resposta em regime permanente.

3.11 Auto-excitación e análise de estabilidade

A força que age sobre um sistema vibratório normalmente é externa ao sistema e independente do movimento. Todavia, há sistemas para os quais a força excitadora é função dos parâmetros de movimento do sistema, como deslocamento, velocidade ou aceleração. Tais sistemas são denominados sistemas vibratórios auto-excitados, visto que o próprio movimento produz a força excitadora (ver Problema 3.74). A instabilidade de eixos rotativos, a tremulação de pás de turbinas, a vibração de tubulações induzida pelo escoamento de fluido, a vibração nas rodas de um automóvel e o movimento aerodinâmico induzido nas pontes são exemplos típicos de vibrações auto-excitadas.

3.11.1 Análise de estabilidade dinâmica

Um sistema é dinamicamente estável se o movimento (ou deslocamento) convergir ou permanecer estável com o tempo. Por outro lado, se a amplitude do deslocamento aumentar continuamente (divergir) com o tempo, diz-se que o sistema é dinamicamente instável. O movimento diverge, e o sistema torna-se instável, se houver alimentação de energia ao sistema por auto-excitación. Para ver as circunstâncias que levam à instabilidade, consideramos a equação de movimento de um sistema com um grau de liberdade:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.107)$$

Se admitirmos uma solução da forma $x(t) = Ce^{\lambda t}$, onde C é uma constante, a Equação (3.107) leva à equação característica

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (3.108)$$

As raízes dessa equação são

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{m} \right)^2 - 4 \left(\frac{k}{m} \right) \right]^{1/2} \quad (3.109)$$

Uma vez que admitimos que a solução é $x(t) = Ce^{\lambda t}$, o movimento será divergente e aperiódico se as raízes s_1 e s_2 forem reais e positivas. Essa situação pode ser evitada se c/m e k/m forem positivas. O movimento também divergirá se as raízes s_1 e s_2 forem conjugadas complexas com partes reais positivas. Para analisar a situação, as raízes s_1 e s_2 da Equação (3.108) são expressas como

$$s_1 = p + iq, \quad s_2 = p - iq \quad (3.110)$$

onde p e q são números reais, de modo que

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1s_2$$

$$= s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (3.111)$$

As equações (3.111) e (3.110) dão

$$\frac{c}{m} = -(s_1 + s_2) = -2p, \quad \frac{k}{m} = s_1s_2 = p^2 + q^2 \quad (3.112)$$

As Equações (3.112) mostram que, para p negativo, c/m deve ser positiva, e para $p^2 + q^2$, k/m deve ser positiva.

Assim, o sistema será dinamicamente estável se c e k forem positivas (admitindo que m é positiva).

EXEMPLO 3.8

Instabilidade de massa suportada por mola sobre uma correia rolante

Considere uma massa suportada por uma mola sobre uma correia rolante, como mostra a Figura 3.25(a). O coeficiente de atrito cinético entre a massa e a correia varia com a velocidade relativa (fricção) como mostrado na Figura 3.25(b). À medida que a velocidade de fricção aumenta, o coeficiente de atrito primeiro diminui linearmente em relação a seu valor estático μ_0 e, em seguida, começa a aumentar. Admitindo que a velocidade de fricção, v , é menor que o valor de transição, v_Q , o coeficiente de atrito pode ser expresso como

$$\mu = \mu_0 - \frac{a}{W} v$$

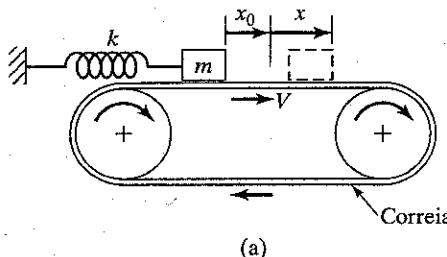
onde a é uma constante e $W = mg$ é o peso da massa. Determine a natureza da vibração livre em relação à posição de equilíbrio da massa.

Solução: Considerando que a posição de equilíbrio da massa m corresponde a uma extensão x_0 da mola, então

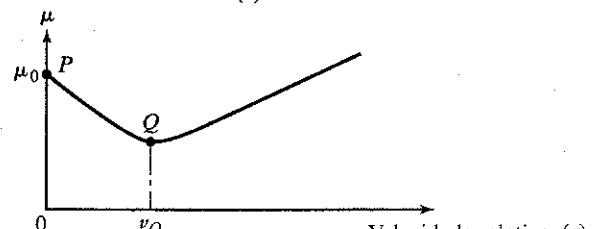
$$\mu W = kx_0$$

ou

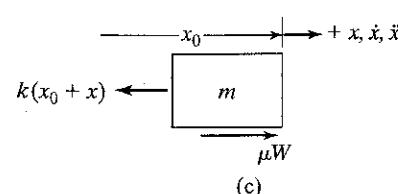
$$x_0 = \frac{\mu W}{k} = \frac{\mu_0 W}{k} - \frac{aV}{k}$$



(a)



(b)



(c)

FIGURA 3.25 Movimento de uma massa suportada por uma mola devido ao atrito com uma correia.

onde V é a velocidade da correia. Se a massa for deslocada até uma distância x em relação à sua posição de equilíbrio (x_0), a velocidade de fricção v é dada por

$$v = V - \dot{x}$$

Usando a segunda lei do movimento de Newton, a equação de movimento para vibração livre pode ser escrita como (ver Figura 3.25(c)):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x_0 + x) + \mu W \\ &= -k(x_0 + x) + W\left(\mu_0 - \frac{a}{W}(V - \dot{x})\right) \end{aligned}$$

isto é,

$$m\ddot{x} - a\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{E.1})$$

Já que o coeficiente de \dot{x} é negativo, o movimento dado pela Equação (E.1) será instável. A solução da Equação (E.1) é dada por

$$x(t) = e^{(a/2m)t} \{C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\} \quad (\text{E.2})$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e

$$r_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{m} \right)^2 - 4 \left(\frac{k}{m} \right) \right]^{1/2}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{m} \right)^2 - 4 \left(\frac{k}{m} \right) \right]^{1/2}$$

Como podemos ver pela Equação (E.2), o valor de x aumenta com o tempo. O valor de x aumenta até que $V - \dot{x} = 0$ ou $V + \dot{x} = v_Q$. Depois disso, o μ terá uma inclinação positiva e, por consequência, a natureza do movimento será diferente [3.13].

Observação: Um movimento semelhante pode ser observado em freios de absorção do tipo correia e polia e em cursores de máquinas-ferramentas [3.14]. No caso das máquinas-ferramentas, por exemplo, uma bancada de trabalho é montada sobre guias adequadas, e uma rosca de avanço é usada para imprimir movimento à bancada, como mostra a Figura 3.26. Em alguns casos, a bancada pode sofrer solavancos ao deslizar, mesmo quando o movimento da rosca de avanço for uniforme e suave. Esse tipo de movimento é conhecido como desliza-emperra. É possível fazer uma análise simplificada do movimento desliza-emperra modelando a bancada de trabalho como uma massa (m) e a conexão entre a bancada e a rosca de avanço (que nunca é perfeitamente rígida) como uma mola (k) e um amortecedor viscoso (c). O coeficiente de atrito entre a massa e a superfície deslizante varia como função da velocidade de deslizamento, como indicado na Figura 3.25(b). A equação de movimento da massa (bancada de trabalho) pode ser derivada como no caso da Equação (E.1) do Exemplo 3.8, ou seja,

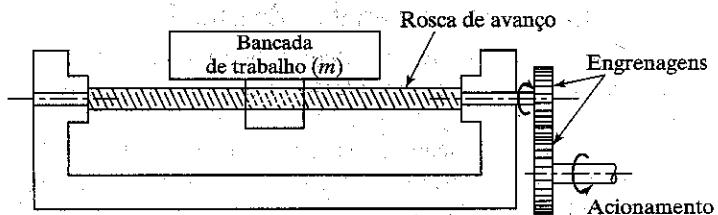


FIGURA 3.26 Movimento de bancada de trabalho com rosca de avanço em uma máquina-ferramenta.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mu W = W \left[\mu_0 - \frac{a}{W}(V - \dot{x}) \right]$$

isto é,

$$m\ddot{x} + (c - a)\dot{x} + kx = 0$$

Pode-se perceber que, se $c < a$, ocorrerá instabilidade dinâmica.

3.11.2 Instabilidade dinâmica causada por escoamento de fluido

A vibração causada por um fluido que escoa ao redor de um corpo é conhecida como vibração induzida por escoamento (fluxo) de fluido [3.4]. Por exemplo, podemos observar que chaminés altas, periscópios de submarinos, linhas de transmissão de energia elétrica e bastões de combustível nuclear vibram violentamente sob certas condições de escoamento de fluido a seu redor. De maneira semelhante, tubulações de água e de óleo e tubos de compressores de ar sofrem severa vibração sob certas condições de escoamento de fluido em seu interior. Em todos esses exemplos, a vibração do sistema extraí energia da fonte continuamente, o que resulta em amplitudes de vibração cada vez maiores.

A vibração induzida por escoamento de fluido (ou fluxo) pode ser causada por vários fenômenos. Por exemplo, em linhas de transmissão de energia elétrica cobertas de gelo, ocorre uma vibração de baixa freqüência (1 a 2 Hz) conhecida como *galope*, como resultado das forças de elevação e arrasto desenvolvidas pelo ar que escoa ao redor dessas linhas de transmissão cobertas de gelo. A vibração instável, conhecida como *tremulação*, de seções de um aerofólio também deve-se às forças de elevação e arrasto desenvolvidas pelo ar que flui ao redor do aerofólio. Além disso, ocorre uma vibração de alta freqüência, conhecida como *zunido das linhas de transmissão*, como resultado do fenômeno de emissão de vórtices (redemoinhos).

Para ver o fenômeno do galope em cabos (como as linhas de transmissão de energia elétrica), considere uma seção cilíndrica de cabo contra a qual o vento está soprando com uma velocidade U , como mostra a Figura 3.27(a) [3.3]. Devido à simetria da seção, a direção da força em razão do vento será a mesma do vento. Se uma pequena velocidade u dirigida para baixo for imprimida ao cilindro, o vento terá uma componente da velocidade u dirigida para cima (em relação ao cilindro), juntamente com a componente horizontal U . Assim, a direção da força resultante provocada pelo

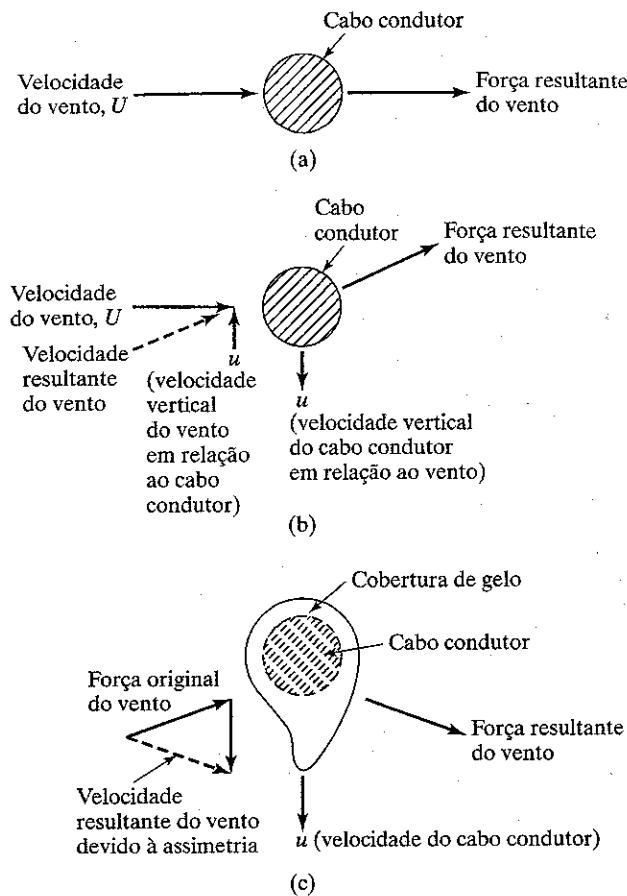


FIGURA 3.27 Galope de um cabo condutor.

vento sobre o cilindro será dirigida para cima, como mostra a Figura 3.27(b). Uma vez que essa força (para cima) é oposta à direção do movimento do cilindro (para baixo), o movimento do cilindro será amortecido. Ao contrário, se considerarmos uma seção não-circular, como um cabo cilíndrico coberto de gelo, pode ser que a força resultante do vento não seja sempre oposta ao movimento do cabo, como mostra a Figura 3.27(c). Nesse caso, o movimento do cabo é auxiliado pelas forças do vento, o que implica um amortecimento negativo no sistema.

Para visualizar o fenômeno do zunido nos cabos, considere um fluido que escoa por um cilindro liso. Sob certas condições, forma-se um padrão de redemoinhos alternados na direção descendente da corrente, como mostra a Figura 3.28. Esses redemoinhos são denominados vórtices de Karman, em honra ao proeminente mecânico de fluidos Theodor von Karman, que foi o primeiro a prever o espaçamento estável dos vórtices em termos teóricos em 1911. Os vórtices de Karman ocorrem alternadamente em sentido horário e em sentido anti-horário e, por isso, causam forças de elevação que variam harmonicamente sobre o cilindro e são perpendiculares à velocidade do fluido. Dados experimentais mostram que ocorre forte emissão de vórtices na faixa do número de Reynolds (Re) de aproximadamente 60 a 5.000. Nesse caso,

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} \quad (3.113)$$

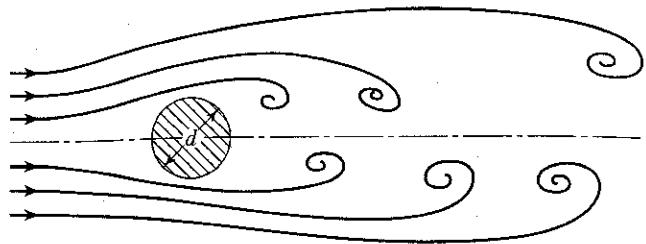


FIGURA 3.28 Escoamento de fluido que passa por um cilindro.

onde d é o diâmetro do cilindro, ρ é a densidade, V é a velocidade e μ é a viscosidade absoluta do fluido. Para $Re > 1.000$, a freqüência adimensional de emissão de vórtices, expressa como um número de Strouhal (St), é aproximadamente igual a 0,21 [3.15]

$$St = \frac{fd}{V} = 0,21 \quad (3.114)$$

onde f é a freqüência de emissão de vórtices. A força de elevação (F), que varia harmonicamente, é dada por

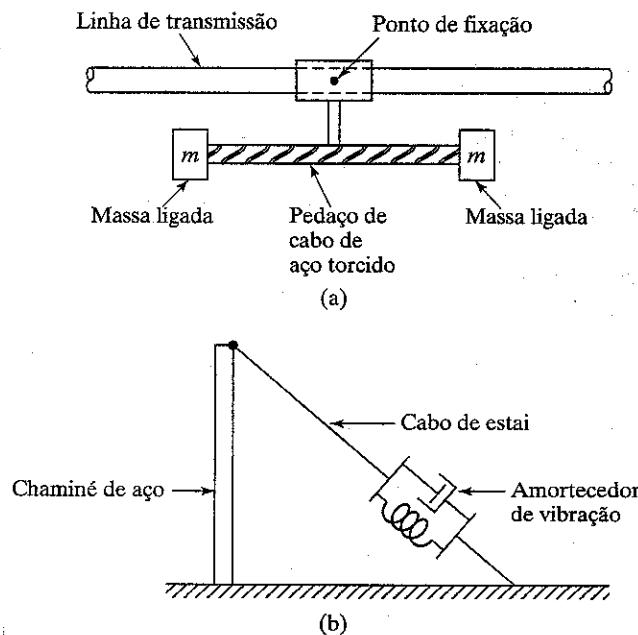
$$F(t) = \frac{1}{2} c \rho V^2 A \operatorname{sen} \omega t \quad (3.115)$$

onde c é uma constante ($c \approx 1$ para um cilindro), A é a área projetada do cilindro perpendicular à direção de V , ω é a freqüência circular ($\omega = 2\pi f$) e t é o tempo. O mecanismo de emissão de vórtices por um cilindro pode ser denominado auto-excitado, visto que o escoamento do fluido (V) não tem nenhum componente que se alterna. Do ponto de vista de projeto, temos de garantir que:

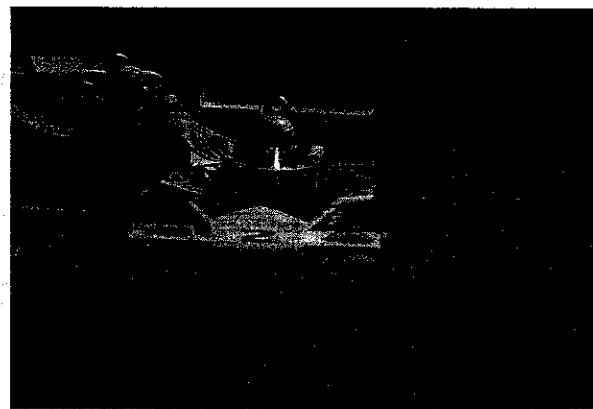
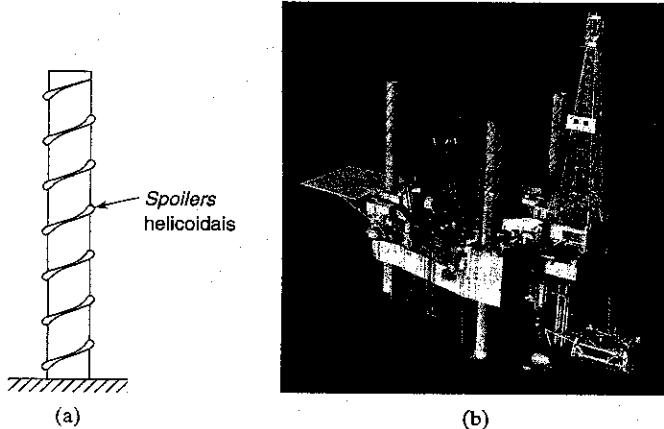
1. A magnitude da força exercida sobre o cilindro, dada pela Equação (3.115), seja menor do que a carga de falha estática.
2. Ainda que a magnitude da força F seja pequena, a freqüência de oscilação (f) não deve causar falha por fadiga durante a vida útil esperada da estrutura (ou cilindro).
3. A freqüência de emissão de vórtices (f) não coincida com a freqüência natural da estrutura ou cilindro para evitar ressonância.

Redução de vibração induzida por escoamento de fluido. Vários métodos podem ser usados para reduzir falhas causadas por vibração induzida por escoamento de fluido.

1. Para reduzir o zunido de vibração de linhas de transmissão provocado por emissão de vórtices, pode-se usar um absorvedor de vibração amortecida, conhecido como amortecedor de Stockbridge. Um amortecedor de Stockbridge típico consiste em um cabo de aço curto com duas massas ligadas às suas extremidades. Esse amortecedor é fixado à linha de transmissão, como mostra a Figura 3.29(a). Assim, o dispositivo age como um sistema massa-mola e pode ser sintonizado com a freqüência da vibração induzida por escoamento de fluido ajustando-se seu comprimento (o comprimento do cabo) ou o valor das massas. O amortecedor de Stockbridge é fixado à linha de transmissão em um ponto no qual se espera que a vibração seja grande.



2. No caso de chaminés altas de aço, o efeito da vibração induzida por escoamento de fluido pode ser minimizado com o acréscimo de amortecedores de vibração por meio de cabos de estai entre o topo da chaminé e o solo, como mostra a Figura 3.29(b).
3. No caso de chaminés altas, podem-se instalar redutores helicoidais de velocidade (*spoilers*) ou reforços (*strakes*) como mostrado na Figura 3.30. Os *spoilers* helicoidais quebram o padrão dos vórtices, de modo que nenhuma excitação bem-definida é aplicada à parede da chaminé.
4. Em carros de alta velocidade (carros de corrida), as forças de elevação induzidas por fluxo podem reduzir a carga sobre os pneus, o que causa problemas com o controle da direção e a estabilidade do veículo. Embora ambas as forças de elevação possam ser contrabalançadas parcialmente com a adição de *spoilers*, a força de arrasto aumentará. Nos últimos anos, têm sido usados aerofólios móveis invertidos para desenvolver uma força aerodinâmica dirigida para baixo com melhores características de estabilidade (ver Figura 3.31).



EXEMPLO 3.9

Instabilidade dinâmica de um aerofólio

Determine o valor da velocidade de correnteza livre u à qual a seção do aerofólio (sistema com um grau de liberdade) mostrado na Figura 3.32 torna-se instável.

Solução:

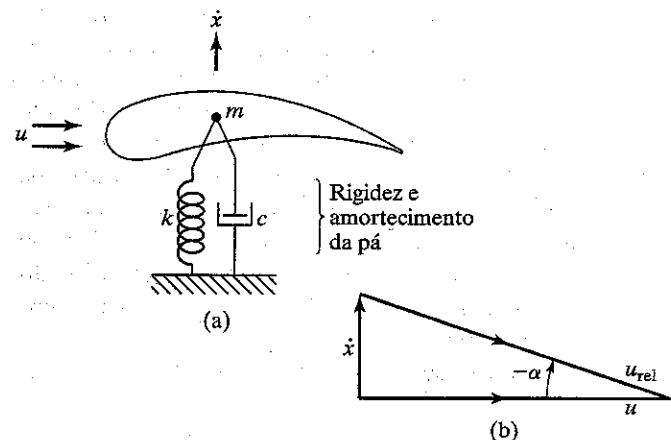
Abordagem: Determine a força vertical que age sobre o aerofólio (ou massa m) e obtenha a condição que leva a amortecimento zero.

A força vertical que age sobre o aerofólio (ou massa m) devido ao escoamento de fluido pode ser expressa como [3.4]

$$F = \frac{1}{2} \rho u^2 D C_x \quad (\text{E.1})$$

onde ρ = densidade do fluido, u = velocidade de correnteza livre, D = largura da seção transversal normal à direção de escoamento do fluido e C_x = coeficiente de força vertical, que pode ser expresso como

$$C_x = \frac{u_{\text{rel}}^2}{u^2} (C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha) \quad (\text{E.2})$$



onde u_{rel} é a velocidade relativa do fluido, C_L é o coeficiente de elevação, C_D é o coeficiente de arrasto e α é o ângulo de ataque (ver Figura 3.32)

$$\alpha = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\dot{x}}{u}\right) \quad (\text{E.3})$$

Para pequenos ângulos de ataque,

$$\alpha = -\frac{\dot{x}}{u} \quad (\text{E.4})$$

e C_x pode ser aproximado usando a expansão por série de Taylor em relação a $\alpha = 0$, como

$$C_x \approx C_x \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \cdot \alpha \quad (\text{E.5})$$

onde, para pequenos valores de α , $u_{\text{rel}} \approx u$ e a Equação (E.2) torna-se

$$C_x = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha \quad (\text{E.6})$$

Usando as equações (E.6) e (E.4), a Equação (E.5) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} C_x &= (C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha) \Big|_{\alpha=0} \\ &+ \alpha \left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \cos \alpha - C_L \sin \alpha + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \sin \alpha \right. \\ &\quad \left. + C_D \cos \alpha \right] \Big|_{\alpha=0} \\ &= C_L \Big|_{\alpha=0} + \alpha \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ &= C_L \Big|_{\alpha=0} - \frac{\dot{x}}{u} \left\{ \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + C_D \Big|_{\alpha=0} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Substituindo a Equação (E.7) na Equação (E.1), temos

$$F = \frac{1}{2} \rho u^2 D C_L \Big|_{\alpha=0} - \frac{1}{2} \rho u D \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \dot{x} \quad (\text{E.8})$$

A equação de movimento do aerofólio (ou massa m) é

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= F = \frac{1}{2} \rho u^2 D C_L \Big|_{\alpha=0} \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho u D \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \dot{x} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (E.9) produz um deslocamento estático e, por consequência, somente o segundo termo pode causar instabilidade do sistema. Considerando apenas o segundo termo do lado direito, a equação

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx$$

$$= m\ddot{x} + \left[c + \frac{1}{2} \rho u D \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right] \dot{x} + kx = 0 \quad (\text{E.10})$$

Observe que m inclui a massa do fluido carregado. Podemos ver pela Equação (E.10) que o deslocamento do aerofólio (ou massa m) crescerá sem limitação (isto é, o sistema torna-se instável) se c for negativo. Por consequência, a velocidade mínima do fluido para o início de oscilações instáveis é dada por $c = 0$, ou

$$u = -\left\{ \frac{2c}{\rho D \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}} \right\} \quad (\text{E.11})$$

O valor de $\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -2,7$ para uma seção quadrada em um fluxo estável [3.4].

Observação: Uma análise semelhante à do Exemplo 3.9 é aplicável a outras estruturas vibratórias como reservatórios de água (Figura 3.33(a)) e o galope de linhas de transmissão de energia elétrica cobertas de gelo (Figura 3.33(b)) sob carga de vento.

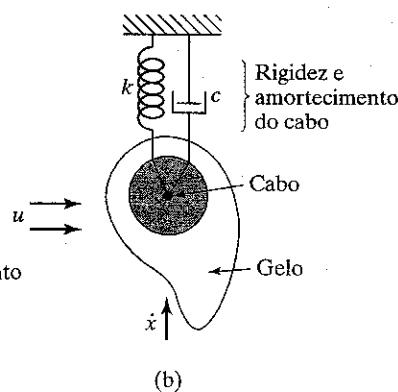
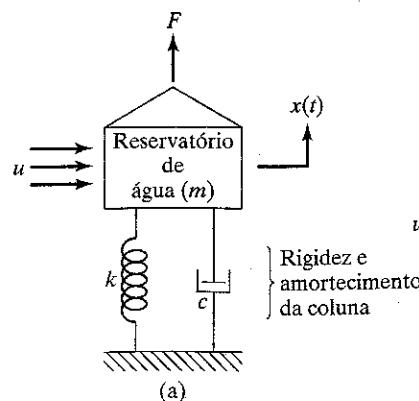


FIGURA 3.33 Instabilidade de estruturas vibratórias típicas.

EXEMPLO 3.10

Uma chaminé sob vibração induzida por fluxo

Uma chaminé de aço tem 2 m de altura, 0,75 m de diâmetro interno e 0,80 m de diâmetro externo. Determine a velocidade do fluxo de vento ao redor da chaminé que induzirá vibração transversal da chaminé na direção do fluxo de ar.

Solução:

Abordagem: Modele a chaminé como uma viga em balanço e iguale a freqüência natural da vibração transversal da chaminé à freqüência de emissão de vórtices.

Para determinar a freqüência natural de vibração transversal da chaminé, podemos usar o método da energia de Rayleigh admitindo uma deflexão transversal adequada da viga em balanço (ver Seção 8.7). Contudo, nesse caso, usamos as freqüências naturais da viga em balanço dadas na Figura 8.15. A Figura 8.15 dá a freqüência fundamental de vibração transversal (ω_1) de uma viga em balanço (fixa em um extremidade e livre na outra) como

$$\omega_1 = (\beta_{1l})^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}} \quad (E.1)$$

onde

$$\beta_{1l} = 1,875104 \quad (E.2)$$

Para a chaminé, $E = 207 \times 10^9$ Pa, ρg = peso unitário = $76,5 \times 10^3$ N/m³, $l = 20$ m, $d = 0,75$ m, $D = 0,80$ m,

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(0,80^2 - 0,75^2) = 0,0608685 \text{ m}^2$$

e

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(0,80^4 - 0,75^4) = 0,004574648 \text{ m}^4$$

Assim,

$$\omega_1 = (1,875104)^2 \left\{ \frac{(207 \times 10^9)(0,004574648)}{\left(\frac{76,5 \times 10^3}{9,81} \right)(0,0608685)(20)^4} \right\}^{1/2}$$

$$= 12,415417 \text{ rad/s} = 1,975970 \text{ Hz}$$

A freqüência de emissão de vórtices (f) é dada pelo número de Strouhal:

$$St = \frac{fd}{V} = 0,21$$

Usando $d = 0,80$ m e $f = f_1 = 1,975970$ Hz, a velocidade do vento (V) que causa ressonância pode ser determinada como

$$V = \frac{f_1 d}{0,21} = \frac{1,975970 (0,80)}{0,21} = 7,527505 \text{ m/s}$$

3.12 Exemplos usando MATLAB

EXEMPLO 3.11

Resposta total de um sistema não amortecido

Usando MATLAB, construa um gráfico para a resposta de um sistema massa-mola sob uma força harmônica para os seguintes dados:

$$m = 5 \text{ kg}, k = 2.000 \text{ N/m}, F(t) = 100 \cos 30t \text{ N}, x_0 = 0,1 \text{ m}, x_0 = 0,1 \text{ m/s.}$$

Solução: A resposta do sistema é dada pela Equação (3.9), que pode ser reescrita como

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (E.1)$$

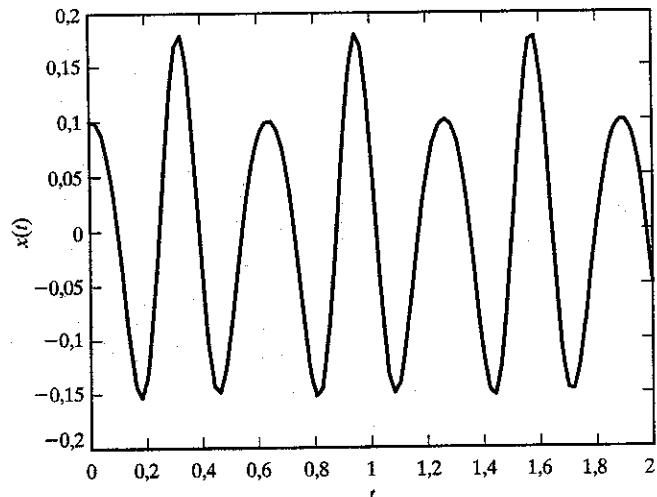
$$\text{onde } f_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{100}{5} = 20, \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ rad/s.}$$

O gráfico da Equação (E.1) é construído utilizando o seguinte programa MATLAB:

```
% Ex3_11.m
F0 = 100;
wn = 20;
m = 5;
w = 30;

x0 = 0.1;
x0_dot = 0.1;
f_0 = F0/m;
for i = 1: 101
    t(i) = 2 * (i-1)/100;
    x(i) = x0_dot * sin(wn*t(i))/wn + (x0 - f_0/(wn^2 - w^2)) * cos((wn*t(i)).. + f_0/(wn^2 - w^2) * cos(w*t(i)));
end
```

Exemplo 3.11



```
plot (t, x);
xlabel ('t');
ylabel ('x(t)');
title ('Ex3.11')
```

EXEMPLO 3.12

Resposta forçada de um sistema com amortecimento Coulomb

Usado MATLAB, construa um gráfico para a resposta forçada de um sistema massa-mola com amortecimento Coulomb para os seguintes dados: $m = 5 \text{ kg}$, $k = 2000 \text{ N/m}$, $\mu = 0,5$, $F(t) = 100 \text{ sen } 30 t \text{ N}$, $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0,1 \text{ m/s}$.

Solução: A equação de movimento do sistema pode ser expressa como

$$m \ddot{x} + k x + \mu m g \operatorname{sgn}(\dot{x}) = F_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (\text{E.1})$$

que pode ser reescrita como um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem (usando $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$) como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega t - \frac{k}{m} x_1 - \mu g \operatorname{sgn}(x_2) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

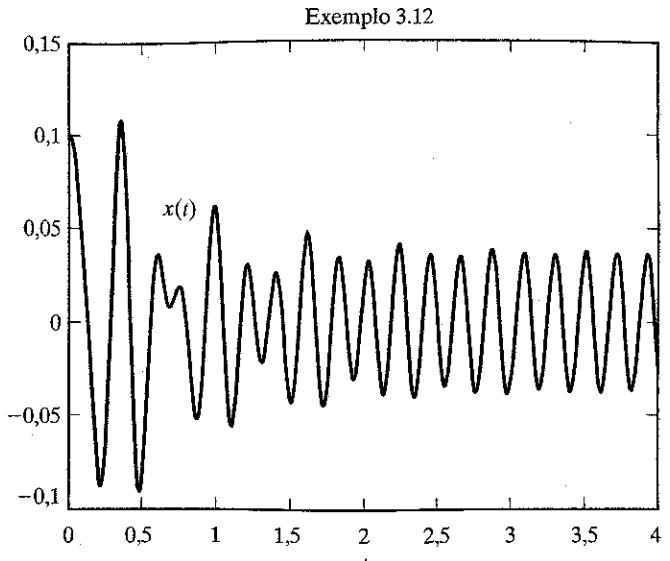
com as condições iniciais $x_1(0) = 0,1$ e $x_2(0) = 0,1$. A solução MATLAB da Equação (E.2), usando `ode23` é dada a seguir.

```
% Ex3_12.m
% This program will use the function dfunc3_12.m, they
should
% be in the same folder
tspan = [0: 0.01: 4];

x0 = [0.1; 0.1];
[t, x] = ode23 ('dfunc3_12', tspan, x0);
disp ('t x(t) xd(t)');
disp ([t x]);
plot (t, x(:, 1));
xlabel ('t');
gtext ('x(t)');
title ('Ex3.12');

% dfunc3_12.m
function f = dfunc3_12 (t, x)
f = zeros (2, 1);
f(1) = x(2);
f(2) = 100*sin(30*t)/5 - 9.81*0.5*sign(x(2)) -
(2000/5)*x(1);

>> Ex3_12
t      x(t)      xd(t)
0      0.1000    0.1000
0.0100  0.0991   -0.2427
0.0200  0.0954   -0.4968
0.0300  0.0894   -0.6818
0.0400  0.0819   -0.8028
0.0500  0.0735   -0.8704
.
.
3.9500  0.0196   -0.9302
3.9600  0.0095   -1.0726
3.9700  -0.0016   -1.1226
3.9800  -0.0126   -1.0709
3.9900  -0.0226   -0.9171
4.0000  -0.0307   -0.6704
```



EXEMPLO 3.13

Resposta de um sistema sob excitação de base

Usando MATLAB, determine e construa um gráfico para a resposta de um sistema massa-mola viscosamente amortecido sob a excitação de base $y(t) = Y \operatorname{sen} \omega t$ para os seguintes dados: $m = 1.200 \text{ kg}$, $k = 4 \times 10^5 \text{ N/m}$, $\zeta = 0,5$, $Y = 0,05 \text{ m}$, $\omega = 29,0887 \text{ rad/s}$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0,1 \text{ m/s}$.

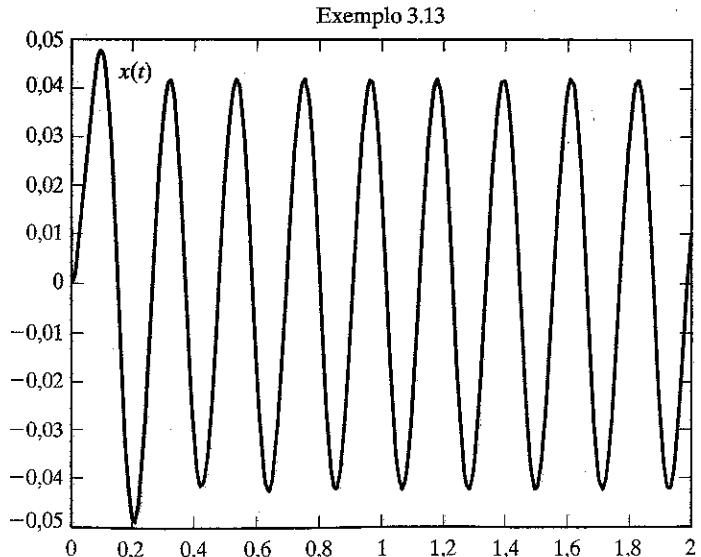
Solução: A equação de movimento, Equação (3.64),

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = k y + c \dot{y} \quad (\text{E.1})$$

pode ser expressa como um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (usando $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$) como

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 + \frac{k}{m} y + \frac{c}{m} \dot{y} \quad (\text{E.2})$$



com $c = \zeta c_c = 2\zeta \sqrt{k m} = 2(0,5) \sqrt{(4 \times 10^5)(1.200)}$, $y = 0,5 \operatorname{sen} 29,0887 t$ e $\dot{y} = (29,0887)(0,05) \cos 29,0887 t$. A solução MATLAB da Equação (E.2) usando **ode23** é dada a seguir.

```
% Ex3_13.m
% This program will use the function dfunc3_13.m, they
should
% be in the same folder
tspan = [0: 0.01: 2];
x0 = [0; 0.1];
[t, x] = ode23 ('dfunc3_13', tspan, x0);
disp ('t x(t) xd(t)');
disp ([t x]);
plot (t, x (:, 1));
xlabel ('t');
gtext ('x(t)');
title ('Ex3.13');

% dfunc3_13.m
function f = dfunc3_13 (t, x)
f = zeros (2, 1);
f(1) = x(2);
f(2) = 400000*0.05*sin(29.0887*t)/1200 + ...
sqrt (400000*1200)*29.0887*0.05*cos(29.0887*t)/1200
...
-sqrt(400000*1200)*x(2)/1200 -(400000/1200)*x(1);

>> Ex3_13
t      x(t)      xd(t)
0       0       0.1000
0.0100  0.0022  0.3422
0.0200  0.0067  0.5553
0.0300  0.0131  0.7138
0.0400  0.0208  0.7984
0.0500  0.0288  0.7976
.
.
.
1.9500 -0.0388  0.4997
1.9600 -0.0322  0.8026
1.9700 -0.0230  1.0380
1.9800 -0.0118  1.1862
1.9900  0.0004  1.2348
2.0000  0.0126  1.1796
```

$ic = 1$ para função forçante do tipo co-seno; 0 para função forçante do tipo seno

O programa dá a seguinte saída:

etapa número i , $x(i)$, $\dot{x}(i)$, $\ddot{x}(i)$

O programa também apresenta um gráfico das variações de x , \dot{x} e \ddot{x} com o tempo.

```
>> program3
Steady state response of an undamped
Single degree of freedom system under harmonic force

Given data
xm = 5.00000000e+000
xc = 2.00000000e+001
xk = 5.00000000e+002
f0 = 2.50000000e+002
om = 4.00000000e+001
ic = 0
n = 20

Response:
i      x(i)          xd(i)          xdd(i)
1   1.35282024e-002  1.21035472e+000 -2.16451238e+001
2   2.22166075e-002  9.83897315e-001 -3.55465721e+001
3   2.87302863e-002  6.61128738e-001 -4.59684581e+001
4   3.24316314e-002  2.73643972e-001 -5.18906102e+001
5   3.29583277e-002 -1.40627096e-001 -5.27333244e+001
6   3.02588184e-002 -5.41132540e-001 -4.84141094e+001
7   2.45973513e-002 -8.88667916e-001 -3.93557620e+001
8   1.65281129e-002 -1.14921388e+000 -2.64449806e+001
9   6.84098018e-003 -1.29726626e+000 -1.09455683e+001
10  -3.51579846e-003 -1.31833259e+000  5.62527754e+000
11  -1.35284247e-002 -1.21035075e+000  2.16454794e+001
12  -2.22167882e-002 -9.83890787e-001  3.55468612e+001
13  -2.87304077e-002 -6.61120295e-001  4.59686523e+001
14  -3.24316817e-002 -2.73634442e-001  5.18906907e+001
15  -3.29583019e-002  1.40636781e-001  5.27332831e+001
16  -3.02587190e-002  5.41141432e-001  4.84139504e+001
17  -2.45971881e-002  8.88675144e-001  3.93555009e+001
18  -1.65279018e-002  1.14921874e+000  2.64446429e+001
19  -6.84074192e-003  1.29726827e+000  1.09451871e+001
20  -3.51604059e-003  1.31833156e+000 -5.62566494e+000
```

EXEMPLO 3.14

Resposta em regime permanente de um sistema viscosamente amortecido

Desenvolva um programa MATLAB de uso geral denominado **Program3.m** para determinar a resposta em regime permanente de um sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade sob a força harmônica $F_0 \cos \omega t$ ou $F_0 \operatorname{sen} \omega t$. Use o programa para determinar e representar em gráfico a resposta de um sistema com os seguintes dados:

$$m = 5 \text{ kg}, c = 20 \text{ N.s/m}, k = 500 \text{ N/m}, F_0 = 250 \text{ N}, \omega = 40 \text{ rad/s}, n = 40 \text{ e } ic = 0.$$

Solução: **Program3.m** é desenvolvido para aceitar os seguintes dados de entrada:

xm = massa

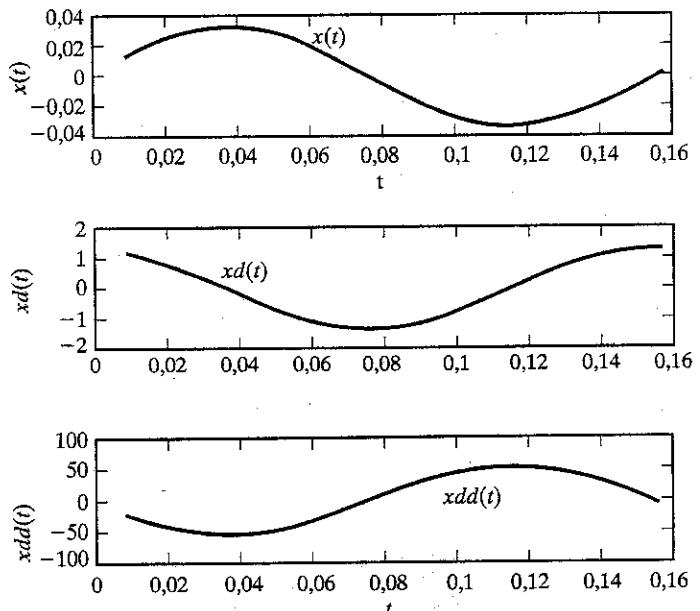
xc = constante de amortecimento

xk = constante elástica

$f0$ = amplitude da função forçante

om = freqüência forçante

n = número de etapas de tempo em um ciclo no qual a resposta deve ser calculada



3.13 Programa em C++

Um programa interativo em C++, denominado **Program3.cpp**, é usado para determinar a resposta em regime permanente de um sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade. Os parâmetros de entrada e de saída do programa são semelhantes aos do programa Matlab, **Program3.m**, dados no Exemplo 3.14.

EXEMPLO 3.15

Resposta em regime permanente de um sistema viscosamente amortecido usando C++

Determine a resposta em regime permanente do sistema viscosamente amortecido descrito no Exemplo 3.14.

Solução: Os dados de entrada são digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são dadas a seguir.

```
Please input n and ic:  
20 0  
  
Please input xm, xc, xk, f0, om:  
5.0 20.0 500.0 250.0 40.0
```

```
STEADY STATE RESPONSE OF AN UNDERDAMPED  
SINGLE DEGREE OF FREEDOM SYSTEM UNDER HARMONIC FORCE
```

```
GIVEN DATA:  
XM = 5  
XC = 20  
FO = 250  
OM = 40  
IC = 0  
N = 20
```

```
RESPONSE:  
I X(I) XD(I) XDD(I)  
0 0.01352820 1.21035472 -21.64512378  
1 0.02216661 0.98389732 -35.54657206  
2 0.02873029 0.66112874 -45.96845807  
3 0.03243163 0.27364397 -51.89061025  
4 0.03295833 -0.14062710 -52.73332439  
5 0.03025882 -0.54113254 -48.41410938  
6 0.02459735 -0.88666792 -39.35576205  
7 0.01652811 -1.14921388 -26.44498065  
8 0.00684098 -1.29726626 -10.94556828  
9 -0.00351580 -1.31833259 5.62527754  
10 -0.01352842 -1.21035075 21.64547945  
11 -0.02221679 -0.98389079 35.54686119  
12 -0.02873041 -0.66112029 45.96865235  
13 -0.03243168 -0.27363444 51.89069066  
14 -0.03295830 0.14063678 52.73328306  
15 -0.03025872 0.54114143 48.41395037  
16 -0.02459719 0.88667514 39.35550091  
17 -0.01652790 1.14921874 26.44464294  
18 -0.00684074 1.29726827 10.94518707  
19 0.00351604 1.31833156 -5.62566494
```

3.14 Programa em FORTRAN

Um programa de computador em FORTRAN, na forma da sub-rotina **HARESP.F**, é dado para determinar a resposta em regime permanente de um sistema viscosamente amortecido. Os argumentos da sub-rotina são semelhantes aos descritos para o programa MATLAB **Program3.m**, dado no Exemplo 3.14.

EXEMPLO 3.16

Resposta em regime permanente de um sistema viscosamente amortecido usando FORTRAN

Determine a resposta em regime permanente do sistema viscosamente amortecido descrito no Exemplo 3.14 usando a sub-rotina **HARESP.F**.

Solução: O programa principal que chama a sub-rotina **HARESP.F** e a sub-rotina **HARESP.F** são dados como **PROGRAM3.F**. A saída do programa é dada a seguir.

```
STEADY STATE RESPONSE OF AN UNDERDAMPED  
SINGLE DEGREE OF FREEDOM SYSTEM UNDER HARMONIC FORCE  
GIVEN DATA:  
XM = 0.50000000E+01  
XC = 0.20000000E+02  
XK = 0.50000000E+03  
FO = 0.25000000E+03  
OM = 0.40000000E+02  
IC = 0  
N = 20  
  
RESPONSE:  
I X(I) XD(I) XDD(I)  
1 0.13528203E-01 0.12103548E+01 -0.21645124E+02  
2 0.22216609E-01 0.98389733E+00 -0.35546574E+02  
3 0.28730286E-01 0.66112888E+00 -0.45968460E+02  
4 0.32431632E-01 0.27364409E+00 -0.51890614E+02  
5 0.32958329E-01 -0.14062698E+00 -0.52733330E+02  
6 0.30258821E-01 -0.54113245E+00 -0.48414116E+02  
7 0.24597193E-01 -0.88666800E+00 -0.39355762E+02  
8 0.16528117E-01 -0.11492138E+01 -0.26444986E+02  
9 0.68409811E-02 -0.12972662E+01 -0.10945570E+02  
10 -0.35157942E-02 -0.13183327E+01 0.56252708E+01  
11 -0.13528424E-01 -0.12103508E+01 0.21645479E+02  
12 -0.22216786E-01 -0.98389095E+00 0.35546856E+02  
13 -0.28730409E-01 -0.66112041E+00 0.45968655E+02  
14 -0.32431684E-01 -0.27363408E+00 0.51890697E+02  
15 -0.32958303E-01 0.14063700E+00 0.52733284E+02  
16 -0.30258721E-01 0.54114151E+00 0.48413952E+02  
17 -0.24597190E-01 0.88675092E+00 0.39355507E+02  
18 -0.16527895E-01 0.11492189E+01 0.26444633E+02  
19 -0.68407385E-02 0.12972684E+01 0.10945182E+02  
20 0.35160405E-02 0.13183316E+01 -0.56256652E+01
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 3.1 G. B. Thomas e R. L. Finney, *Calculus and analytic geometry*, 6. ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984.
- 3.2 J. W. Nilsson, *Electric circuits*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1983.
- 3.3 J. P. Den Hartog, “Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction”, *Journal of Applied Mechanics* (Transactions of ASME), v. 53, 1931, p. APM 107–115.
- 3.4 R. D. Blevins, *Flow-induced vibration*, 2. ed. Nova York: Van Nostrand Reinhold, 1990.
- 3.5 J. C. R. Hunt e D. J. W. Richards, “Overhead line oscillations and the effect of aerodynamic dampers”, *Proceedings of the Institute of Electrical Engineers*, Londres, v. 116, 1969, p. 1869–1874.
- 3.6 K. P. Singh e A. I. Soler, *Mechanical design of heat exchangers and pressure vessel components*. Cherry Hill, N. J.: Arcturus Publishers, 1984.
- 3.7 N. O. Myklestad, “The concept of complex damping”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 19, 1952, p. 284–286.
- 3.8 R. Plunkett (editor), *Mechanical impedance methods for mechanical vibrations*. Nova York: American Society of Mechanical Engineers, 1958.
- 3.9 A. D. Dimarogonas, *Vibration Engineering*. St. Paul: West Publishing, 1976.
- 3.10 B. Westermo e F. Udwadia, “Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation”, *Earthquake engineering and structural dynamics*, v. 11, n. 1, 1983, p. 135–146.
- 3.11 M. S. Hundal, “Response of a base excited system with Coulomb viscous friction”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 64, 1979, p. 371–378.

- 3.12 J. P. Bandstra, "Comparison of equivalent viscous damping and nonlinear damping in discrete and continuous vibrating systems", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, v. 105, 1983, p. 382-392.
- 3.13 W. G. Green, *Theory of Machines*, 2. ed. London: Blackie & Son, 1962.
- 3.14 S. A. Tobias, *Machine-tool vibration*. Nova York: Wiley, 1965.
- 3.15 R. W. Fox e A. T. McDonald, *Introduction to fluid mechanics*, 4. ed. Nova York: Wiley, 1992.

PERGUNTAS DE REVISÃO

3.1 Dê respostas curtas ao seguinte:

1. No caso de um sistema não amortecido, qual é a relação entre amplitude, freqüência e fase de uma vibração em regime permanente e amplitude, freqüência e fase da força harmônica aplicada?
2. Explique por que uma força constante sobre a massa vibratória não provoca nenhum efeito na vibração em regime permanente.
3. Defina o termo *fator de amplificação*. Qual é a relação entre o fator de amplificação e a razão de freqüências?
4. Qual será a freqüência da força aplicada em relação à freqüência natural do sistema se o fator de amplificação for menor do que a unidade?
5. Quais são a amplitude e o ângulo de fase da resposta de um sistema viscosamente amortecido na vizinhança da ressonância?
6. Alguma vez o ângulo de fase correspondente à amplitude de pico de um sistema viscosamente amortecido é maior do que 90° ?
7. Por que o amortecimento é considerado apenas na vizinhança de ressonância na maioria dos casos?
8. Mostre os vários termos da equação forçada de movimento de um sistema viscosamente amortecido em um diagrama vetorial.
9. O que acontece com a resposta de um sistema não amortecido em ressonância?
10. Defina os seguintes termos: *batimento*, *fator de qualidade*, *transmissibilidade*, *rigidez complexa*, *amortecimento quadrático*.
11. Explique, em termos físicos, por que o fator de amplificação é aproximadamente igual a 1 para pequenos valores de r e é pequeno para grandes valores de r .
12. A força transmitida à base de uma máquina montada sobre molas diminuirá com a adição de amortecimento?
13. Como a força transmitida à base muda à medida que a velocidade da máquina aumenta?
14. Se um veículo sofrer grande vibração ao percorrer uma estrada uniformemente irregular, uma mudança de velocidade melhorará a condição?
15. É possível determinar a amplitude máxima de uma vibração forçada amortecida para qualquer valor de r igualando a energia dissipada por amortecimento ao trabalho realizado pela força externa?
16. Quais são as premissas adotadas em relação ao movimento de uma vibração forçada com amortecimento não viscoso para determinar a amplitude?
17. É possível determinar o valor aproximado da amplitude de uma vibração forçada amortecida sem considerar amortecimento? Caso seja possível, sob quais circunstâncias?

18. O atrito seco é efetivo para limitar a amplitude de ressonância?

19. Como determinamos a resposta de um sistema viscosamente amortecido sob desbalanceamento rotativo?

20. Qual é a freqüência da resposta de um sistema viscosamente amortecido quando a força externa é $F_0 \sin \omega t$? Essa resposta é harmônica?

21. Qual é a diferença entre a amplitude de pico e a amplitude de ressonância?

22. Por que o amortecimento viscoso é usado na maioria dos casos, em vez de outros tipos de amortecimento?

23. O que é vibração auto-excitada?

3.2 Indique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

1. O fator de amplificação é a razão entre a amplitude máxima e a deflexão estática.
2. A resposta será harmônica se a excitação for harmônica.
3. O ângulo de fase da resposta depende dos parâmetros do sistema m , c , k e ω .
4. O ângulo de fase da resposta depende da amplitude da função forçante.
5. Durante batimento, a amplitude da resposta aumenta e, então, diminui seguindo um padrão regular.
6. O fator Q pode ser usado para estimar o amortecimento em um sistema.
7. Os pontos de meia-potência denotam os valores da razão de freqüências onde o fator de amplificação cai para $Q/\sqrt{2}$, onde Q é o fator Q .
8. O coeficiente de amplitude atinge seu valor máximo em ressonância no caso de amortecimento viscoso.
9. No caso de amortecimento por histerese, a resposta está sempre em fase com a função forçante harmônica.
10. Amortecimento reduz o coeficiente de amplitude para todos os valores da freqüência forçante.
11. O desbalanceamento de uma máquina rotativa causa vibração.
12. Podemos admitir que a solução em regime permanente é harmônica para pequenos valores de força de atrito seco.
13. No caso de um sistema com desbalanceamento rotativo, o efeito do amortecimento em velocidades mais altas torna-se tão pequeno que pode ser desprezado.

3.3 Preencha os espaços em branco com a palavra adequada:

1. A excitação pode ser de natureza _____, periódica, não periódica ou aleatória.
2. A resposta de um sistema a uma excitação harmônica é denominada resposta _____.
3. A resposta de um sistema a uma excitação não periódica aplicada repentinamente é denominada resposta _____.
4. Quando a freqüência de excitação coincide com a freqüência natural do sistema, a condição é conhecida como _____.
5. O fator de amplificação também é conhecido como fator _____.
6. O fenômeno de _____ pode ocorrer quando a freqüência forçante estiver próxima da freqüência natural do sistema.
7. Quando a base do sistema está sujeita a um movimento harmônico com amplitude Y que resulta em uma amplitude

- de resposta X , a razão $\frac{X}{Y}$ é denominada deslocamento ____.
8. $Z(i\omega) = -m\omega^2 + i\omega c + k$ é denominado ____ mecânico do sistema.
 9. A diferença entre as freqüências associadas a pontos de meia-potência é denominada a ____ do sistema.
 10. O valor do coeficiente de amplitude em ressonância é denominado fator ____.
 11. O amortecimento por atrito seco também é conhecido como amortecimento ____.
 12. Para valores ____ de amortecimento por atrito seco, o movimento da massa será descontínuo.
 13. A quantidade $k(1 + i\beta)$ em amortecimento por histerese é denominada rigidez ____.
 14. Amortecimento quadrático ou de velocidade ao quadrado está presente sempre que um corpo se move em um escoamento de fluido ____.
 15. Em sistemas auto-excitados, o próprio ____ produz a força excitadora.
 16. A tremulação de pás de turbina é um exemplo de vibração ____.
 17. O movimento ____ e o sistema tornam-se instáveis durante auto-excitação.
- 3.4** Selecione a resposta mais adequada entre as várias opções dadas:
1. A resposta de um sistema não amortecido à ressonância será
 (a) muito grande; (b) infinita; (c) zero.
 2. A redução do coeficiente de amplitude na presença de amortecimento é muito significativa.
 (a) próximo a $\omega = \omega_n$
 (b) próximo a $\omega = 0$
 (c) próximo a $\omega = \infty$
 3. A freqüência de batimento é
 (a) $\omega_n - \omega$ (b) ω_n (c) ω
 4. A energia dissipada em um ciclo por amortecimento por atrito seco é dada por
 (a) $4 \mu N X$ (b) $4 \mu N$ (c) $4 \mu N X^2$
 5. A resposta de freqüência complexa, $H(i\omega)$, é definida por
 (a) $\frac{kX}{F_0}$ (b) $\frac{X}{F_0}$ (c) $\left| \frac{kX}{F_0} \right|$
 6. A energia dissipada nas seguintes durações é considerada para determinar a constante de amortecimento viscoso equivalente de um sistema com amortecimento Coulomb:
 (a) meio ciclo; (b) ciclo completo; (c) um segundo.
 7. A força de amortecimento depende da freqüência da força aplicada no caso de
 (a) amortecimento viscoso;
 (b) amortecimento Coulomb;
 (c) amortecimento por histerese.
 8. O sistema governado pela equação $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ é dinamicamente estável se

- (a) k for positiva;
 (b) c e k forem positivos;
 (c) c for positivo.
9. Rrigidez complexa ou amortecimento complexo é definido no caso de
 (a) amortecimento por histerese;
 (b) amortecimento Coulomb;
 (c) amortecimento viscoso.
 10. A equação de movimento de uma máquina (em rotação à freqüência ω) de massa M , com uma massa desbalanceada m , a um raio e , é dada por
 (a) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 \sin \omega t$
 (b) $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 \sin \omega t$
 (c) $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = M\omega^2 \sin \omega t$
 11. A transmissibilidade de força de um sistema sujeito à excitação de base (com amplitude Y) que resulta em uma força transmitida F_T é definida como

$$(a) \frac{F_T}{kY} \quad (b) \frac{X}{kY} \quad (c) \frac{F_T}{k}$$

3.5

Usando a notação:

$$r = \text{razão de freqüências} = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\omega = \text{freqüência forçante}$$

$$\omega_n = \text{freqüência natural}$$

$$\zeta = \text{fator de amortecimento}$$

$$\omega_1, \omega_2 = \text{freqüências correspondentes a pontos de meia-potência}$$

Ligue os itens correspondentes nas duas colunas a seguir:

1. Fator de amplificação de um sistema não amortecido.
 (a) $\frac{2\pi}{\omega_n - \omega}$
2. Período de batimento.
 (b) $\left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2}$
3. Fator de amplificação de um sistema amortecido.
 (c) $\frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}$
4. Freqüência amortecida.
 (d) $\frac{1}{1 - r^2}$
5. Fator de qualidade.
 (e) $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
6. Transmissibilidade de deslocamento.
 (f) $\left[\frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2}$

3.6

Ligue as seguintes equações de movimento à definição correspondente:

- | | |
|--|--|
| (a) Sistema com amortecimento Coulomb. | 1. $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$ |
| (b) Sistema com amortecimento viscoso. | 2. $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 \sin \omega t$ |
| (c) Sistema sujeito à excitação de base. | 3. $m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t)$ |
| (d) Sistema com amortecimento por histerese. | 4. $m\ddot{x} + k(1 + i\beta)x = F_0 \sin \omega t$ |
| (e) Sistema com desbalanceamento rotativo. | 5. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$ |

PROBLEMAS

Os problemas estão organizados da seguinte maneira:

Problemas	Seção correspondente	Tópico correspondente
3.1 a 3.20	3.3	Sistemas não amortecidos
3.21 a 3.40	3.4	Sistemas amortecidos
3.41 a 3.50	3.6	Excitação de base
3.51 a 3.61	3.7	Desbalanceamento rotativo
3.62 a 3.64	3.8	Resposta a amortecimento Coulomb
3.65 a 3.66	3.9	Resposta a amortecimento por histerese
3.67 a 3.70	3.10	Resposta a outros tipos de amortecimento
3.71 a 3.74	3.11	Auto-excitação e estabilidade
3.75 a 3.79	3.12	Exemplos usando MATLAB
3.80 a 3.81	3.13	Programa em C++
3.82 a 3.85	3.14	Programa em FORTRAN
3.86 a 3.87	—	Exercícios de projeto

- 3.1** Um peso de 50 N está suspenso por uma mola de rigidez 4.000 N/m e sujeito a uma força harmônica de amplitude 60 N e freqüência 6 Hz. Determine:
 (a) a extensão da mola devido ao peso suspenso;
 (b) o deslocamento estático da mola devido à máxima força aplicada;
 (c) a amplitude de movimento forçado do peso.
- 3.2** Um sistema massa-mola está sujeito a uma força harmônica cuja freqüência está próxima à freqüência natural do sistema. Se a freqüência forçante for 39,8 Hz e a freqüência natural for 40,0 Hz, determine o período de batimento.
- 3.3** Considere um sistema massa-mola com $k = 4.000 \text{ N/m}$ e $m = 10 \text{ kg}$ sujeito a uma força harmônica $F(t) = 400 \cos 10t \text{ N}$. Determine e construa um gráfico da resposta total do sistema sob as seguintes condições iniciais:
 (a) $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0$
 (b) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$
 (c) $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$
- 3.4** Considere um sistema massa-mola com $k = 4.000 \text{ N/m}$ e $m = 10 \text{ kg}$ sujeito a uma força harmônica $F(t) = 400 \cos 20t \text{ N}$. Determine e construa um gráfico da resposta total do sistema sob as seguintes condições iniciais:
 (a) $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0$
 (b) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$
 (c) $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$
- 3.5** Considere um sistema massa-mola com $k = 4.000 \text{ N/m}$ e $m = 10 \text{ kg}$ sujeito a uma força harmônica $F(t) = 400 \cos 20,1t \text{ N}$. Determine e construa um gráfico da resposta total do sistema sob as seguintes condições iniciais:
 (a) $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0$
 (b) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$
 (c) $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$
- 3.6** Considere um sistema massa-mola com $k = 4.000 \text{ N/m}$ e $m = 10 \text{ kg}$ sujeito a uma força harmônica $F(t) = 400 \cos 30t \text{ N}$. Determine e construa um gráfico da resposta total do sistema sob as seguintes condições iniciais:
 (a) $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0$
 (b) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$
 (c) $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$

- 3.7** Um sistema massa-mola consiste em uma massa que pesa 100 N e uma mola cuja rigidez é 2.000 N/m. A massa está sujeita a ressonância por uma força harmônica $F(t) = 25 \cos \omega t \text{ N}$. Determine a amplitude do movimento forçado no final de
 (a) $\frac{1}{4}$ ciclo;
 (b) $2\frac{1}{2}$ ciclos;
 (c) $5\frac{3}{4}$ ciclos.
- 3.8** Uma massa m está suspensa de uma mola de rigidez 4.000 N/m e está sujeita a uma força harmônica de amplitude 100 N e freqüência 5 Hz. Observa-se que a amplitude do movimento forçado da massa é 20 mm. Determine o valor de m .
- 3.9** Um sistema massa-mola com $m = 10 \text{ kg}$ e $k = 5.000 \text{ N/m}$ está sujeito a uma força harmônica de amplitude 250 N e freqüência ω . Se for constatado que a amplitude máxima da massa é 100 mm, determine o valor de ω .
- 3.10** Na Figura 3.1(a), uma força periódica $F(t) = F_0 \cos \omega t$ é aplicada a um ponto da mola que está localizado a uma distância correspondente a 25% de seu comprimento em relação ao suporte fixo. Admitindo que $c = 0$, determine a resposta em regime permanente da massa m .
- 3.11** Um motor de avião tem uma massa m desbalanceada em rotação no raio r . Se a asa puder ser modelada como uma viga em balanço de seção transversal uniforme $a \times b$, como mostra a Figura 3.34(b), determine a deflexão máxima do motor a uma velocidade de $N \text{ rpm}$. Admita que o amortecimento e o efeito da asa entre o motor e a extremidade livre são desprezíveis.
- 3.12** Uma turbina eólica (Figura 3.35(a)) de três pás tem uma pequena massa m desbalanceada localizada a um raio r no plano das pás. As pás estão localizadas a uma distância R em relação ao eixo vertical central (y) e giram a uma velocidade angular ω . Se a treliça de suporte puder ser modelada como um eixo de aço oco de diâmetro externo 0,1 m e diâmetro interno 0,08 m, determine as tensões máximas desenvolvidas na base do suporte (ponto A). O momento de inércia de massa do sistema da turbina em relação ao eixo vertical (y) é J_0 . Suponha que $R = 0,5 \text{ m}$, $m = 0,1 \text{ kg}$, $r = 0,1 \text{ m}$, $J_0 = 100 \text{ kg.m}^2$, $h = 8 \text{ m}$ e $\omega = 31,416 \text{ rad/s}$.
- 3.13** Uma máquina de ensaio de fadiga eletromagnética é mostrada na Figura 3.36, na qual uma força alternada é aplicada ao corpo de prova por meio da passagem de uma corrente alternada de freqüência f pela armadura. Se o peso da armadura for 40 lb, a rigidez da mola (k_1) for $10.217,0296 \text{ lb/in}$ e a rigidez do corpo de prova de aço for $75 \times 10^4 \text{ lb/in}$ determine a freqüência da corrente alternada que induz uma tensão no corpo de prova igual a duas vezes a quantidade gerada pelos magnétos.
- 3.14** O atuador de mola mostrado na Figura 3.37 funciona usando a pressão do ar de um controlador pneumático (p) como entrada e provocando, como saída, o deslocamento (x) em uma válvula proporcional à pressão do ar de entrada. O diafragma, feito de um tecido à base de borracha, tem uma área A e sofre deflexão sob a pressão do ar de entrada contra uma mola de rigidez k . Determine a resposta da válvula sob uma pressão do ar de entrada que varia harmonicamente, $p(t) = p_0 \sin \omega t$, para os seguintes dados: $p_0 = 10 \text{ psi}$, $\omega = 8 \text{ rad/s}$, $A = 100 \text{ in}^2$, $k = 400 \text{ lb/in}$ peso da mola = 15 lb e peso da válvula e haste da válvula = 20 lb.
- 3.15** No sistema came-seguidor mostrado na Figura 3.38, a rotação do came imprime um movimento vertical ao seguidor. A haste de comando, que age como uma mola, foi comprimida

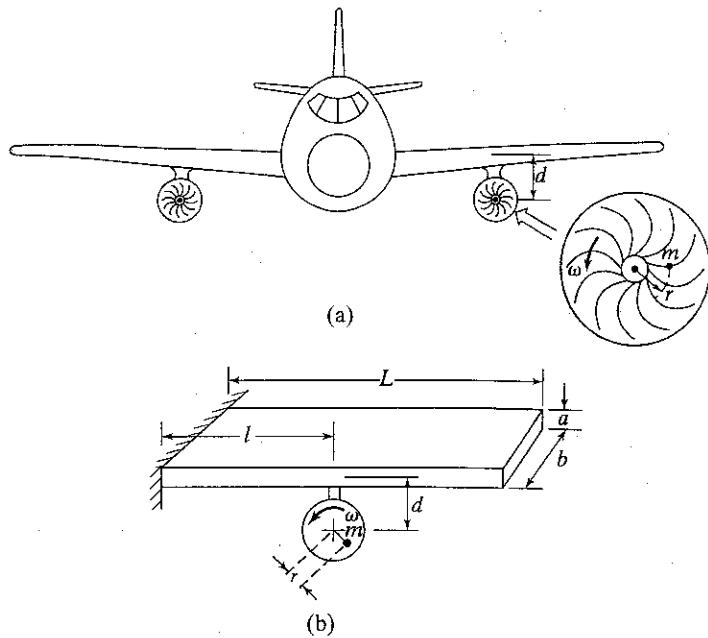


FIGURA 3.34

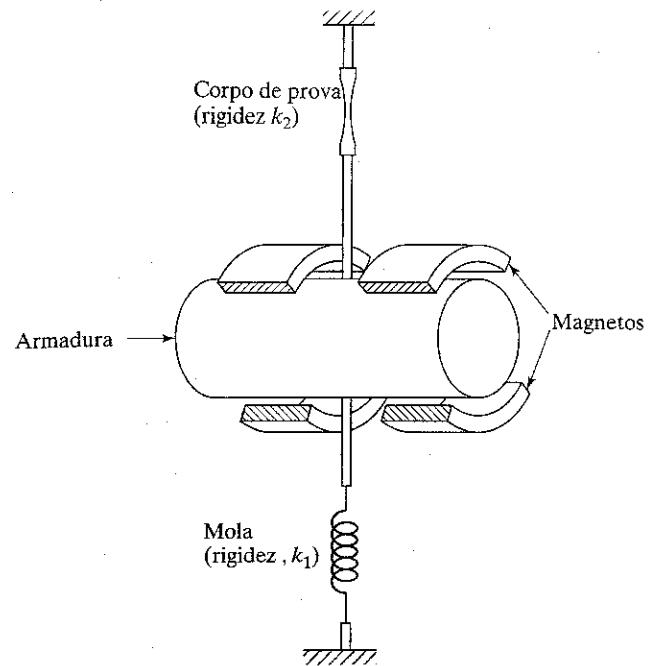


FIGURA 3.36

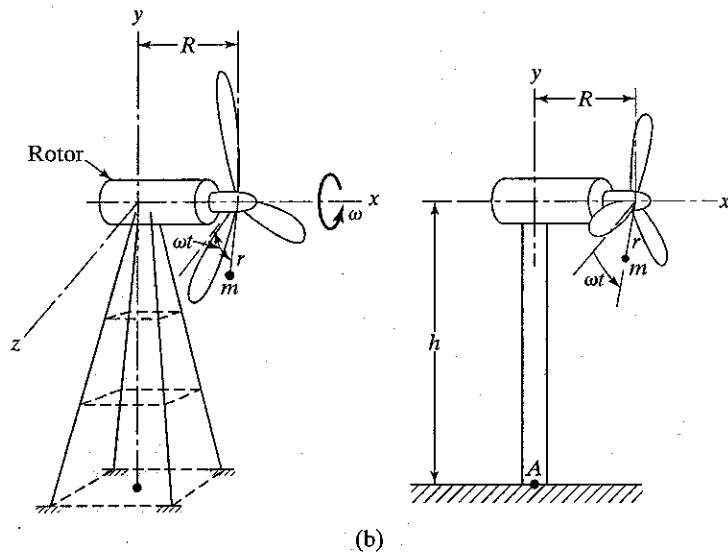
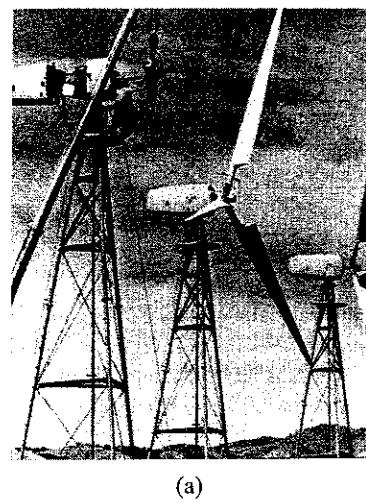


FIGURA 3.35 Turbina eólica com três pás. (Foto por cortesia de Power Transmission Design.)

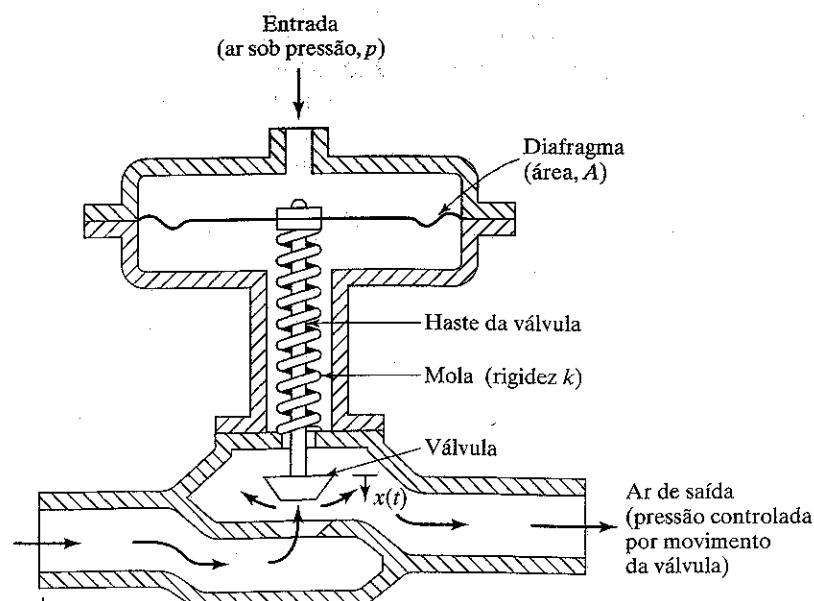


FIGURA 3.37 Um atuador de mola.

mida por uma quantidade x_0 antes da montagem. Determine o seguinte:

- equação de movimento do seguidor, incluindo a força gravitacional;
- a força exercida sobre o seguidor pelo came;
- as condições sob as quais o seguidor perde contato com o came.

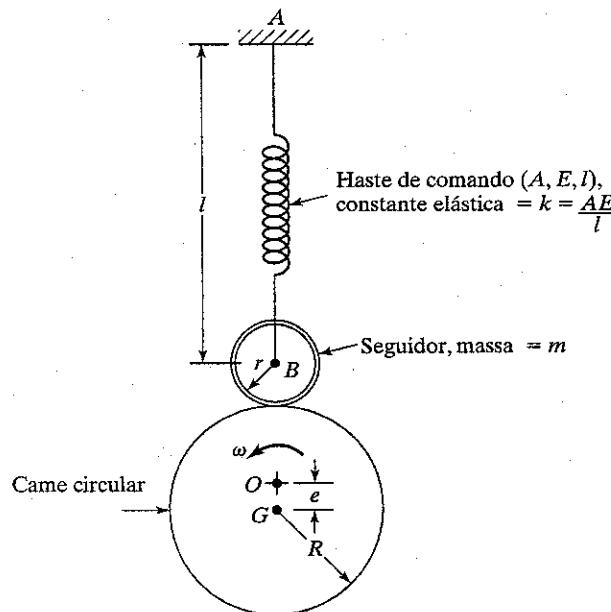


FIGURA 3.38

- 3.16*** Calcule um eixo sólido de aço apoiado em mancais que suporta o rotor de uma turbina no meio. O rotor pesa 500 lb e produz uma potência de 200 hp a 3.000 rpm. Para manter pequena a tensão devido ao desequilíbrio do rotor, a velocidade crítica do eixo deve ser um quinto da velocidade de operação do rotor. O comprimento do eixo deve ser igual a no mínimo 30 vezes o seu diâmetro.

- 3.17** Um eixo de aço oco com 100 in de comprimento, diâmetro externo 4 in e diâmetro interno 3.5 in, apoiado em mancais nas extremidades, suporta, no meio, o rotor de uma turbina que pesa 500 lb. A folga entre o rotor e o estator é 0,5 in e o rotor tem uma excentricidade equivalente a um peso de 0,5 lb a um raio de 2 in. Uma chave limitadora é instalada para parar o rotor sempre que ele tocar o estator. Se o rotor funcionar em ressonância, quanto tempo levará para ativar a chave limitadora? Suponha que o deslocamento e a velocidade do rotor perpendicular ao eixo sejam zero.

- 3.18** Uma viga de aço em balanço que suporta um peso de 0,1 lb em sua extremidade livre é usada como medidor de frequência.⁶ A viga tem comprimento de 10 in, largura de 0,2 in e espessura de 0,05 in. O atrito interno é equivalente a um fator de amortecimento de 0,01. Observou-se que, quando a extremidade fixa da viga é sujeita a um deslocamento harmônico $y(t) = 0,05 \cos \omega t$, o deslocamento máximo da ponta é de 2,5 in. Determine a frequência forçante.

- 3.19** Derive a equação de movimento e determine a resposta em regime permanente do sistema mostrado na Figura 3.39 para movimento rotacional em relação à articulação O para os seguintes dados: $k_1 = k_2 = 5.000 \text{ N/m}$, $a = 0,25 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$,

$l = 1 \text{ m}$, $M = 50 \text{ kg}$, $m = 10 \text{ kg}$, $F_0 = 500 \text{ N}$, $\omega = 1.000 \text{ rpm}$.

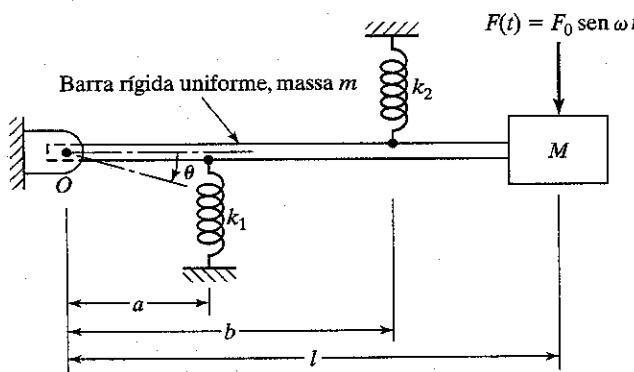


FIGURA 3.39

- 3.20** Derive a equação de movimento e determine a solução em regime permanente do sistema mostrado na Figura 3.40 para movimento rotacional em relação à articulação O para os seguintes dados: $k = 5.000 \text{ N.m}$, $l = 1 \text{ m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $M_0 = 100 \text{ N.m}$, $\omega = 1.000 \text{ rpm}$.

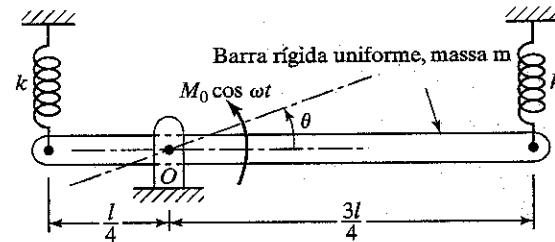


FIGURA 3.40

- 3.21** Considere um sistema massa-mola-amortecedor com $k = 4.000 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$ e $c = 40 \text{ N.s/m}$. Determine a resposta em regime permanente e as respostas totais do sistema sob a força harmônica $F(t) = 200 \cos 10t \text{ N}$ e as condições iniciais $x_0 = 0,1 \text{ m}$ e $\dot{x}_0 = 0$.

- 3.22** Considere um sistema massa-mola-amortecedor com $k = 4.000 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$ e $c = 40 \text{ N.s/m}$. Determine a resposta em regime permanente e as respostas totais do sistema sob a força harmônica $F(t) = 200 \cos 10t \text{ N}$ e as condições iniciais $x_0 = 0$ e $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$.

- 3.23** Considere um sistema massa-mola-amortecedor com $k = 4.000 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$ e $c = 40 \text{ N.s/m}$. Determine a resposta em regime permanente e as respostas totais do sistema sob a força harmônica $F(t) = 200 \cos 20t \text{ N}$ e as condições iniciais $x_0 = 0,1 \text{ m}$ e $\dot{x}_0 = 0$.

- 3.24** Considere um sistema massa-mola-amortecedor com $k = 4.000 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$ e $c = 40 \text{ N.s/m}$. Determine a resposta em regime permanente e as respostas totais do sistema sob a força harmônica $F(t) = 200 \cos 20t \text{ N}$ e as condições iniciais $x_0 = 0,1$ e $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$.

- 3.25** Um automóvel com motor de quatro cilindros deve ser apoiado sobre três suportes amortecedores, como indicado na Figura 3.41. O conjunto do bloco do motor pesa 500 lb. Se a força desbalanceada gerada pelo motor for dada por $200 \sin 100\pi t \text{ lb}$, calcule os três suportes amortecedores (cada um com rigidez k e constante de amortecimento viscoso c), de modo tal que a amplitude de vibração seja menor que 0,1 in.

* O asterisco denota um problema do tipo de projeto ou um problema que não tem resposta única.

⁶ A utilização de vigas em balanço como medidores de frequência é discutida com detalhes na Seção 10.4.

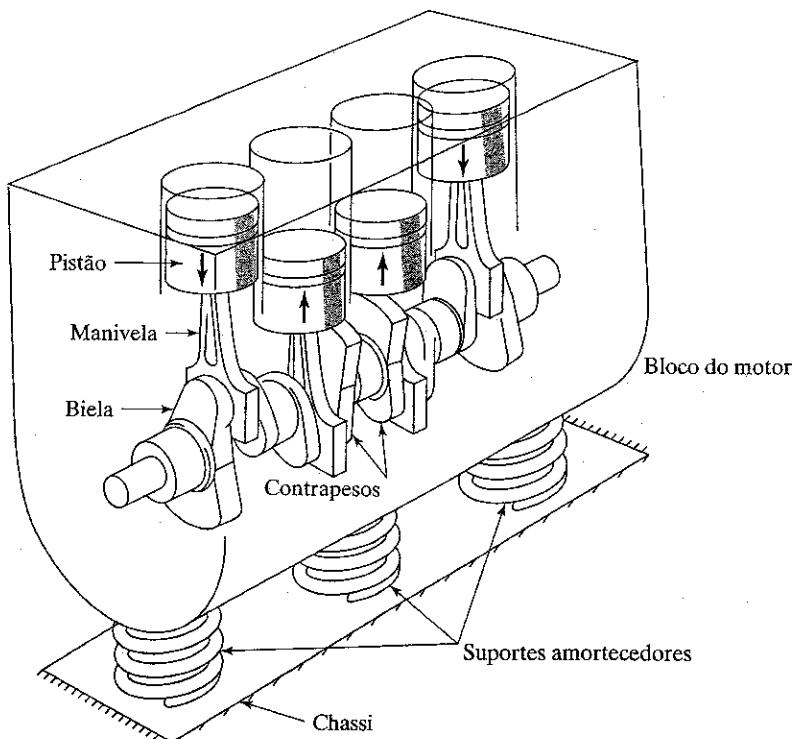


FIGURA 3.41 Motor de automóvel de quatro cilindros.

- 3.26 A hélice de um navio, com 10^5 N de peso e momento de inércia de massa polar de 10.000 kgm^2 está ligada ao motor por meio de um eixo de hélice de aço oco escalonado, como mostra a Figura 3.42. Supondo que a água provê um fator de amortecimento viscoso de 0,1, determine a resposta da hélice à vibração por torção quando o motor induzir um deslocamento angular harmônico de $0,05 \text{ sen } 314,16 t \text{ rad}$ na base (ponto A) do eixo da hélice.
- 3.27 Determine a razão de freqüências $r = \omega/\omega_n$ ao qual a amplitude de um sistema amortecido com um grau de liberdade atinge o valor máximo. Determine também o valor da amplitude máxima.
- 3.28 A Figura 3.43 mostra um amperímetro de bobina móvel de magneto permanente. Quando a corrente (I) passa pela bobina

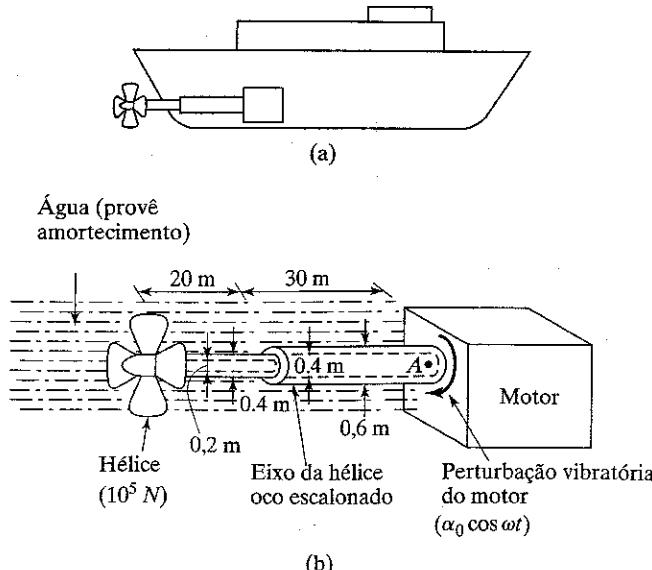


FIGURA 3.42 Hélice de um navio.

enrolada no núcleo, o núcleo gira a um ângulo proporcional à magnitude da corrente que é indicada pelo ponteiro em uma escala. O núcleo, mais a bobina, tem um momento de inércia massa J_0 , a constante de torção da mola é k_t e o amortecedor por torção tem uma constante de amortecimento c_t . A escala do amperímetro é calibrada de modo tal que, quando uma corrente constante de magnitude 1 ampère passa pela bobina, o ponteiro indica uma corrente de 1 ampère. O medidor tem de ser calibrado novamente para medir a magnitude de uma corrente alternada. Determine o valor da corrente indicada pelo ponteiro quando uma corrente alternada de magnitude 5 ampères e freqüência 50 Hz passa pela bobina. Suponha que $J_0 = 0,001 \text{ N/m}^2$, $k_t = 62,5 \text{ N/m/rad}$ e $c_t = 0,5 \text{ N/m.s/rad}$.

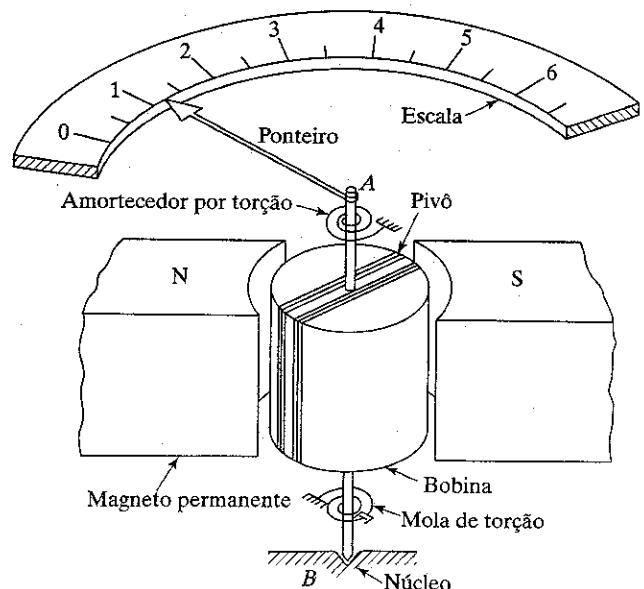


FIGURA 3.43 Amperímetro de bobina móvel e magneto permanente.

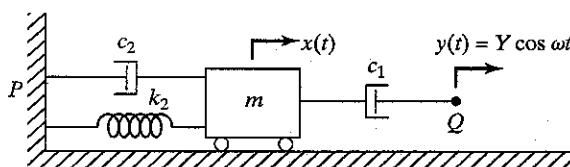


FIGURA 3.44

- 3.29 Um sistema massa-mola-amortecedor está sujeito a uma força harmônica. Constatou-se que a amplitude é 20 mm em ressonância e 10 mm a uma freqüência 0,75 vezes a freqüência de ressonância. Determine o fator de amortecimento do sistema.

- 3.30 Para o sistema mostrado na Figura 3.44, x e y denotam, respectivamente, os deslocamentos absolutos da massa m e a da extremidade Q do amortecedor de mola c_1 .

- Determine a equação de movimento da massa m .
- Determine o deslocamento em regime permanente da massa m .
- Determine a força transmitida ao suporte em P , quando a extremidade Q está sujeita ao movimento harmônico $y(t) = Y \cos \omega t$.

- 3.31 Mostre que, para pequenos valores de amortecimento, o fator de amortecimento ζ pode ser expresso como

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1}$$

onde ω_1 e ω_2 são as freqüências correspondentes aos pontos de meia-potência.

- 3.32 Um sistema torcional consiste em um disco de momento de inércia de massa $J_0 = 10 \text{ kg.m}^2$, um amortecedor de torção com uma constante de amortecimento $c_t = 300 \text{ N.m.s/rad}$ e um eixo de aço de 4 cm de diâmetro e 1 m de comprimento (fixado em uma extremidade e ligado ao disco na outra extremidade). Observa-se uma oscilação angular constante de amplitude 2° quando um torque harmônico de magnitude 1000 N.m é aplicado ao disco.

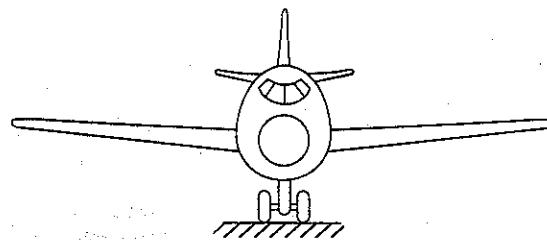
- Determine a freqüência do torque aplicado.
- Determine o torque máximo transmitido ao suporte.

- 3.33 Para um sistema vibratório, $m = 10 \text{ kg}$, $k = 2.500 \text{ N/m}$ e $c = 45 \text{ N.s/m}$. Uma força harmônica de amplitude 180 N e freqüência 3,5 Hz age sobre a massa. Se o deslocamento e a velocidade iniciais da massa são 15 mm e 5 m/s, determine a solução completa que representa o movimento da massa.

- 3.34 Observou-se que a amplitude de pico de um sistema com um grau de liberdade sob uma excitação harmônica é 0,2 in. Se a freqüência natural não amortecida do sistema for 5 Hz e a deflexão estática da massa sob a força máxima for 0,1 in:
- estime o fator de amortecimento do sistema;
 - determine as freqüências correspondentes às amplitudes de meia-potência.

- 3.35 O trem de aterrissagem de um avião pode ser idealizado como o sistema massa-mola-amortecedor mostrado na Figura 3.45. Se a superfície da pista for descrita por $y(t) = y_0 \cos \omega t$, determine os valores de k e c que limitam a amplitude de vibração do avião (x) a 0,1 m. Suponha $m = 2.000 \text{ kg}$, $y_0 = 0,2 \text{ m}$ e $\omega = 157,08 \text{ rad/s}$.

- 3.36 Uma retífica (Figura 3.46) está apoiada sobre um isolador que tem uma rigidez de 1 MN/m e uma constante de amortecimento viscoso de 1 kN.s/m . O piso sobre o qual a máquina está montada está sujeito a uma perturbação harmônica devido ao funcionamento de um motor desbalanceado próximo à retífica. Determine a máxima amplitude de deslocamento aceitável do piso se a amplitude de vibração resultante da roda de esmeril deve ficar restrita a 10^{-6} m . Suponha que a retífica e o esmeril são um corpo rígido com 5.000 N de peso.



Carcaça com escora e amortecimento

(a)

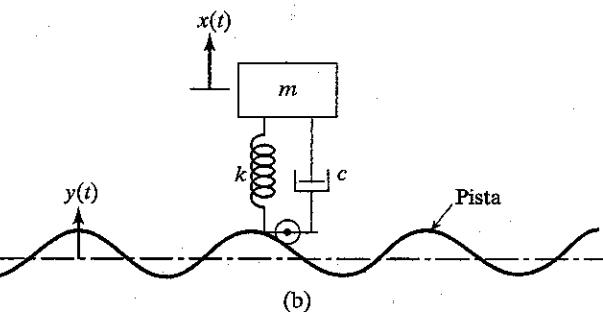
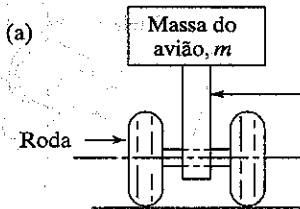


FIGURA 3.45 Modelagem de trem de aterrissagem.

- 3.37 Derive a equação de movimento e determine a resposta em regime permanente do sistema mostrado na Figura 3.47 para movimento rotacional em relação ao ponto de articulação O para os seguintes dados: $k = 5.000 \text{ N/m}$, $l = 1 \text{ m}$, $c = 1.000 \text{ N.s/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $M_0 = 100 \text{ N.m}$, $\omega = 1.000 \text{ rpm}$.

- 3.38 Um compressor de ar de 100 kg de massa está montado sobre uma fundação elástica. Observou-se que, quando uma força harmônica de amplitude 100 N é aplicada ao compressor, o deslocamento máximo em regime permanente de 5 mm ocorreu à freqüência de 300 rpm. Determine a constante de rigidez e de amortecimento equivalente da fundação.

- 3.39 Determine a resposta em regime permanente do sistema mostrado na Figura 3.48 para os seguintes dados: $k_1 = 1.000 \text{ N/m}$, $k_2 = 500 \text{ N/m}$, $c = 500 \text{ N.s/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $r = 5 \text{ cm}$, $J_0 = 1 \text{ kg.m}^2$, $F_0 = 50 \text{ N}$, $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

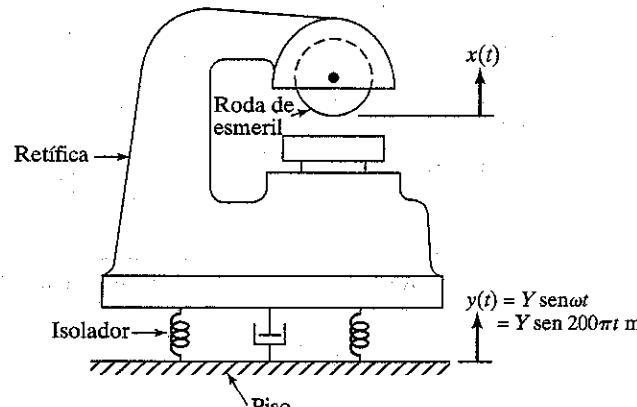


FIGURA 3.46

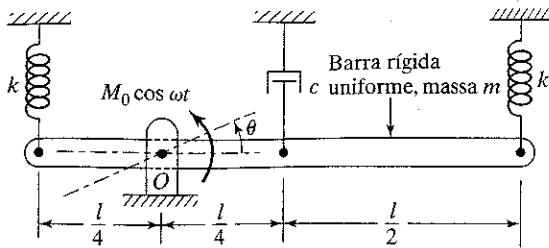


FIGURA 3.47

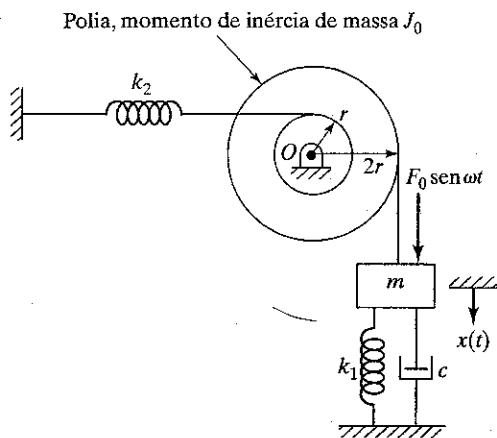
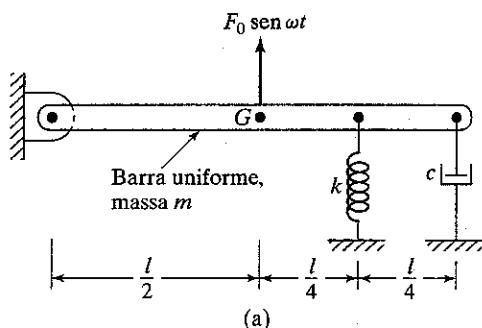
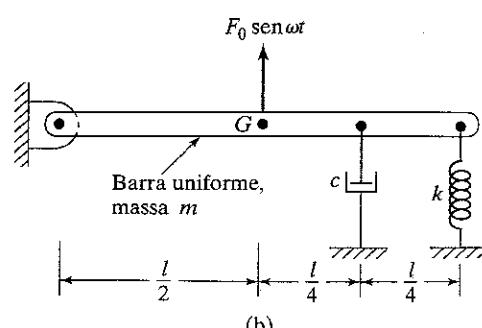


FIGURA 3.48

- 3.40** Uma barra delgada uniforme de massa m pode ser suportada de um dos dois modos indicados na Figura 3.49. Determine o arranjo que resulta em uma resposta reduzida em regime permanente da barra sob uma força harmônica, $F_0 \cos \omega t$, aplicada no ponto médio da barra, como mostra a figura.
- 3.41** A estrutura de um edifício de um andar está sujeita a uma aceleração harmônica do solo, como mostra a Figura 3.50. Determine o movimento em regime permanente do piso (massa m).



(a)



(b)

FIGURA 3.49

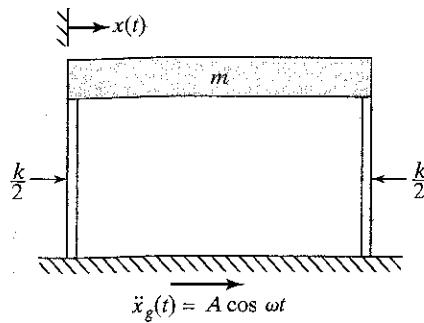


FIGURA 3.50

- 3.42** Determine o deslocamento horizontal do piso (massa m) da estrutura de edifício mostrada na Figura 3.50 quando a aceleração do solo é dada por $\ddot{x}_g = 100 \sin \omega t$ mm/s. Suponha que $m = 2.000$ kg, $k = 0,1$ MN/m, $\omega = 25$ rad/s e $x_g(t = 0) = \dot{x}_g(t = 0) = x(t = 0) = \dot{x}(t = 0) = 0$.
- 3.43** Se o solo estiver sujeito a um deslocamento harmônico horizontal com freqüência $\omega = 200$ rad/s e amplitude $X_g = 15$ mm na Figura 3.50, determine a amplitude de vibração do piso (massa m). Suponha que a massa do piso seja 2.000 kg e a rigidez das colunas é 0,5 MN/m.
- 3.44** Um automóvel é modelado como um sistema com um grau de liberdade que vibra no sentido vertical e está percorrendo uma estrada na qual a variação da elevação é senoidal. A distância entre pico e vale é 0,2 m e a distância entre picos ao longo da estrada é 35 m. Se a freqüência natural do automóvel for 2 Hz e o fator de amortecimento dos amortecedores de choque for 0,15, determine a amplitude de vibração do automóvel a uma velocidade de 60 km/hora. Se a velocidade do automóvel variar, determine a velocidade menos desfavorável para os passageiros.
- 3.45** Derive a Equação (3.74).
- 3.46** A estrutura de um edifício de um andar é modelada por um piso rígido de massa m e colunas de rigidez k , como mostra a Figura 3.51. Propõe-se que seja acrescentado um amortecedor mostrado na figura para absorver vibrações devido a um movimento horizontal do solo $y(t) = Y \cos \omega t$. Derive uma expressão para a constante de amortecimento do amortecedor que absorve potência máxima.
- 3.47** Uma barra uniforme de massa m é articulada no ponto O e apoiada nas extremidades por duas molas, como mostra a Figura 3.52. A extremidade P da mola PQ está sujeita a um deslocamento senoidal, $x(t) = x_0 \sin \omega t$. Determine o deslocamento angular em regime permanente da barra quando $l = 1$ m, $k = 1.000$ N/m, $m = 10$ kg, $x_0 = 1$ cm e $\omega = 10$ rad/s.

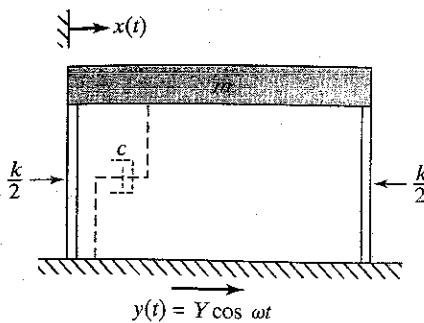


FIGURA 3.51

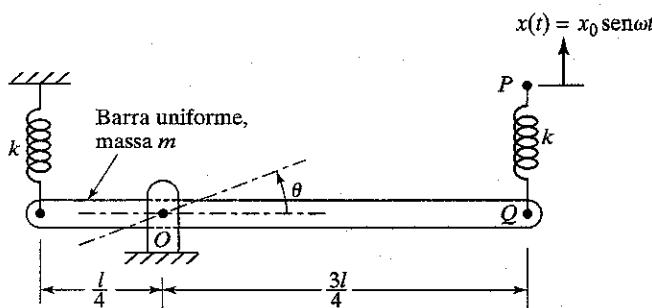


FIGURA 3.52

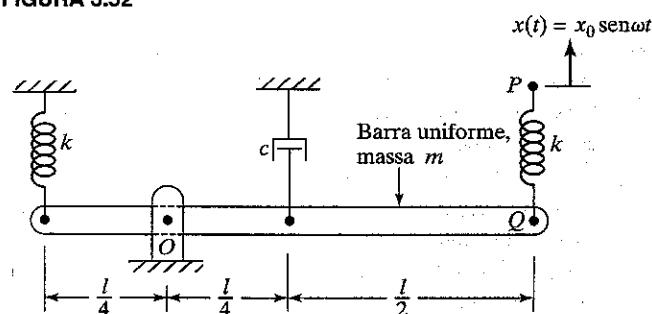


FIGURA 3.53

- 3.48 Uma barra uniforme de massa m é articulada no ponto O e apoiada nas extremidades por duas molas, como mostra a Figura 3.53. A extremidade P da mola PQ está sujeita a um deslocamento senoidal, $x(t) = x_0 \operatorname{sen} \omega t$. Determine o deslocamento angular em regime permanente da barra quando $l = 1$ m, $k = 1.000$ N/m, $c = 500$ N.s/m, $m = 10$ kg, $x_0 = 1$ cm e $\omega = 10$ rad/s.

- 3.49 Determine a razão de freqüências, $r = r_m$, à qual a transmissibilidade de deslocamento dada pela Equação (3.68) atinge um valor máximo.

- 3.50 Um automóvel que pesa 1.000 lb vazio e 3.000 lb totalmente carregado vibra em sentido vertical quando desenvolve uma velocidade de 55 mph em uma estrada acidentada que tem uma forma de onda senoidal com amplitude Y ft e período 12 ft. Supondo que o automóvel pode ser modelado como um sistema de um grau de liberdade com rigidez 30.000 lb/ft e fator de amortecimento $\zeta = 0,2$, determine a amplitude de vibração do automóvel quando:

- está vazio;
- totalmente carregado.

- 3.51 Um compressor de ar de um cilindro com 100 kg de massa está montado sobre suportes de borracha, como mostra a Figura 3.54. As constantes de rigidez e amortecimento dos suportes de borracha são dadas por 10^6 N/m e 2000 N.s/m, respectivamente. Se o desequilíbrio do compressor for equivalente à massa de 0,1 kg localizada na extremidade da manivela (ponto A), determine a resposta do compressor à velocidade da manivela de 3.000 rpm. Suponha que $r = 10$ cm e $l = 40$ cm.

- 3.52 Uma das pás do rotor da cauda de um helicóptero tem uma massa desbalanceada de $m = 0,5$ kg a uma distância $e = 0,15$ m do eixo de rotação, como mostra a Figura 3.55. A seção da cauda tem comprimento de 4 m, massa de 240 kg, rigidez à flexão (EI) de $2,5$ MN/m 2 e fator de amortecimento de 0,15. A massa das pás do rotor traseiro, incluindo seu sistema de acionamento, é 20 kg. Determine a resposta forçada da seção da cauda quando as pás giram a 1.500 rpm.

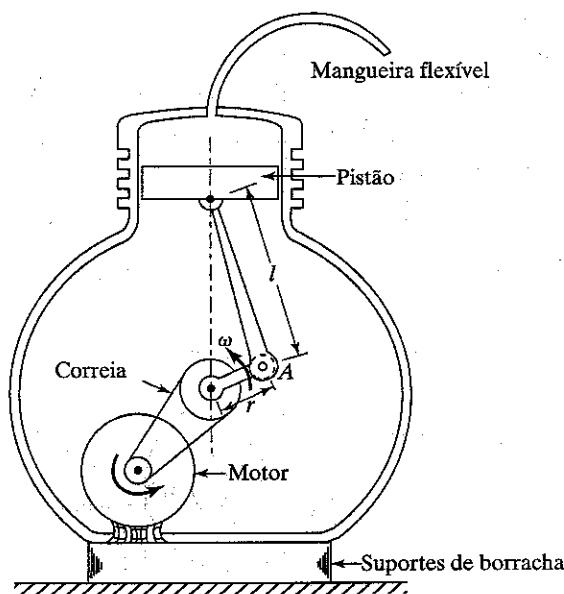


FIGURA 3.54

- 3.53 Quando um exaustor de 380 kg de massa está apoiado sobre molas com amortecimento desprezível, constata-se que a deflexão estática resultante é de 45 mm. Se o exaustor tiver um desbalanceamento rotativo de 0,15 kgm, determine:
- a amplitude de vibração a 1.750 rpm;
 - a força transmitida ao solo a essa velocidade.

- 3.54 Uma viga de aço fixa dos dois lados, com 5 m de comprimento, 0,5 m de largura e 0,1 m de espessura, suporta um motor elétrico de 75 kg de massa e velocidade 1.200 rpm no meio do vão, como mostra a Figura 3.56. Uma força rotativa de magnitude $F_0 = 5.000$ N é desenvolvida devido ao desequilíbrio do rotor do motor. Determine a amplitude das vibrações em regime permanente desconsiderando a massa da viga. Qual será a amplitude se a massa da viga for considerada?

- 3.55* Se o motor elétrico do Problema 3.54 tiver de ser montado na extremidade de uma viga de aço em balanço de comprimento 5 m (Figura 3.57) e a amplitude de vibração tiver de ser limitada a 0,5 cm, determine as dimensões necessárias da seção transversal da viga. Inclua o peso da viga no cálculo.

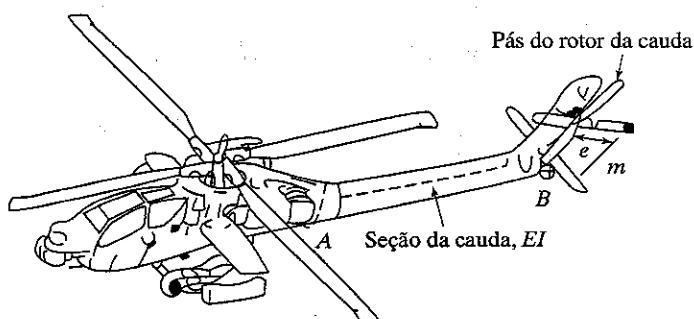


FIGURA 3.55

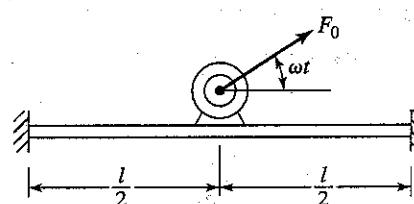


FIGURA 3.56

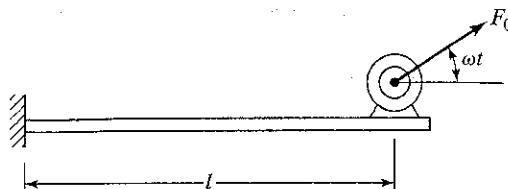


FIGURA 3.57

- 3.56** Uma bomba centrífuga que pesa 600 N e funciona a 1.000 rpm está montada sobre seis molas de rigidez 6.000 N/m cada. Determine o máximo desequilíbrio permitível de modo a limitar a deflexão em regime permanente a 5 mm de pico a pico.
- 3.57*** Um compressor de ar com 1.000 lb de peso e velocidade de funcionamento 1.500 rpm deve ser montado sobre um isolador adequado. Um mola helicoidal com rigidez de 45.000 lb/in, outra mola helicoidal com rigidez de 15.000 lb/in e um absorvedor de choque com um fator de amortecimento de 0,15 estão disponíveis para uso. Escolha o melhor sistema de isolamento possível para o compressor.
- 3.58** Um motor elétrico de velocidade variável, desbalanceado, está montado sobre um isolador. Observou-se que, à medida que a velocidade do motor aumenta a partir de zero, as amplitudes de vibração do motor são 0,55 in em ressonância e 0,15 in quando ultrapassa a ressonância. Determine o fator de amortecimento do isolador.
- 3.59** Um motor elétrico que pesa 750 lb e funciona a 1.800 rpm está apoiado sobre quatro molas helicoidais de aço, cada uma com oito espiras ativas, diâmetro do arame de 0,25 in e diâmetro do enrolamento de 3 in. O rotor pesa 100 lb, e seu centro de massa está localizado a uma distância de 0,01 in do eixo de rotação. Determine a amplitude de vibração do motor e a força transmitida à base pelas molas.
- 3.60** Um pequeno exaustor, que gira a 1.500 rpm, está montado em um eixo de aço de 0,2. O rotor do ventilador pesa 30 lb e tem uma excentricidade de 0,01 in em relação ao eixo de rotação. Determine:
 (a) a máxima força transmitida aos mancais;
 (b) a potência necessária para acionar o eixo.
- 3.61** Uma placa rígida com 100 lb de peso é articulada ao longo de uma borda (*P*) e apoia sobre um amortecedor de mola com $c = 1 \text{ lb./s/in}$ na borda oposta (*Q*), como mostra a Figura 3.58. Um pequeno exaustor com 50 lb de peso, que gira a 750 rpm é montado sobre a placa por meio de uma mola com $k = 200 \text{ lb/in}$. Se o centro de gravidade do exaustor estiver localizado a 0,1 in de seu eixo de rotação, determine o movimento em regime permanente da borda *Q* e a força transmitida ao ponto *S*.
- 3.62** Derive Equação (3.99).

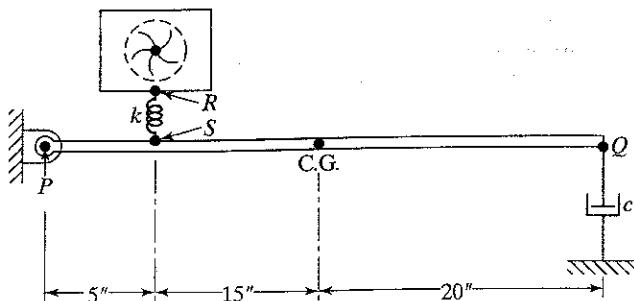


FIGURA 3.58

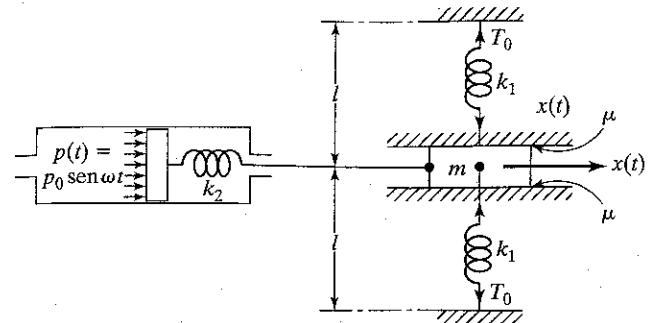


FIGURA 3.59

- 3.63** Derive a equação de movimento da massa *m* mostrada na Figura 3.59 quando a variação da pressão no cilindro for senoidal. As duas molas com rigidez k_1 estão inicialmente sob uma tensão T_0 , e o coeficiente de atrito entre a massa e as superfícies de contato é μ .
- 3.64** Um sistema massa-mola está sujeito a amortecimento Coulomb. Quando é aplicada uma força harmônica de amplitude 120 N e freqüência 2,5173268 Hz, constata-se que o sistema oscila com uma amplitude de 75 mm. Determine o coeficiente de atrito seco se $m = 2 \text{ kg}$ e $k = 2.100 \text{ N/m}$.
- 3.65** Uma carga de 5.000 N provocou um deslocamento estático de 0,05 m em uma estrutura composta. Constata-se que uma força harmônica de amplitude 1.000 N causa uma amplitude de ressonância de 0,1 m. Determine:
 (a) a constante de amortecimento por histerese da estrutura;
 (b) a energia dissipada por ciclo em ressonância;
 (c) a amplitude em regime permanente a um quarto da freqüência de ressonância;
 (d) a amplitude em regime permanente a três vezes a freqüência de ressonância.
- 3.66** A energia dissipada em amortecimento por histerese por ciclo sob excitação harmônica pode ser expressa na forma geral

$$\Delta W = \pi \beta k X^\gamma \quad (\text{E.1})$$
 onde γ é um expoente ($\gamma = 2$ foi considerado na Equação 2.131) e β é um coeficiente de dimensão (metro) $^{2-\gamma}$. Um sistema massa-mola com $k = 60 \text{ kN/m}$ vibra sob amortecimento por histerese. Quando excitado harmonicamente em ressonância, constata-se que a amplitude em regime permanente é 40 mm para uma energia aplicada de 3,8 N/m. Quando a energia de ressonância aplicada é aumentada para 9,5 N/m, constata-se que a amplitude é 60 mm. Determine os valores de β e γ na Equação (E.1).
- 3.67** Quando um sistema massa-mola-amortecedor está sujeito a uma força harmônica $F(t) = 5 \cos 3\pi t \text{ lb}$, o deslocamento resultante é dado por $x(t) = 0,5 \cos(3\pi t - \pi/3)$. Determine o trabalho realizado:
 (a) durante o primeiro segundo;
 (b) durante os 4 primeiros segundos.
- 3.68** Determine a constante de amortecimento viscoso equivalente de um amortecedor que oferece uma força de amortecimento $F_d = c(\dot{x})^n$, onde c e n são constantes e \dot{x} é a velocidade relativa no amortecedor. Determine também a amplitude de vibração.
- 3.69** Mostre que, para um sistema com amortecimento Coulomb e amortecimento viscoso, o valor aproximado da amplitude em regime permanente é dado por

$$X^2 [k^2(1 - r^2)^2 + c^2\omega^2] + X \frac{8\mu N c \omega}{\pi} + \left(\frac{16\mu^2 N^2}{\pi^2} - F_0^2 \right) = 0$$

- 3.70** A equação de movimento de um sistema massa-mola-amortecedor sistema é dada por

$$m\ddot{x} \pm \mu N + c\dot{x}^3 + kx = F_0 \cos \omega t$$

Derive expressões para:

- (a) a constante de amortecimento viscoso equivalente;
- (b) a amplitude em regime permanente;
- (c) o coeficiente de amplitude em ressonância.

- 3.71** Um fluido com densidade ρ escoa por uma tubulação de aço em balanço de comprimento l e área de seção transversal A (Figura 3.60). Determine a velocidade (v) do fluido à qual ocorre instabilidade. Admita que a massa total e a resistência à curvatura da tubulação são m e EI , respectivamente.

- 3.72** As duas primeiras freqüências naturais da antena telescópica do carro mostrada na Figura 3.61 são dadas por 3,0 Hz e 7,0 Hz. Determine se a emissão de vórtices ao redor da antena causa instabilidade na faixa de velocidade 50 a 75 mph do automóvel.

- 3.73** O luminoso de um restaurante *fast-food* consiste em um cilindro de aço de altura h , diâmetro interno d , e diâmetro externo D que está fixado ao solo e suporta uma massa concentrada M na extremidade superior. Para analisar suas características de vibração transversal sob excitação do vento, o luminoso pode ser modelado como um sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade com um fator de amortecimento viscoso equivalente de 0,1. Determine o seguinte:

- (a) a freqüência natural de vibração transversal do luminoso;
- (b) a velocidade do vento à qual o luminoso sofre máxima deslocamento em regime permanente;
- (c) o máximo deslocamento do luminoso em regime permanente induzido pelo vento.

Dados: $h = 10$ m, $D = 25$ cm, $d = 20$ cm, $M = 200$ kg.

- 3.74** Considere a equação de movimento de um sistema com um grau de liberdade:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

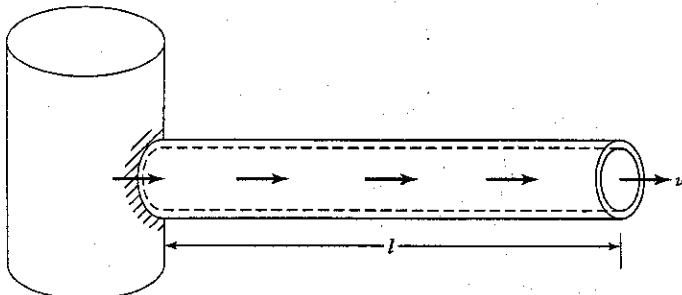


FIGURA 3.60

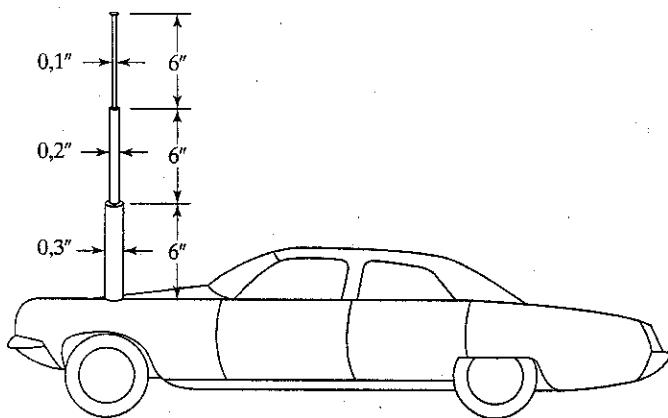


FIGURA 3.61

Derive a condição que resulta em oscilações divergentes em cada um os seguintes casos:

- (a) quando a função forçante é proporcional ao deslocamento, $F(t) = F_0x(t)$;
- (b) quando a função forçante é proporcional à velocidade, $F(t) = F_0\dot{x}(t)$;
- (c) quando a função forçante é proporcional à aceleração, $F(t) = F_0\ddot{x}(t)$.

- 3.75** Desenhe o gráfico da resposta forçada de um sistema massa-mola não amortecido sob as seguintes condições, usando Matlab: $m = 10$ kg, $k = 4.000$ N/m, $F(t) = 200 \cos 10t$ N, $x_0 = 0,1$ m, $\dot{x}_0 = 10$ m/s.

- 3.76** Desenhe o gráfico da resposta forçada de um sistema massa-mola sujeito a amortecimento Coulomb usando Matlab. Suponha os seguintes dados: $m = 10$ kg, $k = 4.000$ N/m, $F(t) = 200 \cos 10t$ N, $\mu = 0,3$, $x_0 = 0,1$ m, $\dot{x}_0 = 10$ m/s.

- 3.77** Desenhe o gráfico da resposta de um sistema viscosamente amortecido sob excitação harmônica da base, $y(t) = Y \sin \omega t$ m, usando Matlab para os seguintes dados: $m = 100$ kg, $k = 4 \times 10^4$ N/m, $\zeta = 0,25$, $Y = 0,05$ m, $\omega = 10$ rad/s, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1$ m.

- 3.78** Construa o gráfico para a resposta em regime permanente de um sistema viscosamente amortecido sob a força harmônica $F(t) = F_0 \cos \omega t$ usando Matlab. Suponha os seguintes dados: $m = 10$ kg, $k = 1.000$ N/m, $\zeta = 0,1$, $F_0 = 100$ N, $\omega = 20$ rad/s.

- 3.79** Considere um automóvel que percorre uma estrada irregular a uma velocidade de v km/h. O sistema de suspensão tem uma constante elástica de 40 kN/m e um fator de amortecimento de $\zeta = 0,1$. A variação da superfície da estrada é senoidal com uma amplitude de $Y = 0,05$ m e um comprimento de onda de 6 m. Escreva um programa Matlab para determinar a amplitude de deslocamento do automóvel para as seguintes condições:

- (a) massa do automóvel (vazio) 600 kg, (carregado) 1.000 kg;
- (b) velocidade do automóvel (v): 10 km/h, 50 km/h, 100 km/h.

- 3.80** Utilizando Program3.cpp, determine a resposta em regime permanente de um sistema torcional com $J_0 = 6$ kg/m², $c_t = 210$ N.m.s/rad, $k_t = 14.000$ Nm/rad e $F(t) = 450 \sin 10t$ N.m.

- 3.81** Utilizando Program3.cpp, determine a solução em regime permanente de um sistema com um grau de liberdade com $m = 10$ kg, $c = 45$ N.s/m, $k = 2.500$ N/m, $F(t) = 180 \cos 20t$ N, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10$ m/s.

- 3.82** Use a sub-rotina HARESP para determinar a resposta em regime permanente de um sistema torcional com $J_0 = 6$ kg/m², $c_t = 210$ N.m.s/rad, $k_t = 14.000$ N.m/rad e $F(t) = 450 \sin 10t$ N.m.

- 3.83** Escreva uma sub-rotina denominada TOTALR para determinar a solução completa (parte homogênea mais integral particular) de um sistema com um grau de liberdade. Use esse programa para determinar a solução do Problema 3.33.

- 3.84** Determine a solução em regime permanente de um sistema com um grau de liberdade com $m = 10$ kg, $c = 45$ N.s/m, $k = 2.500$ N/m, $F(t) = 180 \cos 20t$ N e $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10$ m/s, usando a sub-rotina HARESP.

- 3.85** Escreva um programa de computador para determinar a resposta total de um sistema massa-mola-amortecedor viscoso sujeito à excitação de base. Use esse programa para determinar a solução de um problema com $m = 2$ kg, $c = 10$ N.s/m, $k = 100$ N/m, $y(t) = 0,1 \sin 25t$ m, $x_0 = 10$ mm, $\dot{x}_0 = 5$ m/s.

EXERCÍCIOS DE PROJETO

- 3.86 O arranjo mostrado na Figura 3.62 consiste em duas massas excêntricas que giram em sentidos opostos à mesma velocidade ω . O arranjo deve ser usado como um agitador mecânico em uma faixa de freqüência de 20 a 30 Hz. Determine os valores de ω , e , M , m , k e c que satisfazem os seguintes requisitos:
- a potência média resultante do agitador deve ser no mínimo 1 hp acima da faixa de freqüência especificada;
 - a amplitude de vibração das massas deve estar entre 0,1 e 0,2 in;
 - a massa do agitador (M) deve ser no mínimo 50 vezes a da massa excêntrica (m).

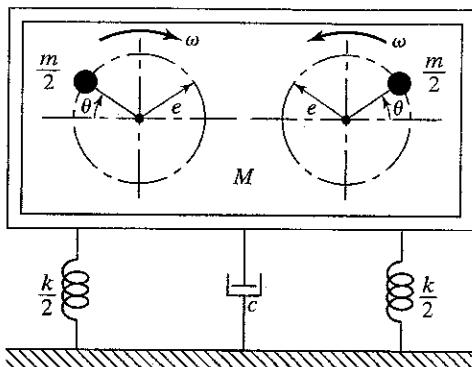


FIGURA 3.62

- 3.87 Calcule uma coluna circular de aço, oca, de peso mínimo, para o reservatório de água mostrado na Figura 3.63. O peso do tanque (W) é 100.000 lb e a altura é 50 ft. A tensão induzida na coluna não deve exceder a resistência ao escoamento do material, que é 30.000 psi, quando sujeito a uma aceleração harmônica do solo (devido a um terremoto) de amplitude 0,5 g e freqüência 15 Hz. Além disso, a freqüência natural do tanque de água deve ser maior do que 15 Hz. Suponha um fator de amortecimento de 0,15 para a coluna.

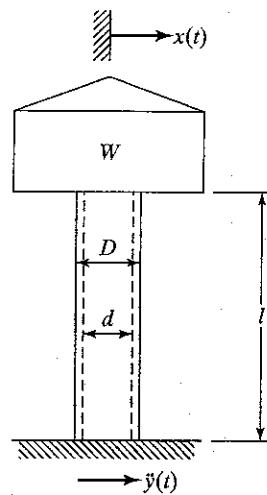


FIGURA 3.63



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), de nacionalidade francesa, foi matemático e professor da École Polytechnique em Paris. Suas obras sobre circulação de calor, publicadas em 1822, e sobre séries trigonométricas são famosas. A expansão de uma função periódica em termos de funções harmônicas recebeu seu nome, 'série de Fourier'. (Reprodução permitida por *Applied Mechanics Reviews*.)

CAPÍTULO QUATRO

Vibração sob condições forçantes gerais

4.1 Introdução

Neste capítulo, consideraremos a resposta de um sistema com um grau de liberdade às funções forçantes gerais, não-harmônicas. Uma função forçante geral pode ser periódica (não-harmônica) ou não periódica. Uma função forçante não periódica pode agir durante um tempo curto, longo ou infinito. Se a duração da função forçante ou excitação for pequena em comparação com o período natural do sistema, a função forçante ou excitação é denominada um choque. O movimento imprimido por um círculo ao seguidor, a vibração sofrida por um instrumento quando sua embalagem cai de uma altura, a força aplicada à base de uma prensa de forjar, o movimento de um automóvel quando passa por um buraco na estrada e a vibração do solo sofrida pela estrutura de um edifício durante um terremoto são exemplos de funções forçantes gerais.

Se a função forçante for periódica, mas não-harmônica, ela pode ser substituída por uma soma de funções harmônicas por meio do procedimento de análise harmônica discutido na Seção 1.11. Então, usando o princípio da superposição, a resposta do sistema pode ser determinada pela superposição das respostas às funções forçantes harmônicas individuais. Contudo, se o sistema for sujeito a uma força não periódica aplicada repentinamente, a resposta envolverá vibração transitória. A resposta transitória de um sistema pode ser determinada pelo que é conhecido como *integral de convolução*.

4.2 Resposta à força periódica geral

Quando a força externa $F(t)$ é periódica com período $\tau = 2\pi/\omega$, ela pode ser expandida em uma série de Fourier (ver Seção 1.11):

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \quad (4.1)$$

onde

$$a_j = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau F(t) \cos j\omega t dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

e

$$b_j = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau F(t) \sin j\omega t dt, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

A equação de movimento do sistema pode ser expressa como

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= F(t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \end{aligned} \quad (4.4)$$

O lado direito dessa equação é uma constante mais uma soma de funções harmônicas. Pelo princípio da superposição, a solução em regime permanente da Equação (4.4) é a soma das soluções em regime permanente das seguintes equações:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} \quad (4.5)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_j \cos j\omega t \quad (4.6)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_j \sin j\omega t \quad (4.7)$$

Observando que a solução da Equação (4.5) é dada por

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} \quad (4.8)$$

e usando os resultados da Seção 3.4, podemos expressar as soluções das equações (4.6) e (4.7), respectivamente, como

$$x_p(t) = \frac{(a_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2\zeta j r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) \quad (4.9)$$

$$x_p(t) = \frac{(b_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2\zeta j r)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j) \quad (4.10)$$

onde

$$\phi_j = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta j r}{1 - j^2 r^2} \right) \quad (4.11)$$

e

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (4.12)$$

Dessa forma, a solução completa da Equação (4.4) para regime permanente é dada por

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{a_0}{2k} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_j/k)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b_j/k)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j) \quad (4.13) \end{aligned}$$

Podemos ver, pela solução Equação (4.13), que a amplitude e o deslocamento de fase correspondentes ao j -ésimo termo dependem de j . Se $j\omega = \omega_n$ para qualquer j , a amplitude da harmônica correspondente será comparativamente grande. Isso será válido, em particular, para pequenos valores de j e ζ . Ademais, à medida que j fica maior, a amplitude torna-se menor, e os termos correspondentes tendem a zero. Assim, normalmente, alguns dos primeiros termos são suficientes para obter a resposta com precisão razoável.

A solução dada pela Equação (4.13) denota a resposta do sistema em regime permanente. A parte transitória da solução, que surge em função das condições iniciais, também pode ser incluída para determinar a solução completa. Para determinar a solução completa, precisamos avaliar as constantes arbitrárias igualando o valor da solução completa e sua derivada aos valores especificados do deslocamento inicial $x(0)$ e da velocidade inicial $\dot{x}(0)$. Essa operação resulta em uma expressão complicada para a parte transitória da solução total.

EXEMPLO 4.1

Vibração periódica de uma válvula hidráulica

No estudo de vibrações de válvulas usadas em sistemas de controle hidráulicos, a válvula e sua haste elástica são modeladas como um sistema massa-mola amortecido, como mostra a Figura 4.1(a). Além da força de mola e da força de amortecimento, há a força da pressão do fluido exercida sobre a válvula, que muda com o grau de abertura ou fechamento da válvula. Determine a resposta em regime permanente da válvula quando a pressão na câmara varia como indicado na Figura 4.1(b).

Suponha que $k = 2.500 \text{ N/m}$, $c = 10 \text{ N.s/m}$ e $m = 0,25 \text{ kg}$.

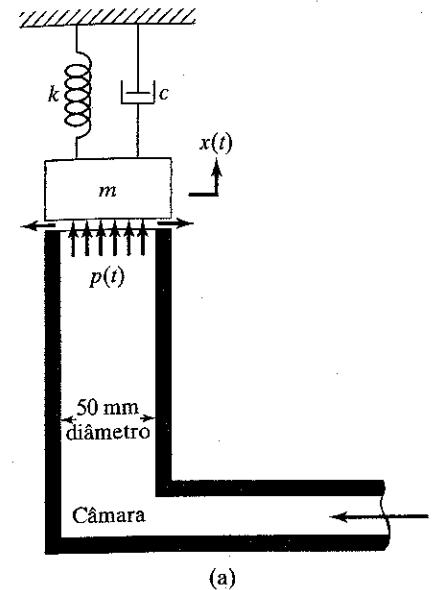
Solução: A válvula pode ser considerada como uma massa ligada a uma mola e a um amortecedor de um lado e sujeita a uma função forçante $F(t)$ do outro lado. A função forçante pode ser expressa como

$$F(t) = Ap(t) \quad (E.1)$$

onde A é a área da seção transversal da câmara dada por

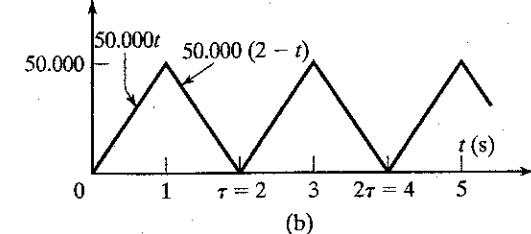
$$A = \frac{\pi(50)^2}{4} = 625\pi \text{ mm}^2 = 0,000625\pi \text{ m}^2 \quad (E.2)$$

e $p(t)$ é a pressão que age sobre a válvula a qualquer instante t . Visto que $p(t)$ é periódica com período $\tau = 2$ segundos e A é uma constante, $F(t)$ também é uma função periódica com período $\tau = 2$ segundos. A frequência da função forçante é



(a)

$p(t) = \text{pressão, Pa}$



(b)

FIGURA 4.1 Vibração periódica de uma válvula hidráulica.

$\omega = (2\pi/\tau) = \pi \text{ rad/s}$. $F(t)$ pode ser expressa em uma série de Fourier como

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (E.3) \end{aligned}$$

onde a_j e b_j são dados pelas equações (4.2) e (4.3). Já que a função $F(t)$ é dada por

$$F(t) = \begin{cases} 50.000At & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 50.000A(2-t) & \text{para } \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (E.4)$$

os coeficientes de Fourier a_j e b_j podem ser calculados com a ajuda das equações (4.2) e (4.3):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50.000At dt + \int_1^2 50.000A(2-t) dt \right] \\ &= 50.000A \quad (E.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50.000At \cos \pi t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_1^2 50.000A(2-t) \cos \pi t dt \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \quad (E.6)$$

$$b_1 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50.000At \operatorname{sen} \pi t dt + \int_1^2 50.000A(2-t) \operatorname{sen} \pi t dt \right] = 0 \quad (\text{E.7})$$

$$a_2 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50.000At \operatorname{cos} 2\pi t dt + \int_1^2 50.000A(2-t) \operatorname{cos} 2\pi t dt \right] = 0 \quad (\text{E.8})$$

$$b_2 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50.000At \operatorname{sen} 2\pi t dt + \int_1^2 50.000A(2-t) \operatorname{sen} 2\pi t dt \right] = 0 \quad (\text{E.9})$$

$$a_3 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50.000At \operatorname{cos} 3\pi t dt + \int_1^2 50.000A(2-t) \operatorname{cos} 3\pi t dt \right] = -\frac{2 \times 10^5 A}{9\pi^2} \quad (\text{E.10})$$

$$b_3 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50.000At \operatorname{sen} 3\pi t dt + \int_1^2 50.000A(2-t) \operatorname{sen} 3\pi t dt \right] = 0 \quad (\text{E.11})$$

De maneira semelhante, podemos obter $a_4 = a_6 = \dots = b_4 = b_5 = b_6 = \dots = 0$. Considerando somente as três primeiras harmônicas, a função forçante pode ser aproximada:

$$F(t) \approx 25.000A - \frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2 \times 10^5 A}{9\pi^2} \cos 3\omega t \quad (\text{E.12})$$

A resposta em regime permanente da válvula à função forçante da Equação (E.12) pode ser expressa como

$$x_p(t) = \frac{25.000A}{k} - \frac{(2 \times 10^5 A / (k\pi^2))}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos(\omega t - \phi_1) - \frac{(2 \times 10^5 A / (9k\pi^2))}{\sqrt{(1-9r^2)^2 + (6\zeta r)^2}} \cos(3\omega t - \phi_3) \quad (\text{E.13})$$

A freqüência natural da válvula é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.500}{0,25}} = 100 \text{ rad/s} \quad (\text{E.14})$$

e a freqüência forçante ω , por

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s} \quad (\text{E.15})$$

Assim, a razão de freqüências pode ser obtida

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\pi}{100} = 0,031416 \quad (\text{E.16})$$

e o fator de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{10,0}{2(0,25)(100)} = 0,2 \quad (\text{E.17})$$

Os ângulos de fase ϕ_1 e ϕ_3 podem ser calculados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1-r^2} \right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2 \times 0,2 \times 0,031416}{1-0,031416^2} \right) \\ &= 0,0125664 \text{ rad} \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

e

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{6\zeta r}{1-9r^2} \right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{6 \times 0,2 \times 0,031416}{1-9(0,031416)^2} \right) \\ &= 0,0380483 \text{ rad} \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Em vista das equações (E.2) e (E.14) a (E.19), a solução pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x_p(t) &= 0,019635 - 0,015930 \cos(\pi t - 0,0125664) \\ &\quad - 0,0017828 \cos(3\pi t - 0,0380483) \text{ m} \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

EXEMPLO 4.2

Resposta total à excitação harmônica de base

Determine a resposta total de um sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade sujeito à excitação harmônica de base para os seguintes dados: $m = 10 \text{ kg}$, $c = 20 \text{ N.s/m}$, $k = 4.000 \text{ N/m}$, $y(t) = 0,05 \operatorname{sen} 5t \text{ m}$, $x_0 = 0,02 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$.

Solução: A equação de movimento do sistema é dada por (ver Equação 3.65):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= ky + c\dot{y} \\ &= kY \operatorname{sen} \omega t + c\omega Y \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Observando que a Equação (E.1) é semelhante à Equação (4.4) com $a_0 = 0$, $a_1 = c\omega Y$, $b_1 = kY$ e $a_i = b_i = 0$; $i = 2, 3, \dots$, a

resposta em regime permanente do sistema pode ser expressa usando a Equação (4.13), como

$$x_p(t) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \left[\frac{a_1}{k} \cos(\omega t - \phi_1) + \frac{b_1}{k} \sin(\omega t - \phi_1) \right] \quad (\text{E.2})$$

Para os dados apresentados, determinamos

$$Y = 0,05 \text{ m}, \omega = 5 \text{ rad/s},$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.000}{10}} = 20 \text{ rad/s},$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{5}{20} = 0,25, \zeta = \frac{c}{c_c} \\ &= \frac{c}{2\sqrt{k m}} = \frac{20}{2\sqrt{(4.000)(10)}} = 0,05, \end{aligned}$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n = 19,975 \text{ rad/s},$$

$$a_1 = c \omega Y = (20)(5)(0,05) = 5,$$

$$b_1 = k Y = (4.000)(0,05) = 200.$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2(0,05)(0,25)}{1 - (0,25)^2} \right) = 0,02666 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} &= \sqrt{(1 - 0,25^2)^2 + (2(0,05)(0,25))^2} \\ &= 0,937833 \end{aligned}$$

A solução da equação homogênea é dada por (veja Equação 2.70):

$$\begin{aligned} x_h(t) &= X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) \\ &= X_0 e^{-t} \cos(19,975t - \phi_0) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

onde X_0 e ϕ_0 são constantes desconhecidas. A solução total pode ser expressa como a sobreposição de $x_h(t)$ e $x_p(t)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 e^{-t} \cos(19,975t - \phi_0) \\ &+ \frac{1}{0,937833} \left[\frac{5}{4.000} \cos(5t - \phi_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{200}{4.000} \sin(5t - \phi_1) \right] \\ &= X_0 e^{-t} \cos(19,975t - \phi_0) \\ &+ 0,001333 \cos(5t - 0,02666) \\ &+ 0,053314 \sin(5t - 0,02666) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

onde as incógnitas X_0 e ϕ_0 devem ser determinadas pelas condições iniciais. A velocidade da massa pode ser expressa pela Equação (E.4), como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt}(t) = -X_0 e^{-t} \cos(19,975t - \phi_0) \\ &- 19,975 X_0 e^{-t} \sin(19,975t - \phi_0) \\ &- 0,006665 \sin(5t - 0,02666) \\ &+ 0,266572 \cos(5t - 0,02666) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Pelas equações (E.4) e (E.5), determinamos

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t = 0) = 0,02 \\ &= X_0 \cos \phi_0 + 0,001333 \cos(0,02666) \\ &- 0,053314 \sin(0,02666) \end{aligned}$$

ou

$$X_0 \cos \phi_0 = 0,020088 \quad (\text{E.6})$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \dot{x}(t = 0) = 10 = -X_0 \cos \phi_0 + 19,975 X_0 \sin \phi_0 \\ &+ 0,006665 \sin(0,02666) + 0,266572 \cos(0,02666) \end{aligned}$$

ou

$$-X_0 \cos \phi_0 + 19,975 \sin \phi_0 = 9,733345 \quad (\text{E.7})$$

A solução das equações (E.6) e (E.7) dá $X_0 = 0,488695$ e $\phi_0 = 1,529683$ rad. Assim, a resposta total da massa à excitação de base, em metros, é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= 0,488695 e^{-t} \cos(19,975t - 1,529683) \\ &+ 0,001333 \cos(5t - 0,02666) \\ &+ 0,053314 \sin(5t - 0,02666) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Observação: A representação gráfica da Equação (E.8) é apresentada no Exemplo 4.18. ■

4.3 Resposta a uma força periódica de forma irregular

Em alguns casos, a força que age sobre um sistema pode ser bastante irregular e só pode ser determinada por procedimentos experimentais. Entre os exemplos de tais forças, citamos a força do vento e as forças induzidas por terremotos. Nesses casos, as forças estarão disponíveis em forma gráfica e não será possível determinar nenhuma expressão analítica para descrever $F(t)$. Às vezes, o valor de $F(t)$ estará disponível apenas em uma pequena quantidade de pontos discretos t_1, t_2, \dots, t_N . Em todos esses casos, é possível determinar os coeficientes de Fourier por um procedimento de integração numérica como descrito na Seção 1.11. Se F_1, F_2, \dots, F_N denotarem os valores de $F(t)$ em t_1, t_2, \dots, t_N , respectivamente, onde N denota um número par de pontos equidistantes em um único período τ ($\tau = N \Delta t$), como mostra a Figura 4.2, a aplicação da regra trapezoidal [4.1] dá

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \quad (4.14)$$

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \cos \frac{2j\pi t_i}{\tau}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \sin \frac{2j\pi t_i}{\tau}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

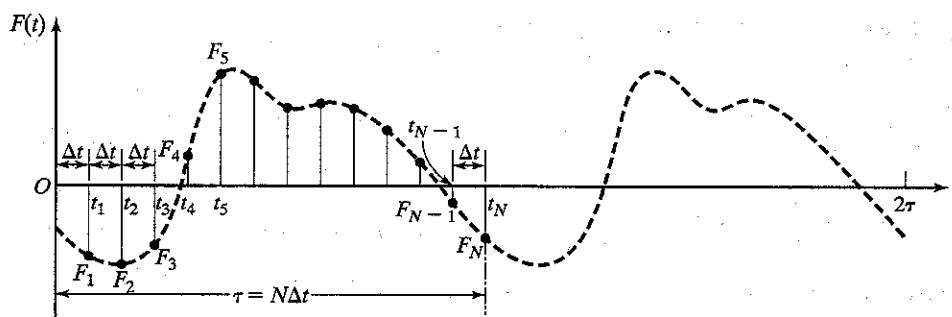


FIGURA 4.2 Uma função forçante irregular.

Uma vez conhecidos os coeficientes de Fourier a_0 , a_j e b_j , a resposta do sistema em regime permanente pode ser determinada pela Equação (4.13) com

$$r = \left(\frac{2\pi}{\tau\omega_n} \right)$$

EXEMPLO 4.3

Vibração em regime permanente de uma válvula hidráulica

Determine a resposta em regime permanente da válvula no Exemplo 4.1 se for constatado que as variações de pressão na câmara são periódicas. Os valores da pressão medidos em intervalos de 0,01 segundo em um único ciclo são apresentados a seguir.

Tempo, t_i (segundos)	$p_i = p(t_i)$ (kN/m ²)
0	0
0,01	20
0,02	34
0,03	42
0,04	49
0,05	53
0,06	70
0,07	60
0,08	36
0,09	22
0,10	16
0,11	7
0,12	0

Solução: Visto que as variações de pressão na válvula são periódicas, a análise de Fourier dos dados de pressão apresentados em um único ciclo dá

$$\begin{aligned} p(t) &= 34.083,3 - 26.996,0 \cos 52,36t + 8.307,7 \operatorname{sen} 52,36t \\ &\quad + 1.416,7 \cos 104,72t + 3.608,3 \operatorname{sen} 104,72t \\ &\quad - 5.833,3 \cos 157,08t \\ &\quad + 2.333,3 \operatorname{sen} 157,08t + \dots \text{N/m}^2 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

(Ver Exemplo 1.13.) Outras quantidades necessárias para o cálculo são:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{0,12} = 52,36 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = 100 \text{ rad/s}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0,5236$$

$$\zeta = 0,2$$

$$A = 0,000625\pi \text{ m}^2$$

$$\phi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2 \times 0,2 \times 0,5236}{1 - 0,5236^2} \right) = 16,1^\circ$$

$$\phi_2 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{4\zeta r}{1 - 4r^2} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{4 \times 0,2 \times 0,5236}{1 - 4 \times 0,5236^2} \right) = -77,01^\circ$$

$$\phi_3 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{6\zeta r}{1 - 9r^2} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{6 \times 0,2 \times 0,5236}{1 - 9 \times 0,5236^2} \right) = -23,18^\circ$$

A resposta em regime permanente da válvula pode ser expressa pela Equação (4.13), como

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{34.083,3A}{k} \\ &\quad - \frac{(26.996,0A/k)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos(52,36t - \phi_1) \\ &\quad + \frac{(8.309,7A/k)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \operatorname{sen}(52,36t - \phi_1) \\ &\quad + \frac{(1.416,7A/k)}{\sqrt{(1 - 4r^2)^2 + (4\zeta r)^2}} \cos(104,72t - \phi_2) \\ &\quad + \frac{(3.608,3A/k)}{\sqrt{(1 - 4r^2)^2 + (4\zeta r)^2}} \operatorname{sen}(104,72t - \phi_2) \\ &\quad - \frac{(5.833,3A/k)}{\sqrt{(1 - 9r^2)^2 + (6\zeta r)^2}} \cos(157,08t - \phi_3) \\ &\quad + \frac{(2.333,3A/k)}{\sqrt{(1 - 9r^2)^2 + (6\zeta r)^2}} \operatorname{sen}(157,08t - \phi_3) \end{aligned}$$

4.4 Resposta a uma força não periódica

Vimos que forças periódicas de qualquer forma de onda geral podem ser representadas por série de Fourier como uma

sobreposição de componentes harmônicas de várias freqüências. Então, a resposta de um sistema linear é determinada pela sobreposição da resposta harmônica a cada uma das forças excitadoras. Quando a força excitadora $F(t)$ for não periódica, como a resultante do deslocamento de ar provocado por uma explosão, é preciso um método diferente para calcular a resposta. Vários métodos podem ser usados para determinar a resposta do sistema a uma excitação arbitrária. Alguns desses métodos são:

1. Representar a excitação por uma integral de Fourier.
2. Usar o método da integral de convolução.
3. Utilizar o método das transformadas de Laplace.
4. Primeiro aproximar $F(t)$ por um modelo de interpolação adequado e, então, usar um procedimento numérico.
5. Integrar numericamente como equações de movimento.

Discutiremos os métodos 2, 3 e 4 nas próximas seções e o Método 5, no Capítulo 11.

4.5 Integral de convolução

A magnitude de uma força excitadora não periódica normalmente varia com o tempo; ela age durante um período especificado e então pára. A forma mais simples é a força impulsiva – uma força que tem uma grande magnitude F e age durante um período muito curto Δt . Sabemos, pela dinâmica, que impulso pode ser medido pela determinação da variação no momento do sistema causado por ele [4.2]. Se \dot{x}_1 e \dot{x}_2 denotarem as velocidades da massa m antes e depois da aplicação do impulso, temos

$$\text{Impulso} = F\Delta t = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 \quad (4.17)$$

Designando a magnitude do impulso $F\Delta t$ por \tilde{f} , podemos escrever, em geral,

$$\tilde{f} = \int_t^{t+\Delta t} F dt \quad (4.18)$$

Um impulso unitário (f) é definido como

$$\tilde{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} F dt = F dt = 1 \quad (4.19)$$

Podemos ver que, para que $F dt$ tenha um valor finito, F tende a infinito (visto que dt tende a zero). Embora a função impulso unitário não tenha significado físico, é uma ferramenta conveniente na análise presente.¹

¹ O impulso unitário, f , que age em $t = 0$, também é denominado função delta de Dirac, $\delta(t)$. A função delta de Dirac no tempo $t = \tau$, denotada por $\delta(t - \tau)$, tem as propriedades

$$\delta(t - \tau) = 0 \quad \text{para } t \neq \tau;$$

$$\int_0^\infty \delta(t - \tau) dt = 1; \quad \int_0^\infty \delta(t - \tau) F(t) dt = F(\tau)$$

onde $0 < \tau < \infty$. Por isso, uma força impulsiva que age em $t = \tau$ pode ser denotada por $F(t) = F \delta(t - \tau)$.

4.5.1. Resposta a um impulso

Em primeiro lugar, consideraremos a resposta de um sistema com um grau de liberdade a uma excitação por impulso; este caso é importante no estudo da resposta à excitações mais gerais. Considere um sistema massa-mola viscosamente amortecido sujeito a um impulso unitário em $t = 0$, como mostrado nas figuras 4.3(a) e (b). Para um sistema subamortecido, a solução da equação de movimento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (4.20)$$

é dada pela Equação (2.72) como

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right\} \quad (4.21)$$

onde

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (4.22)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m} \right)^2} \quad (4.23)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.24)$$

Se a massa estiver em repouso antes de o impulso unitário ser aplicado ($x = \dot{x} = 0$ para $t < 0$ ou em $t = 0^-$), obtemos, pela relação impulso-momento,

$$\begin{aligned} \text{Impulso} &= \tilde{f} = 1 \\ &= m\dot{x}(t = 0) - m\dot{x}(t = 0^-) = m\dot{x}_0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

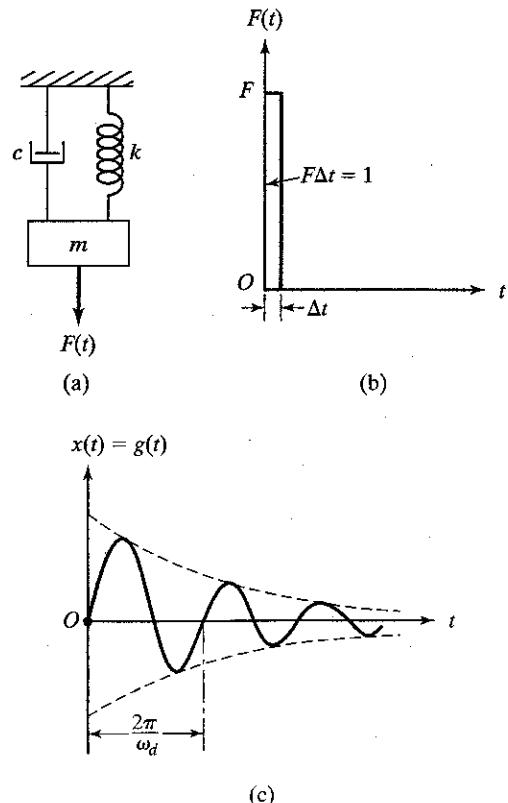


FIGURA 4.3 Um sistema com um grau de liberdade sujeito a um impulso.

Assim, as condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned}x(t=0) &= x_0 = 0 \\ \dot{x}(t=0) &= \dot{x}_0 = \frac{1}{m}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Em vista da Equação (4.26), a Equação (4.21) reduz-se a

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t \quad (4.27)$$

A Equação (4.27) dá a resposta de um sistema com um grau de liberdade a um impulso unitário, que também é conhecida como *função resposta ao impulso*, denotada por $g(t)$. A função $g(t)$, Equação (4.27), é mostrada na Figura 4.3(c).

Se a magnitude do impulso for F em vez da unidade, a velocidade inicial \dot{x}_0 é F/m , e a resposta do sistema torna-se

$$x(t) = \frac{F e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = F g(t) \quad (4.28)$$

Se o impulso F for aplicado em um tempo arbitrário $t = \tau$, como mostra a Figura 4.4(a), esse impulso mudará a velocidade em $t = \tau$ por uma quantidade F/m . Admitindo que $x = 0$ até o impulso ser aplicado, o deslocamento x em qualquer tempo subsequente t , causado por uma mudança na velocidade no tempo τ , é dado pela Equação (4.28), onde t é substituído pelo tempo decorrido após a aplicação do impulso, isto é, $t - \tau$. Assim, obtemos

$$x(t) = F g(t - \tau) \quad (4.29)$$

Isso é mostrado na Figura 4.4(b).

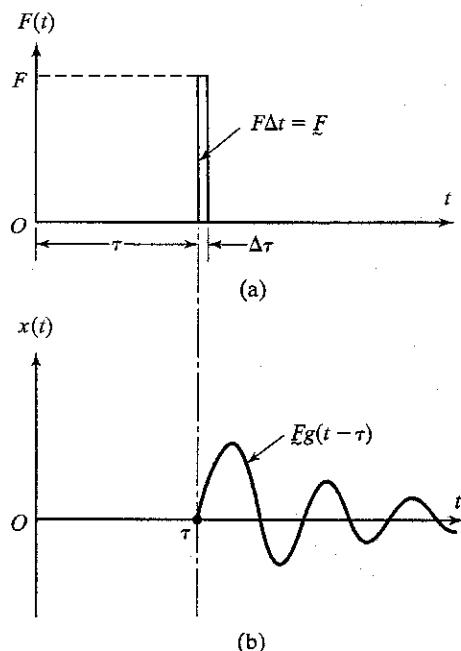


FIGURA 4.4 Resposta ao impulso.

EXEMPLO 4.4

Resposta de uma estrutura a impacto

No teste de vibração de uma estrutura, um martelo de impacto munido de uma célula de carga para medir a força de impacto é usado para causar excitação, como mostra a Figura 4.5(a). Supondo que $m = 5 \text{ kg}$, $k = 2.000 \text{ N/m}$, $c = 10 \text{ N.s/m}$ e $F = 20 \text{ N.s}$, determine a resposta do sistema.

Solução: Pelos dados conhecidos, podemos calcular

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.000}{5}} = 20 \text{ rad/s}, \\ \zeta &= \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{10}{2\sqrt{2.000}(5)} = 0,05, \\ \omega_d &= \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n = 19,975 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Admitindo que o impacto seja dado em $t = 0$, determinamos (pela Equação 4.28) a resposta do sistema como

$$\begin{aligned}x_1(t) &= F \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t \\ &= \frac{20}{(5)(19,975)} e^{-0,05(20)t} \sin 19,975t \\ &= 0,20025 e^{-t} \sin 19,975t \quad (\text{E.1})\end{aligned}$$

Observação: O gráfico da Equação (E.1) é mostrado no Exemplo 4.19.

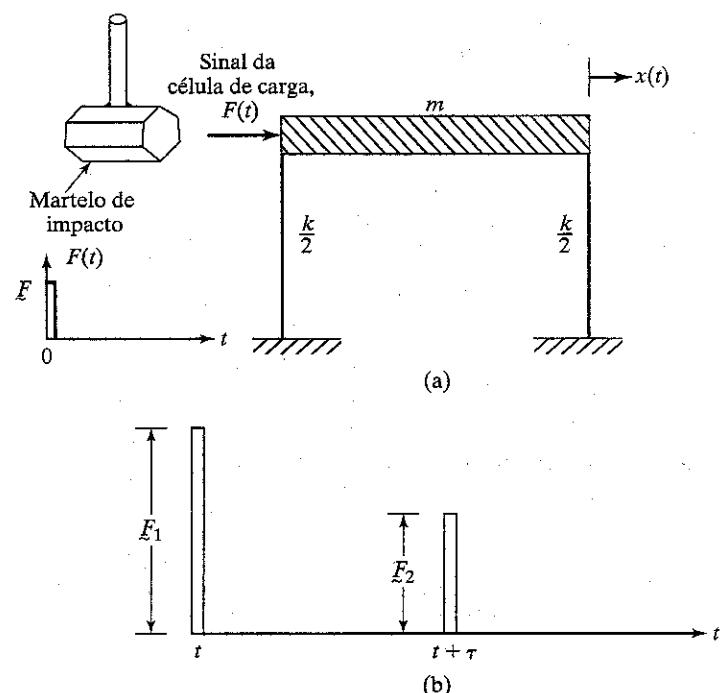


FIGURA 4.5 Teste estrutural com a utilização de um martelo de impacto.

EXEMPLO 4.5

Resposta de uma estrutura a duplo impacto

Em muitos casos, é difícil aplicar somente um impacto à estrutura com a utilização de um martelo de impacto. Às vezes, ocorre um segundo impacto após o primeiro, como mostra a Figura 4.5(b), e a força aplicada, $F(t)$, pode ser expressa como

$$F(t) = F_1 \delta(t) + F_2 \delta(t - \tau)$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac e τ indica o tempo entre os dois impactos de magnitudes F_1 e F_2 . Para uma estrutura com $m = 5 \text{ kg}$, $k = 2.000 \text{ N/m}$, $c = 10 \text{ N.s/m}$ e $F(t) = 20 \delta(t) + 10 \delta(t - 0,2)\text{N}$, determine a resposta da estrutura.

Solução: Pelos dados conhecidos, determinamos $\omega_n = 20 \text{ rad/s}$ (ver a solução para o Exemplo 4.4), $\zeta = 0,05$ e $\omega_d = 19,975 \text{ rad/s}$. A resposta ao impulso $F_1 \delta(t)$ é dada pela Equação (E.1) do Exemplo 4.4, enquanto a resposta ao impulso $F_2 \delta(t - 0,2)$ pode ser determinada pelas equações (4.29) e (4.28) como

$$x_2(t) = F_2 \frac{e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)}}{m \omega_d} \sin \omega_d(t-\tau) \quad (\text{E.1})$$

Para $\tau = 0,2$, a Equação (E.1) torna-se

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{10}{(5)(19,975)} e^{-0,05(20)(t-0,2)} \sin 19,975(t-0,2) \\ &= 0,100125 e^{-(t-0,2)} \sin 19,975(t-0,2); t > 0,2 \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Pela sobreposição das duas respostas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, a resposta aos dois impactos, em metros, pode ser expressa como

$$x(t) = \begin{cases} 0,00025 e^{-t} \sin 19,975 t; 0 \leq t \leq 0,2 \\ 0,00025 e^{-t} \sin 19,975 t + 0,100125 e^{-(t-0,2)} \sin 19,975(t-0,2); t > 0,2 \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

Observação: O gráfico da Equação (E.3) é mostrado no Exemplo 4.19. ■

4.5.2. Resposta a uma condição forçante geral

Agora, consideraremos a resposta do sistema a uma força externa arbitrária $F(t)$, mostrada na Figura 4.6. Podemos admitir que essa força seja composta por uma série de impulsos de magnitudes variadas. Supondo que no tempo τ a força $F(\tau)$ aja sobre o sistema por um curto período $\Delta\tau$, o impulso que age em $t = \tau$ seja dado por $F(\tau) \Delta\tau$. A qualquer tempo t , o tempo transcorrido desde o impulso é $t - \tau$, portanto, a resposta do sistema em t , resultante apenas desse impulso, é dada pela Equação (4.29) com $F = F(\tau) \Delta\tau$:

$$\Delta x(t) = F(\tau) \Delta\tau g(t - \tau) \quad (4.30)$$

A resposta total no tempo t pode ser determinada somando todas as respostas aos impulsos elementares que agem em todos os tempos τ :

$$x(t) \approx \sum F(\tau) g(t - \tau) \Delta\tau \quad (4.31)$$

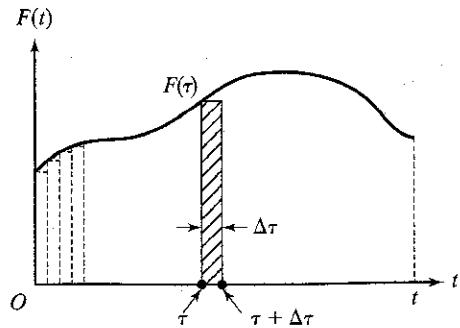


FIGURA 4.6 Uma função forçante arbitrária (não-periódica).

Fazendo $\Delta\tau \rightarrow 0$ e substituindo o somatório por integração, obtemos

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (4.32)$$

Substituindo a Equação (4.27) na Equação (4.32), obtemos

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau \quad (4.33)$$

que representa a resposta de um sistema subamortecido com um grau de liberdade à excitação arbitrária $F(t)$. Observe que a Equação (4.33) não considera o efeito das condições iniciais do sistema. A integral na Equação (4.32) ou Equação (4.33) é denominada *integral de convolução ou integral de Duhamel*. Em muitos casos, a função $F(t)$ tem uma forma que permite uma integração explícita da Equação (4.33). Caso tal integração não seja possível, ela pode ser avaliada por métodos numéricos sem muita dificuldade, como ilustrado na Seção 4.8 e no Capítulo 11. Uma discussão elementar da integral de Duhamel na análise de vibração é dada na Referência [4.6].

4.5.3 Resposta à excitação de base

Se um sistema massa-mola-amortecedor for sujeito a uma excitação arbitrária de base descrita por seu deslocamento, velocidade ou aceleração, a equação de movimento pode ser expressa em termos do deslocamento relativo da massa $z = x - y$ da seguinte maneira (ver Seção 3.6.2)

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (4.34)$$

Essa equação é semelhante à equação

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (4.35)$$

com a substituição de x pela variável z e da função forçante F pelo termo $-m\ddot{y}$. Por consequência, todos os resultados derivados para o sistema excitado por uma força são aplicáveis ao sistema excitado pela base também para z quando o termo F for substituído por $-m\ddot{y}$. Para um sistema subamortecido sujeito à excitação de base, podemos determinar o deslocamento relativo pela Equação (4.33):

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \dot{y}(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau \quad (4.36)$$

EXEMPLO 4.6

Força degrau sobre um máquina compactadora

Uma máquina compactadora, modelada como um sistema com um grau de liberdade, é mostrada na Figura 4.7(a). A força que age sobre a massa m (m inclui as massas do pistão, da plataforma e do material que está sendo compactado) resultante de uma aplicação repentina de pressão pode ser idealizada como uma força degrau, como mostra a Figura 4.7(b). Determine a resposta do sistema.

Solução: Visto que a máquina compactadora é modelada como um sistema massa-mola-amortecedor, o problema é determinar a resposta de um sistema amortecido com um grau de liberdade sujeito a uma força degrau. Observando que $F(t) = F_0$, podemos escrever a Equação (4.33) como

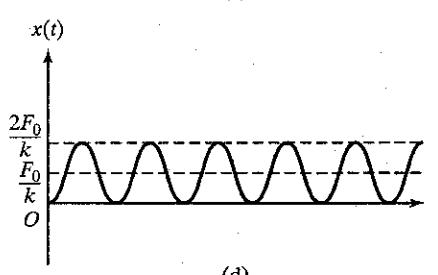
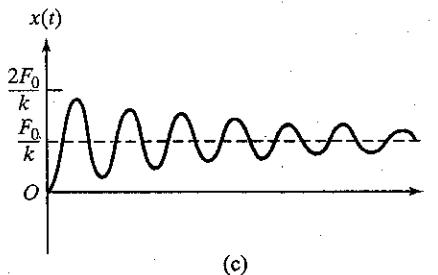
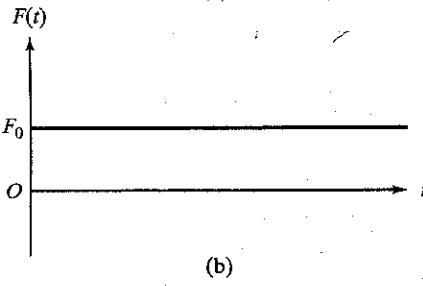
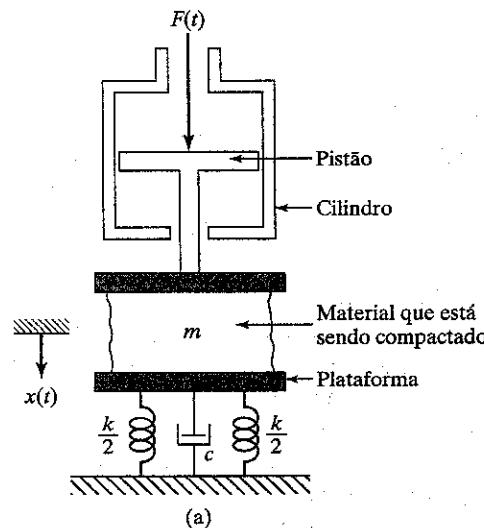


FIGURA 4.7 Força degrau aplicada a uma máquina compactadora.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_d} \left[e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \right]_{\tau=0}^t \cdot \frac{\left\{ \zeta\omega_n \sin \omega_d(t-\tau) + \omega_d \cos \omega_d(t-\tau) \right\}}{(\zeta\omega_n)^2 + (\omega_d)^2} \Big|_{\tau=0}^t \\ &= \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (\text{E.2})$$

Essa resposta é mostrada na Figura 4.7(c). Se o sistema for não amortecido ($\zeta = 0$ e $\omega_d = \omega_n$), a Equação (E.1) reduz-se a

$$x(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n t] \quad (\text{E.3})$$

A representação gráfica da Equação (E.3) é mostrada na Figura 4.7(d). Podemos ver que, se a carga for aplicada instantaneamente a um sistema não amortecido, obteremos um deslocamento máximo igual a duas vezes o deslocamento estático, isto é, $x_{\max} = 2F_0/k$.

EXEMPLO 4.7

Força degrau transladada

Determine a resposta da máquina compactadora mostrada na Figura 4.7(a) quando sujeita à força mostrada na Figura 4.8.

Solução: Visto que a função forçante começa em $t = t_0$ em vez de em $t = 0$, a resposta pode ser obtida pela Equação (E.1) do Exemplo 4.6 com a substituição de t por $t - t_0$. Isso dá

$$x(t) = \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\sqrt{1-\zeta^2} - e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \cos \{\omega_d(t-t_0) - \phi\} \right] \quad (\text{E.1})$$

Se o sistema for não amortecido, a Equação (E.1) reduz-se a

$$x(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n(t - t_0)] \quad (\text{E.2})$$

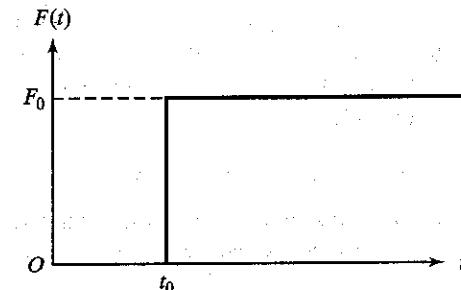


FIGURA 4.8 Força degrau aplicada com um atraso.

EXEMPLO 4.8

Carga de pulso rectangular

Se a máquina compactadora mostrada na Figura 4.7(a) for sujeita a uma força constante somente durante o tempo $0 \leq t \leq t_0$ (Figura 4.9 (a)), determine a resposta da máquina.

Solução: A função forçante dada, $F(t)$, pode ser considerada como a soma de uma função degrau $F_1(t)$ de magnitude $+F_0$ que começa em $t = 0$ com uma segunda função degrau $F_2(t)$ de magnitude $-F_0$ que começa no tempo $t = t_0$, como mostra a Figura 4.9(b).

Assim, a resposta do sistema pode ser obtida subtraindo-se a Equação (E.1) do Exemplo 4.7 da Equação (E.1) do Exemplo 4.6, o que dá

$$x(t) = \frac{F_0 e^{-\zeta \omega_n t}}{k \sqrt{1 - \zeta^2}} \left[-\cos(\omega_d t - \phi) + e^{\zeta \omega_n t_0} \cos\{\omega_d(t - t_0) - \phi\} \right] \quad (\text{E.1})$$

com

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \quad (\text{E.2})$$

Para ver a resposta de vibração em gráfico, consideramos o sistema como não amortecido, de modo que a Equação (E.1) reduz-se a

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[\cos \omega_n(t - t_0) - \cos \omega_n t \right] \quad (\text{E.3})$$

A resposta é mostrada na Figura 4.9(c) para duas larguras de pulso diferentes de t_0 para os seguintes dados (Problema 4.58): $m = 100 \text{ kg}$, $c = 50 \text{ N.s/m}$, $k = 1.200 \text{ N/m}$ e $F_0 = 100 \text{ N}$. As respostas serão diferentes para os dois casos $t_0 > \tau_n/2$ e $t_0 < \tau_n/2$, onde τ_n é o período natural não amortecido do sistema. Se $t_0 > \tau_n/2$, o pico será maior e ocorrerá durante a era da vibração forçada (isto é, durante 0 a t_0), enquanto o pico será menor e ocorrerá na era da vibração residual (isto é, após t_0) se $t_0 < \tau_n/2$. Na Figura 4.9(c), $\tau_n = 1,8138 \text{ s}$, e o pico correspondente a $t_0 = 1,5 \text{ s}$ é aproximadamente seis vezes maior que o correspondente a $t_0 = 0,1 \text{ s}$.

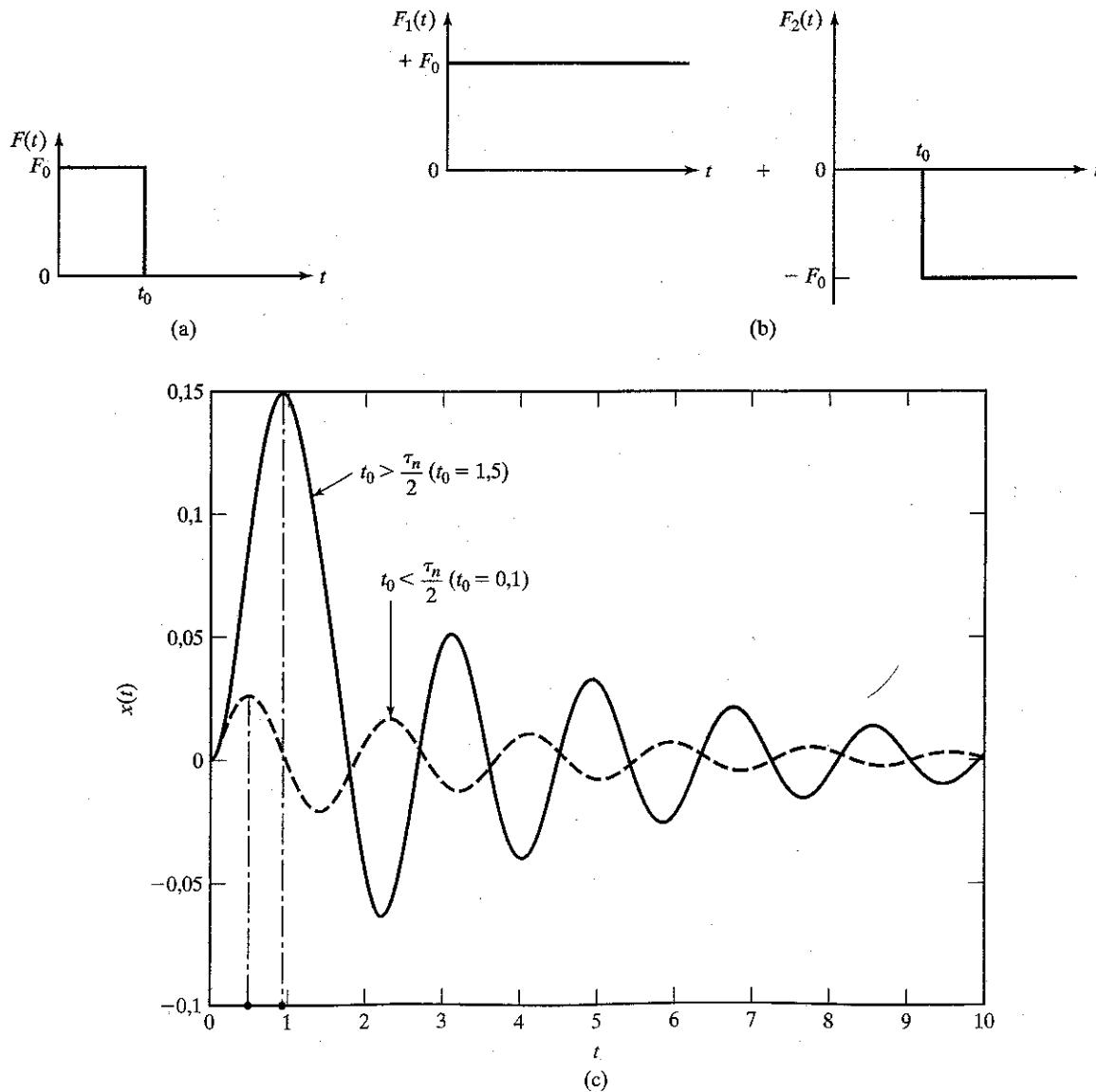


FIGURA 4.9 Resposta a uma carga de pulso.

EXEMPLO 4.9**Máquina compactadora sob uma força linear**

Determine a resposta da máquina compactadora mostrada na Figura 4.10(a) quando uma força que varia linearmente (mostrada na Figura 4.10(b)) é aplicada devido ao movimento do came.

Solução: A força que varia linearmente mostrada na Figura 4.10(b) é conhecida como função rampa. Essa função forçante pode ser representada como $F(\tau) = \delta F \cdot \tau$, onde δF denota a taxa de aumento da força F por unidade de tempo. A substituição dessa expressão na Equação (4.33), resulta em

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\delta F}{m\omega_d} \int_0^t \tau e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{\delta F}{m\omega_d} \int_0^t (t-\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) (-d\tau) \\ &\quad - \frac{\delta F \cdot t}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) (-d\tau) \end{aligned}$$

Essas integrais podem ser avaliadas, e a resposta pode ser expressa como:

$$x(t) = \frac{\delta F}{k} \left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d t - \left\{ \frac{\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 \omega_d} \right\} \sin \omega_d t \right) \right] \quad (\text{E.1})$$

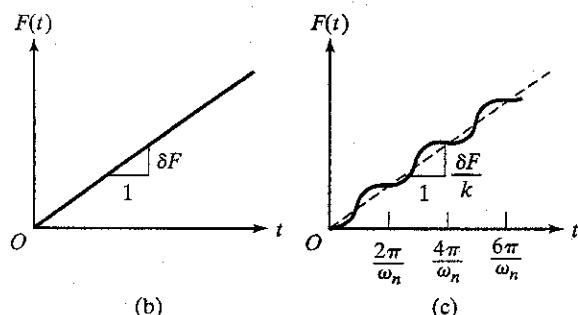
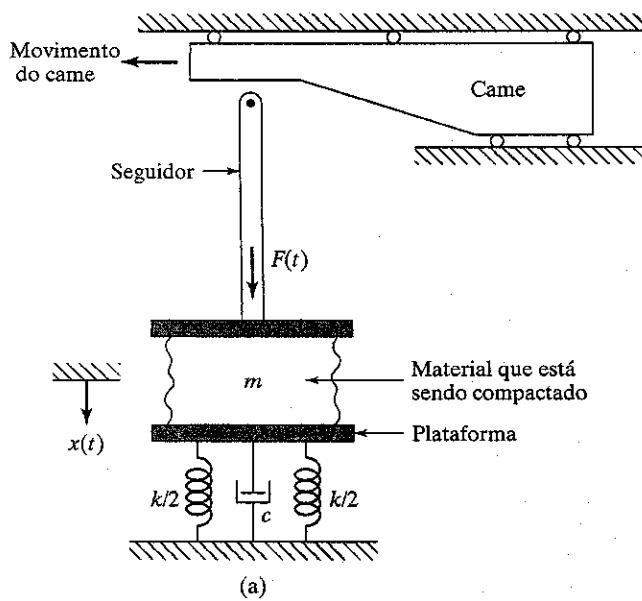


FIGURA 4.10 Máquina compactadora sujeita a uma força linear.

(Ver Problema 4.28.)

Para um sistema não amortecido, a Equação (E.1) reduz-se a

$$x(t) = \frac{\delta F}{\omega_n k} [\omega_n t - \sin \omega_n t] \quad (\text{E.2})$$

A Figura 4.10(c) mostra a resposta dada pela Equação (E.2).

EXEMPLO 4.10**Carga de explosão sobre a estrutura de um edifício**

A estrutura de um edifício é modelada como um sistema não amortecido com um grau de liberdade (Figura 4.11(a)). Determine a resposta da estrutura se ela for sujeita a uma carga de explosão representada pelo pulso triangular mostrado na Figura 4.11(b).

Solução: A função forçante é dada por

$$F(\tau) = F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) \text{ para } 0 \leq \tau \leq t_0 \quad (\text{E.1})$$

$$F(\tau) = 0 \quad \text{para } \tau > t_0 \quad (\text{E.2})$$

A Equação (4.33) dá, para um sistema não amortecido,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (\text{E.3})$$

Resposta durante $0 \leq t \leq t_0$: Usando a Equação (E.1) para $F(\tau)$ na Equação (E.3), obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) [\sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n t \sin \omega_n \tau] d(\omega_n \tau) \\ &= \frac{F_0}{k} \sin \omega_n t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) \cos \omega_n \tau \cdot d(\omega_n \tau) \\ &\quad - \frac{F_0}{k} \cos \omega_n t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) \sin \omega_n \tau \cdot d(\omega_n \tau) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Observando que a integração por partes dá

$$\int \tau \cos \omega_n \tau \cdot d(\omega_n \tau) = \tau \sin \omega_n \tau + \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n \tau \quad (\text{E.5})$$

e

$$\int \tau \sin \omega_n \tau \cdot d(\omega_n \tau) = -\tau \cos \omega_n \tau + \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n \tau \quad (\text{E.6})$$

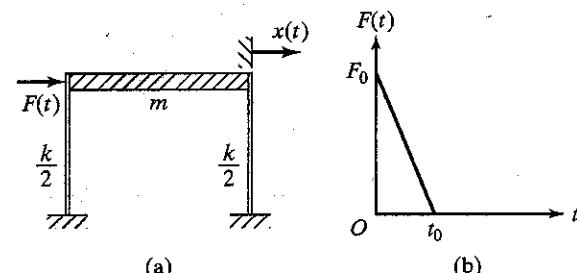


FIGURA 4.11 Estrutura de um edifício sujeita a uma carga de explosão.

a Equação (E.4) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{F_0}{k} & \left\{ \sin \omega_n t \left[\sin \omega_n t - \frac{t}{t_0} \sin \omega_n t \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\omega_n t_0} \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0} \right] \right. \\ & \quad \left. \left. - \cos \omega_n t \left[-\cos \omega_n t + 1 + \frac{t}{t_0} \cos \omega_n t \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - \frac{1}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Simplificando essa expressão, obtemos

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{t}{t_0} - \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t \right] \quad (\text{E.8})$$

Resposta durante $t > t_0$: Nesse caso, também usamos a Equação (E.1) para $F(\tau)$, mas o limite superior de integração na Equação (E.3) será t_0 , visto que $F(\tau) = 0$ para $\tau > t_0$. Assim, a resposta pode ser determinada pela Equação (E.7) fazendo $t = t_0$ dentro dos colchetes, o que dá como resultado

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{F_0}{k \omega_n t_0} & \left[(1 - \cos \omega_n t_0) \sin \omega_n t \right. \\ & \quad \left. - (\omega_n t_0 - \sin \omega_n t_0) \cos \omega_n t \right] \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

4.6 Espectro de resposta

O gráfico que mostra a variação da resposta máxima (máximo deslocamento, máxima velocidade, máxima aceleração ou qualquer outra quantidade máxima) com uma freqüência natural (ou período natural) de um sistema com um grau de liberdade a uma função forçante especificada é conhecido como *espectro de resposta*. Uma vez que a resposta máxima é representada em gráfico em relação à freqüência natural (ou período natural), o espectro de resposta dá a resposta máxima de todos os possíveis sistemas com um grau de liberdade. O espectro de resposta é amplamente usado na engenharia de projetos para terremoto [4.2, 4.5]. Uma revisão da literatura recente sobre resposta a choque ou resposta sísmica para projetos de engenharia é dada na Referência [4.7].

Uma vez disponível o espectro de resposta correspondente a uma função forçante especificada, tudo o que precisamos saber é a freqüência natural do sistema para determinar sua resposta máxima. O Exemplo 4.11 ilustra a construção de um espectro de resposta.

EXEMPLO 4.11

Espectro de resposta a pulso senoidal

Determine o espectro de resposta não amortecida para a força de pulso senoidal mostrada na Figura 4.12(a) usando as condições iniciais $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Solução:

Abordagem: Determine a resposta e expresse seu valor máximo em termos de seu período natural.

A equação de movimento de um sistema não amortecido pode ser expressa como

$$mx'' + kx = F(t) = \begin{cases} F_0 \sin \omega t, & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\omega = \frac{\pi}{t_0} \quad (\text{E.2})$$

A solução da Equação (E.1) pode ser obtida pela sobreposição da solução homogênea $x_c(t)$ e da solução particular $x_p(t)$ como

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (\text{E.3})$$

Isto é,

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \sin \omega t \quad (\text{E.4})$$

onde A e B são constantes e ω_n é a freqüência natural do sistema:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\tau_n} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E.5})$$

Usando as condições iniciais $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ na Equação (E.4), podemos determinar as constantes A e B como

$$A = 0, \quad B = -\frac{F_0 \omega}{\omega_n(k - m\omega^2)} \quad (\text{E.6})$$

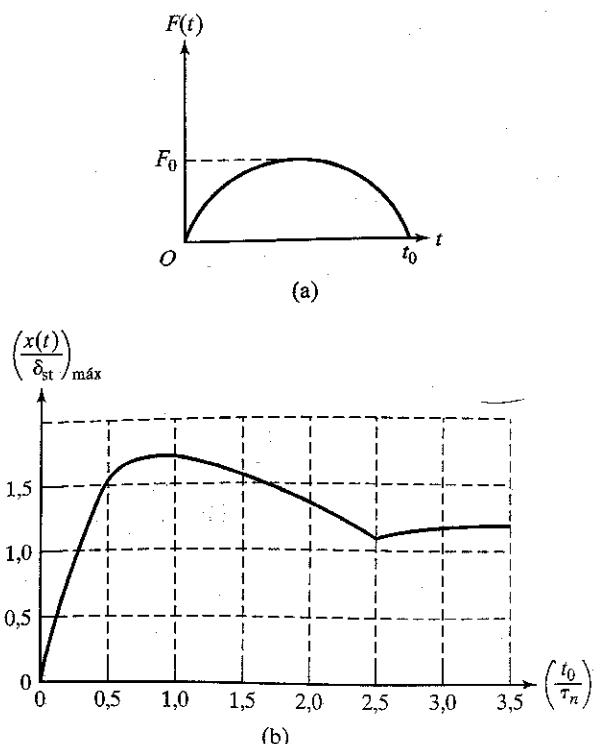


FIGURA 4.12 Espectro de resposta a um pulso senoidal.

Assim, a solução torna-se

$$x(t) = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left\{ \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right\}, \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (E.7)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau_n}{2t_0}\right)^2} \left\{ \sin \frac{\pi t}{t_0} - \frac{\tau_n}{2t_0} \sin \frac{2\pi t}{\tau_n} \right\}, \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (E.8)$$

onde

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k} \quad (E.9)$$

A solução dada pela Equação (E.8) é válida somente durante o período da aplicação da força, $0 \leq t \leq t_0$. Visto que não há nenhuma força aplicada para $t > t_0$, a solução pode ser expressa como uma solução de vibração livre

$$x(t) = A' \cos \omega_n t + B' \sin \omega_n t, \quad t > t_0 \quad (E.10)$$

onde as constantes A' e B' podem ser determinadas usando os valores de $x(t = t_0)$ e $\dot{x}(t = t_0)$, dados pela Equação (E.8), como condições iniciais para a duração $t > t_0$. Isso dá

$$x(t = t_0) = \alpha \left[-\frac{\tau_n}{2t_0} \sin \frac{2\pi t_0}{\tau_n} \right] \\ = A' \cos \omega_n t_0 + B' \sin \omega_n t_0 \quad (E.11)$$

$$\dot{x}(t = t_0) = \alpha \left\{ \frac{\pi}{t_0} - \frac{\pi}{t_0} \cos \frac{2\pi t_0}{\tau_n} \right\} \\ = -\omega_n A' \sin \omega_n t_0 + \omega_n B' \cos \omega_n t_0 \quad (E.12)$$

onde

$$\alpha = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\tau_n}{2t_0}\right)^2} \quad (E.13)$$

As equações (E.11) e (E.12) podem ser resolvidas para determinar A' e B' como

$$A' = \frac{\alpha \pi}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t_0, \\ B' = -\frac{\alpha \pi}{\omega_n t_0} [1 + \cos \omega_n t_0] \quad (E.14)$$

As Equações (E.14) podem ser substituídas na Equação (E.10) para obter

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{(\tau_n/t_0)}{2 \left\{ 1 - (\tau_n/2t_0)^2 \right\}} \left[\sin 2\pi \left(\frac{t_0}{\tau_n} - \frac{t}{\tau_n} \right) \right. \\ \left. - \sin 2\pi \frac{t}{\tau_n} \right], \quad t \geq t_0 \quad (E.15)$$

As equações (E.8) e (E.15) dão a resposta do sistema em forma não dimensional, isto é, x/δ_{st} é expressa em termos de t/τ_n . Assim, para qualquer valor especificado de t_0/τ_n , o valor máximo de x/δ_{st} pode ser determinado. Esse valor máximo de x/δ_{st} , quando representado em gráfico em relação a t_0/τ_n , dá o espectro de resposta mostrado na Figura 4.12(b). Podemos observar que o valor máximo de $(x/\delta_{st})_{\max} = 1,75$ ocorre a um valor de $t_0/\tau_n = 0,75$.

No Exemplo 4.11, a força aplicada é simples e, por consequência, foi obtida uma solução de forma fechada para o espectro de resposta. Todavia, se a força aplicada for arbitrária, só podemos determinar o espectro de resposta por métodos numéricos. Nesse caso, a Equação (4.33) pode ser usada para expressar a resposta de pico de um sistema não amortecido com um grau de liberdade à aplicação de uma força arbitrária $F(t)$ como

$$x(t) \Big|_{\max} = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^{t_0} F(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \Big|_{\max} \quad (4.37)$$

4.6.1. Espectro de resposta para excitação de base

No projeto de máquinas e estruturas sujeitas a choque provocado pelo solo, como acontece no caso de um terremoto, o espectro de resposta correspondente à excitação de base é útil. Se a base de um sistema amortecido com um grau de liberdade estiver sujeita a uma aceleração $\ddot{y}(t)$, a equação de movimento, em termos do deslocamento relativo $z = x - y$, é dada pela Equação (4.34), e a resposta $z(t)$, pela Equação (4.36). No caso de um choque provocado pelo solo, de modo geral, usa-se o espectro de resposta à velocidade. Então, os espectros de deslocamento e aceleração são expressos em termos do espectro de velocidade. Para um oscilador harmônico (um sistema não amortecido sob vibração livre), observamos que

$$\dot{x} \Big|_{\max} = -\omega_n^2 x \Big|_{\max} \quad \text{e} \quad \dot{x} \Big|_{\max} = \omega_n x \Big|_{\max}$$

Assim, os espectros de aceleração e deslocamento S_a e S_d podem ser obtidos em termos do espectro de velocidade (S_v):

$$S_d = \frac{S_v}{\omega_n}, \quad S_a = \omega_n S_v \quad (4.38)$$

Para considerar amortecimento no sistema, se admitirmos que o máximo deslocamento relativo ocorre após a passagem do pulso de choque, o movimento subsequente deve ser harmônico. Nesse caso, podemos usar a Equação (4.38). A velocidade fictícia associada a esse movimento harmônico aparente é denominada *pseudovelocidade*, e seu espectro de resposta, S_v , é denominado *pseudo-espectro*. Os espectros de velocidade de sistemas amortecidos são usados extensivamente em análise de terremotos.

Para determinar o espectro de velocidade relativa, diferenciamos a Equação (4.36) e obtemos²

$$\dot{z}(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} [-\zeta \omega_n \sin \omega_d(t-\tau) \\ + \omega_d \cos \omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (4.39)$$

² A seguinte relação é usada na derivação da Equação (4.39) pela Equação (4.36):

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tau) d\tau + f(t, \tau) \Big|_{\tau=t}$$

A Equação (4.39) pode ser reescrita como

$$\ddot{z}(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{P^2 + Q^2} \sin(\omega_d t - \phi) \quad (4.40)$$

onde

$$P = \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \cos \omega_d \tau d\tau \quad (4.41)$$

$$Q = \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \sin \omega_d \tau d\tau \quad (4.42)$$

e

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{-(P \sqrt{1 - \zeta^2} + Q\zeta)}{(P\zeta - Q\sqrt{1 - \zeta^2})} \right\} \quad (4.43)$$

O espectro de resposta à velocidade, S_v , pode ser obtido pela Equação (4.40):

$$S_v = |\dot{z}(t)|_{\max} = \left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{P^2 + Q^2} \right|_{\max} \quad (4.44)$$

Assim, pseudo-espectros de resposta são dados por

$$\begin{aligned} S_d &= |z|_{\max} = \frac{S_v}{\omega_n}; & S_v &= |\dot{z}|_{\max}; \\ S_a &= |\ddot{z}|_{\max} = \omega_n S_v \end{aligned} \quad (4.45)$$

EXEMPLO 4.12

Reservatório de água sujeito à aceleração de base

O reservatório de água mostrado na Figura 4.13(a) sofre uma aceleração provocada pelo solo, que varia linearmente, causada por um terremoto. A massa do reservatório é m , a rigidez da coluna é k , e o amortecimento é desprezível. Determine o espectro de resposta para o deslocamento relativo, $z = x - y$, do reservatório de água.

Solução:

Abordagem: Modele o reservatório de água como um sistema não amortecido com um grau de liberdade. Determine o máximo deslocamento relativo do reservatório e expresse-o como uma função de ω_n .

A aceleração de base pode ser expressa como

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_{\max} \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2t_0 \quad (E.1)$$

$$\ddot{y}(t) = 0 \quad \text{para } t > 2t_0 \quad (E.2)$$

Resposta durante $0 \leq t \leq 2t_0$: Substituindo a Equação (E.1) na Equação (4.36), a resposta pode ser expressa, para um sistema não amortecido, como

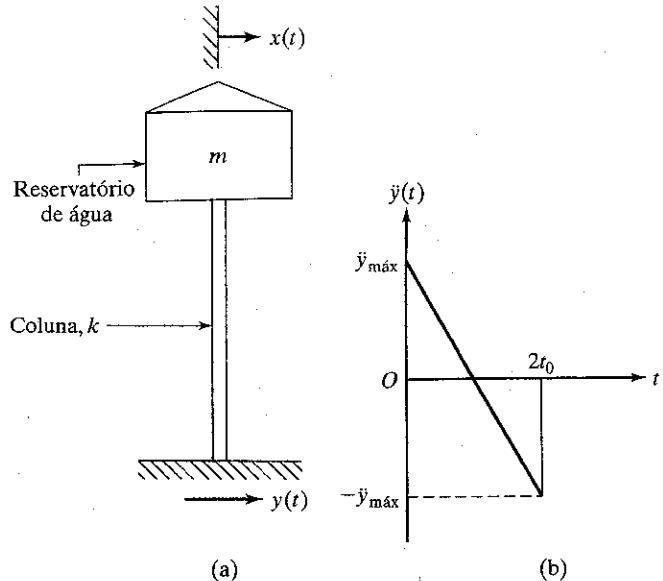


FIGURA 4.13 Reservatório de água sujeito a movimento de base.

$$\begin{aligned} z(t) &= -\frac{1}{\omega_n} \ddot{y}_{\max} \left[\int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) \right. \\ &\quad \left. (\sin \omega_n \tau \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n \tau \sin \omega_n \tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (E.3)$$

Essa equação é igual à Equação (E.4) do Exemplo 4.10, exceto que $(-\ddot{y}_{\max})$ aparece no lugar de F_0/m . Por consequência, $z(t)$ pode ser escrita, usando a Equação (E.8) do Exemplo 4.10, como

$$z(t) = -\frac{\ddot{y}_{\max}}{\omega_n^2} \left[1 - \frac{t}{t_0} - \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t \right] \quad (E.4)$$

Para determinar a resposta máxima, z_{\max} , fazemos

$$\dot{z}(t) = -\frac{\ddot{y}_{\max}}{t_0 \omega_n^2} \left[-1 + \omega_n t_0 \sin \omega_n t + \cos \omega_n t \right] = 0 \quad (E.5)$$

Essa equação dá o tempo t_m no qual z_{\max} ocorre:

$$t_m = \frac{2}{\omega_n} \operatorname{tg}^{-1}(\omega_n t_0) \quad (E.6)$$

Substituindo a Equação (E.6) na Equação (E.4), a resposta máxima do reservatório pode ser determinada:

$$z_{\max} = -\frac{\ddot{y}_{\max}}{\omega_n^2} \left[1 - \frac{t_m}{t_0} - \cos \omega_n t_m + \frac{1}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t_m \right] \quad (E.7)$$

Resposta durante $t > 2t_0$: Visto que não há nenhuma excitação durante esse tempo, podemos usar a solução do problema de vibração livre (Equação 2.18)

$$z(t) = z_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_n} \right) \sin \omega_n t \quad (E.8)$$

contanto que consideremos o deslocamento inicial e a velocidade inicial como

$$z_0 = z(t = 2t_0) \quad \text{e} \quad \dot{z}_0 = \dot{z}(t = 2t_0) \quad (E.9)$$

usando a Equação (E.7). O máximo de $z(t)$ dado pela Equação (E.8) pode ser identificado como

$$z_{\max} = \left[z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{E.10})$$

onde z_0 e \dot{z}_0 são calculados como indicado na Equação (E.9).

4.6.2. Espectros de resposta a terremoto

A descrição mais direta do movimento de um terremoto no domínio do tempo é dada por acelerogramas registrados por instrumentos denominados *acelerógrafos de movimento forte*. O acelerógrafo regista três componentes ortogonais da aceleração do solo em certa localização. Um acelerograma típico é mostrado na Figura 4.14. De modo geral, os acelerogramas são registrados em papel ou filme fotográfico e digitalizados para aplicações de engenharia. A aceleração de pico do solo, a duração e o conteúdo de freqüência do terremoto podem ser obtidos por um acelerograma. Um acelerograma pode ser integrado para obter as variações de tempo da velocidade do solo e do deslocamento do solo.

Um espectro de resposta é usado para dar a representação mais descriptiva da influência de determinado terremoto sobre uma estrutura ou máquina. É possível representar em gráfico a resposta máxima de um sistema com um grau de liberdade em termos da aceleração, pseudovelocidade relativa e deslocamento relativo usando escalas logarítmicas. Um espectro de resposta típico, representado em um papel logarítmico de quatro escalas, é mostrado na Figura 4.15. Nessa figura, o eixo vertical denota a velocidade espectral, o eixo horizontal representa o período natural, o eixo inclinado a 45° indica a aceleração espectral, e o eixo inclinado a 135° mostra o deslocamento espectral.

Como podemos ver pela Figura 4.15, o espectro de resposta de determinado acelerograma (terremoto) exibe consideráveis irregularidades no domínio da freqüência. Todavia, espectros correspondentes a um conjunto de acelerogramas produzidos por tremores de terra em locais com características geológicas e sismológicas semelhantes são funções regulares de tempo e dão tendências estatísticas que os caracterizam coletivamente. Essa ideia resultou no desenvolvimento do conceito de um espectro de projeto – um desses desenhos típicos é mostrado na Figura 4.16, para utilização no projeto de estruturas e máquinas resistentes a terremotos. Os exemplos a seguir ilustram a utilização dos espectros de resposta e de projeto produzidos por terremotos.

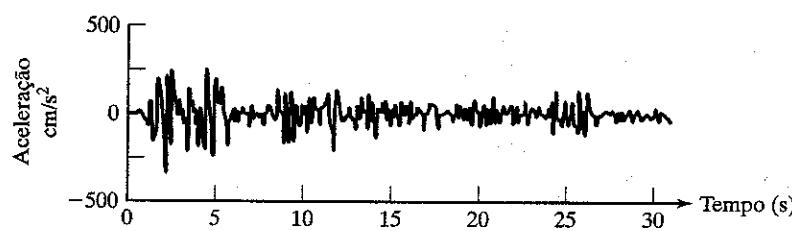


FIGURA 4.14 Um acelerograma típico.

EXEMPLO 4.13

Resposta da estrutura de um edifício a um terremoto

Uma estrutura de edifício pesa 15.000 lb, e suas duas colunas têm uma rigidez total k , como indicado na Figura 4.17. Ela tem um fator de amortecimento de 0,05 e um período natural de 1,0 s. Para o terremoto caracterizado na Figura 4.15, determine:

- Máximo deslocamento relativo da massa, x_{\max} .
- Máxima força de cisalhamento nas colunas.
- Máxima tensão de flexão nas colunas.

Solução:

Abordagem: Determine o deslocamento espectral, a velocidade espectral e a aceleração espectral correspondentes ao período natural dado.

Para $\tau_n = 1,0$ s e $\zeta = 0,05$, a Figura 4.15 dá $S_v = 25$ in/s, $S_d = 4,2$ in e $S_a = 0,42 g = 162,288$ in/s²,

- Máximo deslocamento relativo da massa, $x_{\max} = S_d = 4,2$ in.
- Máxima força de cisalhamento em ambas as colunas:

$$\begin{aligned} |kx_{\max}| &= m\ddot{x}_{\max} = \frac{W}{g} S_a \\ &= \left(\frac{15.000}{386,4} \right) (162,288) = 6.300 \text{ lb} \end{aligned}$$

Dessa forma, a máxima força de cisalhamento em cada coluna é dada por

$$F_{\max} = 6.300/2 = 3.150 \text{ lb}$$

- O máximo momento de flexão em cada coluna = $M_{\max} = F_{\max} l$. Assim, a máxima tensão de flexão é dada pela fórmula da viga

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I}$$

onde I é o momento de inércia de área e c é a distância da fibra externa em relação ao eixo neutro da seção da coluna.

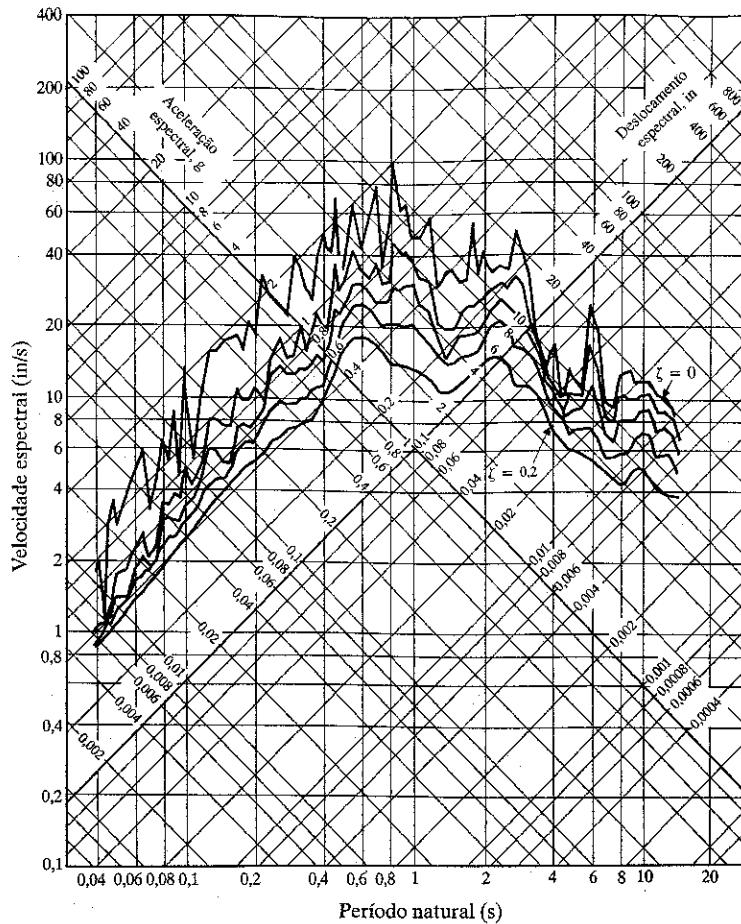


FIGURA 4.15 Espectro de resposta de um terremoto típico [4.12]. (Imperial Valley Earthquake, 18 maio 1940; $\zeta = 0, 0,02, 0,05, 0,10$ e $0,20$.) (Reprodução permitida por *The Shock and Vibration Digest*.)

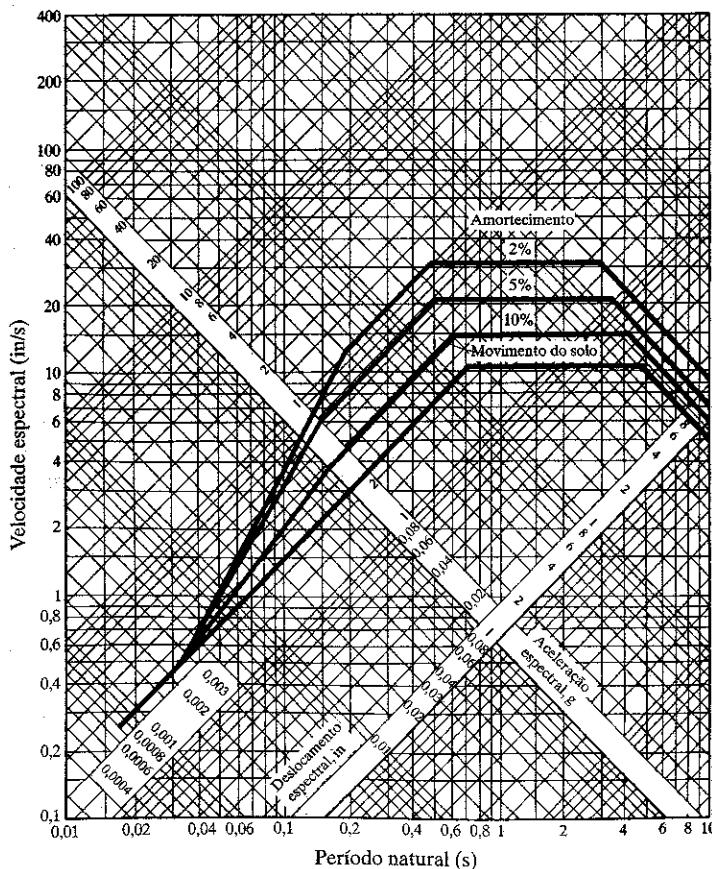


FIGURA 4.16 Espectro de projeto [4.12]. (Reprodução permitida por *The Shock and Vibration Digest*.)

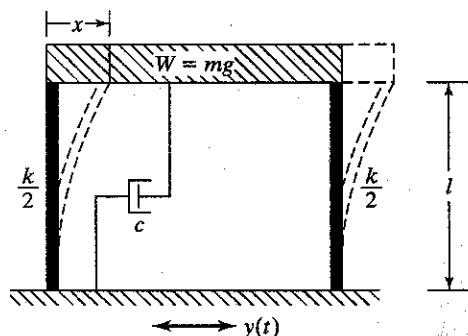


FIGURA 4.17 Estrutura de um edifício sujeita a movimento de base.

EXEMPLO 4.14

Descarrilamento do carrinho de uma ponte rolante durante um terremoto

O carrinho de uma ponte rolante elétrica move-se na horizontal sobre a trave como indicado na Figura 4.18. Considerando o carrinho como um ponto de massa, a ponte rolante pode ser modelada como um sistema com um grau de liberdade com um período 2 s e um fator de amortecimento de 2%. Determine se o carrinho sairá do trilho sob a excitação vertical de um terremoto cujo espectro de projeto é dado pela Figura 4.16.

Solução:

Abordagem: Determine se a aceleração espectral do carrinho (massa) ultrapassa o valor de 1 g.

Para $\tau_n = 2$ s e $\zeta = 0,02$, a Figura 4.16 dá a aceleração espectral como $S_a = 0,25$ g e, por consequência, o carrinho não sairá do trilho.

4.6.3. Projeto para ambiente sujeito a choque

Quando uma força é aplicada por curta duração, normalmente por um período menor que um período natural, ela é denominada uma *carga de choque*. Um choque causa um aumento significativo no deslocamento, velocidade, aceleração ou tensão de um sistema mecânico. Embora a fadiga seja a maior causa de falha sob forças harmônicas, normalmente

ela não é muito importante sob cargas de choque. Um choque pode ser descrito por um choque de pulso, um choque de velocidade ou por um espectro de resposta a choque. Os choques de pulsos ocorrem pela aplicação repentina de forças ou deslocamentos na forma de um quadrado, de uma semi-senóide, de um triângulo ou de uma forma semelhante (Figura 4.19). Um choque de velocidade é causado por mudanças repentinas na velocidade, tais como as causadas quando embalagens são derrubadas de uma altura. O espectro de resposta ao choque descreve o modo como uma máquina ou estrutura responde a um choque específico, em vez de descrever o choque em si. Diferentes tipos de pulsos de choque são usados para qualificar a maioria dos produtos comerciais, industriais e militares. Muitas especificações militares como a MIL-E-5400 e a MIL-STD-810 definem diferentes tipos de pulsos de choque e métodos detalhados para testes com esses pulsos. Os exemplos a seguir ilustram o método de limitação de tensões dinâmicas em sistemas mecânicos em um ambiente sujeito a choque.

EXEMPLO 4.15

Projeto de uma cantoneira para cargas de choque

Uma placa de circuito impresso (PCI) é montada sobre uma cantoneira de alumínio em balanço, como mostra a Figura 4.20(a). A cantoneira é colocada dentro de uma embalagem que deverá ser lançada de um helicóptero em vôo baixo. O choque resultante pode ser aproximado como um pulso de onda semi-senoidal, como mostra a Figura 4.20(b). Calcule a cantoneira de modo que ela suporte um nível de aceleração de 100 g sob o pulso de onda semi-senoidal mostrado na Figura 4.20(b). Suponha um peso específico de 0,1 lb/in³, um módulo de Young de 10⁷ psi e uma tensão permitível de 26.000 psi para o alumínio.

Solução: O peso próprio da viga (w) é dado por

$$w = (10) \left(\frac{1}{2} \times d \right) (0,1) = 0,5 d$$

e o peso total, W , que consideramos ser uma carga concentrada na extremidade livre da viga, é dado por

$$W = \text{Peso da viga} + \text{Peso da PCI} = 0,5 d + 0,4$$

O momento de inércia de área (I) da seção transversal da viga é

$$I = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \times d^3 = 0,04167 d^3$$

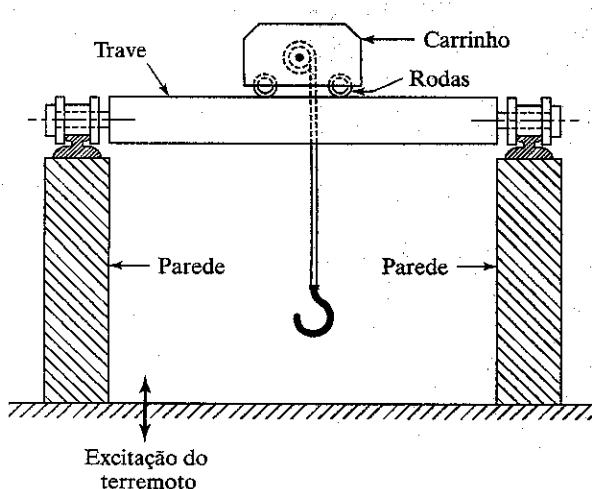


FIGURA 4.18 Uma ponte rolante sujeita à excitação causada por terremoto.

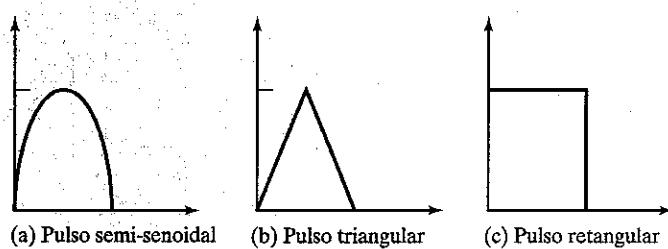


FIGURA 4.19 Pulsos de choque típicos.

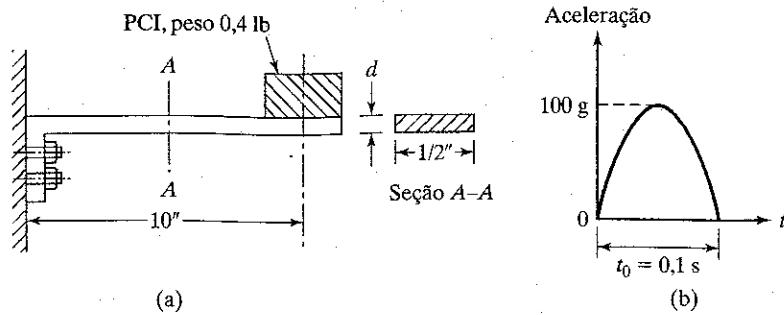


FIGURA 4.20 Uma viga em balanço sujeita a um pulso de aceleração.

A deflexão estática da viga, δ_{st} , sob a carga W em sua extremidade, pode ser calculada como

$$\begin{aligned}\delta_{st} &= \frac{Wl^3}{3EI} = \frac{(0,5d + 0,4)(10^3)}{3 \times 10^7(0,04167d^3)} \\ &= \frac{(0,5d + 0,4)}{d^3} 7,9994 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

Visto que o fator de amplificação do choque (a ordenada na Figura 4.12(b)) não pode ser determinado a menos que o valor de t_0/τ_n seja conhecido, adotamos um procedimento de tentativa e erro para determinar o valor de τ_n e, por consequência, o de t_0/τ_n . Se tomarmos d como $\frac{1}{2}$ in,

$$\begin{aligned}\delta_{st} &= \left(\frac{0,5 \times 0,5 + 0,4}{0,5^3} \right) 7,9997 \times 10^{-4} \\ &= 41,5969 \times 10^{-4} \text{ in}\end{aligned}$$

A Equação (2.30) dá

$$\tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{41,5969 \times 10^{-4}}{386,4} \right)} = 0,020615 \text{ s}$$

Por consequência,

$$\frac{t_0}{\tau_n} = \frac{0,1}{0,020615} = 4,8508$$

O fator de amplificação do choque (A_a) pode ser determinado pela Figura 4.12(b) como 1,1. A carga dinâmica (P_d) que age sobre a viga em balanço é dada por

$$P_d = A_a Ma_s = (1,1) \left(\frac{0,65}{g} \right) (100 \text{ g}) = 71,5 \text{ lb}$$

onde a_s é a aceleração correspondente ao choque, M é a massa na extremidade da viga, e Ma_s é a força de inércia sobre a viga. Observando que $I = 0,04167d^3 = 0,005209 \text{ in}^4$, a máxima tensão de flexão na junção da cantoneira em balanço pode ser calculada como

$$\sigma_{\max} = \frac{M_b c}{I} = \frac{(71,5 \times 10) \frac{0,5}{2}}{0,005209} = 34.315,6076 \text{ lb/in}^2$$

Uma vez que a tensão excede o valor permitível, escolhemos o próximo valor por tentativa de d como 0,6 in. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}\delta_{st} &= \left(\frac{0,5 \times 0,6 + 0,4}{0,6^3} \right) 7,9994 \times 10^{-4} \\ &= 25,9240 \times 10^{-4} \text{ in} \\ \tau_n &= 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{25,9240 \times 10^{-4}}{386,4}} = 0,01627 \text{ s} \\ \frac{t_0}{\tau_n} &= \frac{0,1}{0,01627} = 6,1445\end{aligned}$$

Pela Figura 4.12(b), constatamos que o fator de amplificação de choque é $A_a \approx 1,1$ e, por consequência, a carga dinâmica que age sobre a viga pode ser determinada como

$$P_d = (1,1) \left(\frac{0,7}{g} \right) (100 \text{ g}) = 77,0 \text{ lb}$$

Uma vez que $d = 0,6$ in dá $I = 0,04167d^3 = 0,009001 \text{ in}^4$, a máxima tensão de flexão na junção da cantoneira será

$$\sigma_{\max} = \frac{M_b c}{I} = \frac{(77,0 \times 10) \left(\frac{0,6}{2} \right)}{0,009001} = 25.663,8151 \text{ lb/in}^2$$

Visto que essa tensão está dentro do limite permitível, a espessura da cantoneira pode ser tomada como $d = 0,6$ in. ■

4.7 Transformadas de Laplace

O método da transformada de Laplace pode ser usado para determinar a resposta de um sistema a qualquer tipo de excitação, incluindo os tipos harmônicos e periódicos. Esse método pode ser usado para a solução eficiente de equações diferenciais lineares, em particular as que têm coeficientes constantes [4.3]. Ele permite a conversão de equações diferenciais em equações algébricas, que são mais fáceis de manipular. As principais vantagens do método são que ele pode tratar funções descontínuas sem qualquer dificuldade particular e que ele leva automaticamente em conta as condições iniciais.

A transformada de Laplace de uma função $x(t)$, denotada pelo símbolo $\bar{x}(s) = \int x(t) dt$, é definida como

$$\bar{x}(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt \quad (4.46)$$

onde s é, em geral, uma quantidade complexa denominada variável subsidiária. A função e^{-st} é denominada o núcleo da

transformação. Visto que a integração é em relação a t , a transformação dá uma função de s . Para resolver um problema de vibração usando o método da transformada de Laplace, são necessárias as seguintes etapas:

1. Escreva a equação de movimento do sistema.
2. Transforme cada termo da equação usando condições iniciais conhecidas.
3. Resolva para a resposta transformada do sistema.
4. Obtenha a solução desejada (resposta) usando transformação inversa de Laplace.

Para resolver a equação da vibração forçada

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (4.47)$$

pelo método da transformada de Laplace, é necessário determinar as transformadas das derivadas

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) \quad \text{e} \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$$

Essas expressões podem ser determinadas da seguinte maneira:

$$1 \frac{dx}{dt}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{dx}{dt}(t) dt \quad (4.48)$$

Essa expressão pode ser integrada por partes para obter

$$\begin{aligned} 1 \frac{dx}{dt}(t) &= e^{-st} x(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt \\ &= s\bar{x}(s) - x(0) \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde $x(0) = x_0$ é o deslocamento inicial da massa m . De maneira semelhante, a transformada de Laplace da derivada de segunda ordem de $x(t)$ pode ser obtida

$$\begin{aligned} 1 \frac{d^2x}{dt^2}(t) &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^2x}{dt^2}(t) dt \\ &= s^2\bar{x}(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ é a velocidade inicial da massa m . Visto que a transformada de Laplace da força $F(t)$ é dada por

$$\bar{F}(s) = 1F(t) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \quad (4.51)$$

podemos transformar ambos os lados da Equação (4.47) e obter, usando as equações (4.46) e (4.48) em (4.51),

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 1F(t)$$

ou

$$(ms^2 + cs + k)\bar{x}(s) = \bar{F}(s) + m\dot{x}(0) + (ms + c)x(0) \quad (4.52)$$

onde o lado direito da Equação (4.52) pode ser considerado como excitação transformada generalizada.

Por enquanto, consideramos $\dot{x}(0)$ e $x(0)$ iguais a zero, o que equivale a ignorar a solução homogênea da equação

diferencial (4.47). Então, a razão entre a transformada da excitação e a transformada da resposta $\bar{Z}(s)$ pode ser expressa como

$$\bar{Z}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}(s)} = ms^2 + cs + k \quad (4.53)$$

A função $\bar{Z}(s)$ é conhecida como a *impedância generalizada* do sistema. A recíproca da função $\bar{Z}(s)$ é denominada *função admitância* ou *função transferência* do sistema, e é denotada por $\bar{Y}(s)$:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(s) &= \frac{1}{\bar{Z}(s)} = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \\ &= \frac{1}{m(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Podemos ver que, fazendo $s = i\omega$ em $\bar{Y}(s)$ e multiplicando por k , obtemos a resposta de freqüência complexa $H(i\omega)$ definida na Equação (3.54). A Equação (4.54) também pode ser expressa como

$$\bar{x}(s) = \bar{Y}(s) \bar{F}(s) \quad (4.55)$$

que indica que a função transferência pode ser considerada como um operador algébrico que opera sobre a força transformada para dar a resposta transformada.

Para determinar a resposta desejada $x(t)$ por $\bar{x}(s)$, temos de tomar a transformada inversa de Laplace de $\bar{x}(s)$, que pode ser definida simbolicamente como

$$x(t) = 1^{-1}\bar{x}(s) = 1^{-1}\bar{Y}(s) \bar{F}(s) \quad (4.56)$$

Em geral, o operador 1^{-1} envolve uma integral de linha no domínio complexo [4.9, 4.10]. Felizmente, não precisamos avaliar essas integrais separadamente para cada problema; tais integrações já foram efetuadas para várias formas comuns da função $F(t)$ e tabuladas [4.4]. Uma dessas tabelas é dada no Apêndice D. Para determinar a solução usando a Equação (4.56), normalmente procuramos meios de decompor $\bar{x}(s)$ em uma combinação de funções simples cujas transformações inversas estão disponíveis em tabelas de transformadas de Laplace. Podemos decompor $\bar{x}(s)$ convenientemente pelo método das frações parciais.

Na discussão acima, ignoramos a solução homogênea considerando $x(0)$ e $\dot{x}(0)$ como zero. Agora, consideraremos a solução geral considerando as condições iniciais como $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Podemos obter a resposta transformada $\bar{x}(s)$ pela Equação (4.52):

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= \frac{\bar{F}(s)}{ms^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} x_0 \\ &\quad + \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Podemos obter a transformada inversa de $\bar{x}(s)$ considerando cada termo do lado direito da (4.57) separadamente. Também fazemos uso da seguinte relação [4.4]:

$$1^{-1}\bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.58)$$

Considerando o primeiro termo do lado direito da Equação (4.57) como $\bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s)$, onde

$$\bar{f}_1(s) = \bar{F}(s) \quad \text{e} \quad \bar{f}_2(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

e observando que $f_1(t) = 1^{-1}\bar{f}_1(s) = F(t)$, obtemos³

$$1^{-1}\bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (4.59)$$

Considerando o segundo termo do lado direito da Equação (4.57), determinamos a transformada inversa do coeficiente de x_0 pela tabela no Apêndice D:

$$\begin{aligned} 1^{-1} \left(\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_d t + \phi_1) \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde

$$\phi_1 = \cos^{-1}(\zeta) \quad (4.61)$$

Por fim, a transformada inversa do coeficiente de \dot{x}_0 no terceiro termo do lado direito da Equação (4.57) pode ser obtida pela tabela no Apêndice D:

$$1^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \quad (4.62)$$

Usando as equações (4.57), (4.59), (4.60) e (4.62), a solução geral da Equação (4.47) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{x_0}{(1 - \zeta^2)^{1/2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_d t + \phi_1) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \\ + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.63)$$

EXEMPLO 4.16

Resposta de uma máquina compactadora

Determine a resposta da máquina compactadora do Exemplo 4.6, admitindo um sistema não amortecido (isto é, $\zeta < 1$).

Abordagem: Use o modelo massa-mola-amortecedor da máquina compactadora e a técnica da transformada de Laplace.

Solução: A função forçante é dada por

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{para } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{para } t > t_0 \end{cases} \quad (E.1)$$

Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial governante, Equação (4.47), obtemos a Equação (4.57), usando o Apêndice D, com

$$\bar{F}(s) = 1^{-1}F(t) = \frac{F_0(1 - e^{-t_0 s})}{s} \quad (E.2)$$

³ A transformada inversa de $\bar{f}_2(s)$ é obtida pela tabela de transformadas de Laplace no Apêndice D.

Assim, a Equação (4.57) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= \frac{F_0(1 - e^{-t_0 s})}{ms(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} x_0 \\ &\quad + \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dot{x}_0 \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \frac{1}{s \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)} - \frac{F_0}{m\omega_n^2} \frac{e^{-t_0 s}}{s \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)} \\ &\quad + \frac{x_0}{\omega_n^2} \frac{s}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)} \\ &\quad + \left(\frac{2\zeta x_0}{\omega_n} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n^2} \right) \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)} \end{aligned} \quad (E.3)$$

A transformada inversa da Equação (E.3) pode ser expressa usando-se os resultados do Apêndice D como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi_1\} \right] \\ &\quad - \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} (t - t_0) + \phi_1\} \right] \\ &\quad - \frac{x_0}{\omega_n^2} \left[\frac{\omega_n^2 e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi_1\} \right] \\ &\quad + \left(\frac{2\zeta x_0}{\omega_n} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n^2} \right) \left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right] \end{aligned} \quad (E.4)$$

onde ϕ_1 é dada pela Equação (4.61). Assim, a resposta da máquina compactadora pode ser expressa como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2 \sqrt{1 - \zeta^2}} [-e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi_1) \\ &\quad + e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \sin \{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} (t - t_0) + \phi_1\}] \\ &\quad - \frac{x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi_1) \\ &\quad + \frac{(2\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \end{aligned} \quad (E.5)$$

Embora se espere que a primeira parte da Equação (E.5) seja igual à Equação (E.1) do Exemplo 4.8, é difícil ver a equivalência na forma atual da Equação (E.5). Contudo, para o sistema não amortecido, a Equação (E.5) reduz-se a

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[-\sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left\{\omega_n(t - t_0) + \frac{\pi}{2}\right\} \right] \\
 &\quad - x_0 \sin\left(\omega_n t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \\
 &= \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n(t - t_0) - \cos \omega_n t] \\
 &\quad + x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

Podemos ver que a primeira parte da Equação (E.6), ou a parte em regime permanente, é idêntica à Equação (E.3) do Exemplo 4.8.

4.8 Resposta a condições forçantes irregulares usando métodos numéricos

Nas seções anteriores, admitimos que as funções forçantes $F(t)$ estão disponíveis como funções de tempo sob uma forma explícita. Todavia, em muitos problemas práticos, as funções forçantes $F(t)$ não estão disponíveis sob a forma de expressões analíticas. Quando uma função forçante é determinada por meios experimentais, pode ser que $F(t)$ seja conhecida como uma curva irregular. Às vezes, pode ser que estejam disponíveis valores de $F(t) = F_i$, apenas em uma série de pontos $t = t_i$, sob a forma de uma diagrama ou tabela. Nesses casos, podemos ajustar polinomiais ou algumas curvas como estas aos dados e usá-las na integral de Duhamel, Equação (4.33), para determinar a resposta do sistema. Outro método mais comum de determinar a resposta envolve dividir o eixo do tempo em vários pontos discretos e usar uma variação simples de $F(t)$ durante cada etapa de tempo. Apresentaremos essa abordagem numérica nesta seção, usando vários tipos de funções de interpolação para $F(t)$ [4.8]. A integração numérica direta das equações de movimento é discutida no Capítulo 11.

Método 1. Suponhamos que função $F(t)$ varie com o tempo de um modo arbitrário, como indicado na Figura 4.21. Essa função forçante pode ser aproximada por uma série de funções degrau

com magnitudes diferentes e começando em instantes diferentes, como mostra a Figura 4.22. Nessa figura, a primeira função degrau começa no tempo $t = t_1 = 0$ e tem uma magnitude de ΔF_1 , a segunda função degrau começa no tempo $t = t_2$ e tem uma magnitude de ΔF_2 e assim por diante. A resposta do sistema em qualquer intervalo de tempo $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ e devido às funções degraus ΔF_i ($i = 1, 2, \dots, j-1$) pode ser determinada por meio dos resultados do Exemplo 4.6:

$$x(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{j-1} \Delta F_i \left[1 - e^{-\zeta \omega_n(t-t_i)} \times \left\{ \cos \omega_d(t - t_i) + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d(t - t_i) \right\} \right] \tag{4.64}$$

Assim, a resposta do sistema em $t = t_j$ torna-se

$$x_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{j-1} \Delta F_i \left[1 - e^{-\zeta \omega_n(t_j-t_i)} \times \left\{ \cos \omega_d(t_j - t_i) + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d(t_j - t_i) \right\} \right] \tag{4.65}$$

Observe que a função degrau ΔF_i , da etapa i é positiva se a inclinação da curva F em relação a t (ou curva $F-t$) for positiva, e é negativa se a inclinação da curva F em relação a t (ou curva $F-t$) for negativa, como indicado na Figura 4.22. Para maior precisão, os intervalos de tempo adotados devem ser pequenos. Ademais, é desejável que, após o primeiro intervalo, as forças degraus (ou degrau) começem em instantes em que as ordenadas da curva $F(t)$ correspondam à metade das alturas dos intervalos, como mostra a Figura 4.22. Nesse caso, os erros envolvidos na aproximação da curva $F(t)$ se compensarão mutuamente; isto é, as áreas que se encontram acima da curva $F(t)$ serão aproximadamente iguais às áreas que se encontram abaixo da curva $F(t)$.

Método 2. Em vez de aproximar a curva $F(t)$ por uma sucessão de funções degrau, podemos aproxima-la por uma série de impulsos retangulares F_p como mostra a Figura 4.23. Esses impulsos F_p são positivos ou negativos, dependendo de a curva

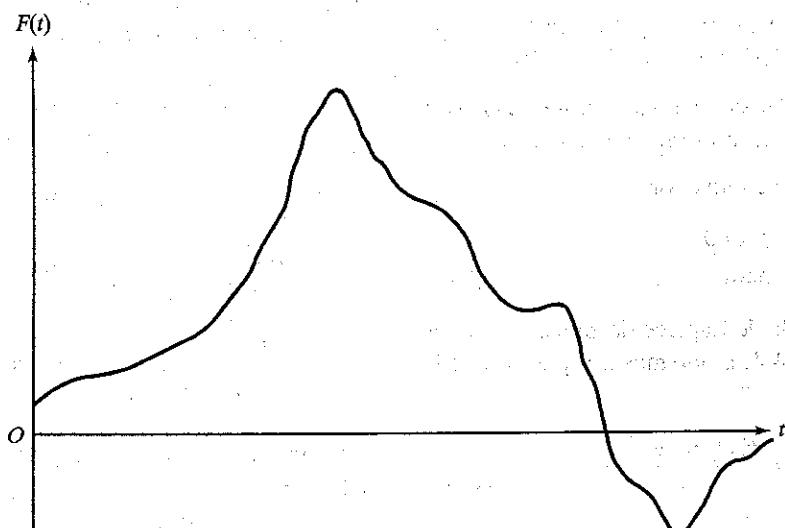


FIGURA 4.21 Função forçante arbitrária.

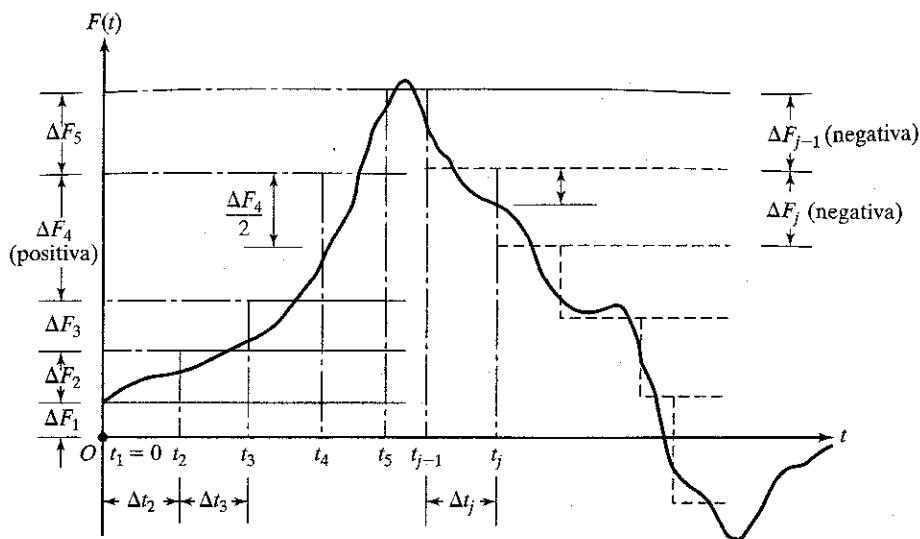


FIGURA 4.22 Aproximação de função forçante como uma série de funções degraus.

\$F(t)\$ estar acima ou abaixo do eixo do tempo (\$t\$). Como no caso anterior, as magnitudes de \$F_i\$ devem ser selecionadas como valores de \$F(t)\$ que se encontram no meio dos intervalos de tempo \$\Delta t_i\$, como mostra a Figura 4.23, para que os erros se compensem mutuamente. A resposta do sistema em qualquer intervalo de tempo \$t_{j-1} \leq t \leq t_j\$ pode ser determinada pela soma da resposta devida a \$F_j\$ (aplicada no intervalo \$\Delta t_j\$) com a resposta existente em \$t = t_{j-1}\$ (condição inicial). Isso dá

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{F_j}{k} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n(t-t_{j-1})} \left\{ \cos \omega_d(t-t_{j-1}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d(t-t_{j-1}) \right\} \right] \\ & + e^{-\zeta\omega_n(t-t_{j-1})} \left\{ x_{j-1} \cos \omega_d(t-t_{j-1}) \right. \\ & \left. + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta\omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d(t-t_{j-1}) \right\} \quad (4.66) \end{aligned}$$

Substituindo \$t = t_j\$ na Equação (4.66), podemos obter a resposta do sistema no final do intervalo \$\Delta t_j\$:

$$\begin{aligned} x_j = & \frac{F_j}{k} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n\Delta t_j} \left\{ \cos \omega_d \cdot \Delta t_j + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d \cdot \Delta t_j \right\} \right] \\ & + e^{-\zeta\omega_n\Delta t_j} \left\{ x_{j-1} \cos \omega_d \cdot \Delta t_j \right. \\ & \left. + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta\omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d \cdot \Delta t_j \right\} \quad (4.67) \end{aligned}$$

Diferenciando a Equação (4.66) em relação a \$t\$ e substituindo \$t = t_j\$, obtemos a velocidade \$\dot{x}_j\$ no final do intervalo \$\Delta t_j\$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j = & \frac{F_j \omega_d}{k} e^{-\zeta\omega_n\Delta t_j} \left(1 + \frac{\zeta^2 \omega_n^2}{\omega_d^2} \right) \sin \omega_d \cdot \Delta t_j + \omega_d e^{-\zeta\omega_n\Delta t_j} \\ & \times \left\{ -x_{j-1} \sin \omega_d \cdot \Delta t_j + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta\omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \cos \omega_d \cdot \Delta t_j \right\} \end{aligned}$$

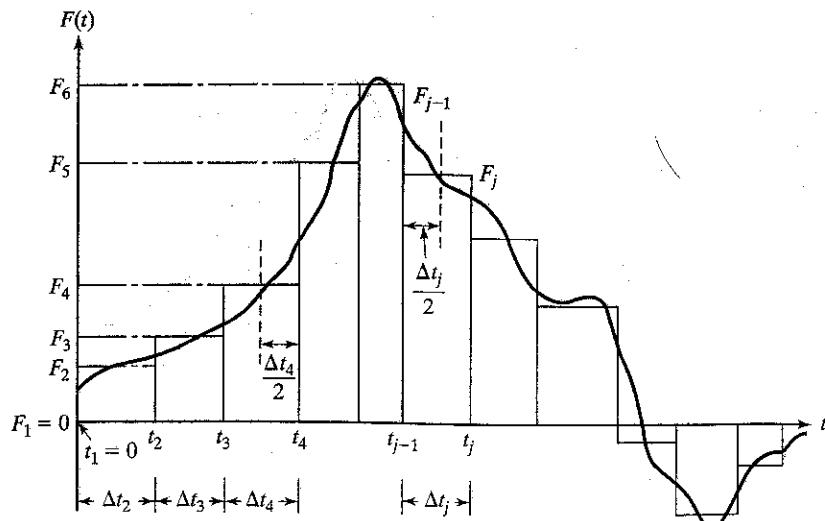


FIGURA 4.23 Aproximação de uma função forçante como uma série de impulsos.

$$-\frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \left[x_{j-1} \cos \omega_d \cdot \Delta t_j + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta \omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d \cdot \Delta t_j \right] \quad (4.68)$$

As equações (4.67) e (4.68) representam relações de recorrência para o cálculo da resposta no final do j -ésimo intervalo de tempo. Elas também dão as condições iniciais de x_j e \dot{x}_j no início da etapa $j+1$. Essas equações podem ser aplicadas em seqüência para determinar as variações do deslocamento e da velocidade do sistema com o tempo.

Método 3. Nos tipos de aproximações constantes trecho a trecho usados nos métodos 1 e 2, nem sempre é possível conseguir que as áreas acima e abaixo da curva $F(t)$ sejam iguais nem que os erros se compensem mutuamente. Por consequência, é desejável usar uma interpolação de ordem superior, tal como uma aproximação linear trecho a trecho ou uma aproximação quadrática trecho a trecho, para $F(t)$. Na interpolação linear trecho a trecho, admite-se que a variação de $F(t)$ em qualquer intervalo de tempo seja linear, como mostra a Figura 4.24. Nesse caso, a resposta do sistema no intervalo de tempo $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ pode ser determinada somando a resposta devida à função linear aplicada (rampa) durante o intervalo corrente com a resposta existente em $t = t_{j-1}$ (condição inicial). Isso dá:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\Delta F_j}{k \Delta t_j} \left[t - t_{j-1} - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta \omega_n (t-t_{j-1})} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d (t - t_{j-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 \omega_d} \sin \omega_d (t - t_{j-1}) \right\} \right] \\ &+ \frac{F_{j-1}}{k} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n (t-t_{j-1})} \left\{ \cos \omega_d (t - t_{j-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d (t - t_{j-1}) \right\} \right] \\ &+ e^{-\zeta \omega_n (t-t_{j-1})} \left[x_{j-1} \cos \omega_d (t - t_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta \omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d (t - t_{j-1}) \right] \quad (4.69) \end{aligned}$$

onde $\Delta F_j = F_j - F_{j-1}$. Fazendo $t = t_j$ na Equação (4.69), obtemos a resposta no final do intervalo Δt_j :

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{\Delta F_j}{k \Delta t_j} \left[\Delta t_j - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left\{ \frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d \Delta t_j \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 \omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j \right\} \right] \\ &+ \frac{F_{j-1}}{k} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left\{ \cos \omega_d \Delta t_j \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j \right\} \right] \\ &+ e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left[x_{j-1} \cos \omega_d \Delta t_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta \omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j \right] \quad (4.70) \end{aligned}$$

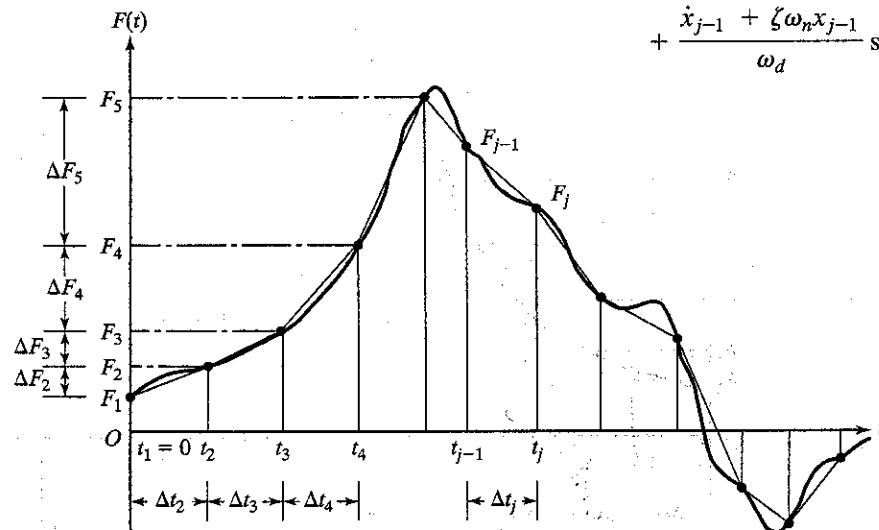


FIGURA 4.24 Aproximação de função forçante como um conjunto de funções lineares.

Diferenciando a Equação (4.69) em relação a t e substituindo $t = t_j$, obtemos a velocidade no final do intervalo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \frac{\Delta F_j}{k \Delta t_j} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left\{ \cos \omega_d \Delta t_j + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j \right\} \right] \\ &+ \frac{F_{j-1}}{k} e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \frac{\omega_n^2}{\omega_d} \cdot \sin \omega_d \Delta t_j + e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \\ &\times \left[\dot{x}_{j-1} \cos \omega_d \Delta t_j - \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \left(\dot{x}_{j-1} + \frac{\omega_n}{\zeta} x_{j-1} \right) \sin \omega_d \Delta t_j \right] \quad (4.71) \end{aligned}$$

As equações (4.70) e (4.71) são as relações de recorrência para determinar a resposta do sistema no final da j -ésima etapa de tempo.

EXEMPLO 4.17

Resposta amortecida usando métodos numéricos

Determine a resposta de um sistema massa-mola-amortecedor sujeito à função forçante

$$F(t) = F_0 \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2t_0} \right) \quad (E.1)$$

no intervalo $0 \leq t \leq t_0$, usando um procedimento numérico. Suponha que $F_0 = 1$, $k = 1$, $m = 1$, $\zeta = 0,1$ e $t_0 = \tau_n/2$, onde τ_n denota o período natural de vibração dado por

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{(k/m)^{1/2}} = 2\pi \quad (E.2)$$

Os valores de x e \dot{x} em $t = 0$ são zero.

Abordagem: Use métodos numéricos.

Solução: A Figura 4.25 mostra a função forçante da Equação (E.1). Para os cálculos numéricos, o intervalo de tempo 0 a t_0 é dividido em dez etapas iguais com

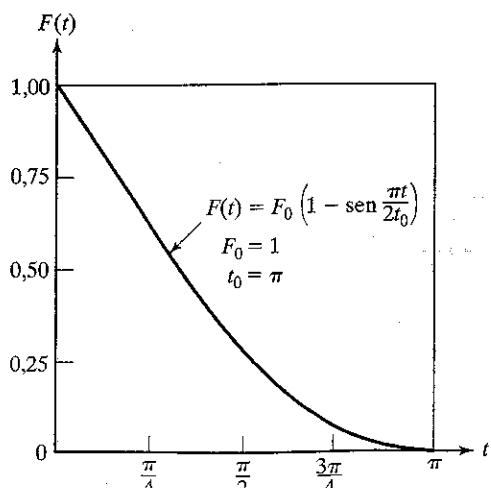


FIGURA 4.25 Função forçante.

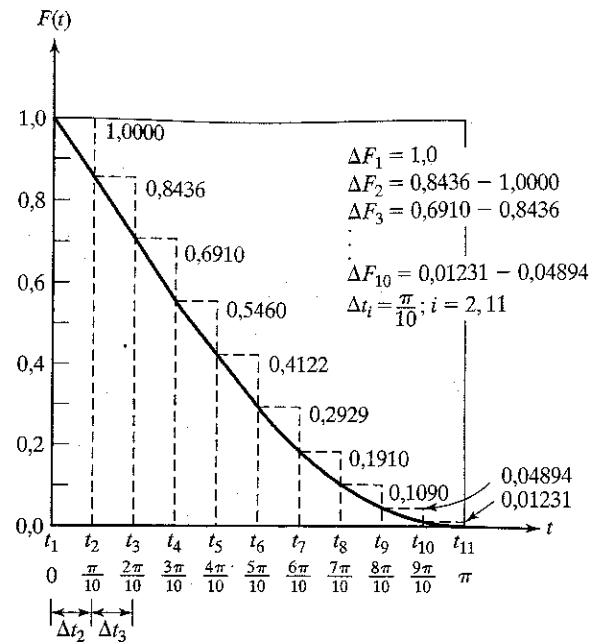


FIGURA 4.26 Aproximação como uma série de impulsos retangulares.

$$\Delta t_i = \frac{t_0}{10} = \frac{\pi}{10}, \quad i = 2, 3, \dots, 11 \quad (E.3)$$

Quatro métodos diferentes são usados para aproximar a função forçante $F(t)$. Na Figura 4.26, $F(t)$ é aproximada por uma série de impulsos retangulares, cada um começando no início da etapa de tempo correspondente.

Uma aproximação semelhante, com a magnitude do impulso no final de cada intervalo de tempo, é usada na Figura 4.27. O valor de $F(t)$ no meio do intervalo de tempo é utilizado como um impulso na Figura 4.28. Na Figura 4.29, são usados impulsos lineares (trapezoidais) trecho a trecho para aproximar a função forçante $F(t)$. Os resultados numéricos são dados na Tabela 4.1. Como é de esperar quando se trata de idealizações, os resultados obtidos pelas idealizações 1 e 2 (figuras 4.26 e 4.27) superestimam e subestimam a resposta verdadeira, respectivamente. Espera-se que os resultados dados pelas idealizações 3 e 4 encontrem-se entre os dados pelas idealizações 1 e 2. Além disso, os resultados obtidos pela idealização 4 serão os mais precisos.

4.9 Exemplos usando MATLAB

EXEMPLO 4.18

Resposta total de um sistema à excitação de base

Usando MATLAB, represente em gráfico a resposta total do sistema viscosamente amortecido sujeito à excitação harmônica de base considerado no Exemplo 4.2.

Solução: A resposta total do sistema é dada pela Equação (E.8) do Exemplo 4.2:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0,488695 e^{-t} \cos (19,975t - 1,529683) \\ &+ 0,001333 \cos (5t - 0,02666) \\ &+ 0,053314 \operatorname{sen} (5t - 0,02666) \end{aligned}$$

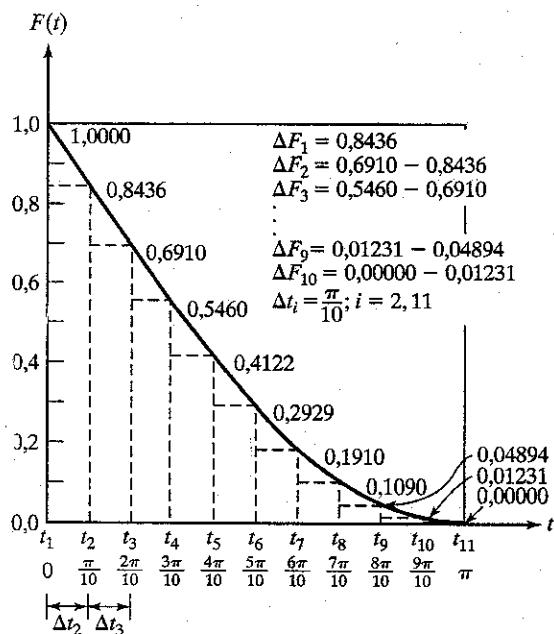


FIGURA 4.27 Aproximação como uma série de impulsos retangulares (magnitudes diferentes).

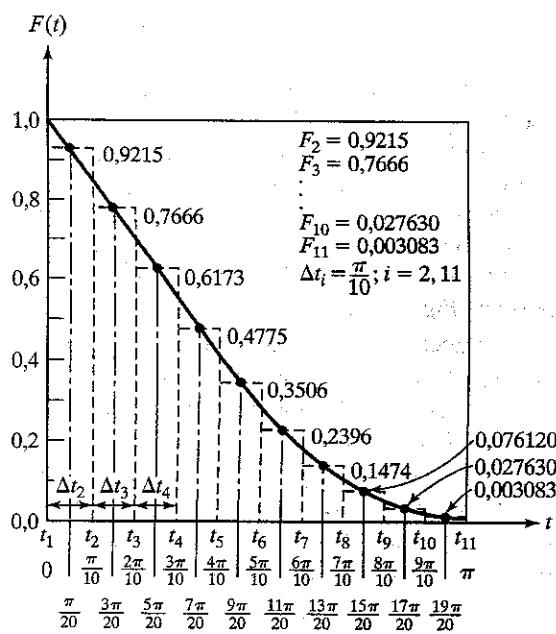


FIGURA 4.28 Impulsos retangulares na metade dos intervalos de tempo.

O programa MATLAB para representar essa equação em gráfico é dado a seguir.

```
% Ex4_18.m
for i = 1: 1001
    t(i) = (i - 1)*10/1000;
    x(i) = 0.488695 * exp(-t(i)) *
        cos(19.975*t(i)-1.529683) +
        0.001333*cos(5*t(i)-0.02666) +
        0.053314 * sin(5*t(i) - 0.02666);
end
plot(t,x);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
```

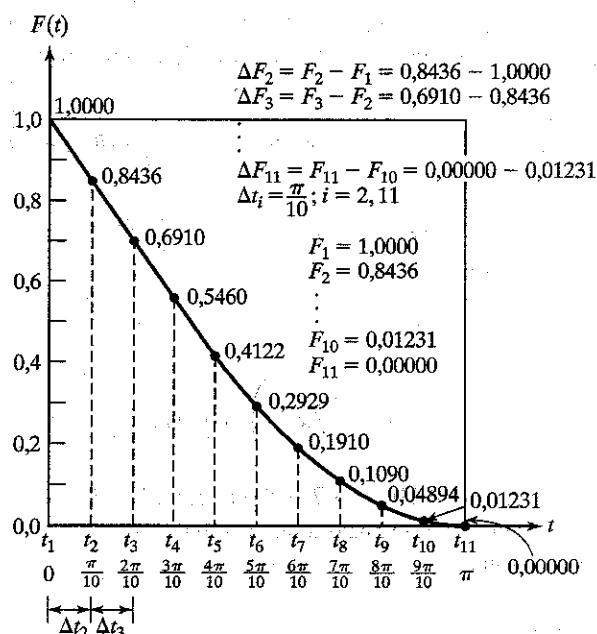
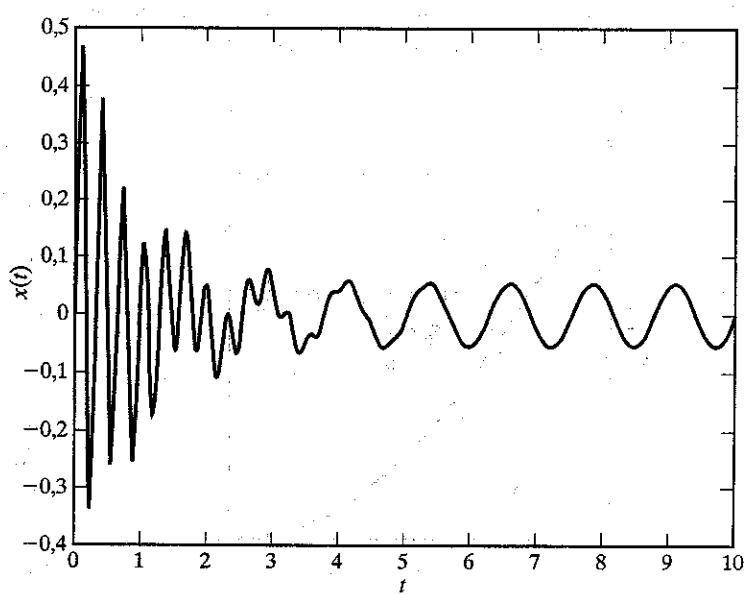


FIGURA 4.29 Aproximação linear trecho a trecho.

TABELA 4.1 Resposta do sistema com diferentes aproximações

i	t_i	$x(t_i)$ Obtida de acordo com			
		Figura 4.26 (Idealização 1)	Figura 4.27 (Idealização 2)	Figura 4.28 (Idealização 3)	Figura 4.29 (Idealização 4)
1	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	$0,1\pi$	0,04794	0,04044	0,04417	0,04541
3	$0,2\pi$	0,17578	0,14729	0,16147	0,16377
4	$0,3\pi$	0,35188	0,29228	0,32190	0,32499
5	$0,4\pi$	0,54248	0,44609	0,49392	0,49746
6	$0,5\pi$	0,71540	0,58160	0,64790	0,65151
7	$0,6\pi$	0,84330	0,67659	0,75906	0,76238
8	$0,7\pi$	0,90630	0,71578	0,80986	0,81255
9	$0,8\pi$	0,89367	0,69214	0,79142	0,79323
10	$0,9\pi$	0,80449	0,60717	0,70403	0,70482
11	π	0,64730	0,47152	0,55672	0,55647



EXEMPLO 4.19

Resposta de uma estrutura a um impulso

Usando MATLAB, represente em gráfico a resposta a um impulso da estrutura com um grau de liberdade produzida por:

- (a) um único impacto;
- (b) um duplo impacto considerado nos exemplos 4.4 e 4.5.

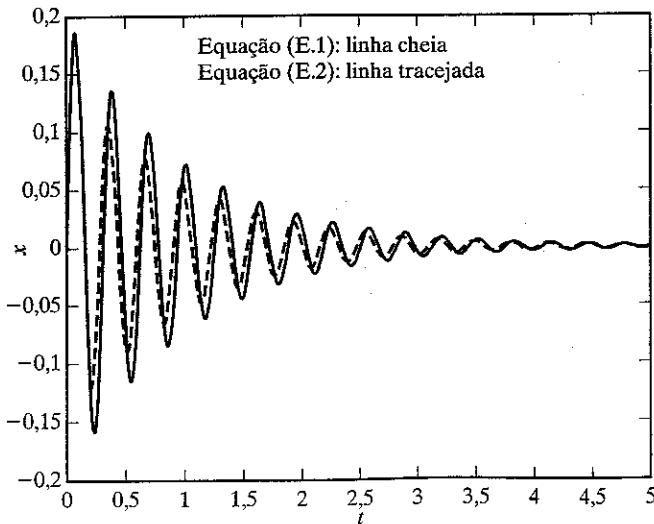
Solução: As respostas a um impulso da estrutura produzidas por um único impacto e por impacto duplo são dadas pelas equações (E.1) e (E.3) dos exemplos 4.4 e 4.5, respectivamente:

$$x(t) = 0,20025 e^{-t} \operatorname{sen} 19,975t \quad (\text{E.1})$$

$$x(t) = \begin{cases} 0,20025 e^{-t} \operatorname{sen} 19,975t; & 0 \leq t \leq 0,2 \\ 0,20025 e^{-t} \operatorname{sen} 19,975t \\ + 0,100125 e^{-(t-0,2)} \operatorname{sen} 19,975(t-0,2); & t \geq 0,2 \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

O programa MATLAB para representar as equações (E.1) e (E.2) em gráfico é dado a seguir.

```
% Ex4_19.m
for i = 1: 1001
    t(i) = (i-1)*5/1000;
    x1(i) = 0.20025 * exp(-t(i)) * sin(19.975*t(i));
    if t(i) > 0.2
        a = 0.100125;
    else
        a = 0.0;
    end
    x2(i) = 0.20025 * exp(-t(i)) * sin(19.975*t(i)) + ...
        a * exp(-(t(i)-0.2)) * sin(19.975*(t(i)-0.2));
end
plot(t,x1);
gtext('Eq. (E.1): solid line');
hold on;
plot(t,x2,'-');
gtext('Eq. (E.2): dash line');
xlabel('t');
```



EXEMPLO 4.20

Resposta a uma força periódica

Desenvolva um programa MATLAB de uso geral denominado **Program4.m** para determinar a resposta em regi-

me permanente de um sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade a uma força periódica. Use o programa para determinar a resposta de um sistema que está sujeito à força mostrada na figura a seguir, com os seguintes dados: $m = 100 \text{ kg}$, $k = 10^5 \text{ N/m}$, $\zeta = 0,1$.

Solução: **Program4.m** é desenvolvido para aceitar os valores da força periódica em n valores discretos de tempo. Os dados de entrada do programa são os seguintes:

xm = massa do sistema

xk = rigidez do sistema

xai = fator de amortecimento (ζ)

n = número de pontos equidistantes nos quais os valores da força $F(t)$ são conhecidos

m = número de coeficientes de Fourier que serão considerados na solução

tempo = período da função $F(t)$

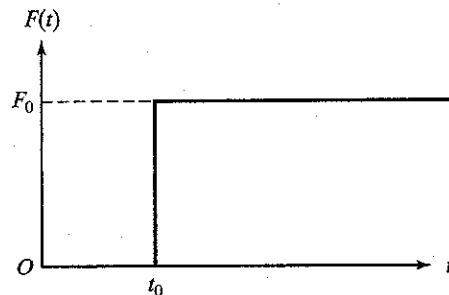
f = conjunto de dimensão n que contém os valores conhecidos de $F(t)$; $f(i) = F(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

t = conjunto de dimensão n que contém os valores discreteos conhecidos de tempo t ; $t(i) = t_p$, $i = 1, 2, \dots, n$

O programa dá a seguinte saída:

etapa número i , $t(i)$, $f(i)$, $x(i)$

onde $x(i) = x(t = t_i)$ é a resposta no intervalo de tempo i . O programa também representa em gráfico a variação de x com o tempo.



EXEMPLO 4.21

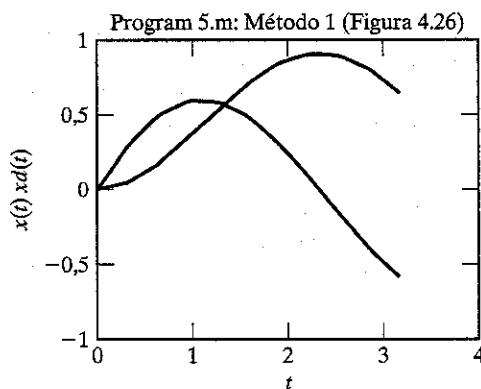
Resposta a uma função forçante arbitrária

Desenvolva um programa MATLAB de uso geral denominado **Program5.m** para determinar a resposta de um sistema massa-mola viscosamente amortecido a uma função forçante arbitrária usando os métodos da Seção 4.8. Use o programa para determinar a solução do Exemplo 4.17.

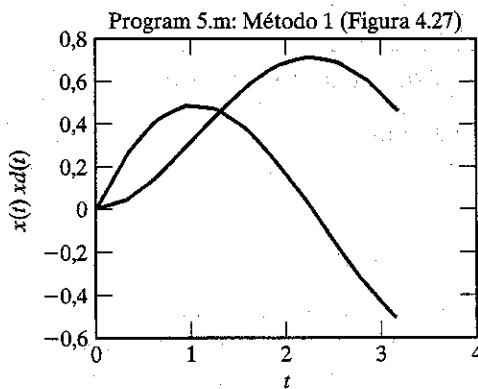
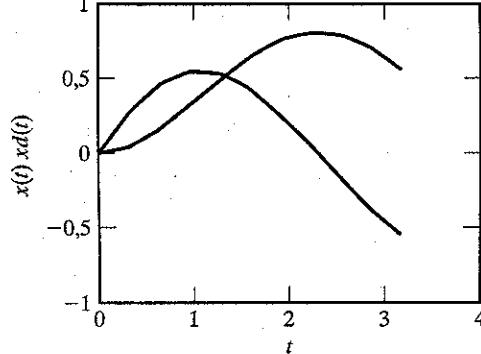
Solução: **Program5.m** é desenvolvido para aceitar os valores da força aplicada em n valores discretos de tempo. O programa requer os seguintes dados de entrada:

n = número de estações de tempo nos quais os valores da função forçante são conhecidos

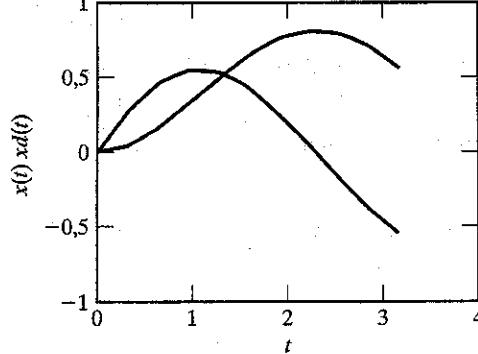
t = conjunto de tamanho n que contém os valores de tempo nos quais a função forçante é conhecida



Program 5.m: Método 2 (Figura 4.28)



Program 5.m: Método 3 (Figura 4.29)



f = conjunto de tamanho n que contém os valores da função forçante em várias estações de tempo conforme a idealização da Figura 4.22 (Figura 4.26 ou 4.27 para o Exemplo 4.17)

\hat{f}_f = conjunto de tamanho n que contém os valores da função forçante em várias estações de tempo conforme a idealização da Figura 4.24 (Figura 4.28 ou 4.29 para o exemplo 4.17)

xai = fator de amortecimento (4)

omn = freqüência natural não amortecida do sistema

delt = tempo incremental entre intervalos de tempo consecutivos

xk é a rigidez da mola

O programa dá a seguinte saída: estação de tempo i , $x(i)$ dada pelo Método 1 (figuras 4.26 e 4.27), $x(i)$ dada pelo Método 2 (Figura 4.28), $x(i)$ dada pelo Método 3 (Figura 4.29), onde $x(i)$ é a resposta do sistema na estação de tempo i . O programa também representa em gráfico a variação de x com o tempo conforme diferentes métodos. ■

4.10 Programas em C++

4.10.1 Resposta a uma força periódica arbitrária

É dado um programa interativo em C++ denominado **Program4.cpp** para determinar a resposta dinâmica de um oscilador amortecido excitado por qualquer força periódica externa aplicada à massa. A entrada e a saída do programa são semelhantes às do programa MATLAB, **Program4.m**, dado no Exemplo 4.20.

XEMPLO 4.22

Resposta a uma força periódica usando C++

Usando **Program4.cpp**, determine a resposta em regime permanente do sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade descrito no Exemplo 4.20.

Solução: Os dados de entrada devem ser digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são dadas a seguir.

RESPONSE OF A SINGLE D.O.F SYSTEM UNDER PERIODIC FORCE
 XM = 100
 XK = 100000
 XAI = 0.1
 N = 24
 M = 20
 TIME = 0.12

APPLIED FORCE RESPONSE

I	T(I)	F(I)	X(I)
0	0.00500000	24000.00000000	0.39311979
1	0.01000000	48000.00000000	0.45115592
2	0.01500000	72000.00000000	0.49675477
3	0.02000000	96000.00000000	0.52336489
4	0.02500000	120000.00000000	0.52511284
5	0.03000000	96000.00000000	0.49745120
6	0.03500000	72000.00000000	0.44728028
7	0.04000000	48000.00000000	0.38235024
8	0.04500000	24000.00000000	0.31053464
9	0.05000000	0.00000000	0.23964565
10	0.05500000	0.00000000	0.17698370
11	0.06000000	0.00000000	0.12413921
12	0.06500000	0.00000000	0.08215259
13	0.07000000	0.00000000	0.05174979
14	0.07500000	0.00000000	0.03332517
15	0.08000000	0.00000000	0.02694470
16	0.08500000	0.00000000	0.03236967
17	0.09000000	0.00000000	0.04908952
18	0.09500000	0.00000000	0.07635072
19	0.10000000	0.00000000	0.11317605
20	0.10500000	0.00000000	0.15837841
21	0.11000000	0.00000000	0.21058025
22	0.11500000	0.00000000	0.26824905
23	0.12000000	0.00000000	0.32974721

4.10.2 Resposta a uma função forçante arbitrária

Um programa interativo em C++ denominado **Program5.cpp** é usado para determinar a resposta de um sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade a uma função forçante arbitrária usando os métodos descritos na Seção 4.8. Os parâmetros de entrada e de saída do programa são semelhantes aos do programa MATLAB, **Program5.m**, dado no Exemplo 4.21.

EXEMPLO 4.23

Resposta a uma função forçante arbitrária usando C++

Usando o **Program5.cpp**, determine a resposta em regime permanente do sistema massa-mola viscosamente amortecido descrito no Exemplo 4.17.

Solução: Os dados de entrada devem ser digitados interativamente. A saída do programa é dada a seguir.

VALUE	METHOD #1	METHOD #1	METHOD #2	METHOD #3
OF (FIG. 4.26)	(FIG. 4.27)	(FIG. 4.28)	(FIG. 4.29)	
I	X(I)	X(I)	X(I)	X(I)
1	0.047936	0.040437	0.044175	0.045415
2	0.175781	0.147295	0.161471	0.163773
3	0.351883	0.292278	0.321877	0.324989
4	0.542483	0.446091	0.493842	0.497464
5	0.715396	0.581603	0.647699	0.651514
6	0.843296	0.676586	0.758676	0.762379
7	0.906301	0.715783	0.809225	0.812552
8	0.893674	0.692145	0.790486	0.793232
9	0.804490	0.607167	0.702788	0.704821
10	0.647299	0.469170	0.555199	0.556465
I	XD(I)	XD(I)	XD(I)	XD(I)
1	0.298008	0.251389	0.276010	0.275640
2	0.502976	0.418148	0.462605	0.461687
3	0.602270	0.491876	0.549249	0.547683

4	0.595174	0.474576	0.536630	0.534405
5	0.492171	0.377744	0.435845	0.433036
6	0.313187	0.220601	0.266613	0.263378
7	0.085019	0.027665	0.054767	0.051327
8	-0.161754	-0.174042	-0.170711	-0.174093
9	-0.396047	-0.357870	-0.380784	-0.383830
10	-0.589414	-0.507466	-0.549290	-0.551730

4.11 Programas em FORTRAN

4.11.1 Resposta a uma força periódica arbitrária

Um programa de computador em FORTRAN, na forma de uma sub-rotina denominada **PERIOD.F**, é usado para determinar a resposta dinâmica de um sistema amortecido com um grau de liberdade excitado por qualquer força periódica externa aplicada à massa. Os argumentos da sub-rotina são semelhantes aos descritos para **Program4.m** dado no Exemplo 4.20.

EXEMPLO 4.24

Resposta a uma força periódica usando FORTRAN

Usando a sub-rotina **PERIOD.F**, determinar a resposta em regime permanente do sistema massa-mola viscosamente amortecido descrito no Exemplo 4.20.

Solução: O programa principal que chama a sub-rotina **PERIOD.F** e a sub-rotina **PERIOD.F** são dadas como **PROGRAM4.F**. A saída do program é dada a seguir.

RESPONSE OF A SINGLE D.O.F. SYSTEM UNDER PERIODIC FORCE
 XM = 0.100000E+03
 XK = 0.100000E+06
 XAI = 0.100000E+00
 N = 24
 M = 20
 TIME = 0.120000E+00

I	T(I)	F(I)	X(I)
1	0.500000E-02	0.240000E+05	0.393120E+00
2	0.100000E-01	0.480000E+05	0.451156E+00
3	0.150000E-01	0.720000E+05	0.496755E+00
4	0.200000E-01	0.960000E+05	0.523365E+00
5	0.250000E-01	0.120000E+06	0.525113E+00
6	0.300000E-01	0.960000E+05	0.497451E+00
7	0.350000E-01	0.720000E+05	0.447280E+00
8	0.400000E-01	0.480000E+05	0.382350E+00
9	0.450000E-01	0.240000E+05	0.310534E+00
10	0.500000E-01	0.000000E+00	0.239646E+00
11	0.550000E-01	0.000000E+00	0.176984E+00
12	0.600000E-01	0.000000E+00	0.124139E+00
13	0.650000E-01	0.000000E+00	0.821526E-01
14	0.700000E-01	0.000000E+00	0.517498E-01
15	0.750000E-01	0.000000E+00	0.333252E-01
16	0.800000E-01	0.000000E+00	0.269447E-01
17	0.850000E-01	0.000000E+00	0.323697E-01
18	0.900000E-01	0.000000E+00	0.490896E-01
19	0.950000E-01	0.000000E+00	0.763507E-01
20	0.100000E+00	0.000000E+00	0.113176E+00
21	0.105000E+00	0.000000E+00	0.158378E+00
22	0.110000E+00	0.000000E+00	0.210580E+00
23	0.115000E+00	0.000000E+00	0.268249E+00
24	0.120000E+00	0.000000E+00	0.329747E+00

4.11.2 Resposta a uma função forçante arbitrária

Um programa de computador em FORTRAN denominado **PROGRAM5.F** é usado para determinar a resposta de um sistema amortecido com um grau de liberdade a uma função

forçante arbitrária usando os métodos da Seção 4.8. Os argumentos da sub-rotina são semelhantes aos descritos para **Program5.m** dado no Exemplo 4.21.

EXEMPLO 4.25

Resposta a uma força arbitrária usando FORTRAN

Usando **PROGRAM5.F**, determinar a resposta em regime permanente do sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade descrito no Exemplo 4.17.

Solução: A saída do programa é dada a seguir.

VALUE OF	METHOD #1 (FIG. 4.26)	METHOD #1 (FIG. 4.27)	METHOD #2 (FIG. 4.28)	METHOD #3 (FIG. 4.29)
I	X(I)	X(I)	X(I)	X(I)
2	0.479360E-01	0.404372E-01	0.441750E-01	0.454151E-01
3	0.175781E+00	0.147294E+00	0.161471E+00	0.163773E+00
4	0.351883E+00	0.292277E+00	0.321896E+00	0.324989E+00
5	0.542483E+00	0.446091E+00	0.493921E+00	0.497464E+00
6	0.715396E+00	0.581603E+00	0.647897E+00	0.651514E+00
7	0.843296E+00	0.676586E+00	0.759062E+00	0.762379E+00
8	0.906301E+00	0.715783E+00	0.809863E+00	0.812552E+00
9	0.893674E+00	0.692145E+00	0.791421E+00	0.793231E+00
10	0.804490E+00	0.607167E+00	0.704031E+00	0.704820E+00
11	0.647299E+00	0.469170E+00	0.556719E+00	0.556465E+00
I				
	XD(I)	XD(I)	XD(I)	XD(I)
2	0.298008E+00	0.251389E+00	0.276010E+00	0.275640E+00
3	0.502976E+00	0.418148E+00	0.462668E+00	0.461687E+00
4	0.602270E+00	0.491876E+00	0.549451E+00	0.547683E+00
5	0.595174E+00	0.474576E+00	0.537041E+00	0.534405E+00
6	0.492171E+00	0.377744E+00	0.436504E+00	0.433036E+00
7	0.313187E+00	0.220601E+00	0.267517E+00	0.263378E+00
8	0.850188E-01	0.276649E-01	0.558601E-01	0.513272E-01
9	-0.161754E+00	-0.174042E+00	-0.169532E+00	-0.174093E+00
10	-0.396047E+00	-0.357870E+00	-0.379650E+00	-0.383830E+00
11	-0.589414E+00	-0.507466E+00	-0.548380E+00	-0.551730E+00

- 4.10 R. Bellman, R. E. Kalaba e J. A. Lockett, *Numerical inversion of the Laplace transform*. Nova York: American Elsevier, 1966.
- 4.11 S. G. Kelly, *Fundamentals of mechanical vibrations*. Nova York: McGraw-Hill, 1993.
- 4.12 P-T. D. Spanos, "Digital synthesis of response-design spectrum compatible earthquake records for dynamic analyses", *Shock and Vibration Digest*, v. 15, n. 3, mar. 1983, p. 21-30.

PERGUNTAS DE REVISÃO

- 4.1 Dé respostas curtas ao seguinte:
 1. Qual é a base para expressar a resposta de um sistema à excitação periódica como um somatório de várias respostas harmônicas?
 2. Indique alguns métodos para determinar a resposta de um sistema a forças não periódicas.
 3. O que é a integral de Duhamel? Qual é a sua utilização?
 4. Como são determinadas as condições iniciais para um sistema com um grau de liberdade sujeito a um impulso em $t = 0$?
 5. Derive a equação de movimento de um sistema sujeito à excitação de base.
 6. O que é espectro de resposta?
 7. Quais são as vantagens do método da transformada de Laplace?
 8. Qual é a utilização do pseudo-espectro?
 9. Como é definida a transformada de Laplace de uma função $x(t)$?
 10. Defina os termos *impedância* e *admitância generalizada de um sistema*.
 11. Cite os modelos de interpolação que podem ser usados para aproximar uma função forçante arbitrária.
 12. Quantas condições de ressonância existem quando a força externa não é harmônica?
 13. Como calcular a freqüência da primeira harmônica de uma força periódica?
 14. Qual é a relação entre as freqüências de harmônicas superiores e a freqüência da primeira harmônica para uma excitação periódica?
- 4.2 Indique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:
 1. A mudança no momento é denominada impulso.
 2. A resposta de um sistema sob força arbitrária pode ser determinada somando-se as respostas resultantes de vários impulsos elementares.
 3. O espectro de resposta correspondente à excitação de base é útil no projeto de máquinas sujeitas a terremotos.
 4. Algumas funções periódicas não podem ser substituídas por uma soma de funções harmônicas.
 5. As amplitudes das harmônicas superiores serão menores na resposta de um sistema.
 6. O método da transformada de Laplace leva as condições iniciais em conta automaticamente.
 7. A equação de movimento pode ser integrada por métodos numéricos mesmo quando a força excitadora for não periódica.
 8. O espectro de resposta dá a resposta máxima de todos os possíveis sistemas com um grau de liberdade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 4.1 S. S. Rao, *Applied numerical methods for engineers and scientists*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- 4.2 M. Paz, *Structural dynamics: theory and computation*, 2. ed. Nova York: Van Nostrand Reinhold, 1985.
- 4.3 E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, 7. ed. Nova York: Wiley, 1993.
- 4.4 F. Oberhettinger e L. Badii, *Tables of Laplace transforms*. Nova York: Springer Verlag, 1973.
- 4.5 G. M. Hieber et al., "Understanding and measuring the shock response spectrum. Part I", *Sound and Vibration*, v. 8, mar. 1974, p. 42-49.
- 4.6 R. E. D. Bishop, A. G. Parkinson e J. W. Pendered, "Linear analysis of transient vibration", *Journal of Sound and Vibration*, v. 9, 1969, p. 313-337.
- 4.7 Y. Matsuzaki e S. Kibe, "Shock and seismic response spectra in design problems", *Shock and Vibration Digest*, v. 15, out. 1983, p. 3-10.
- 4.8 S. Timoshenko, D. H. Young e W. Weaver, Jr., *Vibration problems in engineering*, 4. ed. Nova York: Wiley, 1974.
- 4.9 R. A. Spinelli, "Numerical inversion of a Laplace transform", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 3, 1966, p. 636-649.

9. Para um oscilador harmônico, os espectros de aceleração e deslocamento podem ser obtidos pelo espetro de velocidade.
- 4.3 Preencha os espaços em branco com a palavra adequada:
1. A resposta de um sistema linear a qualquer força periódica pode ser determinada pelas _____ respostas harmônicas adequadas.
 2. Qualquer função não periódica pode ser representada por uma integral _____.
 3. Uma força de impulso tem uma grande magnitude e age por um período muito _____.
 4. A resposta de um sistema com um grau de liberdade a um _____ unitário é conhecida como função resposta a impulso.
 5. A integral de Duhamel também é conhecida como integral _____.
 6. A variação da resposta máxima com a freqüência natural de um sistema com um grau de liberdade é conhecida como espetro _____.
 7. A resposta transitória de um sistema pode ser determinada usando a integral _____.
 8. A solução completa de um problema de vibração é composta pela solução transitória e pela solução em regime _____.
 9. O método da transformada de Laplace converte uma equação diferencial em uma equação _____.
 10. A função transferência é a _____ da impedância generalizada.
 11. Um impulso pode ser medido determinando-se a mudança no _____ do sistema.
 12. A integral de Duhamel é baseada na função resposta _____ do sistema.
 13. A integral de Duhamel pode ser usada para determinar a resposta de sistemas _____ com um grau de liberdade a excitações arbitrárias.
 14. O espetro de velocidade de resposta, determinado pelo espetro de aceleração, é conhecido como espetro _____.
 15. Qualquer função forçante periódica pode ser expandida em série _____.
- 4.4 Selecione a resposta mais adequada entre as várias opções dadas:
1. A parte transitória da solução deve-se às:
 - função forçante;
 - condições iniciais;
 - condições de limitação.
 2. Se um sistema for sujeito a uma força não periódica aplicada repentinamente, a resposta será:
 - periódica;
 - transitória;
 - constante.
 3. As condições iniciais devem ser aplicadas à:
 - solução em regime permanente;
 - solução transitória;
 - solução total.
4. O espetro de aceleração (S_a) pode ser expresso em termos do espetro de deslocamento (S_d) como:
- $S_a = -\omega_n^2 S_d$
 - $S_a = \omega_n S_d$
 - $S_a = \omega_n^2 S_d$
5. O pseudo-espetro é associado a:
- pseudo-aceleração;
 - pseudovelocidade;
 - pseudodeslocamento.
6. Os coeficientes de Fourier devem ser determinados por métodos numéricos quando os valores da função $f(t)$ estiverem disponíveis:
- em forma analítica;
 - em valores discretos de t ;
 - na forma de uma equação complexa.
7. A resposta de um sistema com um grau de liberdade à excitação de base, $y(t)$, pode ser determinada usando a força externa como:
- $-m \ddot{y}$
 - $m \ddot{y}$
 - $m \ddot{y} + c \dot{y} + k y$
8. O espetro de resposta é amplamente usado em:
- projeto de edifícios sob grandes cargas vivas;
 - projeto para suportar terremoto;
 - projeto de máquina sujeita à fadiga.
9. A equação de movimento de um sistema sujeito à excitação de base, $y(t)$, é dada por:
- $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = -m \ddot{y}$
 - $m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = -m \ddot{y}; z = x - y$
 - $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = -m \ddot{z}; z = x - y$
10. A função e^{-st} usada na transformada de Laplace é conhecida como:
- núcleo;
 - integrando;
 - termo subsidiário.
11. A transformada de Laplace de $x(t)$ é definida por:
- $\bar{x}(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt$
 - $\bar{x}(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-st} x(t) dt$
 - $\bar{x}(s) = \int_0^\infty e^{st} x(t) dt$
- 4.5 Ligue os itens correspondentes nas duas colunas a seguir:
- | | |
|--|---|
| 1. $x(t) = \frac{1}{m \omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \sen \omega_d t$ | (a) Transformada inversa de Laplace de $\bar{x}(s)$. |
| 2. $x(t) = \int_0^t F(\tau)g(t - \tau) d\tau$ | (b) Função impedância generalizada. |
| 3. $x(t) = 1^{-1}\bar{Y}(s)\bar{F}(s)$ | (c) Função resposta a impulso unitário. |
| 4. $\bar{Y}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$ | (d) Transformada de Laplace. |
| 5. $\bar{z}(s) = ms^2 + cs + k$ | (e) Integral de convolução. |
| 6. $\bar{x}(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt$ | (f) Função admitância. |

PROBLEMAS

Os problemas estão organizados da seguinte maneira:

Problemas	Seção correspondente	Tópico correspondente
4.1 a 4.11	4.2	Resposta a uma força periódica geral
4.12 a 4.14	4.3	Força periódica de forma irregular
4.15 a 4.38	4.5	Integral de convolução
4.39 a 4.48	4.6	Espectro de resposta
4.49 a 4.51	4.7	Transformadas de Laplace
4.52 a 4.55	4.8	Condições forçantes irregulares usando métodos numéricos
4.56 a 4.63	4.9	Exemplos MATLAB
4.64 a 4.65	4.10	Programas em C++
4.66 a 4.70	4.11	Programas em FORTRAN
4.71 a 4.73	—	Exercícios de projeto

4.1–4.4 Determine a resposta em regime permanente da válvula hidráulica de controle mostrada na Figura 4.1(a) às funções forçantes obtidas pela substituição de $x(t)$ por $F(t)$ e de A por F_0 nas figuras 1.89 a 1.92.

4.5 Determine a resposta em regime permanente de um sistema viscosamente amortecido à função forçante obtida pela substituição de $x(t)$ e A por $F(t)$ e F_0 respectivamente, na Figura 1.46(a).

4.6 As vibrações por torção de uma engrenagem acionada montada sobre um eixo (Figura 4.30) sob condições estáveis são governadas pela equação

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\dot{\theta} = M_t$$

onde k_t é a rigidez de torção do eixo acionado, M_t é o torque transmitido, J_0 é o momento de inércia de massa, e θ é a deflexão angular da engrenagem acionada. Se um dos 16 dentes da engrenagem motriz quebrar, determine a vibração por torção resultante na engrenagem acionada para os seguintes dados.

Engrenagem acionada: $J_0 = 0,1 \text{ N.m/s}^2$, velocidade = 1.000 rpm, eixo acionado: material – aço, seção circular sólida com 5 cm de diâmetro e 1 m de comprimento, $M_{t0} = 1.000 \text{ N.m}$.

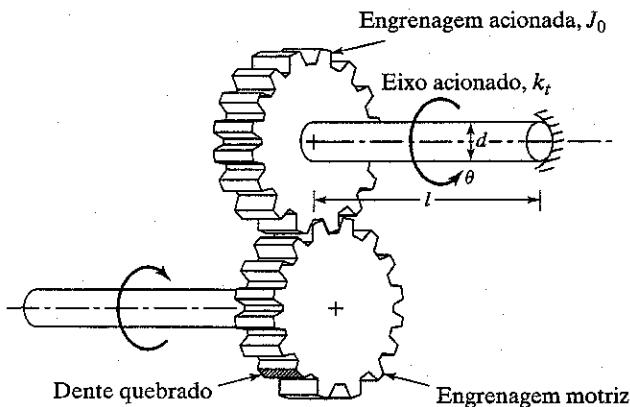


FIGURA 4.30

4.7 Um mecanismo de manivela corrediça é usado para imprimir movimento à base de um sistema massa-mola-amortecedor, como mostra a Figura 4.31. Aproximando o movimento da base $y(t)$ como uma série de funções harmônicas, determine a resposta da massa para $m = 1 \text{ kg}$, $c = 10 \text{ N.s/m}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $r = 10 \text{ cm}$, $l = 1 \text{ m}$ e $\omega = 100 \text{ rad/s}$.

4.8 A base de um sistema massa-mola-amortecedor está sujeita a um deslocamento periódico mostrado na Figura 4.32. Determine a resposta da massa usando o princípio da superposição.

4.9 A base de um sistema massa-mola com amortecimento Coulomb está ligada ao mecanismo de manivela corrediça mostrado na Figura 4.33. Determine a resposta do sistema para um coeficiente de atrito μ entre a massa e a superfície por aproximação do movimento $y(t)$ como uma série de funções harmônicas para $m = 1 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $r = 10 \text{ cm}$, $l = 1 \text{ m}$, $\mu = 0,1$ e $\omega = 100 \text{ rad/s}$. Discuta as limitações de sua solução.

4.10 Um carreiro de rolete é usado para imprimir um movimento periódico à base do sistema massa-mola mostrado na Figura 4.34. Se o coeficiente de atrito entre a massa e a superfície for μ , determine a resposta do sistema usando o princípio da superposição. Discuta a validade do resultado.

4.11 Determine a resposta total de um sistema viscosamente amortecido com um grau de liberdade sujeito à excitação harmônica de base para os seguintes dados: $m = 10 \text{ kg}$, $c = 20 \text{ N.s/m}$, $k = 4.000 \text{ N/m}$, $y(t) = 0,05 \cos 5t \text{ m}$, $x_0 = 0,1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 1 \text{ m/s}$.

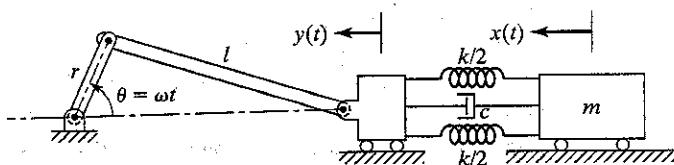


FIGURA 4.31

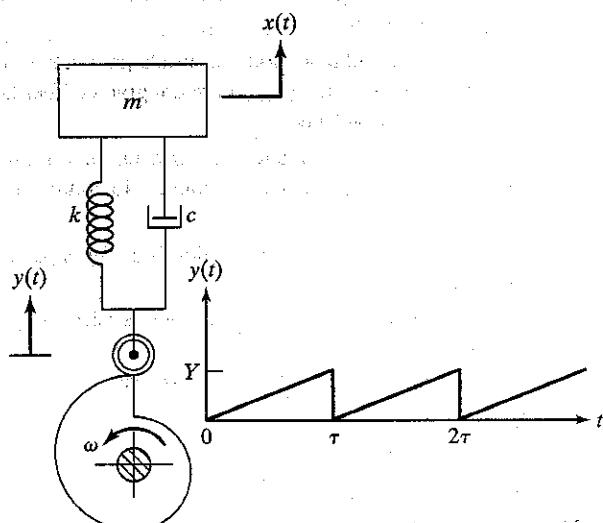


FIGURA 4.32

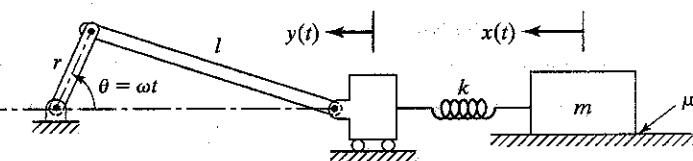


FIGURA 4.33

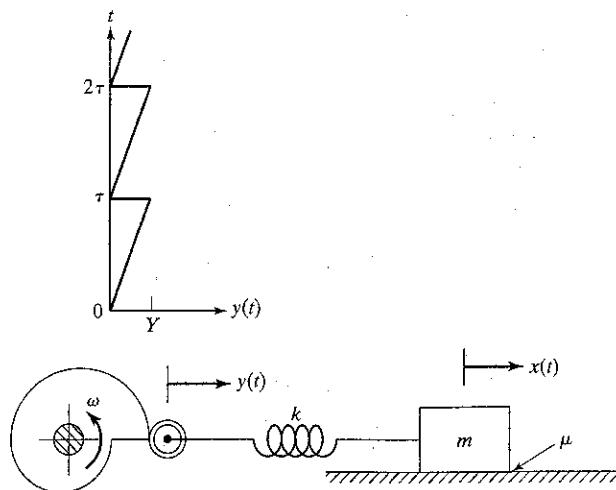


FIGURA 4.34

- 4.12** Determine a resposta de um sistema amortecido com $m = 1 \text{ kg}$, $k = 15 \text{ kN/m}$ e $\zeta = 0,1$ sob a ação de uma função forçante periódica, como mostra a Figura 1.94.
- 4.13** Determine a resposta de um sistema viscosamente amortecido à força periódica cujos valores são dados no Problema 1.74. Considere que M_t denota o valor da força em Newtons no tempo t , segundos. Use $m = 0,5 \text{ kg}$, $k = 8.000 \text{ N/m}$ e $\zeta = 0,06$.
- 4.14** Determine o deslocamento do reservatório de água mostrado na Figura 4.35(a) sob a força periódica mostrada na Figura 4.35(b) tratando-o como um sistema não amortecido com um grau de liberdade. Use o procedimento numérico descrito na Seção 4.3.
- 4.15** Limpeza por jato de areia é um processo no qual um material abrasivo, contido em um jato, é dirigido à superfície de uma peça fundida para limpá-la. Em determinada instalação de limpeza por jato de areia, uma peça fundida de massa m é colocada sobre um suporte flexível de rigidez k como mostra a Figura 4.36(a). Se a força exercida sobre a peça fundida resultante da operação de limpeza com jato de areia variar como mostra a Figura 4.36(b), determine a resposta da peça.

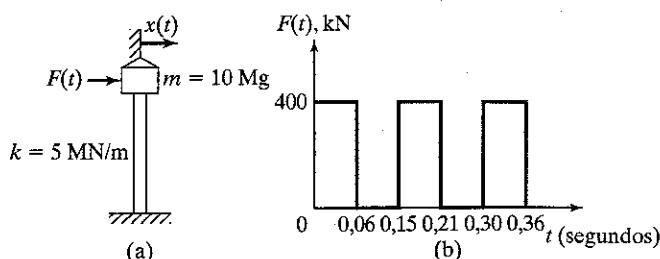


FIGURA 4.35

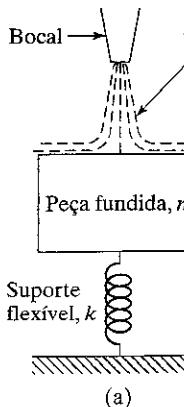


FIGURA 4.36

- 4.16** O suporte, a bigorna e a base do martelo de forjar mostrados na Figura 4.37(a) têm uma massa total m . O coxim elástico de apoio tem uma rigidez k . Se a força aplicada pelo martelo for dada pela Figura 4.37(b), determine a resposta da bigorna.
- 4.17** Determine o deslocamento de um sistema amortecido com um grau de liberdade sob a função forçante $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$, onde α é uma constante.
- 4.18** Um cilindro de ar comprimido está ligado ao sistema massamola mostrado na Figura 4.38(a). Devido a um pequeno vazamento na válvula, a pressão no pistão, $p(t)$, aumenta como indicado na Figura 4.38(b). Determine a resposta do pistão para os seguintes dados: $m = 10 \text{ kg}$, $k = 1.000 \text{ N/m}$ e $d = 0,1 \text{ m}$.

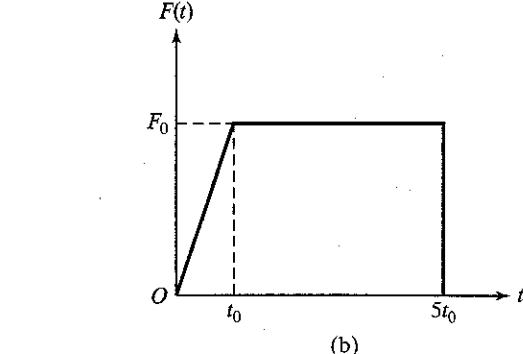
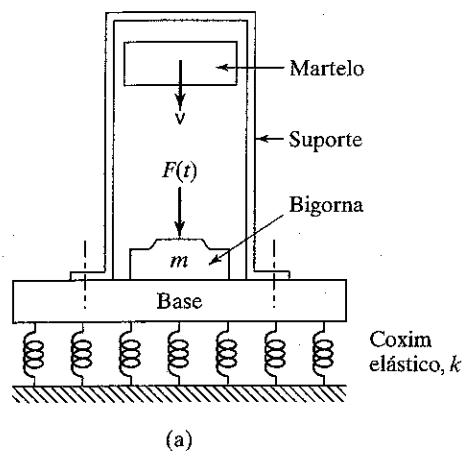


FIGURA 4.37

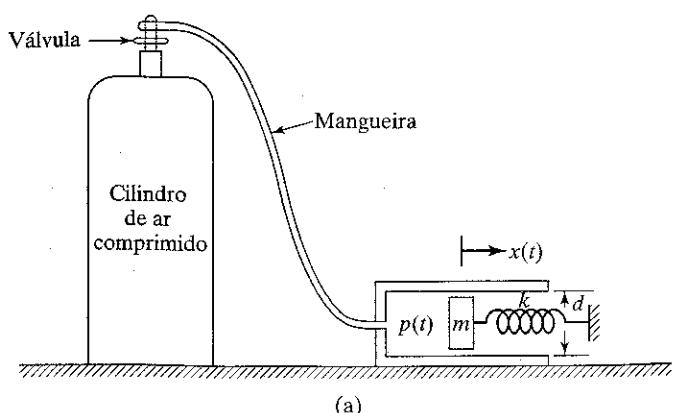


FIGURA 4.38 (a)

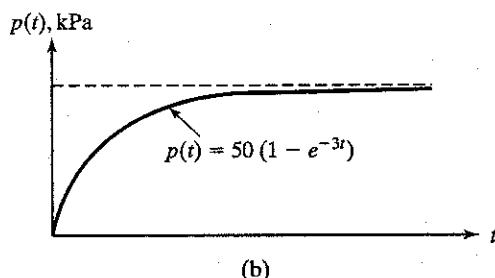


FIGURA 4.38 (b)

- 4.19 Determine a resposta transitória de um sistema massa-mola não amortecido para $t > \pi/\omega$ quando a massa está sujeita a uma força

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{2}(1 - \cos \omega t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ F_0 & \text{para } t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Suponha que o deslocamento e a velocidade da massa sejam zero em $t = 0$.

- 4.20–4.22 Use método da integral de Duhamel para derivar expressões para a resposta de um sistema não amortecido sujeito às funções forçantes mostradas nas figuras 4.39(a) a (c).

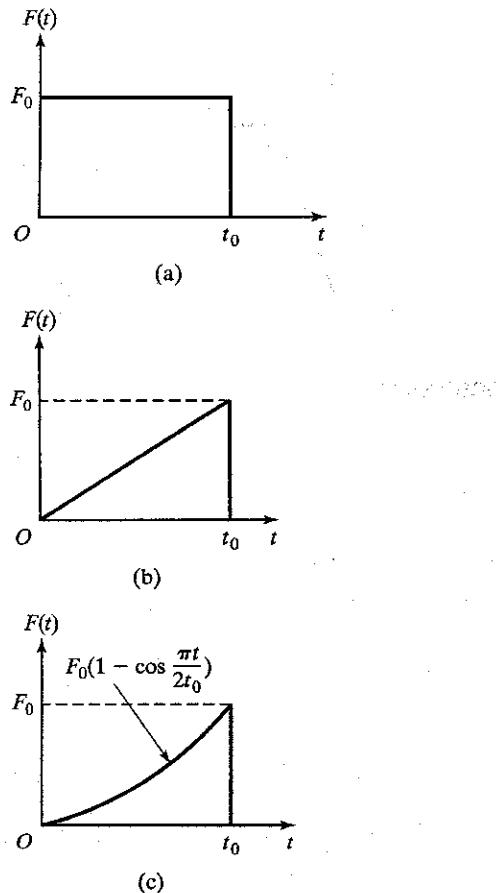


FIGURA 4.39

- 4.23 A Figura 4.40 mostra um modelo com um grau de liberdade de um veículo automotor que trafega no sentido horizontal. Determine o deslocamento relativo do veículo quando ele passa por cima de uma saliência na estrada da forma $y(s) = Y \operatorname{sen} \pi s / \delta$.

- 4.24 Um veículo que trafega a uma velocidade constante v no sentido horizontal encontra uma saliência triangular na estrada, como mostra a Figura 4.41. Tratando o veículo como um sistema massa-mola não amortecido, determine a resposta do veículo no sentido vertical.

- 4.25 Um automóvel, com massa de 1.000 kg, passa por uma saliência na estrada cuja forma é mostrada na Figura 4.42. A velocidade do automóvel é 50 km/h. Se o período natural de vibração não amortecida no sentido vertical for 1,0 s, determine a resposta do carro considerando-se que ele seja um sistema não amortecido com um grau de liberdade que vibra no sentido vertical.

- 4.26 Um equipamento de massa m é acondicionado em uma embalagem de material flexível. A rigidez e a constante de amortecimento do material da embalagem são dadas por k e c , respectivamente, e a massa da embalagem é desprezível.

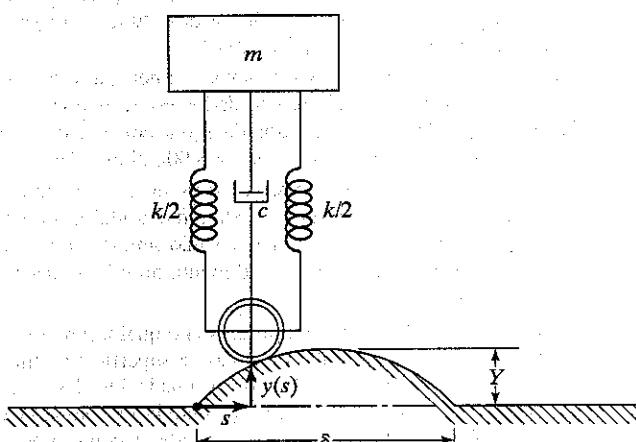


FIGURA 4.40

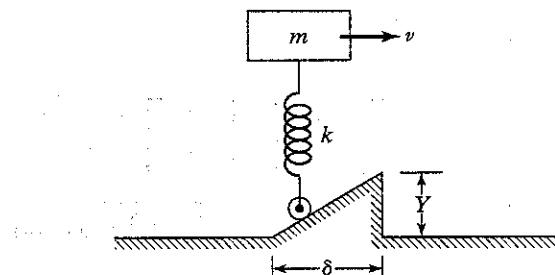


FIGURA 4.41

Altura da saliência (m)

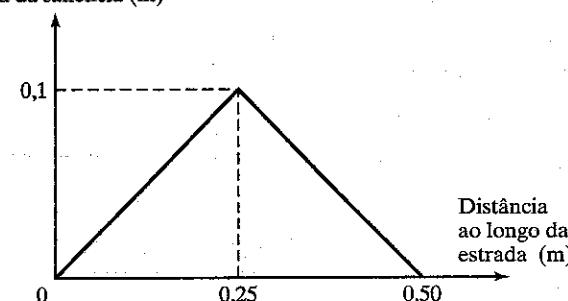


FIGURA 4.42

Se a embalagem cair accidentalmente de uma altura h sobre um piso rígido (Figura 4.43), determine o movimento do equipamento embalado.

- 4.27** Ao taxiar pela pista, um aeroplano encontra uma saliência. Como resultado, a junção da asa é sujeita a um deslocamento que pode ser expresso como

$$y(t) = \begin{cases} Y(t^2/t_0^2), & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$$

Determine a resposta da massa localizada na ponta da asa se a rigidez da asa for k (Figura 4.44).

- 4.28** Derive a Equação (E.1) do Exemplo 4.9.

- 4.29** No teste de acionamento estático de um foguete, o foguete está ancorado a uma parede rígida por um sistema mola-amortecedor, como mostra a Figura 4.45(a). O impulso que age sobre o foguete alcança seu valor máximo F dentro de um tempo tão curto que pode ser desprezado, e permanece constante até o tempo de extinção t_0 , como indicado na Figura 4.45(b). O impulso imprimido ao foguete é dado por $F = m_0 v$, onde m_0 é a taxa constante de queima do combustível e v é a velocidade do fluxo de gás expelida pelo motor. A massa inicial do foguete é M , de modo que sua massa a qualquer instante t é dada por $m = M - m_0 t$, $0 \leq t \leq t_0$. Se os dados forem $k = 7,5 \times 10^6 \text{ N/m}$, $c = 0,1 \times 10^6 \text{ N.s/m}$, $m_0 = 10 \text{ kg/s}$, $= 2.000 \text{ m/s}$, $M = 2.000 \text{ kg}$ e $t_0 = 100 \text{ s}$:

- (1) derive a equação de movimento do foguete;
- (2) determine o máximo deslocamento em regime permanente do foguete, considerando uma massa média (constante) de $(M - \frac{1}{2}m_0 t_0)$.

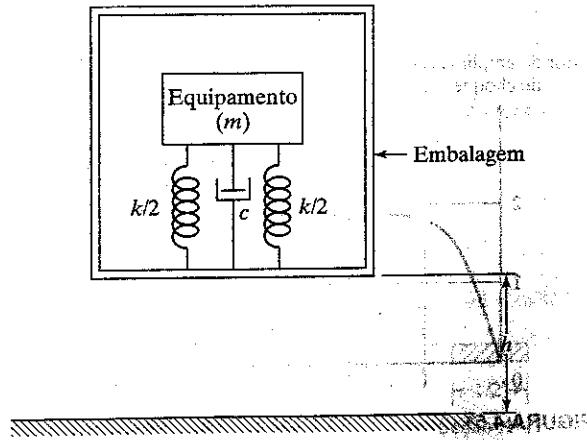


FIGURA 4.43

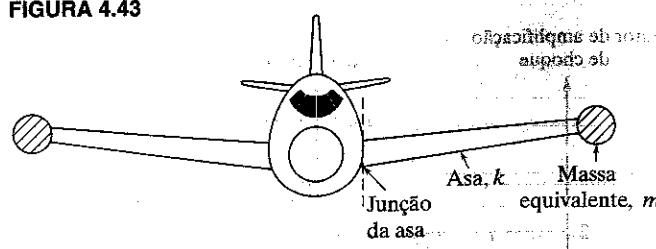


FIGURA 4.44

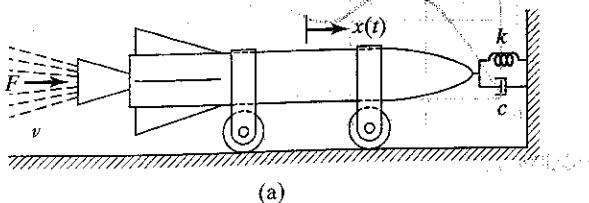


FIGURA 4.45 (a)

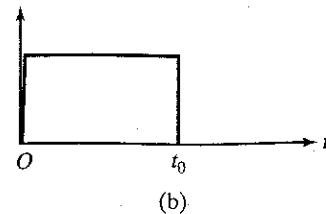


FIGURA 4.45 (b)

- 4.30** Mostre que a resposta a uma função degrau unitário $h(t)$ ($F_0 = 1$ na Figura 4.7(b)) está relacionada com a função resposta a impulso $g(t)$, Equação (4.27), da seguinte maneira:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

- 4.31** Mostre que a integral de convolução, Equação (4.33), também pode ser expressa em termos da resposta a uma função degrau unitário $h(t)$ como

$$x(t) = F(0)h(t) + \int_0^t \frac{dF(\tau)}{d\tau} h(t - \tau) d\tau$$

- 4.32** Determine a resposta da barra rígida mostrada na Figura 4.46 usando integral de convolução para os seguintes dados: $k_1 = k_2 = 5.000 \text{ N/m}$, $a = 0,25 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$, $l = 1,0 \text{ m}$, $M = 50 \text{ kg}$, $m = 10 \text{ kg}$, $F_0 = 500 \text{ N}$.

- 4.33** Determine a resposta da barra rígida mostrada na Figura 4.47 usando integral de convolução para os seguintes dados: $k = 5.000 \text{ N/m}$, $l = 1 \text{ m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $M_0 = 100 \text{ N.m}$.

- 4.34** Determine a resposta da barra rígida mostrada na Figura 4.48 usando integral de convolução quando a extremidade P da mola PQ está sujeita ao deslocamento $x(t) = x_0 e^{-t}$. Dados: $k = 5.000 \text{ N/m}$, $l = 1 \text{ m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $x_0 = 1 \text{ cm}$.

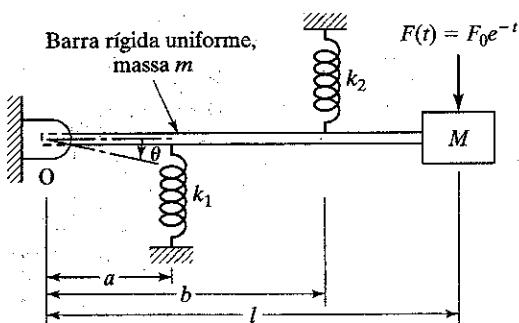


FIGURA 4.46

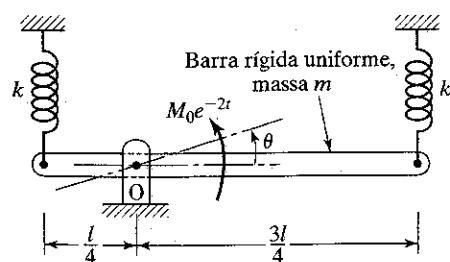


FIGURA 4.47

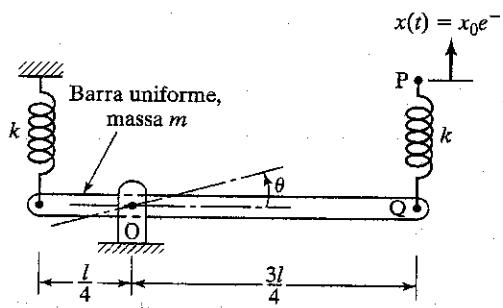


FIGURA 4.48

- 4.35 Determine a resposta da massa mostrada na Figura 4.49 à força $F(t) = F_0 e^{-t}$ usando integral de convolução. Dados: $k_1 = 1.000 \text{ N/m}$, $k_2 = 500 \text{ N/m}$, $r = 5 \text{ cm}$, $m = 10 \text{ kg}$, $J_0 = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $F_0 = 50 \text{ N}$.

- 4.36 Determine as funções de resposta a impulso de um sistema massa-mola viscosamente amortecido para os seguintes casos:
 (a) não amortecido ($c = 0$);
 (b) subamortecido ($c < c_c$);
 (c) criticamente amortecido ($c = c_c$);
 (d) superamortecido ($c > c_c$).

- 4.37 Determine a resposta de um sistema com um grau de liberdade a um impulso F para os seguintes dados: $m = 2 \text{ kg}$, $c = 4 \text{ N.s/m}$, $k = 32 \text{ N/m}$, $F = 4 \delta(t)$, $x_0 = 0,01 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 1 \text{ m/s}$.

- 4.38 A asa de uma aeronave de combate que carrega um míssil em sua extremidade, como mostra a Figura 4.50, pode ser aproximada como uma viga em balanço equivalente com $EI = 15 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ em relação ao eixo vertical e comprimento $l = 10 \text{ m}$. Se a massa equivalente da asa, incluindo a massa do míssil e de seu sistema de suporte, na extremidade da asa for $m = 2.500 \text{ kg}$, determine a resposta de vibração da asa (de m) resultante do lançamento do míssil. Considere que a força sobre m resultante do lançamento do míssil pode ser aproximada como um função impulso de magnitude $F = 50 \text{ N.s}$.

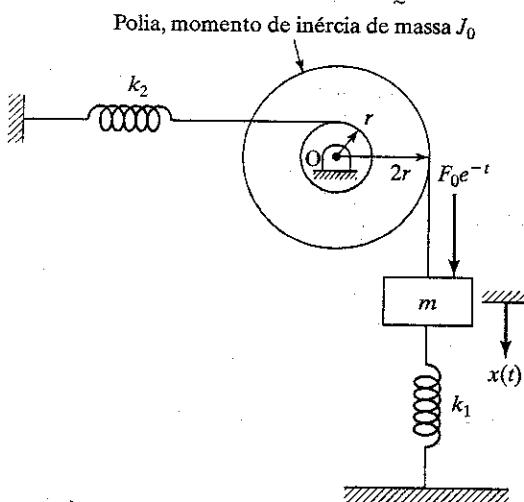


FIGURA 4.49



FIGURA 4.50

4.39 Derive o espectro de resposta de um sistema não amortecido para o pulso retangular mostrado na Figura 4.39(a). Construa um gráfico de $(x/\delta_{st})_{\max}$ em relação a (t_0/τ_n) .

4.40 Determine o espectro de resposta de deslocamento de um sistema não amortecido para o pulso mostrado na Figura 4.39(c).

4.41 A base de um sistema massa-mola não amortecido está sujeita a uma excitação de aceleração dada por $a_0[1 - \sin(\pi t/2t_0)]$. Determine o deslocamento relativo da massa z .

4.42 Determine o espectro de resposta do sistema considerado no Exemplo 4.10. Desenhe um gráfico de $\left(\frac{kx}{F_0}\right)_{\max}$ em relação a $\omega_n t_0$ na faixa $0 \leq \omega_n t_0 \leq 15$.

4.43* A estrutura de um edifício está sujeita a uma carga de explosão, e a idealização da estrutura e da carga são mostradas na Figura 4.11. Se $m = 5.000 \text{ kg}$, $F_0 = 4 \text{ MN}$ e $t_0 = 0,4 \text{ s}$, determine a rigidez mínima exigida se o deslocamento tiver de ser limitado a 10 mm.

4.44 Considere a placa de circuito impresso (PCI) montada sobre uma cantoneira de alumínio em balanço mostrada na Figura 4.20(a). Calcule a cantoneira para resistir a um nível de aceleração de 100 g sob o pulso retangular mostrado na Figura 4.51. Considere o peso específico, o módulo de Young e a tensão permissível do alumínio como $0,1 \text{ lb/in}^3$, 10^7 lb/in^2 e 26.000 lb/in^2 , respectivamente.

4.45 Considere a placa de circuito impresso (PCI) montada sobre uma cantoneira de alumínio em balanço mostrada na Figura 4.20(a). Calcule a cantoneira para resistir a um nível de aceleração de 100 g sob o pulso triangular mostrado na Figura 4.52. Considere as propriedades do material dadas no Problema 4.44.

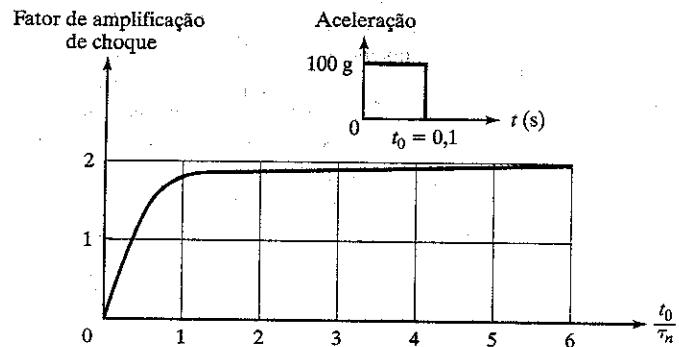


FIGURA 4.51

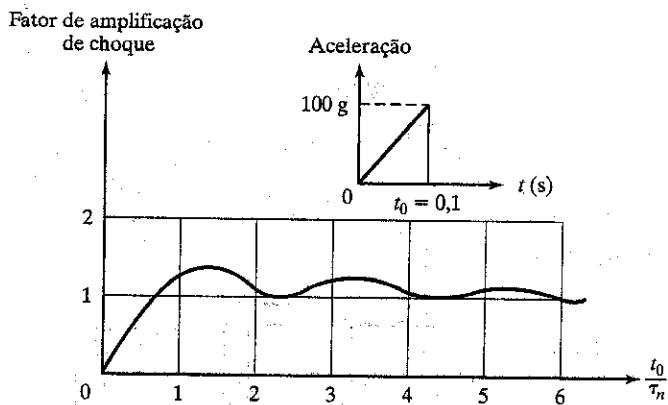


FIGURA 4.52

* O asterisco denota um problema que não tem uma resposta única.

- 4.46** Como teste de qualificação, uma caixa eletrônica com 1 lb de peso deve ser testada contra choque com a utilização de um pulso semi-senoinal de 100 g com uma base de tempo de 0,1 s. A caixa está montada na parte central de uma trave engastada nas duas extremidades, como mostra a Figura 4.53. A trave, juntamente com a caixa, é colocada dentro de uma embalagem e submetida a um ensaio de choque. Calcule a trave para resistir ao pulso de choque citado. As propriedades do material são as dadas no Problema 4.44.
- 4.47*** O reservatório de água mostrado na Figura 4.54 está sujeito a um terremoto cujo espectro de resposta é indicado na Figura 4.15. O peso do reservatório cheio de água é 100.000 lb. Calcule uma coluna de aço circular oca com 50 ft de altura de modo que a máxima tensão de flexão não exceda à tensão de escoramento do material. Considere um fator de amortecimento de 0,05 e um fator de segurança de 2.
- 4.48** Considere a ponte rolante mostrada na Figura 4.18. Supondo que o peso do carrinho seja 5.000 lb e que o fator de amortecimento global seja 2%, determine a rigidez global do sistema necessária para evitar o descarrilamento do carrinho sob uma excitação vertical de um terremoto cujo espectro de projeto é dado pela Figura 4.16.
- 4.49** Determine a resposta em regime permanente de um sistema não amortecido com um grau de liberdade sujeito à força $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ utilizando o método da transformada de Laplace.
- 4.50** Determine a resposta de um sistema massa-mola amortecido sujeito a uma função degrau de magnitude F_0 utilizando o método da transformada de Laplace.
- 4.51** Determine a resposta de um sistema não amortecido sujeito a um pulso quadrado $F(t) = F_0$ para $0 \leq t \leq t_0$ e 0 para $t > t_0$ utilizando o método da transformada de Laplace. Considere as condições iniciais como zero.
- 4.52** Determine a expressão para a velocidade \dot{x}_j para a resposta amortecida representada pela Equação (4.64).
- 4.53** Derive as Equações (4.68) e (4.71).

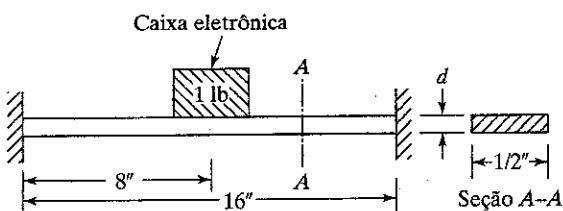


FIGURA 4.53

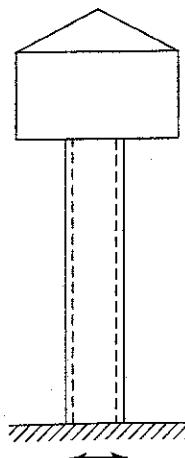


FIGURA 4.54

- 4.54** Compare os valores de \dot{x}_j dados pelas equações (4.68) e (4.71) no caso do Exemplo 4.17.
- 4.55** Derive as expressões para x_j e \dot{x}_j de acordo com as três funções de interpolação consideradas na Seção 4.8 para o caso não amortecido. Usando essas expressões, determine a solução do Exemplo 4.17 considerando que o amortecimento seja zero.
- 4.56** Uma máquina é submetida a uma força de impacto por meio de um martelo de impacto. Se a máquina puder ser modelada como um sistema com um grau de liberdade com $m = 10 \text{ kg}$, $k = 4.000 \text{ N/m}$ e $c = 40 \text{ N.s/m}$ e a magnitude do impacto for $F = 100 \text{ N.s}$, determine a resposta da máquina. Além disso, represente a resposta em gráfico usando MATLAB.
- 4.57** Se a máquina descrita no Problema 4.56 receber um impacto duplo do martelo de impacto, determine a resposta da máquina. Considere a força de impacto, $F(t)$, como $F(t) = 100 \delta(t) + 50 \delta(t - 0,5) \text{ N}$, onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac. Além disso, represente a resposta da máquina em gráfico usando MATLAB.
- 4.58** Usando MATLAB, construa um gráfico da resposta de um sistema massa-mola viscosamente amortecido sujeito ao pulso retangular, como mostra a Figura 4.9(a), com:
- $t_0 = 0,1 \text{ s}$
 - $t_0 = 1,5 \text{ s}$
- Considere os seguintes dados: $m = 100 \text{ kg}$, $k = 1.200 \text{ N/m}$, $c = 50 \text{ N.s/m}$, $F_0 = 100 \text{ N}$.
- 4.59** Utilizando **Program4.m**, determine a resposta em regime permanente de um sistema viscosamente amortecido com $m = 1 \text{ kg}$, $k = 400 \text{ N/m}$ e $c = 5 \text{ N.s/m}$ sujeito à força periódica mostrada na Figura 4.55.
- 4.60** Usando **Program5.m**, determine a resposta de um sistema viscosamente amortecido com $m = 100 \text{ kg}$, $k = 10^5 \text{ N}$ e $\zeta = 0,1$ sujeito à força $F(t) = 1.000 (1 - \cos \pi t) \text{ N}$.
- 4.61** Um sistema amortecido com um grau de liberdade tem uma massa $m = 2$, uma rigidez de mola $k = 50$ e um amortecedor com $c = 2$. Uma função forçante $F(t)$ cuja magnitude é indicada na tabela apresentada a seguir, age sobre a massa durante 1 segundo. Determine a resposta do sistema utilizando o método de interpolação linear trecho a trecho descrito na Seção 4.8 usando **Program5.m**.

Tempo (t_i)	$F(t_i)$
0,0	-8,0
0,1	-12,0
0,2	-15,0
0,3	-13,0
0,4	-11,0
0,5	-7,0
0,6	-4,0
0,7	3,0
0,8	10,0
0,9	15,0
1,0	18,0

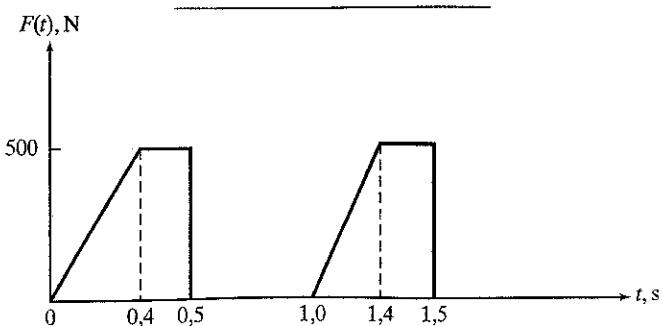


FIGURA 4.55

- 4.62** A equação de movimento de um sistema não amortecido é dada por $2\ddot{x} + 1.500x = F(t)$, onde a função forçante é definida pela curva mostrada na Figura 4.56. Determine a resposta do sistema por método numérico para $0 \leq t \leq 0,5$. Considere as condições iniciais $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ e o tamanho da etapa $\Delta t = 0,01$. Use o programa MATLAB **ode23**.

- 4.63** Resolva o Problema 4.62 usando o programa MATLAB **ode23** se o sistema for viscosamente amortecido de modo que a equação de movimento seja

$$2\ddot{x} + 10\dot{x} + 1.500x = F(t).$$

- 4.64** Usando **Program4.cpp**, determine a solução do problema descrito no Problema 4.59.

- 4.65** Usando **Program5.cpp**, determine a solução do problema descrito no Problema 4.60.

- 4.66** Usando **PROGRAM4.F**, determine a solução do problema descrito no Problema 4.59.

- 4.67** Usando **PROGRAM5.F**, determine a solução do problema descrito no Problema 4.60.

- 4.68** Escreva um programa de computador para determinar a resposta em regime permanente de um sistema com um grau de liberdade sujeito a uma força arbitrária por método numérico, pela avaliação da integral de Duhamel. Usando esse programa, resolva o Exemplo 4.17.

- 4.69** Determine o deslocamento relativo do reservatório de água mostrado na Figura 4.35(a) quando sua base está sujeita ao registro de aceleração de terremoto mostrado na Figura 1.95 considerando que a ordenada representa a aceleração em unidades de g. Use o programa do Problema 4.68.

- 4.70** A equação diferencial de movimento de um sistema não amortecido é dada por $2\ddot{x} + 150x = F(t)$ com as condições iniciais $x_0 = \dot{x}_0 = 0$. Se $F(t)$ for como mostra a Figura 4.57, determine a resposta do problema usando o programa de computador do Problema 4.68.

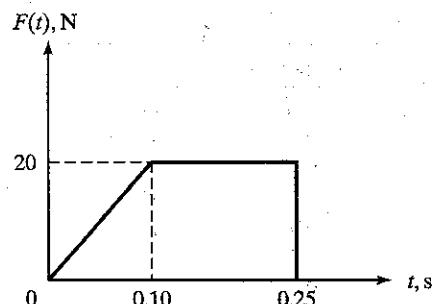


FIGURA 4.56

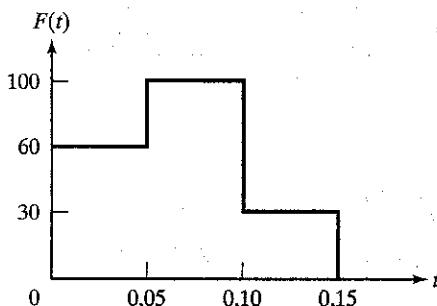


FIGURA 4.57

EXERCÍCIOS DE PROJETO

- 4.71** Desenvolva o projeto de um sismômetro do tipo mostrado na Figura 4.58(a) (especificando os valores de a , m e k) para medir terremotos. O sismômetro deve ter uma freqüência natural de 10 Hz, e o máximo deslocamento relativo da massa deve estar no mínimo a 2 cm quando sua base for sujeita ao deslocamento mostrado na Figura 4.58(b).

- 4.72** As forças de corte desenvolvidas durante duas operações de usinagem diferentes são mostradas nas figuras 4.59(a) e (b). Constataram-se, nos dois casos, imprecisões (no sentido vertical) no acabamento superficial de 0,1 mm e 0,05 mm, respectivamente. Determine a massa equivalente e a rigidez da cabeça de fresar (Figura 4.60), considerando-a como um sistema não amortecido com um grau de liberdade.

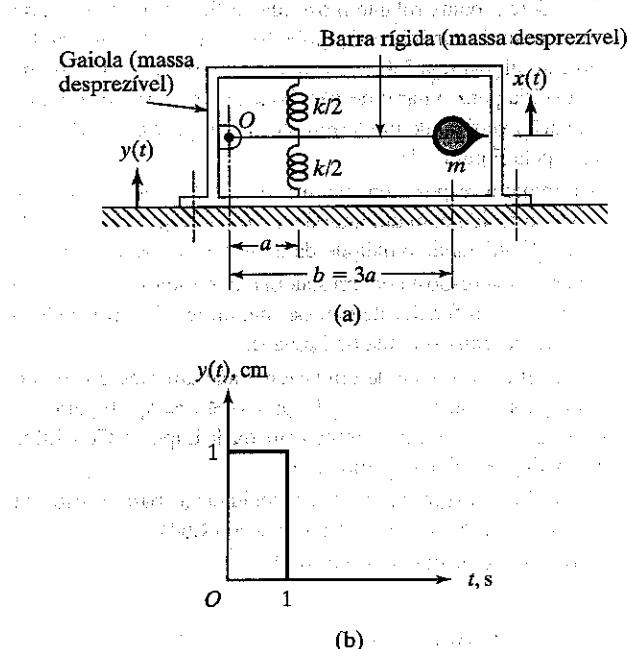
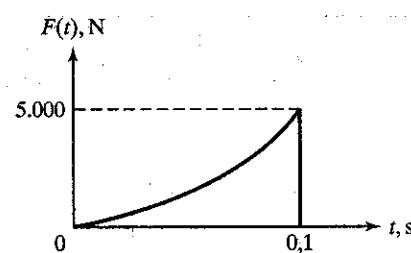
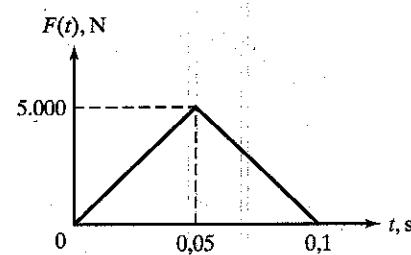


FIGURA 4.58



(a)



(b)

FIGURA 4.59

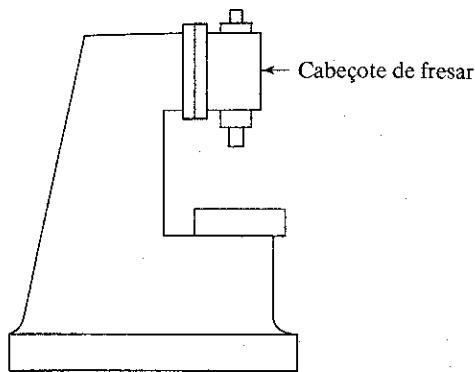


FIGURA 4.60

- 4.73** Uma fresa montada na parte central de uma árvore é usada para remover metal de uma peça (Figura 4.61). Um torque de 500 N/m é desenvolvido na fresa sob condições de corte em regime permanente. Um dos 16 dentes da fresa quebra durante a operação de fresagem. Determine a seção transversal da árvore para limitar a amplitude do deslocamento angular da

fresa a 1° . Considere que a árvore pode ser modelada como um eixo oco de aço fixado em ambas as extremidades.

Dados: Comprimento da árvore = 0,5 m, momento de inércia de massa da fresa = $0,1 \text{ kg.m}^2$, velocidade da fresa = 1.000 rpm.

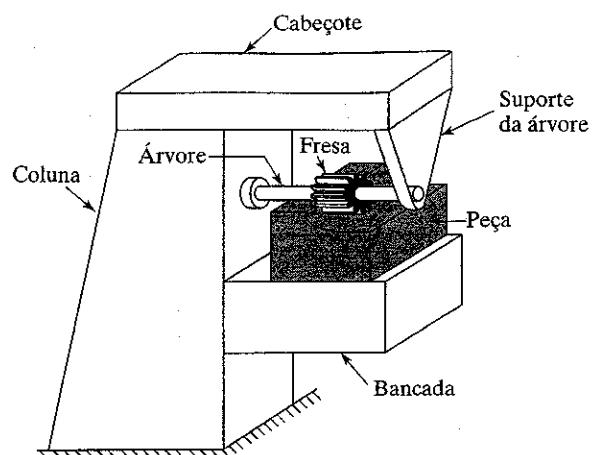


FIGURA 4.61



Daniel Bernoulli (1700–1782), de nacionalidade suíça, tornou-se professor de matemática em São Petersburgo, em 1725, após concluir o doutorado em medicina com sua tese sobre a ação dos pulmões. Mais tarde, tornou-se professor de anatomia e botânica na Basileia. Desenvolveu a teoria da hidrostática e da hidrodinâmica e o ‘teorema de Bernoulli’, muito conhecido pelos engenheiros. Ele derivou a equação de movimento para a vibração de vigas (a teoria de Euler-Bernoulli) e estudou o problema das cordas vibratórias. Bernoulli foi quem primeiro propôs o princípio da superposição de harmônicas em vibração livre.
(Fotografia por cortesia de David Eugene Smith, *History of mathematics*, volume 1 – General survey of the history of elementary mathematics. Nova York: Dover Publications, 1958.)

CAPÍTULO CINCO

Sistemas com dois graus de liberdade

5.1 Introdução

Sistemas que requerem duas coordenadas independentes para descrever seu movimento são denominados *sistemas com dois graus de liberdade*. Alguns exemplos de sistemas que têm dois graus de liberdade foram mostrados na Figura 1.13. Neste capítulo, consideraremos somente sistemas com dois graus de liberdade, para apresentar uma introdução simples ao comportamento de sistemas com um número arbitrariamente grande de graus de liberdade, que é o assunto do Capítulo 6.

Considere o sistema motor-bomba apresentado na Figura 5.1(a). Admitindo que o sistema vibre em um plano vertical, ele pode ser idealizado como uma barra de massa m e momento de inércia de massa J_0 apoiado sobre duas molas de rigidez k_1 e k_2 , como mostra a Figura 5.1(b). O deslocamento do sistema em qualquer instante pode ser especificado por uma coordenada linear $x(t)$, que indica o deslocamento vertical do centro de gravidade (CG) da massa, e uma coordenada angular $\theta(t)$ que denota a rotação da massa m em relação a seu CG. Em vez de $x(t)$ e $\theta(t)$, também podemos usar $x_1(t)$ e $x_2(t)$ como coordenadas independentes para especificar o movimento do sistema. Assim, o sistema tem dois graus de liberdade. É importante observar que, nesse caso, a massa m não é tratada como uma massa pontual, mas como um corpo rígido que tem dois tipos de movimento possíveis. (Se for uma partícula, não há necessidade de especificar a rotação da massa em relação a seu CG.)

Em seguida, considere o sistema exposto na Figura 5.2(a), que ilustra a embalagem de um instrumento de massa m . Admitindo que o movimento do instrumento esteja restrito ao plano xy , o sistema pode ser modelado como uma massa m apoiada por molas nas direções x e y , como indicado na Figura 5.2(b). Assim, o sistema tem uma massa pontual m e dois graus de liberdade, porque a massa tem dois tipos de movimento possíveis (translações ao longo das direções x e y). A regra para o cálculo do número de graus de liberdade pode ser enunciada da seguinte maneira:

$$\text{Número de graus de liberdade do sistema} = \text{Número de massas no sistema} \times \text{Número de tipos de movimentos possíveis de cada massa}$$

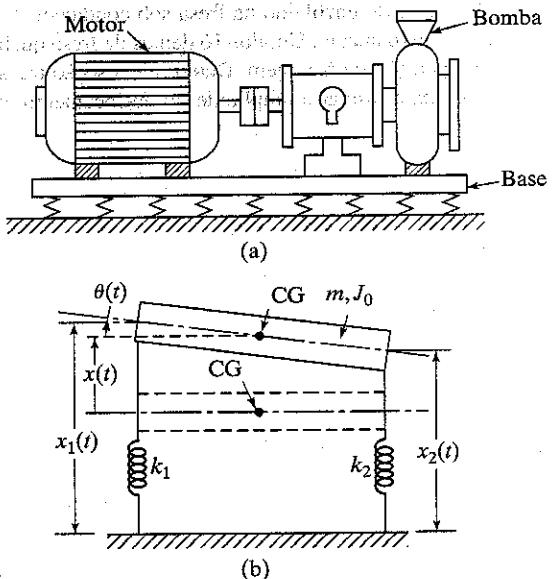
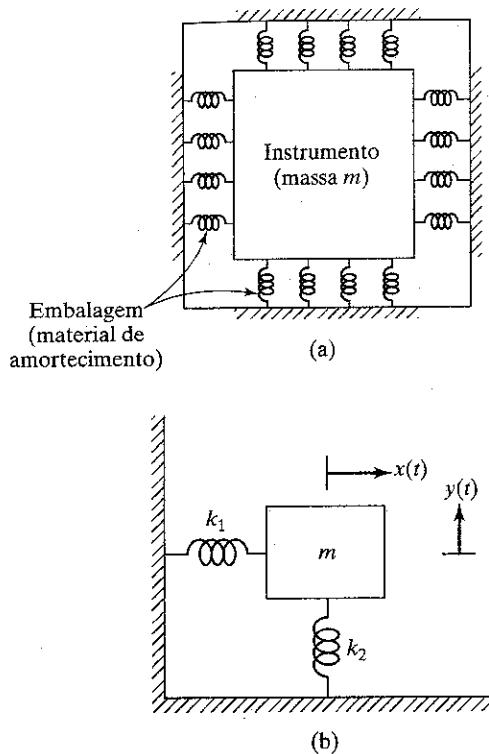


FIGURA 5.1 Sistema motor-bomba sobre molas.

Há duas equações de movimento para um sistema com dois graus de liberdade, uma para cada massa (mais precisamente, uma para cada grau de liberdade). De modo geral, elas estão na forma de *equações diferenciais acopladas* – isto é, cada equação envolve todas as coordenadas. Se admitirmos uma solução harmônica para cada coordenada, as equações de movimento resultam em uma equação de freqüência que gera duas freqüências naturais para o sistema. Se aplicarmos uma excitação inicial adequada, o sistema vibra em uma dessas freqüências naturais. Durante vibração livre em uma das freqüências naturais, as amplitudes dos dois graus de liberdade (coordenadas) estão relacionadas de uma maneira específica, e a configuração é denominada um *modo normal, modo principal* ou *modo natural* de vibração. Assim, um sistema com dois graus de liberdade tem dois modos normais de vibração correspondentes às duas freqüências naturais.

Se aplicarmos uma excitação inicial arbitrária ao sistema, a vibração livre resultante será uma sobreposição dos dois modos normais de vibração. Contudo, se o sistema vibrar sob a ação de uma força harmônica externa, a vibração harmônica forçada resultante ocorrerá à freqüência da força aplicada. Sob excitação harmônica, ocorrerá ressonância



(isto é, as amplitudes das duas coordenadas serão máximas) quando a freqüência forçante for igual a uma das freqüências naturais do sistema.

Como fica evidente pelo sistema mostrado nas figuras 5.1 e 5.2, a configuração de um sistema pode ser especificada por um conjunto de coordenadas independentes como comprimento, ângulo ou alguns outros parâmetros físicos. Qualquer conjunto de coordenadas desse tipo é denominado *coordenadas generalizadas*. Embora as equações de movimento de um sistema com dois graus de liberdade geralmente sejam acopladas, de forma que cada equação envolve todas as coordenadas, é sempre possível determinar um conjunto particular de coordenadas de modo que cada equação de movimento contenha somente uma coordenada. Então, as equações de movimento são *não acopladas* e podem ser resolvidas independentemente uma da outra. Tal conjunto de coordenadas,

que resulta em um sistema de equações não acopladas é denominado *coordenadas principais*.

5.2 Equações de movimento para vibração forçada

Considere um sistema massa-mola viscosamente amortecido com dois graus de liberdade, mostrado na Figura 5.3(a). O movimento do sistema é descrito completamente pelas coordenadas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, que definem as posições das massas m_1 e m_2 em qualquer tempo t em relação às respectivas posições de equilíbrio. As forças externas $F_1(t)$ e $F_2(t)$ agem sobre as massas m_1 e m_2 , respectivamente. Os diagramas de corpo livre das massas m_1 e m_2 são mostrados na Figura 5.3(b). A aplicação da segunda lei do movimento de Newton a cada uma das massas dá as equações de movimento:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1 \quad (5.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2 \quad (5.2)$$

Podemos ver que a Equação (5.1) contém termos que envolvem x_2 (a saber, $-c_2 \dot{x}_2$ e $-k_2 x_2$), ao passo que a Equação (5.2) contém termos que envolvem x_1 (a saber, $-c_2 \dot{x}_1$, x_1 e $-k_2 x_1$). Por consequência, elas representam um sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Portanto, podemos esperar que o movimento da massa m_1 influencie o movimento da massa m_2 e vice-versa. As equações (5.1) e (5.2) podem ser escritas na forma de matriz como

$$[m] \ddot{\vec{x}}(t) + [c] \dot{\vec{x}}(t) + [k] \vec{x}(t) = \vec{F}(t) \quad (5.3)$$

onde $[m]$, $[c]$ e $[k]$ são denominadas as matrizes de *massa*, *amortecimento* e *rigidez*, respectivamente, e são dadas por

$$\begin{aligned} [m] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ [c] &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \\ [k] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

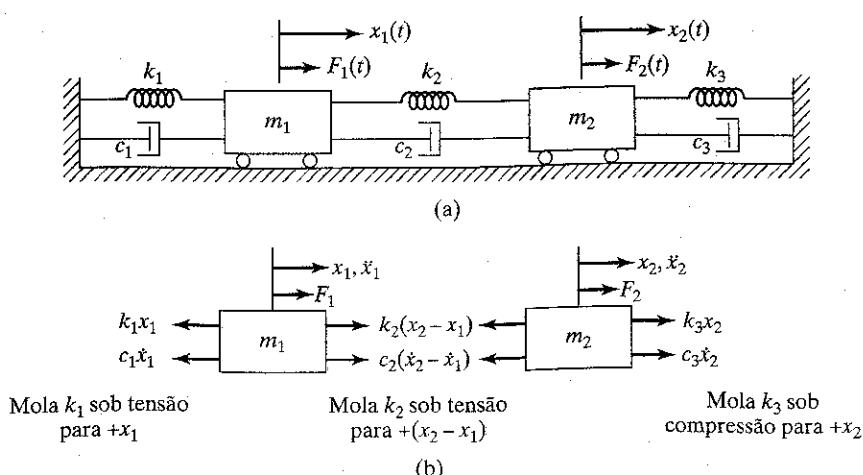


FIGURA 5.3 Um sistema massa-mola-amortecedor com dois graus de liberdade.

e $\vec{x}(t)$ e $\vec{F}(t)$ são denominadas *vetores de deslocamento e de força*, respectivamente, e são dadas por

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

e

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

Podemos ver que as matrizes $[m]$, $[c]$ e $[k]$ são todas matrizes 2×2 cujos elementos são, respectivamente, as massas, os coeficientes de amortecimento e as rigidezes conhecidos do sistema. Ademais, podemos perceber que essas matrizes são simétricas, de modo que

$$[m]^T = [m], \quad [c]^T = [c], \quad [k]^T = [k]$$

onde o índice superior T denota a transposta da matriz.

Observe que as equações de movimento (5.1) e (5.2) tornam-se não acopladas (independentes uma da outra) somente quando $c_2 = k_2 = 0$, o que implica que as duas massas m_1 e m_2 não estão fisicamente ligadas. Nesse caso, as matrizes $[m]$, $[c]$ e $[k]$ tornam-se diagonais. A solução das equações de movimento (5.1) e (5.2) para quaisquer forças arbitrárias $F_1(t)$ e $F_2(t)$ é difícil de ser obtida, principalmente por causa do acoplamento das variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$. A solução das equações (5.1) e (5.2) envolve quatro constantes de integração (duas para cada equação).

Normalmente, os deslocamentos e velocidades iniciais das duas massas são especificados como $x_1(t=0) = x_1(0)$, $\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_1(0)$, $x_2(t=0) = x_2(0)$ e $\dot{x}_2(t=0) = \dot{x}_2(0)$. Consideraremos, em primeiro lugar, a solução de vibração livre das equações (5.1) e (5.2).

5.3 Análise da vibração livre de um sistema não amortecido

Para a análise da vibração livre do sistema mostrado na Figura 5.3(a), fazemos $F_1(t) = F_2(t) = 0$. Além disso, se desprezarmos o amortecimento, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, e as equações de movimento (5.1) e (5.2) reduzem-se a

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0 \quad (5.4)$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0 \quad (5.5)$$

Estamos interessados em saber se m_1 e m_2 podem oscilar harmonicamente com a mesma freqüência e ângulo de fase, mas com amplitudes diferentes. Admitindo que seja possível ter movimento harmônico de m_1 em m_2 à mesma freqüência ω e com o mesmo ângulo de fase ϕ , tomamos as soluções das equações (5.4) e (5.5) como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t + \phi) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde X_1 e X_2 são constantes que denotam as amplitudes máximas de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e ϕ é o ângulo de fase. Substituindo a Equação (5.6) nas equações (5.4) e (5.5), obtemos

$$[-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)]X_1 - k_2X_2 \cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$[-k_2X_1 + (-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3))X_2] \cos(\omega t + \phi) = 0 \quad (5.7)$$

Visto que a Equação (5.7) deve ser satisfeita para todos os valores do tempo t , os termos entre colchetes devem ser zero. Isso resulta em

$$\begin{aligned} &[-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)]X_1 - k_2X_2 = 0 \\ &-k_2X_1 + [-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)]X_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

que representam duas equações algébricas homogêneas simultâneas com as incógnitas X_1 e X_2 . Podemos ver que a Equação (5.8) é satisfeita pela solução trivial $X_1 = X_2 = 0$, o que implica que não há nenhuma vibração. Para uma solução não-trivial de X_1 e X_2 , o determinante dos coeficientes X_1 e X_2 deve ser zero:

$$\det \begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} (m_1m_2)\omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\}\omega^2 \\ + \{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

A Equação (5.9) é denominada *equação de freqüência ou equação característica* porque a solução dessa equação dá as freqüências ou os valores característicos do sistema. As raízes da Equação (5.9) são dadas por

$$\begin{aligned} \omega_1^2, \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1m_2} \right\} \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ (k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1 \right\}^2 \\ &- 4\left\{ (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2 \right\}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Isso mostra que é possível que o sistema tenha uma solução harmônica não-trivial da forma da Equação (5.6) quando ω é igual a ω_1 e ω_2 dadas pela Equação (5.10). Denominamos ω_1 e ω_2 as *freqüências naturais* do sistema.

Resta determinar os valores de X_1 e X_2 . Esses valores dependem das freqüências naturais ω_1 e ω_2 . Denotaremos os valores de X_1 e X_2 correspondentes a ω_1 como $X_1^{(1)}$ e $X_2^{(1)}$ e os correspondentes a ω_2 como $X_1^{(2)}$ e $X_2^{(2)}$. Ademais, visto que a Equação (5.8) é homogênea, somente as razões $r_1 = \{X_2^{(1)} / X_1^{(1)}\}$ e $r_2 = \{X_2^{(2)} / X_1^{(2)}\}$ podem ser determinadas. Para $\omega^2 = \omega_1^2$ e $\omega^2 = \omega_2^2$, a Equação (5.8) dá

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} \\ &= \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)} \\ r_2 &= \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} \\ &= \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Observe que as duas razões dadas para cada r_i ($i = 1, 2$) na Equação (5.11) são idênticas. Os modos normais de vibração correspondentes a ω_1^2 e ω_2^2 podem ser expressos, respectivamente, como

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix}$$

e

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

Os vetores $\vec{X}^{(1)}$ e $\vec{X}^{(2)}$, que denotam os modos normais de vibração, são conhecidos como os *vetores modais* do sistema. A solução de vibração livre ou o movimento no tempo pode ser expresso pela Equação (5.6), como

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(1)}(t) &= \begin{Bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \text{primeiro modo} \\ \vec{x}^{(2)}(t) &= \begin{Bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix} = \text{segundo modo} \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde as constantes $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1 e ϕ_2 são determinadas pelas condições iniciais.

Condições iniciais. Como afirmamos antes, cada uma das duas equações de movimento, equações (5.1) e (5.2), envolve derivadas de segunda ordem de tempo; por consequência, precisamos especificar duas condições iniciais para cada massa. Como dissemos na Seção 5.1, podemos fazer o sistema vibrar em seu i -ésimo modo normal ($i = 1, 2$) sujeitando-o às condições iniciais específicas

$$\begin{aligned} x_1(t=0) &= X_1^{(i)} = \text{alguma constante}, \quad \dot{x}_1(t=0) = 0, \\ x_2(t=0) &= r_i X_1^{(i)}, \quad \dot{x}_2(t=0) = 0 \end{aligned}$$

Contudo, para quaisquer outras condições iniciais gerais, ambos os modos serão excitados. O movimento resultante, que é dado pela solução geral das equações (5.4) e (5.5), pode ser obtido por uma sobreposição linear dos dois modos normais, Equação (5.13)

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + c_2 \vec{x}_2(t) \quad (5.14)$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Visto que $\vec{x}^{(1)}(t)$ e $\vec{x}^{(2)}(t)$ envolvem as constantes desconhecidas $X_1^{(1)}$ e $X_1^{(2)}$ (ver Equação 5.13), podemos escolher $c_1 = c_2 = 1$ sem nenhuma perda de generalidade. Assim, as componentes do vetor $\vec{x}(t)$ podem ser expressas, usando a Equação (5.14) com $c_1 = c_2 = 1$ e a Equação (5.13), como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t) \\ &= X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) &= x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t) \\ &= r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde as constantes desconhecidas $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1 e ϕ_2 podem ser determinadas pelas condições iniciais:

$$\begin{aligned} x_1(t=0) &= x_1(0), & \dot{x}_1(t=0) &= \dot{x}_1(0), \\ x_2(t=0) &= x_2(0), & \dot{x}_2(t=0) &= \dot{x}_2(0) \end{aligned} \quad (5.16)$$

A substituição da Equação (5.16) na Equação (5.15) resulta em

$$\begin{aligned} x_1(0) &= X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\ \dot{x}_1(0) &= -\omega_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \\ x_2(0) &= r_1 X_1^{(1)} \cos \phi_1 + r_2 X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\ \dot{x}_2(0) &= -\omega_1 r_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 r_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

A Equação (5.17) pode ser considerada como quatro equações algébricas com as incógnitas $X_1^{(1)} \cos \phi_1$, $X_1^{(2)} \cos \phi_2$, $X_1^{(1)} \sin \phi_1$ e $X_1^{(2)} \sin \phi_2$. A solução da Equação (5.17) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} \cos \phi_1 &= \left\{ \frac{r_2 x_1(0) - x_2(0)}{r_2 - r_1} \right\}, \\ X_1^{(2)} \cos \phi_2 &= \left\{ \frac{-r_1 x_1(0) + x_2(0)}{r_2 - r_1} \right\} \\ X_1^{(1)} \sin \phi_1 &= \left\{ \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1(r_2 - r_1)} \right\}, \\ X_1^{(2)} \sin \phi_2 &= \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2(r_2 - r_1)} \right\} \end{aligned}$$

da qual obtemos a solução desejada

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} &= [\{X_1^{(1)} \cos \phi_1\}^2 + \{X_1^{(1)} \sin \phi_1\}^2]^{1/2} \\ &= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{r_2 x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{(-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0))^2}{\omega_1^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1^{(2)} &= [\{X_1^{(2)} \cos \phi_2\}^2 + \{X_1^{(2)} \sin \phi_2\}^2]^{1/2} \\ &= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{-r_1 x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{(r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0))^2}{\omega_2^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\phi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{X_1^{(1)} \sin \phi_1}{X_1^{(1)} \cos \phi_1} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [r_2 x_1(0) - x_2(0)]}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{X_1^{(2)} \sin \phi_2}{X_1^{(2)} \cos \phi_2} \right\} \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2 [-r_1 x_1(0) + x_2(0)]} \right\} \end{aligned} \quad (5.18)$$

EXEMPLO 5.1**Freqüências de sistema massa-mola**

Determine as freqüências naturais e formas modais de um sistema massa-mola, mostrado na Figura 5.4, que está restrito a mover-se apenas no sentido vertical. Considere $n = 1$.

Solução: Se medirmos x_1 e x_2 em relação às posições de equilíbrio estático das massas m_1 e m_2 , respectivamente, as equações de movimento e a solução obtida para o sistema da Figura 5.3(a) também são aplicáveis a esse caso, se substituirmos $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Assim, as equações de movimento, equações (5.4) e (5.5), são dadas por

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Considerando a solução harmônica como

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \phi); i = 1, 2 \quad (\text{E.2})$$

a equação da freqüência pode ser obtida pela substituição da Equação (E.2) na Equação (E.1):

$$\begin{vmatrix} (-m\omega^2 + 2k) & (-k) \\ (-k) & (-m\omega^2 + 2k) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0 \quad (\text{E.3})$$

A solução da Equação (E.3) dá as freqüências naturais

$$\omega_1 = \left\{ \frac{4km - [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E.4})$$

$$\omega_2 = \left\{ \frac{4km + [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (\text{E.5})$$

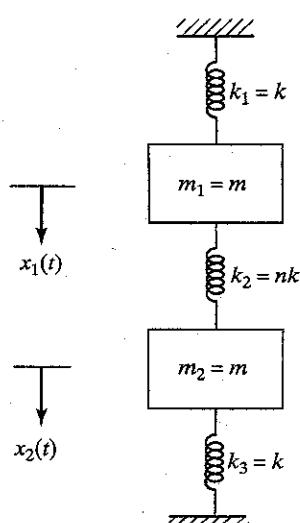


FIGURA 5.4 Sistema com dois graus de liberdade.

Pela Equação (5.11), os coeficientes de amplitude são dados por

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1 \quad (\text{E.6})$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1 \quad (\text{E.7})$$

Os modos naturais são dados pela Equação (5.13):

$$\begin{array}{ll} \text{primeiro modo} & = \vec{x}^{(1)}(t) = \left\{ \begin{array}{l} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \\ X_2^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \end{array} \right\} \\ & \text{segundo modo} = \vec{x}^{(2)}(t) = \left\{ \begin{array}{l} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \\ -X_2^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \end{array} \right\} \end{array} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{array}{ll} \text{primeiro modo} & = \vec{x}^{(1)}(t) = \left\{ \begin{array}{l} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \\ X_2^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \end{array} \right\} \\ & \text{segundo modo} = \vec{x}^{(2)}(t) = \left\{ \begin{array}{l} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \\ -X_2^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \end{array} \right\} \end{array} \quad (\text{E.9})$$

Podemos ver pela Equação (E.8) que, quando o sistema vibra em seu primeiro modo, as amplitudes das duas massas permanecem as mesmas. Isso implica que o comprimento da mola do meio permanece constante. Assim, os movimentos de m_1 e m_2 estão em fase (ver Figura 5.5(a)). Quando o sistema vibra em seu segundo modo, a Equação (E.9) mostra que os deslocamentos das duas massas têm a mesma magnitude com sinais opostos. Dessa forma, os movimentos de m_1 e m_2 estão fora de fase por 180° (ver Figura 5.5(b)). Nesse caso, o ponto médio da mola do meio permanece estacionário para todo tempo t . Tal ponto é denominado um *nó*. Pela Equação (5.15), o movimento (solução geral) do sistema pode ser expresso como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \\ x_2(t) &= X_2^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) - X_2^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Observação: Podemos ver que o cálculo das freqüências naturais e formas modais é longo e tedioso. Há programas de computador convenientes que podem ser usados para o cálculo numérico das freqüências naturais e formas modais de sistemas com vários graus de liberdade (ver Seção 5.9).

EXEMPLO 5.2**Condições iniciais para excitar modo específico**

Determine as condições iniciais que precisam ser aplicadas ao sistema mostrado na Figura 5.4 de modo a fazê-lo vibrar em:

- (a) no primeiro modo;
- (b) no segundo modo.

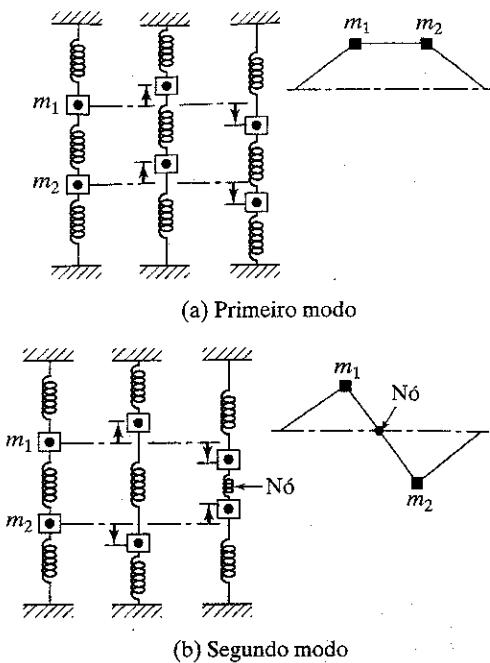


FIGURA 5.5 Modos de vibração.

Solução:

Abordagem: Especifique a solução a ser obtida para o primeiro ou para o segundo modo pela solução geral para condições iniciais arbitrárias e resolva as equações resultantes.

Para condições iniciais arbitrárias, o movimento das massas é descrito pela Equação (5.15). No presente caso, $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$ e, portanto, a Equação (5.15) reduz-se à Equação (E.10) do Exemplo 5.1:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2\right) \\x_2(t) &= X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1\right) \\&\quad - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2\right)\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

Admitindo que as condições iniciais sejam as da Equação (5.16), as constantes $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \phi_1$ e ϕ_2 podem ser obtidas pela Equação (5.18) usando $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$:

$$\begin{aligned}X_1^{(1)} &= -\frac{1}{2} \left\{ [x_1(0) + x_2(0)]^2 + \frac{m}{k} [\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]^2 \right\}^{1/2} \\X_1^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left\{ [-x_1(0) + x_2(0)]^2 \right. \\&\quad \left. + \frac{m}{3k} [\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]^2 \right\}^{1/2}\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

$$\phi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{-\sqrt{m} [\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{k} [x_1(0) + x_2(0)]} \right\} \quad (\text{E.4})$$

$$\phi_2 = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{m} [\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{3k} [-x_1(0) + x_2(0)]} \right\} \quad (\text{E.5})$$

(a) O primeiro modo normal do sistema é dado pela Equação (E.8) do Exemplo 5.1:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{cases} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1\right) \\ X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2\right) \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

A comparação das equações (E.1) e (E.6) mostra que o movimento do sistema é idêntico ao primeiro modo normal somente se $X_1^{(2)} = 0$. Isso requer (pela Equação E.3) que

$$x_1(0) = x_2(0) \text{ e } \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) \quad (\text{E.7})$$

(b) O segundo modo normal do sistema é dado pela Equação (E.9) do Exemplo 5.1:

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{cases} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2\right) \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

A comparação das equações (E.1) e (E.8) mostra que o movimento do sistema coincide com o segundo modo normal somente se $X_1^{(1)} = 0$. Isso implica (pela Equação E.2) que

$$x_1(0) = -x_2(0) \text{ e } \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) \quad (\text{E.9})$$

EXEMPLO 5.3**Resposta de vibração livre de um sistema com dois graus de liberdade**

Determine a resposta de vibração livre do sistema exposto na Figura 5.3(a) com $k_1 = 30$, $k_2 = 5$, $k_3 = 0$, $m_1 = 10$, $m_2 = 1$ e $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ para as condições iniciais $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Solução: Para os dados apresentados, o problema de autovalor, Equação (5.8), torna-se

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} -10\omega^2 + 35 & -5 \\ -5 & -\omega^2 + 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Igualando o determinante da matriz de coeficientes na Equação (E.1) a zero, obtemos a equação da freqüência (ver Equação 5.9):

$$10\omega^4 - 85\omega^2 + 150 = 0 \quad (\text{E.2})$$

pela qual as freqüências naturais podem ser determinadas como

$$\omega_1^2 = 2,5, \quad \omega_2^2 = 6,0$$

ou

$$\omega_1 = 1,5811, \quad \omega_2 = 2,4495 \quad (\text{E.3})$$

A substituição de $\omega^2 = \omega_1^2 = 2,5$ na Equação (E.1) resulta em $X_2^{(1)} = 2X_1^{(1)}$, enquanto $\omega^2 = \omega_2^2 = 6,0$ na Equação (E.1) dá $X_2^{(2)} = -5X_1^{(2)}$. Assim, os modos normais (ou autovetores) são dados por

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} X_1^{(1)} \quad (\text{E.4})$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} X_1^{(2)} \quad (\text{E.5})$$

As respostas à vibração livre das massas m_1 e m_2 são dadas por (ver Equação 5.15):

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos(1,5811t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(2,4495t + \phi_2) \quad (\text{E.6})$$

$$x_2(t) = 2X_1^{(1)} \cos(1,5811t + \phi_1) - 5X_1^{(2)} \cos(2,4495t + \phi_2) \quad (\text{E.7})$$

onde $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1 e ϕ_2 são constantes que deverão ser determinadas pelas condições iniciais. Usando as condições iniciais dadas nas equações (E.6) e (E.7), obtemos

$$x_1(t=0) = 1 = X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2 \quad (\text{E.8})$$

$$x_2(t=0) = 0 = 2X_1^{(1)} \cos \phi_1 - 5X_1^{(2)} \cos \phi_2 \quad (\text{E.9})$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0 = -1,5811X_1^{(1)} \sin \phi_1 - 2,4495X_1^{(2)} \sin \phi_2 \quad (\text{E.10})$$

$$\dot{x}_2(t=0) = -3,1622X_1^{(1)} + 12,2475X_1^{(2)} \sin \phi_2 \quad (\text{E.11})$$

A solução das equações (E.8) e (E.9) dá

$$X_1^{(1)} \cos \phi_1 = \frac{5}{7}, \quad X_1^{(2)} \cos \phi_2 = \frac{2}{7} \quad (\text{E.12})$$

enquanto a solução das equações (E.10) e (E.11) dá como resultado

$$X_1^{(1)} \sin \phi_1 = 0, \quad X_1^{(2)} \sin \phi_2 = 0 \quad (\text{E.13})$$

As equações (E.12) e (E.13) dão

$$X_1^{(1)} = \frac{5}{7}, \quad X_1^{(2)} = \frac{2}{7}, \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0 \quad (\text{E.14})$$

Assim, as respostas à vibração livre de m_1 e m_2 são dadas por

$$x_1(t) = \frac{5}{7} \cos 1,5811t + \frac{2}{7} \cos 2,4495t \quad (\text{E.15})$$

$$x_2(t) = \frac{10}{7} \cos 1,5811t - \frac{10}{7} \cos 2,4495t \quad (\text{E.16})$$

A representação gráfica das equações (E.15) e (E.16) é considerada no Exemplo 5.12.

5.4 Sistema torcional

Considere um sistema torcional que consiste em dois discos montados em um eixo, como mostra a Figura 5.6. Os três segmentos do eixo têm constantes elásticas rotacionais k_{t1} , k_{t2} e k_{t3} , como indicado na figura. A figura também mostra os discos de momentos de inércia de massa J_1 e J_2 , os torques aplicados M_{t1} e M_{t2} , e os graus de liberdade rotacional θ_1 e θ_2 . As equações diferenciais de movimento rotacional para os discos J_1 e J_2 podem ser derivadas como

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -k_{t1}\theta_1 + k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) + M_{t1}$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = -k_{t2}\theta_2 + k_{t3}\theta_2 + M_{t2}$$

que, após rearranjadas, tornam-se

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = M_{t1} \quad (5.19)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = M_{t2} \quad (5.20)$$

Para a análise de vibração livre do sistema, a Equação (5.19) reduz-se a

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = 0$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = 0 \quad (5.20)$$

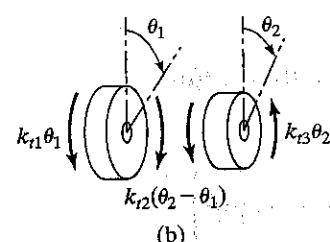
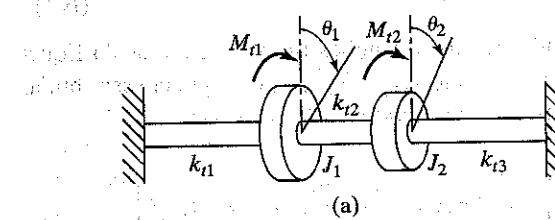


FIGURA 5.6 Sistema torcional com discos montados em um eixo.

Observe que a Equação (5.20) é semelhante às equações (5.4) e (5.5). De fato, a Equação (5.20) pode ser obtida pela substituição de θ_1 , θ_2 , J_1 , J_2 , k_{t1} , k_{t2} e k_{t3} por x_1 , x_2 , m_1 , m_2 , k_1 , k_2 e k_3 , respectivamente. Assim, a análise apresentada na Seção 5.3 também é aplicável a sistemas torcionais, com substituições adequadas. Os dois exemplos seguintes ilustram o procedimento.

EXEMPLO 5.4

Freqüências naturais de um sistema torcional

Determine as freqüências naturais e formas modais para o sistema torcional mostrado na Figura 5.7 para $J_1 = J_0$, $J_2 = 2J_0$ e $k_{t1} = k_{t2} = k_t$.

Solução: As equações diferenciais de movimento, Equação (5.20), reduzem-se (com $k_{t3} = 0$, $k_{t1} = k_{t2} = k_t$, $J_1 = J_0$ e $J_2 = 2J_0$) a:

$$\begin{aligned} J_0\ddot{\theta}_1 + 2k_t\dot{\theta}_1 - k_t\theta_2 &= 0 \\ 2J_0\ddot{\theta}_2 - k_t\dot{\theta}_1 + k_t\theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

O rearranjo e substituição da solução harmônica

$$\theta_i(t) = \Theta_i \cos(\omega t + \phi); \quad i = 1, 2 \quad (\text{E.2})$$

dá a equação da freqüência:

$$2\omega^4 J_0^2 - 5\omega^2 J_0 k_t + k_t^2 = 0 \quad (\text{E.3})$$

A solução da Equação (E.3) dá as freqüências naturais

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0}(5 - \sqrt{17})} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0}(5 + \sqrt{17})} \quad (\text{E.4})$$

Os coeficientes de amplitude são dados por

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\Theta_2^{(1)}}{\Theta_1^{(1)}} = 2 - \frac{(5 - \sqrt{17})}{4} \\ r_2 &= \frac{\Theta_2^{(2)}}{\Theta_1^{(2)}} = 2 - \frac{(5 + \sqrt{17})}{4} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

As equações (E.4) e (E.5) também podem ser obtidas pela substituição de $k_1 = k_{t1} = k_t$, $k_2 = k_{t2} = k_t$, $m_1 = J_1 = J_0$, $m_2 = J_2 = 2J_0$ e $k_3 = 0$ nas equações (5.10) e (5.11).

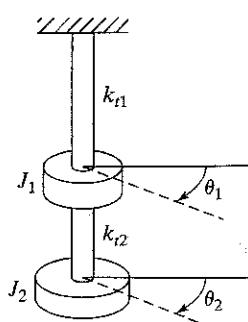


FIGURA 5.7 Sistema torcional.

Observação: Para um sistema com dois graus de liberdade, as duas freqüências naturais ω_1 e ω_2 não são iguais a nenhuma das freqüências naturais dos dois sistemas com um grau de liberdade construídos com os mesmos componentes. No Exemplo 5.4, os sistemas com um grau de liberdade k_{t1} e J_1

$$\left(\text{com } \bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_{t1}}{J_1}} = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \right)$$

e k_{t2} e J_2

$$\left(\text{com } \bar{\omega}_2 = \sqrt{\frac{k_{t2}}{J_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \right)$$

são combinados para obter o sistema mostrado na Figura 5.7. Podemos ver que ω_1 e ω_2 são diferentes de $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$.

EXEMPLO 5.5

Freqüências naturais de uma hélice de motor naval

O diagrama esquemático de um motor naval ligado a uma hélice por meio de engrenagens é mostrado na Figura 5.8(a). Os momentos de inércia de massa do volante, motor, engrenagem 1, engrenagem 2 e hélice (em kg/m^2) são 9.000, 1.000, 250, 150 e 2.000, respectivamente. Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema em vibração torcional.

Solução:

Abordagem: Determine os momentos de inércia de massa equivalentes de todos os rotores em relação a um rotor e use um modelo de dois graus de liberdade.

Premissas

1. O volante pode ser considerado estacionário (fixo), visto que seu momento de inércia de massa é muito grande em comparação com os dos outros rotores.

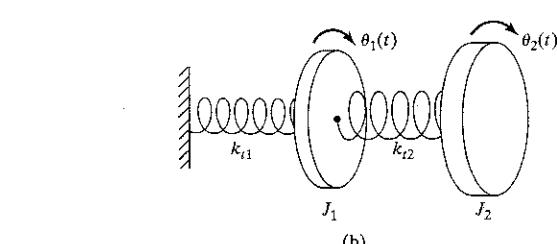
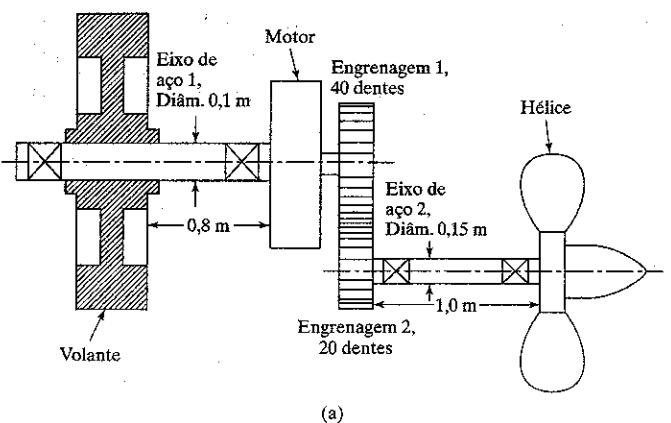


FIGURA 5.8 Sistema de hélice de um motor naval.

2. O motor e as engrenagens podem ser substituídos por um único rotor equivalente. Já que as engrenagens 1 e 2 têm 40 e 20 dentes, o eixo 2 gira com uma velocidade duas vezes maior que a do eixo 1. Assim, os momentos de inércia de massa da engrenagem 2 e da hélice, em relação ao motor, são dados por

$$(J_{G2})_{eq} = (2)^2(150) = 600 \text{ kg.m}^2$$

$$(J_P)_{eq} = (2)^2(2.000) = 8.000 \text{ kg.m}^2$$

Uma vez que a distância entre o motor e a unidade de engrenagens é pequena, o motor e as duas engrenagens podem ser substituídos por um único rotor com um momento de inércia de massa de

$$\begin{aligned} J_1 &= J_E + J_{G1} + (J_{G2})_{eq} \\ &= 1.000 + 250 + 600 = 1.850 \text{ kg.m}^2 \end{aligned}$$

Considerando um módulo de elasticidade transversal de $80 \times 10^9 \text{ N.m}^2$ para o aço, a rigidez torcional dos eixos 1 e 2 pode ser determinada como

$$\begin{aligned} k_{t1} &= \frac{G I_{01}}{l_1} = \frac{G}{l_1} \left(\frac{\pi d_1^4}{32} \right) \\ &= \frac{(80 \times 10^9)(\pi)(0,10)^4}{(0,8)(32)} = 981.750,0 \text{ N.m/rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{t2} &= \frac{G I_{02}}{l_2} = \frac{G}{l_2} \left(\frac{\pi d_2^4}{32} \right) \\ &= \frac{(80 \times 10^9)(\pi)(0,15)^4}{(1,0)(32)} = 3.976.087,5 \text{ N.m/rad} \end{aligned}$$

Visto que o comprimento do eixo 2 não é desprezível, admite-se que a hélice seja um rotor ligado à extremidade do eixo 2. Assim, o sistema pode ser representado como um sistema torcional com dois graus de liberdade, como indicado na Figura 5.8(b). Fazendo $k_3 = 0$, $k_1 = k_{t1}$, $k_2 = k_{t2}$, $m_1 = J_1$ e $m_2 = J_2$ na Equação (5.10), podemos determinar as frequências naturais do sistema como

$$\begin{aligned} \omega_1^2, \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2}) J_2 + k_{t2} J_1}{J_1 J_2} \right\} \\ &\pm \left[\left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2}) J_2 + k_{t2} J_1}{J_1 J_2} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. - 4 \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2}) k_{t2} - k_{t2}^2}{J_1 J_2} \right\} \right]^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})}{2 J_1} + \frac{k_{t2}}{2 J_2} \right\} \\ &\pm \left[\left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})}{2 J_1} + \frac{k_{t2}}{2 J_2} \right\}^2 - \frac{k_{t1} k_{t2}}{J_1 J_2} \right]^{1/2} \quad (\text{E.1}) \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{(k_{t1} + k_{t2})}{2 J_1} + \frac{k_{t2}}{2 J_2} = \frac{(98,1750 + 397,6087) \times 10^4}{2 \times 1.850}$$

$$+ \frac{397,6087 \times 10^4}{2 \times 8.000} = 1.588,46$$

$$\begin{aligned} \frac{k_{t1} k_{t2}}{J_1 J_2} &= \frac{(98,1750 \times 10^4)(397,6087 \times 10^4)}{(1,850)(8.000)} \\ &= 26,3750 \times 10^4 \end{aligned}$$

a Equação (E.1) dá

$$\begin{aligned} \omega_1^2, \omega_2^2 &= 1.588,46 \pm [(1.588,46)^2 - 26,3750 \times 10^4]^{1/2} \\ &= 1.588,46 \pm 1.503,1483 \end{aligned}$$

Assim,

$$\omega_1^2 = 85,3117 \text{ ou } \omega_1 = 9,2364 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2^2 = 3.091,6083 \text{ ou } \omega_2 = 55,6022 \text{ rad/s}$$

Para as formas modais, fazemos $k_1 = k_{t1}$, $k_2 = k_{t2}$, $k_3 = 0$, $m_1 = J_1$ e $m_2 = J_2$ na Equação (5.11) para obter

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-J_1 \omega_1^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}} \\ &= \frac{-(1.850)(85,3117) + (495,7837 \times 10^4)}{397,6087 \times 10^4} \\ &= 1,2072 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{-J_1 \omega_2^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}} \\ &= \frac{-(1.850)(3.091,6083) + (495,7837 \times 10^4)}{397,6087 \times 10^4} \\ &= -0,1916 \end{aligned}$$

Dessa forma, as formas modais podem ser determinadas por uma equação semelhante à Equação (5.12) como

$$\left\{ \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \right\}^{(1)} = \left\{ \frac{1}{r_1} \right\} = \frac{1}{1,2072}$$

e

$$\left\{ \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \right\}^{(2)} = \left\{ \frac{1}{r_2} \right\} = \frac{1}{-0,1916}$$

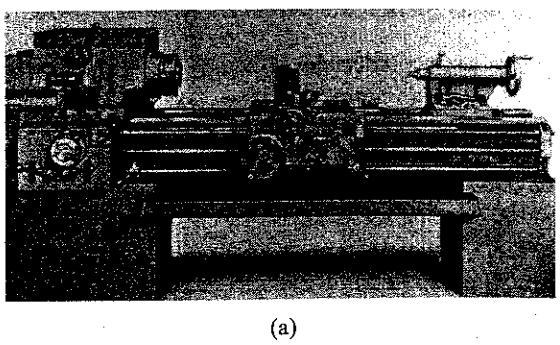
5.5 Acoplamento de coordenadas e coordenadas principais

Como já afirmamos, um sistema com n graus de liberdade requer n coordenadas independentes para descrever sua

configuração. Normalmente, essas coordenadas são quantidades geométricas independentes medidas em relação à posição de equilíbrio do corpo vibratório. Todavia, é possível selecionar algum outro conjunto de n coordenadas para descrever a configuração do sistema. Esse último conjunto pode ser, por exemplo, diferente do primeiro conjunto, no sentido de que a origem das coordenadas pode estar afastada da posição de equilíbrio do corpo. Poderia haver, ainda, outros conjuntos de coordenadas para descrever a configuração do sistema. Cada um desses conjuntos de n coordenadas é denominado *coordenadas generalizadas*.

Como exemplo, considere o torno mostrado na Figura 5.9(a). Um modelo acurado dessa máquina-ferramenta envolveria considerar a base do torno como uma viga elástica apoiada em colunas elásticas curtas com massas concentradas acopladas à viga, como indica a Figura 5.9(b) [5.1–5.3]. Contudo, para uma análise simplificada da vibração, a base do torno pode ser considerada como um corpo rígido que tem massa e inércia, e cada um dos cabeçotes, o fixo e o móvel, pode ser substituído por massas concentradas. Podemos considerar que a base seja apoiada em molas nas extremidades. Assim, o modelo final será um corpo rígido de massa total m e momento de inércia de massa J_0 em relação a seu CG, apoiado em molas de rigidezes, k_1 e k_2 , como mostra a Figura 5.10(a). Para esse sistema com dois graus de liberdade, qualquer dos seguintes conjuntos de coordenadas pode ser usado para descrever o movimento:

1. deflexões $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas extremidades do torno AB ;
2. deflexão $x(t)$ do CG e rotação $\theta(t)$;
3. deflexão $x_1(t)$ da extremidade A e rotação $\theta(t)$;
4. deflexão $y(t)$ da ponta P localizada a uma distância e à esquerda do CG e rotação $\theta(t)$, como indicado na Figura 5.10(b).



(a)

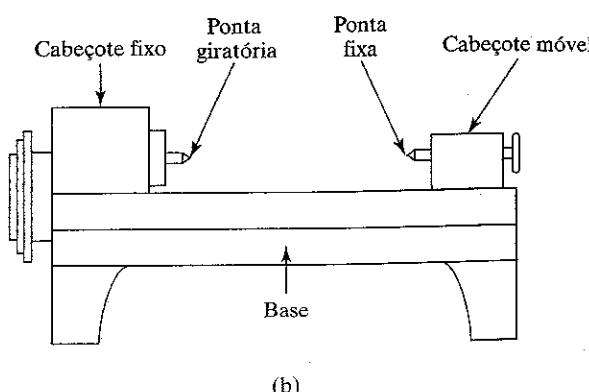


FIGURA 5.9 Torno. (Fotografia por cortesia de South Bend Lathe Corp.)

Assim, qualquer conjunto dessas coordenadas, (x_1, x_2) , (x, θ) , (x_1, θ) e (y, θ) , representa as coordenadas generalizadas do sistema. Agora, derivaremos as equações de movimento do torno usando dois conjuntos diferentes de coordenadas para ilustrar o conceito de acoplamento de coordenadas.

Equações de movimento usando $x(t)$ e $\theta(t)$. Pelo diagrama de corpo livre mostrado na Figura 5.10(a), com os valores positivos das variáveis de movimento como indicados, a equação de equilíbrio da força no sentido vertical pode ser escrita como

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta) \quad (5.21)$$

e a equação de momento em relação ao CG pode ser expressa como

$$J_0\ddot{\theta} = k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2 \quad (5.22)$$

As equações (5.21) e (5.22) podem ser rearranjadas e escritas em forma de matriz como

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -(k_1l_1 - k_2l_2) \\ -(k_1l_1 - k_2l_2) & (k_1l_1^2 + k_2l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

Podemos ver que cada uma dessas equações contém x e θ . Elas se tornam independentes uma da outra se o termo de acoplamento ($k_1l_1 - k_2l_2$) for igual a zero, isto é, se $k_1l_1 = k_2l_2$. Se $k_1l_1 \neq k_2l_2$, o movimento resultante do torno AB é translacional, bem como rotacional quando for aplicado um deslocamento ou torque passando pelo CG do corpo como uma condição inicial. Em outras palavras, o torno gira no plano vertical e também tem movimento vertical, a menos que $k_1l_1 = k_2l_2$. Isso é conhecido como *acoplamento elástico ou estático*.

Equações de movimento usando $y(t)$ e $\theta(t)$. Pela Figura 5.10(b), onde $y(t)$ e $\theta(t)$ são usadas como as coordenadas generalizadas do sistema, equações de movimento para translação e rotação podem ser escritas como

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -k_1(y - l'_1\theta) - k_2(y + l'_2\theta) - me\ddot{\theta} \\ J_p\ddot{\theta} &= k_1(y - l'_1\theta)l'_1 - k_2(y + l'_2\theta)l'_2 - me\ddot{y} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Essas equações podem ser rearranjadas e escritas em forma de matriz como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & me \\ me & J_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} &+ \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2l'_2 - k_1l'_1) \\ (-k_1l'_1 + k_2l'_2) & (k_1l'_1^2 + k_2l'_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ambas as equações de movimento representadas pela Equação (5.25) contêm y e θ , portanto são equações acopladas. Elas contêm termos de acoplamento estático (ou elástico),

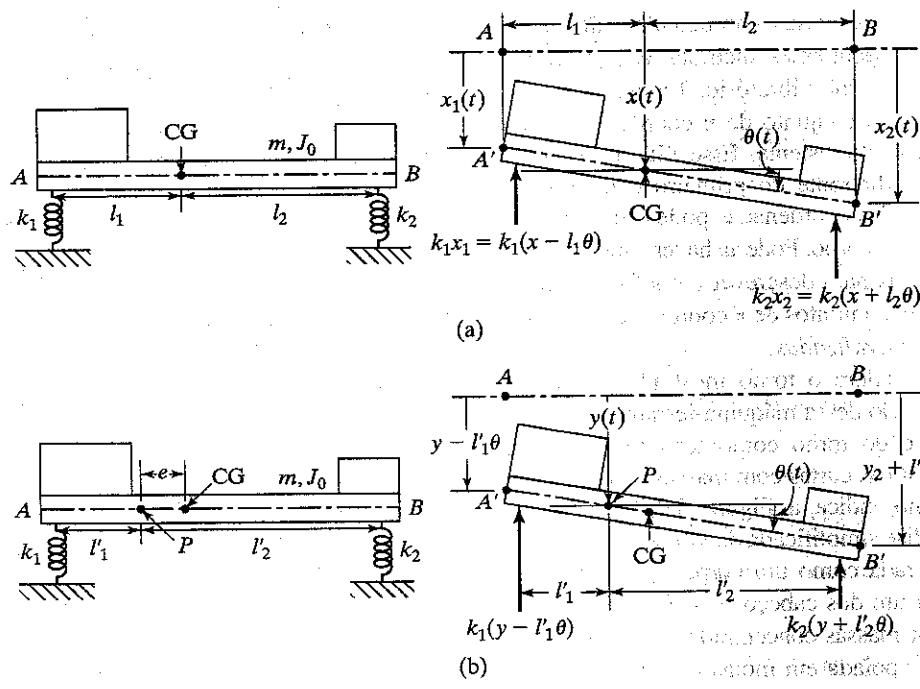


FIGURE 5.10 Modelagem de um torno.

bem como de acoplamento dinâmico (ou massa). Se $k_1 l'_1 = k_2 l'_2$, o sistema terá somente *acoplamento dinâmico ou de inércia*. Nesse caso, se o torno mover-se para cima e para baixo na direção y , a força de inércia $m\ddot{y}$, que age no CG do corpo, induzirá um movimento na direção θ , em virtude do momento $m\dot{y}\epsilon$. De maneira semelhante, um movimento na direção θ induz um movimento do torno na direção y resultante da força $m\epsilon\ddot{\theta}$.

Observe as seguintes características desses sistemas:

- No caso mais geral, um sistema viscosamente amortecido com dois graus de liberdade tem equações de movimento na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Essa equação revela o tipo de acoplamento presente. Se a matriz de rigidez não for diagonal, o sistema tem acoplamento elástico ou estático. Se matriz de amortecimento não for diagonal, o sistema tem acoplamento de amortecimento ou velocidade. Por fim, se a matriz de massa não for diagonal, o sistema tem acoplamento de massa ou inercial. Tanto o acoplamento de velocidade quanto o de massa são denominados acoplamento dinâmico.

- O sistema vibra em seu próprio modo natural independentemente das coordenadas usadas. A escolha das coordenadas é mera conveniência.
- Pelas equações (5.23) e (5.25), fica claro que a natureza do acoplamento depende das coordenadas usadas e não é uma propriedade inerente do sistema. É possível escolher um sistema de coordenadas $q_1(t)$ e $q_2(t)$ que dê equações de movimento não acopladas estaticamente e dinamicamente.

Tais coordenadas são denominadas *coordenadas principais ou naturais*. A principal vantagem de usar coordenadas principais é que as equações de movimento não acopladas resultantes podem ser resolvidas independentemente uma da outra.

O seguinte exemplo ilustra o método de determinação de coordenadas principais em termos das coordenadas geométricas.

EXEMPLO 5.6

Coordenadas principais de sistema massa-mola

Determine as coordenadas principais para o sistema massa-mola mostrado na Figura 5.4.

Solução:

Abordagem: Defina duas soluções independentes como coordenadas principais e expresse-as em termos das soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

O movimento geral do sistema exposto na Figura 5.4 é dado pela Equação (E.10) do Exemplo 5.1

$$\begin{aligned} x_1(t) &= B_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) + B_2 \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \\ x_2(t) &= B_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) - B_2 \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \end{aligned} \quad (E.1)$$

onde $B_1 = X_1^{(1)}$, $B_2 = X_1^{(2)}$, ϕ_1 e ϕ_2 são constantes. Definimos um novo conjunto de coordenadas $q_1(t)$ e $q_2(t)$ tal que

$$\begin{aligned} q_1(t) &= B_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) \\ q_2(t) &= B_2 \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \end{aligned} \quad (E.2)$$

Visto que $q_1(t)$ e $q_2(t)$ são funções harmônicas, suas equações de movimento correspondentes podem ser escritas como¹

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \left(\frac{k}{m}\right)q_1 &= 0 \\ \ddot{q}_2 + \left(\frac{3k}{m}\right)q_2 &= 0\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

Essas equações representam um sistema com dois graus de liberdade cujas freqüências naturais são $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ e $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$. Como não há nem acoplamento estático nem acoplamento dinâmico nas equações de movimento (E.3), $q_1(t)$ e $q_2(t)$ são coordenadas principais. Pelas equações (E.1) e (E.2), podemos escrever

$$\begin{aligned}x_1(t) &= q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) &= q_1(t) - q_2(t)\end{aligned}\quad (\text{E.4})$$

A solução das Equações (E.4) dá as coordenadas principais:

$$\begin{aligned}q_1(t) &= \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] \\ q_2(t) &= \frac{1}{2}[x_1(t) - x_2(t)]\end{aligned}\quad (\text{E.5})$$

EXEMPLO 5.7

Freqüências e modos de automóvel

Determine as freqüências da inclinação (movimento angular) e da instabilidade vertical (movimento linear para cima e para baixo) e a localização dos centros de oscilação (nós) de um automóvel com os seguintes dados (ver Figura 5.11):

Massa (m) = 1.000 kg

Raio de giro (r) = 0,9 m

Distância entre o eixo dianteiro e o CG (l_1) = 1,0 m

Distância entre o eixo traseiro e o CG (l_2) = 1,5 m

Rigidez da mola dianteira (k_f) = 18 kN/m

Rigidez da mola traseira (k_r) = 22 kN/m

Solução: Se x e θ forem usados como coordenadas independentes, as equações de movimento são dadas pela Equação (5.23) com $k_1 = k_f$, $k_2 = k_r$ e $J_0 = mr^2$. Para vibração livre, consideraremos uma solução harmônica:

$$x(t) = X \cos(\omega t + \phi), \quad \theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{E.1})$$

Usando as equações (E.1) e (5.23), obtemos

$$\begin{bmatrix} (-m\omega^2 + k_1 + k_2) & (-k_1 l_1 + k_2 l_2) \\ (-k_1 l_1 + k_2 l_2) & (-J_0 \omega^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

¹ Observe que a equação de movimento correspondente à solução $q = B \cos(\omega t + \phi)$ é dada por $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$.

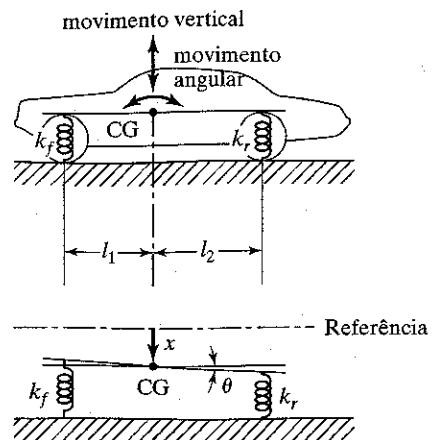


FIGURA 5.11 Movimentos de instabilidade vertical e inclinação de um automóvel.

Para os dados conhecidos, a Equação (E.2) torna-se

$$\begin{bmatrix} (-1.000\omega^2 + 40.000) & 15.000 \\ 15.000 & (-810\omega^2 + 67.500) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

da qual a equação da freqüência pode ser derivada:

$$8,1\omega^4 - 999\omega^2 + 24.750 = 0 \quad (\text{E.4})$$

As freqüências naturais podem ser determinadas pela Equação (E.4):

$$\omega_1 = 5,8593 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 9,4341 \text{ rad/s} \quad (\text{E.5})$$

Com esses valores, podemos determinar a razão entre as amplitudes pela Equação (E.3):

$$\frac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}} = -2,6461 \quad \frac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}} = 0,3061 \quad (\text{E.6})$$

As localizações dos nós podem ser obtidas observando que a tangente de um ângulo pequeno é aproximadamente igual ao próprio ângulo. Assim, pela Figura 5.12, determinamos que a distância entre o CG e o nó é -2,6461 para ω_1 e 0,3061 m para ω_2 . As formas modais são mostradas por linhas tracejadas na Figura 5.12.

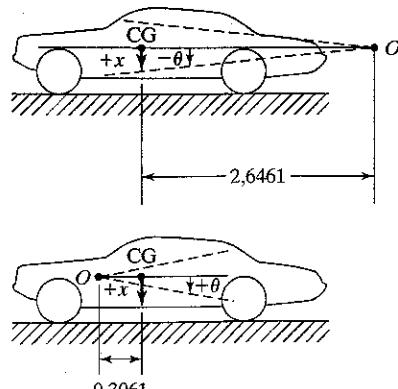


FIGURA 5.12 Formas modais de um automóvel.

5.6 Análise de vibração forçada

As equações de movimento de um sistema geral com dois graus de liberdade sob forças externas podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

As equações (5.1) e (5.2) podem ser consideradas casos especiais da Equação (5.27), com $m_{11} = m_1$, $m_{22} = m_2$ e $m_{12} = 0$. Consideraremos que as forças externas sejam harmônicas:

$$F_j(t) = F_{j0}e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (5.28)$$

onde ω é a freqüência forçante. Podemos escrever as soluções em regime permanente como

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (5.29)$$

onde X_1 e X_2 são, em geral, quantidades complexas que dependem de ω e dos parâmetros do sistema. A substituição das equações (5.28) e (5.29) na Equação (5.27) resulta em

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11}) & (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) \\ (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{21} + k_{21}) & (-\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

Como na Seção 3.5, definimos a impedância mecânica $Z_{rs}(i\omega)$ como

$$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_r + i\omega c_{rs} + k_r, \quad r, s = 1, 2 \quad (5.31)$$

e escrevemos a Equação (5.30) como

$$[Z(i\omega)] \vec{X} = \vec{F}_0 \quad (5.32)$$

onde

$$[Z(i\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix} = \text{matriz de impedância}$$

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

e

$$\vec{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

A Equação (5.32) pode ser resolvida para obter

$$\vec{X} = [Z(i\omega)]^{-1} \vec{F}_0 \quad (5.33)$$

onde a inversa da matriz de impedância é dada por

$$[Z(i\omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \begin{bmatrix} Z_{22}(i\omega) & -Z_{12}(i\omega) \\ -Z_{12}(i\omega) & Z_{11}(i\omega) \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

As equações (5.33) e (5.34) levam à solução

$$X_1(i\omega) = \frac{Z_{22}(i\omega)F_{10} - Z_{12}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)}$$

$$X_2(i\omega) = \frac{-Z_{12}(i\omega)F_{10} + Z_{11}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \quad (5.35)$$

Substituindo a Equação (5.35) na Equação (5.29) podemos determinar a solução completa, $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

A análise de um sistema com dois graus de liberdade usado como um absorvedor de vibração é dada na Seção 9.11. A Referência [5.4] trata da resposta ao impacto de um sistema com dois graus de liberdade, enquanto a Referência [5.5] considera a resposta em regime permanente sob excitação harmônica.

EXEMPLO 5.8

Resposta em regime permanente de sistema massa-mola

Determine a resposta em regime permanente do sistema mostrado na Figura 5.13 quando a massa m_1 é excitada pela força $F_1(t) = F_{10} \cos \omega t$. Além disso, represente em gráfico sua curva de resposta de frequência.

Solução: As equações de movimento do sistema podem ser expressas como

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (E.1)$$

A comparação da Equação (E.1) com a Equação (5.27) mostra que

$$m_{11} = m_{22} = m, \quad m_{12} = 0, \quad c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0, \\ k_{11} = k_{22} = 2k, \quad k_{12} = -k, \quad F_1 = F_{10} \cos \omega t, \quad F_2 = 0$$

Consideraremos que a solução seja a seguinte:²

$$x_j(t) = X_j \cos \omega t, \quad j = 1, 2 \quad (E.2)$$

A Equação (5.31) dá

$$Z_{11}(\omega) = Z_{22}(\omega) = -m\omega^2 + 2k, \quad Z_{12}(\omega) = -k \quad (E.3)$$

² Visto que $F_{10} \cos \omega t = \text{Real}(F_{10}e^{i\omega t})$, admitiremos que a solução também seja $x_j = \text{Real}(X_j e^{i\omega t}) = X_j \cos \omega t, j = 1, 2$. Podemos verificar que X_j é real para um sistema não amortecido.

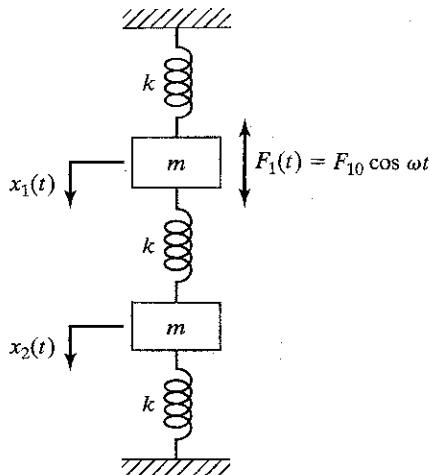


FIGURA 5.13 Sistema de duas massas sujeito à força harmônica.

Por consequência, X_1 e X_2 são dadas pela Equação (5.35):

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} \\ &= \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2} = \\ &= \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Definindo $\omega_1^2 = k/m$ e $\omega_2^2 = 3k/m$, as equações (E.4) e (E.5) podem ser expressas como

$$X_1(\omega) = \frac{\left\{2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right\}F_{10}}{k\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]} \quad (\text{E.6})$$

$$X_2(\omega) = \frac{F_{10}}{k\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]} \quad (\text{E.7})$$

As respostas X_1 e X_2 são mostradas na Figura 5.14 em termos do parâmetro adimensional ω/ω_1 . No parâmetro adimensional ω/ω_1 , ω_1 foi selecionada arbitrariamente; ω_2 poderia ter sido selecionada com igual facilidade. Podemos ver que as amplitudes X_1 e X_2 tornam-se infinitas quando $\omega^2 = \omega_1^2$ ou $\omega^2 = \omega_2^2$. Assim, há duas condições de ressonância para o sistema: uma em ω_1 e outra em ω_2 . Em todos os outros valores de ω , as amplitudes de vibração são finitas. Podemos notar pela Figura 5.14 que há um valor particular da frequência ω no qual a vibração da primeira massa m_1 , à qual a força $F_1(t)$ é aplicada, é reduzida a zero. Essa característica forma a base do absorvedor de vibração dinâmica discutido no Capítulo 9.

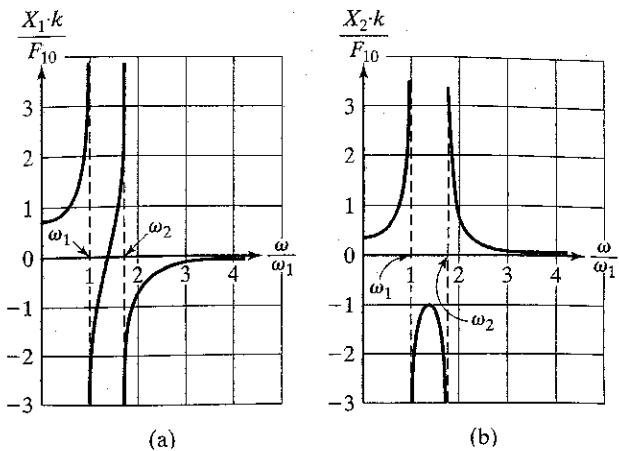


FIGURA 5.14 Curvas de resposta em frequência do Exemplo 5.8.

5.7 Sistemas semidefinidos

Sistemas semidefinidos também são conhecidos como sistemas irrestritos ou sistemas degenerados. Dois exemplos de tais sistemas são mostrados na Figura 5.15. Podemos considerar que o arranjo na Figura 5.15(a) represente dois vagões ferroviários de massas m_1 e m_2 com uma mola de acoplamento k . Podemos considerar que o arranjo na Figura 5.15(b) represente dois rotores de momentos de inércia de massa J_1 e J_2 ligados por um eixo de rigidez sob torque k_f . Para o sistema mostrado na Figura 5.15(a), as equações de movimento podem ser escritas como

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{5.36})$$

Para vibração livre, admitimos que o movimento seja harmônico:

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega t + \phi_j), \quad j = 1, 2 \quad (\text{5.37})$$

A substituição da Equação (5.37) na Equação (5.36) dá

$$\begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k)X_1 - kX_2 &= 0 \\ -kX_1 + (-m_2\omega^2 + k)X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{5.38})$$

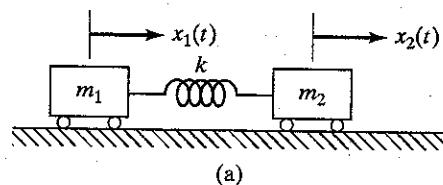
Igualando o determinante dos coeficientes de X_1 e X_2 a zero, obtemos a equação de frequência como

$$\omega^2[m_1m_2\omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0 \quad (\text{5.39})$$

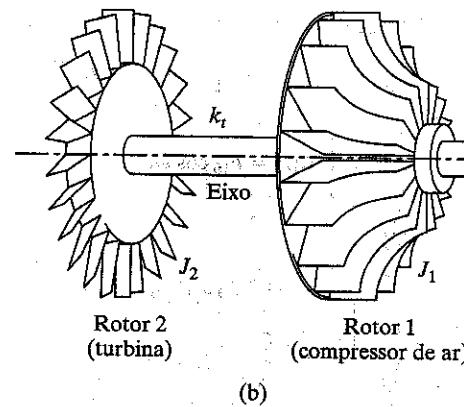
pela qual podemos obter as freqüências naturais:

$$\omega_1 = 0 \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2}} \quad (\text{5.40})$$

Podemos observar que uma das freqüências naturais do sistema é zero, o que significa que ele não está oscilando. Em outras palavras, o sistema move-se como um todo, sem nenhum movimento relativo entre as duas massas (translação de corpo rígido). Tais sistemas, que têm uma das freqüências naturais igual a zero, são denominados sistemas semidefinidos. Podemos verificar, pela substituição de ω_2 na Equação (5.38), que $X_1^{(2)}$ e $X_2^{(2)}$ estão em fases opostas. Assim, haveria um nó no meio da mola.



(a)



(b)

FIGURA 5.15 Sistemas semidefinidos.**EXEMPLO 5.9****Resposta a impulso pelo método da transformada de Laplace**

Dois vagões ferroviários de massas $m_1 = M$ e $m_2 = m$ estão ligados por uma mola de rigidez k , como mostra a Figura 5.15(a). Se o vagão de massa M for sujeito a um impulso $F_0 \delta(t)$, determine as respostas no tempo dos vagões usando o método da transformada de Laplace.

Solução: As respostas dos vagões podem ser determinadas utilizando-se qualquer uma das seguintes abordagens.

- Considere que o sistema está sofrendo vibração livre provocada pela velocidade inicial causada pelo impulso aplicado ao vagão M .
- Considere que o sistema está sofrendo vibração forçada provocada pela força $F(t) = F_0 \delta(t)$ aplicada ao vagão M (considerando-se que os deslocamentos e velocidades dos vagões M e m sejam zero, inicialmente).

Usando a segunda abordagem, as equações de movimento dos vagões podem ser expressas como

$$M\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = F_0\delta(t) \quad (\text{E.1})$$

$$-kx_1 + m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0 \quad (\text{E.2})$$

Utilizando transformadas de Laplace, as equações (E.1) e (E.2) podem ser escritas como

$$(Ms^2 + k)\bar{x}_1(s) - k\bar{x}_2(s) = F_0 \quad (\text{E.3})$$

$$-k\bar{x}_1(s) + (m s^2 + k)\bar{x}_2(s) = 0 \quad (\text{E.4})$$

As equações (E.3) e (E.4) podem ser resolvidas para $\bar{x}_1(s)$ e $\bar{x}_2(s)$ como

$$\bar{x}_1(s) = \frac{F_0(ms^2 + k)}{s^2\{M m s^2 + k(M + m)\}} \quad (\text{E.5})$$

$$\bar{x}_2(s) = \frac{F_0 k}{s^2\{M m s^2 + k(M + m)\}} \quad (\text{E.6})$$

Usando frações parciais, as equações (E.5) e (E.6) podem ser reescritas como

$$\bar{x}_1(s) = \frac{F_0}{M + m} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{m}{\omega M} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (\text{E.7})$$

$$\bar{x}_2(s) = \frac{F_0}{M + m} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (\text{E.8})$$

onde

$$\omega^2 = k \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \quad (\text{E.9})$$

As transformadas inversas das equações (E.7) e (E.8), usando os resultados do Apêndice D, dão a resposta no tempo dos vagões como

$$x_1(t) = \frac{F_0}{M + m} \left(t + \frac{m}{\omega M} \sin \omega t \right) \quad (\text{E.10})$$

$$x_2(t) = \frac{F_0}{M + m} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (\text{E.11})$$

Observação: A representação gráfica das equações (E.10) e (E.11) é apresentada no Exemplo 5.13. ■

5.8 Auto-excitação e análise de estabilidade

Na Seção 3.11, as condições de estabilidade de um sistema com um grau de liberdade foram expressas em termos das constantes físicas do sistema. Nesta seção, estendemos o procedimento a um sistema com dois graus de liberdade. Quando o sistema é sujeito a forças auto-excitadoras, os termos da força podem ser combinados com os termos de amortecimento/rigidez, e as equações de movimento resultantes podem ser expressas em notação matricial como

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Substituindo a solução

$$x_j(t) = X_j e^{st}, \quad j = 1, 2 \quad (5.42)$$

na Equação (5.41) e igualando o determinante da matriz de coeficientes a zero, obtemos a equação característica da forma

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \quad (5.43)$$

Os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4 são números reais, visto que são derivados dos parâmetros físicos do sistema. Se s_1, s_2, s_3 e s_4 denotarem as raízes da Equação (5.43), temos

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) = 0$$

ou

$$\begin{aligned} s^4 &= (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)s^3 \\ &+ (s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_1 s_4 + s_2 s_3 + s_2 s_4 + s_3 s_4)s^2 \\ &- (s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4 + s_1 s_3 s_4 + s_2 s_3 s_4)s + (s_1 s_2 s_3 s_4) = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

Uma comparação das equações (5.43) e (5.44) resulta em

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \\ a_2 &= s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_1 s_4 + s_2 s_3 + s_2 s_4 + s_3 s_4 \\ a_3 &= -(s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4 + s_1 s_3 s_4 + s_2 s_3 s_4) \\ a_4 &= s_1 s_2 s_3 s_4 \end{aligned} \quad (5.45)$$

O critério para estabilidade é que as partes reais de s_i ($i = 1, 2, 3, 4$) devem ser negativas para evitar aumentar exponenciais na Equação (5.42). Usando as propriedades de uma equação quântica, podemos inferir que uma condição necessária e suficiente para estabilidade é que todos os coeficientes da equação (a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4) sejam positivos e que a condição

$$a_1 a_2 a_3 > a_0 a_3^2 + a_4 a_1^2 \quad (5.46)$$

seja cumprida [5.8, 5.9]. Uma técnica mais geral, que pode ser usada para investigar a estabilidade de um sistema com n graus de liberdade, é conhecida como o critério de Routh-Hurwitz [5.10]. Para o sistema em questão, Equação (5.43), o critério de Routh-Hurwitz afirma que o sistema será estável se todos os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_4 forem positivos e os determinantes definidos a seguir forem positivos:

$$T_1 = |a_1| > 0 \quad (5.47)$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} T_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

A Equação (5.47) indica simplesmente que o coeficiente a_1 deve ser positivo, ao passo que a satisfação da Equação (5.49), aliada à satisfação das condições $a_3 > 0$ e $a_4 > 0$, implica a

satisfação da Equação (5.48). Assim, a condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema é que todos os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4 sejam positivos e que a desigualdade indicada na Equação (5.46) seja satisfeita.

5.9 Exemplos usando MATLAB

EXEMPLO 5.10

Solução do problema de autovalor

Usando MATLAB, determine as freqüências naturais e formas modais dos seguintes problemas:

$$\left[-\omega^2 m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right] \vec{X} = \vec{0} \quad (\text{E.1})$$

Solução: O problema de autovalor, Equação (E.1), pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \vec{X} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} \quad (\text{E.2})$$

onde $\lambda = m \omega^2/k$ é o autovalor, ω é a freqüência natural e \vec{X} é o autovetor ou forma modal. A solução de Equação (E.2) pode ser determinada usando MATLAB, da seguinte maneira:

```
>> A=[2 -1; -1 2]
A =
  2   -1
 -1   2
>> [v, d] = eig(A)
v =
 -0.7071   -0.7071
  0.7071   -0.7071
d =
  3.0000      0
      0   1.0000
```

Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 1,0$ e $\lambda_2 = 3,0$, e os autovetores correspondentes são

$$\vec{X}_1 = \begin{Bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{Bmatrix} \text{ e } \vec{X}_2 = \begin{Bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{Bmatrix}$$

EXEMPLO 5.11

Raízes de uma equação quântica

Usando MATLAB, determine as raízes da equação quântica

$$f(x) = x^4 - 8x + 12 = 0$$

Solução: O comando **roots** do MATLAB é usado para obter as raízes da polinomial de quarto grau como

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -1,37091 \pm 1,82709i \\ x_{3,4} &= 1,37091 \pm 0,648457i \end{aligned}$$

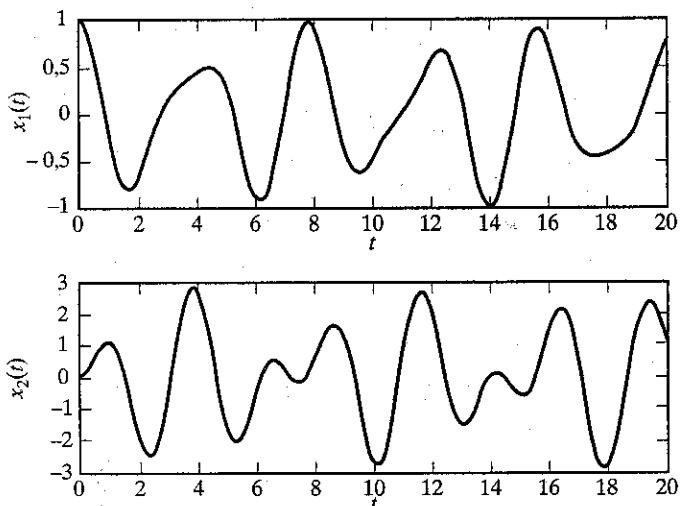
```
>> roots ([1 0 0 -8 12])
ans =
-1.3709 + 1.8271i
-1.3709 - 1.8271i
-1.3709 + 0.6485i
-1.3709 - 0.6485i
>>
```

EXEMPLO 5.12

Representação gráfica de uma resposta à vibração livre

Usando MATLAB, desenhe o gráfico da resposta à vibração livre das massas m_1 e m_2 do Exemplo 5.3.

Solução: As respostas no tempo das massas m_1 e m_2 são dadas pelas equações (E.15) e (E.16) do Exemplo 5.3. O programa MATLAB para desenhar o gráfico das respostas é dado adiante.



```
% E5_3.m
for i = 1: 501
    t(i) = 20 * (i - 1)/500;
    x1(i) = (5/7) * cos(1.5811*t(i)) + (2/7) * cos(2.4495*t(i));
    x2(i) = (10/7) * cos(1.5811*t(i)) - (10/7) * cos(2.4495*t(i));
end
subplot(211);
plot(t, x1);
xlabel('t');
ylabel('x1(t)');
subplot(212);
plot(t, x2);
xlabel('t');
ylabel('x2(t);');
```

EXEMPLO 5.13

Resposta no tempo de vagões ferroviários

Usando MATLAB desenhe o gráfico das respostas de tempo dos dois vagões ferroviários considerados no Exemplo 5.9 para os seguintes dados: $F_0 = 1.500 \text{ N}$, $M = 5.000 \text{ kg}$, $m = 2.500 \text{ kg}$, $k = 10^4 \text{ N/m}$.

Solução: As respostas no tempo de vagões ferroviários para os dados apresentados podem ser expressas (pelas equações E.10 e E.11 do Exemplo 5.9) como:

$$x_1(t) = 0,2(t + 0,204124 \operatorname{sen} 2,44949t) \quad (\text{E.1})$$

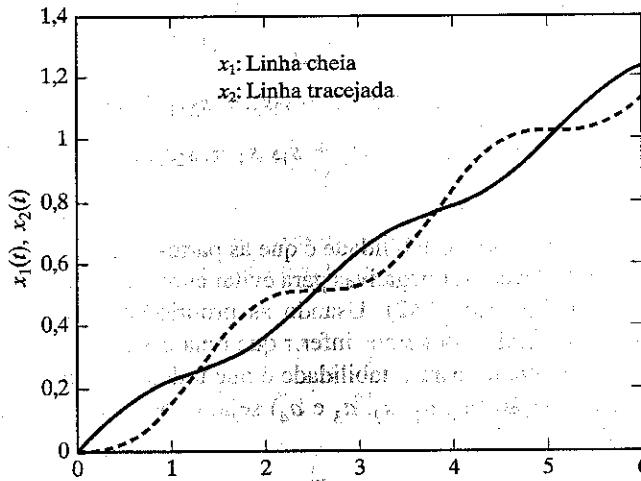
$$x_2(t) = 0,2(t - 0,408248 \operatorname{sen} 2,44949t) \quad (\text{E.2})$$

onde

$$\omega^2 = 10^4 \left(\frac{1}{5.000} + \frac{1}{2.500} \right) \text{ ou } \omega = 2,44949 \text{ rad/s} \quad (\text{E.3})$$

O programa MATLAB para desenhar o gráfico das Equações (E.1) e (E.2) é dado a seguir.

```
% Ex5_13.m
for i=1 : 101
    t(i) = 6 * (i - 1) / 100;
    x1(i) = 0.2 * (t(i) + 0.204124 * sin(2.44949 * t(i)));
    x2(i) = 0.2 * (t(i) - 0.408248 * sin(2.44949 * t(i)));
end
plot (t, x1);
xlabel ('t');
ylabel ('x1(t), x2(t)');
hold on;
plot (t, x2, '--');
gtext ('x1: Solid line');
gtext ('x2: Dotted line');
```



EXEMPLO 5.14

Representação gráfica da resposta de freqüência de um sistema com dois graus de liberdade

Usando MATLAB, construa o gráfico das funções-resposta de freqüência do sistema considerado no Exemplo 5.8.

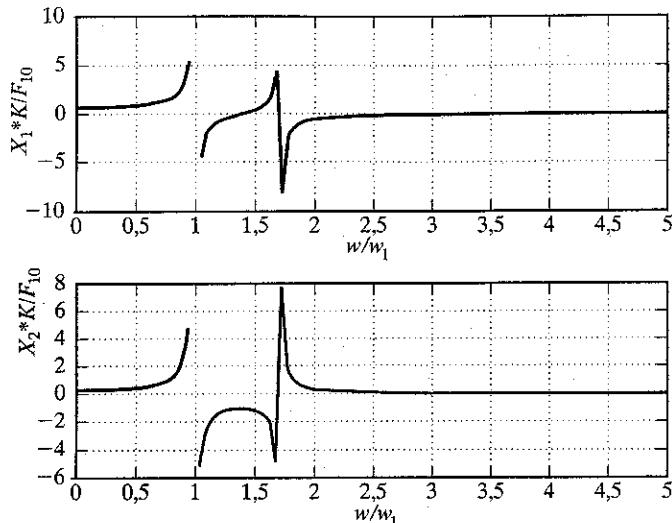
Solução: As funções-resposta de freqüência $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$, dadas pelas equações (E.6) e (E.7) do Exemplo 5.8, são

$$\frac{X_1(\omega)k}{F_{10}} = \frac{(2 - \lambda^2)}{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(1 - \lambda^2)} \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{X_2(\omega)k}{F_{10}} = \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(1 - \lambda^2)} \quad (\text{E.2})$$

onde $\lambda = \omega/\omega_1$ e $\lambda_2 = \omega_2/\omega_1$. Pelos resultados do Exemplo 5.8, constatamos que $\lambda_2 = \omega_2/\omega_1 = (3k/m)/(k/m) = 3$. O programa MATLAB para a representação gráfica das equações (E.1) e (E.2) é dado a seguir.

```
% Ex5_14.m
for i = 1: 101
    w_wl(i) = 5 * (i - 1) / 100; % 0 to 5
    x1(i) = (2-w_wl(i)^2) / ((3-w_wl(i)^2) * (1-w_wl(i)^2));
    x2(i) = 1 / ((3-w_wl(i)^2) * (1-w_wl(i)^2));
end
subplot(211);
plot(w_wl, x1);
xlabel('w/w_l');
ylabel('x_1*K/F_1_0');
grid on;
subplot(212);
plot(w_wl, x2);
xlabel('w/w_l');
ylabel('x_2*K/F_1_0');
grid on
```



EXEMPLO 5.15

Resposta forçada de um sistema com dois graus de liberdade

Determine e represente em gráfico a resposta de tempo de um sistema com dois graus de liberdade com equações de movimento

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \cos 3t \quad (\text{E.1})$$

com as condições iniciais

$$x_1(0) = 0,2, \dot{x}_1(0) = 1,0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0 \quad (\text{E.2})$$

Solução: Para usar o programa MATLAB **ode23**, as duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas, Equação (E.1), devem ser expressas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas. Para tal, introduzimos novas variáveis, y_1, y_2, y_3 e y_4 , como

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \dot{x}_1, \quad y_3 = x_2, \quad y_4 = \dot{x}_2$$

e expressamos a Equação (E.1) como

$$\ddot{y}_1 + 4\dot{y}_1 - y_2 + 5y_1 - 2y_2 = \cos 3t \quad (\text{E.3})$$

ou

$$\ddot{y}_2 = \cos 3t - 4y_2 + y_4 - 5y_1 + 2y_3 \quad (\text{E.4})$$

e

$$2\ddot{x}_2 - \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 2x_1 + 3x_2 = 2 \cos 3t \quad (\text{E.5})$$

ou

$$\dot{y}_4 = \cos 3t + \frac{1}{2}y_2 - y_4 + y_1 - \frac{3}{2}y_3 \quad (\text{E.6})$$

Assim, a Equação (E.1) pode ser enunciada novamente como

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ \cos 3t - 4y_2 + y_4 - 5y_1 + 2y_3 \\ y_4 \\ \cos 3t + \frac{1}{2}y_2 - y_4 + y_1 - \frac{3}{2}y_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

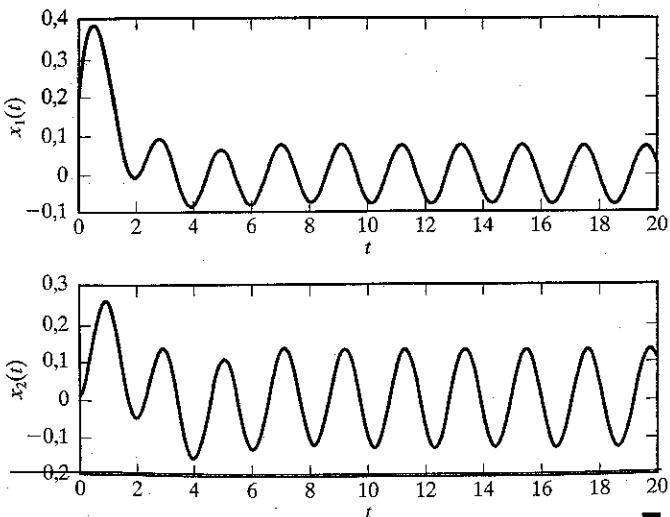
com as condições iniciais

$$\vec{y}(0) = \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \\ y_4(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2 \\ 1,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

O programa MATLAB para resolver as Equações (E.7) com as condições iniciais da Equação (E.8) é dado a seguir.

```
% Ex5_15.m
tspan = [0: 0.01: 20];
y0 = [0.2; 1.0; 0.0; 0.0];
[t, y] = ode23('dfunc5_15', tspan, y0);
subplot(211)
plot(t, y(:, 1));
xlabel('t');
ylabel('x1(t)');
subplot(212)
plot(t, y(:, 3));
xlabel('t');
ylabel('x2(t)');

% dfunc5_15.m
function f = dfunc5_15(t, y)
f = zeros(4, 1);
f(1) = y(2);
f(2) = cos(3*t) - 4*y(2) + y(4) - 5*y(1) + 2*y(3);
f(3) = y(4);
f(4) = cos(3*t) + 0.5*y(2) - y(4) + y(1) - 1.5*y(3);
```



EXEMPLO 5.16

Programa para determinar as raízes de uma equação quârtica

Desenvolva um programa geral, denominado **Program6.m**, para determinar as raízes de uma equação quârtica. Use o programa para determinar as raízes da equação

$$f(x) = x^4 - 8x + 12 = 0$$

Solução: **Program6.m** é desenvolvido para resolver a equação $a1*(x^4) + a2*(x^3) + a3*(x^2) + a4*x + a5 = 0$ com $a1, a2, a3, a4$ e $a5$ como dados de entrada. O programa dá, como saída, os coeficientes polinomiais, bem como as raízes da equação.

```
>> program6
Solution of a quartic equation

Data:
a(1) = 1.000000e+000
a(2) = 0.000000e+000
a(3) = 0.000000e+000
a(4) = -8.000000e+000
a(5) = 1.200000e+001

Roots:

Root No.    Real part      Imaginary part
1           -1.370907e+000   1.827094e+000
2           -1.370907e+000   -1.827094e+000
3           1.370907e+000    6.484572e-001
4           1.370907e+000    -6.484572e-001
```

5.10 Programa em C++

Um programa interativo em C++ denominado **Program4.cpp** é dado para determinar as raízes de uma equação quârtica. O programa requer os coeficientes da equação polinomial como entrada e dá as raízes da equação como saída.

EXEMPLO 5.17

Raízes de uma equação quârtica

Usando **Program6.cpp**, determine as raízes da equação $f(x) = x^4 - 8x + 12 = 0$

Solução: Os dados de entrada devem ser digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são dadas a seguir.

```
Please input the coefficient array a (a[0] is the
coefficient of x^4 and nonzero): 1.0 0.0 0.0 -8.0 12.0
```

SOLUTION OF QUARTIC EQUATION

```
DATA:
A[0] = 1.000000
A[1] = 0.000000
A[2] = 0.000000
A[3] = -8.000000
A[4] = 12.000000
```

ROOTS:

ROOT NO.	REAL PART	IMAGINARY PART
1	-1.37090672	1.82709433
2	-1.37090672	-1.82709433
3	1.37090672	0.64845723
4	1.37090672	-0.64845723

5.11 Programa em FORTRAN

Uma sub-rotina em FORTRAN, denominada **QUART.F**, é dada para a solução de uma equação quârtica. Essa sub-rotina requer os coeficientes da polinomial como entrada e dá as raízes da equação como saída.

EXEMPLO 5.18

Raízes de uma equação quârtica

Usando **QUART.F**, determine as raízes da equação $x^4 - 8x + 12 = 0$

Solução: o programa principal que chama a sub-rotina **QUART.F** e a sub-rotina **QUART.F** são dados como **PROGRAM6.F**. A saída do programa é apresentada a seguir.

SOLUTION OF A QUARTIC EQUATION

```
DATA:
A(1) = 0.100000E+01
A(2) = 0.000000E+00
A(3) = 0.000000E+00
A(4) = -0.800000E+01
A(5) = 0.120000E+02
```

ROOTS:

ROOT NO.	REAL PART	IMAGINARY PART
1	-0.137091E+01	0.182709E+01
2	-0.137091E+01	-0.182709E+01
3	0.137091E+01	0.648457E+00
4	0.137091E+01	-0.648457E+00

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 5.1 H. Sato, Y. Kuroda e M. Sagara, "Development of the finite element method for vibration analysis of machine tool structure and its application", *Proceedings of the Fourteenth International Machine Tool Design and Research Conference*. Londres: Macmillan, 1974, p. 545-552.
- 5.2 F. Koenigsberger e J. Tlusty, *Machine Tool Structures*. Oxford: Pergamon Press, 1970.
- 5.3 C. P. Reddy e S. S. Rao, "Automated optimum design of machine tool structures for static rigidity, natural frequencies and regenerative chatter stability", *Journal of Engineering for Industry*, v. 100, 1978, p. 137-146.
- 5.4 M. S. Hundal, "Effect of damping on impact response of a two degree of freedom system", *Journal of Sound and Vibration*, v. 68, 1980, p. 407-412.
- 5.5 J. A. Linnett, "The effect of rotation on the steady-state response of a spring-mass system under harmonic excitation", *Journal of Sound and Vibration*, v. 35, 1974, p. 1-11.
- 5.6 A. Hurwitz, "On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts", *Selected papers on mathematical trends in control theory*. Nova York: Dover Publications, 1964, p. 70-82.
- 5.7 R. C. Dorf, *Modern control systems*, 6. ed. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1992.
- 5.8 J. P. Den Hartog, *Mechanical vibrations*, 4. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1956.
- 5.9 R. H. Scanlan e R. Rosenbaum, *Introduction to the study of aircraft vibration and flutter*. Nova York: Macmillan, 1951.
- 5.10 L. A. Pipes e L. R. Harvill, *Applied mathematics for engineers and physicists*, 3. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1970.

PERGUNTAS DE REVISÃO

5.1 Dê respostas curtas ao seguinte:

1. Como determinamos o número de graus de liberdade de um sistema de massa concentrada?
2. Defina estes termos: *acoplamento de massa*, *acoplamento de velocidade* e *acoplamento elástico*.
3. A natureza do acoplamento depende das coordenadas usadas?
4. Quantos graus de liberdade tem um aeroplano em vôo, se ele for tratado como:
 - (a) um corpo rígido?
 - (b) um corpo elástico?
5. O que são coordenadas principais? Qual é a sua utilização?
6. Por que as matrizes de massa, amortecimento e rigidez são simétricas?
7. O que é um nó?
8. O que quer dizer acoplamento estático e acoplamento dinâmico? Como podemos eliminar o acoplamento das equações de movimento?
9. Defina a matriz de impedância.
10. Como podemos fazer um sistema vibrar em um de seus modos naturais?
11. O que é um sistema degenerado? Dê dois exemplos de sistemas físicos que são degenerados.
12. Quanto modos degenerados um sistema vibratório pode ter?

5.2 Indique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

1. Os modos normais também podem ser denominados modos principais.
2. As coordenadas generalizadas são linearmente dependentes.
3. Coordenadas principais podem ser consideradas como coordenadas generalizadas.
4. A vibração de um sistema depende do sistema de coordenadas.
5. A natureza do acoplamento depende do sistema de coordenadas.
6. As coordenadas principais evitam o acoplamento estático, bem como o acoplamento dinâmico.
7. A utilização de coordenadas principais ajuda a determinar a resposta do sistema.
8. As matrizes de massa, rigidez e amortecimento de um sistema com dois graus de liberdade são simétricas.
9. As características de um sistema com dois graus de liberdade são usadas no projeto do absorvedor de vibração dinâmica.
10. Sistemas semidefinidos também são conhecidos como sistemas degenerados.
11. Um sistema semidefinito não pode ter freqüências naturais não zero.
12. As coordenadas generalizadas são sempre medidas em relação à posição de equilíbrio do corpo.
13. Durante vibração livre, diferentes graus de liberdade oscilam com ângulos de fase diferentes.
14. Durante vibração livre, diferentes graus de liberdade

oscilam em freqüências diferentes.

15. Durante vibração livre, diferentes graus de liberdade oscilam com amplitudes diferentes.
16. As amplitudes relativas de diferentes graus de liberdade em um sistema com dois graus de liberdade dependem da freqüência natural.
17. Os vetores modais de um sistema denotam os modos normais de vibração.

5.3 Preencha os espaços em branco com a palavra adequada:

1. A vibração livre de um sistema com dois graus de liberdade sob uma excitação inicial arbitrária pode ser determinada pela sobreposição de dois modos de vibração ____.
2. O movimento de um sistema com dois graus de liberdade é descrito por duas coordenadas ____.
3. Quando a freqüência forçante é igual a uma das freqüências naturais do sistema, ocorre um fenômeno conhecido como ____.
4. As amplitudes e ângulos de fase são determinados pelas condições ____ do sistema.
5. Para um sistema torcional, ____ e ____ são análogos às massas e molas lineares, respectivamente, de um sistema massa-mola.
6. A utilização de coordenadas generalizadas diferentes leva a tipos diferentes de ____.
7. Um sistema semidefinito tem no mínimo um movimento de corpo ____.
8. O acoplamento elástico também é conhecido como acoplamento ____.
9. O acoplamento de inércia também é conhecido como acoplamento ____.
10. O acoplamento de amortecimento também é conhecido como acoplamento ____.
11. As equações de movimento de um sistema serão ____ quando são usadas coordenadas principais.
12. O critério de Routh-Hurwitz pode ser usado para investigar a ____ de um sistema.
13. As equações de movimento de um sistema com dois graus de liberdade são não acopladas somente quando as duas massas não estão ligadas ____.
14. A vibração de um sistema sob condições iniciais apenas é denominada vibração ____.
15. A vibração de um sistema sob forças externas é denominada vibração ____.

5.4 Selecione a resposta mais adequada entre as várias opções dadas:

1. Quando um sistema com dois graus de liberdade é sujeito a uma força harmônica, o sistema vibra à:
 - (a) freqüência da força aplicada;
 - (b) freqüência natural menor;
 - (c) freqüência natural maior.
2. O número de graus de liberdade de um sistema vibratório depende do:
 - (a) número de massas;
 - (b) número de massas e dos graus de liberdade de cada uma das massas;

(c) número de coordenadas usadas para descrever a posição de cada massa.

3. Um sistema com dois graus de liberdade tem:
 - (a) um modo normal;
 - (b) dois modos normais;
 - (c) muitos modos normais.
4. As equações de movimento de um sistema com dois graus de liberdade são, em geral:
 - (a) acopladas;
 - (b) não acopladas;
 - (c) lineares.
5. Impedância mecânica $Z_{rs}(i\omega)$ é:
 - (a) $[m_{rs}]\ddot{x} + [c_{rs}]\dot{x} + [k_{rs}]x$
 - (b) $\begin{cases} X_r(i\omega) \\ X_s(i\omega) \end{cases}$
 - (c) $-\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}$
6. A matriz de impedância, $[Z(i\omega)]$, pode ser usada para determinar a solução como:
 - (a) $\ddot{\vec{X}} = [Z(i\omega)]^{-1} \vec{F}_0$
 - (b) $\ddot{\vec{X}} = [Z(i\omega)] \vec{F}_0$
 - (c) $\ddot{\vec{X}} = [Z(i\omega)] \vec{X}_0$
7. A configuração de um sistema vibratório em uma de suas freqüências naturais é denominada:
 - (a) modo natural;
 - (b) freqüência natural;
 - (c) solução.
8. As equações de movimento de um sistema com dois graus de liberdade são, em geral, da forma de:
 - (a) equações algébricas acopladas;
 - (b) equações diferenciais acopladas;
 - (c) equações não acopladas.

- 5.5 Ligue os itens correspondentes nas duas colunas a seguir:
- | | |
|------------------------------|---|
| 1. Acoplamento estático | (a) Somente a matriz de massa é não diagonal. |
| 2. Acoplamento inercial | (b) As matrizes de massa e amortecimento são não diagonais. |
| 3. Acoplamento de velocidade | (c) Somente a matriz de rigidez é não diagonal. |
| 4. Acoplamento dinâmico | (d) Somente a matriz de amortecimento é não diagonal. |
- 5.6 Ligue os dados apresentados na coluna da esquerda com as equações de freqüência dadas na coluna da direita para um sistema com dois graus de liberdade governado pelas equações de movimento:

$$J_0 \ddot{\theta}_1 - 2k_t \theta_1 - k_t \theta_2 = 0$$

$$2 J_0 \ddot{\theta}_2 - k_t \theta_1 + k_t \theta_2 = 0$$

- | | |
|-----------------------|---------------------------------------|
| 1. $J_0 = 1, k_t = 2$ | (a) $32\omega^4 - 20\omega^2 + 1 = 0$ |
| 2. $J_0 = 2, k_t = 1$ | (b) $\omega^4 - 5\omega^2 + 2 = 0$ |
| 3. $J_0 = 2, k_t = 2$ | (c) $\omega^4 - 10\omega^2 + 8 = 0$ |
| 4. $J_0 = 1, k_t = 4$ | (d) $8\omega^4 - 10\omega^2 + 1 = 0$ |
| 5. $J_0 = 4, k_t = 1$ | (e) $2\omega^4 - 5\omega^2 + 1 = 0$ |

PROBLEMAS

Os problemas estão organizados da seguinte maneira:

Problemas	Seção correspondente	Tópico correspondente
5.1 a 5.27	5.3	Vibração livre de sistemas não amortecidos
5.28 a 5.31	5.4	Sistemas torcionais
5.32 a 5.43	5.5	Acoplamento de coordenadas
5.44 a 5.56	5.6	Vibrações forçadas
5.57 a 5.64	5.7	Sistemas semidefinidos
5.65 a 6.66	5.8	Análise de estabilidade
5.67 a 5.69	—	Programas de computador
5.70 a 5.77	5.9	Exemplos usando MATLAB
5.78 a 5.79	5.10	Programas em C++
5.80 a 5.81	5.11	Programas em FORTRAN
5.82 a 5.83	—	Exercícios de projeto

5.1 Determine as freqüências naturais do sistema mostrado na Figura 5.16, com $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $k_1 = k$ e $k_2 = 2k$. Determine a resposta do sistema quando $k = 1.000 \text{ N/m}$, $m = 20 \text{ kg}$ e os valores iniciais dos deslocamentos das massas m_1 e m_2 são 1 e -1, respectivamente.

5.2 Estabeleça as equações diferenciais de movimento para o pêndulo duplo mostrado na Figura 5.17, usando as coordenadas x_1 e x_2 e supondo pequenas amplitudes. Determine as freqüências naturais, as razões entre amplitudes e as localizações dos nós para os dois modos de vibração quando $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l$.

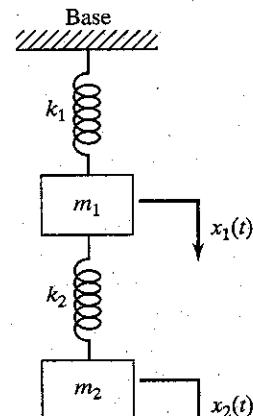


FIGURA 5.16

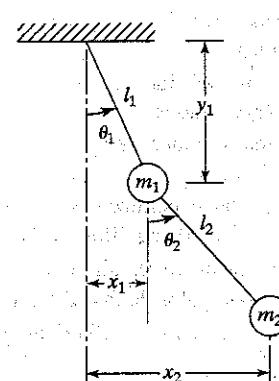


FIGURA 5.17

- 5.3 Determine os modos naturais do sistema mostrado na Figura 5.18 quando $k_1 = k_2 = k_3 = k$.
- 5.4 Uma máquina-ferramenta com massa $m = 1.000 \text{ kg}$ e momento de inércia de massa $J_0 = 300 \text{ kg/m}^2$ está apoiada sobre suportes elásticos, como mostra a Figura 5.19. Se as rigidezes dos suportes forem dadas por $k_1 = 3.000 \text{ N/mm}$ e $k_2 = 2.000 \text{ N/mm}$, e os suportes estiverem localizados a $l_1 = 0,5 \text{ m}$ e $l_2 = 0,8 \text{ m}$, determine as freqüências naturais e formas modais da máquina-ferramenta.
- 5.5 Uma ponte rolante elétrica, composta por uma trave, um carrinho e um cabo, é mostrada na Figura 5.20. A trave tem uma resistência à flexão (EI) de $6 \times 10^{12} \text{ lb.in}^2$ e um vão (L) de 30 ft. O cabo é feito de aço e tem um comprimento (l) de 20 ft. Os pesos do carrinho e da carga içada são 8000 lb e 2000 lb, respectivamente. Determine a área da seção transversal do cabo de modo que a freqüência natural fundamental seja maior do que 20 Hz.

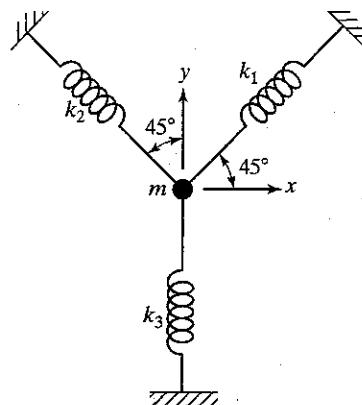


FIGURA 5.18

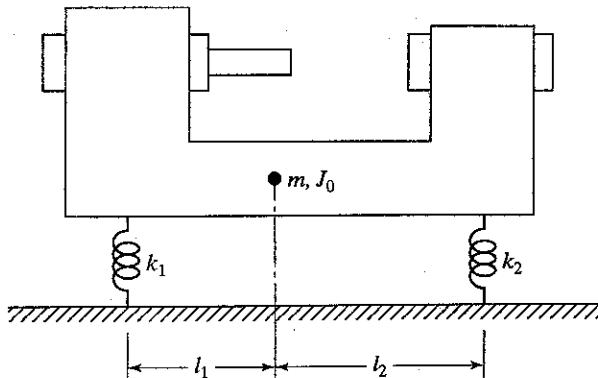


FIGURA 5.19

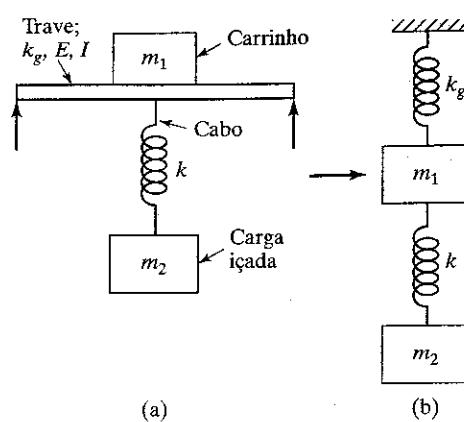


FIGURA 5.20

5.6 Uma ponte rolante elétrica pode ser modelada como indicado na Figura 5.20. Supondo que a trave tenha um vão de 40 m, um momento de inércia de área (I) de $0,02 \text{ m}^4$ e um módulo de elasticidade longitudinal (E) de $2,06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, o carrinho possua uma massa (m_1) de 1.000 kg, a carga que está sendo içada tenha uma massa de 5.000 kg e o cabo que içá a massa (m_2) apresente uma rigidez (k) de $3,0 \times 10^5 \text{ N/m}$, determine as freqüências naturais e formas modais do sistema.

5.7 A furadeira de coluna mostrada na Figura 5.21(a) pode ser modelada como um sistema com dois graus de liberdade como indicado na Figura 5.21(b). Visto que uma força transversal aplicada à massa m_1 ou à massa m_2 faz que ambas as massas sofram deflexão, o sistema exibe acoplamento elástico. As resistências à flexão da coluna são dadas por (ver na Seção 6.4 a definição de coeficientes de influência de rigidez):

$$k_{11} = \frac{768}{7} \frac{EI}{l^3}, \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{240}{7} \frac{EI}{l^3}, \quad k_{22} = \frac{96}{7} \frac{EI}{l^3}$$

Determine as freqüências naturais da furadeira de coluna.

5.8 Uma das rodas e feixe de molas de um automóvel que trafega por uma estrada acidentada são mostrados na Figura 5.22. Por simplicidade, podemos supor que todas as rodas sejam idênticas e o sistema possa ser idealizado como mostra a Figura 5.23. O automóvel tem uma massa $m_1 = 1.000 \text{ kg}$, e o feixe de molas tem uma rigidez total de $k_1 = 400 \text{ kN/m}$. As rodas e eixos têm uma massa $m_2 = 300 \text{ kg}$, e a rigidez dos pneus é $k_2 = 500 \text{ N/m}$. Se a superfície da estrada variar conforme uma senóide com amplitude de $Y = 0,1 \text{ m}$ e um período de $l = 6 \text{ m}$, determine as velocidades críticas do automóvel.

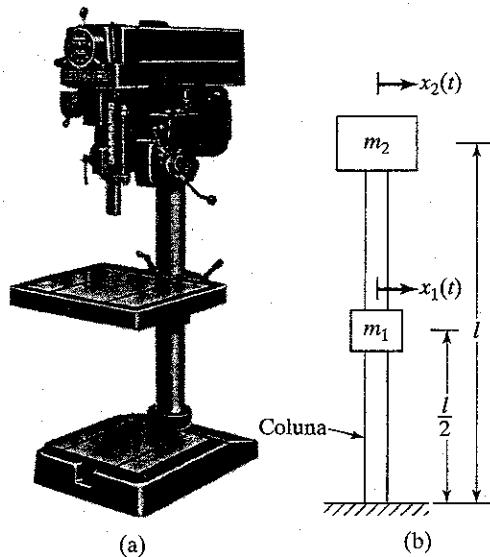


FIGURA 5.21 (Fotografia por cortesia da divisão Atlas-Clausing.)

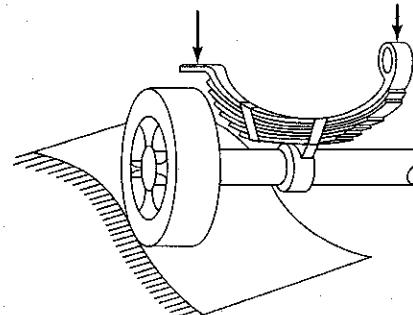


FIGURA 5.22

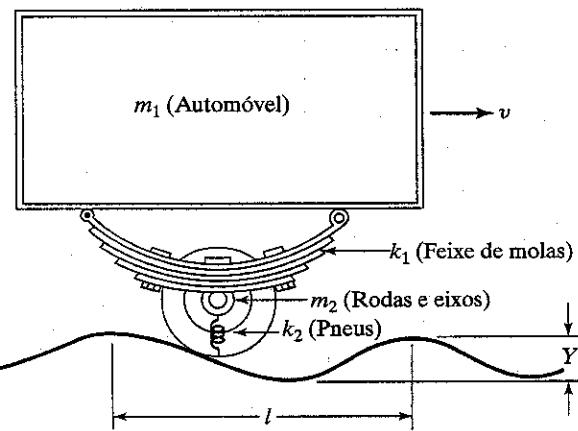


FIGURA 5.23

- 5.9** Derive as equações de movimento do pêndulo duplo mostrado na Figura 5.17, usando as coordenadas θ_1 e θ_2 . Determine também as freqüências naturais e formas modais do sistema para $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l$.
- 5.10** Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 5.16 para $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k$.
- 5.11** Os modos normais de um sistema com dois graus de liberdade são ortogonais se $X^{(1)T}[m] \vec{X}^{(2)} = 0$. Prove que as formas modais do sistema mostrado na Figura 5.3(a) são ortogonais.
- 5.12** Determine as freqüências naturais do sistema mostrado na Figura 5.4 para $k_1 = 300 \text{ N/m}$, $k_2 = 500 \text{ N/m}$, $k_3 = 200 \text{ N/m}$, $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$.
- 5.13** Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 5.16 para $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 2,000 \text{ N/m}$ e $k_2 = 6,000 \text{ N/m}$.
- 5.14** Derive expressões para os deslocamentos das massas na Figura 5.4 quando $m_i = 25 \text{ lb.s}^2/\text{in}$, $i = 1, 2$ e $k_i = 50,000 \text{ lb/in}$, $i = 1, 2, 3$.
- 5.15** Para o sistema mostrado na Figura 5.4, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $k_1 = 2,000 \text{ N/m}$, $k_2 = 1,000 \text{ N/m}$, $k_3 = 3,000 \text{ N/m}$ e uma velocidade inicial de 20 m/s é imprimida à massa m_1 . Determine o movimento resultante das duas massas.
- 5.16** Para o Problema 5.13, calcule $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para as seguintes condições iniciais:
- $x_1(0) = 0,2$, $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$
 - $x_1(0) = 0,2$, $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 5,0$

- 5.17** A estrutura de um edifício de dois andares é modelada como mostra a Figura 5.24. Admitimos que as vigas sejam rígidas e que as colunas tenham resistência à flexão EI_1 e EI_2 com massas desprezíveis. A rigidez de cada coluna pode ser calculada como

$$\frac{24EI_i}{h_i^3}, \quad i = 1, 2$$

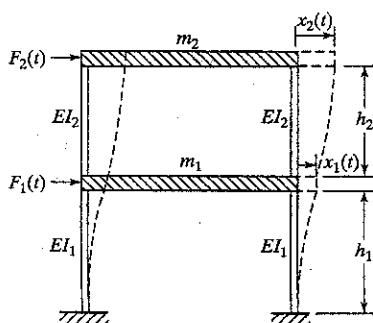


FIGURA 5.24

Para $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$ e $EI_1 = EI_2 = EI$, determine as freqüências naturais e formas modais da estrutura.

- 5.18** A Figura 5.25 mostra um sistema de duas massas ligado a uma corda muito esticada, fixa em ambas as extremidades. Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema para $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l_3 = l$.
- 5.19** Determine os modos normais do edifício de dois andares mostrado na Figura 5.24 quando $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $k_1 = 3k$ e $k_2 = k$ representam a rigidez equivalente total das colunas inferiores e superiores, respectivamente.
- 5.20** Um tambor de içamento, com peso W_1 , é montado na extremidade de uma viga de aço em balanço de espessura t , largura a e comprimento b , como mostra a Figura 5.26. O cabo é feito de aço e tem um diâmetro d e um comprimento de suspensão l . Se a carga pendurada na extremidade do cabo for W_2 , derive expressões para as freqüências naturais do sistema.
- 5.21** Determine as condições iniciais do sistema mostrado na Figura 5.16 para as quais o sistema vibra somente à sua freqüência natural mais baixa para os seguintes dados: $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$.
- 5.22** O sistema mostrado na Figura 5.16 sofre uma perturbação inicial por manter a massa m_1 estacionária e imprimir à massa m_2 um deslocamento para baixo de $0,1 \text{ m}$. Discuta a natureza do movimento resultante do sistema.
- 5.23** Calcule a viga em balanço que suporta o tambor de içamento e o cabo que carrega a carga no Problema 5.20 de modo que as freqüências naturais do sistema sejam maiores que 10 Hz quando $W_1 = 1,000 \text{ lb}$ e $W_2 = 500 \text{ lb}$, $b = 30 \text{ in}$ e $l = 60 \text{ in}$.
- 5.24** Determine a resposta à vibração livre do sistema com dois graus de liberdade mostrado na Figura 5.4, com $n = 1$, $k = 8$ e $m = 2$ para as condições iniciais $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = 0$ e $\dot{x}_2(0) = 1$.

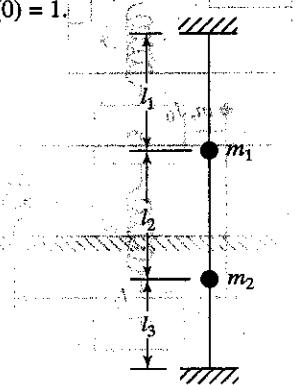


FIGURA 5.25

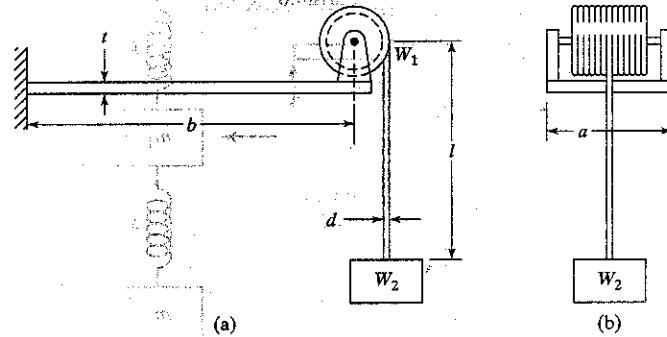


FIGURA 5.26

- 5.25** Determine a resposta à vibração livre do sistema com dois graus de liberdade mostrado na Figura 5.4 com $n = 1$, $k = 8$ e $m = 2$ para as condições iniciais $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.
- 5.26** Usando os resultados do Exemplo 5.1, averigue se as formas modais satisfazem as seguintes relações, conhecidas como relações de ortogonalidade:

$$\vec{X}^{(1)T} \vec{X}^{(2)} = 0, \vec{X}^{(1)T} [m] \vec{X}^{(2)} = 0, \vec{X}^{(1)T} [m] \vec{X}^{(1)} = c_1 = \text{constante}$$

$$\vec{X}^{(2)T} [m] \vec{X}^{(2)} = c_2 = \text{constante}$$

$$\vec{X}^{(1)T} [k] \vec{X}^{(1)} = c_1 \omega_1^2, \vec{X}^{(2)T} [k] \vec{X}^{(2)} = c_2 \omega_2^2$$

- 5.27** Dois pêndulos idênticos, cada um com massa m e comprimento l , estão ligados por uma mola de rigidez k a uma distância d da extremidade fixa, como mostra a Figura 5.27.
- Derive as equações de movimento das duas massas.
 - Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema.
 - Determine a resposta à vibração livre do sistema para as condições iniciais $\theta_1(0) = a$, $\theta_2(0) = 0$, e $\dot{\theta}_1(0) = 0$ e $\dot{\theta}_2(0) = 0$.
 - Determine a condição (ou as condições) sob a qual o sistema exibe um fenômeno de batimento.

- 5.28** Determine as freqüências naturais e modos normais do sistema torcional mostrado na Figura 5.28 para $k_{t2} = 2k_{t1}$ e $J_2 = 2J_1$.

- 5.29** Determine as freqüências naturais do sistema mostrado na Figura 5.29 supondo que o cabo que passa sobre o cilindro não deslize.

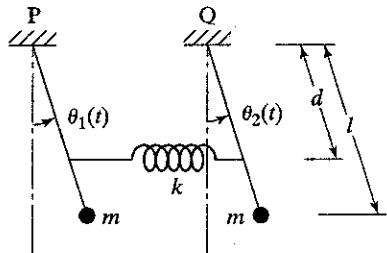


FIGURA 5.27

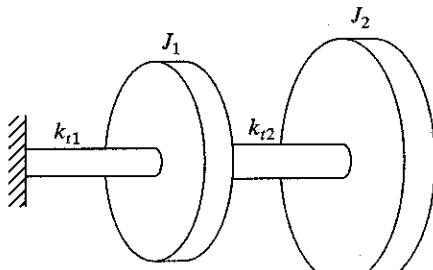


FIGURA 5.28

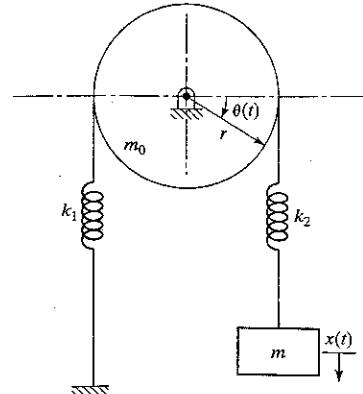


FIGURA 5.29

- 5.30** Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 5.6(a) considerando que $J_1 = J_0$, $J_2 = 2J_0$, $k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_r$.

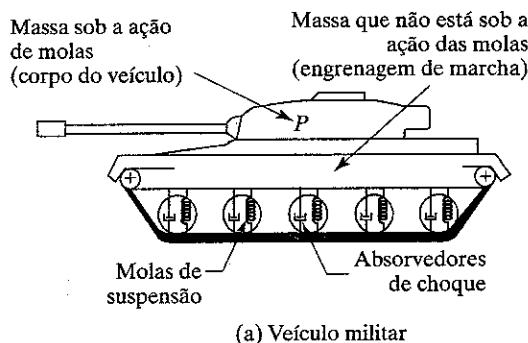
- 5.31** Determine os modos normais do sistema torcional mostrado na Figura 5.7 quando $k_{t1} = k_r$, $k_{t2} = 5k_r$, $J_1 = J_0$ e $J_2 = 5J_0$.

- 5.32** Um modelo de prova simplificado do veículo militar na Figura 5.30(a) é mostrado na Figura 5.30(b). Esse modelo pode ser usado para obter informações sobre os modos de inclinação e instabilidade vertical do veículo. Se a massa total do veículo for m e o momento de inércia de massa em relação a seu CG for J_0 , derive as equações de movimento do veículo usando dois conjuntos de coordenadas diferentes, como indicado na Seção 5.5.

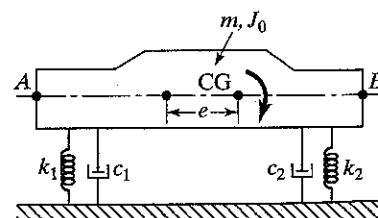
- 5.33** Determine as freqüências naturais e os coeficientes de amplitude do sistema mostrado na Figura 5.31.

- 5.34** Uma haste rígida de massa desprezível e comprimento $2l$ é articulada no ponto central e é obrigada a mover-se no plano vertical por molas e massas, como mostra a Figura 5.32. Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema.

- 5.35** Um aerofólio de massa m está suspenso por uma mola linear de rigidez k e uma mola torcional de rigidez k_t em um túnel aerodinâmico, como mostrado na Figura 5.33.



(a) Veículo militar



(b) Modelo de prova simplificado

FIGURA 5.30

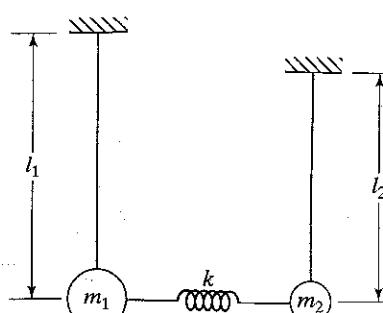


FIGURA 5.31

O CG está localizado a uma distância e do ponto O . O momento de inércia de massa do aerofólio em relação a um eixo que passa pelo ponto O é J_0 . Determine as freqüências naturais do aerofólio.

- 5.36** As juntas de expansão de uma rodovia de leito de concreto, localizadas a intervalos de 15 m, causam uma série de impulsos que afetam os carros que trafegam a uma velocidade constante. Determine as velocidades nas quais é mais provável surgir movimento de inclinação e movimento de instabilidade vertical para o automóvel do Exemplo 5.7.

- 5.37** Considere a ponte rolante elétrica descrita no Problema 5.5 (Figura 5.20). Se os trilhos de ambos os lados da trave tiverem uma superfície que varia conforme uma senóide na direção z (perpendicular à página), como mostra a Figura 5.34, estabeleça as equações e as condições iniciais para determinar a resposta à vibração da carga içada (m) na direção vertical. Considere que a velocidade do guindaste seja 30 ft/min na direção z .

- 5.38** Um automóvel é modelado com uma capacidade de movimentos de inclinação e instabilidade vertical, como mostrado na Figura 5.35. O veículo trafega por uma estrada acidentada cuja superfície varia conforme uma senóide com uma amplitude de 0,05 m e um comprimento de onda de 10 m. Derive as equações de movimento do automóvel para os seguintes dados: massa = 1.000 kg, raio de giração = 0,9 m, $l_1 = 1,0$ m, $l_2 = 1,5$ m, $k_f = 18$ kN/m, $k_r = 22$ kN/m, velocidade = 50 km/h.

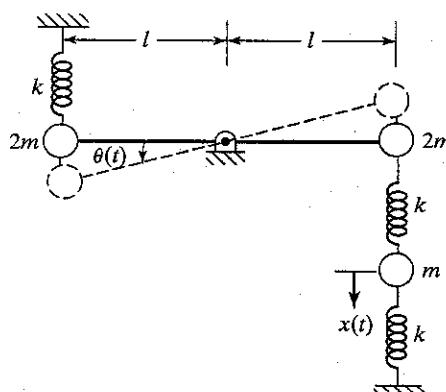


FIGURA 5.32

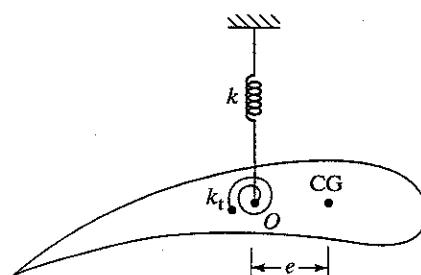


FIGURA 5.33

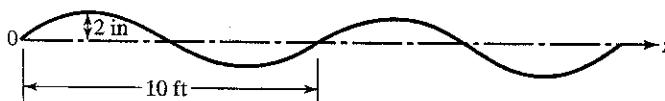


FIGURA 5.34

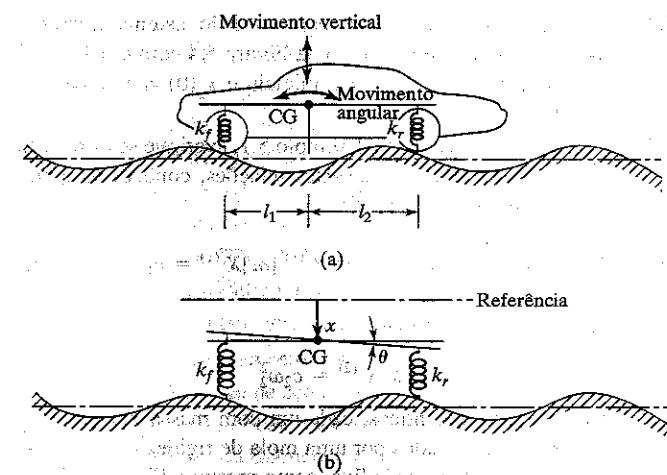


FIGURA 5.35

- 5.39** Um eixo de aço com diâmetro de 2 in está apoiado sobre dois mancais e suporta uma polia e um motor, como mostrado na Figura 5.36. Os pesos da polia e do motor são 200 lb e 500 lb, respectivamente. Uma carga transversal aplicada em qualquer ponto ao longo do comprimento do eixo resulta na deflexão de todos os pontos do eixo e, por consequência, o sistema exibe acoplamento elástico. Os coeficientes de rigidez são dados por (a Secção 6.4 apresenta a definição de coeficientes de influência de rigidez):

$$k_{11} = \frac{1.296 EI}{5 l^3}, \quad k_{12} = k_{21} = \frac{324 EI}{5 l^3}, \quad k_{22} = \frac{216 EI}{5 l^3}$$

Determine as freqüências naturais do sistema em vibração por flexão para $l = 90$ in.

- 5.40** Um modelo simplificado de uma *mountain bike* com seu condutor é mostrado na Figura 5.37. Discuta métodos para determinar a resposta vibratória da bicicleta provocada pela irregularidade do terreno usando um modelo com dois graus de liberdade.

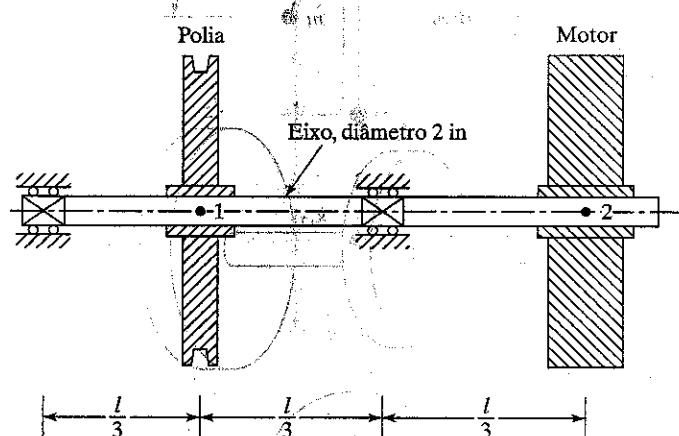


FIGURA 5.36

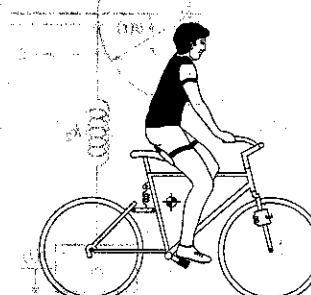


FIGURA 5.37

- 5.41** Uma barra rígida uniforme de comprimento l e massa m está apoiada sobre duas molas e é sujeita a uma força $F(t) = F_0 \sin \omega t$, como mostrado na Figura 5.38:
- Derive as equações de movimento da barra para pequenos deslocamentos.
 - Discuta a natureza do acoplamento no sistema.
- 5.42** Um *trailer* de massa M , preso a um muro por uma mola de rigidez k e um amortecedor com coeficiente de amortecimento c , desliza sobre uma superfície sem atrito, como mostra a Figura 5.39. Uma barra rígida uniforme, presa ao *trailer* por um pino, pode oscilar em relação ao ponto de articulação, O . Derive as equações de movimento do sistema sob as forças aplicadas $F(t)$ e $M_i(t)$ indicadas na Figura 5.39.
- 5.43** Um *trailer* de massa M está preso a um muro por meio de uma mola de rigidez k_1 e pode mover-se sobre uma superfície horizontal sem atrito, como mostra a Figura 5.40. Um cilindro uniforme de massa m , preso à parede do *trailer* por uma mola de rigidez k_2 , pode rolar no chão do *trailer* sem deslizar. Derive as equações de movimento do sistema e discuta a natureza do acoplamento presente no sistema.

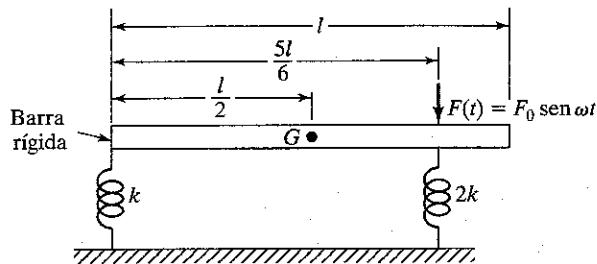


FIGURA 5.38

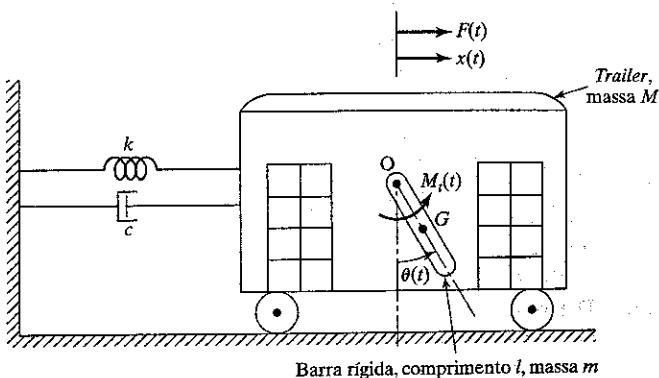


FIGURA 5.39

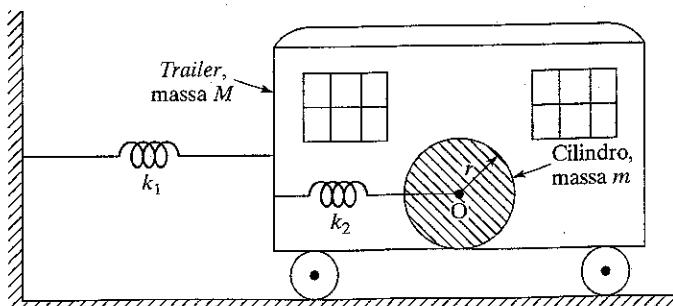


FIGURA 5.40

- 5.44** Os pesos do martelo-pilão, suporte, bigorna (juntamente com a peça de trabalho) e bloco de base de um martelo de forjar (Figura 5.41) são 5.000 lb, 40.000 lb, 60.000 lb e 140.000 lb, respectivamente. A rigidez do coxim elástico colo-cado entre a bigorna e o bloco de base e do isolamento localizado embaixo do bloco da base (incluindo a elasticidade do solo) são 6×10^6 lb/in e 3×10^6 lb/in, respectivamente. Se a velocidade do martelo-pilão antes de atingir a bigorna for 15 ft/s, determine:

- as freqüências naturais do sistema;
- as magnitudes de deslocamento da bigorna e do bloco de base. Considere o coeficiente de restituição como 0,5 e o amortecimento desprezível no sistema.

- 5.45** Determine:

- as freqüências naturais do sistema;
 - as respostas da bigorna e do bloco de base do martelo de forjar exposto na Figura 5.41, quando o histórico de tempo da força aplicada à bigorna é o mostrado na Figura 5.42. Considere os seguintes dados:
- Massa da bigorna e estrutura = 200 Mg
Massa do bloco de base = 250 Mg
Rigidez do coxim elástico = 150 MN/m
Rigidez do solo = 75 MN/m
 $F_0 = 10^5$ N e $T = 0,5$ s

- 5.46** Derive as equações de movimento para a vibração livre do sistema mostrado na Figura 5.43. Considerando a solução como $x_i(t) = C_i e^{st}$, $i = 1, 2$, expresse a equação característica na forma

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

Discuta a natureza das possíveis soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

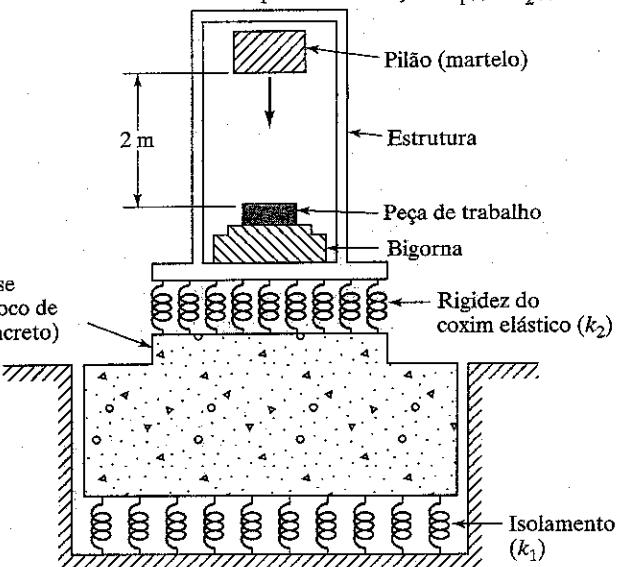


FIGURA 5.41

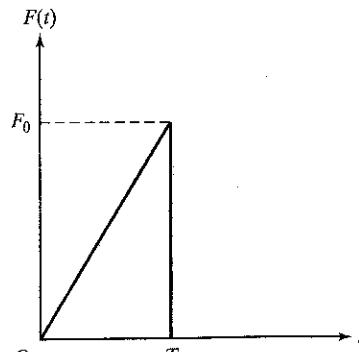


FIGURA 5.42

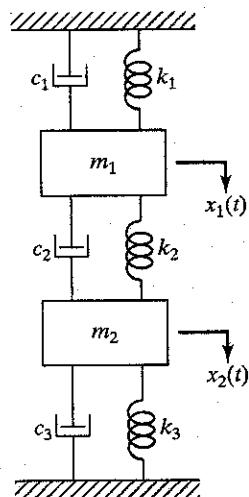


FIGURA 5.43

- 5.47 Determine os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ na Figura 5.43 para $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 10.000 \text{ N/m}$ e $c_1 = c_2 = c_3 = 2.000 \text{ N.s/m}$ usando as condições iniciais $x_1(0) = 0,2 \text{ m}$, $x_2(0) = 0,1 \text{ m}$ e $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

- 5.48 Uma bomba centrífuga, com um desbalanceamento me , está apoiada sobre uma fundação rígida de massa m_2 por meio de molas isoladoras de rigidez k , como mostrado na Figura 5.44. Se a rigidez e o amortecimento do solo forem k_2 e c_2 , determine os deslocamentos da bomba e da base para os seguintes dados: $mg = 0,5 \text{ lb}$, $e = 6 \text{ in}$, $m_1g = 800 \text{ lb}$, $k_1 = 2.000 \text{ lb/in}$, $m_2g = 2.000 \text{ lb}$, $k_2 = 1.000 \text{ lb/in}$, $c_2 = 200 \text{ lb.s/in}$ e velocidade da bomba = 1.200 rpm.

- 5.49 Um motor alternativo de massa m_1 está montado sobre uma viga fixa nas duas extremidades de comprimento l , largura a , espessura t e módulo de Young E , como mostrado na Figura 5.45. Um sistema massa-mola (k_2 , m_2) está suspenso da viga como indicado na figura. Determine a relação entre m_2 e k_2 que não resulta em nenhum regime permanente de vibração da viga quando uma força harmônica $F_1(t) = F_0 \cos \omega t$ é desenvolvida no motor durante sua operação.³

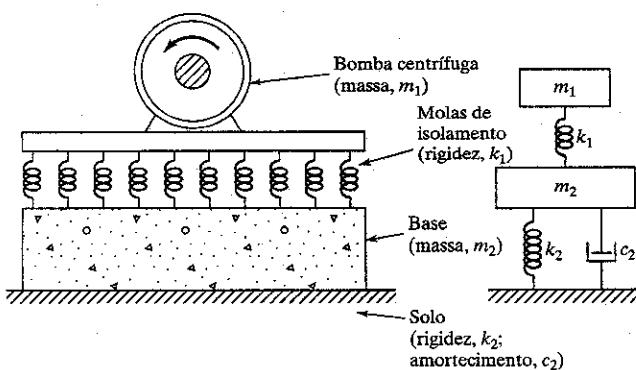


FIGURA 5.44

³ O sistema massa-mola (k_2 , m_2) acrescentado para tornar a amplitude da primeira massa igual a zero é conhecido como "absorvedor de vibração". Uma discussão detalhada de absorvedores de vibração é dada na Seção 9.11.

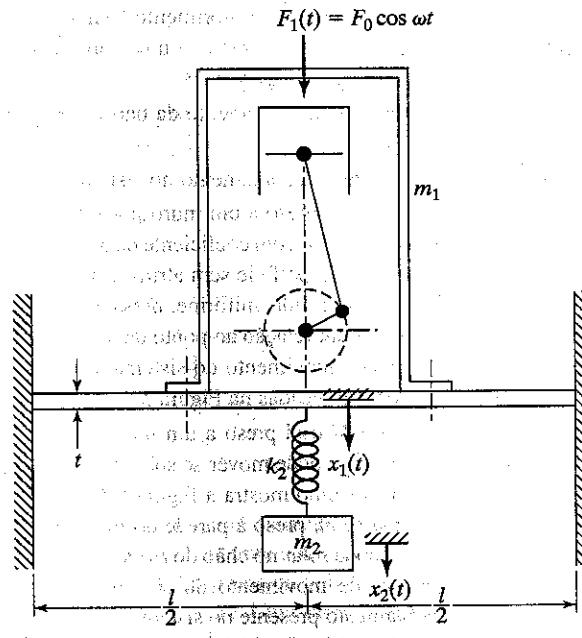


FIGURA 5.45

- 5.50 Determine a resposta em regime permanente do sistema mostrado na Figura 5.16 usando o método da impedância mecânica, quando a massa m_1 está sujeita à força $F(t) = F_0 \sin \omega t$ em m_1 na direção de $x_1(t)$.
- 5.51 Determine a resposta em regime permanente do sistema mostrado na Figura 5.16 quando a base está sujeita a um deslocamento $y(t) = Y_0 \cos \omega t$.
- 5.52 A massa m_1 do sistema com dois graus de liberdade mostrado na Figura 5.16 está sujeita a uma força $F_0 \cos \omega t$. Considerando que o amortecimento do ar circundante é equivalente a $c = 200 \text{ N.s/m}$, determine a resposta em regime permanente das duas massas. Suponha que $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = 500 \text{ N/m}$ e $\omega = 1 \text{ rad/s}$.
- 5.53 Determine a vibração em regime permanente do sistema mostrado na Figura 5.3(a), admitindo que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $F_1(t) = F_{10} \cos \omega t$ e $F_2(t) = F_{20} \cos \omega t$.
- 5.54 No sistema mostrado na Figura 5.16, a massa m_1 é excitada por uma força harmônica cujo valor máximo e freqüência são 50 N e 2 Hz, respectivamente. Determine a amplitude forçada de cada massa para $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, $k_1 = 8.000 \text{ N/m}$ e $k_2 = 2.000 \text{ N/m}$.
- 5.55 Determine a resposta das duas massas da estrutura de edifício mostrada na Figura 5.24 sob o deslocamento do solo $y(t) = 0,2 \sin \pi t \text{ m}$. Considere a rigidez equivalente das colunas inferiores e superiores como 800 N/m e 600 N/m, respectivamente, é $m_1 = m_2 = 50 \text{ kg}$.
- 5.56 Determine a resposta à vibração forçada do sistema mostrado na Figura 5.13 quando $F_1(t)$ é uma força escalonada de magnitude 5 N usando o método da transformada de Laplace. Considere $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, $m = 1 \text{ kg}$ e $k = 100 \text{ N/m}$.
- 5.57 Determine as equações de movimento e as freqüências naturais do sistema mostrado na Figura 5.46.

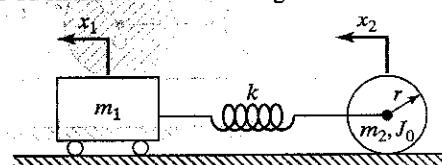


FIGURA 5.46

- 5.58** Dois cilindros circulares idênticos, de raio r e massa m cada, estão ligados por uma mola como mostrado na Figura 5.47. Determine as freqüências naturais de oscilação do sistema.

5.59 As equações diferenciais de movimento para um sistema com dois graus de liberdade são dadas por:

$$\begin{aligned} a_1 \ddot{x}_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2 &= 0 \\ a_2 \ddot{x}_2 + b_2 x_1 + c_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Derive a condição a ser satisfeita para o sistema ser degenerado.

- 5.60** Determine os deslocamentos angulares $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ do sistema mostrado na Figura 5.48 para as condições iniciais $\theta_1(t = 0) = \theta_1(0)$, $\theta_2(t = 0) = \theta_2(0)$ e $\dot{\theta}_1(t = 0) = \dot{\theta}_2(t = 0) = 0$.

5.61 Determine os modos normais do sistema mostrado na Figura 5.7 com $k_{11} = 0$. Mostre que o sistema com $k_{11} = 0$ pode ser tratado como um sistema com um grau de liberdade usando a coordenada $\alpha = \theta_1 - \theta_2$.

5.62 Uma turbina está conectada a um gerador elétrico por meio de engrenagens, como mostrado na Figura 5.49. Os momentos de inércia de massa da turbina, gerador, engrenagem 1 e engrenagem 2 são dados, respectivamente, por 3.000, 2.000, 500 e 1.000 kg.m². Os eixos 1 e 2 são feitos de aço e têm 30 cm e 10 cm de diâmetro e 2 cm e 1,0 m de comprimento, respectivamente. Determine as freqüências naturais do sistema.

5.63 Um balão de ar quente de massa m é usado para içar uma carga, Mg , por meio de 12 cabos elásticos igualmente espaçados com rigidez k . (Figura 5.50). Determine as freqüências naturais de vibração do balão na direção vertical. Cite as premissas adotadas em sua solução e discuta sua validade.

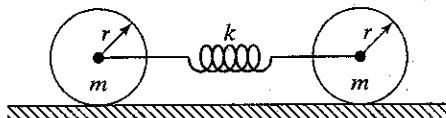


FIGURA 5.47

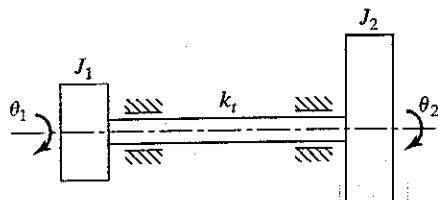


FIGURA 5.48

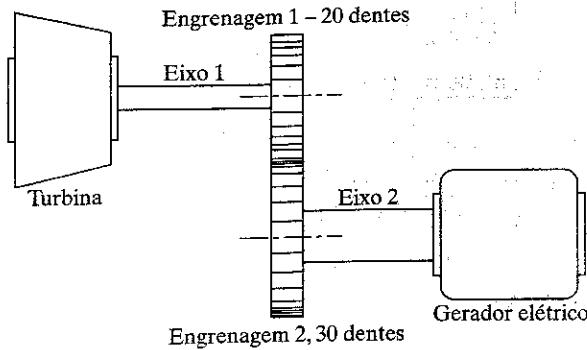


FIGURA 5.49

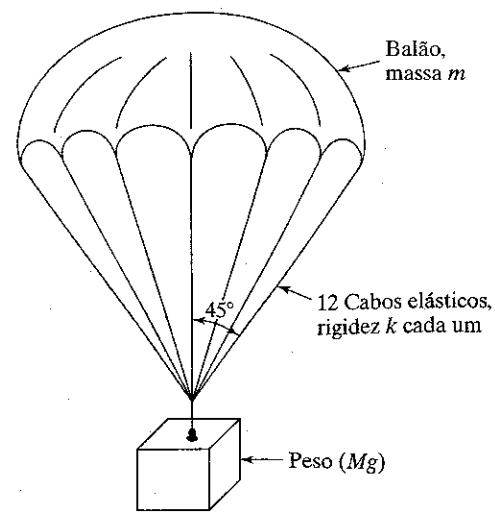


FIGURA 5.50

- 5.64** Uma turbina de momento de inércia de massa de 4 lb.in/s^2 está conectada a um gerador elétrico de momento de inércia de massa de 2 lb.in/s^2 por um eixo oco de aço com diâmetro interno de 1 in, diâmetro externo de 2 in e comprimento de 15 in (semelhante ao sistema na Figura 5.15b). Se a turbina for parada repentinamente enquanto estiver desenvolvendo uma potência de 100 cavalos-vapor a uma velocidade de 6.000 rpm, o torque transmitido cairá a zero. Determine os deslocamentos angulares resultantes da turbina e do gerador. Considere o amortecimento desprezível no sistema.

5.65 As vibrações transitórias do sistema de transmissão desenvolvidas durante a aplicação de uma embreagem de cone (fricção) resultam em um ruído desagradável. Para reduzir o ruído, um volante com um momento de inércia de massa J_2 é acoplado ao sistema de transmissão por meio de uma mola torcional k_{12} e um amortecedor torcional viscoso c_{12} , como mostrado na Figura 5.51. Se o momento de inércia de massa da embreagem de cone for j_1 e a rigidez e a constante de amortecimento do sistema de transmissão forem dadas por k_{11} e c_{11} , respectivamente, derive as relações que devem ser satisfeitas para a operação estável do sistema.

5.66 Uma barra rígida uniforme de massa m está presa à parede de um *trailer* por uma mola de rigidez k (Figura 5.52). O *trailer* tem uma massa de $5m$, está ligado a uma mola de rigidez $2k$ e move-se sobre uma superfície sem atrito. Derive as condições necessárias para a estabilidade do sistema.

5.67 Determine a resposta do sistema mostrado na Figura 5.3(a) usando um procedimento numérico quando $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = k$, $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $F_2(t) = 0$, e $F_1(t)$ é um pulso retangular de magnitude 500 N e duração 0,5 s. Considere $m = 10 \text{ kg}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $k = 2.000 \text{ N/m}$ e condições iniciais zero.

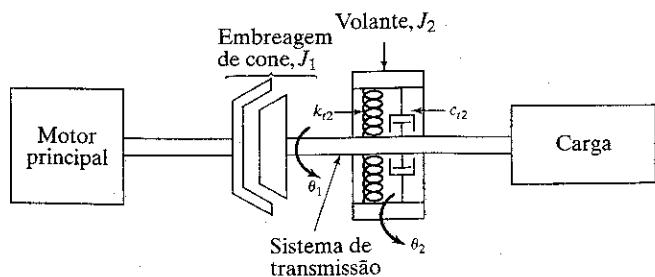


FIGURA 5.51

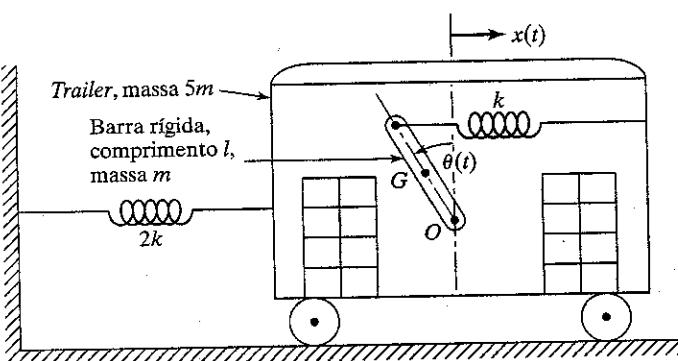


FIGURE 5.52

- 5.68** (a) Determine as raízes da equação de freqüência do sistema mostrado na Figura 5.3 usando a sub-rotina QUART.F com os seguintes dados: $m_1 = m_2 = 0,2 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{in}$, $k_1 = k_2 = 18 \text{ lb/in}$, $k_3 = 0$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.
 (b) Se as condições iniciais forem $x_1(0) = x_2(0) = 2 \text{ in}$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, determine os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das massas.
- 5.69** Escreva um programa de computador para determinar a resposta em regime permanente de um sistema com dois graus de liberdade sob a excitação harmônica $F_j(t) = F_{j0}e^{i\omega t}$ e $j = 1, 2$, usando as Equações (5.29) e (5.35). Use esse programa para determinar a resposta de um sistema com $m_{11} = m_{22} = 0,1 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{in}$, $m_{12} = 0$, $c_{11} = 1,0 \text{ lb}\cdot\text{s}/\text{in}$, $c_{12} = c_{22} = 0$, $k_{11} = 40 \text{ lb/in}$, $k_{22} = 20 \text{ lb/in}$, $k_{12} = -20 \text{ lb/in}$, $F_{10} = 1 \text{ lb}$, $F_{20} = 2 \text{ lb}$ e $\omega = 5 \text{ rad/s}$.
- 5.70** Determine e construa um gráfico da resposta à vibração livre do sistema mostrado na Figura 5.16 para os seguintes dados: $k_1 = 1.000 \text{ N/m}$, $k_2 = 500 \text{ N/m}$, $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$.
- 5.71** Determine e construa um gráfico da resposta à vibração livre do sistema mostrado na Figura 5.16 para os seguintes dados: $k_1 = 1.000 \text{ N/m}$, $k_2 = 500 \text{ N/m}$, $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = -2$.
- 5.72** Resolva o seguinte problema de autovalor usando MATLAB:

$$\begin{bmatrix} 25 \times 10^6 & -5 \times 10^6 \\ -5 \times 10^6 & 5 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 10.000 & 0 \\ 0 & 5.000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

- 5.73** Determine e construa um gráfico da resposta do seguinte sistema com dois graus de liberdade usando MATLAB:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \sin 3t \\ 5 \cos 5t \end{Bmatrix}$$

As condições iniciais são $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$ e $\dot{x}_2(0) = 0$.

- 5.74** Resolva o Problema 5.67 usando MATLAB. Utilize a função MATLAB stepfun para o pulso retangular.
5.75 Resolva o Problema 5.68(a) usando MATLAB.

- 5.76** Resolva o Problema 5.69 usando MATLAB. Construa o gráfico da resposta em regime permanente das massas m_{11} e m_{22} .
- 5.77** Determine as raízes da equação $x^4 - 32x^3 + 244x^2 - 20x - 1.200 = 0$ usando MATLAB.
- 5.78** Resolva o Problema 5.68(a) usando Program6.cpp.
- 5.79** Determine as raízes da equação quártica dada no Problema 5.77 usando Program6.cpp.
- 5.80** Resolva o Problema 5.68(a) usando PROGRAM6.F.
- 5.81** Determine as raízes da equação quártica dada no Problema 5.77 usando PROGRAM6.F.

EXERCÍCIOS DE PROJETO

- 5.82** Uma polia cônica escalonada acionada por correia (Figura 5.53) é usada para mudar as velocidades de corte de um torno. A velocidade do eixo de transmissão é de 350 rpm, e as velocidades do eixo de saída são 150, 250, 450 e 750 rpm. Os diâmetros das polias de transmissão e acionada, correspondentes a 150 rpm de velocidade de saída, são 250 mm e 1.000 mm, respectivamente. A distância entre os centros dos eixos é 5 m. Os momentos de inércia de massa das polias cônicas de transmissão e acionada são $0,1$ e $0,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, respectivamente. Determine a área da seção transversal da correia de modo a evitar ressonância com qualquer velocidade de entrada/saída do sistema. Considere o módulo de Young do material da correia como 10^{10} N/m^2 .
- 5.83** As massas do pilão, suporte (juntamente com a bigorna e a peça de trabalho) e bloco de concreto do martelo de forjar mostrado na Figura 5.41 são 1.000 kg, 5.000 kg e 25.000 kg, respectivamente. O pilão cai sobre a peça de trabalho de uma altura de 2 m. Calcule molas adequadas k_1 e k_2 para as seguintes condições:
 (a) O impacto é inelástico, isto é, o pilão não ricocheteará após atingir a peça.
 (b) As freqüências naturais de vibração do martelo de forjar devem ser maiores que 5 Hz.
 (c) As tensões das molas devem ser menores que a tensão de escoamento do material com um fator de segurança de no mínimo 1,5. Considere que a elasticidade do solo seja desprezível.

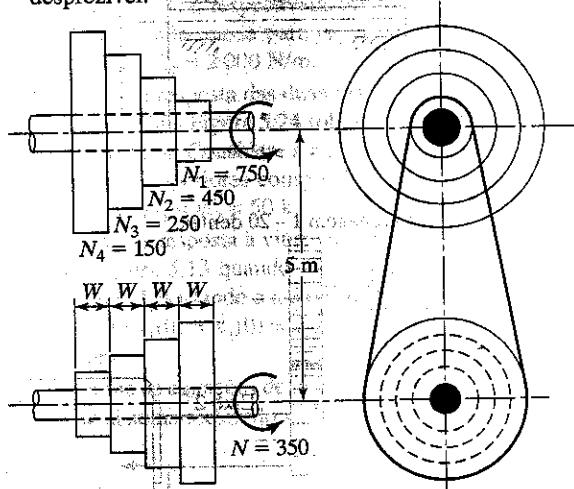
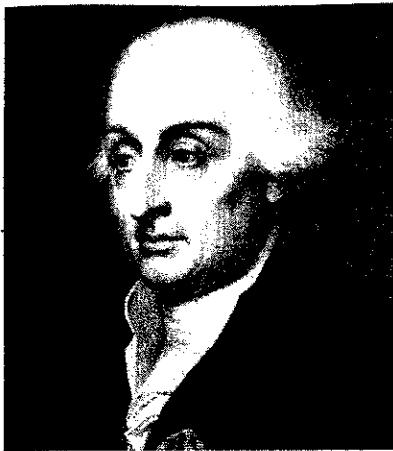


FIGURA 5.53



Joseph Louis Lagrange (1736–1813), matemático, nascido na Itália, famoso por seu trabalho em matemática teórica, tornou-se, em 1755, professor de matemática na Escola de Artilharia em Turim. A obra-prima de Lagrange, sua *Méchanique* (Mecânica), contém o que hoje se conhece como 'equações de Lagrange', muito úteis no estudo de vibrações. Seu trabalho na área de elasticidade e resistência de materiais, no qual considerou a força e a deflexão de escoras, é menos conhecido. (Foto por cortesia de Dirk J. Struik, *A Concise history of mathematics*, 2. ed. Nova York: Dover Publications, 1948.)

CAPÍTULO SEIS

Sistemas com vários graus de liberdade

6.1 Introdução

Como afirmamos no Capítulo 1, os sistemas de engenharia, em sua maioria, são contínuos e têm um número infinito de graus de liberdade. A análise da vibração de sistemas contínuos requer a solução de equações diferenciais parciais, o que é bastante difícil. Na verdade, não existem soluções analíticas para muitas equações diferenciais parciais. Por outro lado, a análise de um com muitos graus de liberdade requer a solução de um conjunto de equações diferenciais ordinárias, o que é relativamente simples. Por consequência, para simplicidade da análise, sistemas contínuos são frequentemente aproximados como sistemas com vários graus de liberdade.

Todos os conceitos apresentados no capítulo anterior podem ser aplicados diretamente a casos de sistemas com vários graus de liberdade. Por exemplo, há uma única equação de movimento para cada grau de liberdade; se forem usadas coordenadas generalizadas, há uma única coordenada generalizada para cada grau de liberdade. As equações de movimento podem ser obtidas da segunda lei do movimento de Newton ou com a utilização dos coeficientes de influência definidos na Seção 6.4. Todavia, costuma ser mais conveniente deduzir as equações de movimento de um sistema com muitos graus de liberdade utilizando equações de Lagrange.

Há n freqüências naturais, cada uma associada à sua própria forma modal quando um sistema tem n graus de liberdade. O método para determinar as freqüências naturais pela equação característica obtida igualando o determinante a zero também aplica-se a esses sistemas. Contudo, à medida que o número de graus de liberdade aumenta, a solução da equação característica torna-se mais complexa. As formas modais exibem uma propriedade conhecida como *ortogonalidade*, que, muitas vezes, permite-nos simplificar a análise de sistemas com vários graus de liberdade.

6.2 Modelagem de sistemas contínuos como sistemas com vários graus de liberdade

Há alguns métodos diferentes que podem ser usados para aproximar um sistema contínuo como um sistema com vários graus de liberdade. Um método simples envolve substituir a massa ou a inércia distribuída do sistema por um número finito de massas concentradas ou corpos rígidos.

Entende-se que as massas concentradas estejam ligadas por elementos elásticos e amortecedores desprovidos de massa. Coordenadas lineares (ou angulares) são usadas para descrever o movimento das massas concentradas (ou corpos rígidos). Tais modelos são denominados sistemas de parâmetros concentrados ou sistemas de massas concentradas ou sistemas de massas discretas. O número mínimo de coordenadas necessárias para descrever o movimento das massas concentradas e corpos rígidos define o número de graus de liberdade do sistema. Naturalmente, quanto maior o número de massas concentradas usadas no modelo, maior será a precisão da análise resultante.

Alguns problemas indicam automaticamente o tipo de modelo de parâmetro concentrado a ser usado. Por exemplo, o edifício de três andares mostrado na Figura 6.1(a) sugere automaticamente a utilização de um modelo com três massas concentradas, como indicado na Figura 6.1(b). Nesse modelo, considera-se que a inércia do sistema esteja concentrada como três massas pontuais no nível dos pisos e que as elasticidades das colunas sejam substituídas pelas molas. De maneira semelhante, a furadeira radial mostrada na Figura 6.2(a) pode ser modelada por quatro massas concentradas e quatro elementos de mola (viga elástica), como mostra a Figura 6.2(b).

Outro método muito conhecido de aproximar um sistema contínuo com um sistema com vários graus de liberdade

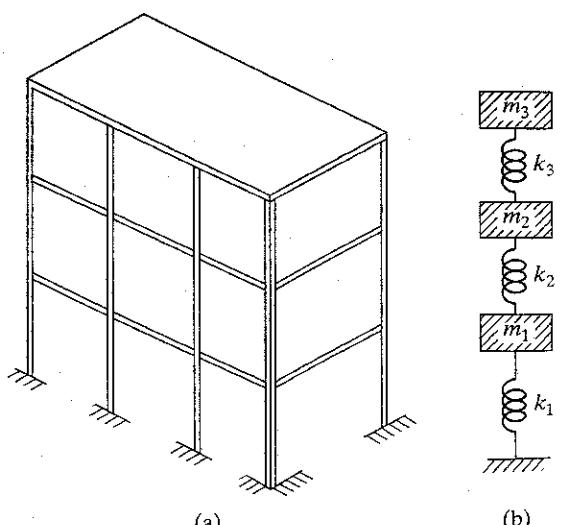


FIGURA 6.1 Edifício com três andares.

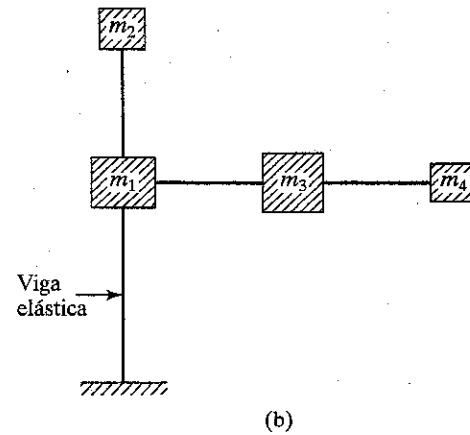
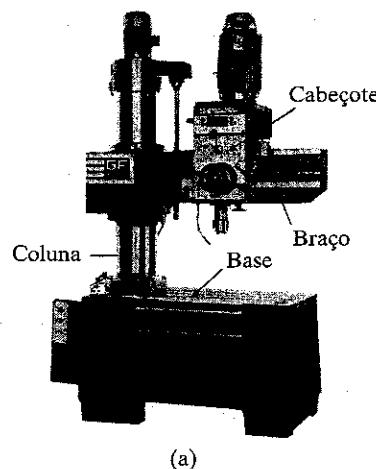


FIGURA 6.2 Furadeira radial. (Foto por cortesia de South Bend Lathe Corp.)

envolve substituir a geometria do sistema por um grande número de pequenos elementos. Considerando uma solução simples dentro de cada elemento, os princípios de compatibilidade e equilíbrio são usados para determinar uma solução aproximada para o sistema original. Esse método, conhecido como o método do elemento finito, é examinado detalhadamente no Capítulo 12.

6.3 Utilização da segunda lei de Newton para deduzir equações de movimento

O procedimento descrito a seguir pode ser adotado para deduzir as equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade utilizando a segunda lei do movimento de Newton:

- Determine coordenadas adequadas para descrever as posições das várias massas pontuais e corpos rígidos no sistema. Considere direções positivas adequadas para os deslocamentos, velocidades e acelerações das massas e corpos rígidos.
- Determine a configuração do sistema em equilíbrio estático e meça os deslocamentos das massas e corpos rígidos em relação às suas respectivas posições em equilíbrio estático.
- Desenhe o diagrama de corpo livre de cada massa ou corpo rígido no sistema. Indique a mola, o amortecimento e as forças externas que agem sobre cada massa ou corpo rígido quando são imprimidos deslocamento e velocidade positivos à massa ou corpo rígido.
- Aplique a segunda lei do movimento de Newton à cada massa ou corpo rígido mostrado pelo diagrama de corpo livre como

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_j F_{ij} \quad (\text{para a massa } m_i) \quad (6.1)$$

ou

$$J_i \ddot{\theta}_i = \sum_j M_{ij} \quad (\text{para corpo rígido de inércia } J_i) \quad (6.2)$$

onde $\sum_j F_{ij}$ denota a soma de todas as forças que agem sobre a massa m_i e $\sum_j M_{ij}$ indica a soma dos momentos de todas as forças (em relação a um eixo adequado) que agem sobre o corpo rígido de momento de inércia de massa J_i .

O procedimento é ilustrado nos exemplos apresentados a seguir.

EXEMPLO 6.1

Equações de movimento de um sistema massa-mola-amortecedor

Deduza as equações de movimento do sistema massa-mola-amortecedor mostrado na Figura 6.3(a).

Solução:

Abordagem: Desenhe diagramas de corpo livre de massas e aplique a segunda lei do movimento de Newton. As coordenadas que descrevem as posições das massas $x_i(t)$ são medidas em relação às suas respectivas posições em equilíbrio estático, como indicado na Figura 6.3(a). O diagrama de corpo livre de uma massa interior típica, m_i , é mostrado na Figura 6.3(b) juntamente com as direções positivas consideradas para seu deslocamento, velocidade e aceleração. A aplicação da segunda lei do movimento de Newton à massa m_i dá

$$m_i \ddot{x}_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + F_i; i = 2, 3, \dots, n-1$$

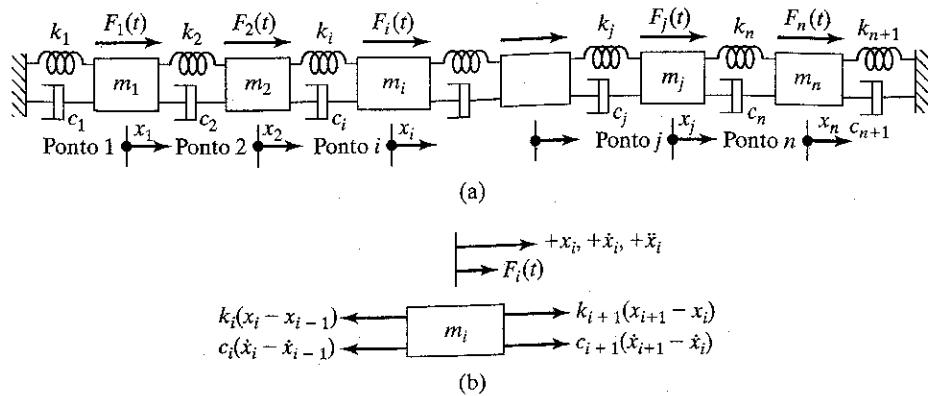
ou

$$m_i \ddot{x}_i - c_i \dot{x}_{i-1} + (c_i + c_{i+1}) \dot{x}_i - c_{i+1} \dot{x}_{i+1} - k_i x_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) x_i - k_{i+1} x_{i+1} = F_i; i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (E.1)$$

As equações de movimento das massas m_1 e m_n podem ser deduzidas da Equação (E.1) fazendo $i = 1$ juntamente com $x_0 = 0$ e $i = n$ juntamente com $x_{n+1} = 0$, respectivamente:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F \quad (E.2)$$

$$m_n \ddot{x}_n - c_n \dot{x}_{n-1} + (c_n + c_{n+1}) \dot{x}_n - k_n x_{n-1} + (k_n + k_{n+1}) x_n = F_n \quad (E.3)$$



Observações

1. As equações de movimento, equações (E.1) a (E.3), do Exemplo 6.1 podem ser expressas na forma matricial como

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [c] \dot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \quad (6.3)$$

onde $[m]$, $[c]$ e $[k]$ são denominadas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, e são dadas por

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & (c_n + c_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & (k_n + k_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

e \vec{x} , $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$ e \vec{F} são os vetores de deslocamento, velocidade, aceleração e força dados por

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix},$$

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

2. Para um sistema não amortecido (com todos $c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n+1$), as equações de movimento reduzem-se a

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \quad (6.8)$$

3. O sistema massa-mola-amortecedor considerado anteriormente é um caso particular de um sistema geral massa-mola-amortecedor com n graus de liberdade. Em sua forma mais geral, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez são dadas por

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & k_{3n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

4. Podemos ver que as equações diferenciais do sistema massa-mola considerado no Exemplo 6.1 (Figura 6.3(a)) são acopladas; cada equação envolve mais que uma coordenada.

Isso significa que as equações não podem ser resolvidas individualmente, uma por vez; elas só podem ser resolvidas simultaneamente. Ademais, podemos ver que o sistema está estaticamente acoplado, visto que as rigidezes são acopladas — isto é, a matriz de rigidez tem, no mínimo, um termo não-zero fora da diagonal. Por outro lado, se a matriz de massa tiver no mínimo um termo não-zero fora da diagonal, diz-se que o sistema é dinamicamente acoplado. Além disso, se ambas as matrizes de rigidez e de massa tiverem termos não-zero fora da diagonal, diz-se que o sistema é acoplado estatica e dinamicamente.

EXEMPLO 6.2

Equações de movimento de um sistema trailer-pêndulo composto

Deduza as equações de movimento do sistema *trailer-pêndulo composto* mostrado na Figura 6.4(a).

Solução:

Abordagem: Desenhe o diagrama de corpo livre e aplique a segunda lei do movimento de Newton.

As coordenadas $x(t)$ e $\theta(t)$ são usadas para descrever, respectivamente, o deslocamento linear do *trailer* e o deslocamento angular do pêndulo composto em relação às suas respectivas posições em equilíbrio estático. Quando consideramos valores positivos para os deslocamentos $x(t)$ e $\theta(t)$, velocidades $\dot{x}(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ e acelerações $\ddot{x}(t)$ e $\ddot{\theta}(t)$, as forças externas que agem sobre o *trailer* serão a força aplicada $F(t)$, as forças de mola k_1x e k_2x e as forças de amortecimento $c_1\dot{x}$ e $c_2\dot{x}$, como mostra a Figura 6.4(b). As forças externas que agem sobre o pêndulo composto serão o torque aplicado $M_t(t)$ e a força gravitacional mg , como pode-se ver na Figura 6.4(b). As forças de inércia que agem sobre o *trailer* e o pêndulo composto são indicadas pelas linhas tracejadas na Figura 6.4(b). Observe que o movimento rotacional do pêndulo composto ao redor do ponto de articulação O induz uma força radial dirigida para dentro (na direção de O) $m_2^l\dot{\theta}^2$ e uma força normal (perpendicular a OC) $m_2^l\ddot{\theta}$ como mostra a Figura 6.4(b). A aplicação da segunda lei de Newton para movimento de translação no sentido horizontal dá

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + m\ddot{x} + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta \\ = -k_1x - k_2x - c_1\dot{x} - c_2\dot{x} + F(t) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

De maneira semelhante, a aplicação da segunda lei de Newton para o movimento rotacional ao redor do ponto de articulação O resulta em

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{2}\dot{\theta}\right)\frac{l}{2} + \left(\frac{m}{12}l^2\right)\ddot{\theta} + (m\ddot{x})\frac{l}{2}\cos\theta \\ = -(mg)\frac{l}{2}\sin\theta + M_t(t) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Observações

- Podemos ver que as equações de movimento, equações (E.1) e (E.2), são não lineares devido à presença dos termos que envolvem $\sin\theta$, $\cos\theta$ e $(\dot{\theta})^2\sin\theta$.
- As equações (E.1) e (E.2) podem ser linearizadas se considerarmos que o termo que envolve $(\dot{\theta})^2\sin\theta$ é tão pequeno que pode ser desprezado e que os deslocamentos são tão pequenos que $\cos\theta \approx 1$ e $\sin\theta \approx 0$. As equações linearizadas podem ser deduzidas como

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + \left(\frac{ml}{2}\right)\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)x \\ + (c_1 + c_2)\dot{x} = F(t) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

e

$$\left(\frac{ml}{2}\right)\ddot{x} + \left(\frac{ml^2}{3}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{mgl}{2}\right)\theta = M_t(t) \quad (\text{E.4})$$

6.4 Coeficientes de influência

As equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade também podem ser escritas em termos de coeficientes de influência, que são usados extensivamente na engenharia estrutural. Basicamente, um conjunto de coeficientes de influência pode ser associado a cada uma das matrizes envolvidas nas equações de movimento. Os coeficientes de influência associados às matrizes de rigidez e de massa são conhecidos, respectivamente, como os coeficientes de influência de rigidez e de inércia. Em alguns casos, é mais conveniente reescrever as equações de movimento

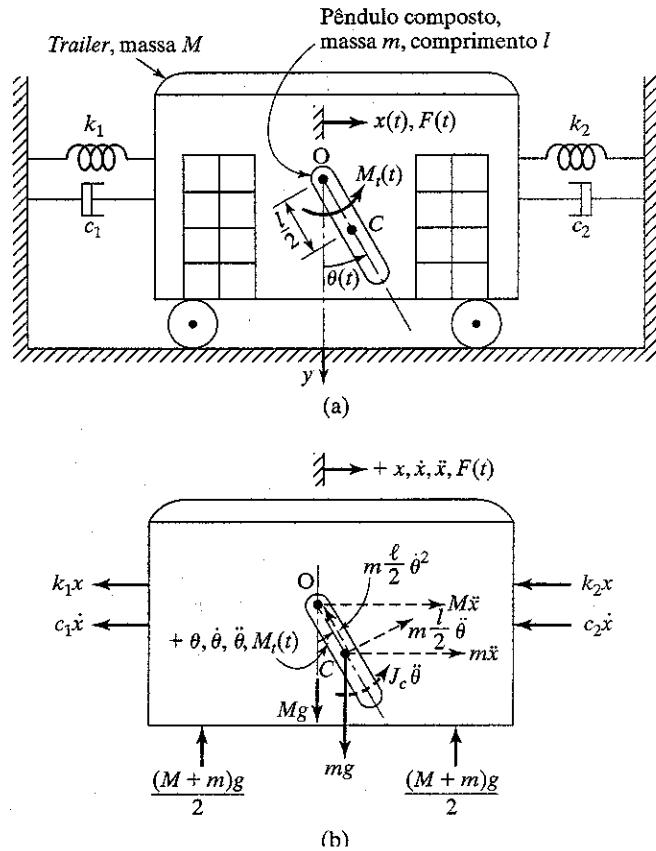


FIGURA 6.4 Sistema pêndulo composto e trailer.

utilizando a inversa da matriz de rigidez (conhecida como matriz de flexibilidade) ou a inversa da matriz de massa. Os coeficientes de influência correspondentes à inversa da matriz de rigidez são denominados coeficientes de influência de flexibilidade, e os correspondentes à inversa da matriz de massa são conhecidos como coeficientes de inércia inversos.

6.4.1 Coeficientes de influência de rigidez

Para uma mola linear simples, a força necessária para provocar uma unidade de elongação é denominada a rigidez da mola. Em sistemas mais complexos, podemos expressar a relação entre o deslocamento em um ponto e as forças que agem em vários outros pontos do sistema por meio de coeficientes de influência de rigidez. O coeficiente de influência de rigidez, denotado como k_{ij} , é definido como a força no ponto i devido a um deslocamento unitário no ponto j quando todos os outros pontos, exceto o ponto j , são fixos. Utilizando essa definição para o sistema massa-mola mostrado na Figura 6.5, a força total no ponto i , $F_i(t)$, pode ser determinada somando as forças devido a todos os deslocamentos x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) como

$$F_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.12)$$

A Equação (6.12) pode ser expressa em forma matricial como

$$\vec{F} = [k] \vec{x} \quad (6.13)$$

onde \vec{x} e \vec{F} são os vetores de deslocamento e força definidos na Equação (6.7) e $[k]$ é a matriz de rigidez dada por

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Os seguintes aspectos dos coeficientes de influência de rigidez devem ser observados:

- Visto que a força requerida no ponto i para provocar uma unidade de deflexão no ponto j e zero deflexão em todos os outros pontos é igual à força requerida no ponto j para provocar uma unidade de deflexão no ponto i e zero deflexão em todos os outros pontos (teorema da reciprocidade de Maxwell), temos $k_{ij} = k_{ji}$.

- Os coeficientes de influência de rigidez podem ser calculados pela aplicação dos princípios de estática e mecânica dos sólidos.
- Os coeficientes de influência de rigidez para sistemas torcionais podem ser definidos em termos do deslocamento angular unitário e do torque que provoca o deslocamento angular. Por exemplo, em um sistema torcional com vários rotores, k_{ij} pode ser definido como o torque no ponto i (rotor i) devido a um deslocamento angular unitário no ponto j e deslocamento angular zero em todos os outros pontos.

Os coeficientes de influência de rigidez de um sistema com vários graus de liberdade podem ser determinados da seguinte maneira:

- Considere um valor de um para o deslocamento x_j ($j = 1$ para começar) e um valor de zero para todos os outros deslocamentos $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$. Por definição, o conjunto de forças k_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$) manterá o sistema na configuração considerada ($x_j = 1, x_1 = x_2 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_n = 0$). Então, escreva as equações de equilíbrio estático para cada massa e resolva o conjunto de n equações resultante para determinar os n coeficientes de influência k_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$).
- Após concluir a etapa 1 para $j = 1$, repita o procedimento para $j = 2, 3, \dots, n$.

Os exemplos apresentados a seguir ilustram o procedimento.

EXEMPLO 6.3

Coeficientes de influência de rigidez

Determine os coeficientes de influência de rigidez do sistema mostrado na Figura 6.6(a).

Solução:

Abordagem: Use a definição de k_{ij} e equações de equilíbrio estático.

Vamos denotar os deslocamentos das massas m_1, m_2 e m_3 por x_1, x_2 e x_3 , respectivamente. Os coeficientes de influência de rigidez k_{ij} do sistema podem ser determinados em termos

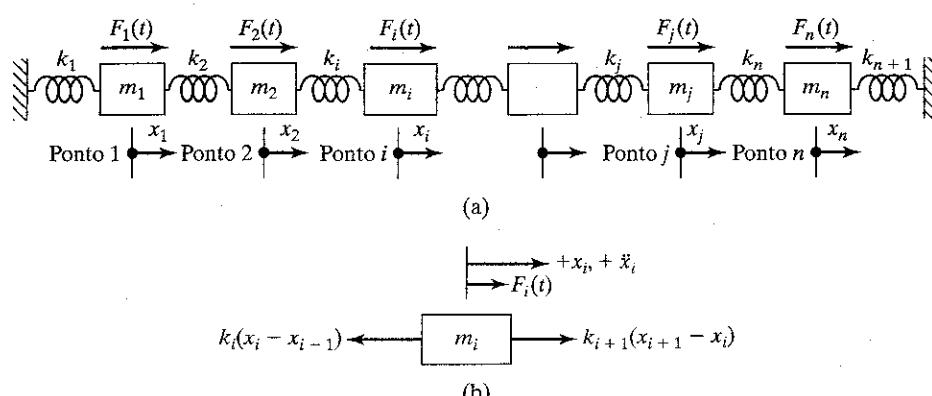


FIGURA 6.5 Sistema massa-mola com vários graus de liberdade.

das rigidezes de mola k_1 , k_2 e k_3 , como segue. Em primeiro lugar, consideramos o deslocamento de m_1 igual a 1 ($x_1 = 1$) e os deslocamentos de m_2 e m_3 iguais a zero ($x_2 = x_3 = 0$), como mostra a Figura 6.6(b). Supomos que o conjunto de forças k_{ij} ($i = 1, 2, 3$) mantenham o sistema nessa configuração. Os diagramas de corpo livre das massas correspondentes à configuração da Figura 6.6(b) são indicados na Figura 6.6(c). O equilíbrio de forças para as massas m_1 , m_2 e m_3 no sentido horizontal resulta em

$$\text{Massa } m_1: k_1 = -k_2 + k_{11} \quad (\text{E.1})$$

$$\text{Massa } m_2: k_{21} = -k_2 \quad (\text{E.2})$$

$$\text{Massa } m_3: k_{31} = 0 \quad (\text{E.3})$$

A solução das equações (E.1) a (E.3) dá

$$k_{11} = k_1 + k_2, k_{21} = -k_2, k_{31} = 0 \quad (\text{E.4})$$

Em seguida, consideramos que os deslocamentos das massas são $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, como mostra a Figura 6.6(d). Visto que supomos que as forças k_{ij} ($i = 1, 2, 3$) mantenham o sistema nessa configuração, os diagramas de corpo livre das massas podem ser desenvolvidos como indicado na Figura 6.6(e). As equações de equilíbrio de forças das massas são:

$$\text{Massa } m_1: k_{12} + k_2 = 0 \quad (\text{E.5})$$

$$\text{Massa } m_2: k_{22} - k_3 = k_2 \quad (\text{E.6})$$

$$\text{Massa } m_3: k_{32} = -k_3 \quad (\text{E.7})$$

A solução das equações (E.5) a (E.7) resulta em

$$k_{12} = -k_2, k_{22} = k_2 + k_3, k_{32} = -k_3 \quad (\text{E.8})$$

Por fim, admitimos que o conjunto de forças k_{ij} ($i = 1, 2, 3$) mantenham o sistema com $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$ (Figura 6.6(f)). Os diagramas de corpo livre das várias massas nessa configuração são mostrados na Figura 6.6(g), e as equações de equilíbrio de forças resultam em

$$\text{Massa } m_1: k_{13} = 0 \quad (\text{E.9})$$

$$\text{Massa } m_2: k_{23} + k_3 = 0 \quad (\text{E.10})$$

$$\text{Massa } m_3: k_{33} = k_3 \quad (\text{E.11})$$

A solução das equações (E.9) a (E.11) resulta em

$$k_{13} = 0, k_{23} = -k_3, k_{33} = k_3 \quad (\text{E.12})$$

Assim, a matriz de rigidez do sistema é dada por

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

EXEMPLO 6.4

Matriz de rigidez de uma estrutura (Frame)

Determine a matriz de rigidez da estrutura mostrada na Figura 6.7(a). Desconsidere o efeito da rigidez axial dos membros AB e BC .

Solução: Uma vez que os segmentos AB e BC da estrutura podem ser consideradas como vigas, as fórmulas de força-deflexão de vigas podem ser usadas para gerar a matriz de rigidez da estrutura. As forças necessárias para provocar um deslocamento ao longo de uma coordenada e ao mesmo tempo manter deslocamentos zero ao longo das outras coordenadas de uma viga são expostas na Figura 6.7(b) [6.1, 6.8]. Na Figura 6.7(a), as extremidades A e C são fixas e, por consequência, a junção B terá três deslocamentos possíveis — x , y e θ , como indicado. As forças necessárias para manter

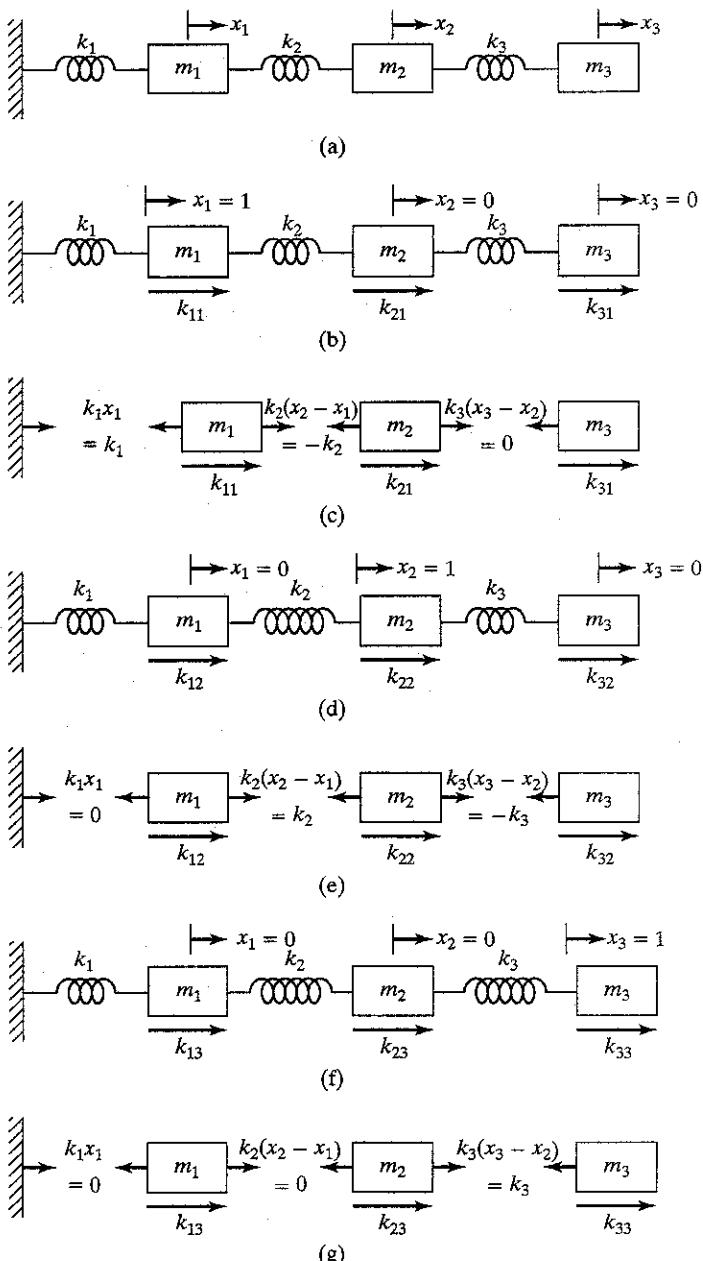


FIGURA 6.6 Determinação de coeficientes de influência de rigidez.

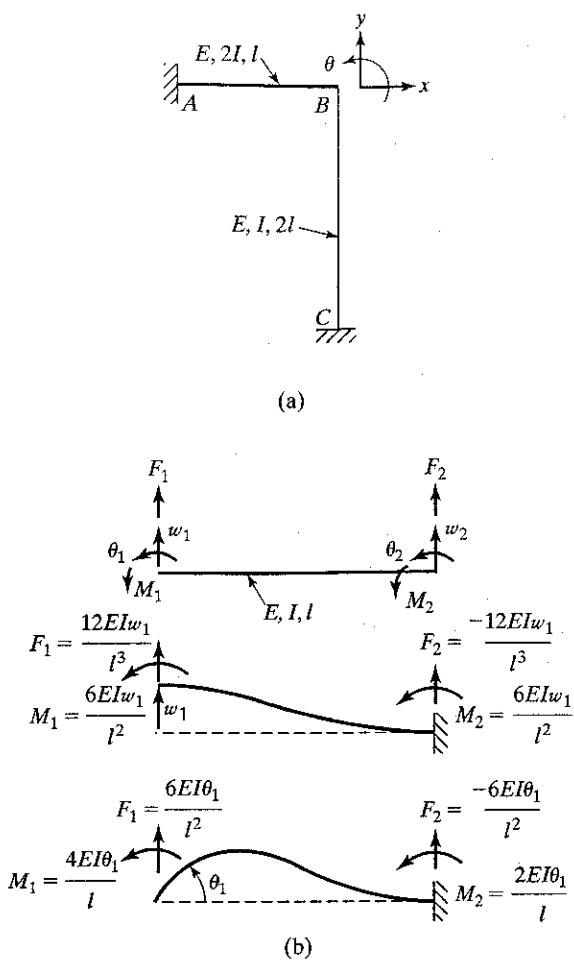


FIGURA 6.7 Matriz de rigidez de uma estrutura.

uma unidade de deslocamento ao longo da direção x e deslocamento zero ao longo das direções y e θ na junção B são dadas por (Figura 6.7(b))

$$F_x = \left(\frac{12EI}{l^3} \right)_{BC} = \frac{3EI}{2l^3},$$

$$F_y = 0, M_\theta = \left(\frac{6EI}{l^2} \right)_{BC} = \frac{3EI}{2l^2}$$

De maneira semelhante, quando uma unidade de deslocamento é dada ao longo da direção y na junção B com deslocamentos zero ao longo das direções x e θ , as forças exigidas para manter a configuração podem ser determinadas pela Figura 6.7(b) como

$$F_x = 0, F_y = \left(\frac{12EI}{l^3} \right)_{BA} = \frac{24EI}{l^3},$$

$$M_\theta = -\left(\frac{6EI}{l^2} \right)_{BA} = -\frac{12EI}{l^2}$$

Por fim, as forças necessárias para manter um deslocamento unitário ao longo da direção θ e deslocamentos zero

ao longo das direções x e y na junção B podem ser vistos, pela Figura 6.7(b), como

$$F_x = \left(\frac{6EI}{l^2} \right)_{BC} = \frac{3EI}{2l^2},$$

$$F_y = -\left(\frac{6EI}{l^2} \right)_{BA} = -\frac{12EI}{l^3},$$

$$M_\theta = \left(\frac{4EI}{l} \right)_{BC} + \left(\frac{4EI}{l} \right)_{BA} = \frac{2EI}{l} + \frac{8EI}{l} = \frac{10EI}{l}$$

Assim, a matriz de rigidez, $[k]$, é dada por

$$\vec{F} = [k]\vec{x}$$

onde

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_\theta \end{Bmatrix}, \vec{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}, [k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{3l}{2} \\ 0 & 24 & -12l \\ \frac{3l}{2} & -12l & 10l^2 \end{bmatrix}$$

6.4.2 Coeficientes de influência de flexibilidade

Como vimos nos exemplos 6.3 e 6.4, o cálculo de coeficientes de influência de rigidez requer a aplicação dos princípios de estática e alguma manipulação algébrica. Na verdade, a geração de n coeficientes de influência de rigidez $k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{nj}$ para qualquer j específico exige a solução de n equações lineares simultâneas. Assim, temos de resolver n conjuntos de equações lineares (n equações em cada conjunto) para gerar todos os coeficientes de influência de rigidez de um sistema com n graus de liberdade. Isso implica um significativo esforço de cálculo para grandes valores de n . Por outro lado, a geração dos coeficientes de influência de flexibilidade mostra ser mais simples e mais conveniente. Para ilustrar o conceito, considere novamente o sistema massa-mola mostrado na Figura 6.5.

Vamos considerar que o sistema sofra a ação de apenas uma força F_j e que o deslocamento no ponto i (isto é, massa m_i) devido a F_j seja x_{ij} . O coeficiente de influência de flexibilidade, denotado por a_{ij} , é definido como a deflexão no ponto i provocada por uma carga unitária no ponto j . Visto que em um sistema linear a deflexão aumenta proporcionalmente com a carga, temos

$$x_{ij} = a_{ij}F_j \quad (6.15)$$

Se várias forças F_j ($j = 1, 2, \dots, n$) agirem em diferentes pontos do sistema, a deflexão total em qualquer ponto i pode ser determinada pela soma das contribuições de todas as forças F_j :

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}F_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.16)$$

A Equação (6.16) pode ser expressa em forma matricial como

$$\vec{x} = [a] \vec{F} \quad (6.17)$$

onde \vec{x} e \vec{F} são os vetores de deslocamento e força definidos na Equação (6.7) e $[a]$ é a matriz de flexibilidade dada por

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

As seguintes características de coeficientes de influência de flexibilidade podem ser observadas:

1. Um exame das equações (6.17) e (6.13) indica que as matrizes de flexibilidade e rigidez estão relacionadas. Se substituirmos a Equação (6.13) na Equação (6.17), obtemos

$$\vec{x} = [a] \vec{F} = [a][k] \vec{x} \quad (6.19)$$

pela qual podemos obter a relação

$$[a][k] = [I] \quad (6.20)$$

onde $[I]$ denota a matriz identidade. A Equação (6.20) é equivalente a

$$[k] = [a]^{-1}, \quad [a] = [k]^{-1} \quad (6.21)$$

Isto é, as matrizes de rigidez e flexibilidade são as inversas uma da outra. A utilização de coeficientes de influência de rigidez dinâmica na vibração de vigas não-uniformes é discutida na Referência [6.10].

2. Uma vez que, para um sistema linear, a deflexão no ponto i provocada por uma carga unitária no ponto j é igual à deflexão no ponto j provocada por uma carga unitária no ponto i (teorema da reciprocidade de Maxwell [6.1]), temos $a_{ij} = a_{ji}$.
3. Os coeficientes de influência de flexibilidade de um sistema torcional podem ser definidos em termos do torque unitário e da deflexão angular que ele causa. Por exemplo, em um sistema torcional com vários rotores, a_{ij} pode ser definido como a deflexão angular do ponto i (rotor i) provocada por um torque unitário no ponto j (rotor j).

Os coeficientes de influência de flexibilidade de um sistema com vários graus de liberdade podem ser determinados da seguinte maneira:

1. Considere uma carga unitária no ponto j ($j = 1$ para começar). Por definição, os deslocamentos dos vários pontos i ($i = 1, 2, \dots, n$) resultantes dessa carga dão os coeficientes de influência de flexibilidade a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, a_{ij} pode ser determinado pela aplicação dos simples princípios de estática e mecânica dos sólidos.
2. Após concluir a Etapa 1 para $j = 1$, o procedimento é repetido para $j = 2, 3, \dots, n$.
3. Em vez de aplicar as etapas 1 e 2, a matriz de flexibilidade, $[a]$, pode ser encontrada pela determinação da inversa da matriz de rigidez, $[k]$, se a matriz de rigidez estiver disponível.

Os exemplos a seguir ilustram o procedimento.

EXEMPLO 6.5

Coeficientes de influência de flexibilidade

Determine os coeficientes de influência de flexibilidade do sistema mostrado na Figura 6.8(a).

Solução: Vamos denotar os deslocamentos das massas m_1 , m_2 e m_3 por x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente. Os coeficientes de influência de flexibilidade a_{ij} do sistema podem ser determinados em termos das rigidezes de mola k_1 , k_2 e k_3 , como segue. Aplique uma força unitária à massa m_1 e nenhuma força às outras massas ($F_1 = 1$, $F_2 = F_3 = 0$), como mostra a Figura 6.8(b). As deflexões resultantes das massas m_1 , m_2 e m_3 (x_1 , x_2 e x_3) são, por definição, a_{11} , a_{21} e a_{31} , respectivamente (ver Figura 6.8(b)). Os diagramas de corpo livre das massas são mostrados na Figura 6.8(c). O equilíbrio de forças na direção horizontal para as várias massas dá o seguinte:

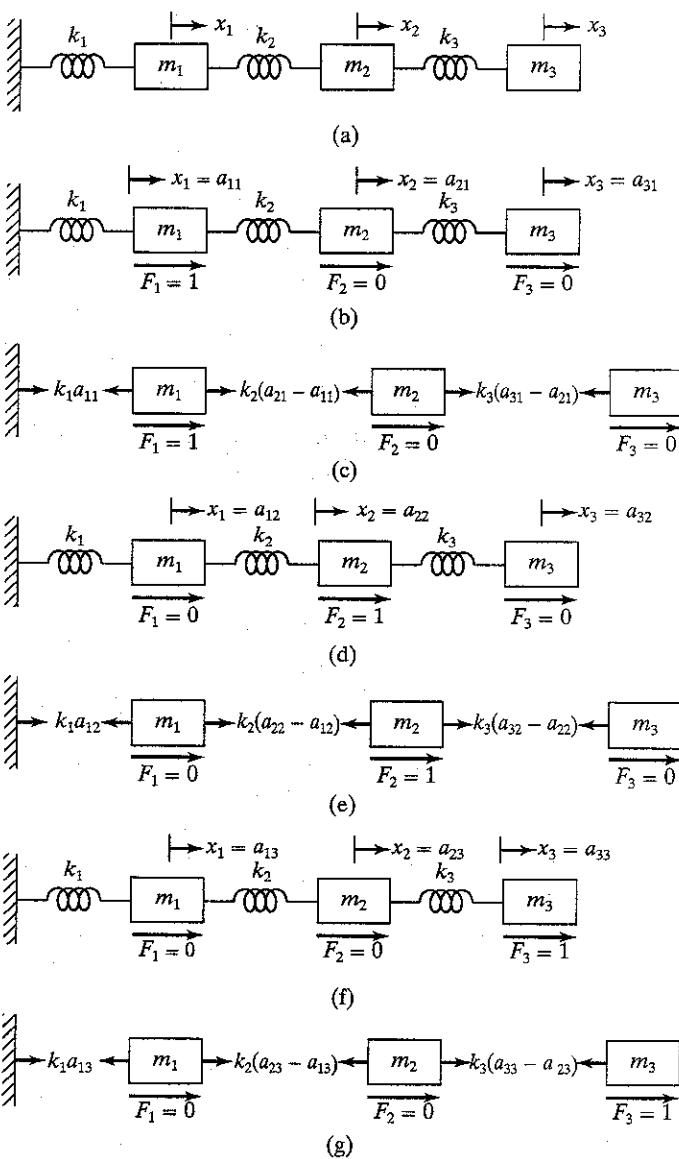


FIGURA 6.8 Determinação de coeficientes de influência de flexibilidade.

$$\text{Massa } m_1: k_1 a_{11} = k_2 (a_{21} - a_{11}) + 1 \quad (\text{E.1})$$

$$\text{Massa } m_2: k_2 (a_{21} - a_{11}) = k_3 (a_{31} - a_{21}) \quad (\text{E.2})$$

$$\text{Massa } m_3: k_3 (a_{31} - a_{21}) = 0 \quad (\text{E.3})$$

A solução das equações (E.1) a (E.3) resulta em

$$a_{11} = \frac{1}{k_1}, \quad a_{21} = \frac{1}{k_1}, \quad a_{31} = \frac{1}{k_1} \quad (\text{E.4})$$

Em seguida, aplicamos uma força unitária à massa m_2 e nenhuma força às massas m_1 e m_3 , como pode-se ver na Figura 6.8(d). Essas forças provocam as deflexões $x_1 = a_{12}$, $x_2 = a_{22}$ e $x_3 = a_{32}$ nas massas m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente (por definição de a_{ij}), como mostra a Figura 6.8(d). Os diagramas de corpo livre das massas, mostrados na Figura 6.8(e), resultam nas seguintes equações de equilíbrio:

$$\text{Massa } m_1: k_1 (a_{12}) = k_2 (a_{22} - a_{12}) \quad (\text{E.5})$$

$$\text{Massa } m_2: k_2 (a_{22} - a_{12}) = k_3 (a_{32} - a_{22}) + 1 \quad (\text{E.6})$$

$$\text{Massa } m_3: k_3 (a_{32} - a_{22}) = 0 \quad (\text{E.7})$$

A solução das equações (E.5) a (E.7) dá

$$a_{12} = \frac{1}{k_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad a_{32} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (\text{E.8})$$

Por fim, quando aplicamos uma força unitária à massa m_3 e nenhuma força às massas m_1 e m_2 , as massas sofrem as deflexões $x_1 = a_{13}$, $x_2 = a_{23}$ e $x_3 = a_{33}$ como mostra a Figura 6.8(f). Os diagramas de corpo livre das várias massas (Figura 6.8(g)) dão as seguintes equações de equilíbrio:

$$\text{Massa } m_1: k_1 a_{13} = k_2 (a_{23} - a_{13}) \quad (\text{E.9})$$

$$\text{Massa } m_2: k_2 (a_{23} - a_{13}) = k_3 (a_{33} - a_{23}) \quad (\text{E.10})$$

$$\text{Massa } m_3: k_3 (a_{33} - a_{23}) = 1 \quad (\text{E.11})$$

A solução das equações (E.9) a (E.11) dá os coeficientes de influência de flexibilidade a_{ij} como

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{1}{k_1}, \quad a_{23} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \\ a_{33} &= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Pode-se verificar que a matriz de rigidez do sistema, dada pela Equação (E.13) do Exemplo 6.3, também pode ser determinada pela relação $[k] = [a]^{-1}$.

EXERCÍCIO 6.6

Matriz de flexibilidade de uma viga

Deduza a matriz de flexibilidade da viga sem peso mostrada na Figura 6.9(a). A viga está simplesmente apoiada nas duas

extremidades, e as três massas estão localizadas a intervalos iguais. Considere que a viga seja uniforme com rigidez EI .

Solução: Vamos denotar a deflexão transversal total das massas m_1 , m_2 e m_3 por x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente. Pela fórmula conhecida para a deflexão de uma viga apoiada nas duas extremidades [6.2], os coeficientes de influência a_{ij} ($j = 1, 2, 3$) podem ser determinados com a aplicação de uma carga unitária na localização de m_1 e carga zero nas localizações de m_2 e m_3 e (Figura 6.9(b)):

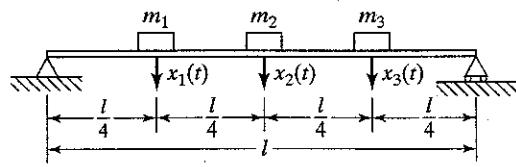
$$a_{11} = \frac{9}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{12} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{13} = \frac{7}{768} \frac{l^3}{EI} \quad (\text{E.1})$$

De maneira semelhante, com a aplicação de uma carga unitária nas localizações de m_2 e m_3 separadamente (com carga zero nas outras localizações), obtemos

$$\begin{aligned} a_{21} = a_{12} &= \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{22} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EI}, \\ a_{23} &= \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

e

$$\begin{aligned} a_{31} = a_{13} &= \frac{7}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{32} = a_{23} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}, \\ a_{33} &= \frac{9}{768} \frac{l^3}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$



(a)

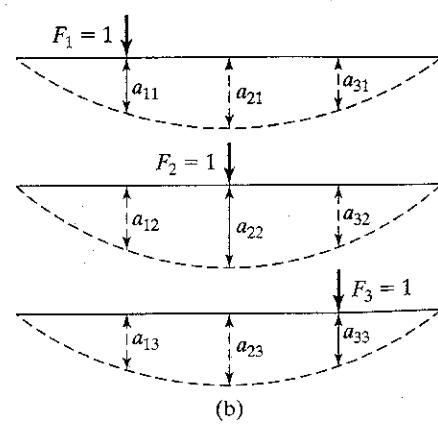


FIGURA 6.9 Deflexões em uma viga.

Assim, a matriz de flexibilidade do sistema é dada por

$$[a] = \frac{\rho^3}{768 EI} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

6.4.3 Coeficientes de influência de inércia

Os elementos da matriz de massa, m_{ij} , são conhecidos como coeficientes de influência de inércia. Embora seja mais conveniente deduzir os coeficientes de influência de inércia da expressão para a energia cinética do sistema (ver Seção 6.5), os coeficientes m_{ij} podem ser calculados com a utilização das relações impulso-momento. Os coeficientes de influência de inércia $m_{1j}, m_{2j}, \dots, m_{nj}$ são definidos como o conjunto de impulsos aplicados nos pontos 1, 2, ..., n respectivamente, para produzir uma velocidade unitária no ponto j e velocidade zero em qualquer outro ponto (isto é, $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dots = \dot{x}_{j-1} = \dot{x}_{j+1} = \dots = \dot{x}_n = 0$). Assim, para um sistema com vários graus de liberdade, o impulso total no ponto i , \tilde{F}_i , pode ser determinado pelo somatório dos impulsos que causam as velocidades \dot{x}_j ($j = 1, 2, \dots, n$) como

$$\tilde{F}_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_j \quad (6.22)$$

A Equação (6.22) pode ser expressa em forma matricial como

$$\vec{\tilde{F}} = [m]\vec{x} \quad (6.23)$$

onde \vec{x} e $\vec{\tilde{F}}$ são os vetores de velocidade e impulso dados por

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}, \quad \vec{\tilde{F}} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \vdots \\ \tilde{F}_n \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

e $[m]$ é a matriz de massa dada por

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

É fácil verificar que os coeficientes de influência de inércia são simétricos para um sistema linear, isto é, $m_{ij} = m_{ji}$. O procedimento dado a seguir pode ser usado para deduzir os coeficientes de influência de inércia de um sistema com vários graus de liberdade.

1. Considere que um conjunto de impulsos \tilde{f}_{ij} é aplicado a vários pontos i ($i = 1, 2, \dots, n$) de modo a produzir uma

velocidade unitária no ponto j ($\dot{x}_j = 1$ com $j = 1$ para começar) e velocidade zero em todos os outros pontos ($\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dots = \dot{x}_{j-1} = \dot{x}_{j+1} = \dots = \dot{x}_n = 0$). Por definição, o conjunto de impulsos \tilde{f}_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$) denota os coeficientes de influência de inércia m_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$).

2. Após concluir a etapa 1 para $j = 1$, o procedimento é repetido para $j = 2, 3, \dots, n$.

Observe que, se x_j denotar uma coordenada angular, então \dot{x}_j representa uma velocidade angular e \tilde{F}_j indica um impulso angular. O exemplo a seguir ilustra o procedimento para gerar m_{ij} .

EXEMPLO 6.7

Coeficientes de influência de inércia

Determine os coeficientes de influência de inércia do sistema mostrado na Figura 6.4(a).

Solução:

Abordagem: Use a definição de m_{ij} juntamente com as relações impulso-momento.

Vamos denotar por $x(t)$ e $\theta(t)$ as coordenadas para definir as posições linear e angular do trailer (M) e do pêndulo composto (m). Para deduzir os coeficientes de influência de inércia, impulsos de magnitudes m_{11} e m_{21} são aplicados ao longo das direções $x(t)$ e $\theta(t)$ para resultar nas velocidades $\dot{x} = 1$ e $\dot{\theta} = 0$. Então, a equação de impulso linear-momento linear dá

$$m_{11} = (M + m)(1) \quad (\text{E.1})$$

e a equação de impulso angular-momento angular (em relação a O) resulta em

$$m_{21} = m(1)\frac{l}{2} \quad (\text{E.2})$$

Em seguida, impulsos de magnitudes m_{12} e m_{22} são aplicados ao longo das direções $x(t)$ e $\theta(t)$ para obter as velocidades $\dot{x} = 0$ e $\dot{\theta} = 1$. Então, a relação impulso linear-momento linear nos dá

$$m_{12} = m(1)\left(\frac{l}{2}\right) \quad (\text{E.3})$$

e a equação impulso angular-momento angular (em relação a O) dá

$$m_{22} = \left(\frac{ml^2}{3}\right)(1) \quad (\text{E.4})$$

Assim, a matriz de massa ou inércia do sistema é dada por

$$[m] = \begin{bmatrix} M + m & \frac{ml}{2} \\ \frac{ml}{2} & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

6.5 Expressões de energia potencial e energia cinética na forma matricial

Vamos denotar por x_i o deslocamento da massa m_i e por F_i a força aplicada à massa m_i na direção de x_i em um sistema com n graus de liberdade semelhante ao mostrado na Figura 6.5.

A energia potencial elástica (também conhecida como *esforço de deformação* ou *energia de deformação*) da i -ésima mola é dada por

$$V_i = \frac{1}{2} F_i x_i \quad (6.26)$$

A energia potencial total pode ser expressa como

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i x_i \quad (6.27)$$

Visto que

$$F_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j \quad (6.28)$$

a Equação (6.27) torna-se

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} x_j \right) x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j \quad (6.29)$$

A Equação (6.29) também pode ser escrita em forma matricial como¹

$$V = \frac{1}{2} \vec{x}^T [k] \vec{x} \quad (6.30)$$

onde o vetor de deslocamento é dado pela Equação (6.7) e a matriz de rigidez é dada por

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

A energia cinética associada à massa m_1 é, por definição, igual a

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (6.32)$$

A energia cinética total do sistema pode ser expressa como

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2 \quad (6.33)$$

que pode ser escrita em forma matricial como

$$T = \frac{1}{2} \vec{x}^T [m] \vec{x} \quad (6.34)$$

onde o vetor de velocidade \vec{x} é dado por

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

¹ Visto que os índices i e j podem ser intercambiados na Equação (6.29), temos a relação $k_{ij} = k_{ji}$.

e a matriz de massa $[m]$ é uma matriz diagonal dada por

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

Se forem usadas as coordenadas generalizadas (q_i), discutidas na Seção 6.6, em vez dos deslocamentos físicos (x_i), a energia cinética pode ser expressa como

$$T = \frac{1}{2} \vec{q}^T [m] \vec{q} \quad (6.36)$$

onde \vec{q} é o vetor de velocidades generalizadas, dado por

$$\vec{q} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} \quad (6.37)$$

e $[m]$ é denominada a *matriz de massa generalizada*, dada por

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

com $m_{ij} = m_{ji}$. A matriz de massa generalizada dada pela Equação (6.38) é cheia, ao contrário da matriz de massa diagonal da Equação (6.35).

Podemos ver que a energia potencial é uma função quadrática dos deslocamentos e que a energia cinética é uma função quadrática das velocidades. Por consequência, diz-se que elas estão em forma quadrática. Uma vez que, por definição, a energia cinética não pode ser negativa e desaparece somente quando todas as velocidades desaparecem, as equações (6.34) e (6.36) são denominadas *formas quadráticas positivas definidas*, e a matriz de massa $[m]$ é denominada *uma matriz positiva definida*. Por outro lado, a expressão da energia potencial, Equação (6.30), é uma forma quadrática positiva definida, mas a matriz $[k]$ é positiva definida somente se o sistema for estável. Há sistemas para os quais a energia potencial é zero sem que os deslocamentos ou coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n sejam zero. Nesses casos, a energia potencial será uma função quadrática positiva e não-positiva definida; por correspondência, diz-se que a matriz $[k]$ é positiva. Um sistema para o qual $[k]$ é positiva e $[m]$ é positiva definida é denominado um sistema semidefinito (ver Seção 6.12).

6.6 Coordenadas generalizadas e forças generalizadas

As equações de movimento de um sistema vibratório podem ser formuladas em vários sistemas de coordenadas diferentes. Como afirmamos antes, são necessárias n coordenadas independentes para descrever o movimento de um sistema com n graus de liberdade. Qualquer conjunto de n coordenadas independentes é denominado coordenadas generalizadas e, normalmente, designado por q_1, q_2, \dots, q_n . As

coordenadas generalizadas podem ser comprimentos, ângulos ou qualquer outro conjunto de números que defina a configuração do sistema exclusivamente a qualquer instante. Elas também são independentes das condições de restrição.

Para ilustrar o conceito de coordenadas generalizadas, considere o pêndulo tripla mostrado na Figura 6.10. A configuração do sistema pode ser especificada pelas seis coordenadas (x_j, y_j) , $j = 1, 2, 3$. Contudo, essas coordenadas não são independentes, mas estão restritas pelas relações

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= l_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= l_2^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 &= l_3^2 \end{aligned} \quad (6.39)$$

Visto que as coordenadas (x_j, y_j) , $j = 1, 2, 3$ não são independentes, elas não podem ser denominadas coordenadas generalizadas. Sem as restrições da Equação (6.39), cada uma das massas m_1 , m_2 e m_3 estará livre para ocupar qualquer posição no plano x , y . As restrições eliminam três graus de liberdade das seis coordenadas (duas para cada massa) e, desse modo, o sistema tem somente três graus de liberdade. Se os deslocamentos angulares θ_j ($j = 1, 2, 3$) forem usados para especificar as localizações das massas m_j ($j = 1, 2, 3$) a qualquer instante, não haverá nenhuma restrição a θ_j . Assim, eles formam um conjunto de coordenadas generalizadas e são denotadas $q_j = \theta_j$, $j = 1, 2, 3$.

Quando forças externas agem sobre o sistema, a configuração do sistema muda. A nova configuração do sistema pode ser obtida mudando as coordenadas generalizadas q_j para δq_j , $j = 1, 2, \dots, n$, onde n denota o número de coordenadas generalizadas (ou graus de liberdade) do sistema. Se U_j denotar o trabalho realizado na mudança da coordenada generalizada q_j pela quantidade δq_j , a força generalizada correspondente Q_j , pode ser definida como

$$Q_j = \frac{U_j}{\delta q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.40)$$

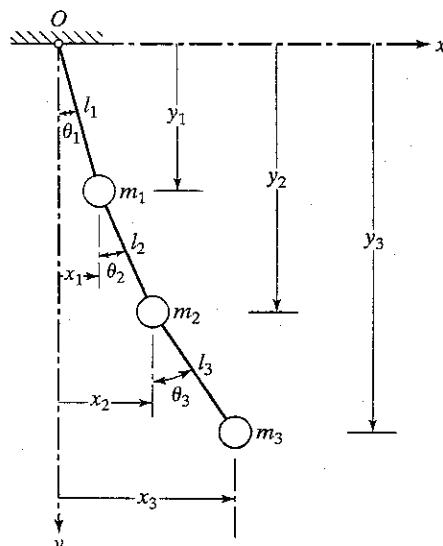


FIGURA 6.10 Pêndulo tripla.

onde Q_j será a força (momento) quando q_j for um deslocamento linear (angular).

6.7 Utilização de equações de Lagrange para deduzir equações de movimento

As equações de movimento de um sistema vibratório freqüentemente podem ser deduzidas de uma maneira simples em termos de coordenadas generalizadas com a utilização de equações de Lagrange [6.3]. Para um sistema com n graus de liberdade, as equações de Lagrange podem ser expressas como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(n)}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.41)$$

onde $\dot{q}_j = \partial q_j / \partial t$ é a velocidade generalizada e $Q_j^{(n)}$ é a força generalizada não-conservativa correspondente à coordenada generalizada q_j . As forças representadas por $Q_j^{(n)}$ podem ser forças dissipativas (amortecimento) ou quaisquer outras forças externas que não são deriváveis de uma função potencial. Por exemplo, se F_{xk} , F_{yk} e F_{zk} representarem as forças externas que agem sobre a k -ésima massa do sistema nas direções x , y e z , respectivamente, então a força generalizada $Q_j^{(n)}$ pode ser calculada da seguinte maneira:

$$Q_j^{(n)} = \sum_k \left(F_{xk} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{yk} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{zk} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \quad (6.42)$$

onde x_k , y_k e z_k são os deslocamentos da k -ésima massa nas direções x , y e z , respectivamente. Observe que, para um sistema torcional, a força F_{xk} , por exemplo, deve ser substituída pelo momento que age em relação ao eixo x (M_{xk}), e o deslocamento x_k pelo deslocamento angular em relação ao eixo x (θ_{xk}) na Equação (6.42). Para um sistema conservativo, $Q_j^{(n)} = 0$, portanto a Equação (6.41) toma a forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.43)$$

As equações (6.41) ou (6.43) representam um sistema de n equações diferenciais, cada uma correspondente a cada uma das n coordenadas generalizadas. Assim, as equações de movimento do sistema vibratório podem ser deduzidas, contanto que as expressões de energia estejam disponíveis.

EXEMPLO 6.8

Equações de movimento de um sistema torcional

O arranjo de compressor, turbina e gerador de uma usina de energia termelétrica é mostrado na Figura 6.11. Esse arranjo pode ser considerado um sistema torcional, onde J_i denota os momentos de inércia de massa dos três componentes (compressor, turbina e gerador), M_{ti} indica os momentos externos que agem sobre os componentes, e k_{ti} representa as constantes torcionais de mola do eixo entre os componentes, como mostra a Figura 6.11. Deduza as equações de movimento do sistema utilizando equações de Lagrange

e tratando os deslocamentos angulares dos componentes θ_i como coordenadas generalizadas.

Solução: Nesse caso, $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$ e $q_3 = \theta_3$ e a energia cinética do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 \quad (\text{E.1})$$

Para o eixo, a energia potencial é igual ao trabalho realizado pelo eixo quando este retorna da configuração dinâmica para a posição de equilíbrio de referência. Assim, se θ denotar o deslocamento angular, para um eixo que tem uma constante torcional de mola k_t , a energia potencial é igual ao trabalho realizado para provocar um deslocamento angular θ do eixo:

$$V = \int_0^\theta (k_t\theta) d\theta = \frac{1}{2}k_t\theta^2 \quad (\text{E.2})$$

Assim, a energia potencial total do sistema pode ser expressa como

$$V = \frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_{t2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}k_{t3}(\theta_3 - \theta_2)^2 \quad (\text{E.3})$$

Há momentos externos aplicados aos componentes, portanto a Equação (6.42) dá

$$Q_j^{(n)} = \sum_{k=1}^3 M_{tk} \frac{\partial \theta_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^3 M_{tk} \frac{\partial \theta_k}{\partial \theta_j} \quad (\text{E.4})$$

da qual podemos obter

$$\begin{aligned} Q_1^{(n)} &= M_{t1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_1} + M_{t2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} + M_{t3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1} = M_{t1} \\ Q_2^{(n)} &= M_{t1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_2} + M_{t2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_2} + M_{t3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} = M_{t2} \\ Q_3^{(n)} &= M_{t1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_3} + M_{t2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_3} + M_{t3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_3} = M_{t3} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Substituindo as Equações (E.1), (E.3) e (E.5) nas equações de Lagrange, Equação (6.41), obtemos, para $j = 1, 2, 3$, as equações de movimento

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 &= M_{t1} \\ J_2\ddot{\theta}_2 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 - k_{t2}\theta_1 - k_{t3}\theta_3 &= M_{t2} \\ J_3\ddot{\theta}_3 + k_{t3}\theta_3 - k_{t3}\theta_2 &= M_{t3} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

que podem ser expressas em forma matricial como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} (k_{t1} + k_{t2}) & -k_{t2} & 0 \\ -k_{t2} & (k_{t2} + k_{t3}) & -k_{t3} \\ 0 & -k_{t3} & k_{t3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{t1} \\ M_{t2} \\ M_{t3} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

EXEMPLO 6.9

Equações de Lagrange

Deduza as equações de movimento do sistema *trailer-pêndulo* composto mostrado na Figura 6.4(a).

Solução: As coordenadas $x(t)$ e $\theta(t)$ podem ser usadas como coordenadas generalizadas para descrever, respectivamente, o deslocamento linear do *trailer* e o deslocamento angular do pêndulo composto. Se, por conveniência, for introduzida a coordenada y , como mostra a Figura 6.4(a), os componentes de deslocamento do ponto *C* podem ser expressos como

$$x_C = x + \frac{l}{2} \sin \theta \quad (\text{E.1})$$

$$y_C = \frac{l}{2} \cos \theta \quad (\text{E.2})$$

A diferenciação das equações (E.1) e (E.2) em relação ao tempo dá as velocidades do ponto *C* como

$$\dot{x}_C = \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta \quad (\text{E.3})$$

$$\dot{y}_C = -\frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta \quad (\text{E.4})$$

A energia cinética do sistema, T , pode ser expressa como

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + J_C\dot{\theta}^2 \quad (\text{E.5})$$

onde $J_C = \frac{1}{12}ml^2$. Utilizando as equações (E.3) e (E.4), a Equação (E.5) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{4} + \dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12}\right)\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(ml \cos \theta)\dot{x}\dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

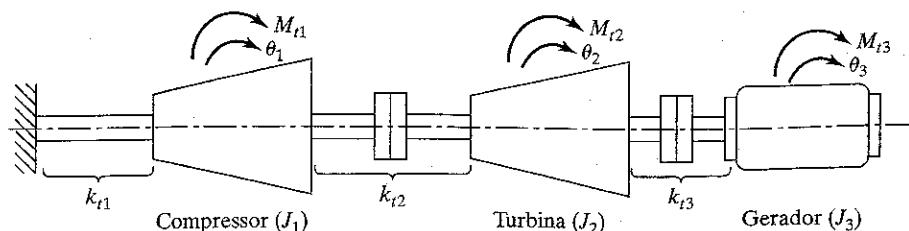


FIGURA 6.11 Sistema torcional.

A energia potencial do sistema, V , resultante do esforço de deformação das molas e do potencial gravitacional, pode ser expressa como

$$V = \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 x^2 + mg \frac{l}{2}(1 - \cos \theta) \quad (\text{E.7})$$

onde a posição mais baixa do ponto C é considerada como a referência. Visto que há forças não-conservativas que agem sobre o sistema, as forças generalizadas correspondentes a $x(t)$ e $\theta(t)$ devem ser calculadas. A força, $X(t)$, que age na direção de $x(t)$ pode ser determinada pela Equação (6.42) como

$$X(t) = Q_1^{(n)} = F(t) - c_1 \dot{x}(t) - c_2 \dot{x}(t) \quad (\text{E.8})$$

onde o sinal negativo para os termos $c_1 \dot{x}$ e $c_2 \dot{x}$ indica que as forças de amortecimento opõem-se ao movimento. De maneira semelhante, a força $\Theta(t)$ que age na direção de $\theta(t)$ pode ser determinada como

$$\Theta(t) = Q_2^{(n)} = M_t(t) \quad (\text{E.9})$$

onde $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$. Diferenciando as expressões de T e V como requerido pela Equação (6.41) e substituindo as expressões resultantes, juntamente com as equações (E.8) e (E.9), obtemos as equações de movimento do sistema como

$$(M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}(ml \cos \theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}ml \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ + k_1 x + k_2 x = F(t) - c_1 \dot{x} - c_2 \dot{x} \quad (\text{E.10})$$

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}(ml \cos \theta)\ddot{x} - \frac{1}{2}ml \sin \theta \dot{\theta} \dot{x} \\ + \frac{1}{2}ml \sin \theta \dot{\theta} \dot{x} + \frac{1}{2}mgl \sin \theta = M_t(t) \quad (\text{E.11})$$

Podemos ver que as equações (E.10) e (E.11) são idênticas às obtidas utilizando a segunda lei do movimento de Newton (equações E.1 e E.2 no Exemplo 6.2). ■

6.8 Equações de movimento de sistemas não amortecidos na forma matricial

Podemos deduzir as equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade em forma matricial pelas equações de Lagrange.²

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{E.44})$$

onde F_i é a força generalizada não-conservativa correspondente à i -ésima coordenada generalizada x_i e \dot{x}_i é a derivada em relação ao tempo de x_i (velocidade generalizada). As energias cinética e potencial de um sistema com vários graus de liberdade podem ser expressas em forma matricial como indicado na Seção 6.5

² Na Equação (6.44), as coordenadas generalizadas são denotadas por x_i em vez de q_i , e as forças generalizadas, por F_i em vez de $Q_i^{(n)}$.

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}^T [m] \dot{\vec{x}} \quad (6.45)$$

$$V = \frac{1}{2} \vec{x}^T [k] \vec{x} \quad (6.46)$$

onde \vec{x} é o vetor coluna das coordenadas generalizadas

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (6.47)$$

Pela teoria das matrizes, obtemos, observando a simetria de $[m]$,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} \vec{\delta}^T [m] \dot{\vec{x}} + \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}^T [m] \vec{\delta} = \vec{\delta}^T [m] \dot{\vec{x}} \\ = \vec{m}_i^T \dot{\vec{x}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.48)$$

onde δ_{ji} é o delta de Kronecker ($\delta_{ji} = 1$ se $j = i$ e $= 0$ se $j \neq i$), $\vec{\delta}$ é o vetor coluna dos deltas de Kronecker cujos elementos nas linhas para as quais $j \neq i$ são iguais a zero e cujo elemento na linha $i = j$ é igual a 1, e \vec{m}_i^T é um vetor linha que é idêntico à i -ésima linha da matriz $[m]$. Todas as relações representadas pela Equação (6.48) podem ser expressas como

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \vec{m}_i^T \dot{\vec{x}} \quad (6.49)$$

A diferenciação da Equação (6.49) em relação ao tempo dá

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = \vec{m}_i^T \ddot{\vec{x}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.50)$$

visto que a matriz de massa não é função do tempo. Ademais, a energia cinética é função apenas das velocidades \dot{x}_i e, portanto,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.51)$$

De maneira semelhante, podemos diferenciar a Equação (6.46), observando a simetria de $[k]$,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \vec{\delta}^T [k] \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}^T [k] \vec{\delta} = \vec{\delta}^T [k] \vec{x} \\ = \vec{k}_i^T \vec{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.52)$$

onde \vec{k}_i^T é um vetor linha idêntico à i -ésima linha da matriz $[k]$. Substituindo as equações (6.50) a (6.52) na Equação (6.44), obtemos as equações de movimento desejadas em forma matricial

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \quad (6.53)$$

onde

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (6.54)$$

Note que, se o sistema for conservativo, não há nenhuma força não-conservativa F_p , de modo que as equações de movimento tornam-se

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{0} \quad (6.55)$$

Observe também que, se as coordenadas generalizadas x_i forem as mesmas que as dos deslocamentos reais (físicos), a matriz de massa $[m]$ é uma matriz diagonal.

6.9 Problema de autovalor

A solução da Equação (6.55) corresponde à vibração livre não amortecida do sistema. Nesse caso, se alguma energia for fornecida ao sistema sob a forma de deslocamentos iniciais ou velocidades iniciais ou ambos, ele vibra indefinidamente porque não há nenhuma dissipação de energia. Podemos determinar a solução da Equação (6.55) admitindo uma solução da forma

$$x_i(t) = X_i T(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.56)$$

onde X_i é uma constante e T é função do tempo t . A Equação (6.56) mostra que a razão entre as amplitudes das duas coordenadas

$$\left\{ \frac{x_i(t)}{x_j(t)} \right\}$$

é independente do tempo. Em termos físicos, isso significa que todas as coordenadas têm movimentos síncronos. A configuração do sistema não muda de forma durante o movimento, mas sua amplitude muda. A configuração do sistema, dada pelo vetor

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$$

é conhecida como *forma modal* do sistema. Substituindo a Equação (6.56) na Equação (6.55), obtemos

$$[m] \vec{X} \ddot{T}(t) + [k] \vec{X} T(t) = \vec{0} \quad (6.57)$$

A Equação (6.57) pode ser escrita em forma escalar como n equações separadas

$$\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right) \ddot{T}(t) + \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right) T(t) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n \quad (6.58)$$

da qual podemos obter as relações

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.59)$$

Visto que o lado esquerdo da Equação (6.59) é independente do índice i , e o lado direito é independente de t , ambos os lados devem ser iguais a uma constante. Considerando essa constante³ como ω^2 , podemos escrever a Equação (6.59) como

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \\ \sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) X_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.60)$$

ou

$$[(k) - \omega^2[m]] \vec{X} = \vec{0} \quad (6.61)$$

A solução da Equação (6.60) pode ser expressa como

$$T(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi) \quad (6.62)$$

onde C_1 e ϕ são constantes, conhecidas como *amplitude* e *ângulo de fase*, respectivamente. A Equação (6.62) mostra que todas as coordenadas podem executar um movimento harmônico com a mesma freqüência ω e o mesmo ângulo de fase ϕ . Todavia, a freqüência ω não pode assumir um valor arbitrário; ela tem de satisfazer a Equação (6.61). Visto que a Equação (6.61) representa um conjunto de n equações lineares homogêneas nas incógnitas X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), a solução trivial é $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$. Para uma solução não-trivial da Equação (6.61), o determinante da matriz de coeficientes deve ser zero. Isto é,

$$\Delta = |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = |[k] - \omega^2[m]| = 0 \quad (6.63)$$

A Equação (6.63) representa o que é conhecido como problema de *autovalor* (*eigenvalue*) ou do *valor característico*, a Equação (6.63) é denominada *equação característica*, ω^2 é conhecida como *autovalor* (*eigenvalue*) ou do *valor característico*, e ω é chamada a *freqüência natural* do sistema.

A expansão da Equação (6.63) resulta em uma equação polinomial de n -ésima ordem em ω^2 . A solução (raízes) dessa equação polinomial ou característica dá n valores de ω^2 . Pode-se demonstrar que todas as n raízes são reais e positivas quando as matrizes $[k]$ e $[m]$ são simétricas e positivas definidas [6.4], como no caso presente. Se $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ denotarem as n raízes em ordem ascendente de magnitude, suas raízes quadradas positivas dão as n freqüências naturais do sistema $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$. O valor mais baixo (ω_1) é denominado *freqüência fundamental* ou *primeira freqüência natural*. Em geral, todas as freqüências naturais ω_i são distintas, embora em alguns casos duas freqüências naturais possam ter o mesmo valor.

³ Considera-se que a constante seja um número positivo, ω^2 , de modo a obter uma solução harmônica para a Equação (6.60) resultante. Caso contrário, a solução de $T(t)$ e, por consequência, a de $x(t)$, tornaria-se exponencial, o que transgride as limitações físicas da energia total.

6.10 Solução do problema de autovalor

Há vários métodos disponíveis para resolver um problema de autovalor. Nesta seção, consideraremos um método elementar.

6.10.1 Solução da equação característica (ou polinomial)

A Equação (6.61) também pode ser expressa como

$$[\lambda[k] - [m]]\vec{X} = \vec{0} \quad (6.64)$$

onde

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (6.65)$$

Pré-multiplicando a Equação (6.64) por $[k]^{-1}$, obtemos ou

$$[\lambda[I] - [D]]\vec{X} = \vec{0}$$

$$\lambda[I]\vec{X} = [D]\vec{X} \quad (6.66)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade e

$$[D] = [k]^{-1}[m] \quad (6.67)$$

é denominada *matriz dinâmica*. O problema de autovalor da Equação (6.66) é conhecido como o *problema-padrão de autovalor*. Para uma a solução não-trivial de \vec{X} , o determinante característico deve zero, isto é,

$$\Delta = |\lambda[I] - [D]| = 0 \quad (6.68)$$

Com expansão, a Equação (6.68) dá uma polinomial de n -ésimo grau conhecida como *equação característica* ou *equação de freqüência*. Se o grau de liberdade do sistema (n) for grande, a solução dessa equação polinomial torna-se bastante tediosa. Precisamos usar algum método numérico — há vários disponíveis para determinar as raízes de uma equação polinomial [6.5].

EXEMPLO 6.10

Freqüências naturais de um sistema com três graus de liberdade

Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 6.8(a) para $k_1 = k_2 = k_3 = k$ e $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

Solução: A matriz dinâmica é dada por

$$[D] = [k]^{-1}[m] = [a][m] \quad (E.1)$$

onde as matrizes de flexibilidade e de massa podem ser obtidas pelo Exemplo 6.5:

$$[a] = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (E.2)$$

e

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (E.3)$$

Assim,

$$[D] = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (E.4)$$

Igualando o determinante característico a zero, obtemos a equação de freqüência

$$\Delta = |\lambda[I] - [D]|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (E.5)$$

onde

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (E.6)$$

Dividindo tudo por 1, a Equação (E.5), dá

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 - 2\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & -2\alpha & 1 - 3\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 0 \quad (E.7)$$

onde

$$\alpha = \frac{m}{k\lambda} = \frac{m\omega^2}{k} \quad (E.8)$$

As raízes da equação cúbica (E.7) são dadas por

$$\alpha_1 = \frac{m\omega_1^2}{k} = 0,19806, \quad \omega_1 = 0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (E.9)$$

$$\alpha_2 = \frac{m\omega_2^2}{k} = 1,5553, \quad \omega_2 = 1,2471 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (E.10)$$

$$\alpha_3 = \frac{m\omega_3^2}{k} = 3,2490, \quad \omega_3 = 1,8025 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (E.11)$$

Uma vez conhecidas as freqüências naturais, as formas modais ou autovetores (*eigenvectors*) podem ser calculados utilizando a Equação (6.66):

$$[\lambda_i[I] - [D]]\vec{X}^{(i)} = \vec{0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (E.12)$$

onde

$$\vec{X}^{(i)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \\ X_3^{(i)} \end{Bmatrix}$$

denota a i -ésima forma modal. O procedimento é esquematizado a seguir.

Primeiro modo: Substituindo o valor de ω_1 (isto é, $\lambda_1 = 5,0489 \frac{m}{k}$) na Equação (E.12), obtemos

$$\left[5,0489 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} 4,0489 & -1,0 & -1,0 \\ -1,0 & 3,0489 & -2,0 \\ -1,0 & -2,0 & 2,0489 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (E.13)$$

A Equação (E.13) denota um sistema de três equações lineares homogêneas nas três incógnitas $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$ e $X_3^{(1)}$. Quaisquer duas dessas incógnitas podem ser expressas em termos da remanescente. Se optarmos, arbitrariamente, por expressar $X_2^{(1)}$ e $X_3^{(1)}$ em termos de $X_1^{(1)}$, obtemos, pelas duas primeiras linhas da Equação (E.13)

$$\begin{aligned} X_2^{(1)} + X_3^{(1)} &= 4,0489 X_1^{(1)} \\ 3,0489 X_2^{(1)} - 2,0 X_3^{(1)} &= X_1^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Uma vez satisfeitas as Equações (E.14), a terceira linha da Equação (E.13) é automaticamente satisfeita. A solução das Equações (E.14) podem ser obtidas:

$$X_2^{(1)} = 1,8019 X_1^{(1)} \quad \text{e} \quad X_3^{(1)} = 2,2470 X_1^{(1)} \quad (\text{E.15})$$

Assim, a primeira forma modal é dada por

$$\vec{X}^{(1)} = X_1^{(1)} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 1,8019 \\ 2,2470 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.16})$$

onde o valor de $X_1^{(1)}$ pode ser escolhido arbitrariamente.

Segundo modo: A substituição do valor de ω_2 (isto é, $\lambda_2 = 0,6430 \frac{m}{k}$) na Equação (E.12) resulta em

$$\begin{aligned} &\left[0,6430 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -0,3570 & -1,0 & -1,0 \\ -1,0 & -1,3570 & -2,0 \\ -1,0 & -2,0 & -2,3570 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Como antes, as duas primeiras linhas da Equação (E.17) podem ser usadas para obter

$$\begin{aligned} -X_2^{(2)} - X_3^{(2)} &= 0,3570 X_1^{(2)} \\ -1,3570 X_2^{(2)} - 2,0 X_3^{(2)} &= X_1^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

A solução das Equações (E.18) dá como resultado

$$X_2^{(2)} = 0,4450 X_1^{(2)} \quad \text{e} \quad X_3^{(2)} = -0,8020 X_1^{(2)} \quad (\text{E.19})$$

Assim, a segunda forma modal pode ser expressa como

$$\vec{X}^{(2)} = X_1^{(2)} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,4450 \\ -0,8020 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.20})$$

onde o valor de $X_1^{(2)}$ pode ser escolhido arbitrariamente.

Terceiro modo: Para determinar o terceiro modo, substituímos o valor de ω_3 (isto é, $\lambda_3 = 0,3078 \frac{m}{k}$) na Equação (E.12) e obtemos

$$\begin{aligned} &\left[0,3078 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \\ X_3^{(3)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{bmatrix} -0,6922 & -1,0 & -1,0 \\ -1,0 & -1,6922 & -2,0 \\ -1,0 & -2,0 & -2,6922 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \\ X_3^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.21})$$

As duas primeiras linhas da Equação (E.21) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} -X_2^{(3)} - X_3^{(3)} &= 0,6922 X_1^{(3)} \\ -1,6922 X_2^{(3)} - 2,0 X_3^{(3)} &= X_1^{(3)} \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

A Equação (E.22) dá

$$X_2^{(3)} = -1,2468 X_1^{(3)} \quad \text{e} \quad X_3^{(3)} = 0,5544 X_1^{(3)} \quad (\text{E.23})$$

Por consequência, a terceira forma modal pode ser escrita como

$$\vec{X}^{(3)} = X_1^{(3)} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ -1,2468 \\ 0,5544 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.24})$$

onde o valor de $X_1^{(3)}$ é arbitrário. Os valores de $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$ e $X_1^{(3)}$ são tomados, geralmente, como 1, e as formas modais são mostradas na Figura 6.12.

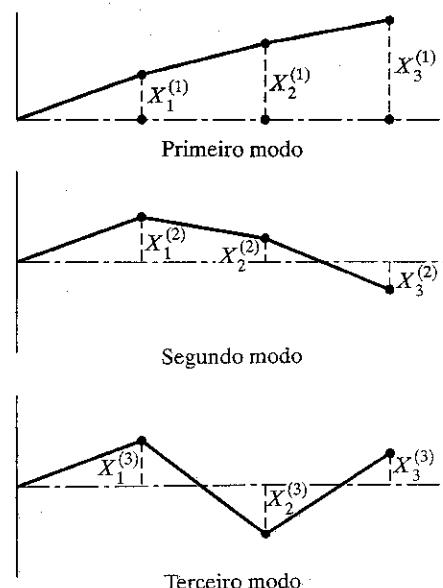


FIGURA 6.12 Formas modais de sistema com três graus de liberdade.

6.10.2 Ortogonalidade de modos normais

Na seção anterior, consideramos um método para determinar as n freqüências naturais ω_i e os modos normais ou vetores modais $\vec{X}^{(i)}$ correspondentes. Agora, veremos uma importante propriedade dos modos normais — *ortogonalidade*. A freqüência natural ω_i e o vetor modal correspondente $\vec{X}^{(i)}$ satisfazem a Equação (6.61) de modo que

$$\omega_i^2 [m] \vec{X}^{(i)} = [k] \vec{X}^{(i)} \quad (6.69)$$

Se considerarmos outra freqüência natural ω_j e o vetor modal $\vec{X}^{(j)}$ correspondente, eles também satisfazem a Equação (6.61) de modo que

$$\omega_j^2 [m] \vec{X}^{(j)} = [k] \vec{X}^{(j)} \quad (6.70)$$

Pré-multiplicando as equações (6.69) e (6.70) por $\vec{X}^{(j)T}$ e $\vec{X}^{(i)T}$, respectivamente, obtemos, considerando a simetria das matrizes $[k]$ e $[m]$,

$$\omega_i^2 \vec{X}^{(j)T} [m] \vec{X}^{(i)} = \vec{X}^{(j)T} [k] \vec{X}^{(i)} = \vec{X}^{(i)T} [k] \vec{X}^{(j)} \quad (6.71)$$

$$\omega_j^2 \vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(j)} = \omega_j^2 \vec{X}^{(j)T} [m] \vec{X}^{(i)} = \vec{X}^{(i)T} [k] \vec{X}^{(j)} \quad (6.72)$$

Subtraindo a Equação (6.72) da Equação (6.71), obtemos

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \vec{X}^{(j)T} [m] \vec{X}^{(i)} = 0 \quad (6.73)$$

Em geral, $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, portanto, a Equação (6.73) resulta em⁴

$$\vec{X}^{(j)T} [m] \vec{X}^{(i)} = 0, \quad i \neq j \quad (6.74)$$

Pelas equações (6.71) e (6.72), obtemos, em vista da Equação (6.74),

$$\vec{X}^{(j)T} [k] \vec{X}^{(i)} = 0, \quad i \neq j \quad (6.75)$$

As equações (6.74) e (6.75) indicam que os vetores modais $\vec{X}^{(i)}$ e $\vec{X}^{(j)}$ são ortogonais em relação às matrizes de massa e de rigidez.

Quando $i = j$, os lados esquerdos das equações (6.74) e (6.75) não são iguais a zero, mas resultam em coeficientes de massa e rigidez generalizadas do i -ésimo modo:

$$M_{ii} = \vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.76)$$

$$K_{ii} = \vec{X}^{(i)T} [k] \vec{X}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.77)$$

As equações (6.76) e (6.77) podem ser escritas em forma matricial como

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] &= \begin{bmatrix} M_{11} & & & 0 \\ & M_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_{nn} \end{bmatrix} \\ &= [X]^T [m] [X] \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{11} & & & 0 \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T [k] [X] \quad (6.79)$$

onde $[X]$ é denominada *matriz modal*, na qual a i -ésima coluna corresponde ao i -ésimo vetor modal:

$$[X] = [\vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(2)} \dots \vec{X}^{(n)}] \quad (6.80)$$

Em muitos casos, normalizamos os vetores modais $\vec{X}^{(i)}$ de modo que $[\mathbf{M}] = [I]$, isto é,

$$\vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(i)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.81)$$

Nesse caso, a matriz $[\mathbf{K}]$ reduz-se a

$$[\mathbf{K}] = [\omega_i^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

EXEMPLO 6.11

Ortonormalização de autovetores

Ortonormalize os autovetores do Exemplo 6.10 em relação à matriz de massa.

Solução:

Abordagem: Multiplique cada autovetor por uma constante e determine seu valor pela relação $\vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(i)} = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Os autovetores do Exemplo 6.10 são dados por

$$\vec{X}^{(1)} = X_1^{(1)} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 1,8019 \\ 2,2470 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = X_1^{(2)} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,4450 \\ -0,8020 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(3)} = X_1^{(3)} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ -1,2468 \\ 0,5544 \end{Bmatrix}$$

A matriz de massa é dada por

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⁴ No caso de autovalores repetidos, $\omega_i = \omega_j$, os vetores modais associados são ortogonais a todos os vetores modais remanescentes, porém, normalmente, não são ortogonais um ao outro.

Diz-se que o autovetor $\vec{X}^{(i)}$ é $[m]$ -ortonormal se a seguinte condição for satisfeita:

$$\vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(i)} = 1 \quad (E.1)$$

Assim, para $i = 1$, a Equação (E.1) dá como resultado

$$m(X_1^{(1)})^2 (1,0^2 + 1,8019^2 + 2,2470^2) = 1$$

ou

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{m(9,2959)}} = \frac{0,3280}{\sqrt{m}}$$

De maneira semelhante, para $i = 2$ e $i = 3$, a Equação (E.1) dá

$$m(X_1^{(2)})^2 (1,0^2 + 0,4450^2 + (-0,8020)^2) = 1$$

$$\text{ou } X_1^{(2)} = \frac{0,7370}{\sqrt{m}}$$

e

$$m(X_1^{(3)})^2 (1,0^2 + (-1,2468)^2 + 0,5544^2) = 1$$

$$\text{ou } X_1^{(3)} = \frac{0,5911}{\sqrt{m}}$$

6.10.3 Autovalores repetidos

Quando a equação característica possui raízes repetidas, as formas modais correspondentes não são únicas. Para ver isso, consideramos que as formas modais $\vec{X}^{(1)}$ e $\vec{X}^{(2)}$ correspondem ao autovetor repetido $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e consideramos $\vec{X}^{(3)}$ como a forma modal correspondente a um autovetor diferente λ_3 . A Equação (6.66) pode ser escrita como

$$[D] \vec{X}^{(1)} = \lambda \vec{X}^{(1)} \quad (6.83)$$

$$[D] \vec{X}^{(2)} = \lambda \vec{X}^{(2)} \quad (6.84)$$

$$[D] \vec{X}^{(3)} = \lambda_3 \vec{X}^{(3)} \quad (6.85)$$

Multiplicando a Equação (6.83) por uma constante p e somando-a com a Equação (6.84), obtemos

$$[D] (p \vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}) = \lambda (p \vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}) \quad (6.86)$$

Isso mostra que a nova forma modal, $(p \vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)})$, que é uma combinação linear das duas primeiras, também satisfaz a Equação (6.66), portanto a forma modal correspondente a λ não é única. Qualquer \vec{X} correspondente a λ deve ser ortogonal a $\vec{X}^{(3)}$, caso ele seja um modo normal. Se todos os três modos forem ortogonais, eles serão linearmente independentes e podem ser usados para descrever a vibração livre resultante de quaisquer condições iniciais.

A resposta de um sistema com vários graus de liberdade com freqüências naturais repetidas à excitação de força e deslocamento foi apresentada por Mahalingam e Bishop [6.16].

EXEMPLO 6.12

Autovalores repetidos

Determine os autovalores e autovetores de um sistema vibratório para o qual

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [k] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A equação de autovetor $[[k] - \lambda[m]] \vec{X} = \vec{0}$ pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} (1 - \lambda) & -2 & 1 \\ -2 & 2(2 - \lambda) & -2 \\ 1 & -2 & (1 - \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (E.1)$$

onde $\lambda = \omega^2$. A equação característica dá

$$|[k] - \lambda[m]| = \lambda^2(\lambda - 4) = 0$$

portanto,

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4 \quad (E.2)$$

Autovetor para $\lambda_3 = 4$: Utilizando $\lambda_3 = 4$: A Equação (E.1) dá

$$\begin{aligned} -3X_1^{(3)} - 2X_2^{(3)} + X_3^{(3)} &= 0 \\ -2X_1^{(3)} - 4X_2^{(3)} - 2X_3^{(3)} &= 0 \\ X_1^{(3)} - 2X_2^{(3)} - 3X_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (E.3)$$

Se fizermos $X_1^{(3)}$ igual a 1, as Equações (E.3) dão o autovetor $\vec{X}^{(3)}$:

$$\vec{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (E.4)$$

Autovetor para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: O valor $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$ indica que o sistema é degenerado (ver Seção 6.12). Utilizando $\lambda_1 = 0$ na Equação (E.1), obtemos

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} - 2X_2^{(1)} + X_3^{(1)} &= 0 \\ -2X_1^{(1)} + 4X_2^{(1)} - 2X_3^{(1)} &= 0 \\ X_1^{(1)} - 2X_2^{(1)} + X_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (E.5)$$

Todas essas equações são da forma

$$X_1^{(1)} = 2X_2^{(1)} - X_3^{(1)}$$

Assim, o autovetor correspondente a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ pode ser escrito como

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 2X_2^{(1)} - X_3^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (E.6)$$

Se escolhermos $X_2^{(1)} = 1$ e $X_3^{(1)} = 1$, obteremos

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (E.7)$$

Se escolhermos $X_2^{(1)} = 1$ e $X_3^{(1)} = -1$, a Equação (E.6) dará

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (E.8)$$

Como mostramos antes na Equação (6.86), $\vec{X}^{(1)}$ e $\vec{X}^{(2)}$ não são únicos: qualquer combinação linear de $\vec{X}^{(1)}$ e $\vec{X}^{(2)}$ também satisfará a equação original (E.1). Observe que $\vec{X}^{(1)}$ dado pela Equação (E.6) é ortogonal a $\vec{X}^{(3)}$ da Equação (E.4) para todos os valores de $X_2^{(1)}$ e $X_3^{(1)}$, visto que

$$\vec{X}^{(3)T} [m] \vec{X}^{(1)} \\ = (1 \ -1 \ 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 2X_2^{(1)} - X_3^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{array} \right\} = 0$$

6.11 Teorema de expansão

Os autovetores, devido à sua propriedade de ortogonalidade, são linearmente independentes.⁵ Por consequência, eles formam uma base no espaço n -dimensional.⁶ Isso significa que qualquer vetor no espaço n -dimensional pode ser expresso por uma combinação linear dos n vetores linearmente independentes. Se \vec{x} for um vetor arbitrário no espaço n -dimensional, ele pode ser expresso como

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{X}^{(i)} \quad (6.87)$$

onde c_i é constante. Pré-multiplicando a Equação (6.87) por $\vec{X}^{(i)T} [m]$, o valor da constante c_i pode ser determinado como

$$c_i = \frac{\vec{X}^{(i)T} [m] \vec{x}}{\vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(i)}} = \frac{\vec{X}^{(i)T} [m] \vec{x}}{M_{ii}},$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (6.88)$$

onde M_{ii} é a massa generalizada no i -ésimo modo normal. Se os vetores modais forem normalizados de acordo com a Equação (6.81), c_i é dada por

$$c_i = \vec{X}^{(i)T} [m] \vec{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.89)$$

A Equação (6.89) representa o que é conhecido como o *teorema de expansão* [6.6]. Ele é muito útil para determinar

a resposta de sistemas com vários graus de liberdade sujeitos a condições forçantes quaisquer, de acordo com um procedimento denominado *análise modal*.

6.12 Sistemas irrestritos

Como afirmamos na Seção 5.7, um sistema não restrito é aquele que não tem restrições nem suportes e pode mover-se como um corpo rígido. Não é incomum ver, na prática, sistemas que não estão ligados a nenhuma estrutura estacionária. Um exemplo comum é o movimento de dois vagões ferroviários com massas m_1 e m_2 e uma mola de ligação k . Tais sistemas são capazes de mover-se como corpos rígidos, o que pode ser considerado como modos de oscilação com freqüência zero. Para um sistema conservativo, as energias cinética e potencial são dadas pelas equações (6.34) e (6.30), respectivamente. Por definição, a energia cinética é sempre positiva, portanto, a matriz de massa $[m]$ é uma matriz positiva definida. Contudo, a matriz de rigidez $[k]$ é uma matriz semidefinita: V é zero sem que o vetor de deslocamento \vec{x} seja zero para sistemas irrestritos. Para ver isso, considere a equação de movimento para vibração livre em coordenadas normais:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (6.90)$$

Para $\omega = 0$, a solução da Equação (6.90) pode ser expressa como

$$q(t) = \alpha + \beta t \quad (6.91)$$

onde α e β são constantes. A Equação (6.91) representa a translação de um corpo rígido. Vamos denotar por $\vec{X}^{(0)}$ o vetor modal de um sistema com vários graus de liberdade correspondente ao modo de corpo rígido. O problema de autovalor, Equação (6.64), pode ser expresso como

$$\omega^2 [m] \vec{X}^{(0)} = [k] \vec{X}^{(0)} \quad (6.92)$$

com $\omega = 0$, a Equação (6.92) dá

$$[k] \vec{X}^{(0)} = \vec{0}$$

Isto é

$$k_{11} X_1^{(0)} + k_{12} X_2^{(0)} + \dots + k_{1n} X_n^{(0)} = 0$$

$$k_{21} X_1^{(0)} + k_{22} X_2^{(0)} + \dots + k_{2n} X_n^{(0)} = 0$$

.

.

$$k_{n1} X_1^{(0)} + k_{n2} X_2^{(0)} + \dots + k_{nn} X_n^{(0)} = 0 \quad (6.93)$$

Se o sistema sofrer translação de corpo rígido; nem todos os componentes $X_i^{(0)}$ $i = 1, 2, \dots, n$, são zero, isto é o vetor $\vec{X}^{(0)}$ não é igual a $\vec{0}$. Por consequência, para satisfazer a Equação (6.93), o determinante de $[k]$ deve ser zero. Assim, a matriz de rigidez de um sistema não restrito (que tenha freqüência natural zero) é singular. Se $[k]$ é singular, a energia potencial é dada por

$$V = \frac{1}{2} \vec{X}^{(0)T} [k] \vec{X}^{(0)} \quad (6.94)$$

⁵ Um conjunto de vetores é denominado linearmente independente se nenhum vetor no conjunto puder ser obtido por uma combinação linear dos vetores remanescentes.

⁶ Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes em um espaço n -dimensional é denominado uma *base* nesse espaço.

em virtude da Equação (6.93). O modo $\vec{X}^{(0)}$ é denominado *modo zero ou modo de corpo rígido*. Se substituirmos qualquer vetor \vec{X} , exceto $\vec{X}^{(0)}$ e $\vec{0}$, por \vec{x} na Equação (6.30), a energia potencial V torna-se uma quantidade positiva. Então, a matriz $[k]$ é uma matriz positiva semidefinida. É por isso que um sistema não restrinido é também denominado um *sistema semidefinido*.

Observe que um sistema com vários graus de liberdade pode ter no máximo seis modos de corpo rígido com as freqüências correspondentes iguais a zero. Pode haver três modos para translação de corpo rígido, um para a translação ao longo da cada uma das três coordenadas cartesianas, e três modos para rotação de corpo rígido, um para a rotação em relação a cada uma das três coordenadas cartesianas. Podemos determinar as formas modais e freqüências naturais de um sistema semidefinido pelos procedimentos esquematizados na Seção 6.10.

EXEMPLO 6.13

Freqüências naturais de um sistema livre

Três vagões de carga estão acoplados por duas molas, como mostra a Figura 6.13. Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema para $m_1 = m_2 = m_3 = m$ e $k_1 = k_2 = k$.

Solução: A energia cinética do sistema pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2) = \frac{1}{2}\vec{x}^T [m] \vec{x} \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}$$

e

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

As elongações das molas k_1 e k_2 são $(x_2 - x_1)$ e $(x_3 - x_2)$, respectivamente, portanto, a energia potencial do sistema é dada por

$$V = \frac{1}{2}\{k_1(x_2 - x_1)^2 + k_2(x_3 - x_2)^2\} = \frac{1}{2}\vec{x}^T [k] \vec{x} \quad (\text{E.3})$$

onde

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

Podemos verificar que a matriz de rigidez $[k]$ é singular. Ademais, se considerarmos que todos os componentes do deslocamento são os mesmos que $x_1 = x_2 = x_3 = c$ (movimento

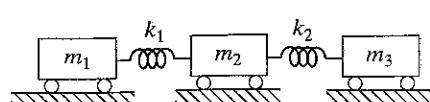


FIGURA 6.13 Sistema semidefinido.

de corpo rígido), a energia potencial V pode ser considerada igual a zero.

Para determinar as freqüências naturais e as formas modais do sistema, expressamos o problema de autovalor como

$$[[k] - \omega^2[m]] \vec{X} = \vec{0} \quad (\text{E.5})$$

Visto que $[k]$ é singular, não podemos determinar sua inversa $[k]^{-1}$ e a matriz dinâmica $[D] = [k]^{-1}[m]$. Por consequência, igualamos a zero o determinante da matriz de coeficientes de \vec{X} na Equação (E.5). Para $k_1 = k_2 = k$ e $m_1 = m_2 = m_3 = m$, isso resulta em

$$\begin{vmatrix} (k - \omega^2m) & -k & 0 \\ -k & (2k - \omega^2m) & -k \\ 0 & -k & (k - \omega^2m) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{E.6})$$

A expansão do determinante na Equação (E.6) leva a

$$m^3\omega^6 - 4m^2k\omega^4 + 3mk^2\omega^2 = 0 \quad (\text{E.7})$$

Fazendo

$$\lambda = \omega^2 \quad (\text{E.8})$$

a Equação (E.7) pode ser reescrita como

$$m\lambda\left(\lambda - \frac{k}{m}\right)\left(\lambda - \frac{3k}{m}\right) = 0 \quad (\text{E.9})$$

Como $m \neq 0$, as raízes de Equação (E.9) são

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = 0$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{k}{m}$$

$$\lambda_3 = \omega_3^2 = \frac{3k}{m} \quad (\text{E.10})$$

Podemos observar que a primeira freqüência natural ω_1 é zero na Equação (E.10). Para determinar as formas modais, substituímos os valores de ω_1 , ω_2 e ω_3 na Equação (E.5) e resolvemos para $\vec{X}^{(1)}$, $\vec{X}^{(2)}$ e $\vec{X}^{(3)}$, respectivamente. Para $\omega_1 = 0$, a Equação (E.5) dá

$$\begin{aligned} kX_1^{(1)} - kX_2^{(1)} &= 0 \\ -kX_1^{(1)} + 2kX_2^{(1)} - kX_3^{(1)} &= 0 \\ -kX_2^{(1)} + kX_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Fixando o valor de um componente de $\vec{X}^{(1)}$, digamos, $X_1^{(1)}$, como 1, a Equação (E.11) pode ser resolvida para obter

$$X_2^{(1)} = X_1^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad X_3^{(1)} = X_2^{(1)} = 1$$

Assim, o primeiro modo (corpo rígido) $\vec{X}^{(1)}$ correspondente a $\omega_1 = 0$ é dado por

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.12})$$

Para $\omega_2 = (k/m)^{1/2}$, a Equação (E.5) resulta em

$$\begin{aligned} -kX_2^{(2)} &= 0 \\ -kX_1^{(2)} + kX_2^{(2)} - kX_3^{(2)} &= 0 \\ -kX_2^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Fixando o valor de um componente de $\vec{X}^{(2)}$, digamos, $X_1^{(2)}$, como 1, a Equação (E.13) pode ser resolvida para obter

$$X_2^{(2)} = 0 \quad \text{e} \quad X_3^{(2)} = -X_1^{(2)} = -1$$

Assim, o segundo modo $\vec{X}^{(2)}$ correspondente a $\omega_2 = (k/m)^{1/2}$ é dado por

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

Para $\omega_3 = (3k/m)^{1/2}$, a Equação (E.5) dá

$$\begin{aligned} -2kX_1^{(3)} - kX_2^{(3)} &= 0 \\ -kX_1^{(3)} - kX_2^{(3)} - kX_3^{(3)} &= 0 \\ -kX_2^{(3)} - 2kX_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Fixando o valor de um componente de $\vec{X}^{(3)}$, digamos, $X_3^{(3)}$, como 1, a Equação (E.15) pode ser resolvida para obter

$$X_2^{(3)} = -2X_1^{(3)} = -2 \quad \text{e} \quad X_3^{(3)} = -\frac{1}{2}X_2^{(3)} = 1$$

Assim, o terceiro modo $\vec{X}^{(3)}$ correspondente a $\omega_3 = (3k/m)^{1/2}$ é dado por

$$\vec{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.16})$$

6.13 Vibração livre de sistemas não amortecidos

A equação de movimento para a vibração livre de um sistema não amortecido pode ser expressa em forma matricial como

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{0} \quad (\text{E.95})$$

A solução mais geral da Equação (6.95) pode ser expressa como uma combinação linear de todas as possíveis soluções dadas pelas equações (6.56) e (6.62) como

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{X}^{(i)} A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (\text{E.96})$$

onde $\vec{X}^{(i)}$ é o i -ésimo vetor modal e ω_i é a freqüência natural correspondente, e A_i e ϕ_i são constantes. As constantes A_i e ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) podem ser avaliadas pelas condições iniciais especificadas do sistema. Se

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{E.97})$$

denotarem os deslocamentos e velocidades iniciais dados ao sistema, a Equação (6.96) dá

$$\vec{x}(0) = \sum_{i=1}^n \vec{X}^{(i)} A_i \cos \phi_i \quad (6.98)$$

$$\dot{\vec{x}}(0) = -\sum_{i=1}^n \vec{X}^{(i)} A_i \omega_i \sin \phi_i \quad (6.99)$$

As equações (6.98) e (6.99) representam, em forma escalar, $2n$ equações simultâneas que podem ser resolvidas para determinar os n valores de A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e os n valores de ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

EXEMPLO 6.14

Análise de vibração livre de um sistema massa-mola

Determine a resposta de vibração livre do sistema massa-mola mostrado na Figura 6.8(a) correspondente às condições iniciais $\dot{x}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$. Suponha que $k_1 = k$ e $m_i = m$ para $i = 1, 2, 3$.

Solução:

Abordagem: Considere que a resposta de vibração livre é uma soma dos modos naturais.

As freqüências naturais e formas modais do sistema são dadas por (ver Exemplo 6.10):

$$\omega_1 = 0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1,2471 \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\omega_3 = 1,8025 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 1,8019 \\ 2,2470 \end{Bmatrix}, \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,4450 \\ -0,8020 \end{Bmatrix},$$

$$\vec{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ -1,2468 \\ 0,5544 \end{Bmatrix}$$

onde, por simplicidade, considera-se que o primeiro componente de cada forma modal é igual à unidade. A aplicação das condições iniciais, equações (6.98) e (6.99), resulta em

$$A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 + A_3 \cos \phi_3 = x_{10} \quad (\text{E.1})$$

$$1,8019 A_1 \cos \phi_1 + 0,4450 A_2 \cos \phi_2 - 1,2468 A_3 \cos \phi_3 = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$2,2470 A_1 \cos \phi_1 - 0,8020 A_2 \cos \phi_2 + 0,5544 A_3 \cos \phi_3 = 0 \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} -0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \sin \phi_1 - 1,2471 \sqrt{\frac{k}{m}} A_2 \sin \phi_2 \\ - 1,8025 \sqrt{\frac{k}{m}} A_3 \sin \phi_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} -0,80192 \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \operatorname{sen} \phi_1 - 0,55496 \sqrt{\frac{k}{m}} A_2 \operatorname{sen} \phi_2 \\ + 2,2474 \sqrt{\frac{k}{m}} A_3 \operatorname{sen} \phi_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} -1,0 \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \operatorname{sen} \phi_1 + 1,0 \sqrt{\frac{k}{m}} A_2 \operatorname{sen} \phi_2 \\ - 1,0 \sqrt{\frac{k}{m}} A_3 \operatorname{sen} \phi_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

A solução das equações (E.1) a (E.6) é dada por⁷ $A_1 = 0,1076x_{10}$, $A_2 = 0,5431x_{10}$, $A_3 = 0,3493x_{10}$, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$ e $\phi_3 = 0$. Assim, a solução de vibração livre do sistema pode ser expressa como

$$\begin{aligned} x_1(t) = x_{10} & \left[0,1076 \cos \left(0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right. \\ & + 0,5431 \cos \left(1,2471 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \\ & \left. + 0,3493 \cos \left(1,8025 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = x_{10} & \left[0,1939 \cos \left(0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right. \\ & + 0,2417 \cos \left(1,2471 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \\ & \left. - 0,4355 \cos \left(1,8025 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = x_{10} & \left[0,2418 \cos \left(0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right. \\ & - 0,4356 \cos \left(1,2471 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \\ & \left. + 0,1937 \cos \left(1,8025 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

⁷ Observe que as equações (E.1) a (E.3) podem ser consideradas um sistema de equações lineares nas incógnitas $A_1 \cos \phi_1$, $A_2 \cos \phi_2$ e $A_3 \cos \phi_3$, ao passo que as equações (E.4) a (E.6) podem ser consideradas um conjunto de equações lineares nas incógnitas

$$\sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \operatorname{sen} \phi_1, \quad \sqrt{\frac{k}{m}} A_2 \operatorname{sen} \phi_2, \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{k}{m}} A_3 \operatorname{sen} \phi_3$$

6.14 Vibração forçada de sistemas não amortecidos utilizando análise modal

Quando forças externas agem sobre um sistema com vários graus de liberdade, o sistema sofre vibração forçada. Para um sistema com n coordenadas ou graus de liberdade, as equações de movimento governantes são um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem ordinárias acopladas. A solução dessas equações torna-se mais complexa quando o grau de liberdade do sistema (n) é grande e/ou quando as funções forçantes são não-periódicas.⁸ Nesses casos, um método mais conveniente, conhecido como *análise modal*, pode ser usado para resolver o problema. Nesse método, é usado o teorema de expansão, e os deslocamentos das massas são expressos como uma combinação linear dos modos normais do sistema. Essa transformação linear desacopla as equações de movimento, de modo que obtemos um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem não acopladas. A solução dessas equações, que é equivalente à solução das equações de n sistemas com um grau de liberdade, pode ser obtida imediatamente. Agora, consideraremos o procedimento de análise modal.

Análise modal. As equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade sob a ação de forças externas são dadas por

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \quad (6.100)$$

onde \vec{F} é o vetor de forças externas arbitrárias. Para resolver a Equação (6.100) por análise modal, em primeiro lugar é necessário resolver o problema de autovalor.

$$\omega^2 [m] \vec{X} = [k] \vec{X} \quad (6.101)$$

e determinar as freqüências naturais $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ e os modos normais correspondentes $\vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(2)} \dots \vec{X}^{(n)}$. De acordo com o teorema de expansão, o vetor solução da Equação (6.100) pode ser expresso por uma combinação linear dos modos normais

$$\vec{x}(t) = q_1(t) \vec{X}^{(1)} + q_2(t) \vec{X}^{(2)} + \dots + q_n(t) \vec{X}^{(n)} \quad (6.102)$$

onde $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ são coordenadas generalizadas dependentes do tempo, também conhecidas como *coordenadas principais* ou *coeficientes de participação modal*. Se definirmos a matriz modal $[X]$ na qual a j -ésima coluna é o vetor $\vec{X}^{(j)}$, isto é,

$$[X] = [\vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(2)} \dots \vec{X}^{(n)}] \quad (6.103)$$

a Equação (6.102) pode ser reescrita como

$$\vec{x}(t) = [X] \vec{q}(t) \quad (6.104)$$

onde

$$\vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix} \quad (6.105)$$

⁸ A resposta dinâmica de sistemas com vários graus de liberdade com propriedades estatísticas é considerada na Referência [6.15].

Visto que $[X]$ não é função do tempo, obtemos, pela Equação (6.104)

$$\ddot{\vec{x}}(t) = [X] \ddot{\vec{q}}(t) \quad (6.106)$$

Utilizando as equações (6.104) e (6.106), podemos escrever a Equação (6.100) como

$$[m][X] \ddot{\vec{q}} + [k][X] \vec{q} = \vec{F} \quad (6.107)$$

Pré-multiplicando toda a Equação (6.107) por $[X]^T$, obtemos

$$[X]^T [m][X] \ddot{\vec{q}} + [X]^T [k][X] \vec{q} = [X]^T \vec{F} \quad (6.108)$$

Se os modos normais forem normalizados de acordo com as equações (6.74) e (6.75), temos

$$[X]^T [m][X] = [I] \quad (6.109)$$

$$[X]^T [k][X] = [\nabla \omega^2] \quad (6.110)$$

Definindo o vetor de forças generalizadas $\vec{Q}(t)$ associado às coordenadas generalizadas $\vec{q}(t)$ como

$$\vec{Q}(t) = [X]^T \vec{F}(t) \quad (6.111)$$

a Equação (6.108) pode ser expressa, utilizando as equações (6.109) e (6.110), como

$$\ddot{\vec{q}}(t) + [\nabla \omega^2] \vec{q}(t) = \vec{Q}(t) \quad (6.112)$$

A Equação (6.112) denota um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem não acopladas⁹

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.113)$$

Podemos ver que a Equação (6.113) tem a forma exata da equação diferencial que descreve o movimento de um sistema não amortecido com um grau de liberdade. A solução da Equação (6.113) pode ser expressa como (ver Equação 4.33)

$$\begin{aligned} q_i(t) &= q_i(0) \cos \omega_i t + \left(\frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i} \right) \sin \omega_i t \\ &+ \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau, \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6.114)$$

Os deslocamentos generalizados iniciais $q_i(0)$ e as velocidades generalizadas iniciais $\dot{q}_i(0)$ podem ser obtidos pelos valores iniciais dos deslocamentos físicos $x_i(0)$ e velocidades físicas como $\dot{x}_i(0)$ (ver Problema 6.79):

$$\vec{q}(0) = [X]^T [m] \vec{x}(0) \quad (6.115)$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = [X]^T [m] \vec{x}'(0) \quad (6.116)$$

onde

$$\vec{q}(0) = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_n(0) \end{Bmatrix},$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(0) \end{Bmatrix},$$

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix},$$

$$\vec{x}'(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix}$$

Uma vez determinados os deslocamentos generalizados $q_i(t)$ com a utilização das equações (6.114) a (6.116), podemos determinar os deslocamentos físicos $x_i(t)$ com a ajuda da Equação (6.104).

EXEMPLO 6.15

Resposta de vibração livre utilizando análise modal

Utilizando análise modal, determine a resposta de vibração livre de um sistema com dois graus de liberdade cujas equações de movimento são:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ = \vec{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

⁹ É possível aproximar o vetor solução $\vec{x}(t)$ por apenas r ($r < n$) primeiros vetores modais em vez de por n vetores como na Equação 6.102.

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^r q_i(t) \vec{x}_i$$

onde

$$[X] = [\vec{x}_1^{(1)} \vec{x}_2^{(2)} \dots \vec{x}_r^{(r)}] \quad \text{and} \quad \vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_r(t) \end{Bmatrix}$$

Isso resulta em apenas r equações diferenciais não acopladas

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

em vez de n equações. A solução resultante $\vec{x}(t)$ será uma solução aproximada. Esse procedimento é denominado método do deslocamento de modo. Um procedimento alternativo, conhecido como método de aceleração de modo para determinar uma solução aproximada, é indicado no Problema 6.77.

Considere os seguintes dados: $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $k_1 = 30$, $k_2 = 5$, $k_3 = 0$ e

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Solução: As freqüências naturais e modos normais do sistema são dadas por (ver Exemplo 5.3)

$$\omega_1 = 1,5811, \quad \vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} X_1^{(1)}$$

$$\omega_2 = 2,4495, \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} X_1^{(2)}$$

onde $X_1^{(1)}$ e $X_1^{(2)}$ são constantes arbitrárias. Pela ortogonalização dos modos normais em relação à matriz de massa, podemos determinar os valores de $X_1^{(1)}$ e $X_1^{(2)}$ como

$$\vec{X}^{(1)T} [m] \vec{X}^{(1)} = 1 \Rightarrow (X_1^{(1)})^2 \{1 \ 2\} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 1$$

$$\text{ou } X_1^{(1)} = 0,2673$$

$$\vec{X}^{(2)T} [m] \vec{X}^{(2)} = 1 \Rightarrow (X_1^{(2)})^2 \{1 \ -5\} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} = 1$$

$$\text{ou } X_1^{(2)} = 0,1690$$

Assim, a matriz modal torna-se

$$[X] = \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)} & \vec{X}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2673 & 0,1690 \\ 0,5346 & -0,8450 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Utilizando

$$\vec{x}(t) = [X] \vec{q}(t) \quad (\text{E.4})$$

a Equação (E.1) pode ser expressa como (ver Equação 6.112):

$$\ddot{\vec{q}}(t) + [\nabla \omega^2] \vec{q}(t) = \vec{Q}(t) = \vec{0} \quad (\text{E.5})$$

onde $\vec{Q}(t) = [X]^T \vec{F} = \vec{0}$. A Equação (E.5) pode ser escrita em forma escalar como

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (\text{E.6})$$

A solução da Equação (E.6) é dada por (ver Equação 2.18):

$$q_i(t) = q_{i0} \cos \omega_i t + \frac{\dot{q}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t \quad (\text{E.7})$$

onde q_{i0} e \dot{q}_{i0} denotam os valores iniciais de $q_i(t)$ e $\dot{q}_i(t)$, respectivamente. Utilizando as condições iniciais da Equação (E.2), podemos determinar (ver equações 6.115 e 6.116):

$$\begin{aligned} \vec{q}(0) &= \begin{Bmatrix} q_{10}(0) \\ q_{20}(0) \end{Bmatrix} = [X]^T [m] \vec{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} 0,2673 & 0,5346 \\ 0,1690 & -0,8450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 2,673 \\ 1,690 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_{10}(0) \\ \dot{q}_{20}(0) \end{Bmatrix} = [X]^T [m] \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

As equações (E.7) a (E.9) resultam em

$$q_1(t) = 2,673 \cos 1,5811 t \quad (\text{E.10})$$

$$q_2(t) = 1,690 \cos 2,4495 t \quad (\text{E.11})$$

Utilizando as Equações (E.4), obtemos os deslocamentos das massas m_1 e m_2 como

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 0,2673 & 0,1690 \\ 0,5346 & -0,8450 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2,673 \cos 1,5811 t \\ 1,690 \cos 2,4495 t \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,7145 \cos 1,5811 t + 0,2856 \cos 2,4495 t \\ 1,4280 \cos 1,5811 t - 1,4280 \cos 2,4495 t \end{Bmatrix} \quad (\text{E.12})$$

Podemos ver que essa solução é idêntica à obtida no Exemplo 5.3 e apresentada em gráfico no Exemplo 5.12.

EXEMPLO 6.1.6

Resposta de vibração forçada de um martelo de forjar

A força que age sobre a peça de trabalho submetida ao martelo de forjar mostrado na Figura 5.41 resultante do impacto do martelo pode ser aproximada como um pulso retangular, como mostra a Figura 6.14(a). Determine a vibração resultante do sistema para os seguintes dados: massa da peça a forjar, bigorna e estrutura ($m_1 = 200$ Mg), massa do bloco da base ($m_2 = 250$ Mg), rigidez do coxim elástico ($k_1 = 150$ MN.m) e rigidez do solo ($k_2 = 75$ MN.m). Considere os deslocamentos iniciais e velocidades iniciais das massas como zero.

Solução: O martelo de forjar pode ser modelado como um sistema com dois graus de liberdade, como indicado na Figura 6.14(b). As equações de movimento do sistema podem ser expressas como

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F}(t) \quad (\text{E.1})$$

onde

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix} \text{Mg}$$

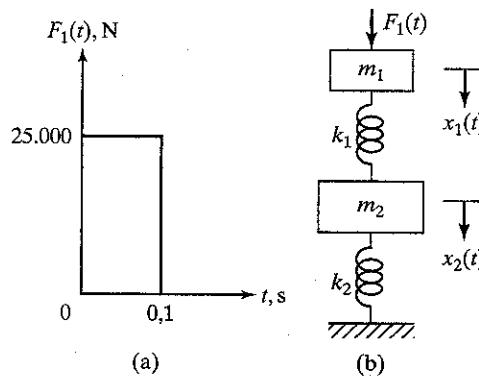


FIGURA 6.14 Impacto causado por um martelo de forjar.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix} \text{ MN/m}$$

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} F_1(t) \\ 0 \end{cases}$$

Freqüências naturais e formas modais: As freqüências naturais do sistema podem ser determinadas resolvendo a equação de freqüência

$$|-\omega^2 [m] + [k]| = \left| -\omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix} 10^5 + \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix} 10^6 \right| = 0 \quad (\text{E.2})$$

como

$$\omega_1 = 12,2474 \text{ rad/s, e } \omega_2 = 38,7298 \text{ rad/s}$$

As formas modais podem ser determinadas como

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{cases} 1 \\ 0,8 \end{cases} \quad \text{e} \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Ortonormalização de formas modais: Consideramos que as formas modais são

$$\vec{X}^{(1)} = a \begin{cases} 1 \\ 0,8 \end{cases} \quad \text{e} \quad \vec{X}^{(2)} = b \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

onde a e b são constantes. As constantes a e b podem ser determinadas pela normalização dos vetores $\vec{X}^{(1)}$ e $\vec{X}^{(2)}$ como

$$[X]^T [m] [X] = [I] \quad (\text{E.3})$$

onde $[X] = [\vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(2)}]$ denota a matriz modal. A Equação (E.3) dá $a = 1,6667 \times 10^{-3}$ e $b = 1,4907 \times 10^{-3}$, o que significa que a nova matriz modal (com formas modais normalizadas) torna-se

$$[X] = [\vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1,6667 & 1,4907 \\ 1,3334 & -1,4907 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Resposta em termos de coordenadas generalizadas: Visto que as duas massas m_1 e m_2 estão em repouso em $t = 0$, as

condições iniciais são $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ e, por consequência, as equações (6.115) e (6.116) dão $q_1(0) = q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$. Assim, as coordenadas generalizadas são dadas pela solução das equações

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \operatorname{sen} \omega_i(t - \tau) d\tau, i = 1, 2 \quad (\text{E.4})$$

onde

$$\vec{Q}(t) = [X]^T \vec{F}(t) \quad (\text{E.5})$$

ou

$$\begin{cases} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1,6667 & 1,3334 \\ 1,4907 & -1,4907 \end{bmatrix} 10^{-3} \begin{cases} F_1(t) \\ 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1,6667 \times 10^{-3} F_1(t) \\ 1,4907 \times 10^{-3} F_1(t) \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

com $F_1(t) = 25.000 \text{ N}$ para $0 \leq t \leq 0,1 \text{ s}$ e 0 para $t > 0,1 \text{ s}$. Utilizando a Equação (6.104), os deslocamentos das massas podem ser determinados como

$$\begin{cases} x_1(t) \\ x_2(t) \end{cases} = [X] \vec{q}(t)$$

$$= \begin{cases} 1,6667 q_1(t) + 1,4907 q_2(t) \\ 1,3334 q_1(t) - 1,4907 q_2(t) \end{cases} 10^{-3} \text{ m} \quad (\text{E.7})$$

onde

$$q_1(t) = 3,4021 \int_0^t \operatorname{sen} 12,2474 (t - \tau) d\tau$$

$$= 0,2778 (1 - \cos 12,2474 t)$$

$$q_2(t) = 0,9622 \int_0^t \operatorname{sen} 38,7298 (t - \tau) d\tau$$

$$= 0,02484 (1 - \cos 38,7298 t) \quad (\text{E.8})$$

Observe que a solução dada pela Equação (E.8) é válida para $0 \leq 0,1 \text{ s}$. Para $t > 0,1 \text{ s}$, não há nenhuma força aplicada e, por consequência, a resposta é dada pela solução de vibração livre de um sistema não amortecido com um grau de liberdade (Equação 2.18) para $q_1(t)$ e $q_2(t)$ com $q_1(0,1)$ e $\dot{q}_1(0,1)$ e $q_2(0,1)$ e $\dot{q}_2(0,1)$ como condições iniciais, respectivamente.

6.15 Vibração forçada em sistemas com amortecimento viscoso

A análise modal, como apresentada na Seção 6.14, aplica-se somente a sistemas não amortecidos. Em muitos casos, a influência do amortecimento sobre a resposta de um sistema vibratório é insignificante e pode ser desprezada. Todavia, o efeito do amortecimento deve ser considerado se a resposta do sistema for exigida durante um período relativamente

longo em comparação com os períodos naturais do sistema. Ademais, se a freqüência de excitação (no caso de uma força periódica) for a mesma ou estiver próxima das freqüências naturais do sistema, o amortecimento é de primordial importância e deve ser levado em conta. Em geral, visto que seus efeitos não são conhecidos antecipadamente, o amortecimento deve ser considerado na análise de vibração de qualquer sistema. Nesta seção, consideraremos as equações de movimento de um sistema amortecido com vários graus de liberdade e sua solução utilizando equações de Lagrange. Se o sistema tiver amortecimento viscoso, seu movimento enfrentará a resistência de uma força cuja magnitude é proporcional à da velocidade, porém na direção oposta. É conveniente introduzir uma função R , conhecida como função de dissipação de Rayleigh, na dedução das equações de movimento por meio de equações de Lagrange [6.7]. Essa função é definida como

$$R = \frac{1}{2} \vec{x}^T [c] \vec{\dot{x}} \quad (6.117)$$

onde a matriz $[c]$ é denominada *matriz de amortecimento* e é positiva definida, como as matrizes de massa e rigidez. Nesse caso [6.8], as equações de Lagrange podem ser escritas como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \\ i = 1, 2, \dots, n \quad (6.118)$$

onde F_i é a força aplicada à massa m_i . Substituindo as equações (6.30), (6.34) e (6.117) na Equação (6.118), obtemos as equações de movimento de um sistema amortecido com vários graus de liberdade em forma matricial:

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [c] \vec{\dot{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \quad (6.119)$$

Por simplicidade, consideraremos um sistema especial para o qual a matriz de amortecimento pode ser expressa como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez

$$[c] = \alpha [m] + \beta [k] \quad (6.120)$$

onde α e β são constantes. Esse tipo de amortecimento é conhecido como *amortecimento proporcional* porque $[c]$ é proporcional à combinação linear de $[m]$ e $[k]$. Substituindo a Equação (6.120) na Equação (6.119), obtemos

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [\alpha[m] + \beta[k]] \vec{\dot{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \quad (6.121)$$

Expressando o vetor solução \vec{x} como uma combinação linear dos modos naturais do sistema não amortecido, como no caso de Equação (6.104),

$$\vec{x}(t) = [X] \vec{q}(t) \quad (6.122)$$

A Equação (6.121) pode ser reescrita como

$$[m][X] \ddot{\vec{q}}(t) + [\alpha[m] + \beta[k]] [X] \vec{\dot{q}}(t) \\ + [k][X] \vec{q}(t) = \vec{F}(t) \quad (6.123)$$

Pré-multiplicando a Equação (6.123) por $[X]^T$, temos como resultado

$$[X]^T [m] [X] \ddot{\vec{q}} + [\alpha [X]^T [m] [X] + \beta [X]^T [k] [X]] \vec{\dot{q}} \\ + [X]^T [k] [X] \vec{q} = [X]^T \vec{F} \quad (6.124)$$

Se os autovetores $\vec{X}^{(j)}$ forem normalizados de acordo com as equações (6.74) e (6.75), a Equação (6.124) reduz-se a

$$[I] \ddot{\vec{q}}(t) + [\alpha[I] + \beta[\nabla \omega^2]] \vec{\dot{q}}(t) \\ + [\nabla \omega^2] \vec{q}(t) = \vec{Q}(t)$$

isto é

$$\ddot{q}_i(t) + (\alpha + \omega_i^2 \beta) \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \\ i = 1, 2, \dots, n \quad (6.125)$$

onde ω_i é a i -ésima freqüência natural do sistema não amortecido e

$$\vec{Q}(t) = [X]^T \vec{F}(t) \quad (6.126)$$

Escrevendo

$$\alpha + \omega_i^2 \beta = 2\zeta_i \omega_i \quad (6.127)$$

onde ζ_i é denominado *fator de amortecimento modal* para o i -ésimo modo normal, as Equações (6.125) podem ser reescritas como

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \\ i = 1, 2, \dots, n \quad (6.128)$$

Podemos ver que cada uma das n equações representadas por essa expressão não é acoplada com nenhuma das outras. Por consequência, podemos determinar a resposta do i -ésimo modo da mesma maneira que determinamos a de um sistema com um grau de liberdade com amortecimento viscoso. A solução da Equação (6.128), quando $\zeta_i < 1$, pode ser expressa como

$$q_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_i t} \left\{ \cos \omega_{di} t + \frac{\zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \sin \omega_{di} t \right\} q_i(0) \\ + \left\{ \frac{1}{\omega_{di}} e^{-\zeta_i \omega_i t} \sin \omega_{di} t \right\} \dot{q}_i(0) \\ + \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t Q_i(\tau) e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{di} (t-\tau) d\tau, \\ i = 1, 2, \dots, n \quad (6.129)$$

onde

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (6.130)$$

Observe os seguintes aspectos desses sistemas:

1. Caughey [6.9] mostrou que a condição dada pela Equação (6.120) é suficiente, mas não necessária para a existência de modos normais em sistemas amortecidos. A condição

necessária é que a transformação que diagonaliza a matriz de amortecimento também desacople as equações de movimento acopladas. Essa condição é menos restritiva do que a Equação (6.120) e abrange mais possibilidades.

2. No caso geral de amortecimento, a matriz de amortecimento não pode ser diagonalizada simultaneamente com as matrizes de massa e rigidez. Nesse caso, os autovalores do sistema são ou reais e negativos ou complexos com partes reais negativas. Os autovalores complexos existem como pares conjugados: os autovetores também consistem em pares complexos conjugados. Um procedimento comum para determinar a solução do problema de autovalor de um sistema amortecido envolve a transformação das n equações de movimento de segunda ordem acopladas, em $2n$ equações de primeira ordem não acopladas [6.6].
3. Os limites de erro e métodos numéricos na análise modal de sistemas dinâmicos são discutidos nas Referências [6.11, 6.12].

EXEMPLO 6.17

Equações de movimento de um sistema dinâmico

Deduza as equações de movimento do sistema mostrado na Figura 6.15.

Solução:

Abordagem: Use equações de Lagrange em conjunto com a função de dissipação de Rayleigh.

A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2) \quad (\text{E.1})$$

A energia potencial tem a forma

$$V = \frac{1}{2}[k_1x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3(x_3 - x_2)^2] \quad (\text{E.2})$$

e a função dissipação de Rayleigh é

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2}[c_1\dot{x}_1^2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 \\ & + c_4\dot{x}_2^2 + c_5(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)^2] \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

As equações de Lagrange podem ser escritas como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{E.4})$$

Substituindo as equações (E.1) a (E.3) na Equação (E.4), obtemos as equações diferenciais de movimento

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \quad (\text{E.5})$$

onde

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

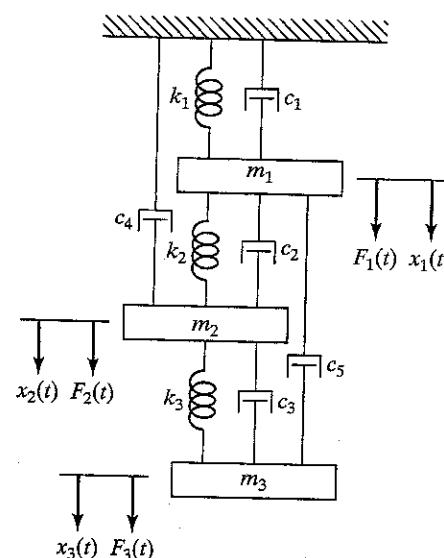


FIGURA 6.15 Sistema dinâmico com três graus de liberdade.

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_5 & -c_2 & -c_5 \\ -c_2 & c_2 + c_3 + c_4 & -c_3 \\ -c_5 & -c_3 & c_3 + c_5 \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

EXEMPLO 6.18

Resposta de regime permanente de um sistema forçado

Determine a resposta de regime permanente do sistema mostrado na Figura 6.15 quando as massas estão sujeitas às forças harmônicas simples $F_1 = F_2 = F_3 = F_0 \cos \omega t$, onde $\omega = 1,75\sqrt{k/m}$. Considere que $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $c_4 = c_5 = 0$ e que o fator de amortecimento em cada modo normal é dado por $\zeta_i = 0,01$, $i = 1, 2, 3$.

Solução: As freqüências naturais (não amortecidas) do sistema (ver Exemplo 6.10) são dadas por

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 &= 1,2471 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 &= 1,8025 \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

e as formas modais $[m]$ -ortonormais correspondentes (ver Exemplo 6.11) são dadas por

$$\vec{X}^{(1)} = \frac{0,3280}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 1,8019 \\ 2,2470 \end{Bmatrix}, \quad \vec{X}^{(2)} = \frac{0,7370}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 1,4450 \\ -0,8020 \end{Bmatrix},$$

$$\vec{X}^{(3)} = \frac{0,5911}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ -1,2468 \\ 0,5544 \end{Bmatrix} \quad (E.2)$$

Assim, o vetor modal pode ser expresso como

$$[X] = [\vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(2)} \vec{X}^{(3)}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,3280 & 0,7370 & 0,5911 \\ 0,5911 & 0,3280 & -0,7370 \\ 0,7370 & -0,5911 & 0,3280 \end{bmatrix} \quad (E.3)$$

O vetor de força generalizada

$$\vec{Q}(t) = [X]^T \vec{F}(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,3280 & 0,5911 & 0,7370 \\ 0,7370 & 0,3280 & -0,5911 \\ 0,5911 & -0,7370 & 0,3280 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_0 \cos \omega t \\ F_0 \cos \omega t \\ F_0 \cos \omega t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ Q_{30} \end{Bmatrix} \cos \omega t \quad (E.4)$$

pode ser obtido onde

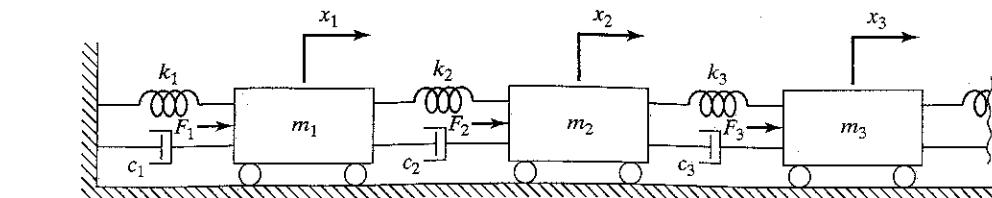
$$Q_{10} = 1,6561 \frac{F_0}{\sqrt{m}}, \quad Q_{20} = 0,4739 \frac{F_0}{\sqrt{m}},$$

$$Q_{30} = 0,1821 \frac{F_0}{\sqrt{m}} \quad (E.5)$$

Se as coordenadas generalizadas ou os fatores de participação modal para os três modos principais forem denotados por $q_1(t)$, $q_2(t)$ e $q_3(t)$, as equações de movimento podem ser expressas como

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (E.6)$$

A solução de regime permanente da Equação (E.6) pode ser escrita como



$$q_i(t) = q_{i0} \cos(\omega t - \phi), \quad i = 1, 2, 3 \quad (E.7)$$

onde

$$q_{i0} = \frac{\omega_i}{\omega_i^2} \left[\frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 \right\}^2 + \left(2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (E.8)$$

e

$$\phi_i = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2} \right\} \quad (E.9)$$

Substituindo os valores dados nas equações (E.5) e (E.1) nas equações (E.8) e (E.9), obtemos

$$q_{10} = 0,57815 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, \quad \phi_1 = \operatorname{tg}^{-1}(-0,00544)$$

$$q_{20} = 0,31429 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, \quad \phi_2 = \operatorname{tg}^{-1}(-0,02988)$$

$$q_{30} = 0,92493 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, \quad \phi_3 = \operatorname{tg}^{-1}(0,33827) \quad (E.10)$$

Por fim, a resposta de regime permanente pode ser determinada utilizando a Equação (6.122).

6.16 Auto-excitación e análise de estabilidade

Em vários sistemas vibratórios amortecidos, o atrito resulta em amortecimento negativo em vez de amortecimento positivo, o que leva à instabilidade (ou vibração auto-excitada) do sistema. Em geral, para um sistema com n graus de liberdade sistema mostrado na Figura 6.16, as equações de movimento serão um conjunto de equações diferenciais lineares de segunda ordem (como dadas pelas equações 6.119 ou 6.128):

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [c] \dot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \quad (6.131)$$

O método apresentado na Seção 5.8 pode ser estendido para estudar a estabilidade do sistema governado pela Equação (6.131). De acordo com isso, supomos uma solução da forma

$$x_j(t) = C_j e^{st}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ou

$$\vec{x}(t) = \vec{C} e^{st} \quad (6.132)$$

FIGURA 6.16 Sistema com vários graus de liberdade.

onde s é um número complexo a ser determinado, C_j é a amplitude de x_j e

$$\vec{C} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix}$$

A parte real de s determina o amortecimento, e sua parte imaginária dá a frequência natural do sistema. A substituição da Equação (6.132) nas equações de vibração livre (obtidas fazendo $\vec{F} = \vec{0}$ na Equação 6.131) dá como resultado

$$([m] s^2 + [c]s + [k]) \vec{C} e^{st} = \vec{0} \quad (6.133)$$

Para uma solução não-trivial de C_j , o determinante dos coeficientes de C_j é igualado a zero, o que resulta na 'equação característica', semelhante à Equação (6.63):

$$D(s) = |[m] s^2 + [c] s + [k]| = 0 \quad (6.134)$$

A expansão da Equação (6.134) resulta em uma polinomial em s de ordem $m = 2n$, que pode ser expressa na forma

$$D(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_{m-1} s + a_m = 0 \quad (6.135)$$

A estabilidade ou instabilidade do sistema depende das raízes da equação polinomial, $D(s) = 0$. Vamos denotar as raízes da Equação (6.135) por

$$s_j = b_j + i\omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (6.136)$$

Se as partes reais de todas as raízes b_j forem números negativos, haverá funções de tempo decrescentes, $e^{b_j t}$, na Equação (6.132) e, por consequência, a solução (sistema) será estável. Por outro lado, se uma ou mais raízes s_j tiverem um parte real positiva, então a solução da Equação (6.131) conterá uma ou mais funções de tempo $e^{b_j t}$ que crescem exponencialmente e, por consequência, a solução (sistema) será instável. Se existir uma raiz puramente imaginária da forma $s_j = i\omega_j$, essa raiz levará a uma solução oscilatória $e^{i\omega_j t}$ que representa um caso fronteiriço entre estabilidade e instabilidade. Se s_j for uma raiz múltipla, a conclusão a que acabamos de chegar também é válida, a menos que ela seja um número puramente imaginário, como $s_j = i\omega_j$. Nesse caso, a solução contém funções do tipo $e^{i\omega_j t}, te^{i\omega_j t}, t^2 e^{i\omega_j t}, \dots$, que aumentam com o tempo. Assim, as raízes múltiplas com valores puramente imaginários indicam a instabilidade do sistema. Desse modo, para que um sistema linear governado pela Equação (6.131) seja estável, é necessário e suficiente que as raízes da Equação (6.135) tenham partes reais não-positivas e que, se existir qualquer raiz puramente imaginária, ela não deve aparecer como uma raiz múltipla.

Visto que determinar as raízes da equação polinomial (6.135) é um processo longo, podemos utilizar um procedimento simplificado, conhecido como critério de estabilidade de Routh-Hurwitz [6.13, 6.14], para investigar a estabilidade do sistema. Para aplicar esse procedimento, o seguinte

determinante de m -ésima ordem, T_m , é definido em termos dos coeficientes da equação polinomial (6.135) como

$$T_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & a_{2m-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & a_{2m-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2m-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2m-4} \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2m-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_m \end{vmatrix} \quad (6.137)$$

Então, são definidos os seguintes subdeterminantes, indicados pelas linhas tracejadas na Equação (6.137):

$$T_1 = a_1 \quad (6.138)$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \quad (6.139)$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad (6.140)$$

Na construção desses subdeterminantes, todos os coeficientes a_i com $i > m$ ou $i < 0$ devem ser substituídos por zeros. De acordo com o critério de Routh-Hurwitz, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema é que todos os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m devem ser positivos e também que todos os determinantes T_1, T_2, \dots, T_m devem ser positivos.

6.17 Exemplos utilizando MATLAB

EXEMPLO 6.19

Solução de um problema de autovalor

Determine os autovalores e autovetores da matriz (ver Exemplo 6.10):

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

```
% Ex 6.19
>> A = [1 1 1; 1 2 2; 1 2 3]
```

A =

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>> [V, D] = eig(A)
```

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.5910 & 0.7370 & 0.3280 \\ -0.7370 & 0.3280 & 0.5910 \\ 0.3280 & -0.5910 & 0.7370 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.3080 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6431 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0489 \end{bmatrix}$$

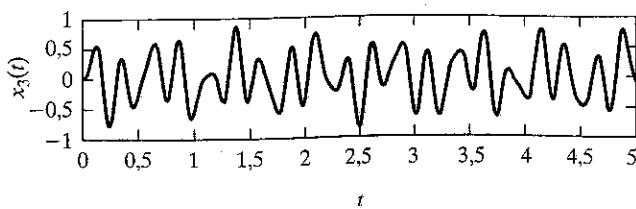
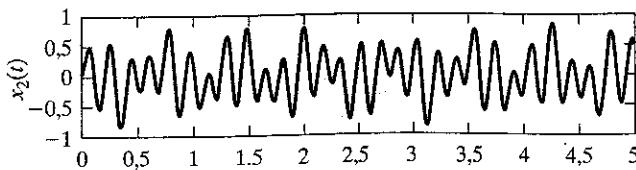
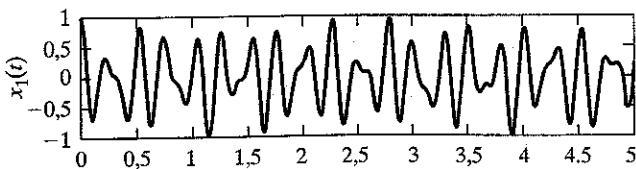
EXEMPLO 6.20

Resposta de vibração livre de um sistema com vários graus de liberdade

Represente em gráfico a resposta de vibração livre $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ do sistema considerado no Exemplo 6.14 para os seguintes dados: $x_{10} = 1,0$, $k = 4.000$ e $m = 10$.

Solução: A resposta de vibração livre das massas $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ é dada pelas equações (E.7) a (E.9) do Exemplo 6.14.

```
% Ex6_20.m
x10 = 1.0;
k = 4000;
m = 10;
for i = 1: 1001
    t(i) = 5 * (i-1) / 1000;
    x1(i) = x10 * ( 0.1076 * cos (0.44504 * sqrt(k/m) * t(i)) +
        0.5431 * cos (1.2471*sqrt(k/m) *t(i)) + 0.3493 * cos
        (1.8025*sqrt(k/m) *t(i)) );
    x2(i) = x10 * ( 0.1939 * cos (0.44504 * sqrt(k/m) * t(i)) +
        0.2417 * cos (1.2471*sqrt(k/m) *t(i)) -
        0.4355 * cos (1.8025*sqrt(k/m) *t(i)) );
    x3(i) = x10 * ( 0.2418 * cos (0.44504 * sqrt(k/m) *
        t(i)) - 0.4356 * cos (1.2471*sqrt(k/m) *t(i)) +
        0.1937 * cos (1.8025*sqrt(k/m) *t(i)) );
end
subplot (311);
plot (t, x1);
ylabel ('x1 (t)');
subplot (312);
plot (t, x2);
ylabel ('x2 (t)');
subplot (313);
plot (t, x3);
ylabel ('x3 (t)');
xlabel ('t');
```

**EXEMPLO 6.21**

Resposta de vibração forçada de um sistema com vários graus de liberdade

Determine e represente em gráfico a resposta de vibração forçada do martelo de forjar considerado no Exemplo 6.16, resolvendo as equações diferenciais governantes. Considere que as condições iniciais sejam zero.

Solução: As equações governantes são dadas por

$$[m] \ddot{\vec{x}}(t) + [k] \vec{x}(t) = \vec{F}(t) \quad (\text{E.1})$$

com

$$[m] = 10^5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}, [k] = 10^6 \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix}, \vec{F}(t) = \begin{cases} F_1(t) \\ 0 \end{cases}$$

onde $F_1(t)$ é uma função escalonada (degrau) de magnitude 25000 N e duração $0 \leq t \leq 0,1$ s.

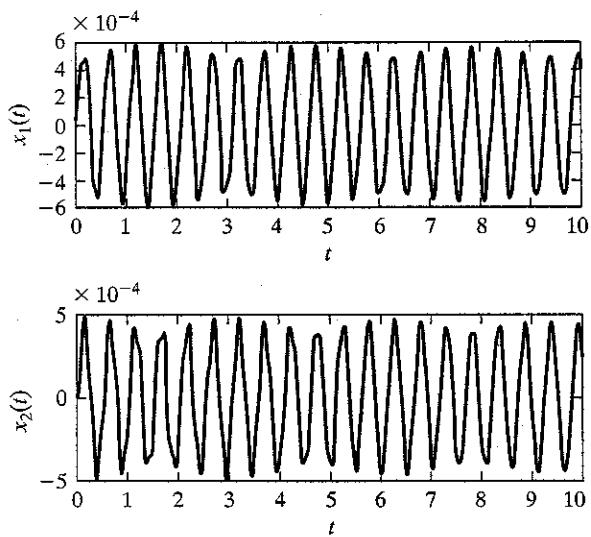
As Equações (E.1) podem ser expressas como um conjunto de quatro equações diferenciais de primeira ordem acopladas como

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \frac{F_1}{m_1} - \frac{k_1}{m_1} y_1 + \frac{k_1}{m_1} y_3 \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= \frac{k_1}{m_2} y_1 - \frac{k_2}{m_2} y_3 \end{aligned}$$

onde $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2$, $m_1 = 2 \times 10^5$, $m_2 = 2.5 \times 10^5$, $k_1 = 150 \times 10^6$ e $k_2 = 225 \times 10^6$.

Utilizando os valores iniciais de todos $y_i = 0$, podemos obter os seguintes resultados.

```
% Ex6_21.m
% This program will use the function dfunc6_21.m,
% they should
% be in the same folder
tspan = [0: 0.001: 10];
y0 = [0; 0; 0; 0];
[t, y] = ode23 ('dfunc6_21', tspan, y0);
subplot (211);
plot (t, y(:, 1));
xlabel ('t');
ylabel ('x1 (t)');
subplot (212);
plot (t, y(:, 3));
xlabel ('t');
ylabel ('x2 (t)');
%
% dfunc6_21.m
function f = dfunc6_21 (t, y)
f = zeros (4, 1);
m1 = 2*1e5;
m2 = 2.5*1e5;
k1 = 150 * 1e6;
k2 = 225 * 1e6;
F1 = 25000 * (stepfun (t, 0) - stepfun (t, 0.1));
f(1) = y(2);
f(2) = F1/m1 + k1 * y(3) /m1 - k1 * y(1) /m1;
f(3) = y(4);
f(4) = -k2 * y(3) /m2 + k1 * y(1) /m2;
```



EXEMPLO 6.22

Raízes de uma equação polinomial

Utilizando MATLAB, determine as raízes da equação polinomial

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Solução:

```
>> roots ([1 -6 11 -6])
ans =
    3.0000
    2.0000
    1.0000
>>
```

EXEMPLO 6.23

Resposta de vibração forçada de um sistema amortecido

Determine a resposta de vibração forçada de um sistema amortecido com vários graus de liberdade com equações de movimento

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{f} \quad (\text{E.1})$$

com

$$[m] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad [c] = 100 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[k] = 1.000 \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} F_0 \cos \omega t$$

com $F_0 = 50$ e $\omega = 50$. Considere condições iniciais zero.

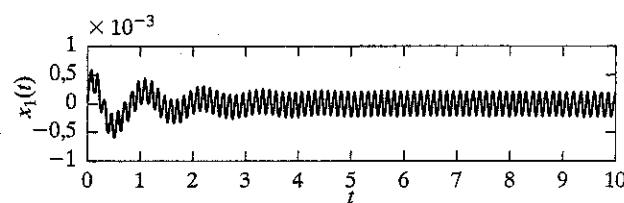
Solução: As Equações (E.1) podem ser reescritas como um conjunto de seis equações diferenciais de primeira ordem

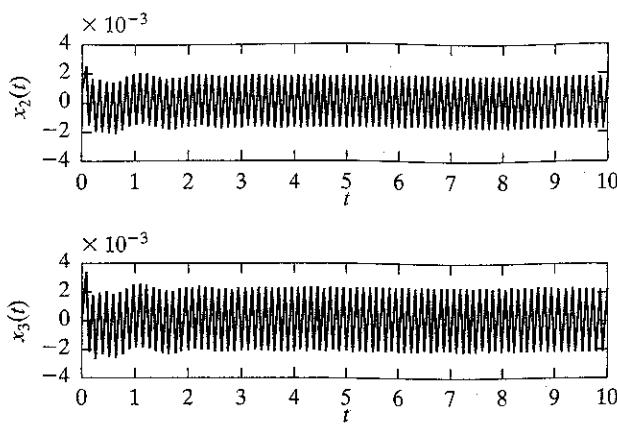
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \frac{F_0}{10} \cos \omega t - \frac{400}{10} y_2 + \frac{200}{10} y_4 \\ &\quad - \frac{8.000}{10} y_1 + \frac{4.000}{10} y_3 \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= \frac{F_0}{10} \cos \omega t + \frac{200}{10} y_2 - \frac{400}{10} y_4 + \frac{200}{10} y_6 \\ &\quad + \frac{4.000}{10} y_1 - \frac{8.000}{10} y_3 + \frac{4.000}{10} y_5 \\ \dot{y}_5 &= y_6 \\ \dot{y}_6 &= \frac{F_0}{10} \cos \omega t + \frac{200}{10} y_4 - \frac{200}{10} y_6 \\ &\quad + \frac{4.000}{10} y_3 - \frac{4.000}{10} y_5 \end{aligned}$$

onde $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2$, $y_5 = x_3$ e $y_6 = \dot{x}_3$.

Utilizando valores iniciais zero para todos y_i , podemos determinar a seguinte solução:

```
% Ex6_23.m
% This program will use the function dfunc6_23.m, they
should
% be in the same folder
tspan = [0: 0.01: 10];
y0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0];
[t, y] = ode23 ('dfunc6_23', tspan, y0);
subplot (311);
plot (t, y (:, 1));
xlabel ('t');
ylabel ('x1 (t)');
subplot (312);
plot (t, y (:, 3));
xlabel ('t');
ylabel ('x2 (t)');
subplot (313);
plot (t, y (:, 5));
xlabel ('t');
ylabel ('x3 (t)');
% dfunc6_23.m
function f = dfunc6_23 (t, y)
f = zeros (6, 1);
F0 = 50.0;
w = 50.0;
f(1) = y(2);
f(2) = F0*cos(w*t)/100 - 400*y(2)/100 + 200*y(4)/100 -
8000*y(1)/100
+ 4000*y(3)/100;
f(3) = y(4);
f(4) = F0*cos(w*t)/10 + 200*y(2)/10 - 400*y(4)/10 +
200*y(6)/10
+ 4000*y(1)/10 - 8000*y(3)/10 + 4000*y(5)/10;
f(5) = y(6);
f(6) = F0*cos(w*t)/10 + 200*y(4)/10 - 200*y(6)/10 +
4000*y(3)/10
- 4000*y(5)/10;
```





result: polynomial coefficients in
 $\text{pcf}(\text{np}) * (\text{x}^{\text{n}}) + \text{pcf}(\text{n}) * (\text{x}^{(\text{n}-1)}) + \dots + \text{pcf}(2) * \text{pcf}(1) = 0$
 $-4.000000e+000 \quad 1.000000e+001 \quad -6.000000e+000 \quad 1.000000e+000$

EXEMPLO 6.25

Programa para análise modal de sistemas com vários graus de liberdade

Desenvolva um programa MATLAB, denominado **Program8.m**, para determinar a resposta de um sistema com vários graus de liberdade utilizando análise modal. Use o programa para determinar a solução de um sistema com os seguintes dados:

Matriz de massa:

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz modal (com modos como colunas; modos não são transformados em m -ortogonais):

$$[ev] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,0000 & 1,0000 \\ 1,8019 & 0,4450 & -1,2468 \\ 2,2470 & -0,8020 & 0,5544 \end{bmatrix}$$

Freqüências naturais: $\omega_1 = 0,89008$, $\omega_2 = 1,4942$, $\omega_3 = 3,6050$

Fatores de amortecimento modal: $\zeta_i = 0,01$, $i = 1, 2, 3$

Vetor de forças aplicadas às diferentes massas:

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_0 \\ F_0 \end{Bmatrix} \cos \omega t; F_0 = 2,0, \omega = 3,5$$

Condições iniciais: $\vec{x}(0) = \vec{0}, \dot{\vec{x}}(0) = \vec{0}$

Solução: **Program8.m** é desenvolvido para aceitar os seguintes dados de entrada:

n = graus de liberdade do sistema

$nvec$ = número de modos a utilizar na análise modal

```
>> program8
Response of system using modal analysis

Coordinate 1
1.21920e-002    4.62431e-002    9.57629e-002    1.52151e-001    2.05732e-001
2.47032e-001    2.68028e-001    2.63214e-001    2.30339e-001    1.70727e-001
8.91432e-002    -6.79439e-003    -1.07562e-001   -2.02928e-001   -2.83237e-001
-3.40630e-001   -3.70023e-001   -3.69745e-001   -3.41725e-001   -2.91231e-001

Coordinate 2
1.67985e-002    6.40135e-002    1.33611e-001    2.14742e-001    2.94996e-001
3.61844e-001    4.04095e-001    4.13212e-001    3.84326e-001    3.16843e-001
2.14565e-001    8.53051e-002    -5.99475e-002   -2.08242e-001   -3.46109e-001
-4.61071e-001   -5.43061e-001   -5.85566e-001   -5.86381e-001   -5.47871e-001

Coordinate 3
1.99158e-002    7.57273e-002    1.57485e-001    2.51794e-001    3.43491e-001
4.17552e-001    4.60976e-001    4.64416e-001    4.23358e-001    3.38709e-001
2.16699e-001    6.81361e-002    -9.29091e-002   -2.50823e-001   -3.90355e-001
-4.98474e-001   -5.65957e-001   -5.88490e-001   -5.67173e-001   -5.08346e-001
```

xm = matriz de massa de tamanho $n \times n$

ev = matriz modal de tamanho $n \times nvec$

z = vetor de tamanho $nvec$ = vetor de fatores de amortecimento

om = vetor de tamanho $nvec$ = vetor de freqüências naturais

f = vetor de forças aplicadas às massas, vetor de tamanho n

x_0 = deslocamentos iniciais das massas, vetor de tamanho n

xd_0 = velocidades iniciais das massas, vetor de tamanho n

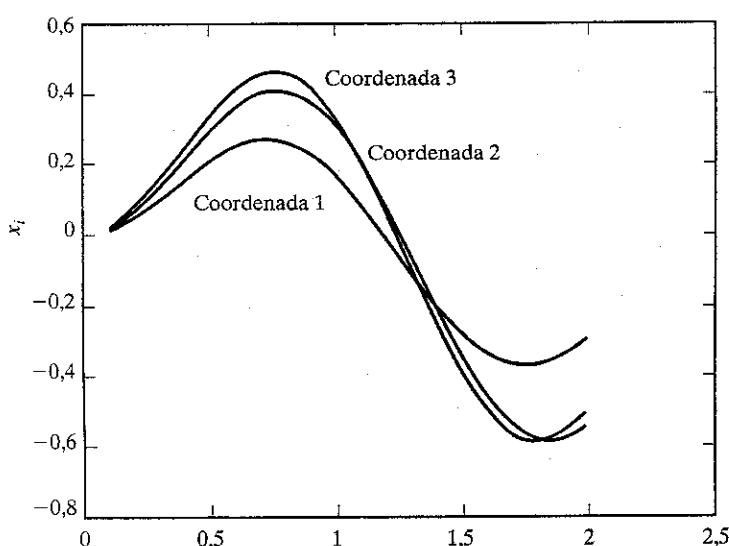
$nstep$ = número de estações de tempo ou pontos de integração $t_1, t_2, \dots, t_{nstep}$

$delt$ = intervalo entre estações de tempo consecutivas

t = arranjo de tamanho $nstep$ contendo $t_1, t_2, \dots, t_{nstep}$

O programa dá a seguinte saída:

x = matriz de tamanho $n \times nstep$ = deslocamentos das massas m_1, m_2, \dots, m_n em várias estações de tempo $t_1, t_2, \dots, t_{nstep}$



6.18 Programas em C++

Dois programas interativos em C++, denominados **Program7.cpp** e **Program8.cpp**, são dados para gerar o polinômio característico correspondente a uma matriz quadrada dada e para determinar a resposta de um sistema com vários graus de liberdade utilizando análise modal, respectivamente. As entradas e saídas desses programas são semelhantes às do **Program7.m** e do **Program8.m**.

EXEMPLO 6.26

Geração de um polinômio característico

Gere o polinômio característico correspondente à matriz dada no Exemplo 6.24 utilizando **Program7.cpp**.

Solução: Os dados de entrada devem ser digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são dadas a seguir.

```
Please input the dimension n of matrix A:  
3  
Please input matrix A row by row:  
2 -1 0
```

```
-1 2 -1  
0 -1 2
```

POLYNOMIAL EXPANSION OF A DETERMINANTAL EQUATION

DATA: DETERMINANT A:

```
2.000000 -1.000000 0.000000  
-1.000000 2.000000 -1.000000  
0.000000 -1.000000 2.000000
```

RESULTS: POLYNOMIAL COEFFICIENTS IN

```
PCF (NP) * (X ** N) + PCF (N) * (X ** (N - 1)) + . . .  
. + PCF(2) * X  
+ PCF(1) = 0  
-4.000000 10.000000 -6.000000 1.000000
```

EXEMPLO 6.27

Resposta de um sistema utilizando análise modal

Utilizando **Program8.cpp**, determine a resposta do sistema com vários graus de liberdade considerado no Exemplo 6.25.

Solução: Os dados de entrada devem ser digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são dadas a seguir.

```
Please input N, NVEC and NSTEP:  
3 3 20  
please input delt, omf and f0:  
0.1 3.5 2.0  
Please input mass matrix xm row by row:  
1.0 0.0 0.0  
0.0 1.0 0.0  
0.0 0.0 1.0  
Please input matrix ev row by row:  
1.0 1.0 1.0  
1.8019 0.4450 -1.2468  
2.2470 -0.8020 0.5544  
Please input array om:  
0.89008 1.4942 3.6050  
RESPONSE OF SYSTEM USING MODAL ANALYSIS  
COORDINATE 1  
0.009363 0.035438 0.073118 0.115538 0.155010  
0.184085 0.196572 0.188401 0.158198 0.107508  
0.040629 -0.035924 -0.114247 -0.186060 -0.243782  
-0.281509 -0.295776 -0.286010 -0.254588 -0.206525  
COORDINATE 2  
0.009395 0.035874 0.075128 0.121321 0.167711  
0.207370 0.233936 0.242311 0.229239 0.193705  
0.137094 0.063112 -0.022556 -0.112803 -0.199814  
-0.275895 -0.334293 -0.369942 -0.380052 -0.364457  
COORDINATE 3  
0.009379 0.035648 0.074087 0.118353 0.161294  
0.195874 0.216076 0.217673 0.198772 0.160053  
0.104682 0.037905 -0.033627 -0.102705 -0.162484  
-0.207353 -0.233644 -0.240091 -0.227975 -0.200947
```

6.19 Programas em FORTRAN

São dados dois programas em FORTRAN: **Program7.F** determina o polinômio característico correspondente a uma matriz quadrada dada e **Program8.F** determina a resposta de um sistema com vários graus de liberdade utilizando análise modal. As entradas e as saídas dos programas são semelhantes às do **Program7.m** e do **Program8.m**, respectivamente.

EXEMPLO 6.28

Polinômio característico correspondente a uma matriz

Utilizando **Program7.F**, gere o polinômio característico da matriz dada no Exemplo 6.24.

Solução: A saída do programa é dada a seguir.

```
POLYNOMIAL EXPANSION OF A DETERMINANTAL EQUATION
DATA: DETERMINANT A:
0.200000E+01 -0.100000E+01 0.000000E+00
-0.100000E+01 0.200000E+01 -0.100000E+01
0.000000E+00 -0.100000E+01 0.200000E+01

RESULT: POLYNOMIAL COEFFICIENTS IN
PCF(NP)*(X**N)+PCF(N)*(X**N-1)+...+PCF(2)*X+PCF(1)=0
-0.400000E+01 0.100000E+02 -0.600000E+01 0.100000E+01
```

EXEMPLO 6.2.9

Resposta forçada de sistema utilizando análise modal

Utilizando **Program8.F**, determine a resposta do sistema com três grau de liberdade considerado no Exemplo 6.25.

Solução: A saída do programa é dada a seguir.

RESPONSE OF SYSTEM USING MODAL ANALYSIS

COORDINATE 1				
0.936322E-02	0.354378E-01	0.731183E-01	0.115538E+00	0.155010E+00
0.184085E+00	0.196572E+00	0.188401E+00	0.158198E+00	0.107508E+00
0.406290E-01	-0.359245E-01	-0.114247E+00	-0.186060E+00	-0.243782E+00
-0.281509E+00	-0.295776E+00	-0.286009E+00	-0.254587E+00	-0.206525E+00
COORDINATE 2				
0.939528E-02	0.358739E-01	0.751277E-01	0.121321E+00	0.167711E+00
0.207370E+00	0.233936E+00	0.242311E+00	0.229239E+00	0.193704E+00
0.137094E+00	0.631125E-01	-0.225565E-01	-0.112803E+00	-0.199814E+00
-0.275895E+00	-0.334293E+00	-0.369942E+00	-0.380052E+00	-0.364457E+00
COORDINATE 3				
0.937892E-02	0.356481E-01	0.740876E-01	0.118353E+00	0.161294E+00
0.195874E+00	0.216076E+00	0.217673E+00	0.198772E+00	0.160053E+00
0.104682E+00	0.379048E-01	-0.336272E-01	-0.102705E+00	-0.162484E+00
-0.207353E+00	-0.233644E+00	-0.240091E+00	-0.227975E+00	-0.200947E+00

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 6.1 F. W. Beaufait, *Basic concepts of structural analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977.
- 6.2 R. J. Roark e W. C. Young, *Formulas for stress and strain*, 5. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1975.
- 6.3 D. A. Wells, *Theory and problems of Lagrangian dynamics*, Schaum's Outline Series. Nova York: McGraw-Hill, 1967.
- 6.4 J. H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford: Clarendon Press, 1965.
- 6.5 A. Ralston, *A first course in numerical analysis*. Nova York: McGraw-Hill, 1965.
- 6.6 L. Meirovitch, *Analytical methods in vibrations*. Nova York: Macmillan, 1967.
- 6.7 J. W. Strutt, Lord Rayleigh, *The theory of sound*. Londres: Macmillan, 1877 (nova tiragem por Dover Publications, Nova York em 1945).
- 6.8 W. C. Hurty e M. F. Rubinstein, *Dynamics of structures*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964.
- 6.9 T. K. Caughey, "Classical normal modes in damped linear dynamic systems", *Journal of Applied Mechanics*, v. 27, 1960, p. 269–271.
- 6.10 A. Avakian e D. E. Beskos, "Use of dynamic stiffness influence coefficients in vibrations of non-uniform beams", carta ao editor, *Journal of Sound and Vibration*, v. 47, 1976, p. 292–295.
- 6.11 I. Gladwell e P. M. Hanson, "Some error bounds and numerical experiments in modal methods for dynamics of systems", *Earthquake engineering and structural dynamics*, v. 12, 1984, p. 9–36.
- 6.12 R. Bajan, A. R. Kukreti e C. C. Feng, "Method for improving incomplete modal coupling", *Journal of Engineering Mechanics*, v. 109, 1983, p. 937–949.

- 6.13 E. J. Routh, *Advanced rigid dynamics*. Nova York: Macmillan, 1905.
- 6.14 D. W. Nicholson e D. J. Inman, "Stable response of damped linear systems", *Shock and Vibration Digest*, v. 15, nov. 1983, p. 19–25.
- 6.15 P. C. Chen e W. W. Soroka, "Multidegree dynamic response of a system with statistical properties", *Journal of Sound and Vibration*, v. 37, 1974, p. 547–556.
- 6.16 S. Mahalingam e R. E. D. Bishop, "The response of a system with repeated natural frequencies to force and displacement excitation", *Journal of Sound and Vibration*, v. 36, 1974, p. 285–295.
- 6.17 S. G. Kelly, *Fundamentals of mechanical vibrations*. Nova York: McGraw-Hill, 1993.

PERGUNTAS DE REVISÃO

- 6.1 Dê respostas curtas ao seguinte:
 1. Defina os coeficientes de influência de flexibilidade e rigidez. Qual é a relação entre eles?
 2. Escreva as equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade em forma matricial utilizando:
 - (a) a matriz de flexibilidade $[c]$;
 - (b) a matriz de rigidez $[k]$.
 3. Expresse as energias potencial e cinética de um sistema com n graus de liberdade utilizando notação matricial.
 4. O que é uma matriz de massa generalizada?
 5. Por que a matriz de massa $[m]$ é sempre positiva definida?
 6. A matriz de rigidez $[k]$ é sempre positiva definida? Por quê?

7. Qual é a diferença entre coordenadas generalizadas e coordenadas cartesianas?
8. Enuncie as equações de Lagrange.
9. O que é um problema de autovalor?
10. O que é uma forma modal? Como ela é calculada?
11. Quantas freqüências naturais distintas podem existir para um sistema com n graus de liberdade?
12. O que é uma matriz dinâmica? Como ela é utilizada?
13. Como a equação de freqüência é deduzida para um sistema com vários graus de liberdade?
14. O que quer dizer ortogonalidade de modos normais? O que são vetores modais ortonormais?
15. O que é uma base em espaço n -dimensional?
16. O que é o teorema de expansão? Qual é a sua importância?
17. Explique o procedimento de análise modal.
18. O que é um modo de corpo rígido? Como é determinado?
19. O que é um sistema degenerado?
20. Como podemos determinar a resposta de um sistema com vários graus de liberdade utilizando somente alguns primeiros modos?
21. Defina a função de dissipação de Rayleigh.
22. Defina esses termos: *amortecimento proporcional, fator de amortecimento modal, fator de participação modal*.
23. Quando obtemos autovalores complexos?
24. Para que serve o critério de Routh-Hurwitz?

6.2

Indique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

1. Para um sistema com vários graus de liberdade, uma equação de movimento pode ser escrita para cada grau de liberdade.
2. A equação de Lagrange não pode ser usada para deduzir as equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade.
3. As matrizes de massa, rigidez e amortecimento de um sistema com vários graus de liberdade são sempre simétricas.
4. O produto das matrizes de rigidez e flexibilidade de um sistema é sempre uma matriz identidade.
5. A análise modal de um sistema com n graus de liberdade pode ser realizada utilizando r modos com $r < n$.
6. No caso de um sistema amortecido com vários graus de liberdade, todos os autovalores podem ser complexos.
7. O fator de amortecimento modal denota amortecimento em um modo normal particular.
8. Um sistema com vários graus de liberdade pode ter seis de suas freqüências naturais iguais a zero.
9. As coordenadas generalizadas sempre terão a unidade de comprimento.
10. As coordenadas generalizadas são independentes das condições de restrição do sistema.
11. A matriz de massa generalizada de um sistema com vários graus de liberdade é sempre diagonal.
12. As energias potencial e cinética de um sistema com vários graus de liberdade são sempre funções quadráticas.
13. A matriz de massa de um sistema é sempre simétrica e positiva definida.
14. A matriz de rigidez de um sistema é sempre simétrica e positiva definida.

15. O modo de corpo rígido também é denominado modo zero.

16. Um sistema não restrinrido também é conhecido como um sistema semidefinido.
17. A segunda lei do movimento de Newton sempre pode ser usada para deduzir as equações de movimento de um sistema vibratório.

6.3 Preencha os espaços em branco com a palavra adequada:

1. A constante de mola denota a _____ necessária para provocar uma elongação unitária.
2. O coeficiente de influência de flexibilidade a_{ij} denota a deflexão no ponto _____ provocada por uma carga unitária no ponto _____.
3. A força no ponto i provocada por um deslocamento unitário no ponto j , quando todos os outros pontos excepto o ponto j são fixos, é conhecida como coeficiente de influência _____.
4. As formas modais de um sistema com vários graus de liberdade são _____.
5. As equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade podem ser expressas em termos de coeficientes _____.
6. Equações de Lagrange são expressas em termos de coordenadas _____.
7. O valor do delta de Kronecker (δ_{ij}) é 1 para $i = j$ e _____ para $i \neq j$.
8. A matriz de rigidez de um sistema semidefinido é _____.
9. Um sistema com vários graus de liberdade pode ter no máximo _____ modos de corpo rígido.
10. Quando o vetor solução é denotado como uma combinação linear dos modos normais como $\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \vec{X}^{(i)}$, as coordenadas generalizadas $q_i(t)$ também são conhecidas como coeficientes de participação _____.
11. Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes em um espaço n -dimensional é denominado uma _____.
12. A representação de um vetor n -dimensional arbitrário como uma combinação linear de n vetores linearmente independentes é conhecida como teorema _____.
13. A análise _____ tem como base o teorema de expansão.
14. A análise modal _____ basicamente as equações de movimento.
15. Os autovalores de um sistema com n graus de liberdade formam uma _____ no espaço n -dimensional.
16. A aplicação de equações de Lagrange requer a disponibilidade de expressões _____.
17. A equação de determinante, $|k - \omega^2[m]| = 0$, é conhecida como equação _____.
18. A simetria das matrizes de rigidez e flexibilidade deve-se ao teorema da reciprocidade de _____.
19. O teorema da reciprocidade de Maxwell afirma que os coeficientes de influência são _____.
20. A matriz de rigidez é positiva definida somente se o sistema for _____.
21. Durante vibração livre de um sistema não amortecido, todas as coordenadas terão movimento _____.
22. Em amortecimento proporcional, considera-se que a matriz de amortecimento seja uma combinação linear de matrizes _____ e _____.

- 6.4** Selecione a resposta mais adequada entre as várias opções dadas:
1. O número de freqüências naturais distintas para um sistema com n graus de liberdade pode ser:
 - 1
 - ∞
 - n
 2. A matriz dinâmica, $[D]$, é dada por:
 - $[k]^{-1}[m]$;
 - $[m]^{-1}[k]$;
 - $[k][m]$.
 3. A ortogonalidade de modos implica:
 - $\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(j)} = 0$ somente;
 - $\vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(j)} = 0$ somente;
 - $\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(j)} = 0$ and $\vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(j)} = 0$
 4. A matriz modal, $[X]$, é dada por
 - $[X] = \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)} & \vec{X}^{(2)} & \dots & \vec{X}^{(n)} \end{bmatrix}$
 - $[X] = \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)T} \\ \vec{X}^{(2)T} \\ \vdots \\ \vec{X}^{(n)T} \end{bmatrix}$
 - $[X] = [k]^{-1}[m]$
 5. A função de dissipação de Rayleigh é usada para gerar uma:
 - matriz de rigidez;
 - matriz de amortecimento;
 - matriz de massa.
 6. A equação característica de um sistema com n graus de liberdade é uma:
 - equação transcendental;
 - polinomial de grau n ;
 - equação diferencial de ordem n .
 7. A freqüência natural fundamental de um sistema é:
 - o maior valor;
 - o menor valor;
 - qualquer valor.
 8. Amortecimento negativo resulta em:
 - instabilidade;
 - rápida convergência;
 - oscilações.
 9. O critério de Routh-Hurwitz pode ser usado para investigar:
 - a convergência de um sistema;
 - as oscilações de um sistema;
 - a estabilidade de um sistema.
 10. As matrizes de rigidez e flexibilidade estão relacionadas como:
 - $[k] = [a]$;
 - $[k] = [a]^{-1}$;
 - $[k] = [a]^T$.
 11. Um sistema para o qual $[k]$ é positiva e $[m]$ é positiva definida é denominado um:
 - sistema semidefinito;
 - sistema definido positivo;
 - sistema indefinido.

- 12.** $[m]$ – ortogonalidade de vetores modais implica:
 - $\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)} = 0$;
 - $\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(j)} = 0$;
 - $[X]^T[m][X] = [\omega_i^2]$.
- 13.** A análise modal pode ser usada convenientemente para determinar a resposta de um sistema com vários graus de liberdade:
 - sob condições forçantes arbitrárias;
 - sob condições de vibração livre;
 - que envolve vários modos.
- 6.5** Ligue os itens correspondentes nas duas colunas a seguir:
- | | |
|--|--|
| 1. $\frac{1}{2}\ddot{\vec{X}}^T[m]\vec{X}$ | (a) Igual a zero dá os valores característicos. |
| 2. $\frac{1}{2}\dot{\vec{X}}^T[m]\vec{X}$ | (b) Igual a $[\omega_i^2]$ quando os modos são normalizados. |
| 3. $\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(j)}$ | (c) Energia cinética do sistema. |
| 4. $\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)}$ | (d) Igual a zero quando os modos são ortogonais. |
| 5. $[X]^T[k][X]$ | (e) Igual à matriz dinâmica $[D]$. |
| 6. $[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x}$ | (f) Energia de deformação do sistema. |
| 7. $[[k] - \omega^2[m]]$ | (g) Igual ao vetor de força aplicada \vec{F} . |
| 8. $[k]^{-1}[m]$ | (h) Igual a um quando os modos são ortonormais. |

PROBLEMAS

Os problemas estão organizados da seguinte maneira:

Problemas	Seção correspondente	Tópico correspondente
6.1 a 6.6	6.3	Dedução de equações de movimento
6.7 a 6.32	6.4	Coeficientes de influência
6.33	6.6	Coordenadas generalizadas
6.34 a 6.43	6.7	Equações de Lagrange
6.44 a 6.45	6.9	Problema de autovalor
6.46 a 6.63	6.10	Solução do problema de autovalor
6.64 a 6.65	6.12	Sistemas não restringidos
6.66 a 6.73	6.13	Vibração livre de sistemas não amortecidos
6.74 a 6.82	6.14	Vibração forçada de sistemas não amortecidos
6.83 a 6.84	6.15	Vibração forçada de sistemas com amortecimento viscoso
6.85 a 6.92	6.17	Problemas MATLAB
6.93 a 6.94	6.18	Problemas em C++
6.95 a 6.96	6.19	Problemas em FORTRAN
6.97 a 6.100	—	Programas de computador
6.101	—	Exercício de projeto

6.1 – 6.5 Deduza as equações de movimento para cada um dos sistemas mostrados na figuras 6.17 a 6.21, utilizando a segunda lei do movimento de Newton.

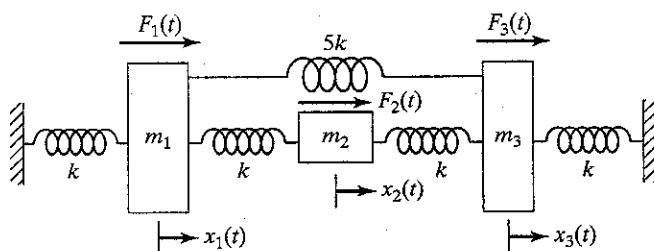


FIGURA 6.17

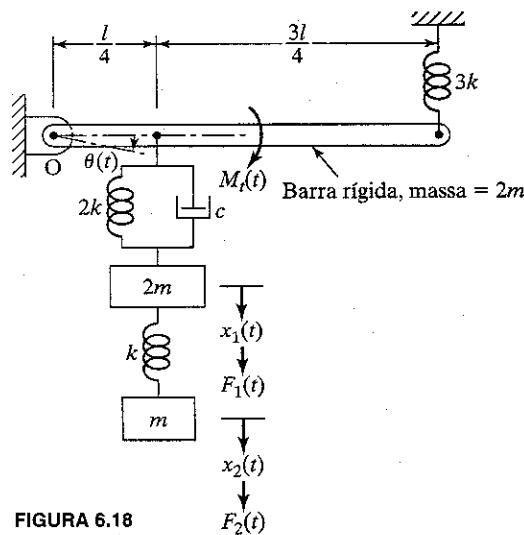


FIGURA 6.18

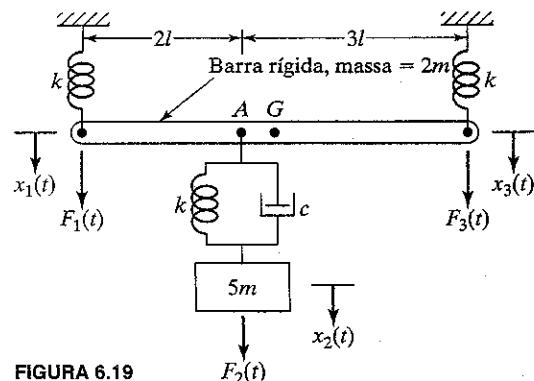


FIGURA 6.19

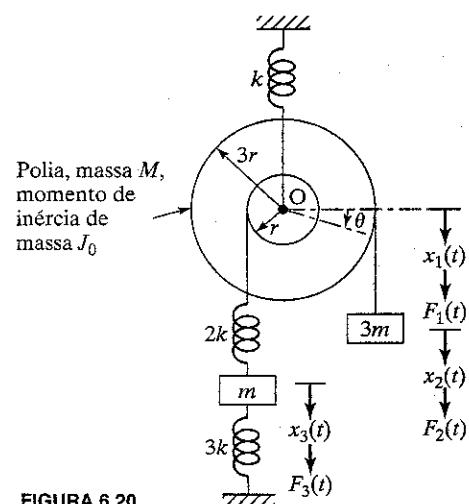
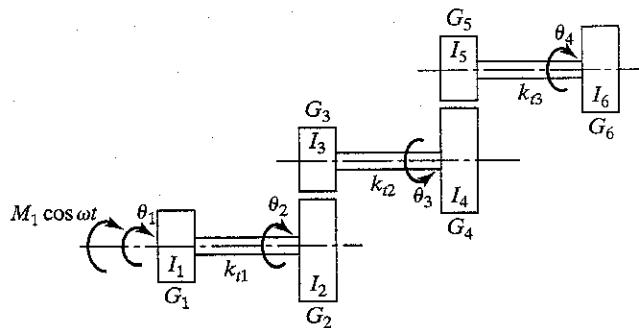


FIGURA 6.20



Número de dentes na engrenagem $G_i = n_i$ ($i = 1$ a 6)
Momento de inércia de massa da engrenagem $G_i = I_i$ ($i = 1$ a 6)

FIGURA 6.21

- 6.6 Um automóvel é modelado como mostra a Figura 6.22. Deduza as equações de movimento, utilizando a segunda lei do movimento de Newton.
- 6.7 - 6.12 Deduza a matriz de rigidez de cada um dos sistemas mostrados nas figuras 6.17 a 6.22 utilizando as coordenadas indicadas.
- 6.13 Deduza a matriz de flexibilidade do sistema mostrado na Figura 5.29.
- 6.14 Deduza a matriz de rigidez do sistema mostrado na Figura 5.29.
- 6.15 Deduza a matriz de flexibilidade do sistema mostrado na Figura 5.32.
- 6.16 Deduza a matriz de rigidez do sistema mostrado na Figura 5.32.
- 6.17 Deduza a matriz de rigidez do sistema mostrado na Figura 5.32.
- 6.18 Determine a flexibilidade e os coeficientes de influência de rigidez do sistema torcional mostrado na Figura 6.23. Escreva também as equações de movimento do sistema.
- 6.19 Determine os coeficientes de influência de flexibilidade e rigidez do sistema mostrado na Figura 6.24. Além disso, deduza as equações de movimento do sistema.

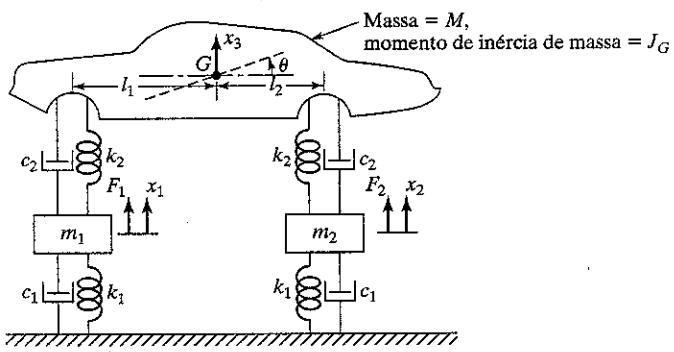


FIGURA 6.22

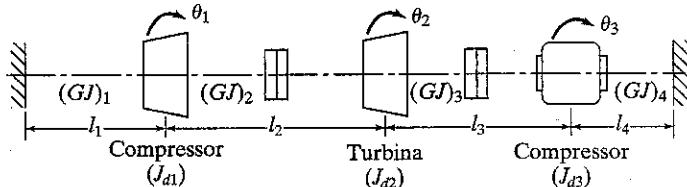


FIGURA 6.23

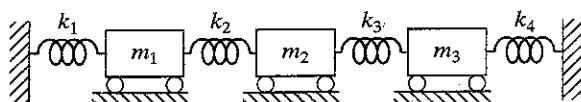


FIGURA 6.24

- 6.20** A asa de um avião (Figura 6.25 (a)) é modelada como um sistema de massa concentrada com três graus de liberdade, como mostra a Figura 6.25(b). Deduza a matriz de flexibilidade e as equações de movimento da asa considerando que todos $A_i = A$, $(EI)_i = EI$, $l_i = l$ e que a raiz é fixa.
- 6.21** Determine a matriz de flexibilidade da viga uniforme mostrada na Figura 6.26. Desconsidere a massa da viga em comparação com as massas concentradas colocadas sobre ela e considere que todos $l_i = l$.
- 6.22** Deduza as matrizes de flexibilidade e rigidez do sistema massa-mola mostrado na Figura 6.27 considerando que todas as superfícies de contato sejam desprovidas de atrito.
- 6.23** Deduza as equações de movimento para a corda firmemente esticada que sustenta três massas, como mostra a Figura 6.28. Considere que as extremidades da corda sejam fixas.

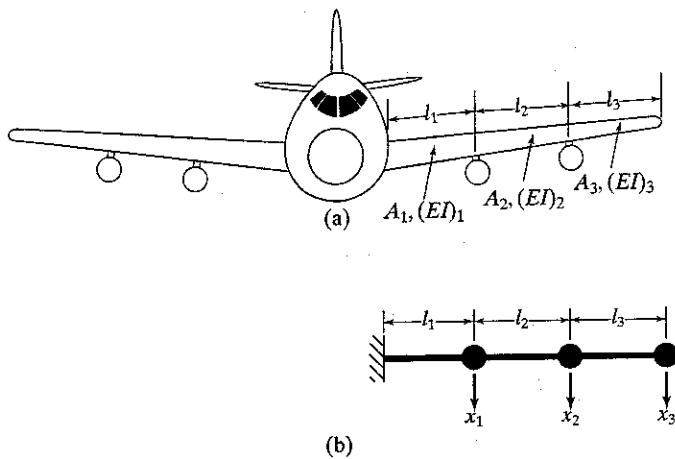


FIGURA 6.25

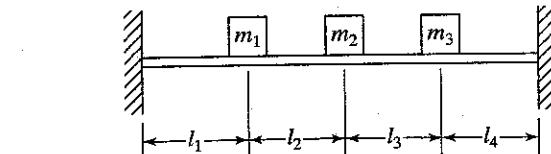


FIGURA 6.26

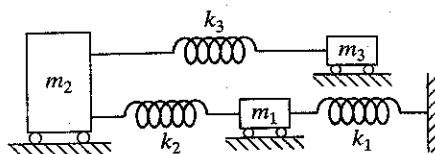


FIGURA 6.27

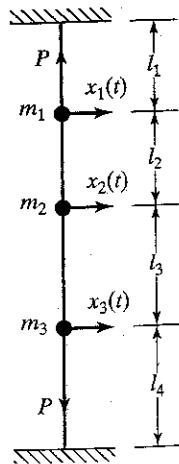


FIGURA 6.28

- 6.24** Deduza as equações de movimento do sistema mostrado na Figura 6.29.
- 6.25** Quatro molas idênticas, cada uma com rigidez k , estão posicionadas simetricamente a 90° uma em relação à outra, como mostra a Figura 2.54. Determine o coeficiente de influência do ponto de junção em uma direção arbitrária.
- 6.26** Mostre que a matriz de rigidez do sistema massa-mola apresentado Figura 6.3(a) é uma matriz banda ao longo da diagonal.
- 6.27 – 6.31** Deduza a matriz de massa de cada um dos sistemas mostrados nas figuras 6.17 a 6.21 utilizando as coordenadas indicadas.
- 6.32** O coeficiente de influência inverso b_{ij} é definido como a velocidade induzida no ponto i provocada por um impulso unitário aplicado no ponto j . Utilizando essa definição, deduza a matriz de massa inversa do sistema mostrado na Figura 6.4(a).
- 6.33** No edifício de quatro andares mostrado na Figura 6.30, não há nenhuma rotação da seção horizontal no nível dos pisos. Considerando-se que os pisos são rígidos e que a massa total está concentrada nos níveis dos pisos, deduza as equações de movimento do edifício utilizando:
- a segunda lei do movimento de Newton;
 - equações de Lagrange.

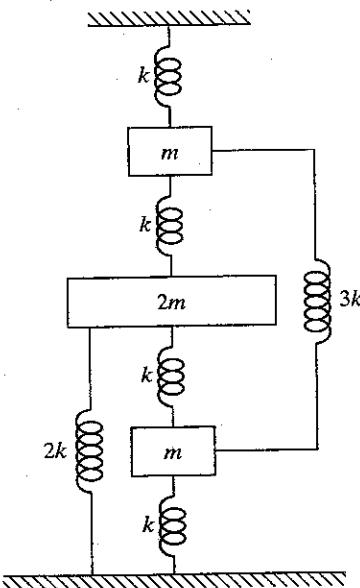


FIGURA 6.29

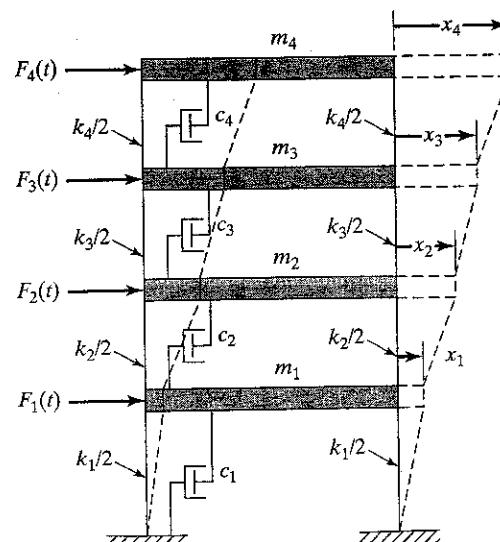


FIGURA 6.30

- 6.34** Deduza as equações de movimento do sistema mostrado na Figura 6.31, utilizando equações de Lagrange com x e θ como coordenadas generalizadas.
- 6.35** Deduza as equações de movimento do sistema mostrado na Figura 5.10(a), utilizando equações de Lagrange com:
- x_1 e x_2 como coordenadas generalizadas;
 - x e θ como coordenadas generalizadas.
- 6.36** Deduza as equações de movimento do sistema mostrado na Figura 6.24, utilizando equações de Lagrange.
- 6.37** Deduza as equações de movimento do pêndulo triplo mostrado na Figura 6.10, utilizando equações de Lagrange.
- 6.38** Quando um avião (Figura 6.32a) sofre vibrações simétricas, a fuselagem pode ser idealizada como uma massa central concentrada M_0 , e as asas podem ser modeladas como barras rígidas que suportam massas M em suas extremidades, como mostra a Figura 6.32(b). A flexibilidade entre as asas e a fuselagem pode ser representada por duas molas torcionais, cada uma com rigidez k_t .
 - Deduza as equações de movimento do avião utilizando equações de Lagrange com x e θ como coordenadas generalizadas.
 - Determine as freqüências naturais e formas modais do avião.
 - Determine a constante elástica torcional de modo que a freqüência natural de vibração, em modo torcional, seja maior do que 2 Hz quando $M_0 = 1.000 \text{ kg}$, $M = 500 \text{ kg}$ e $l = 6 \text{ m}$.
- 6.39 – 6.43** Use equações de Lagrange para deduzir as equações de movimento de cada um dos sistemas mostrados nas figuras 6.17 a 6.21.
- 6.44** Organize o problema de autovalor do Exemplo 6.10 em termos das coordenadas $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2 - x_1$ e $q_3 = x_3 - x_2$ e

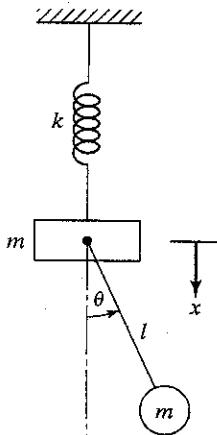


FIGURA 6.31

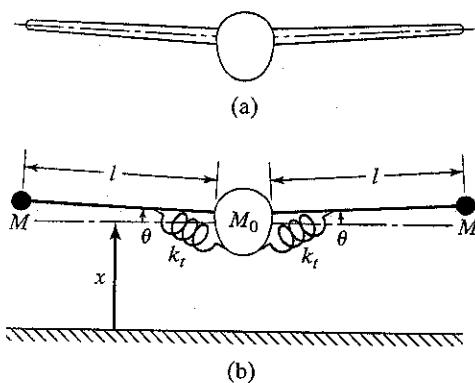


FIGURA 6.32

resolva o problema resultante. Compare os resultados obtidos com os do Exemplo 6.10 e tire conclusões.

- 6.45** Deduza a equação de freqüência do sistema mostrado na Figura 6.24.
- 6.46** Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 6.6(a) quando $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ e $m_3 = 3m$. Faça um gráfico das formas modais.
- 6.47** Organize a equação matricial de movimento e determine os três modos principais de vibração para o sistema mostrado na Figura 6.6(a) com $k_1 = 3k$, $k_2 = k_3 = k$, $m_1 = 3m$ e $m_2 = m_3 = m$. Verifique a ortogonalidade dos modos determinados.
- 6.48** Determine as freqüências naturais do sistema mostrado na Figura 6.10 com $l_1 = 20 \text{ cm}$, $l_2 = 30 \text{ cm}$, $l_3 = 40 \text{ cm}$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ e $m_3 = 3 \text{ kg}$.
- 6.49*** (a) Determine as freqüências naturais do sistema mostrado na Figura 6.26 com $m_1 = m_2 = m_3 = m$ e $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l/4$.
 (b) Determine as freqüências naturais da viga quando $m = 10 \text{ kg}$, $l = 0,5 \text{ m}$, a seção transversal é uma seção circular sólida com 2,5 cm de diâmetro e o material é aço.
 (c) Considere utilizar uma seção transversal circular oca, retangular sólida ou retangular oca para a viga, de modo a obter as mesmas freqüências naturais como em (b). Identifique a seção transversal correspondente ao peso mínimo da viga.
- 6.50** A equação de freqüência de um sistema com três graus de liberdade é dada por

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -3 & -2 \\ -3 & \lambda - 6 & -4 \\ -1 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = 0$$

Determine as raízes dessa equação.

- 6.51** Determine os autovalores e autovetores do sistema mostrado na Figura 6.24, considerando $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ e $m_1 = m_2 = m_3 = m$.
- 6.52** Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 6.24 para $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$, $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ e $m_3 = 2m$.
- 6.53** Determine as freqüências naturais e os modos principais do pêndulo triplo mostrado na Figura 6.10, considerando que $l_1 = l_2 = l_3 = l$ e $m_1 = m_2 = m_3 = m$.
- 6.54** Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema considerado no Problema 6.22 com $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k$ e $k_3 = 2k$.
- 6.55** Mostre que as freqüências naturais do sistema apresentado na Figura 6.6(a), com $k_1 = 3k$, $k_2 = k_3 = k$, $m_1 = 4m$, $m_2 = 2m$ e $m_3 = m$, são dadas por $\omega_1 = 0,46\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$ e $\omega_3 = 1,34\sqrt{k/m}$. Determine os autovetores do sistema.
- 6.56** Determine as freqüências naturais do sistema considerado no Problema 6.23 com $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = 3m$ e $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$.
- 6.57** Determine as freqüências naturais e os modos principais do sistema torcional mostrado na Figura 6.23 para $(GJ)_i = GJ$, $i = 1, 2, 3, 4$, $J_{d1} = J_{d2} = J_{d3} = J_0$ e $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$.
- 6.58** A matriz de massa $[m]$ e a matriz de rigidez $[k]$ de uma barra uniforme são

$$[m] = \frac{\rho Al}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [k] = \frac{2AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

* O asterisco denota um problema que não tem uma resposta única.

onde ρ é a densidade, A é a área da seção transversal, E é o módulo de Young e l é o comprimento da barra. Determine as freqüências naturais do sistema determinando as raízes da equação característica. Determine também os modos principais.

- 6.59** A matriz de massa de um sistema vibratório é dada por

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e os autovetores, por

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Determine a matriz modal $[m]$ -ortonormal do sistema.

- 6.60** Para o sistema mostrado na Figura 6.33:

- (a) determine o polinômio característico $\Delta(\omega^2) = \det[k] - \omega^2[m]|$;
- (b) construa um gráfico para $\Delta(\omega^2)$ considerando $\omega^2 = 0$ a $\omega^2 = 4,0$ (utilize incrementos $\Delta\omega^2 = 0,2$);
- (c) determine ω_1^2 , ω_2^2 e ω_3^2 .

- 6.61** (a) Sabe-se que dois dos autovetores de um sistema vibratório são

$$\begin{Bmatrix} 0,2754946 \\ 0,3994672 \\ 0,4490562 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} 0,6916979 \\ 0,2974301 \\ -0,3389320 \end{Bmatrix}$$

Prove que eles são ortogonais em relação à matriz de massa

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine o autovetor $[m]$ -ortogonal remanescente.

- (b) Se a matriz de rigidez do sistema for dada por

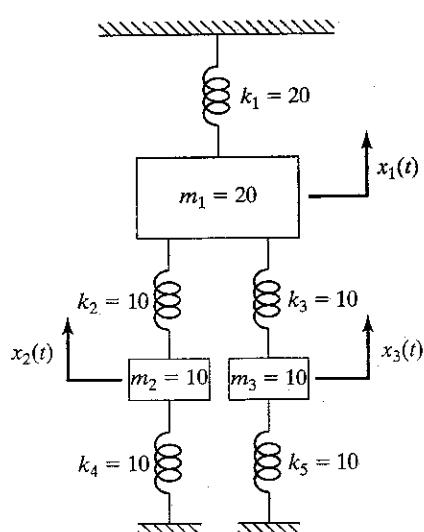


FIGURA 6.33

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

determine todas as freqüências naturais do sistema utilizando os autovetores da parte (a).

- 6.62** Determine as freqüências naturais do sistema mostrado na Figura 6.17 para $m_i = m$, $i = 1, 2, 3$.

- 6.63** Determine as freqüências naturais do sistema mostrado na Figura 6.18 com $m = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$, $k = 1.000 \text{ N/m}$ e $c = 100 \text{ N.s/m}$.

- 6.64** Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 6.13 com $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$ e $k_1 = k_2 = k$.

- 6.65** Determine a matriz modal para o sistema semidefinito mostrado na Figura 6.34 para $J_1 = J_2 = J_3 = J_0$, $k_{11} = k_r$ e $k_{12} = 2k_r$.

- 6.66** Determine a resposta de vibração livre do sistema massa-mola mostrado na Figura 6.24 para $k_i = k$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ e $m_3 = 2m$, para as condições iniciais $x_1(0) = x_{10}$ e $x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0)$.

- 6.67** Determine a resposta de vibração livre do pêndulo triplo mostrado na Figura 6.10 para $l_i = l$ ($i = 1, 2, 3$) e $m_i = m$ ($i = 1, 2, 3$) para as condições iniciais $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, $\theta_3(0) = \theta_{30}$, $\dot{\theta}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$),

- 6.68** Determine a resposta de vibração livre da corda fortemente esticada mostrada na Figura 6.28 para $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = 3m$ e $l_i = l$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Considere que as condições iniciais sejam $x_1(0) = x_3(0) = 0$, $x_2(0) = x_{20}$, $\dot{x}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

- 6.69** Determine a resposta de vibração livre do sistema massa-mola mostrado na Figura 6.6(a) para $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ e $m_3 = 3m$, correspondente às condições iniciais $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}(0)$, $x_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), e $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$.

- 6.70** Determine a resposta de vibração livre do sistema massa-mola mostrado na Figura 6.27 para $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ e $m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k$ e $k_3 = 2k$, correspondente às condições iniciais $\dot{x}_3(0) = \dot{x}_{30}$ e $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

- 6.71** No sistema de vagões de carga mostrado na Figura 6.13, o primeiro vagão adquire uma velocidade de $\dot{x}0$ provocada por um impacto. Determine a vibração livre resultante do sistema. Considere $m_i = m$ ($i = 1, 2, 3$) e $k_1 = k_2 = k$.

- 6.72** Determine a resposta de vibração livre de um sistema com três grau de liberdade governado pelas equações

$$10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\vec{x}}(t) + 100 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}(t) = \vec{0}$$

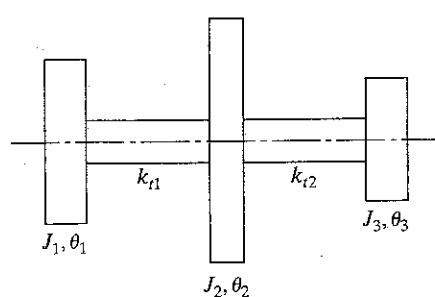


FIGURA 6.34

Considere que as condições iniciais sejam $x_i(0) = 0,1$ e $\dot{x}_i(0) = 0; i = 1, 2, 3$.

Observação: As freqüências naturais e formas modais do sistema são dadas nos Exemplos 6.10 e 6.11.

- 6.73 Utilizando análise modal, determine a resposta de vibração livre de um sistema com dois graus de liberdade com equações de movimento

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\vec{x}}(t) + 8 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}(t) = \vec{0}$$

e condições iniciais

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- 6.74 Determine as amplitudes de movimento das três massas na Figura 6.35 quando uma força harmônica $F(t) = F_0 \sin \omega t$ é aplicada à massa que está embaixo, à esquerda, com $m = 1$ kg, $k = 100$ N/m, $F_0 = 5$ N e $\omega = 10$ rad/s usando o método de superposição de modos.

- 6.75 Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema torcional mostrado na Figura 6.11 para $k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_t$ e $J_1 = J_2 = J_3 = J_0$. Se um torque $M_{t3}(t) = M_{t0} \cos \omega t$, com $M_{t0} = 500$ N.m e $\omega = 100$ rad/s agir sobre o gerador (J_3), determine a amplitude de cada componente. Considere $M_{t1} = M_{t2} = 0$, $k_t = 100$ N.m/rad e $J_0 = 1$ kg.m².

- 6.76 Utilizando os resultados dos Problemas 6.19 e 6.51, determine a matriz modal $[X]$ do sistema mostrado na Figura 6.24 e deduza as equações de movimento não acopladas.

- 6.77 Uma solução aproximada de um sistema com vários graus de liberdade pode ser obtida utilizando-se o método de aceleração de modo. De acordo com esse método, as equações de movimento de um sistema não amortecido são expressas como

$$\ddot{\vec{x}} = [k]^{-1}(\vec{F} - [m]\ddot{\vec{x}}) \quad (\text{E.1})$$

e $\ddot{\vec{x}}$ é aproximado utilizando os r primeiros modos ($r < n$) como

$$\ddot{\vec{x}}_{n \times 1} = [X]_{n \times r} \ddot{\vec{q}}_{r \times 1} \quad (\text{E.2})$$

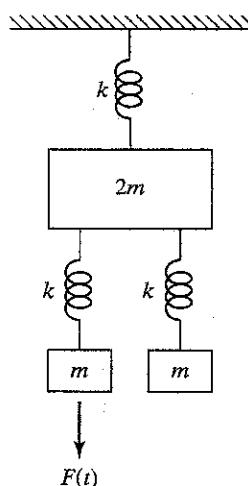


FIGURA 6.35

Visto que $[(k) - \omega_i^2[m]]\vec{X}^{(i)} = \vec{0}$ a Equação (E.1) pode ser escrita como

$$\ddot{\vec{x}}(t) = [k]^{-1}\vec{F}(t) - \sum_{i=1}^r \frac{1}{\omega_i^2} \vec{X}^{(i)} \ddot{q}_i(t) \quad (\text{E.3})$$

Determine a resposta aproximada do sistema descrito no Exemplo 6.18 (sem amortecimento), utilizando o método de aceleração de modo com $r = 1$.

- 6.78 Determine a resposta do sistema no Problema 6.46 para as condições iniciais $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$, $\dot{x}_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$, $\dot{x}_3(0) = -1$. Considere $k/m = 1$.

- 6.79 Mostre que as condições iniciais das coordenadas generalizadas $q_i(t)$ podem ser expressas em termos das condições iniciais das coordenadas físicas $x_i(t)$ em análise modal como

$$\vec{q}(0) = [X]^T [m] \vec{x}(0), \quad \dot{\vec{q}}(0) = [X]^T [m] \dot{\vec{x}}(0)$$

- 6.80 Um modelo simplificado de uma bicicleta com seu ciclista é mostrado na Figura 6.36. Determine o movimento vertical do ciclista quando a bicicleta atinge um trecho da estrada mais elevado, como mostrado na figura.

- 6.81 Determine a resposta do pêndulo triplo mostrado na Figura 6.10 para $l_i = 0,5$ m ($i = 1, 2, 3$) e $m_i = 1$ kg ($i = 1, 2, 3$) quando um momento, na forma de um pulso retangular de magnitude 0,1 N.m e duração 0,1 s, é aplicado ao longo da direção de θ_3 . Considere que o pêndulo está em repouso em $t = 0$.

- 6.82 Determine a resposta do sistema massa-mola mostrado na Figura 6.6(a) para $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ e $m_3 = 3m$ com $k = 10^4$ N.m e $m = 2$ kg quando uma força, na forma de um pulso retangular de magnitude 1.000 N e duração 0,25 s, é aplicada à massa m_1 na direção de x_1 .

- 6.83 Determine a resposta de regime permanente do sistema mostrado na Figura 6.16 com $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 100$ N/m, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ N.s/m, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, $F_1(t) = F_0 \cos \omega t$, $F_0 = 10$ N e $\omega = 1$ rad/s. Considere que a extremidade direita da mola k_4 e do amortecedor c_4 estão ligados a uma parede rígida. Use o método da impedância mecânica descrito na Seção 5.6 para a solução.

- 6.84 A asa de um avião (Figura 6.37(a)) é modelada como um sistema de massa concentrada com doze graus de liberdade, como mostra a Figura 6.37(b). As três primeiras formas modais naturais, obtidas experimentalmente, são dadas a seguir.

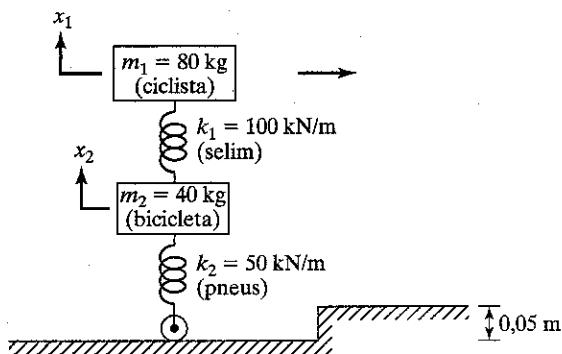


FIGURA 6.36

Forma modal	Grau de liberdade												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\vec{X}^{(1)}$	0,0	0,126	0,249	0,369	0,483	0,589	0,686	0,772	0,846	0,907	0,953	0,984	1,000
$\vec{X}^{(2)}$	0,0	-0,375	-0,697	-0,922	-1,017	-0,969	-0,785	-0,491	-0,127	0,254	0,599	0,860	1,000
$\vec{X}^{(3)}$	0,0	0,618	1,000	1,000	0,618	0,000	-0,618	-1,000	-1,000	-0,618	0,000	0,618	1,000

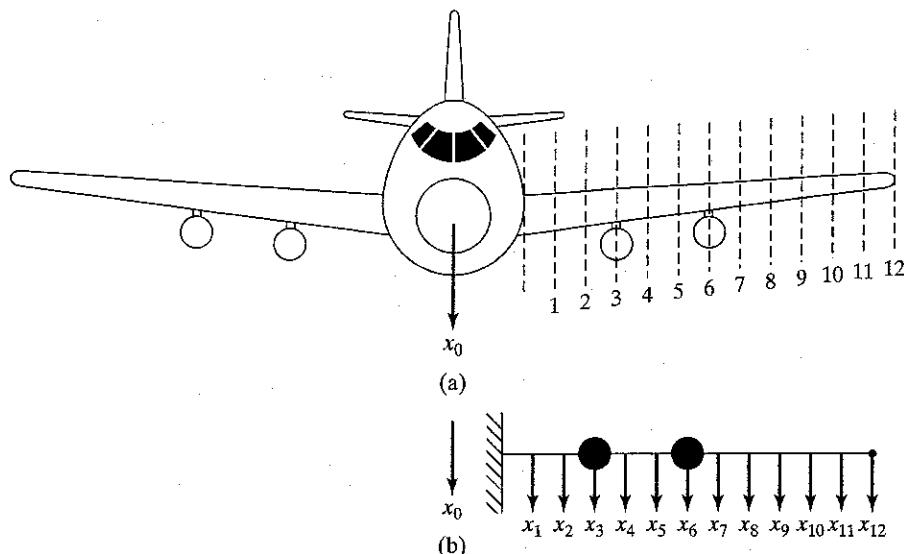


FIGURA 6.37

As freqüências naturais correspondente às três formas modais são dadas por $\omega_1 = 225 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 660 \text{ rad/s}$ e $\omega_3 = 1.100 \text{ rad/s}$. Se a fuselagem do aeroplano for submetida a um movimento vertical conhecido $x_0(t)$, deduza as equações não acopladas para determinar a resposta dinâmica da asa aproximando-a como uma combinação linear dos três primeiros modos normais. Sugestão: A equação de movimento da asa do aeroplano pode ser escrita, semelhante à Equação (3.64), como

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [c] (\dot{\vec{x}} - \dot{x}_0 \vec{u}_1) + [k] (\vec{x} - x_0 \vec{u}_1) = \vec{0}$$

ou

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [c] \dot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = -x_0 [m] \vec{u}_1$$

onde $\vec{u}_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}^T$ é um vetor unitário.

- 6.85 Utilizando MATLAB, determine os autovalores e autovetores de um sistema com matrizes de massa e rigidez dadas no Exemplo 6.12.
- 6.86 Usando MATLAB, determine e represente em gráfico a resposta de vibração livre resposta do sistema descrito no Problema 6.68 para os seguintes dados: $x_{20} = 0,5$, $P = 100$, $l = 5$, $m = 2$.
- 6.87 Utilizando a função MATLAB **ode23**, determine e representem um gráfico a resposta de vibração forçada do sistema descrito no Problema 6.74.
- 6.88 Usando a função MATLAB **roots**, determine as raízes da seguinte equação:

$$f(x) = x^{12} - 2 = 0$$

- 6.89 Determine a resposta de vibração forçada de um sistema com amortecimento viscoso com três graus de liberdade com equações de movimento:

$$10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \ddot{\vec{x}}(t) + 5 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \dot{\vec{x}}(t) + 20 \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}(t) = \begin{cases} 5 \cos 2t \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Considere condições iniciais iguais a zero.

- 6.90 Utilizando a função MATLAB **ode23**, resolva o Problema 6.83 e desenhe gráficos para $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$.
- 6.91 Usando **Program7.m**, gere o polinômio característico correspondente à matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

- 6.92 Utilizando **Program8.m**, determine a resposta de regime permanente de um sistema com três graus de liberdade com os seguintes dados:

$$\omega_1 = 25,076 \text{ rad/s}, \omega_2 = 53,578 \text{ rad/s}, \omega_3 = 110,907 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_i = 0,001, i = 1, 2, 3$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 41,4 & 0 & 0 \\ 0 & 38,8 & 0 \\ 0 & 0 & 25,88 \end{bmatrix},$$

$$[ev] = \begin{bmatrix} 1 & 1,0 & 1,0 \\ 1,303 & 0,860 & -1,000 \\ 1,947 & -1,685 & 0,183 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000 \cos 5t \\ 10000 \cos 10t \\ 20000 \cos 20t \end{Bmatrix}$$

- 6.93 Utilizando **Program7.cpp**, resolva o Problema 6.91.
 6.94 Utilizando **Program8.cpp**, resolva o Problema 6.92.
 6.95 Utilizando **PROGRAM7.F**, resolva o Problema 6.91.
 6.96 Utilizando **PROGRAM8.F**, resolva o Problema 6.92.
 6.97 Escreva um programa de computador para determinar os autovetores utilizando os autovalores conhecidos na Equação (6.61). Determine as formas modais do Problema 6.52 utilizando esse programa.
 6.98 Escreva um programa de computador para gerar a matriz modal $[m]$ -ortonormal $[X]$. O programa deve aceitar como entrada o número de graus de liberdade, os modos normais e a matriz de massa. Resolva o Problema 6.59 utilizando esse programa.
 6.99 As equações de movimento de um sistema não amortecido, em unidades SI, são dadas por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{Bmatrix} 10 \operatorname{sen} \omega t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Utilizando a sub-rotina MODAL, determine a resposta de regime permanente do sistema quando $\omega = 5 \text{ rad/s}$.
- 6.100 Determine a resposta do sistema no Problema 6.99 variando ω entre 1 e 10 rad/s em incrementos de 1 rad/s. Construa os gráficos que mostram as variações de magnitudes dos primeiros picos de $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ em relação a ω .

EXERCÍCIO DE PROJETO

Uma máquina-ferramenta pesada montada no primeiro andar de um edifício (Figura 6.38(a)) foi modelada como um sistema com três graus de liberdade, como indicado na Figura 6.38(b).

- (a) Para $k_1 = 5.000 \text{ lb/in}$, $k_2 = 500 \text{ lb/in}$, $k_3 = 2.000 \text{ lb/in}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 10 \text{ lb.s/in}$, $m_f = 50 \text{ lb.s}^2/\text{in}$, $m_b = 10 \text{ lb.s}^2/\text{in}$, $m_h = 2 \text{ lb.s}^2/\text{in}$ e $F(t) = 1.000 \cos 60t \text{ lb}$, determine a vibração de regime permanente do sistema utilizando o método da impedância mecânica descrito na Seção 5.6.
- (b) Se a máxima resposta do cabeçote da máquina-ferramenta (x_3) for reduzida de 25%, como a rigidez (k_2) da montagem deverá mudar?
- (c) Há algum modo melhor de atingir a meta declarada em (b)? Apresente detalhes.

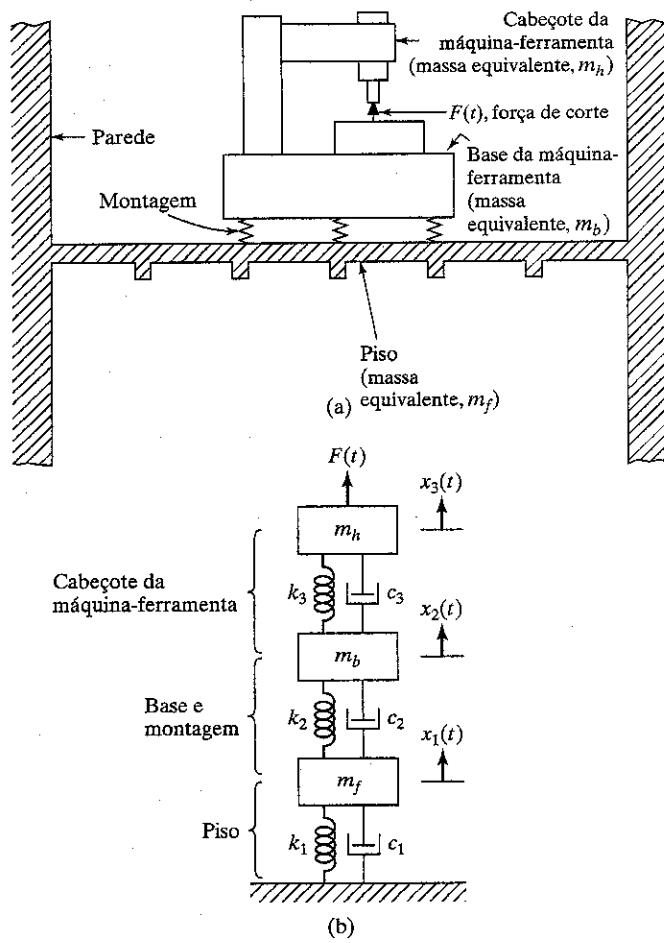


FIGURA 6.38



John William Strutt, Lord Rayleigh (1842–1919), físico, nascido na Inglaterra, foi professor de física experimental na Universidade de Cambridge (Cambridge University), professor de filosofia natural na Royal Institution (Royal Institution), em Londres, presidente da Real Sociedade (Royal Society) e reitor da Universidade de Cambridge (Cambridge University). Seu trabalho nas áreas de ótica e acústica é muito conhecido, sendo a *Teoria do som* (*Theory of sound*, 1877) considerada como um padrão de referência até hoje. O método para calcular freqüências naturais aproximadas de corpos vibratórios usando uma abordagem de energia ficou conhecido como ‘método de Rayleigh.’ (Cortesia de *Applied Mechanics Reviews*.)

CAPÍTULO SETE

Determinação de freqüências naturais e formas modais

7.1 Introdução

No capítulo anterior, determinamos as freqüências naturais (autovalores) e os modos naturais (autovetores) de um sistema com vários graus de liberdade igualando o determinante característico a zero. Embora esse método seja exato, a expansão do determinante característico e a solução da equação polinomial de n -ésimo grau resultante para obter as freqüências naturais podem tornar-se muito tediosas para valores grandes de n . Vários métodos analíticos e numéricos foram desenvolvidos para calcular as freqüências naturais e formas modais de sistemas com vários graus de liberdade. Neste capítulo, consideraremos a fórmula de Dunkerley, o método de Rayleigh, o método de Holzer, o método de iteração matricial e o método de Jacobi. A fórmula de Dunkerley e o método de Rayleigh são úteis apenas para estimar a freqüência natural fundamental. O método de Holzer é, em essência, um método tabular que pode ser utilizado para determinar soluções parciais ou completas de problemas de autovalor. O método de iteração matricial determina uma única freqüência natural por vez, começando normalmente no valor mais baixo. Desse modo, o método pode ser concluído após a determinação do número requerido de freqüências naturais e formas modais. Quando são exigidas todas as freqüências naturais e formas modais, podemos usar o método de Jacobi; ele determina todos os autovalores e autovetores simultaneamente.

7.2 Fórmula de Dunkerley

A fórmula de Dunkerley determina o valor aproximado da freqüência fundamental de um sistema composto em termos das freqüências naturais de suas partes componentes. A fórmula é deduzida levando-se em conta o fato de que as freqüências naturais mais altas da maioria dos sistemas vibratórios são grandes em comparação com suas freqüências fundamentais [7.1–7.3]. Para deduzir a fórmula de Dunkerley, considere um sistema geral com n graus de liberdade cujos autovalores podem ser determinados pela resolução da equação de freqüência, Equação (6.63):

$$| -[k] + \omega^2[m] | = 0$$

ou

$$\left| -\frac{1}{\omega^2}[I] + [a][m] \right| = 0 \quad (7.1)$$

Para um sistema de massa concentrada com uma matriz de massa diagonal, a Equação (7.1) torna-se

$$\left| -\frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \right| = 0$$

isto é,

$$\left(-\frac{1}{\omega^2} + a_{11}m_1 \right) a_{12}m_2 \cdots a_{1n}m_n \\ a_{21}m_1 \left(-\frac{1}{\omega^2} + a_{22}m_2 \right) \cdots a_{2n}m_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}m_1 a_{n2}m_2 \cdots \left(-\frac{1}{\omega^2} + a_{nn}m_n \right) \right| = 0 \quad (7.2)$$

A expansão da Equação (7.2) resulta em

$$\left(\frac{1}{\omega^2} \right)^n - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n) \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^{n-1} \\ + (a_{11}a_{22}m_1m_2 + a_{11}a_{33}m_1m_3 + \cdots \\ + a_{n-1,n-1}a_{nn}m_{n-1}m_n$$

$$\begin{aligned}
 & -a_{12}a_{21}m_1m_2 = \dots \\
 & -a_{n-1,n}a_{n,n-1}m_{n-1}m_n \left(\frac{1}{\omega_2} \right)^{n-2} \\
 & -\dots = 0
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Esta é uma equação polinomial de n -ésimo grau em $(1/\omega^2)$. Denotando as raízes da Equação (7.3) por $1/\omega_1^2, 1/\omega_2^2, \dots, 1/\omega_n^2$, temos

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \dots \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_n^2} \right) \\
 & = \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^n - \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^{n-1} \\
 & -\dots = 0
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Igualando o coeficiente de $(1/\omega^2)^{n-1}$ nas equações (7.4) e (7.3), temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} = a_{11}m_1 + a_{22}m_2 \\
 & +\dots+a_{nn}m_n
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Na maioria dos casos, as freqüências mais altas $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ são consideravelmente maiores que a freqüência fundamental ω_1 e, portanto,

$$\frac{1}{\omega_i^2} \ll \frac{1}{\omega_1^2}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Assim, a Equação (7.5) pode ser escrita aproximadamente como

$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \dots + a_{nn}m_n \tag{7.6}$$

Essa equação é conhecida como *fórmula de Dunkerley*. A freqüência fundamental dada pela Equação (7.6) sempre será menor que o valor exato. Em alguns casos, será mais conveniente reescrever a Equação (7.6) como

$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx \frac{1}{\omega_{1n}^2} + \frac{1}{\omega_{2n}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{nn}^2} \tag{7.7}$$

onde $\omega_{in} = (1/a_{ii}m_i)^{1/2} = (k_{ii}/m_i)^{1/2}$ denota a freqüência natural de um sistema com um grau de liberdade que consiste em uma massa m_i e uma mola de rigidez k_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$. A utilização da fórmula de Dunkerley para determinar a freqüência mais baixa de sistemas elásticos é apresentada em Referências [7.4, 7.5].

EXEMPLO 7.1

Freqüência fundamental de uma viga

Estime a freqüência natural fundamental de uma viga simplesmente apoiada que suporta três massas a intervalos iguais, como mostra a Figura 7.1.

Solução: Os coeficientes de influência de flexibilidade (ver Exemplo 6.6) requeridos para a aplicação da fórmula de Dunkerley são dados por

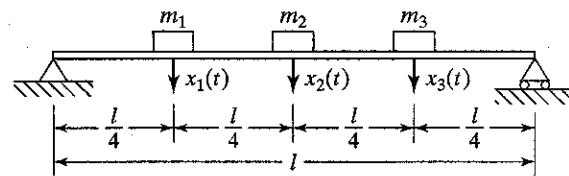


FIGURA 7.1 Viga suportando massas.

$$a_{11} = a_{33} = \frac{3}{256} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{22} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EI} \tag{E.1}$$

Assim, utilizando $m_1 = m_2 = m_3 = m$, a Equação (7.6) dá

$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx \left(\frac{3}{256} + \frac{1}{48} + \frac{3}{256} \right) \frac{ml^3}{EI} = 0,04427 \frac{ml^3}{EI}$$

$$\omega_1 \approx 4,75375 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

Esse valor pode ser comparado com o valor exato da freqüência fundamental.

7.3 Método de Rayleigh

O método de Rayleigh foi apresentado na Seção 2.5 para determinar as freqüências naturais de sistemas com um grau de liberdade. O método pode ser estendido para determinar o valor aproximado da freqüência natural fundamental de um sistema discreto.¹ O método é baseado no princípio de Rayleigh, que pode ser enunciado da seguinte maneira [7.6]:

A freqüência de vibração de um sistema conservativo que vibra em relação a uma posição de equilíbrio tem um valor estacionário na vizinhança de um modo natural. Na verdade, esse valor estacionário é um valor mínimo na vizinhança do modo natural fundamental.

Agora, vamos deduzir uma expressão para o valor aproximado da primeira freqüência natural de um sistema com vários graus de liberdade de acordo com o método de Rayleigh.

As energias cinética e potencial de um sistema discreto com n graus de liberdade podem ser expressas como

$$T = \frac{1}{2} \vec{x}^T [m] \vec{\dot{x}} \tag{7.8}$$

$$V = \frac{1}{2} \vec{x}^T [k] \vec{x} \tag{7.9}$$

Para determinar as freqüências naturais, supomos que o movimento harmônico seja

$$\vec{x} = \vec{X} \cos \omega t \tag{7.10}$$

onde \vec{X} denota o vetor de amplitudes (forma modal) e ω representa a freqüência natural de vibração. Se o sistema for conservativo, a máxima energia cinética é igual à máxima energia potencial:

$$T_{\max} = V_{\max} \tag{7.11}$$

¹ O método de Rayleigh para sistemas contínuos é apresentado na Seção 8.7.

Substituindo a Equação (7.10) nas equações (7.8) e (7.9), encontramos

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \vec{X}^T [m] \vec{X} \omega^2 \quad (7.12)$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \vec{X}^T [k] \vec{X} \quad (7.13)$$

Igualando V_{\max} e T_{\max} , obtemos²

$$\omega^2 = \frac{\vec{X}^T [k] \vec{X}}{\vec{X}^T [m] \vec{X}} \quad (7.14)$$

O lado direito da Equação (7.14) é conhecido como *quociente de Rayleigh* e é denotado por $R(\vec{X})$.

7.3.1 Propriedades do quociente de Rayleigh

Como afirmamos antes, $R(\vec{X})$ tem um valor estacionário quando o vetor arbitrário \vec{X} está na vizinhança de qualquer autovetor $\vec{X}^{(r)}$. Para provar isso, expressamos o vetor arbitrário \vec{X} em termos dos modos normais do sistema $\vec{X}^{(i)}$, como

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} + c_3 \vec{X}^{(3)} + \dots \quad (7.15)$$

Então

$$\begin{aligned} \vec{X}^T [k] \vec{X} &= c_1^2 \vec{X}^{(1)T} [k] \vec{X}^{(1)} + c_2^2 \vec{X}^{(2)T} [k] \vec{X}^{(2)} \\ &\quad + c_3^2 \vec{X}^{(3)T} [k] \vec{X}^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (7.16)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{X}^T [m] \vec{X} &= c_1^2 \vec{X}^{(1)T} [m] \vec{X}^{(1)} + c_2^2 \vec{X}^{(2)T} [m] \vec{X}^{(2)} \\ &\quad + c_3^2 \vec{X}^{(3)T} [m] \vec{X}^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (7.17)$$

já que os termos cruzados da forma $c_i c_j \vec{X}^{(i)T} [k] \vec{X}^{(j)}$ e $c_i c_j \vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(j)}$, $i \neq j$, são zero pela propriedade da ortogonalidade. Usando as equações (7.16) e (7.17) e a relação

$$\vec{X}^{(i)T} [k] \vec{X}^{(i)} = \omega_i^2 \vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(i)} \quad (7.18)$$

o quociente de Rayleigh da Equação (7.14) pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \omega^2 &= R(\vec{X}) \\ &= \frac{c_1^2 \omega_1^2 \vec{X}^{(1)T} [m] \vec{X}^{(1)} + c_2^2 \omega_2^2 \vec{X}^{(2)T} [m] \vec{X}^{(2)} + \dots}{c_1^2 \vec{X}^{(1)T} [m] \vec{X}^{(1)} + c_2^2 \vec{X}^{(2)T} [m] \vec{X}^{(2)} + \dots} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Se os modos normais forem normalizados, essa equação torna-se

$$\omega^2 = R(\vec{X}) = \frac{c_1^2 \omega_1^2 + c_2^2 \omega_2^2 + \dots}{c_1^2 + c_2^2 + \dots} \quad (7.20)$$

Se a diferença entre \vec{X} e o autovetor $\vec{X}^{(r)}$ for pequena, o coeficiente c_r será muito maior que os coeficientes remanescentes c_i ($i \neq r$), e a Equação (7.20) poderá ser escrita como

$$\begin{aligned} c_r^2 \omega_r^2 + c_r^2 \sum_{i=1,2,\dots, i \neq r} \left(\frac{c_i}{c_r} \right)^2 \omega_i^2 \\ R(\vec{X}) = \frac{c_r^2 + c_r^2 \sum_{i=1,2,\dots, i \neq r} \left(\frac{c_i}{c_r} \right)^2}{c_r^2 + c_r^2 \sum_{i=1,2,\dots, i \neq r} \left(\frac{c_i}{c_r} \right)^2} \end{aligned} \quad (7.21)$$

² A Equação (7.14) também pode ser obtida pela relação $[k] \vec{X} = \omega^2 [m] \vec{X}$. Pré-multiplicando essa Equação por \vec{X}^T e resolvendo a equação resultante, obtemos a Equação (7.14).

Visto que $|c_i/c_r| = \varepsilon_i \ll 1$ onde ε_i é um número pequeno para todo $i \neq r$, a Equação (7.21) dá

$$R(\vec{X}) = \omega_r^2 \{1 + O(\varepsilon^2)\} \quad (7.22)$$

onde $O(\varepsilon^2)$ representa uma expressão em ε de segunda ordem ou de ordem superior. A Equação (7.22) indica que, se a diferença entre o vetor arbitrário \vec{X} e o autovetor $\vec{X}^{(r)}$ for pequena de primeira ordem, a diferença entre $R(\vec{X})$ e o autovalor ω_r^2 também será pequena de segunda ordem. Isso significa que o quociente de Rayleigh tem um valor estacionário na vizinhança de um autovetor.

O valor estacionário é, na verdade, um valor mínimo na vizinhança do modo fundamental, $\vec{X}^{(1)}$. Para ver isso, fazemos $r = 1$ na Equação (7.21) e escrevemos

$$\begin{aligned} R(\vec{X}) &= \frac{\omega_1^2 + \sum_{i=2,3,\dots} \left(\frac{c_i}{c_1} \right)^2 \omega_i^2}{\left\{ 1 + \sum_{i=2,3,\dots} \left(\frac{c_i}{c_1} \right)^2 \right\}} \\ &\simeq \omega_1^2 + \sum_{i=2,3,\dots} \varepsilon_i^2 \omega_i^2 - \omega_1^2 \sum_{i=2,3,\dots} \varepsilon_i^2 \\ &\simeq \omega_1^2 + \sum_{i=2,3,\dots} (\omega_i^2 - \omega_1^2) \varepsilon_i^2 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Uma vez que, em geral, $\omega_i^2 > \omega_1^2$ para $i = 2, 3, \dots$, a Equação (7.23) leva a

$$R(\vec{X}) \geq \omega_1^2 \quad (7.24)$$

o que mostra que o quociente de Rayleigh nunca é mais baixo do que o primeiro autovalor. Prosseguindo de maneira semelhante, podemos mostrar que

$$R(\vec{X}) \leq \omega_n^2 \quad (7.25)$$

o que significa que o quociente de Rayleigh nunca é mais alto do que o autovalor mais alto. Assim, o quociente de Rayleigh proporciona um limite superior para ω_1^2 e um limite inferior para ω_n^2 .

7.3.2 Cálculo da freqüência natural fundamental

A Equação (7.14) pode ser usada para determinar um valor aproximado da primeira freqüência natural (ω_1^1) do sistema. Para isso, selecionamos um vetor experimental \vec{X} para representar o primeiro modo natural $\vec{X}^{(1)}$ e o substituímos no lado direito da Equação (7.14). Isso dá o valor aproximado de ω_1^2 . Como o quociente de Rayleigh é estacionário, podemos obter estimativas extraordinariamente boas de ω_1^2 , ainda que o desvio entre o vetor experimental \vec{X} e o verdadeiro modo natural $\vec{X}^{(1)}$ seja grande. É óbvio que o valor estimado da freqüência fundamental ω_1 é mais acurado se o vetor experimental (\vec{X}) escolhido for muito parecido com o modo natural verdadeiro $\vec{X}^{(1)}$. O método de Rayleigh é comparado com o de Dunkerley e outros métodos nas Referências [7.7–7.9].

EXEMPLO 7.2

Freqüência fundamental de um sistema com três graus de liberdade

Estime a freqüência fundamental de vibração do sistema mostrado na Figura 7.2. Considere que $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$, e que a forma modal é

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Solução: As matrizes de rigidez e massa do sistema são

$$[k] = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Substituindo a forma modal suposta na expressão para o quociente de Rayleigh, obtemos

$$\begin{aligned} R(\vec{X}) &= \omega^2 = \frac{\vec{X}^T [k] \vec{X}}{\vec{X}^T [m] \vec{X}} \\ &= \frac{(1 \ 2 \ 3)k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}}{(1 \ 2 \ 3)m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}} \\ &= 0,2143 \frac{k}{m} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\omega_1 = 0,4629 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E.4})$$

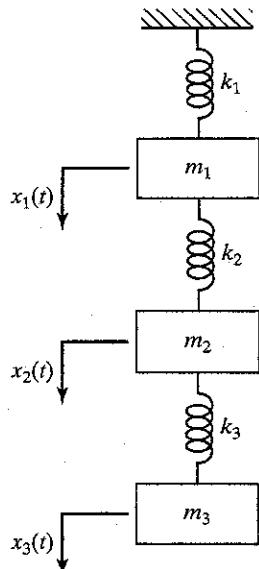


FIGURA 7.2 Sistema massa-mola com três graus de liberdade.

Esse valor é 4,0225 por cento maior que o valor exato de $0,4450\sqrt{k/m}$. A forma modal fundamental exata (ver Exemplo 6.10) nesse caso é

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1,0000 \\ 1,8019 \\ 2,2470 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

7.3.3 Freqüência fundamental de vigas e eixos

Embora o procedimento que acabamos de esquematizar seja aplicável a todos os sistemas discretos, uma equação mais simples pode ser deduzida para a freqüência fundamental da vibração transversal de uma viga ou de um eixo que suporta várias massas, como polias, engrenagens ou volantes. Nesses casos, a curva de deflexão estática é usada como uma aproximação da curva de deflexão dinâmica.

Considere um eixo que suporta várias massas, como mostra a Figura 7.3. Consideraremos que a massa do eixo seja desprezível. A energia potencial do sistema é a energia de deformação do eixo defletido, que é igual ao trabalho realizado pelas cargas estáticas. Assim,

$$V_{\max} = \frac{1}{2} (m_1 g w_1 + m_2 g w_2 + \dots) \quad (7.26)$$

onde $m_i g$ é a carga estática resultante da massa m_i e w_i é a deflexão estática total da massa m_i resultante de todas as massas. Para oscilação harmônica (vibração livre), a energia cinética máxima devida às massas é

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} (m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 + \dots) \quad (7.27)$$

onde ω é a freqüência de oscilação. Igualando V_{\max} e T_{\max} , obtemos

$$\omega = \left\{ \frac{g(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \dots)}{(m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 + \dots)} \right\}^{1/2} \quad (7.28)$$

EXEMPLO 7.3

Freqüência fundamental de um eixo com rotores

Estime a freqüência fundamental da vibração transversal de um eixo que porta três rotores (massas), como mostra a Figura 7.3, com $m_1 = 20 \text{ kg}$, $m_2 = 50 \text{ kg}$, $m_3 = 40 \text{ kg}$, $l_1 = 1 \text{ m}$,

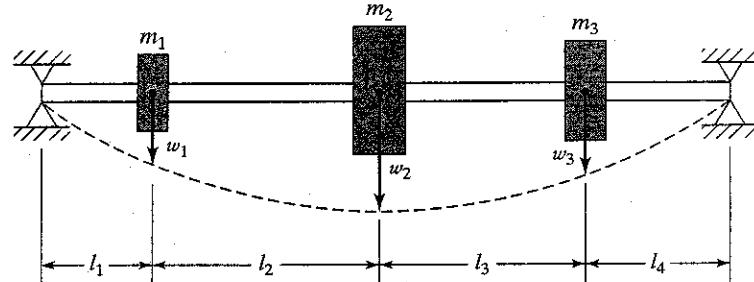


FIGURA 7.3 Eixo suportando massas.

$l_2 = 3 \text{ m}$, $l_3 = 4 \text{ m}$ e $l_4 = 2 \text{ m}$. O eixo é feito de aço e tem uma seção transversal circular sólida com 10 cm de diâmetro.

Solução: Pela resistência dos materiais, a deflexão da viga mostrada na Figura 7.4 resultante de uma carga estática P [7.10] é dada por

$$w(x) = \begin{cases} \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2); & 0 \leq x \leq a \\ -\frac{Pa(l-x)}{6EI} [a^2 + x^2 - 2lx]; & a \leq x \leq l \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Deflexão resultante do peso de m_1 : Na localização da massa m_1 (com $x = 1 \text{ m}$, $b = 9 \text{ m}$ e $l = 10 \text{ m}$ na Equação E.1):

$$\begin{aligned} w'_1 &= \frac{(20 \times 9,81)(9)(1)}{6EI(10)} (100 - 81 - 1) \\ &= \frac{529,74}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Na localização da massa m_2 (com $a = 1 \text{ m}$, $x = 4 \text{ m}$ e $l = 10 \text{ m}$ na Equação E.2):

$$\begin{aligned} w'_2 &= \frac{(20 \times 9,81)(1)(6)}{6EI(10)} [1 + 16 - 2(10)(4)] \\ &= \frac{1.236,06}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Na localização da massa m_3 (com $a = 1 \text{ m}$, $x = 8 \text{ m}$ e $l = 10 \text{ m}$ na Equação E.2):

$$\begin{aligned} w'_3 &= \frac{(20 \times 9,81)(1)(2)}{6EI(10)} [1 + 64 - 2(10)(8)] \\ &= \frac{621,3}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Deflexão resultante do peso de m_2 : Na localização de m_1 (com $x = 1 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$ e $l = 10 \text{ m}$ na Equação E.1):

$$\begin{aligned} w''_1 &= \frac{(50 \times 9,81)(6)(1)}{6EI(10)} (100 - 36 - 1) \\ &= \frac{3.090,15}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Na localização de m_2 (com $x = 4 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$ e $l = 10 \text{ m}$ na Equação E.1):

$$\begin{aligned} w''_2 &= \frac{(50 \times 9,81)(6)(4)}{6EI(10)} (100 - 36 - 16) \\ &= \frac{9.417,6}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

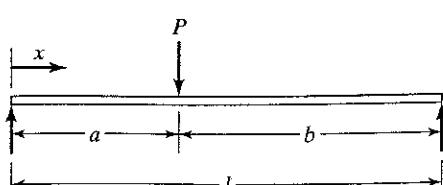


FIGURA 7.4 Viga sob carga estática.

Na localização de m_3 (com $a = 4 \text{ m}$, $x = 8 \text{ m}$ e $l = 10 \text{ m}$ na Equação E.2):

$$\begin{aligned} w''_3 &= -\frac{(50 \times 9,81)(4)(2)}{6EI(10)} [16 + 64 - 2(10)(8)] \\ &= \frac{5.232,0}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Deflexão resultante do peso de m_3 : Na localização de m_1 (com $x = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$ e $l = 10 \text{ m}$ na Equação E.1):

$$\begin{aligned} w'''_1 &= \frac{(40 \times 9,81)(2)(1)}{6EI(10)} (100 - 4 - 1) \\ &= \frac{1.242,6}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Na localização de m_2 (com $x = 4 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$ e $l = 10 \text{ m}$ na Equação E.1):

$$\begin{aligned} w'''_2 &= \frac{(40 \times 9,81)(2)(4)}{6EI(10)} (100 - 4 - 16) \\ &= \frac{4.185,6}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Na localização de m_3 (com $x = 8 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$ e $l = 10 \text{ m}$ na Equação E.1):

$$\begin{aligned} w'''_3 &= \frac{(40 \times 9,81)(2)(8)}{6EI(10)} (100 - 4 - 64) \\ &= \frac{3.348,48}{EI} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

As deflexões totais das massas m_1 , m_2 e m_3 são

$$w_1 = w'_1 + w''_1 + w'''_1 = \frac{4.862,49}{EI}$$

$$w_2 = w'_2 + w''_2 + w'''_2 = \frac{14.839,26}{EI}$$

$$w_3 = w'_3 + w''_3 + w'''_3 = \frac{9.201,78}{EI}$$

Substituindo na Equação (7.28), determinamos a freqüência natural fundamental:

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81(20 \times 4.862,49 + 50 \times 14.839,26 + 40 \times 9.201,78)EI}{20 \times (4.862,49)^2 + 50 \times (14.839,26)^2 + 40 \times (9.201,78)^2}}^{1/2} = 0,028222 \sqrt{EI} \quad (\text{E.12})$$

Para o eixo, $E = 2,07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ e $I = \pi(0,1)^4/64 = 4,90875 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Por conseguinte, a Equação (E.12) dá

$$\omega = 28,4482 \text{ rad/s}$$

7.4 Método de Holzer

O método de Holzer é, em essência, um esquema de tentativa e erro para determinar as freqüências naturais de sistemas vibratórios não amortecidos, amortecidos, semidefinidos, fixos ou ramificados que envolvam deslocamentos lineares e angulares [7.11, 7.12]. O método também pode ser programado para aplicações computadorizadas. Em primeiro lugar, supõe-se uma freqüência experimental do sistema e encontra-se uma solução quando se constata que a freqüência suposta satisfaz as restrições do sistema. Em geral, isso requer várias tentativas. Dependendo da freqüência experimental usada, a freqüência fundamental, bem como as freqüências mais altas do sistema podem ser determinadas. O método também dá as formas modais.

7.4.1 Sistemas torcionais

Considere o sistema torcional semidefinito não amortecido mostrado na Figura 7.5. As equações de movimento dos discos podem ser deduzidas da seguinte maneira:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + k_{t1} (\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (7.29)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + k_{t1} (\theta_2 - \theta_1) + k_{t2} (\theta_2 - \theta_3) = 0 \quad (7.30)$$

$$J_3 \ddot{\theta}_3 + k_{t2} (\theta_3 - \theta_2) = 0 \quad (7.31)$$

Visto que o movimento é harmônico em um modo natural de vibração, consideramos que $\theta_i = \Theta_i \cos(\omega t + \phi)$ nas equações (7.29) a (7.31) e obtemos

$$\omega^2 J_1 \Theta_1 = k_{t1} (\Theta_1 - \Theta_2) \quad (7.32)$$

$$\omega^2 J_2 \Theta_2 = k_{t1} (\Theta_2 - \Theta_1) + k_{t2} (\Theta_2 - \Theta_3) \quad (7.33)$$

$$\omega^2 J_3 \Theta_3 = k_{t2} (\Theta_3 - \Theta_2) \quad (7.34)$$

O somatório dessas equações dá

$$\sum_{i=1}^3 \omega^2 J_i \Theta_i = 0 \quad (7.35)$$

A Equação (7.35) afirma que a soma dos torques de inércia do sistema semidefinito deve ser zero. Essa equação pode ser tratada como outra forma da equação de freqüência, e a freqüência experimental deve satisfazer esse requisito.

No método de Holzer, considera-se uma freqüência experimental ω , e Θ_1 é escolhida arbitrariamente como unidade. Em seguida, calcula-se Θ_2 pela Equação (7.32), e, então, Θ_3 é determinada pela Equação (7.33). Assim, obtemos

$$\Theta_1 = 1 \quad (7.36)$$

$$\Theta_2 = \Theta_1 - \frac{\omega^2 J_1 \Theta_1}{k_{t1}} \quad (7.37)$$

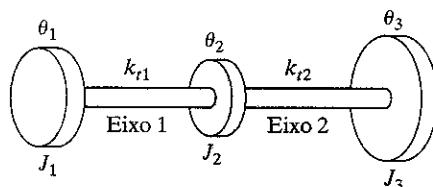


FIGURA 7.5 Sistema torcional semidefinito.

$$\Theta_3 = \Theta_2 - \frac{\omega^2}{k_{t2}} (J_1 \Theta_1 + J_2 \Theta_2) \quad (7.38)$$

Esses valores são substituídos na Equação (7.35) para verificar se a restrição foi satisfeita. Se a Equação (7.35) não tiver sido satisfeita, considera-se um novo valor experimental de ω , e o processo é repetido. As equações (7.35), (7.37) e (7.38) podem ser generalizadas para um sistema com n discos da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^n \omega^2 J_i \Theta_i = 0 \quad (7.39)$$

$$\Theta_i = \Theta_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{ti-1}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} J_k \Theta_k \right),$$

$$i = 2, 3, \dots, n \quad (7.40)$$

Assim, o método usa as equações (7.39) e (7.40) repetidas vezes para diferentes freqüências experimentais. Se a freqüência experimental considerada não for uma freqüência natural do sistema, a Equação (7.39) não é satisfeita. O torque resultante na Equação (7.39) representa um torque aplicado ao último disco. Então, faz-se um gráfico do torque M_t para a ω escolhida. Quando o cálculo é repetido com outros valores de ω , o gráfico resultante é o mostrado na Figura 7.6. Por esse gráfico, as freqüências naturais do sistema podem ser identificadas como os valores de ω nos quais $M_t = 0$. As amplitudes $\Theta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ correspondentes às freqüências naturais são as formas modais do sistema.

O método de Holzer também pode ser aplicado a sistemas com extremidades fixas. Em uma extremidade fixa, a amplitude de vibração deve ser zero. Nesse caso, as freqüências naturais podem ser determinadas por meio da representação gráfica da amplitude resultante (em vez do torque resultante) em relação às freqüências consideradas. Para um sistema com uma extremidade livre e a outra fixa, a Equação (7.40) pode ser usada para verificar a amplitude na extremidade fixa. Um melhoramento do método de Holzer é apresentado nas Referências [7.13, 7.14].

EXEMPLO 7.4

Freqüências naturais de um sistema torcional

O arranjo do compressor, turbina e gerador em uma usina termelétrica é mostrado na Figura 7.7. Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema.

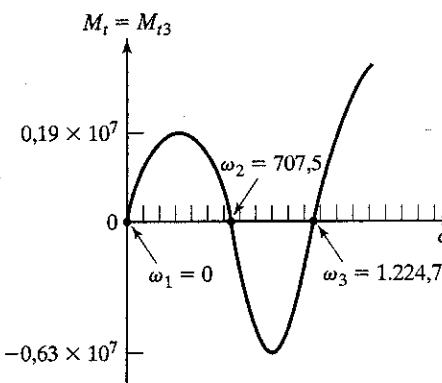
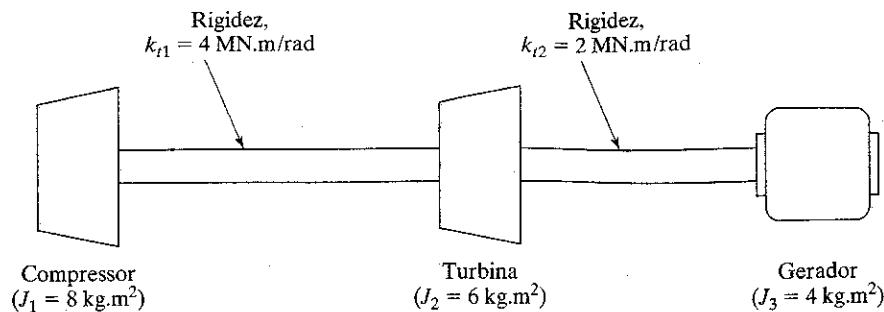


FIGURA 7.6 Torque resultante em relação à freqüência.

**FIGURA 7.7** Sistema torcional livre-livre.

Solução: Esse sistema representa um sistema torcional sem restrição, livre-livre. A Tabela 7.1 mostra seus parâmetros e a seqüência de cálculos. Os cálculos para as freqüências experimentais $\omega = 0, 10, 20, 700$ e 710 são mostrados nessa tabela. A quantidade M_{t3} denota o torque para a direita na Estação 3 (gerador), que deve ser zero nas freqüências naturais.

A Figura 7.6 mostra o gráfico de M_{tr} em relação a ω . Na vizinhança de $M_{t3} = 0$, são utilizados espaçamentos muito próximos entre os valores experimentais de ω de modo a obter valores acurados para as duas primeiras formas modais, apresentadas na Figura 7.8. Observe que o valor $\omega = 0$ corresponde à rotação de corpo rígido. ■

TABELA 7.1

Parâmetros do sistema	Quantidade	Tentativa					
		1	2	3	...	71	72
ω		0	10	20		700	710
ω^2		0	100	400		490.000	504.100
Estação 1:							
$J_1 = 8$	Θ_1	1,0	1,0	1,0		1,0	1,0
$k_{t1} = 4 \times 10^6$	$M_{t1} = \omega^2 J_1 \Theta_1$	0	800	3.200		0,392E7	0,403E7
Estação 2:							
$J_2 = 6$	$\Theta_2 = 1 - \frac{M_{t1}}{k_{t1}}$	1,0	0,9998	0,9992		0,0200	-0,0082
$k_{t2} = 2 \times 10^6$	$M_{t2} = M_{t1} + \omega^2 J_2 \Theta_2$	0	1.400	5.598		0,398E7	0,401E7
Estação 3:							
$J_3 = 4$	$\Theta_3 = \Theta_2 - \frac{M_{t2}}{k_{t2}}$	1,0	0,9991	0,9964		-1,9690	-2,0120
$k_{t3} = 0$	$M_{t3} = M_{t2} + \omega^2 J_3 \Theta_3$	0	1.800	7.192		0,119E6	-0,494E5

7.4.2 Sistemas massa-mola

Embora o método de Holzer seja aplicado extensamente a sistemas torcionais, o procedimento também é aplicado à análise de vibração de sistemas massa-mola. As equações de movimento de um sistema massa-mola (ver Figura 7.9) podem ser expressas como

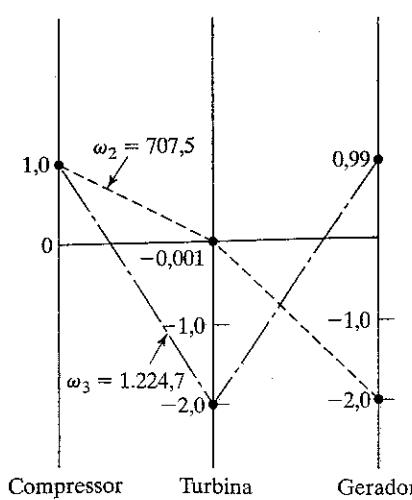
$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 (x_1 - x_2) = 0 \quad (7.41)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_1 (x_2 - x_1) + k_2 (x_2 - x_3) = 0 \\ \dots \quad (7.42)$$

Para movimento harmônico, $x_i(t) = X_i \cos \omega t$, onde X_i é a amplitude da massa m_i e as equações (7.41) e (7.42) podem ser escritas como

$$\omega^2 m_1 X_1 = k_1 (X_1 - X_2) \quad (7.43)$$

$$\omega^2 m_2 X_2 = k_1 (X_2 - X_1) + k_2 (X_2 - X_3) \\ = -\omega^2 m_1 X_1 + k_2 (X_2 - X_3) \\ \dots \quad (7.44)$$

**FIGURA 7.8** Primeiros dois modos flexíveis.

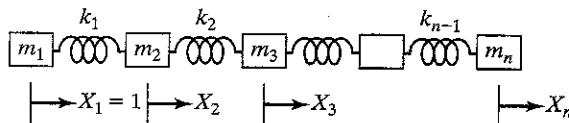


FIGURA 7.9 Sistema massa-mola livre-livre.

O procedimento para o método de Holzer começa com uma freqüência experimental ω , e a amplitude da massa m_1 como $X_1 = 1$. Então, as equações (7.43) e (7.44) podem ser utilizadas para obter as amplitudes das massas m_2, m_3, \dots, m_n :

$$X_2 = X_1 - \frac{\omega^2 m_1 X_1}{k_1} \quad (7.45)$$

$$X_3 = X_2 - \frac{\omega^2}{k_2} (m_1 X_1 + m_2 X_2) \quad (7.46)$$

$$X_i = X_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{i-1}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} m_k X_k \right), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (7.47)$$

Como no caso dos sistemas torcionais, a força resultante aplicada à *última* (n -ésima) massa pode ser calculada da seguinte maneira:

$$F = \sum_{i=1}^n \omega^2 m_i X_i \quad (7.48)$$

Os cálculos são repetidos com várias outras freqüências experimentais ω . As freqüências naturais são identificadas com os valores de ω , que dão $F = 0$ para um sistema livre-livre. Para isso, é conveniente construir um gráfico de F em relação a ω , utilizando para os sistemas massa-mola o mesmo procedimento utilizado para os sistemas torcionais.

7.5 Método de iteração matricial

O método de iteração matricial considera que as freqüências naturais são distintas e bem separadas, de modo que $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$. A iteração é iniciada com a seleção de um vetor experimental \vec{X}_1 , que então é pré-multiplicado pela matriz dinâmica $[D]$. Em seguida, o vetor coluna resultante é normalizado, geralmente fazendo um de seus componentes igual à unidade. O vetor coluna normalizado é pré-multiplicado por $[D]$ para obter um terceiro vetor coluna, que é normalizado do mesmo modo que antes e torna-se ainda outro vetor coluna experimental. O processo é repetido até que os vetores colunas normalizados sucessivos converjam para um vetor comum: o autovetor fundamental. O fator de normalização dá o maior valor de $\lambda = 1/\omega^2$, isto é, a menor freqüência, ou freqüência natural fundamental [7.15]. A convergência do processo pode ser explicada da seguinte maneira.

De acordo com o teorema de expansão, qualquer vetor n -dimensional arbitrário \vec{X}_1 pode ser expresso como uma combinação linear dos n autovetores ortogonais do sistema $\vec{X}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$:

$$\vec{X}_1 = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} + \dots + c_n \vec{X}^{(n)} \quad (7.49)$$

onde c_1, c_2, \dots, c_n são constantes. No método de iteração, o vetor experimental \vec{X}_1 é selecionado arbitrariamente e, portanto, é um vetor conhecido. Os vetores modais $\vec{X}^{(i)}$, embora

desconhecidos, são vetores constantes porque dependem das propriedades do sistema. As constantes c_i são números desconhecidos que deverão ser determinados. De acordo com o método de iteração, pré-multiplicamos \vec{X}_1 pela matriz $[D]$. Em vista da Equação (7.49), isso dá

$$[D] \vec{X}_1 = c_1 [D] \vec{X}^{(1)} + c_2 [D] \vec{X}^{(2)} + \dots + c_n [D] \vec{X}^{(n)} \quad (7.50)$$

Agora, de acordo com a Equação (6.66), temos

$$[D] \vec{X}^{(i)} = \lambda_i [I] \vec{X}^{(i)} = \frac{1}{\omega_i^2} \vec{X}^{(i)}, \\ i = 1, 2, \dots, n \quad (7.51)$$

A substituição da Equação (7.51) na Equação (7.50) dá

$$[D] \vec{X}_1 = \vec{X}_2 \\ = \frac{c_1}{\omega_1^2} \vec{X}^{(1)} + \frac{c_2}{\omega_2^2} \vec{X}^{(2)} + \dots + \frac{c_n}{\omega_n^2} \vec{X}^{(n)} \quad (7.52)$$

onde \vec{X}_2 é o segundo vetor experimental. Agora, repetimos o processo e pré-multiplicamos \vec{X}_2 por $[D]$ para obter, pelas equações (7.49) e (6.66),

$$[D] \vec{X}_2 = \vec{X}_3 \\ = \frac{c_1}{\omega_1^4} \vec{X}^{(1)} + \frac{c_2}{\omega_2^4} \vec{X}^{(2)} + \dots + \frac{c_n}{\omega_n^4} \vec{X}^{(n)} \quad (7.53)$$

Repetindo o processo, obtemos, após a r -ésima iteração,

$$[D] \vec{X}_r = \vec{X}_{r+1} \\ = \frac{c_1}{\omega_1^{2r}} \vec{X}^{(1)} + \frac{c_2}{\omega_2^{2r}} \vec{X}^{(2)} + \dots + \frac{c_n}{\omega_n^{2r}} \vec{X}^{(n)} \quad (7.54)$$

Visto que consideramos que as freqüências naturais são $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$, um valor suficientemente grande de r dá

$$\frac{1}{\omega_1^{2r}} \gg \frac{1}{\omega_2^{2r}} \gg \dots \gg \frac{1}{\omega_n^{2r}} \quad (7.55)$$

Assim, o primeiro termo do lado direito da Equação (7.54) torna-se o único significativo. Por consequência, temos

$$\vec{X}_{r+1} = \frac{c_1}{\omega_1^{2(r+1)}} \vec{X}^{(1)} \quad (7.56)$$

o que significa que o vetor experimental de ordem $(r+1)$ torna-se idêntico ao vetor modal fundamental, a menos de um grau de precisão igual a uma constante multiplicativa. Dado que

$$\vec{X}_r = \frac{c_1}{\omega_1^{2(r-1)}} \vec{X}^{(1)} \quad (7.57)$$

a freqüência natural fundamental ω_1 pode ser determinada pela razão entre quaisquer dois componentes correspondentes nos vetores \vec{X}_r e \vec{X}_{r+1}

$$\omega_1^2 \simeq \frac{X_{i,r}}{X_{i,r+1}}, \text{ para qualquer } i = 1, 2, \dots, n \quad (7.58)$$

onde $X_{i,r}$ e $X_{i,r+1}$ são os i -ésimos elementos dos vetores \vec{X}_r e \vec{X}_{r+1} , respectivamente.

Discussão

- Na prova que acabamos de ver, nada foi dito sobre a normalização dos vetores experimentais sucessivos \vec{X}_i . Na verdade, não é necessário estabelecer a prova de convergência do método. A normalização equivale a um reajuste das constantes c_1, c_2, \dots, c_n em cada iteração.
- Embora teoricamente seja necessário que $r \rightarrow \infty$ para a convergência do método, na prática, apenas um número finito de iterações é suficiente para obter uma estimativa razoavelmente boa de ω_1 .
- O número real de iterações necessárias para determinar o valor de ω_1 dentro de determinado grau de precisão desejado depende do grau de semelhança entre o vetor experimental arbitrário \vec{X}_1 e o modo fundamental $\vec{X}^{(1)}$ e do grau de separação entre ω_1 e ω_2 . O número de iterações exigido é menor se ω_2 for muito grande em comparação com ω_1 .
- O método tem uma vantagem distinta: nenhum erro de cálculo cometido produzirá resultados incorretos. Qualquer erro cometido na pré-multiplicação de \vec{X}_i por $[D]$ resultará em um vetor que não é o desejado, \vec{X}_{i+1} . Porém, agora, esse vetor errado pode ser considerado como um novo vetor experimental. Isso pode retardar a convergência, mas não produz resultados errados.
- Podemos tomar qualquer conjunto de n números para o primeiro vetor experimental \vec{X}_1 e, ainda assim, conseguir convergência para o vetor modal fundamental. Somente no caso incomum no qual o vetor experimental \vec{X}_1 é exatamente proporcional a um dos modos $\vec{X}^{(i)} (i \neq 1)$ é que o método não convergirá para o primeiro modo. Em tal caso, a pré-multiplicação de $\vec{X}^{(i)}$ por $[D]$ resulta em um vetor proporcional ao próprio $\vec{X}^{(i)}$.

7.5.1 Convergência para a freqüência natural mais alta

Para obter a freqüência natural mais alta ω_n e a forma modal ou autovetor correspondente $\vec{X}^{(n)}$ pelo método de iteração matricial, em primeiro lugar, reescrevemos a Equação (6.66) como

$$[D]^{-1} \vec{X} = \omega^2 [I] \vec{X} = \omega^2 \vec{X} \quad (7.59)$$

onde $[D]^{-1}$ é a inversa da matriz dinâmica $[D]$ dada por

$$[D]^{-1} = [m]^{-1} [k] \quad (7.60)$$

Agora, selecionamos qualquer vetor experimental \vec{X}_1 e o pré-multiplicamos por $[D]^{-1}$ para obter um vetor experimental melhorado \vec{X}_2 . A seqüência de vetores experimentais $\vec{X}_{i+1} (i = 1, 2, \dots)$ obtida pela pré-multiplicação por $[D]^{-1}$ converge para o modo natural mais alto $\vec{X}^{(n)}$. Podemos ver que o procedimento é semelhante ao que já descrevemos. Nesse caso, a constante de proporcionalidade é ω_2 em vez de $1/\omega^2$.

7.5.2 Cálculo de freqüências naturais intermediárias

Uma vez determinados a primeira freqüência natural ω_1 (ou o maior autovalor $\lambda_1 = 1/\omega_1^2$) e o autovetor correspondente $\vec{X}^{(1)}$, podemos prosseguir e determinar as freqüências naturais mais altas e as formas modais correspondentes pelo método

de iteração matricial. Antes de prosseguir, devemos lembrar que qualquer vetor experimental arbitrário pré-multiplicado por $[D]$ resultaria novamente no maior autovalor. Portanto, é necessário remover o maior autovalor da matriz $[D]$. Os autovalores e autovetores subsequentes podem ser obtidos pela eliminação da raiz λ_1 da equação característica, ou equação de freqüência

$$|[D] - \lambda [I]| = 0 \quad (7.61)$$

Um procedimento conhecido como *deflação da matriz* pode ser usado para essa finalidade [7.16]. Para determinar o autovetor $\vec{X}^{(i)}$ por esse procedimento, o autovetor anterior $\vec{X}^{(i-1)}$ é normalizado em relação à matriz de massa tal que

$$\vec{X}^{(i-1)T} [m] \vec{X}^{(i-1)} = 1 \quad (7.62)$$

Então, a matriz deflacionada $[D_i]$ é construída como

$$[D_i] = [D_{i-1}] - \lambda_{i-1} \vec{X}^{(i-1)} \vec{X}^{(i-1)T} [m], \\ i = 2, 3, \dots, n \quad (7.63)$$

onde $[D_1] = [D]$. Uma vez construída $[D_1]$, o esquema iterativo

$$\vec{X}_{r+1} = [D_i] \vec{X}_r \quad (7.64)$$

é usado, onde \vec{X}_1 é um autovetor experimental arbitrário.

EXEMPLO 7.5

Freqüências naturais de um sistema com três graus de liberdade

Determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 7.2 para $k_1 = k_2 = k_3 = k$ e $m_1 = m_2 = m_3 = m$ pelo método de iteração matricial.

Solução: As matrizes de massa e rigidez do sistema são dadas no Exemplo 7.2. A matriz de flexibilidade é

$$[a] = [k]^{-1} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (E.1)$$

e, portanto, a matriz dinâmica é

$$[k]^{-1} [m] = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (E.2)$$

O problema de autovalor pode ser expresso como

$$[D] \vec{X} = \lambda \vec{X} \quad (E.3)$$

onde

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (E.4)$$

e

$$\lambda = \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2} \quad (E.5)$$

Primeira freqüência natural: Supondo que o primeiro autovetor experimental ou forma modal é

$$\vec{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

o segundo autovetor experimental pode ser obtido:

$$\vec{X}_2 = [D]\vec{X}_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

Fazendo o primeiro elemento igual à unidade, obtemos

$$\vec{X}_2 = 3,0 \begin{Bmatrix} 1,0000 \\ 1,6667 \\ 2,0000 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

e o autovalor correspondente é dado por

$$\lambda_1 \approx 3,0 \quad \text{ou} \quad \omega_1 \approx 0,5773 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E.9})$$

O autovetor experimental subsequente pode ser obtido pela relação

$$\vec{X}_{i+1} = [D]\vec{X}_i \quad (\text{E.10})$$

e os autovalores correspondentes são dados por

$$\lambda_i \approx X_{1,i+1} \quad (\text{E.11})$$

onde $X_{1,i+1}$ é o primeiro componente do vetor \vec{X}_{i+1} antes da normalização. Os vários autovetores e autovalores experimentais obtidos com a utilização das equações (E.10) e (E.11) são mostrados na tabela a seguir.

i	\vec{X}_i com $X_{1,i} = 1$	$\vec{X}_{i+1} = [D]\vec{X}_i$	$\lambda_i \approx X_{1,i+1}$	ω_i
1	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$	3.0	$0,5773 \sqrt{\frac{k}{m}}$
2	$\begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 1,66667 \\ 2,00000 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4,66667 \\ 8,33333 \\ 10,33333 \end{Bmatrix}$	4,66667	$0,4629 \sqrt{\frac{k}{m}}$
3	$\begin{Bmatrix} 1,0000 \\ 1,7857 \\ 2,2143 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5,00000 \\ 9,00000 \\ 11,2143 \end{Bmatrix}$	5,00000	$0,4472 \sqrt{\frac{k}{m}}$
7	$\begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 1,80193 \\ 2,24697 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5,04891 \\ 9,09781 \\ 11,34478 \end{Bmatrix}$	5,04891	$0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}}$
8	$\begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 1,80194 \\ 2,24698 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5,04892 \\ 9,09783 \\ 11,34481 \end{Bmatrix}$	5,04892	$0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}}$

Podemos ver que a forma modal e a freqüência natural convergiram (até a quarta casa decimal) em oito iterações. Assim, o

primeiro autovalor e a freqüência natural e forma modal correspondentes são dados por

$$\lambda_1 = 5,04892, \quad \omega_1 = 0,44504 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 1,80194 \\ 2,24698 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.12})$$

Segunda freqüência natural: Para calcular o segundo autovalor e o autovetor, em primeiro lugar, devemos produzir uma matriz deflacionada:

$$[D_2] = [D_1] - \lambda_1 \vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(1)T} [m] \quad (\text{E.13})$$

Todavia, essa equação pede um vetor normalizado $\vec{X}^{(1)}$ que satisfaça $\vec{X}^{(1)T}[m]\vec{X}^{(1)} = 1$. Vamos denotar o vetor normalizado como

$$\vec{X}^{(1)} = \alpha \begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 1,80194 \\ 2,24698 \end{Bmatrix}$$

onde α é uma constante cujo valor deve ser tal que

$$\vec{X}^{(1)T}[m]\vec{X}^{(1)} = \alpha^2 m \begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 1,80194 \\ 2,24698 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 1,80194 \\ 2,24698 \end{Bmatrix} = \alpha^2 m (9,29591) = 1 \quad (\text{E.14})$$

da qual obtemos $\alpha = 0,32799 m^{-1/2}$. Por consequência, o primeiro autovetor normalizado é

$$\vec{X}^{(1)} = m^{-1/2} \begin{Bmatrix} 0,32799 \\ 0,59102 \\ 0,73699 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.15})$$

Em seguida, usamos a Equação (E.13) e formamos a primeira matriz deflacionada

$$\begin{aligned} [D_2] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &\quad - 5,04892 \begin{Bmatrix} 0,32799 \\ 0,59102 \\ 0,73699 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,32799 \\ 0,59102 \\ 0,73699 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,45684 & 0,02127 & -0,22048 \\ 0,02127 & 0,23641 & -0,19921 \\ -0,22048 & -0,19921 & 0,25768 \end{bmatrix} \quad (\text{E.16}) \end{aligned}$$

Uma vez que o vetor experimental pode ser escolhido arbitrariamente, tomamos, novamente

$$\vec{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.17})$$

Utilizado o esquema iterativo

$$\vec{X}_{i+1} = [D_2] \vec{X}_i \quad (E.18)$$

obtemos \vec{X}_2

$$\vec{X}_2 = \begin{Bmatrix} 0,25763 \\ 0,05847 \\ -0,16201 \end{Bmatrix} = 0,25763 \begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 0,22695 \\ -0,62885 \end{Bmatrix} \quad (E.19)$$

Por consequência λ_2 pode ser determinado pela relação geral

$$\lambda_2 \approx X_{1,i+1} \quad (E.20)$$

como 0,25763. A continuação desse procedimento dá os resultados mostrados na tabela apresentada a seguir.

i	\vec{X}_i com $X_{1,i} = 1$	$\vec{X}_{i+1} = [D_2]\vec{X}_i$	$\lambda_2 \approx X_{1,i+1}$	ω_2
1	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,25763 \\ 0,05847 \\ -0,16201 \end{Bmatrix}$	0,25763	$1,97016 \sqrt{\frac{k}{m}}$
2	$\begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 0,22695 \\ -0,62885 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,60032 \\ 0,20020 \\ -0,42773 \end{Bmatrix}$	0,60032	$1,29065 \sqrt{\frac{k}{m}}$
3	$\begin{Bmatrix} 0,64300 \\ 0,28600 \\ -0,51554 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,64300 \\ 0,28600 \\ -0,51554 \end{Bmatrix}$	0,64300	$1,24708 \sqrt{\frac{k}{m}}$
4	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	0,64307	$1,24701 \sqrt{\frac{k}{m}}$
5	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	0,64307	$1,24701 \sqrt{\frac{k}{m}}$
6	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	0,64307	$1,24701 \sqrt{\frac{k}{m}}$
7	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	0,64307	$1,24701 \sqrt{\frac{k}{m}}$
8	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	0,64307	$1,24701 \sqrt{\frac{k}{m}}$
9	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	0,64307	$1,24701 \sqrt{\frac{k}{m}}$
10	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	0,64307	$1,24701 \sqrt{\frac{k}{m}}$
11	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,64307 \\ 0,28614 \\ -0,51569 \end{Bmatrix}$	0,64307	$1,24701 \sqrt{\frac{k}{m}}$

Assim, o segundo autovalor convergido e o autovetor são

$$\lambda_2 = 0,64307 \quad \omega_2 = 1,24701 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 0,44496 \\ -0,80192 \end{Bmatrix} \quad (E.21)$$

Terceira freqüência natural: Para o terceiro autovalor e o autovetor, usamos um procedimento semelhante. Deixamos os cálculos detalhados como um exercício para o leitor. Observe que, antes de calcular a matriz deflacionada $[D_3]$, é preciso normalizar $\vec{X}^{(2)}$, usando a Equação (7.62), que dá

$$\vec{X}^{(2)} = m^{-1/2} \begin{Bmatrix} 0,73700 \\ 0,32794 \\ -0,59102 \end{Bmatrix} \quad (E.22)$$

7.6 Método de Jacobi

O método de iteração matricial descrito na seção anterior produz os autovalores e autovetores da matriz $[D]$ um por vez. O método de Jacobi também é um método iterativo, mas produz todos os autovalores e autovetores de $[D]$ simultaneamente, onde $[D] = [d_{ij}]$ é uma matriz simétrica real de ordem $n \times n$.

O método é baseado em um teorema da álgebra linear que afirma que uma matriz simétrica real $[D]$ tem somente autovalores reais e que existe uma matriz ortogonal real $[R]$ tal que $[R]^T[D][R]$ é diagonal [7.17]. Os elementos da diagonal são os autovalores, e as colunas da matriz $[R]$ são os autovetores. De acordo com o método de Jacobi, a matriz $[R]$ é gerada como um produto de várias matrizes de rotação [7.18] da forma

i -ésima coluna j -ésima coluna

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \cos \theta & -\sin \theta & & & i\text{-ésima linha} \\ & & \sin \theta & \cos \theta & & & j\text{-ésima linha} \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \end{bmatrix} \quad (7.65)$$

onde todos os elementos, exceto os que aparecem nas colunas e linhas i e j , são idênticos aos da matriz identidade $[I]$. Se as entradas de seno e co-seno aparecerem nas posições (i, i) , (i, j) , (j, i) e (j, j) , então, os elementos correspondentes de $[R_1]^T[D][R_1]$ podem ser calculados da seguinte maneira:

$$d_{ii} = d_{ii} \cos^2 \theta + 2d_{ij} \sin \theta \cos \theta + d_{jj} \sin^2 \theta \quad (7.66)$$

$$d_{jj} = d_{ji} = (d_{jj} - d_{ii}) \sin \theta \cos \theta + d_{ij} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (7.67)$$

$$d_{ji} = d_{ii} \sin^2 \theta - 2d_{ij} \sin \theta \cos \theta + d_{jj} \cos^2 \theta \quad (7.68)$$

Se escolhermos θ como

$$\tan 2\theta = \left(\frac{2d_{ij}}{d_{ii} - d_{jj}} \right) \quad (7.69)$$

então, resultará que $d_{ij} = d_{ji} = 0$. Assim, cada etapa do método de Jacobi reduz um par de elementos fora da diagonal a zero. Infelizmente, na etapa seguinte, embora o método reduza um novo par de zeros, introduz contribuições não-zero em posições que antes eram zero. Contudo, matrizes sucessivas da forma

$$[R_2]^T[R_1]^T[D][R_1][R_2],$$

$$[R_3]^T[R_2]^T[R_1]^T[D][R_1][R_2][R_3], \dots$$

convergem para a forma diagonal requerida; então, a matriz final $[R]$, cujas colunas dão os autovetores, torna-se

$$[R] = [R_1][R_2][R_3] \dots \quad (7.70)$$

EXEMPLO 7.6

Solução de autovalor utilizando o método de Jacobi

Determine os autovalores e autovetores da matriz

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

utilizando o método de Jacobi.

Solução: Começamos com o maior termo fora da diagonal $d_{23} = 2$ na matriz $[D]$ e tentamos reduzi-lo a zero. Pela Equação (7.69),

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2d_{23}}{d_{22} - d_{33}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{4}{2 - 3} \right) = -37,981878^\circ$$

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,7882054 & 0,6154122 \\ 0,0 & -0,6154122 & 0,7882054 \end{bmatrix}$$

$$[D'] = [R_1]^T [D] [R_1] = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1727932 & 1,4036176 \\ 0,1727932 & 0,4384472 & 0,0 \\ 1,4036176 & 0,0 & 4,5615525 \end{bmatrix}$$

Em seguida, tentamos reduzir o maior termo fora da diagonal de $[D']$, a saber, $d'_{13} = 1,4036176$ a zero. A Equação (7.69) dá

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2d'_{13}}{d'_{11} - d'_{33}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2,8072352}{1,0 - 4,5615525} \right) \\ &= -19,122686^\circ \end{aligned}$$

$$[R_2] = \begin{bmatrix} 0,9448193 & 0,0 & 0,3275920 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ -0,3275920 & 0,0 & 0,9448193 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [D''] &= [R_2]^T [D'] [R_2] \\ &= \begin{bmatrix} 0,5133313 & 0,1632584 & 0,0 \\ 0,1632584 & 0,4384472 & 0,0566057 \\ 0,0 & 0,0566057 & 5,0482211 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O maior elemento fora da diagonal de $[D'']$ é $d''_{12} = 0,1632584$. θ_3 pode ser obtido pela Equação (7.69) como

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2d''_{12}}{d''_{11} - d''_{22}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{0,3265167}{0,5133313 - 0,4384472} \right) = 38,541515^\circ \end{aligned}$$

$$[R_3] = \begin{bmatrix} 0,7821569 & -0,6230815 & 0,0 \\ 0,6230815 & 0,7821569 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [D'''] &= [R_3]^T [D''] [R_3] \\ &= \begin{bmatrix} 0,6433861 & 0,0 & 0,0352699 \\ 0,0 & 0,3083924 & 0,0442745 \\ 0,0352699 & 0,0442745 & 5,0482211 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considerando que todos os termos fora da diagonal em $[D''']$ estejam próximos de zero, podemos interromper o processo nesse ponto. Os elementos da diagonal de $[D''']$ dão os

autovalores (valores de $1/\omega^2$) como 0,6433861, 0,3083924 e 5,0482211. Os autovetores correspondentes são dados pelas colunas da matriz $[R]$, onde

$$\begin{aligned} [R] &= [R_1][R_2][R_3] \\ &= \begin{bmatrix} 0,7389969 & -0,5886994 & 0,3275920 \\ 0,3334301 & 0,7421160 & 0,5814533 \\ -0,5854125 & -0,3204631 & 0,7447116 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O processo iterativo pode ser continuado para obter uma solução mais acurada. Os autovalores presentes podem ser comparados com os valores exatos: 0,6431041, 0,3079786 e 5,0489173. ■

7.7 Problema-padrão de autovalor

No capítulo anterior, o problema de autovalor foi expresso como

$$[k]\vec{X} = \omega^2[m]\vec{X} \quad (7.71)$$

que pode ser reescrito na forma de um problema-padrão de autovalor [7.19] como

$$[D]\vec{X} = \lambda\vec{X} \quad (7.72)$$

onde

$$[D] = [k]^{-1}[m] \quad (7.73)$$

e

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (7.74)$$

Em geral, a matriz $[D]$ é não-simétrica, embora as matrizes $[k]$ e $[m]$ sejam, ambas, simétricas. Visto que o método de Jacobi (descrito na Seção 7.6) é aplicável somente a matrizes simétricas $[D]$, podemos adotar o seguinte procedimento [7.18] para derivar um problema-padrão de autovalor com uma matriz simétrica $[D]$.

Considerando que a matriz $[k]$ seja simétrica e positiva definida, podemos usar a decomposição de Choleski (ver Seção 7.7.1) e expressar $[k]$ como

$$[k] = [U]^T[U] \quad (7.75)$$

onde $[U]$ é uma matriz triangular superior. Usando essa relação, o problema de autovalor da Equação (7.71) pode ser expresso como

$$\lambda[U]^T[U]\vec{X} = [m]\vec{X} \quad (7.76)$$

Pré-multiplicando essa equação por $([U]^T)^{-1}$, obtemos

$$\lambda[U]\vec{X} = ([U]^T)^{-1}[m]\vec{X} = ([U]^T)^{-1}[m][U]^{-1}[U]\vec{X} \quad (7.77)$$

Definindo um novo vetor \vec{Y} como

$$\vec{Y} = [U]\vec{X} \quad (7.78)$$

a Equação (7.77) pode ser escrita como um problema-padrão de autovalor

$$[D]\vec{Y} = \lambda\vec{Y} \quad (7.79)$$

onde

$$[D] = ([U]^T)^{-1} [m] [U]^{-1} \quad (7.80)$$

Assim, para formular $[D]$ de acordo com a Equação (7.80), em primeiro lugar, decomponemos a matriz simétrica $[k]$ como mostrado na Equação (7.75), determinamos $[U]^{-1}$ e $([U]^T)^{-1} = ([U]^{-1})^T$ como esquematizado na próxima seção e, então, realizamos a multiplicação da matriz como expressa na Equação (7.80). A solução do problema de autovalor enunciado na Equação (7.79) dá λ_i e $\vec{Y}(i)$. Então, aplicamos a transformação inversa e determinamos os autovetores desejados:

$$\vec{X}^{(i)} = [U]^{-1} \vec{Y}^{(i)} \quad (7.81)$$

7.7.1 Decomposição de Choleski

Qualquer matriz simétrica e positiva definida $[A]$ de ordem $n \times n$ pode ser decomposta de um modo exclusivo [7.20]

$$[A] = [U]^T [U] \quad (7.82)$$

onde $[U]$ é uma matriz triangular superior dada por

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.83)$$

com

$$\begin{aligned} u_{11} &= (a_{11})^{1/2} \\ u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \quad j = 2, 3, \dots, n \\ u_{ij} &= \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right), \quad i = 2, 3, \dots, n \text{ e} \\ &\quad j = i+1, i+2, \dots, n \\ u_{ii} &= \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2 \right)^{1/2}, \quad i = 2, 3, \dots, n \\ u_{ij} &= 0, \quad i > j \end{aligned} \quad (7.84)$$

Inversa da matriz $[U]$. Se a inversa da matriz triangular superior $[U]$ for denotada por $[\alpha_{ij}]$, os elementos α_{ij} podem ser determinados pela relação

$$[U][U]^{-1} = [I] \quad (7.85)$$

que dá

$$\begin{aligned} \alpha_{ii} &= \frac{1}{u_{ii}} \\ \alpha_{ij} &= \frac{-1}{u_{ii}} \left(\sum_{k=i+1}^j u_{ik} \alpha_{kj} \right), \quad i < j \\ \alpha_{ij} &= 0, \quad i > j \end{aligned} \quad (7.86)$$

Assim, a inversa de $[U]$ também é matriz triangular superior.

EXEMPLO 7.7

Decomposição de uma matriz simétrica

Decomponha a matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

na forma da Equação (7.82).

Solução: A Equação (7.84) dá

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} = 2,2360680$$

$$u_{12} = a_{12}/u_{11} = 1/2,236068 = 0,4472136$$

$$u_{13} = a_{13}/u_{11} = 0$$

$$u_{22} = [a_{22} - u_{12}^2]^{1/2} = (3 - 0,4472136^2)^{1/2} = 1,6733201$$

$$u_{23} = [a_{23} - u_{13}^2 - u_{22}^2]^{1/2}$$

onde

$$\begin{aligned} u_{23} &= (a_{23} - u_{12} u_{13})/u_{22} = (2 - 0,4472136 \times 0)/1,6733201 \\ &= 1,1952286 \end{aligned}$$

$$u_{33} = (8 - 0^2 - 1,1952286^2)^{1/2} = 2,5634799$$

Visto que $u_{ij} = 0$ para $i > j$, temos

$$[U] = \begin{bmatrix} 2,2360680 & 0,4472136 & 0,0 \\ 0,0 & 1,6733201 & 1,1952286 \\ 0,0 & 0,0 & 2,5634799 \end{bmatrix}$$

7.7.2 Outros métodos de solução

Vários outros métodos foram desenvolvidos para determinar a solução numérica de um problema de autovalor [7.18, 7.21]. Bathe e Wilson [7.22] realizaram um estudo comparativo de alguns desses métodos. A ênfase recente está na solução econômica de grandes autoproblemas [7.23, 7.24]. A estimativa de freqüências naturais com a utilização de seqüências de Sturm é apresentada nas Referências [7.25 e 7.26]. Um modo alternativo de resolver uma classe de problemas de vibrações mecânicas concentradas utilizando método topológico é apresentado na Referência [7.27].

7.8 Exemplos utilizando MATLAB

EXEMPLO 7.8

Solução de um problema de autovalor

Utilizando MATLAB, determine os autovalores e autovetores da matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

```
>> A=[3 -1 0; -2 4 -3; 0 -1 1]
A =
 3   -1   0
 -2   4  -3
 0   -1   1

>> [V, D] = eig (A)
V =
 -0.3665  -0.8305  0.2262
 0.9080  -0.4584  0.6616
 -0.2028  0.3165  0.7149

D =
 5.4774      0      0
 0  2.4481      0
 0      0  0.0746

>>
```

EXEMPLO 7.10

Programa para a solução de um autovalor utilizando o método de iteração matricial

Desenvolva um programa geral de computador, denominado **Program10.m**, para implementar o método de iteração matricial. Use o programa para determinar os autovalores e autovetores da matriz $[A]$ dada no Exemplo 7.9.

Solução: **Program10.m** é desenvolvido para aceitar os seguintes dados de entrada:

n = ordem da matriz d

d = matriz de ordem $n \times n$ dada

x_0 = suposição inicial para o vetor de ordem n

$nvec$ = número de autovalores e autovetores a determinar

xm = matriz de ordem $n \times n$

eps = requisito de convergência, uma pequena quantidade da ordem de 10^{-5}

O programa dá a seguinte saída:

$freq$ = arranjo de tamanho $nvec$, que contém as freqüências naturais calculadas

eig = arranjo de tamanho $n \times nvec$ que contém os autovetores calculados (colunas)

```
>> program10
Solution of eigenvalue problem by
matrix iteration method
```

Natural frequencies:

4.450424e-001	1.246983e+000	1.801938e+000
Mode shapes (Columnwise):		
1.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000
1.801937e+000	4.450328e-001	-1.247007e+000
2.246979e+000	-8.019327e-001	5.549798e-001

EXEMPLO 7.9

Utilização de um programa para o método de Jacobi para resolver um problema de autovalor

Desenvolva um programa geral, denominado **Program9.m**, para implementar o método de Jacobi para determinar os autovalores e autovetores de uma matriz simétrica. Use o programa para determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução: **Program9.m** é desenvolvido para aceitar os seguintes dados:

n = ordem da matriz

d = matriz de ordem $n \times n$ dada

eps = especificação de convergência, uma pequena quantidade da ordem de 10^{-5}

it_{\max} = número máximo de iterações permitidas

O programa dá os autovalores e autovetores da matriz d .

```
>> program9
Eigenvalue solution by Jacobi Method

Given matrix
1.0000000e+000  1.0000000e+000  1.0000000e+000
1.0000000e+000  2.0000000e+000  2.0000000e+000
1.0000000e+000  2.0000000e+000  3.0000000e+000

Eigen values are
5.04891734e+000  6.43104132e-001  3.07978528e-001

Eigen vectors are
First           Second          Third
3.27984948e-001 -7.36976229e-001  5.91009231e-001
5.91009458e-001 -3.27985278e-001 -7.36975900e-001
7.36976047e-001  5.91009048e-001  3.27985688e-001
```

EXEMPLO 7.11

Programa para resolver um problema geral de autovalor

Desenvolva um programa geral denominado **Program11.m**, para resolver um problema geral de autovalor. Use o programa para determinar a solução do problema geral de autovalor.

$$[k] \vec{X} = \omega^2 [m] \vec{X}$$

onde

$$[k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: **Program11.m** é desenvolvido para resolver o problema $[k]\vec{X} = \omega^2 [m]\vec{X}$, em primeiro lugar, convertendo-o para a forma de um problema especial de autovalor $[D]\vec{Y} = \frac{1}{\omega^2}[I]\vec{Y}$ onde $[D]$ é igual a $([U]^T)^{-1}[m][U]^{-1}$ e $[k] = [U]^T[U]$. O programa é desenvolvido para aceitar os seguintes

dados de entrada:

- nd = tamanho do problema (tamanho das matrizes de massa e rigidez)
 bk = matriz de rigidez de tamanho $nd \times nd$
 bm = matriz de massa de tamanho $nd \times nd$

O programa dá a matriz triangular superior de $[bk]$, a inversa da matriz triangular superior $[ui]$, a matriz $[uti]$ $[bm]$ $[ui]$ onde $[uti]$ é a transposta de $[ui]$, e os autovalores e autovetores do problema.

```
>> program11
Upper triangular matrix [U]:
1.414214e+000 -7.071068e-001 0.000000e+000
0.000000e+000 1.224745e+000 -8.164966e-001
0.000000e+000 0.000000e+000 5.773503e-001

Inverse of the upper triangular matrix:
7.071068e-001 4.082483e-001 5.773503e-001
0.000000e+000 8.164966e-001 1.154701e+000
0.000000e+000 0.000000e+000 1.732051e+000

Matrix [UMU] = [UTI] [M] [UI]:
5.000000e-001 2.886751e-001 4.082483e-001
2.886751e-001 8.333333e-001 1.178511e+000
4.082483e-001 1.178511e+000 4.666667e+000

Eigenvectors:
5.048917e+000 6.431041e-001 3.079785e-001

Eigenvectors (Columnwise):
7.369762e-001 -5.910090e-001 3.279853e-001
1.327985e+000 -2.630237e-001 -4.089910e-001
1.655971e+000 4.739525e-001 1.820181e-001
```

7.9 Programas em C++

São dados três programas interativos em C++ para a solução de um problema de autovalor. **Program9.cpp** é baseado no método de Jacobi, e **Program10.cpp** implementa o método de iteração matricial para determinar os autovalores e autovetores de uma matriz dada. **Program11.m** resolve um problema geral de autovalor, em primeiro lugar, reduzindo-o a um problema de autovalor especial. As entradas e saídas dos três programas são semelhantes às dos **Program9.m**, **Program10.m** e **Program11.m**.

EXEMPLO 7.12

Solução de autovalor utilizando Program9.cpp

Utilizando **Program9.cpp** (método de Jacobi), determine os autovalores e autovetores da matriz dada no Exemplo 7.9.

Solução: Os dados de entrada devem ser digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são mostradas a seguir.

```
Please input N:
3

Please input matrix D row by row:
1.0 1.0 1.0
1.0 2.0 2.0
1.0 2.0 3.0

EIGENVALUE SOLUTION BY JACOBI METHOD
```

GIVEN MATRIX

1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	2.000000	2.000000
1.000000	2.000000	3.000000

EIGEN VALUES ARE

5.04891734	0.64310413	0.30797853
------------	------------	------------

EIGEN VECTORS

FIRST	SECOND	THIRD
0.32798495	-0.73697623	0.59100923
0.59100946	-0.32798528	-0.73697590
0.73697605	0.59100905	0.32798569

EXEMPLO 7.13

Solução de autovalor utilizando Program10.cpp

Utilizando **Program10.cpp** (método de iteração matricial), determine os autovalores e autovetores da matriz dada no Exemplo 7.10.

Solução: Os dados de entrada devem ser digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são dadas a seguir.

```
Please input N and NVEC:
3 3
```

```
Please input matrix D row by row
1 1 1
1 2 2
1 2 3
```

```
Please input matrix XM row by row
1 0 0
0 1 0
0 0 1
```

SOLUTION OF EIGENVALUE PROBLEM BY MATRIX ITERATION METHOD

NATURAL FREQUENCIES

0.445042	1.246961	1.801938
----------	----------	----------

MODE SHAPES (COLUMNWISE):

1.000000	1.000000	1.000000
1.801937	0.445037	-1.246993
2.246979	-0.801936	0.554969

EXEMPLO 7.14

Solução de problema geral de autovalor utilizando Program11.cpp

Utilizando **Program11.cpp**, determine os autovalores e autovetores do problema geral de autovalor dado no Exemplo 7.11.

Solução: Os dados de entrada devem ser digitados interativamente. A entrada e a saída do programa são mostradas seguir.

```
Please input ND:
3

Please input BK matrix row by row:
2.0 -1.0 0.0
-1.0 2.0 -1.0
0.0 -1.0 1.0

Please input BM matrix row by row:
1.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0
0.0 0.0 1.0
```

UPPER TRIANGULAR MATRIX [U]:

1.41421356	-0.70710678	0.00000000
0.00000000	1.22474487	-0.81649658
0.00000000	0.00000000	0.57735027

INVERSE OF THE UPPER TRIANGULAR MATRIX, [UI],

0.70710678	0.40824829	0.57735027
0.00000000	0.81649658	1.15470054
0.00000000	0.00000000	1.73205081

MATRIX [UMU] = [UTI] [M] [UI]:

0.50000000	0.28867513	0.40824829
0.28867513	0.83333333	1.17851130
0.40824829	1.17851130	4.66666667

EIGENVALUES:

5.04891734	0.64310413	0.30797853
------------	------------	------------

EIGENVECTORS (COLUMNWISE):

0.73697624	-0.59100904	0.32798528
1.32798528	-0.26302375	-0.40899095
1.65597055	0.47395249	0.18201810

7.10 Programas em FORTRAN

São dados três programas em FORTRAN — **PROGRAM9.F**, **PROGRAM10.F** e **PROGRAM11.F** — para a solução de um problema de autovalor. Ao passo que **PROGRAM9.F** implementa o método de Jacobi para matrizes simétricas, **PROGRAM10.F** é baseado no método de iteração matricial. **PROGRAM11.F** pode ser utilizado para resolver um problema geral de autovalor. As entradas e saídas desses programas são semelhantes às dos **Program9.m**, **Program10.m** e **Program11.m**.

EXEMPLO 7.15

Solução de autovalor utilizando o Método de Jacobi

Utilizando **PROGRAM9.F** (método de Jacobi), determine os autovalores e autovetores da matriz dada no Exemplo 7.9.

Solução: A saída do programa é dada a seguir.

EIGENVALUE SOLUTION BY JACOBI METHOD

GIVEN MATRIX

0.100000E+01	0.100000E+01	0.100000E+01
0.100000E+01	0.200000E+01	0.200000E+01
0.100000E+01	0.200000E+01	0.300000E+01

EIGEN VALUES ARE

0.504892E+01	0.643104E+00	0.307979E+00
--------------	--------------	--------------

EIGEN VECTORS

FIRST	SECOND	THIRD
0.327985E+00	-0.736984E+00	0.590999E+00
0.591007E+00	-0.327977E+00	-0.736981E+00
0.736978E+00	0.591004E+00	0.327991E+00

EXEMPLO 7.16

Solução de autovalor utilizando o método de iteração matricial

Utilizando **PROGRAM10.F** (método de iteração matricial), determine os autovalores e autovetores da matriz dada no Exemplo 7.10.

Solução: A saída do programa é dada a seguir.

SOLUTION OF EIGENVALUE PROBLEM BY MATRIX ITERATION METHOD

NATURAL FREQUENCIES

0.44504240E+00	0.12469811E+01	0.18019377E+01
----------------	----------------	----------------

MODE SHAPES (COLUMNWISE):

0.10000000E+01	0.10000000E+01	0.10000000E+01
----------------	----------------	----------------

0.18019372E+01	0.44503731E+00	-0.12469926E+01
----------------	----------------	-----------------

0.22469788E+01	-0.80193609E+00	0.55496848E+00
----------------	-----------------	----------------

EXEMPLO 7.17

Solução de um problema geral de autovalor

Utilizando **PROGRAM11.F** (baseado na decomposição da matriz de rigidez do sistema), determine a solução do problema geral de autovalor considerado no Exemplo 7.11.

Solução: A saída do programa é mostrada a seguir.

UPPER TRIANGULAR MATRIX [U]:

0.141421E+01	-0.707107E+00	0.000000E+00
0.000000E+00	0.122474E+01	-0.816497E+00
0.000000E+00	0.000000E+00	0.577350E+00

INVERSE OF THE UPPER TRIANGULAR MATRIX, [UI],

0.707107E+00	0.408248E+00	0.577350E+00
0.000000E+00	0.816497E+00	0.115470E+01
0.000000E+00	0.000000E+00	0.173205E+01

MATRIX [UMU] = [UTI] [M] [UI]:

0.500000E+00	0.288675E+00	0.408248E+00
0.288675E+00	0.833333E+00	0.117851E+01
0.408248E+00	0.117851E+01	0.466667E+01

EIGENVALUES:

0.504892E+01	0.643104E+00	0.307979E+00
--------------	--------------	--------------

EIGENVECTORS (COLUMNWISE):

0.736973E+00	-0.590976E+00	0.328051E+00
0.132799E+01	-0.263064E+00	-0.408952E+00
0.165597E+01	0.473971E+00	0.181988E+00

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 7.1 S. Dunkerley, "On the whirling and vibration of shafts", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1894, Series A, v. 185, Parte I, p. 279–360.
- 7.2 B. Atzori, "Dunkerley's formula for finding the lowest frequency of vibration of elastic systems", *Carta ao Editor, Journal of Sound and Vibration*, 1974, v. 36, p. 563–564.
- 7.3 H. H. Jeffcott, "The periods of lateral vibration of loaded shafts — The rational derivation of Dunkerley's empirical rule for determining whirling speeds", *Proceedings of the Royal Society of London*, 1919, Series A, v. 95, n. A666, p. 106–115.
- 7.4 M. Endo e O. Taniguchi, "An extension of the Southwell-Dunkerley methods for synthesizing frequencies", *Journal of Sound and Vibration*, 1976, "Part I: Principles", v. 49, p. 501–516, e "Part II: Applications", v. 49, p. 517–533.

- 7.5 A Rutenberg, "A lower bound for Dunkerley's formula in continuous elastic systems", *Journal of Sound and Vibration*, 1976, v. 45, p. 249–252.
- 7.6 G. Temple e W. G. Bickley, *Rayleigh's principle and its applications to engineering*. Nova York: Dover, 1956.
- 7.7 N. G. Stephen, "Rayleigh's, Dunkerley's, and Southwell's methods", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, jan. 1983, v. 11, p. 45–51.
- 7.8 A. Rutenberg, "Dunkerley's formula and alternative approximations", carta ao editor, *Journal of Sound and Vibration*, 1975, v. 39, p. 530–531.
- 7.9 R. Jones, "Approximate expressions for the fundamental frequency of vibration of several dynamic systems", *Journal of Sound and Vibration*, 1976, v. 44, p. 475–478.
- 7.10 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of materials*. 2. ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1982.
- 7.11 H. Holzer, *Die Berechnung der Drehschwingungen*. Berlim: Julius Springer, 1921.
- 7.12 H. E. Fettis, "A modification of the Holzer method for computing uncoupled torsion and bending modes", *Journal of the Aeronautical Sciences*, out. 1949, p. 625–634; maio, 1954, p. 359–360.
- 7.13 S. H. Crandall e W. G. Strang, "An improvement of the Holzer table based on a suggestion of Rayleigh's", *Journal of Applied Mechanics*, 1957, v. 24, p. 228.
- 7.14 S. Mahalingam, "An improvement of the Holzer method", *Journal of Applied Mechanics*, 1958, v. 25, p. 618.
- 7.15 S. Mahalingam, "Iterative procedures for torsional vibration analysis and their relationships", *Journal of Sound and Vibration*, 1980, v. 68, p. 465–467.
- 7.16 L. Meirovitch, *Computational methods in structural dynamics*, Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands, 1980.
- 7.17 J. H. Wilkinson e G. Reinsch, *Linear Algebra*. Nova York: Springer-Verlag, 1971.
- 7.18 J. W. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Londres: Oxford University Press, 1965.
- 7.19 R. S. Martin e J. H. Wilkinson, "Reduction of a symmetric eigenproblem and related problems to standard form", *Numerical Mathematics*, 1968, v. 11, p. 99–110.
- 7.20 G. B. Haggerty, *Elementary numerical analysis with programming*. Boston: Allyn and Bacon, 1972.
- 7.21 A. Jennings, "Eigenvalue methods for vibration analysis", *Shock and Vibration Digest*, Parte I, fev. 1980, v. 12, p. 3–16; Parte II, jan. 1984, v. 16, p. 25–33.
- 7.22 K. Bathe e E. L. Wilson, "Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, v. 6, p. 213–226.
- 7.23 E. Cohen e H. McCallion, "Economical methods for finding eigenvalues and eigenvectors", *Journal of Sound and Vibration*, 1967, v. 5, p. 397–406.
- 7.24 A. J. Fricker, "A method for solving high-order real symmetric eigenvalue problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, v. 19, p. 1131–1138.
- 7.25 G. Longbottom e K. F. Gill, "The estimation of natural frequencies by use of Sturm sequences", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 1976, v. 4, p. 319–329.
- 7.26 K. K. Gupta, "Solution of eigenvalue problems by Sturm sequence method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1972, v. 4, p. 379–404.
- 7.27 W. K. Chen e F. Y. Chen, "Topological analysis of a class of lumped vibrational systems", *Journal of Sound and Vibration*, 1969, v. 10, p. 198–207.
-
- ## PERGUNTAS DE REVISÃO
- 7.1 Dê respostas curtas ao seguinte:
1. Cite alguns métodos para determinar a freqüência natural fundamental de um sistema com vários graus de liberdade.
 2. Qual é a premissa básica adotada na dedução da fórmula de Dunkerley?
 3. O que é princípio de Rayleigh?
 4. Confirme se obtemos um limite inferior ou um limite superior para a freqüência natural fundamental se usarmos:
 - (a) a fórmula de Dunkerley;
 - (b) o método de Rayleigh.
 5. O que é quociente de Rayleigh?
 6. Qual é o princípio básico utilizado no método de Holzer?
 7. O que é o método de iteração matricial?
 8. Podemos usar qualquer vetor experimental \vec{X} no método de iteração matricial para determinar a maior freqüência natural?
 9. Como determinamos as freqüências naturais intermediárias utilizando o método de iteração matricial?
 10. Qual é a diferença entre o método de iteração matricial e o método de Jacobi?
 11. O que é uma matriz de rotação? Qual é sua finalidade no método de Jacobi?
 12. O que é um problema-padrão de autovalor?
 13. Qual é o papel da decomposição de Choleski na dedução de um problema-padrão de autovalor?
 14. Como determinamos a inversa de uma matriz triangular superior?
- 7.2 Indique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:
1. A freqüência fundamental dada pela fórmula de Dunkerley sempre será maior que seu valor exato.
 2. A freqüência fundamental dada pelo método de Rayleigh sempre será maior que seu valor exato.
 3. $[A]\vec{X} = \lambda[B]\vec{X}$ é um problema-padrão de autovalor.
 4. $[A]\vec{X} = \lambda[I][B]\vec{X}$ é um problema-padrão de autovalor.
 5. O método de Jacobi pode determinar os autovalores somente de matrizes simétricas.
 6. O método de Jacobi usa matrizes de rotação.
 7. O método de iteração matricial requer que as freqüências naturais sejam distintas e bem separadas.
 8. No método de iteração matricial, nenhum erro de cálculo produzirá resultados incorretos.
 9. O método de iteração matricial sempre convergirá para freqüências mais altas.
 10. Quando o método de Rayleigh é utilizado para um eixo que suporta vários rotoreis, a curva de deflexão estática pode ser utilizada como a forma modal adequada.
 11. O método de Rayleigh pode ser considerado o mesmo que a conservação de energia para um sistema vibratório.
- 7.3 Preencha os espaços em branco com a palavra adequada:
1. Qualquer matriz simétrica positiva definida $[A]$ pode ser decomposta como $[A] = [U]^T[U]$ onde $[U]$ é uma matriz triangular _____.

2. O método para decompor uma matriz simétrica positiva definida $[A]$ como $[A] = [U]^T[U]$ é conhecido como método ____.
3. Cada etapa do método de Jacobi reduz um par de elementos fora da diagonal a ____.
4. O teorema ____ permite a representação de qualquer vetor como uma combinação linear dos autovetores do sistema.
5. Se o método de iteração matricial convergir para o menor autovalor com $[D]\vec{X} = \lambda\vec{X}$, o método converge para o autovalor ____ com $[D]^{-1}\vec{X} = \mu\vec{X}$.
6. O quociente de Rayleigh dá um limite ____ para ω_1^2 e um limite ____ para ω_n^2 .
7. O quociente de Rayleigh tem um valor estacionário na vizinhança de um ____.
8. No caso de um eixo que suporta as massas m_1, m_2, \dots , o método de Rayleigh dá a freqüência natural como

$$\omega = \left\{ \frac{g(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \dots)}{m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 + \dots} \right\}^{1/2},$$

onde w_1, w_2, \dots denotam as deflexões ____ de m_1, m_2, \dots , respectivamente.

9. O método de Holzer é, basicamente, um método ____.
10. O método ____ é aplicado mais extensivamente a sistemas torcionais, embora também seja igualmente aplicável a sistemas lineares.
11. O cálculo de freqüências naturais mais altas, baseado no método de iteração matricial, envolve um processo conhecido como ____ matriz.
- 7.4** Seleccione a resposta mais adequada entre as várias opções dadas:

1. Quando o vetor experimental

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

é usado para a solução do problema de autovalor,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{X} = \lambda \vec{X}$$

o próximo vetor experimental $\vec{X}^{(2)}$, dado pelo método de iteração matricial é

$$(a) \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} \quad (b) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (c) \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

2. Para um sistema semidefinito, a equação final no método de Holzer denota a:

- (a) amplitude na extremidade como zero;
 (b) soma das forças de inércia como zero;
 (c) equação de movimento.

3. A fórmula de Dunkerley é dada por:

- (a) $\omega_1^2 \approx a_{11} m_1 + a_{22} m_2 + \dots + a_{nn} m_n$
 (b) $\frac{1}{\omega_1^2} \approx a_{11} m_1 + a_{22} m_2 + \dots + a_{nn} m_n$
 (c) $\frac{1}{\omega_1^2} \approx k_{11} m_1 + k_{22} m_2 + \dots + k_{nn} m_n$

4. O quociente de Rayleigh é dado por:

$$(a) \frac{\vec{X}^T [k] \vec{X}}{\vec{X}^T [m] \vec{X}} \quad (b) \frac{\vec{X}^T [m] \vec{X}}{\vec{X}^T [k] \vec{X}} \quad (c) \frac{\vec{X}^T [k] \vec{X}}{\vec{X}^T [m] \vec{X}}$$

5. O quociente de Rayleigh satisfaz a seguinte relação:

$$(a) R(\vec{X}) \leq \omega_1^2$$

$$(b) R(\vec{X}) \geq \omega_n^2$$

$$(c) R(\vec{X}) \geq \omega_1^2$$

6. Para um sistema vibratório com $[k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a forma modal mais próxima do modo fundamental, de acordo como o quociente de Rayleigh, $R(\vec{X}) = \frac{\vec{X}^T [k] \vec{X}}{\vec{X}^T [m] \vec{X}}$ é dada por:

$$(a) \vec{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (b) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (c) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

7.5 Ligue os itens correspondentes nas duas colunas a seguir:

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. Fórmula de Dunkerley | (a) Determina as freqüências naturais e formas modais do sistema, uma por vez, utilizando vários valores experimentais para cada freqüência. |
| 2. Método de Rayleigh | (b) Determina todas as freqüências naturais utilizando vetores experimentais e procedimento de deflação matricial. |
| 3. Método de Holzer | (c) Determina todos os autovalores e autovetores simultaneamente sem utilizar vetores experimentais. |
| 4. Método da iteração matricial | (d) Determina o valor aproximado da freqüência fundamental de um sistema composto. |
| 5. Método de Jacobi | (e) Determina o valor aproximado da freqüência fundamental de um sistema que é sempre maior que seu verdadeiro valor. |

PROBLEMAS

Os problemas estão organizados da seguinte maneira:

Problemas	Seção correspondente	Tópico correspondente
7.1 a 7.6, 7.32	7.2	Fórmula de Dunkerley
7.7 a 7.12	7.3	Método de Rayleigh
7.13 a 7.17	7.4	Método de Holzer
7.18 a 7.23	7.5	Método da iteração matricial
7.24 a 7.25, 7.29	7.6	Método de Jacobi
7.26 a 7.28, 7.30 a 7.31	7.7	Problema-padrão de autovalor
7.33 a 7.37	7.8	Programas MATLAB
7.38 a 7.40	7.9	Programas em C++
7.41 a 7.48	7.10	Programas em FORTRAN
7.49 a 7.50	—	Exercícios de projeto

- 7.1** Estime a freqüência fundamental da viga mostrada na Figura 6.9 utilizando a fórmula de Dunkerley para os seguintes dados:
 (a) $m_1 = m_3 = 5m$, $m_2 = m$;
 (b) $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = 5m$.
- 7.2** Determine a freqüência fundamental do sistema torcional mostrado na Figura 6.11 utilizando a fórmula de Dunkerley para os seguintes dados:
 (a) $J_1 = J_2 = J_3 = J_0$; $k_{r1} = k_{r2} = k_{r3} = k_r$;
 (b) $J_1 = J_0$, $J_2 = 2J_0$, $J_3 = 3J_0$; $k_{r1} = k_r$, $k_{r2} = 2k_r$, $k_{r3} = 3k_r$.
- 7.3** Estime a freqüência fundamental do eixo mostrado na Figura 7.3, usando a fórmula de Dunkerley para os seguintes dados: $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l/4$.
- 7.4** Constatou-se que a freqüência natural de vibração, em flexão, da asa de um avião militar é 20 Hz. Determine a nova freqüência de vibração em flexão da asa quando uma arma, com 2.000 lb de peso é anexada à extremidade da asa, como mostrado na Figura 7.10. Sabe-se que a rigidez da extremidade da asa, em flexão, é 50.000 lb/ft.
- 7.5** O peso do carrinho de uma ponte rolante (ver Figura 7.11) é dez vezes maior que o peso da trave. Estime a freqüência fundamental do sistema utilizando a fórmula de Dunkerley.
- 7.6** Usando a fórmula de Dunkerley, determine a freqüência natural fundamental do sistema de corda esticada mostrado na Figura 5.25 com $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l_3 = l$.
- 7.7** Utilizando o método de Rayleigh, determine a primeira freqüência natural de vibração do sistema mostrado na Figura 7.2. Considere $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$ e $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$.
- 7.8** Usando o método de Rayleigh, determine a freqüência natural fundamental do sistema torcional mostrado na Figura 6.11. Considere que $J_1 = J_0$, $J_2 = 2J_0$, $J_3 = 3J_0$ e $k_{r1} = k_{r2} = k_{r3} = k_r$.
- 7.9** Resolva o Problema 7.6 utilizando o método de Rayleigh.
- 7.10** Utilizando o método de Rayleigh, determine a freqüência natural fundamental do sistema mostrado na Figura 5.25 quando $m_1 = m$, $m_2 = 5m$ e $l_1 = l_2 = l_3 = l$.
- 7.11** A Figura 7.12 mostra um edifício de dois andares no qual se considera que os pisos sejam rígidos. Utilizando o método de Rayleigh, calcule a primeira freqüência natural do edifício para $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$ e $k_1 = k_2 = 3EI/h^3$. Considere que a configuração do primeiro modo seja a mesma que a forma de equilíbrio estático resultante de cargas proporcionais aos pesos dos pisos.

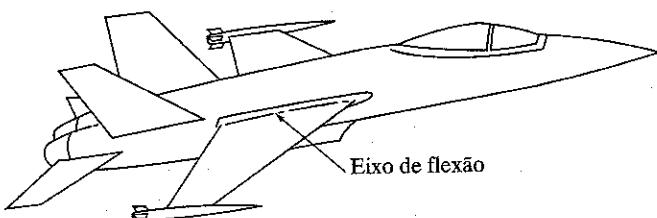


FIGURA 7.10

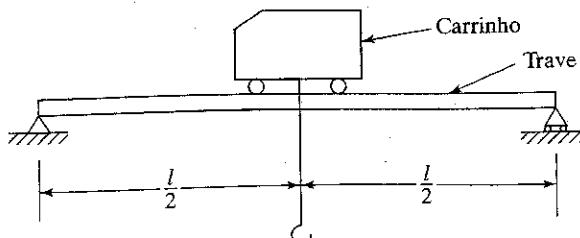


FIGURA 7.11

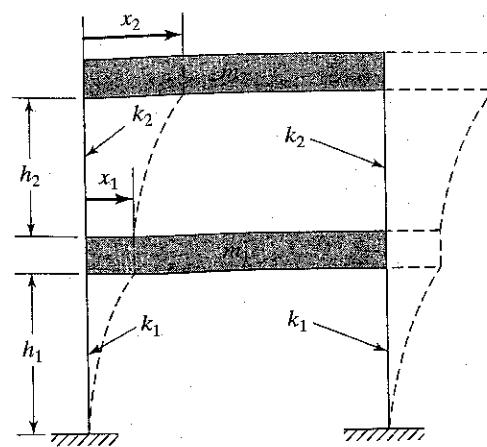


FIGURA 7.12

- 7.12** Prove que o quociente de Rayleigh nunca é mais alto que o autovalor mais alto.
- 7.13** Utilizando o método de Holzer, determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 6.13, com $m_1 = 100 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$, $m_3 = 200 \text{ kg}$, $k_1 = 8.000 \text{ N/m}$ e $k_2 = 4.000 \text{ N/m}$.
- 7.14** As matrizes de rigidez e massa de um sistema vibratório são dadas por
- $$[k] = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad [m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
- Utilizando o método de Holzer, determine todos os modos principais e as freqüências naturais.
- 7.15** Para o sistema torcional mostrado na Figura 6.11, determine um modo principal e a freqüência correspondente pelo método de Holzer. Considere que $k_{r1} = k_{r2} = k_{r3} = k_r$ e $J_1 = J_2 = J_3 = J_0$.
- 7.16** Usando o método de Holzer, determine as freqüências naturais e formas modais do edifício mostrado na Figura 7.12. Considere que $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$, $k_1 = 2k$, $k_2 = k$ e $k = 3EI/h^3$.
- 7.17** Utilizando o método de Holzer, determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 6.34. Considere que $J_1 = 10 \text{ kg.m}^2$, $J_2 = 5 \text{ kg.m}^2$, $J_3 = 1 \text{ kg.m}^2$ e $k_{r1} = k_{r2} = 1 \times 10^6 \text{ Nm/rad}$.
- 7.18** O maior autovalor da matriz

$$[D] = \begin{bmatrix} 2,5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 10 \end{bmatrix}$$

é dado por $\lambda_1 = 10,38068$. Utilizando o método de iteração matricial, determine os outros autovalores e todos os autovetores da matriz. Considere que $[m] = [I]$.

- 7.19** Sabe-se que as matrizes de massa e rigidez de um sistema massa-mola são

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [k] = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método de iteração matricial, determine as freqüências naturais e formas modais do sistema.

- 7.20 Usando o método de iteração matricial, determine as freqüências naturais e formas modais do sistema mostrado na Figura 6.6 com $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$ e $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

- 7.21 Utilizando o método de iteração matricial, determine as freqüências naturais do sistema mostrado na Figura 6.23. Considere que $J_{d1} = J_{d2} = J_{d3} = J_0$, $l_i = l$ e $(GJ)_i = GJ$ para $i = 1$ a 4.

- 7.22 Resolva o Problema 7.6, utilizando o método de iteração matricial.

- 7.23 As matrizes de rigidez e de massa de um sistema vibratório são dadas por

$$[k] = k \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [m] = m \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método de iteração matricial, determine a freqüência fundamental e a forma modal do sistema.

- 7.24 Usando o método de Jacobi, determine os autovalores e autovetores da matriz

$$[D] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

- 7.25 Usando o método de Jacobi, determine os autovalores e autovetores da matriz

$$[D] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 7.26 Utilizando a técnica da decomposição de Choleski, decomponha a matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & 22 & 13 \\ 4 & 3 & 13 & 46 \end{bmatrix}$$

- 7.27 Utilizando a decomposição $[A] = [U]^T[U]$, determine a inversa da seguinte matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

- 7.28 Usando decomposição de Choleski, determine a inversa da seguinte matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix}$$

- 7.29 Determine os autovalores da matriz $[A]$ dada no Problema 7.26, utilizando o método de Jacobi,

- 7.30 Converta o Problema 7.23 para um problema-padrão de autovalor com uma matriz simétrica.

- 7.31 Utilizando a técnica da decomposição de Choleski, expresse a seguinte matriz como o produto de duas matrizes triangulares:

$$[A] = \begin{bmatrix} 16 & -20 & -24 \\ -20 & 89 & -50 \\ -24 & -50 & 280 \end{bmatrix}$$

- 7.32* Calcule uma seção tubular de peso mínimo para o eixo mostrado na Figura 7.3 de modo a obter uma freqüência fundamental de vibração de 0,5 Hz. Considere $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 50$ kg, $m_3 = 40$ kg, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 3$ m, $l_3 = 4$ m, $l_4 = 2$ m e $E = 2,07 \times 10^{11}$ N/m².

- 7.33 Utilizando MATLAB, determine os autovalores e autovetores da seguinte matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 7.34 Utilizando MATLAB, determine os autovalores e autovetores da seguinte matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & -9 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

- 7.35 Determine os autovalores e autovetores da matriz $[D]$ dada no Problema 7.18 utilizando **Program9.m**,

- 7.36 Utilizando **Program10.m**, determine os autovalores e autovetores da matriz $[D]$ dada no Problema 7.25.

- 7.37 Utilizando **Program11.m**, determine a solução do problema geral de autovalor dado no Problema 7.23 com $k = m = 1$.

- 7.38 Utilizando **Program9.cpp**, determine os autovalores e autovetores da seguinte matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

- 7.39 Resolva o Problema 7.38, utilizando **Program10.cpp**,

- 7.40 Utilizando **Program11.cpp**, resolva o seguinte problema de autovalor:

$$\omega^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \vec{X}$$

- 7.41 Resolva o Problema 7.38, utilizando **PROGRAM9.F**.

- 7.42 Resolva o Problema 7.38, usando **PROGRAM10.F**.

- 7.43 Resolva o Problema 7.40, utilizando **PROGRAM11.F**.

- 7.44 Resolva o Problema 7.27, usando **PROGRAM9.F**.

- 7.45 Resolva o Problema 7.31, utilizando **PROGRAM9.F**.

- 7.46 Utilize **PROGRAM11.F** para resolver o problema geral de autovalor enunciado no Problema 7.14.

- 7.47 Utilize o **PROGRAM11.F** para resolver o problema geral de autovalor enunciado no Problema 7.19.

- 7.48 Utilize **PROGRAM11.F** para resolver o problema geral de autovalor enunciado no Problema 7.23.

* O asterisco denota um problema que não tem uma resposta única.

EXERCÍCIOS DE PROJETO

- 7.49** Um volante de massa $m_1 = 100 \text{ kg}$ e uma polia de massa $m_2 = 50 \text{ kg}$ estão montados sobre um eixo de comprimento $l = 2 \text{ m}$, como mostra a Figura 7.13. Determine suas localizações l_1 e l_2 para maximizar a freqüência fundamental de vibração do sistema.
- 7.50** A Figura 7.14 mostra um diagrama simplificado de uma ponte rolante. A trave, com seção transversal quadrada,* e o cabo, com seção transversal circular, são feitos de aço. Calcule as

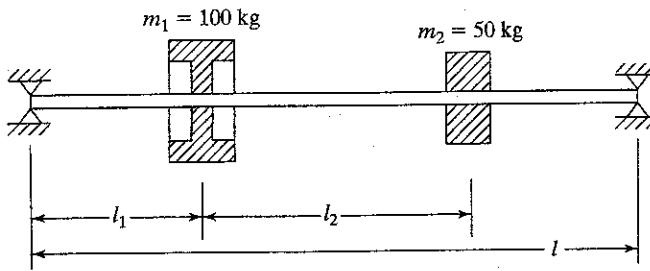


FIGURA 7.13

traves e o cabo de tal modo que as freqüências naturais do sistema sejam maiores que a velocidade de operação, 1.500 rpm, de um motor elétrico localizado no carrinho.

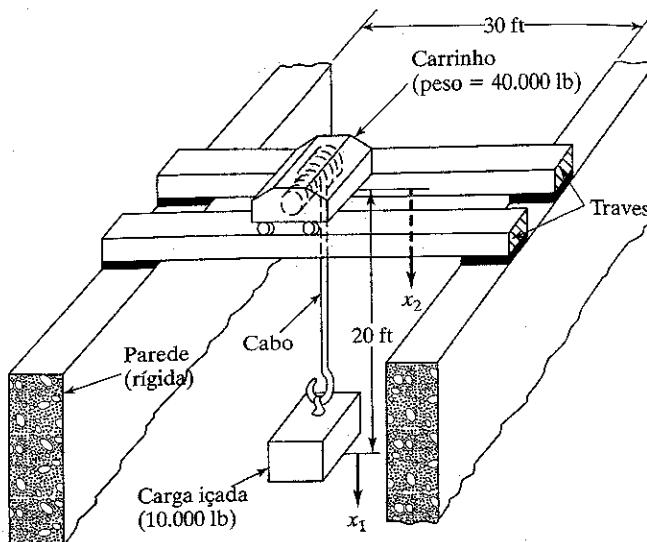


FIGURA 7.14



Stephen Prókofievich Timoshenko (1878–1972), engenheiro, nascido na Rússia, emigrou para os Estados Unidos e foi um dos mais amplamente conhecidos autores de livros nas áreas de elasticidade, resistência dos materiais e vibrações. Foi catedrático de mecânica na Universidade de Michigan (University of Michigan) e, mais tarde, na Universidade Stanford (Stanford University), sendo considerado o pai da engenharia mecânica nos Estados Unidos. A teoria melhorada que ele apresentou em 1921 para a vibração de vigas passou a ser conhecida como a teoria da viga de Timoshenko. (Cortesia de *Applied Mechanics Reviews*.)

CAPÍTULO OITO

Sistemas contínuos

8.1 Introdução

Até aqui, tratamos de sistemas discretos nos quais admitímos que massa, amortecimento e elasticidade estavam presentes apenas em certos pontos discretos no sistema. Há muitos casos, conhecidos como *sistemas distribuídos* ou *sistemas contínuos*, nos quais não é possível identificar massas, amortecedores ou molas discretos. Então, temos de considerar a distribuição contínua da massa, do amortecimento e da elasticidade e supor que cada um do número infinito de pontos do sistema pode vibrar. É por isso que um sistema contínuo também é denominado um sistema com *infinitos graus de liberdade*.

Se um sistema for modelado como um sistema discreto, as equações governantes são equações diferenciais ordinárias, relativamente fáceis de resolver. Se, por outro lado, o sistema for modelado como um sistema contínuo, as equações governantes são equações diferenciais parciais, mais difíceis de resolver. Todavia, a informação obtida de um modelo discreto de um sistema não pode ser tão acurada como a obtida de um modelo contínuo. A escolha entre os dois modelos deve ser feita com cuidado, levando na devida conta fatores como a finalidade da análise, a influência da análise no projeto e o tempo de cálculo disponível.

Neste capítulo, consideraremos a vibração de sistemas contínuos simples — cordas, barras, eixos, vigas e membranas. Um tratamento mais especializado da vibração de elementos estruturais contínuos é dado nas Referências [8.1–8.3]. Em geral, a equação de freqüência de um sistema contínuo é uma equação transcendental que dá um número infinito de freqüências naturais e modos normais. Isso contrasta com o comportamento de sistemas discretos, que dão um número finito de tais freqüências e modos. Precisamos aplicar condições de contorno para determinar as freqüências naturais de um sistema contínuo. A questão das condições de contorno não aparece no caso de sistemas discretos, exceto de um modo indireto, porque os coeficientes de influência dependem da maneira como o sistema é apoiado.

8.2 Vibração transversal de uma corda ou cabo

8.2.1 Equação de movimento

Considere uma corda ou cabo elástico firmemente esticado, de comprimento l , sujeito a uma força transversal $f(x, t)$

por unidade de comprimento, como mostra a Figura 8.1(a). Considera-se que o deslocamento transversal da corda, $w(x, t)$, é pequeno. O equilíbrio das forças na direção z dá (Figura 8.1(b)):

A força líquida que age sobre um elemento é igual à força de inércia que age sobre o elemento ou

$$(P + dP) \operatorname{sen}(\theta + d\theta) + f dx - P \operatorname{sen} \theta = \rho dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.1)$$

onde P é a tensão, ρ é a massa por unidade de comprimento e θ é o ângulo que a corda deflectida faz com o eixo x . Para um comprimento elementar dx ,

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx \quad (8.2)$$

$$\operatorname{sen} \theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8.3)$$

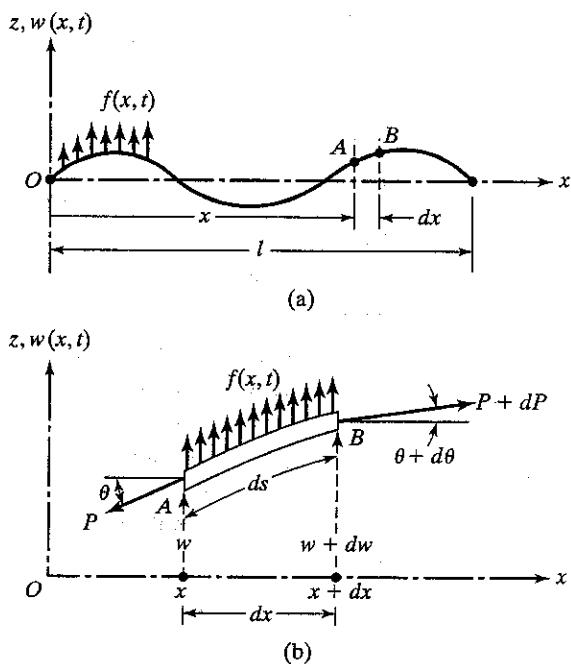


FIGURA 8.1 Uma corda vibratória.

e

$$\operatorname{sen}(\theta + d\theta) \approx \operatorname{tg}(\theta + d\theta) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (8.4)$$

Por consequência, a equação de vibração forçada da corda não-uniforme, Equação (8.1), pode ser simplificada para

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[P \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.5)$$

Se a corda for uniforme e a tensão for constante, a Equação (8.5) reduz-se a

$$P \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.6)$$

Se $f(x, t) = 0$, obtemos a equação de vibração livre

$$P \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.7)$$

ou

$$c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.8)$$

onde

$$c = \left(\frac{P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (8.9)$$

A Equação (8.8) também é conhecida como *equação de onda*.

8.2.2 Condições iniciais e condições de contorno

A equação de movimento, Equação (8.5) ou suas formas especiais (8.6) e (8.7), é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Visto que a ordem da derivada mais alta de w em relação a x e t nessa equação corresponde a dois, precisamos especificar duas condições de contorno e duas condições iniciais para determinar a solução $w(x, t)$. Se a corda tiver deflexão $w_0(x)$ e velocidade $\dot{w}_0(x)$ conhecidas no tempo $t = 0$, as condições iniciais são especificadas como

$$w(x, t = 0) = w_0(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x) \quad (8.10)$$

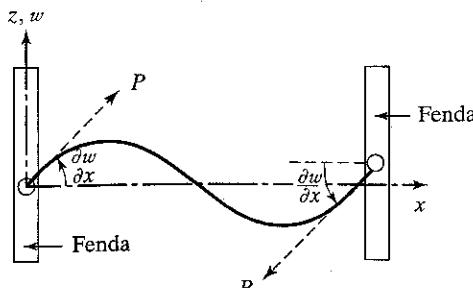


FIGURA 8.2 Corda conectada a pinos nas extremidades.

Se a corda for fixa em uma extremidade, digamos, $x = 0$, o deslocamento w deve ser sempre zero e, portanto, a condição de contorno é

$$w(x = 0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.11)$$

Se a corda ou cabo estiver conectado a um pino que pode se mover em uma direção perpendicular, como mostra a Figura 8.2, a extremidade não pode suportar uma força transversal. Por consequência, a condição de contorno torna-se

$$P(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (8.12)$$

Se a extremidade $x = 0$ for livre e P for uma constante, então a Equação (8.12) torna-se

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.13)$$

Se a extremidade $x = l$ for restringida elasticamente como mostrado na Figura 8.3, a condição de contorno torna-se

$$P(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -k w(x, t) \Big|_{x=l}, \quad t \geq 0 \quad (8.14)$$

onde k é a constante da mola.

8.2.3 Vibração livre de uma corda uniforme

A equação de vibração livre, Equação (8.8), pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Nesse método, a solução é escrita como o produto entre uma função $W(x)$ (que depende somente de x) e uma função $T(t)$ (que depende somente de t) [8.4]:

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (8.15)$$

A substituição da Equação (8.15) na Equação (8.8) resulta em

$$\frac{c^2}{W} \frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (8.16)$$

Já que o lado esquerdo dessa equação depende somente de x e o lado direito depende somente de t , seu valor comum deve ser uma constante — digamos, a — de modo que

$$\frac{c^2}{W} \frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = a \quad (8.17)$$

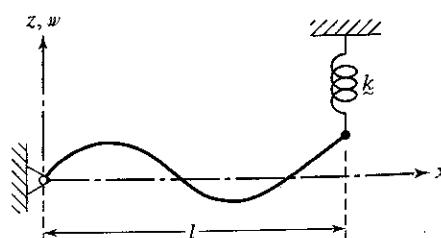


FIGURA 8.3 Corda com restrição elástica.

As equações implícitas na Equação (8.17) podem ser escritas como

$$\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{a}{c^2} W = 0 \quad (8.18)$$

$$\frac{dT}{dt^2} - aT = 0 \quad (8.19)$$

Uma vez que a constante a é geralmente negativa (ver Problema 8.9), podemos fazer $a = -\omega^2$ e escrever as equações (8.18) e (8.19) como

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} W = 0 \quad (8.20)$$

$$\frac{dT}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (8.21)$$

As soluções dessas equações são dadas por

$$W(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \quad (8.22)$$

$$T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t \quad (8.23)$$

onde ω é a freqüência de vibração, e as constantes A , B , C e D podem ser avaliadas pelas condições de contorno e condições iniciais.

8.2.4. Vibração livre de uma corda fixa em ambas as extremidades

Se a corda for fixa em ambas as extremidades, as condições de contorno são $w(0, t) = w(l, t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$. Por consequência, pela Equação (8.15), obtemos

$$W(0) = 0 \quad (8.24)$$

$$W(l) = 0 \quad (8.25)$$

Para satisfazer a Equação (8.24), A deve ser zero na Equação (8.22). A Equação (8.25) requer que

$$B \sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (8.26)$$

Visto que B não pode ser zero para uma solução não-trivial, temos

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (8.27)$$

A Equação (8.27) é denominada *equação de freqüência* ou *equação característica* e é satisfeita por vários valores de ω . Os valores de ω são denominados os *autovalores* (ou *freqüências naturais* ou *valores característicos*) do problema. A n -ésima (enésima) freqüência natural é dada por

$$\frac{\omega_n l}{c} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

ou

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.28)$$

A solução $w_n(x, t)$ correspondente a ω_n pode ser expressa como

$$w_n(x, t) = W_n(x)T_n(t) \\ = \sin \frac{n\pi x}{l} \left[C_n \cos \frac{n\pi \omega_n t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi \omega_n t}{l} \right] \quad (8.29)$$

onde C_n e D_n são constantes arbitrárias. A solução $w_n(x, t)$ é denominada o n -ésimo modo de vibração ou o n -ésima harmônica ou o n -ésimo modo normal da corda. Nesse modo, cada ponto da corda vibra com uma amplitude proporcional ao valor de W_n naquele ponto, com a freqüência circular $\omega_n = (n\pi)/l$. A função $W_n(x)$ é denominada o n -ésimo modo normal, ou função característica. Os três primeiros modos de vibração são mostrados na Figura 8.4. O modo correspondente a $n = 1$ é denominado o modo fundamental, e ω_1 é chamada a freqüência fundamental. O período fundamental é

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2l}{c}$$

Os pontos nos quais $w_n = 0$ para todos os tempos são denominados nós. Assim, o modo fundamental tem dois nós, em $x = 0$ e $x = l$; o segundo modo tem três nós, em $x = 0$, $x = l/2$, $x = l$ etc.

A solução geral da Equação (8.8), que satisfaz as condições de contorno das equações (8.24) e (8.25), é dada pela superposição de todas $w_n(x, t)$:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[C_n \cos \frac{n\pi \omega_n t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi \omega_n t}{l} \right] \quad (8.30)$$

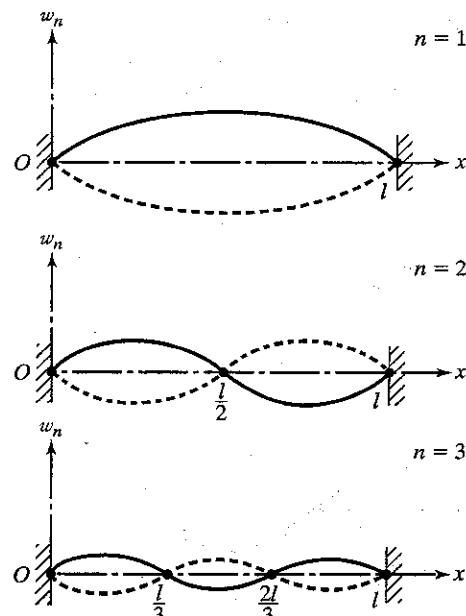


FIGURA 8.4 Formas modais de uma corda.

Essa equação dá todas as possíveis vibrações da corda; a vibração particular que ocorre é determinada exclusivamente pelas condições iniciais especificadas. As condições iniciais dão valores exclusivos às constantes C_n e D_n . Se as condições iniciais forem especificadas como na Equação (8.10), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = w_0(x) \quad (8.31)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{l} D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = \dot{w}_0(x) \quad (8.32)$$

que podemos ver que é a expansão em série de Fourier de seno de $w_0(x)$ e $\dot{w}_0(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq l$. Os valores de C_n e D_n podem ser determinados multiplicando as equações (8.31) e (8.32) por $\operatorname{sen}(n\pi x/l)$ e integrando em relação a x de 0 a l :

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad (8.33)$$

$$D_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^l \dot{w}_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad (8.34)$$

Observação: A solução dada pela Equação (8.30) pode ser identificada como o *método de superposição de modos*, visto que a resposta é expressa como uma superposição dos modos normais. O procedimento é aplicável na determinação não apenas da solução de vibração livre, mas também da solução de vibração forçada de sistemas contínuos.

EXEMPLO 8.1

Resposta dinâmica de uma corda dedilhada

Se uma corda de comprimento l , fixa em ambas as extremidades, for puxada em seu ponto médio, como mostra a Figura 8.5, e então solta, determine seu movimento subsequente.

Solução: A solução é dada pela Equação (8.30) com C_n e D_n dadas pelas equações (8.33) e (8.34), respectivamente. Já que não há nenhuma velocidade inicial, $\dot{w}_0(x) = 0$ e, portanto, $D_n = 0$. Assim, a solução da Equação (8.30) reduz-se a

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} \quad (E.1)$$

onde

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad (E.2)$$

A deflexão inicial $w_0(x)$ é dada por

$$w_0(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l} & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{2h(l-x)}{l} & \text{para } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \quad (E.3)$$

Substituindo a Equação (E.3) na Equação (E.2), C_n pode ser avaliada:

$$C_n = \frac{2}{l} \left\{ \int_0^{l/2} \frac{2hx}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^l \frac{2h}{l} (l-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \right\}$$

$$= \begin{cases} \frac{8h}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} & \text{para } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{para } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (E.4)$$

Usando a relação

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = (-1)^{(n-1)/2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (E.5)$$

a solução desejada pode ser expressa como

$$w(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \left\{ \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l} - \frac{1}{9} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi ct}{l} + \dots \right\} \quad (E.6)$$

Nesse caso, nenhuma harmônica par é excitada. ■

8.2.5. Solução de uma onda em propagação

A solução da equação de onda, Equação (8.8), para uma corda de comprimento infinito pode ser expressa como [8.5]

$$w(x, t) = w_1(x - ct) + w_2(x + ct) \quad (8.35)$$

onde w_1 e w_2 são funções arbitrárias de $(x - ct)$ e $(x + ct)$, respectivamente. Para mostrar que a Equação (8.35) é a solução correta da Equação (8.8), em primeiro lugar, diferenciamos a Equação (8.35):

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = w_1''(x - ct) + w_2''(x + ct) \quad (8.36)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = c^2 w_1''(x - ct) + c^2 w_2''(x + ct) \quad (8.37)$$

A substituição dessas equações na Equação (8.8) revela que a equação de onda é satisfeita. Na Equação (8.35),

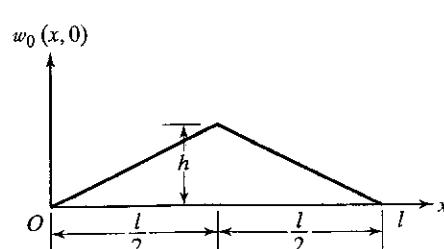


FIGURA 8.5 Deflexão inicial da corda.

$w_1(x - ct)$ e $w_2(x + ct)$ representam ondas que se propagam nas direções positiva e negativa do eixo x , respectivamente, com uma velocidade c .

Para um problema dado, as funções arbitrárias w_1 e w_2 são determinadas pelas condições iniciais, Equação (8.10). A substituição da Equação (8.35) na Equação (8.10) dá, em $t = 0$,

$$w_1(x) + w_2(x) = w_0(x) \quad (8.38)$$

$$-cw'_1(x) + cw'_2(x) = \dot{w}_0(x) \quad (8.39)$$

onde a “linha” indica diferenciação em relação ao respectivo argumento em $t = 0$ (isto é, em relação a x). A integração da Equação (8.39) resulta em

$$-w_1(x) + w_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \dot{w}_0(x') dx' \quad (8.40)$$

onde x_0 é uma constante. A solução das Equações (8.38) e (8.40) dá w_1 e w_2 :

$$w_1(x) = \frac{1}{2} \left[w_0(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \dot{w}_0(x') dx' \right] \quad (8.41)$$

$$w_2(x) = \frac{1}{2} \left[w_0(x) + \frac{1}{c} \int_x^{\infty} \dot{w}_0(x') dx' \right] \quad (8.42)$$

Substituindo x por $(x - ct)$ e $(x + ct)$, respectivamente, nas equações (8.41) e (8.42), obtemos à solução total:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= w_1(x - ct) + w_2(x + ct) \\ &= \frac{1}{2} [w_0(x - ct) + w_0(x + ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} w_0(x') dx' \end{aligned} \quad (8.43)$$

Os seguintes pontos devem ser notados:

1. Como podemos ver pela Equação (8.43), não há necessidade de aplicar condições de contorno ao problema.
2. A solução dada pela Equação (8.43) pode ser expressa como

$$w(x, t) = w_D(x, t) + w_V(x, t) \quad (8.44)$$

onde $w_D(x, t)$ denota as ondas que se propagam devido ao deslocamento inicial conhecido $w_0(x)$ com velocidade inicial zero, e $w_V(x, t)$ representa ondas que se propagam em razão apenas da velocidade inicial conhecida $\dot{w}_0(x)$ com deslocamento inicial zero.

A vibração transversal de uma corda fixa em ambas as extremidades excitada pelo impacto elástico transversal de uma carga em um ponto intermediário foi considerada em [8.6]. Triantafyllou dá uma revisão da literatura sobre a dinâmica de cabos e correntes [8.7].

8.3 Vibração longitudinal de uma barra ou haste

8.3.1 Equação de movimento e solução

Considere uma barra elástica de comprimento l com área de seção transversal variável $A(x)$, como mostra a Figura 8.6. As forças que agem sobre as seções transversais de um pequeno elemento da barra são dadas por P e $P + dP$ com

$$P = \sigma A = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.45)$$

onde σ é a tensão axial, E é o módulo de Young, u é o deslocamento axial e $\partial u / \partial x$ é a deformação axial. Se $f(x, t)$ denotar a força externa por unidade de comprimento, o somatório das forças na direção x dará a equação de movimento

$$(P + dP) + f dx - P = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8.46)$$

onde ρ é a densidade de massa da barra. Usado a relação $dP = (\partial P / \partial x) dx$ e a Equação (8.45), a equação de movimento para a vibração longitudinal forçada de uma barra não-uniforme, Equação (8.46), pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t) \\ = \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \end{aligned} \quad (8.47)$$

Para uma barra uniforme, a Equação (8.47) reduz-se a

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.48)$$

A equação de vibração livre pode ser obtida da Equação (8.48), fazendo $f = 0$, como

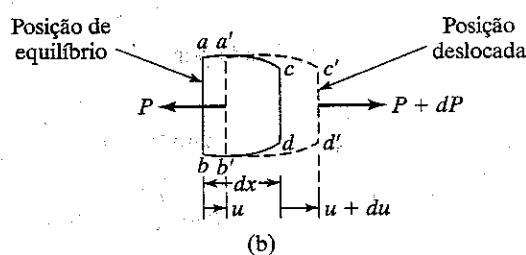
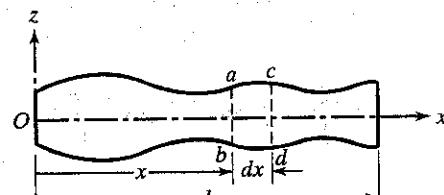


FIGURA 8.6 Vibração longitudinal de uma barra.

Condições das extremidades da barra	Condições de contorno	Equação de freqüência	Forma modal (função normal)	Freqüências naturais
Fixa-livre	$u(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}$ $n = 0, 1, 2, \dots$
Livre-livre	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l};$ $n = 0, 1, 2, \dots$
Fixa-fixa	$u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l};$ $n = 1, 2, 3, \dots$

FIGURA 8.7 Condições de contorno comuns para uma barra em vibração longitudinal.

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.49)$$

onde

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8.50)$$

Observe que as Equações (8.47) a (8.50) podem ser consideradas semelhantes às equações (8.5), (8.6), (8.8) e (8.9), respectivamente. Assim, a solução da Equação (8.49), que pode ser obtida como no caso da Equação (8.8), pode ser escrita como

$$u(x, t) = U(x)T(t) \\ = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) \quad (8.51)$$

onde a função $U(x)$ representa o modo normal e depende somente de x e a função $T(t)$ depende somente de t . Se a barra tiver deslocamento axial inicial $u_0(x)$ e velocidade inicial $u_0'(x)$ conhecidos, as condições iniciais podem ser expressas como

$$u(x, t=0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = u_0'(x) \quad (8.52)$$

As condições de contorno comuns e as equações de freqüência correspondentes para a vibração longitudinal de barras uniformes são mostradas na Figura 8.7.

EXEMPLO 8.2

Condições de contorno para uma barra

Uma barra uniforme de área de seção transversal A , comprimento l e módulo de Young E está ligada em ambas as extremidades a molas, amortecedores e massas, como mostra a Figura 8.8(a). Cite as condições de contorno.

Solução: Os diagramas de corpo livre das massas m_1 e m_2 são mostrados na Figura 8.8(b). Com isso, determinamos que, na extremidade esquerda ($x = 0$), a força desenvolvida na barra devido a u positivo e $\partial u / \partial x$ deve ser igual à soma das forças da mola, do amortecedor e de inércia:

$$AE \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k_1 u(0, t) + c_1 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) \quad (E.1)$$

De maneira semelhante na extremidade direita ($x = l$), a força desenvolvida na barra devido a u positivo e $\partial u / \partial x$ deve ser igual à soma negativa das forças da mola, do amortecedor e de inércia:

$$AE \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -k_2 u(l, t) - c_2 \frac{\partial u}{\partial t}(l, t) - m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, t) \quad (E.2)$$

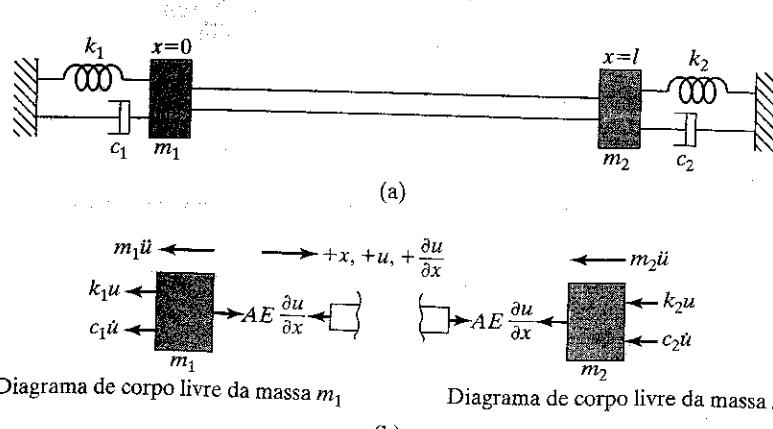


FIGURA 8.8 Barra com extremidades conectadas a molas, massas e amortecedores.

¹ Usamos A e B nesta seção; A é usado para denotar a área da seção transversal da barra.

8.3.2 Ortogonalidade de funções normais

As funções normais para a vibração longitudinal de barras satisfazem a relação de ortogonalidade:

$$\int_0^l U_i(x) U_j(x) dx = 0 \quad (8.53)$$

onde $U_i(x)$ e $U_j(x)$ denotam as funções normais correspondentes à i -ésima e à j -ésima freqüências naturais ω_i e ω_j , respectivamente. Quando consideramos $u(x, t) = U_i(x)T(t)$ e $u(x, t) = U_j(x)T(t)$ como soluções, a Equação (8.49) dá

$$c^2 \frac{d^2 U_i(x)}{dx^2} + \omega_i^2 U_i(x) = 0 \quad \text{ou} \\ c^2 U_i''(x) + \omega_i^2 U_i(x) = 0 \quad (8.54)$$

e

$$c^2 \frac{d^2 U_j(x)}{dx^2} + \omega_j^2 U_j(x) = 0 \quad \text{ou} \\ c^2 U_j''(x) + \omega_j^2 U_j(x) = 0 \quad (8.55)$$

onde $U_i'' = \frac{d^2 U_i}{dx^2}$ e $U_j'' = \frac{d^2 U_j}{dx^2}$. A multiplicação da Equação (8.54) por U_j e da Equação (8.55) por U_i dá

$$c^2 U_i'' U_j + \omega_i^2 U_i U_j = 0 \quad (8.56)$$

$$c^2 U_j'' U_i + \omega_j^2 U_j U_i = 0 \quad (8.57)$$

A subtração da Equação (8.57) da Equação (8.56) e a integração de 0 a l resulta em

$$\int_0^l U_i U_j dx = -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^l (U_i'' U_j - U_j'' U_i) dx \\ = -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} [U_i' U_j - U_j' U_i] \Big|_0^l \quad (8.58)$$

Pode-se provar que o lado direito da Equação (8.58) é zero para qualquer combinação de condições de contorno. Por exemplo, se a barra for fixa em $x = 0$ e livre em $x = l$,

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad \text{ou} \quad U(0) = 0 \quad (8.59)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad \text{ou} \quad U'(l) = 0 \quad (8.60)$$

Assim, $(U_i' U_j - U_j' U_i)|_{x=l} = 0$ devido a U' ser zero (Equação 8.60) e $(U_i' U_j - U_j' U_i)|_{x=0} = 0$ devido a U ser zero (Equação 8.59). Assim, a Equação (8.58) reduz-se à Equação (8.53), que também é conhecida como *princípio da ortogonalidade para as funções normais*.

EXEMPLO 8.3

Vibrações livres de uma barra fixa-livre

Determine as freqüências naturais e a solução de vibração livre de uma barra fixa em uma extremidade e livre na outra.

Solução: Seja a barra fixa em $x = 0$ e livre em $l = 0$, de modo que as condições de contorno possam ser expressas como

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (E.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (E.2)$$

A utilização da Equação (E.1) na Equação (8.51) dá $A=0$, enquanto a utilização da Equação (E.2) dá a equação de freqüência

$$\frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (E.3)$$

Os autovalores ou freqüências naturais são dados por

$$\frac{\omega_n l}{c} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ou

$$\omega_n = \frac{(2n + 1)\pi c}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (E.4)$$

Assim, a solução total (vibração livre) da Equação (8.49) pode ser escrita, usando o método de superposição de modos, como

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{2l} \left[C_n \cos \frac{(2n + 1)\pi ct}{2l} + D_n \sin \frac{(2n + 1)\pi ct}{2l} \right] \quad (E.5)$$

onde os valores das constantes C_n e D_n podem ser determinados pelas condições iniciais, com as equações (8.33) e (8.34):

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{2l} dx \quad (E.6)$$

$$D_n = \frac{4}{(2n + 1)\pi c} \int_0^l \dot{u}_0(x) \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{2l} dx \quad (E.7)$$

EXEMPLO 8.4

Freqüências naturais de uma barra que suporta uma massa

Determine as freqüências naturais de uma barra com uma extremidade fixa e uma massa presa à outra extremidade, como na Figura 8.9.

Solução: A equação que governa a vibração axial da barra é dada pela Equação (8.49), e a solução, pela Equação (8.51). A condição de contorno na extremidade fixa ($x = 0$)

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{E.1})$$

leva a $A = 0$ na Equação (8.51). Na extremidade $x = l$, a força de tração na barra deve ser à força de inércia da massa vibratória M e, portanto,

$$AE \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, t) \quad (\text{E.2})$$

Com a ajuda da Equação (8.51), essa equação pode ser expressa como

$$\begin{aligned} AE \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} (C \cos \omega t + D \operatorname{sen} \omega t) \\ = M\omega^2 \operatorname{sen} \frac{\omega l}{c} (C \cos \omega t + D \operatorname{sen} \omega t) \end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{AE\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = M\omega^2 \operatorname{sen} \frac{\omega l}{c}$$

ou

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha = \beta \quad (\text{E.3})$$

onde

$$\alpha = \frac{\omega l}{c} \quad (\text{E.4})$$

e

$$\beta = \frac{AEl}{c^2 M} = \frac{Apl}{M} = \frac{m}{M} \quad (\text{E.5})$$

onde m é a massa da barra. A Equação (E.3) é a equação de freqüência (na forma de uma equação transcendental) cuja solução dá as freqüências naturais do sistema. As duas primeiras freqüências naturais são dadas na Tabela 8.1 para diferentes valores do parâmetro β .

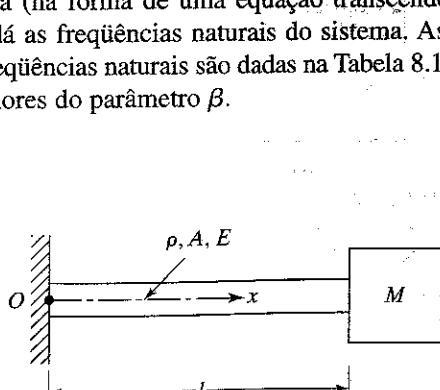


FIGURA 8.9 Barra que suporta massa em uma extremidade.

Observação: Se a massa da barra for desprezível em comparação com a massa ligada à sua extremidade, $m \approx 0$,

$$c = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{EAl}{m} \right)^{1/2} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\omega l}{c} \rightarrow 0$$

Nesse caso,

$$\operatorname{tg} \frac{\omega l}{c} \approx \frac{\omega l}{c}$$

e a equação de freqüência (E.3) pode ser considerada como

$$\left(\frac{\omega l}{c} \right)^2 = \beta$$

Isso dá o valor aproximado da freqüência fundamental

$$\omega_1 = \frac{c}{l} \beta^{1/2} = \frac{c}{l} \left(\frac{\rho Al}{M} \right)^{1/2} = \left(\frac{EA}{lM} \right)^{1/2} = \left(\frac{g}{\delta_s} \right)^{1/2}$$

onde

$$\delta_s = \frac{Mgl}{EA}$$

representa a elongação estática da barra sob a ação da carga Mg . ■

EXEMPLO 8.5

Vibrações de uma barra sujeita a força inicial

Uma barra com área de seção transversal uniforme A , densidade ρ , módulo de elasticidade E e comprimento l é fixa em uma extremidade e livre na outra extremidade. Ela está sujeita a uma força axial F_0 em sua extremidade livre, como mostrado na Figura 8.10(a). Estude as vibrações resultantes se a força F_0 for removida repentinamente.

Solução: A deformação por tração induzida na barra resultante de F_0 é

$$\epsilon = \frac{F_0}{EA}$$

TABELA 8.1

	Valores da razão de massas β				
	0,01	0,1	1,0	10,0	100,0
Valor de α_1 ($\omega_1 = \frac{\alpha_1 c}{l}$)	0,1000	0,3113	0,8602	1,4291	1,5549
Valor de α_2 ($\omega_2 = \frac{\alpha_2 c}{l}$)	3,1448	3,1736	3,4267	4,3063	4,6658

Assim, o deslocamento da barra imediatamente antes da força F_0 ser removida (deslocamento inicial) é dado por (Figura 8.10b)

$$u_0 = u(x, 0) = \alpha x = \frac{F_0 x}{EA}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{E.1})$$

Visto que a velocidade inicial é zero, temos

$$\dot{u}_0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{E.2})$$

A solução geral de uma barra fixa em uma extremidade e livre na outra extremidade é dada pela Equação (E.5) do Exemplo 8.3:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left[C_n \cos \frac{(2n+1)\pi ct}{2l} + D_n \sin \frac{(2n+1)\pi ct}{2l} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

onde C_n e D_n são dadas pelas equações (E.6) e (E.7) do Exemplo 8.3. Uma vez que $\dot{u}_0 = 0$, obtemos $D_n = 0$. Usando o deslocamento inicial da Equação (E.1) na Equação (E.6) do Exemplo 8.3, obtemos

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \frac{F_0 x}{EA} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx \\ &= \frac{8F_0 l}{EA \pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

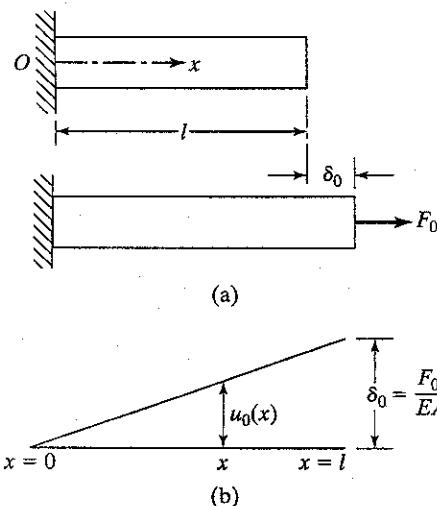


FIGURA 8.10 Barra sujeita a uma força axial na extremidade.

Assim, a solução torna-se

$$u(x, t) = \frac{8F_0 l}{EA \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi ct}{2l} \quad (\text{E.5})$$

As equações (E.3) e (E.5) indicam que o movimento de um ponto típico em $x = x_0$ na barra é composto pelas amplitudes

$$C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x_0}{2l}$$

correspondentes às freqüências circulares

$$\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$$

8.4 Vibração torcional de um eixo ou haste

A Figura 8.11 representa um eixo não-uniforme sujeito a um torque externo $f(x, t)$ por unidade de comprimento. Se $\theta(x, t)$ denotar o ângulo de torção da seção transversal, a relação entre a deflexão por torção e o momento de torção $M_t(x, t)$ é dada por [8.8]

$$M_t(x, t) = GJ(x) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \quad (8.61)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal e $GJ(x)$ é a rigidez à torção, e $J(x)$ denota o momento de inércia polar da seção transversal no caso de uma seção circular. Se o momento polar de inércia de massa do eixo por unidade de

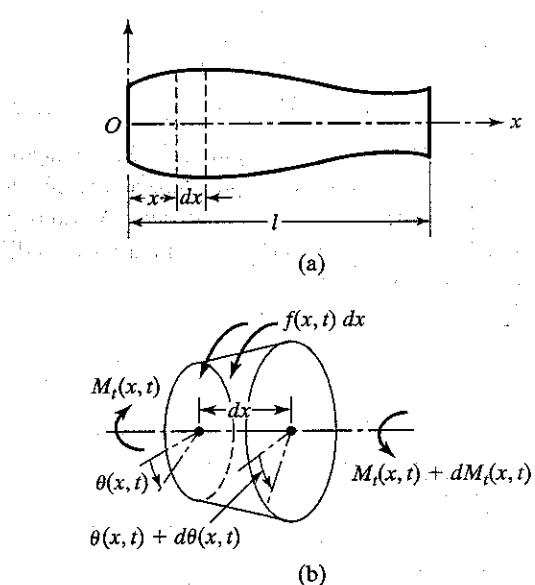


FIGURA 8.11 Vibração torcional de um eixo.

comprimento for I_o , o torque de inércia que age sobre um elemento de comprimento dx torna-se

$$I_o dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Se um torque externo $f(x, t)$ agir sobre o eixo por unidade de comprimento, a aplicação da segunda lei do movimento de Newton dá a equação de movimento:

$$(M_t + dM_t) + f dx = M_t = I_o dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (8.62)$$

Expressando dM_t como

$$\frac{\partial M_t}{\partial x} dx$$

e usando a Equação (8.61), a equação de vibração forçada torcional para um eixo não-uniforme pode ser obtida:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ(x) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \right] + f(x, t) = I_o(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.63)$$

Para um eixo uniforme, a Equação (8.63) toma a forma

$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = I_o \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.64)$$

que, no caso de vibração livre, reduz-se a

$$c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.65)$$

onde

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{I_o}} \quad (8.66)$$

Observe que as equações (8.63) a (8.66) são semelhantes às equações derivadas nos casos de vibração transversal de uma corda e vibração longitudinal de uma barra. Se o eixo tiver

uma seção transversal uniforme, $I_o = \rho J$. Por consequência, a Equação (8.66) torna-se

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (8.67)$$

Se o eixo sofrer um deslocamento angular $\theta_0(x)$ e uma velocidade angular $\dot{\theta}_0(x)$ em $t = 0$, as condições iniciais podem ser expressas como

$$\theta(x, t = 0) = \theta_0(x)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{\theta}_0(x) \quad (8.68)$$

A solução geral da Equação (8.65) pode ser expressa como

$$\theta(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right)$$

$$(C \cos \omega t + D \sin \omega t) \quad (8.69)$$

As condições de contorno comuns para a vibração torcional de eixos uniformes são indicadas na Figura 8.12 juntamente com as equações de freqüência e funções normais correspondentes.

EXEMPLO 8.6

Freqüências naturais de uma fresa

Determine as freqüências naturais da fresa plana mostrada na Figura 8.13 quando a extremidade livre da haste (ou fuso) é fixa. Considere a rigidez à torção da haste como GJ e o momento de inércia de massa da fresa como I_o .

Solução: A solução geral é dada pela Equação (8.61). Utilizando a condição de contorno fixa $\theta(0, t) = 0$, obtemos pela Equação (8.61), $A = 0$. A condição de contorno em $x = l$ pode ser expressa como

Condições na extremidade do eixo	Condições de contorno	Equação de freqüência	Forma modal (função normal)	Freqüências naturais
Fixa-livre	$\theta(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_x(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l};$ $n = 0, 1, 2, \dots$
Livre-livre	$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_x(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l};$ $n = 0, 1, 2, \dots$
Fixa-fixa	$\theta(0, t) = 0$ $\theta(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_x(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l};$ $n = 1, 2, 3, \dots$

FIGURA 8.12 Condições de contorno para eixos (hastes) uniformes sujeitos a vibração torcional.

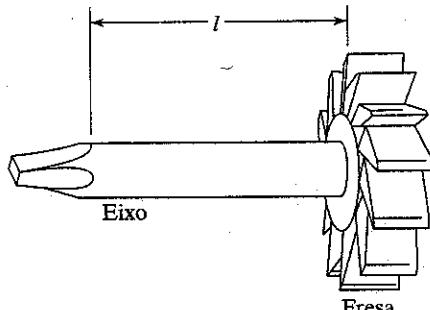


FIGURA 8.13 Fresadora paralela

$$GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = -I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(l, t) \quad (\text{E.1})$$

Isto é,

$$BGJ \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = BI_0 \omega^2 \sin \frac{\omega l}{c}$$

ou

$$\frac{\omega l}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c} = \frac{J_{\text{pl}}}{I_0} = \frac{J_{\text{haste}}}{I_0} \quad (\text{E.2})$$

onde $J_{\text{haste}} = J_{\text{pl}}$. A Equação (E.2) pode ser expressa como

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha = \beta \quad \text{onde } \alpha = \frac{\omega l}{c} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{J_{\text{haste}}}{I_0} \quad (\text{E.3})$$

A solução da Equação (E.3) e, com isso, as frequências naturais do sistema, podem ser obtidas como no caso do Exemplo 8.4.

8.5 Vibração lateral de vigas

8.5.1 Equação de movimento

Considere o diagrama de corpo livre de um elemento de uma viga mostrado na Figura 8.14, onde $M(x, t)$ é o momento fletor, $V(x, t)$ é a força de cisalhamento e $f(x, t)$ é a força externa por unidade de comprimento da viga. Visto que a força de inércia que age sobre o elemento da viga é

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

a equação de movimento da força na direção z dá

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.70)$$

onde ρ é a densidade da massa e $A(x)$ é a área da seção transversal da viga. A equação de movimento do momento em relação ao eixo y que passa pelo ponto 0 na Figura 8.14 dá como resultado

$$(M + dM) - (V + dV) dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (8.71)$$

Escrevendo

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad \text{e} \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

e desconsiderando os termos que envolvem potências ao quadrado de dx , as equações (8.70) e (8.71) podem ser escritas como

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.72)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \quad (8.73)$$

Utilizando a relação $V = \partial M / \partial x$ da Equação (8.73), a Equação (8.72) torna-se

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.74)$$

Pela teoria elementar da flexão de vigas (também conhecida como *teoria de Euler-Bernoulli* ou *teoria da viga delgada ou fina*) a relação entre o momento fletor e a deflexão pode ser expressa como [8.8]

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad (8.75)$$

onde E é o módulo de Young e $I(x)$ é o momento de inércia de área da seção transversal da viga em relação ao eixo y . Inserindo a Equação (8.75) na Equação (8.74), obtemos a equação de movimento para a vibração lateral forçada de uma viga não-uniforme:

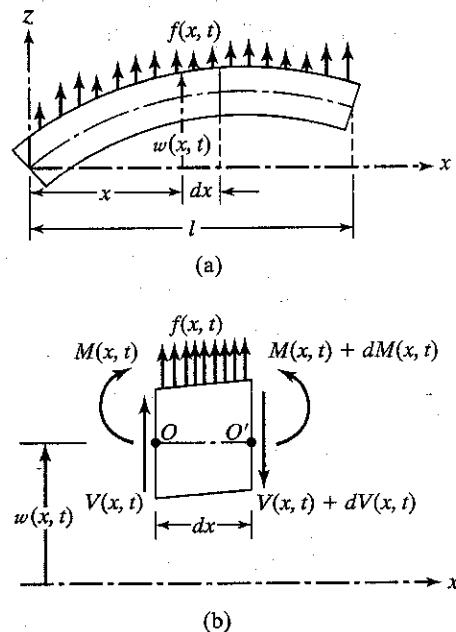


FIGURA 8.14 Uma viga em flexão.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (8.76)$$

Para uma viga uniforme, a Equação (8.76) reduz-se a

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (8.77)$$

Para vibração livre, $f(x, t) = 0$ e, portanto, a equação de movimento torna-se

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (8.78)$$

onde

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (8.79)$$

8.5.2. Condições iniciais

Uma vez que a equação de movimento envolve uma derivada de segunda ordem em relação ao tempo e uma derivada de quarta ordem em relação a x , são necessárias duas condições iniciais e quatro condições de contorno para determinar uma solução única para $w(x, t)$. Normalmente, os valores de deslocamento lateral e velocidade são especificados como $w_0(x)$ e $\dot{w}_0(x)$ em $t = 0$, de modo que as condições iniciais tornam-se

$$\begin{aligned} w(x, t = 0) &= w_0(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) &= \dot{w}_0(x) \end{aligned} \quad (8.80)$$

8.5.3. Vibração livre

A solução de vibração livre pode ser determinada usando o método de separação de variáveis como

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (8.81)$$

Substituindo a Equação (8.81) na Equação (8.78) e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a = \omega^2 \quad (8.82)$$

onde $a = \omega^2$ é uma constante positiva (ver Problema 8.43). A Equação (8.82) pode ser escrita como duas equações:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (8.83)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (8.84)$$

onde

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (8.85)$$

A solução da Equação (8.84) pode ser expressa como

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (8.86)$$

onde A e B são constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais. Para a solução da Equação (8.83), consideraremos

$$W(x) = Ce^{sx} \quad (8.87)$$

onde C e s são constantes, e deduzimos a equação auxiliar como

$$s^4 - \beta^4 = 0 \quad (8.88)$$

As raízes dessa equação são

$$s_{1,2} = \pm \beta, \quad s_{3,4} = \pm i\beta \quad (8.89)$$

Por consequência, a solução da Equação (8.83) torna-se

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (8.90)$$

onde C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são constantes. A Equação (8.90) também pode ser expressa como

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x \\ &\quad + C_4 \sinh \beta x \end{aligned} \quad (8.91)$$

ou

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1(\cos \beta x + \cosh \beta x) \\ &\quad + C_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) \\ &\quad + C_3(\sin \beta x + \sinh \beta x) \\ &\quad + C_4(\sin \beta x - \sinh \beta x) \end{aligned} \quad (8.92)$$

onde C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são, em cada caso, constantes diferentes. As constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 podem ser determinadas pelas condições de contorno. As freqüências naturais da viga são calculadas pela Equação (8.85) como

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}} \quad (8.93)$$

A função $W(x)$ é conhecida como modo normal ou função característica da viga e ω é denominada freqüência natural de vibração. Para qualquer viga, haverá um número infinito de modos normais com uma única freqüência natural associada a cada modo normal. As constantes desconhecidas C_1 a C_4 na Equação (8.91) ou (8.92) e o valor de β na Equação (8.93) podem ser determinados pelas condições de contorno da viga como indicado a seguir.

8.5.4 Condições de contorno

As condições de contorno comuns são as seguintes:

1. Extremidade livre:

$$\text{Momento fletor} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{Força de cisalhamento} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (8.94)$$

2. Extremidade simplesmente apoiada (pinada):

$$\text{Deflexão} = w = 0,$$

$$\text{Momento fletor} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8.95)$$

3. Extremidade fixa (engastada):

$$\text{Deflexão} = 0, \text{ Inclinação} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (8.96)$$

As equações de freqüência, as formas modais (funções normais) e as freqüências naturais das vigas com condições de contorno comuns são dadas na Figura 8.15 [8.13, 8.17]. Agora, vamos considerar outras possíveis condições de contorno para uma viga.

- 4. Extremidade ligada a uma mola linear, amortecedor e massa** (Figura 8.16a): Quando a extremidade de uma viga sofre um deslocamento transversal w e uma inclinação $\partial w/\partial x$, com velocidade $\partial w/\partial t$ e aceleração $\partial^2 w/\partial t^2$, as forças resistentes resultantes da mola, amortecedor e massa são proporcionais a w , $\partial w/\partial t$ e $\partial^2 w/\partial t^2$, respectivamente. Essa força resistente é equilibrada pela força de cisalhamento na extremidade. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = a \left[k w + c \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (8.97)$$

onde $a = -1$ para a extremidade esquerda e $+1$ para a extremidade direita da viga. Além disso, o momento fletor deve ser zero; por consequência,

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8.98)$$

- 5. Extremidade ligada a uma mola torcional, amortecedor torcional e inércia de rotação** (Figura 8.16b): Nesse caso, as condições de contorno são

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a \left[k_t \frac{\partial w}{\partial x} + c_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + I_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right] \quad (8.99)$$

onde $a = -1$ para a extremidade esquerda e $+1$ para a extremidade direita da viga, e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (8.100)$$

8.5.5 Ortogonalidade de funções normais

As funções normais $W(x)$ satisfazem a Equação (8.83):

$$c^2 \frac{d^4 W}{dx^4}(x) - \omega^2 W(x) = 0 \quad (8.101)$$

Condições nas extremidades da viga	Equação de freqüência	Forma modal (função normal)	Valor de $\beta_n l$
Pinada-pinada	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n [\sinh \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Livre-livre	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n [\sinh \beta_n x + \operatorname{senh} \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ onde $\alpha_n = \left(\frac{\operatorname{sen} \beta_n l - \operatorname{senh} \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4,730041$ $\beta_2 l = 7,853205$ $\beta_3 l = 10,995608$ $\beta_4 l = 14,137165$ ($\beta l = 0$ para corpo rígido)
Fixa-fixa	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n [\operatorname{senh} \beta_n x - \operatorname{sen} \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ onde $\alpha_n = \left(\frac{\operatorname{senh} \beta_n l - \operatorname{sen} \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4,730041$ $\beta_2 l = 7,853205$ $\beta_3 l = 10,995608$ $\beta_4 l = 14,137165$
Fixa-livre	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n [\operatorname{sen} \beta_n x - \operatorname{senh} \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ onde $\alpha_n = \left(\frac{\operatorname{sen} \beta_n l + \operatorname{senh} \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 1,875104$ $\beta_2 l = 4,694091$ $\beta_3 l = 7,854757$ $\beta_4 l = 10,995541$
Fixa-pinada	$\operatorname{tg} \beta_n l - \operatorname{tgh} \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n [\operatorname{sen} \beta_n x - \operatorname{senh} \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ onde $\alpha_n = \left(\frac{\operatorname{sen} \beta_n l - \operatorname{senh} \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3,926602$ $\beta_2 l = 7,068583$ $\beta_3 l = 10,210176$ $\beta_4 l = 13,351768$
Pinada-fixa	$\operatorname{tg} \beta_n l - \operatorname{tgh} \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n [\operatorname{sen} \beta_n x + \alpha_n \operatorname{senh} \beta_n x]$ onde $\alpha_n = \left(\frac{\operatorname{sen} \beta_n l}{\operatorname{senh} \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3,926602$ $\beta_2 l = 7,068583$ $\beta_3 l = 10,210176$ $\beta_4 l = 13,351768$ ($\beta l = 0$ para corpo rígido)

FIGURA 8.15 Condições de contorno para a vibração transversal de uma viga.

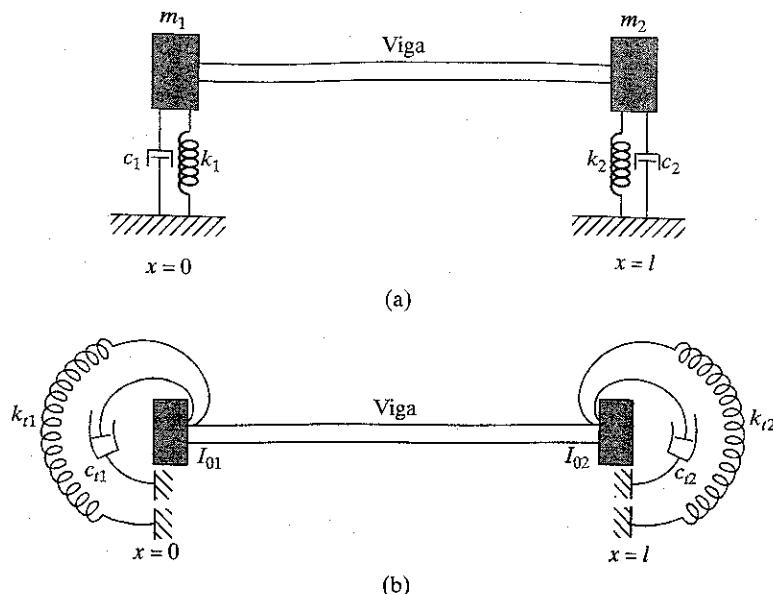


FIGURA 8.16 Vigas ligadas a molas, amortecedores e massas nas extremidades.

Sejam $W_i(x)$ e $W_j(x)$ as funções normais correspondentes às freqüências naturais ω_i e ω_j ($i \neq j$), de modo que

$$c^2 \frac{d^4 W_i}{dx^4} - \omega_i^2 W_i = 0 \quad (8.102)$$

e

$$c^2 \frac{d^4 W_j}{dx^4} - \omega_j^2 W_j = 0 \quad (8.103)$$

Multiplicando a Equação (8.102) por W_j e a Equação (8.103) por W_i , subtraindo as equações resultantes uma da outra e integrando de 0 a l , temos

$$\int_0^l \left[c^2 \frac{d^4 W_i}{dx^4} W_j - \omega_i^2 W_i W_j \right] dx - \int_0^l \left[c^2 \frac{d^4 W_j}{dx^4} W_i - \omega_j^2 W_j W_i \right] dx = 0$$

ou

$$\int_0^l W_i W_j dx = -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^l (W_i''' W_j - W_i W_j''') dx \quad (8.104)$$

onde uma ‘linha’ (‘) indica diferenciação em relação à x . O lado direito da Equação (8.104) pode ser avaliado usando integração por partes para obter

$$\int_0^l W_i W_j dx = -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \left. [W_i W_j''' - W_j W_i''' + W_j' W_i'' - W_i' W_j''] \right|_0^l \quad (8.105)$$

Podemos mostrar que o lado direito da Equação (8.105) é zero para qualquer combinação de condições de extremidade de livre, fixa ou simplesmente apoiada. Em uma extremidade livre, o momento fletor e a força de cisalhamento são iguais a zero, de modo que

$$W'' = 0, \quad W''' = 0 \quad (8.106)$$

Para uma extremidade fixa, a deflexão e a inclinação são zero:

$$W = 0, \quad W' = 0 \quad (8.107)$$

Em uma extremidade simplesmente apoiada, o momento fletor e a deflexão são zero:

$$W'' = 0, \quad W = 0 \quad (8.108)$$

Visto que cada termo no lado direito da Equação (8.105) é zero em $x = 0$ ou $x = l$ para qualquer combinação das condições de contorno nas equações (8.106) ao (8.108), a Equação (8.105) reduz-se a

$$\int_0^l W_i W_j dx = 0 \quad (8.109)$$

o que prova a ortogonalidade de funções normais para a vibração transversal de vigas.

EXEMPLO 8.7

Freqüências naturais de uma viga fixa-pinada

Determine as freqüências naturais de vibração de uma viga uniforme fixa em $x = 0$ e simplesmente apoiada em $x = l$.

Solução: As condições de contorno podem ser expressas como

$$W(0) = 0 \quad (E.1)$$

$$\frac{dW}{dx}(0) = 0 \quad (E.2)$$

$$W(l) = 0 \quad (E.3)$$

$$EI \frac{d^2W}{dx^2}(l) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2W}{dx^2}(l) = 0 \quad (E.4)$$

As condições (E.1) resultam em

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (E.5)$$

na Equação (8.91), enquanto as equações (E.2) e (8.91) dão

$$\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} = \beta[-C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \operatorname{senh} \beta x + C_4 \operatorname{cosh} \beta x]_{x=0} = 0$$

ou

$$\beta[C_2 + C_4] = 0 \quad (E.6)$$

Assim, a solução, Equação (8.91), torna-se

$$W(x) = C_1(\cos \beta x - \operatorname{cosh} \beta x) + C_2(\operatorname{sen} \beta x - \operatorname{senh} \beta x) \quad (E.7)$$

Aplicando as condições (E.3) e (E.4) à Equação (E.7), obtemos

$$C_1(\cos \beta l - \operatorname{cosh} \beta l) + C_2(\operatorname{sen} \beta l - \operatorname{senh} \beta l) = 0 \quad (E.8)$$

$$-C_1(\cos \beta l + \operatorname{cosh} \beta l) - C_2(\operatorname{sen} \beta l + \operatorname{senh} \beta l) = 0 \quad (E.9)$$

Para uma solução não-trivial de C_1 e C_2 , o determinante dos coeficientes dessas equações deve ser zero, isto é,

$$\begin{vmatrix} (\cos \beta l - \operatorname{cosh} \beta l) & (\operatorname{sen} \beta l - \operatorname{senh} \beta l) \\ -(\cos \beta l + \operatorname{cosh} \beta l) & -(\operatorname{sen} \beta l + \operatorname{senh} \beta l) \end{vmatrix} = 0 \quad (E.10)$$

Expandindo o determinante, obtemos a equação de freqüência

$$\cos \beta l \operatorname{senh} \beta l - \operatorname{sen} \beta l \operatorname{cosh} \beta l = 0$$

ou

$$\operatorname{tg} \beta l = \operatorname{tgh} \beta l \quad (E.11)$$

As raízes dessa equação, $\beta_n l$, dão as freqüências naturais de vibração

$$\omega_n = (\beta_n l)^2 \left(\frac{EI}{\rho A l^4} \right)^{1/2}, \quad n = 1, 2 \quad (E.12)$$

onde os valores de $\beta_n l$, $n = 1, 2, \dots$ que satisfazem a Equação (E.11) são dados na Figura 8.15. Se o valor de C_2 correspondente a $\beta_n l$ for denotado por C_{2n} , ela pode ser expressa em termos de C_{1n} pela Equação (E.8) como

$$C_{2n} = -C_{1n} \left(\frac{\cos \beta_n l - \operatorname{cosh} \beta_n l}{\operatorname{sen} \beta_n l - \operatorname{senh} \beta_n l} \right) \quad (E.13)$$

Por consequência, a Equação (E.7) pode ser escrita como

$$W_n(x) = C_{1n} \left[(\cos \beta_n x - \operatorname{cosh} \beta_n x) - \left(\frac{\cos \beta_n l - \operatorname{cosh} \beta_n l}{\operatorname{sen} \beta_n l - \operatorname{senh} \beta_n l} \right) (\operatorname{sen} \beta_n x - \operatorname{senh} \beta_n x) \right] \quad (E.14)$$

Os modos normais de vibração podem ser obtidos pela utilização da Equação (8.81)

$$w_n(x, t) = W_n(x)(A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t) \quad (E.15)$$

com $W_n(x)$ dado pela Equação (E.14). A solução geral ou total da viga fixa simplesmente apoiada pode ser expressa pela soma dos modos normais:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) \quad (E.16)$$

8.5.6 Vibração forçada

A solução de vibração forçada de uma viga pode ser determinada com a utilização do princípio da superposição de modo. Para isso, consideraremos que a deflexão da viga é

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t) \quad (E.110)$$

onde $W_n(x)$ é o n -ésimo modo normal ou função característica que satisfaz a equação diferencial (Equação 8.101)

$$EI \frac{d^4W_n(x)}{dx^4} - \omega_n^2 \rho A W_n(x) = 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (E.111)$$

e $q_n(t)$ é a coordenada generalizada no n -ésimo modo. Substituindo a Equação (E.110) na equação da vibração forçada, Equação (8.77), obtemos

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4W_n(x)}{dx^4} q_n(t) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2q_n(t)}{dt^2} = f(x, t) \quad (E.112)$$

Em vista da Equação (E.111), a Equação (E.112) pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2q_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{\rho A} f(x, t) \quad (E.113)$$

Multiplicando toda a Equação (E.113) por $W_m(x)$, integrando de 0 a l e usando a condição de ortogonalidade, Equação (8.109), obtemos

$$\frac{d^2q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{\rho Ab} Q_n(t) \quad (8.114)$$

onde $Q_n(t)$ é denominada a força generalizada correspondente a $q_n(t)$

$$Q_n(t) = \int_0^l f(x, t) W_n(x) dx \quad (8.115)$$

e a constante b é dada por

$$b = \int_0^l W_n^2(x) dx \quad (8.116)$$

A Equação (8.114) pode ser identificada como, em essência, a mesma equação de movimento de um sistema não amortecido com um grau de liberdade. Utilizando a integral de Duhamel, a solução da Equação (8.114) pode ser expressa como

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\rho Ab \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (8.117)$$

onde os dois primeiros termos do lado direito da Equação (8.117) representam a vibração transitória ou livre (resultante das condições iniciais), e o terceiro termo denota a vibração em regime permanente (resultante da função forçante). Uma vez resolvida a Equação (8.117) para $n = 1, 2, \dots$, a solução total pode ser determinada pela Equação (8.110).

EXEMPLO 8.8

Vibração forçada de uma viga simplesmente apoiada

Determine a resposta de regime permanente de uma viga pinada-pinada sujeita a uma força harmônica $f(x, t) = f_0 \sin \omega t$ aplicada em $x = a$, como mostra a Figura 8.17.

Solução:

Abordagem: Método de superposição de modo.

As funções modais normais de uma viga pinada-pinada são dadas por (ver Figura 8.15; também Problema 8.31)

$$W_n(x) = \sin \beta_n x = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (E.1)$$

onde

$$\beta_n l = n\pi \quad (E.2)$$

A força generalizada $Q_n(t)$, dada pela Equação (8.115), torna-se

$$Q_n(t) = \int_0^l f(x, t) \sin \beta_n x dx = f_0 \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \omega t \quad (E.3)$$

A resposta de regime permanente da viga é dada pela Equação (8.117)

$$q_n(t) = \frac{1}{\rho Ab \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (E.4)$$

onde

$$b = \int_0^l W_n^2(x) dx = \int_0^l \sin^2 \beta_n x dx = \frac{l}{2} \quad (E.5)$$

A solução da Equação (E.4) pode ser expressa como

$$q_n(t) = \frac{2f_0}{\rho Al} \frac{\sin \frac{n\pi a}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (E.6)$$

Assim, a resposta da viga é dada pela Equação (8.110):

$$w(x, t) = \frac{2f_0}{\rho Al} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \omega t \quad (E.7)$$

8.5.7 Efeito da força axial

O problema de vibrações de uma viga sob a ação de força axial encontra aplicação no estudo das vibrações de cabos e arames de estai. Por exemplo, embora as vibrações de um cabo possam ser determinadas tratando-o como uma corda equivalente, muitos cabos falharam em razão da fadiga causada pela flexão alternada. A flexão alternada é produzida pela irradiação regular de vórtices do cabo sob um vento leve. Portanto, devemos considerar os efeitos da força axial e da resistência à flexão sobre as vibrações laterais no estudo da falha de cabos por fadiga.

Para determinar o efeito de uma força axial $P(x, t)$ sobre as vibrações de flexão de uma viga, considere a equação de

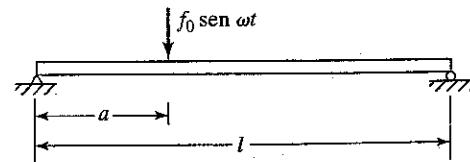


FIGURA 8.17 Viga pinada-pinada sob força harmônica.

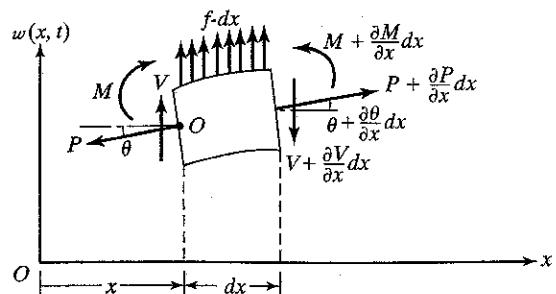
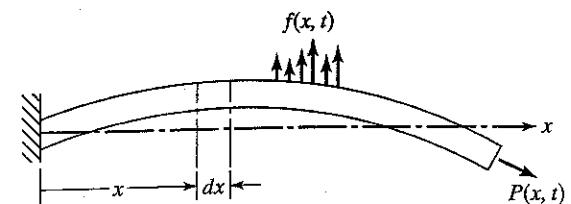


FIGURA 8.18 Um elemento de uma viga sob carga axial.

movimento de um elemento de viga, como mostrado na Figura 8.18. Para o movimento vertical, temos

$$\begin{aligned} -(V + dV) + f dx + V + (P + dP) \operatorname{sen}(\theta + d\theta) \\ - P \operatorname{sen} \theta = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8.118)$$

e para o movimento rotacional em relação a 0,

$$(M + dM) - (V + dV) dx + f dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (8.119)$$

Para pequenas deflexões,

$$\operatorname{sen}(\theta + d\theta) \approx \theta + d\theta = \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

Com isso, as equações (8.118), (8.119) e (8.75) podem ser combinadas para obter uma única equação diferencial de movimento:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f \quad (8.120)$$

Para a vibração livre de uma viga uniforme, a Equação (8.120) reduz-se a

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8.121)$$

A solução da Equação (8.121) pode ser obtida usando o método de separação de variáveis como

$$w(x, t) = W(x)(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) \quad (8.122)$$

A substituição da Equação (8.122) na Equação (8.121) dá

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \rho A \omega^2 W = 0 \quad (8.123)$$

Considerando que a solução $W(x)$ seja

$$W(x) = Ce^{sx} \quad (8.124)$$

na Equação (8.123), a equação auxiliar pode ser obtida:

$$s^4 - \frac{P}{EI} s^2 - \frac{\rho A \omega^2}{EI} = 0 \quad (8.125)$$

As raízes da Equação (8.125) são

$$s_1^2, s_2^2 = \frac{P}{2EI} \pm \left(\frac{P^2}{4EI^2} + \frac{\rho A \omega^2}{EI} \right)^{1/2} \quad (8.126)$$

e, portanto, a solução pode ser expressa (com valor absoluto de s_2) como

$$\begin{aligned} W(x) = C_1 \cosh s_1 x + C_2 \operatorname{senh} s_1 x + C_3 \cos s_2 x \\ + C_4 \operatorname{sen} s_2 x \end{aligned} \quad (8.127)$$

onde as constantes C_1 a C_4 devem ser determinadas pelas condições de contorno.

EXEMPLO 8.9

Viga sujeita a uma força compressiva axial

Determine as freqüências naturais de uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma força compressiva axial.

Solução: As condições de contorno são

$$W(0) = 0 \quad (E.1)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2}(0) = 0 \quad (E.2)$$

$$W(l) = 0 \quad (E.3)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2}(l) = 0 \quad (E.4)$$

As equações (E.1) e (E.2) exigem que $C_1 = C_3 = 0$ na Equação (8.127) e, portanto,

$$W(x) = C_2 \operatorname{senh} s_1 x + C_4 \operatorname{sen} s_2 x \quad (E.5)$$

A aplicação das equações (E.3) e (E.4) à Equação (E.5) dá como resultado

$$\operatorname{senh} s_1 l \cdot \operatorname{sen} s_2 l = 0 \quad (E.6)$$

Visto que $\operatorname{senh} s_1 l > 0$ para todos os valores de $s_1 l \neq 0$, as únicas raízes para essa equação são

$$s_2 l = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (E.7)$$

Assim, as equações (E.7) e (8.126) dão as freqüências naturais de vibração:

$$\omega_n = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left(n^4 + \frac{n^2 Pl^2}{\pi^2 EI} \right)^{1/2} \quad (E.8)$$

Uma vez que a força axial P é compressiva, P é negativa. Ademais, pela resistência dos materiais, a menor carga de flambagem de Euler para uma viga simplesmente apoiada é dada por [8.9]

$$P_{\text{cri}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (E.9)$$

Assim, a Equação (E.8) pode ser escrita como

$$\omega_n = \frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \left(n^4 - n^2 \frac{P}{P_{\text{cri}}} \right)^{1/2} \quad (E.10)$$

Tomando o presente exemplo como base, podemos fazer as seguintes observações:

1. Se $P = 0$, a freqüência natural será a mesma que a de uma viga simplesmente apoiada dada na Figura 8.15.
2. Se a $EI = 0$, a freqüência natural (ver Equação E.8) reduz-se à de uma corda muito retesada.
3. Se $P > 0$, a freqüência natural aumenta à medida que a força de tração enrijece a viga.
4. Quando $P \rightarrow P_{\text{cri}}$, a freqüência natural aproxima-se de zero para $n = 1$.

8.5.8. Efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento

Se as dimensões da seção transversal não forem pequenas em comparação com o comprimento da viga, precisamos considerar os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento. O procedimento, apresentado por Timoshenko [8.10], é conhecido como *teoria da viga grossa ou teoria da viga de Timoshenko*. Considere o elemento da viga mostrado na Figura 8.19. Se o efeito da deformação por cisalhamento for desprezado, a tangente à linha central defletida $O'T$ coincide com a normal à face $Q'R'$ (visto que seções transversais normais à linha central permanecem normais mesmo após deformação). Devido à deformação por cisalhamento, a tangente à linha central deformada $O'T$ não será perpendicular à face $Q'R'$. O ângulo γ entre a tangente à linha central deformada ($O'T$) e a normal à face ($O'N$) denota a deformação por cisalhamento do elemento. Visto que o cisalhamento positivo na face direita $Q'R'$ age para baixo, temos, pela Figura 8.19,

$$\gamma = \phi - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8.128)$$

onde ϕ denota a inclinação da curva de deflexão resultante somente da deformação por flexão. Observe que, em função apenas do cisalhamento, o elemento sofre distorção, mas nenhuma rotação.

O momento fletor M e a força de cisalhamento V estão relacionados com ϕ e w pelas fórmulas²

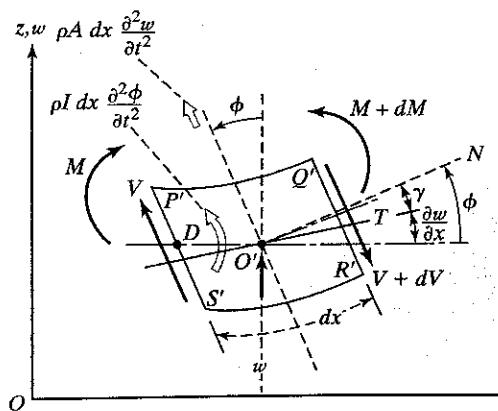


FIGURA 8.19 Um elemento de viga de Timoshenko.

² A Equação (8.129) é semelhante à Equação (8.75). A Equação (8.130) pode ser obtida da seguinte maneira:

força de cisalhamento = tensão de cisalhamento × área
= deformação por cisalhamento × módulo de elasticidade transversal × área

ou

$$V = \gamma G A$$

Essa equação é modificada para $V = kAG\gamma$ pela introdução de um fator k do lado direito para levar em conta a forma da seção transversal.

$$M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8.129)$$

e

$$V = kAG\gamma = kAG \left(\phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (8.130)$$

onde G denota o módulo de elasticidade transversal do material da viga e k é uma constante, também conhecida como *coeficiente de cisalhamento de Timoshenko*, que depende do formato da seção transversal. Para uma seção retangular, o valor de k é 5/6; para uma seção circular, é 9/10 [8.11].

As equações de movimento para o elemento mostrado na Figura 8.19 podem ser deduzidas da seguinte maneira:

1. Para translação na direção z :

$$-[V(x, t) + dV(x, t)] + f(x, t) dx + V(x, t)$$

$$= \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

= Inércia de translação do elemento (8.131)

2. Para rotação em relação a uma linha que passa pelo ponto D e é paralela ao eixo y :

$$[M(x, t) + dM(x, t)] + [V(x, t) + dV(x, t)] dx$$

$$+ f(x, t) dx \frac{dx}{2} - M(x, t)$$

$$= \rho I(x) dx \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

= Inércia de rotação do elemento (8.132)

Usando as relações

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad \text{e} \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

juntamente com as equações (8.129) e (8.130) e desprezando termos que envolvam potências ao quadrado de dx , as equações (8.131) e (8.132) podem ser expressas como

$$-kAG \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.133)$$

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - kAG \left(\phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (8.134)$$

Resolvendo a Equação (8.133) para $\partial \phi / \partial x$ e substituindo o resultado na Equação (8.134), obtemos a equação de movimento desejada para a vibração forçada de uma viga uniforme:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\rho I}{kAG} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - f = 0 \quad (8.135)$$

Para vibração livre, $f = 0$, e a Equação (8.135) reduz-se a

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (8.136)$$

As seguintes condições de contorno devem ser aplicadas na solução da Equação (8.135) ou (8.136):

- Extremidade fixa:

$$\phi = w = 0$$

- Extremidade simplesmente apoiada:

$$EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = w = 0$$

- Extremidade livre:

$$kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

EXEMPLO 8.10

Freqüências naturais de uma viga simplesmente apoiada

Determine os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento sobre as freqüências naturais de uma viga uniforme simplesmente apoiada.

Solução: Definindo

$$\alpha^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad \text{e} \quad r^2 = \frac{I}{A} \quad (E.1)$$

a Equação (8.136) pode ser escrita como

$$\alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho r^2}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (E.2)$$

Podemos expressar a solução da Equação (E.2) como

$$w(x, t) = C \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \omega_n t \quad (E.3)$$

que satisfaz as condições de contorno necessárias em $x = 0$ e $x = l$. Aqui, C é uma constante e ω_n é a n -ésima freqüência natural. Substituindo a Equação (E.3) na Equação (E.2), obtemos a equação de freqüência:

$$\omega_n^4 \left(\frac{\rho r^2}{kG} \right) - \omega_n^2 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{E}{kG} \right) + \left(\frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4} \right) = 0 \quad (E.4)$$

Podemos ver que a Equação (E.4) é uma equação quadrática em ω_n^2 e para qualquer n dado; há dois valores de ω_n que satisfazem a Equação (E.4). O valor menor corresponde ao modo de deformação por flexão, ao passo que o maior corresponde ao modo de deformação por cisalhamento.

Os valores da razão entre ω_n dada pela Equação (E.4) e a freqüência natural dada pela teoria clássica (na Figura 8.15) são apresentados em gráfico para os valores de E/kG na Figura 8.20 [8.22].³

Observe os seguintes aspectos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento:

- Se for considerado somente o efeito da inércia de rotação, a equação de movimento resultante não contém nenhum termo envolvendo o coeficiente de cisalhamento k . Por consequência, obtemos (pela Equação 8.136):

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (E.5)$$

Nesse caso, a equação de freqüência (E.4) reduz-se a

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} \right)} \quad (E.6)$$

- Se for considerado apenas o efeito da deformação por cisalhamento, a equação de movimento resultante não contém os termos que se originam de $\rho I(\partial^2 \phi / \partial t^2)$ na

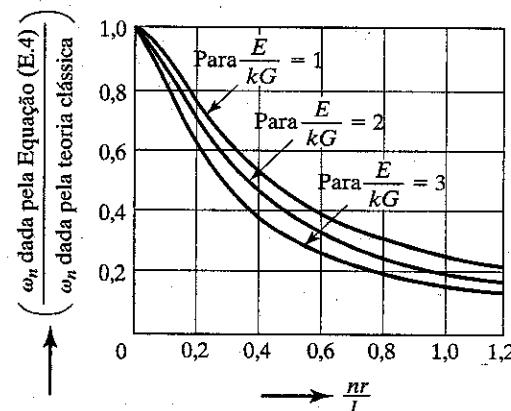


FIGURA 8.20 Variação de freqüência.

³ A teoria usada para a dedução da equação de movimento (8.76), que despreza os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento é denominada *teoria clássica da viga fina* ou *teoria da viga fina de Euler-Bernoulli* ou *teoria da viga fina*.

Equação (8.134). Assim, obtemos a equação de movimento

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{EI\rho}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (\text{E.7})$$

e a equação de freqüência correspondente

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{E}{kG} \right)} \quad (\text{E.8})$$

3. Se forem desprezados os efeitos da inércia de rotação, bem como os da deformação por cisalhamento, a Equação (8.136) reduz-se à equação de movimento clássica, Equação (8.78)

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{E.9})$$

e a Equação (E.4), a

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4} \quad (\text{E.10})$$

8.5.9 Outros efeitos

A vibração transversal de vigas cônicas é apresentada nas Referências [8.12, 8.14]. As freqüências naturais de vigas contínuas são discutidas por Wang [8.15]. A resposta dinâmica de vigas apoiadas em fundação elástica é considerada na Referência [8.16]. O efeito da flexibilidade do apoio sobre as freqüências naturais de vigas é apresentado em [8.18, 8.19].

Uma abordagem do problema de vibrações naturais de um sistema de elasticidade ligado a vigas de Timoshenko é dada na Referência [8.20]. Uma comparação entre as soluções exata e aproximada de vigas vibratórias é dada por Hutchinson [8.30]. A vibração de regime permanente de vigas amortecidas é considerada na Referência [8.21].

8.6 Vibração de membranas

Uma membrana é uma placa que está sujeita a uma tensão e cuja resistência à flexão é desprezível. Por isso, a relação existente entre uma membrana e uma placa é a mesma que existe entre uma corda e uma viga. O couro de um tambor é um exemplo de uma membrana.

8.6.1 Equação de movimento

Para deduzir a equação de movimento de uma membrana, considere que ela está envolvida por uma curva plana S no plano xy , como mostra a Figura 8.21. Vamos denotar por $f(x, y, t)$ a carga de pressão que age na direção z e por P a intensidade de tensão em um ponto que é igual ao produto da tensão de tração e da espessura da membrana. A magnitude de P normalmente é constante em toda a membrana, como em um couro de tambor. Se considerarmos uma área elemental $dx dy$, forças de magnitude $P dx$ e $P dy$ agem sobre os lados paralelos aos eixos y e x , respectivamente, como mostra a Figura 8.21. As forças resultantes que agem ao longo da direção z devido a essas forças são

$$\left(P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \right) \quad \text{e} \quad \left(P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy \right)$$

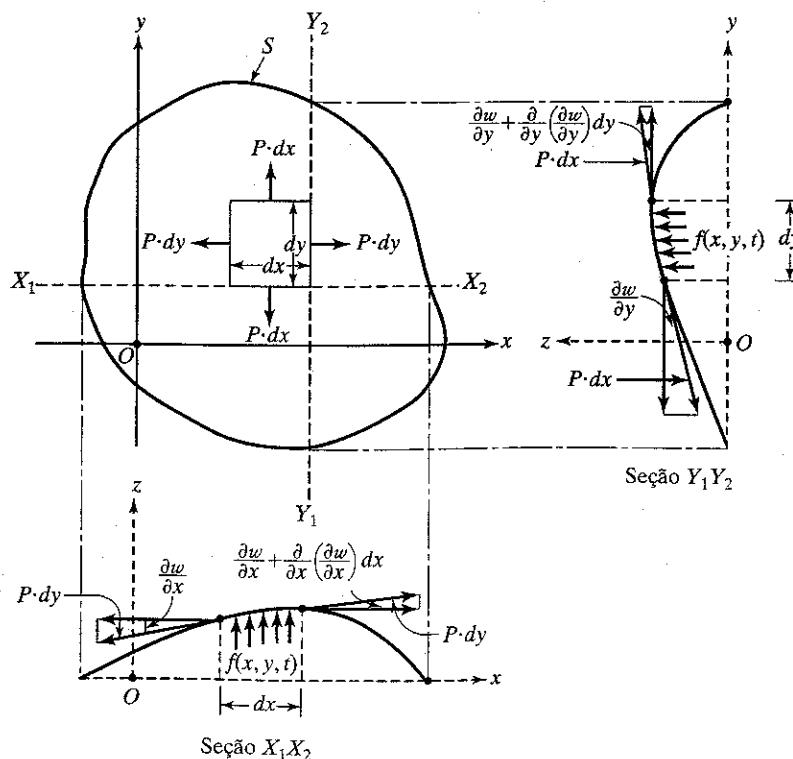


FIGURA 8.21 Uma membrana sob tensão uniforme.

A força devida à pressão ao longo da direção z é $f(x, y, t)$ $\frac{\partial w}{\partial x} dy$ e a força de inércia é

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy$$

onde $\rho(x, y)$ é a massa por unidade de área. A equação de movimento para a vibração transversal forçada da membrana pode ser obtida

$$P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.137)$$

Se a força externa $f(x, y, t) = 0$, a Equação (8.137) dá a equação de vibração livre

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.138)$$

onde

$$c = \left(\frac{P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (8.139)$$

As equações (8.137) e (8.138) podem ser expressas como

$$P \nabla^2 w + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.140)$$

e

$$c^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.141)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (8.142)$$

é o operador laplaciano.

8.6.2 Condições iniciais e condições de contorno

Visto que a equação de movimento, Equação (8.137) ou (8.138), envolve derivadas parciais de segunda ordem em relação a t , x e y , precisamos especificar duas condições iniciais e quatro condições de contorno para determinar uma solução única do problema. Normalmente, o deslocamento e a velocidade da membrana em $t = 0$ são especificadas como $w_0(x, y)$ e $\dot{w}_0(x, y)$. Por consequência, as condições iniciais são dadas por

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y) \quad (8.143)$$

As condições de contorno são dos seguintes tipos:

1. Se a membrana for fixa em qualquer ponto (x_1, y_1) sobre um segmento do contorno, temos

$$w(x_1, y_1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.144)$$

2. Se a membrana for livre para defletir transversalmente (na direção z) em um ponto diferente (x_2, y_2) do contorno,

a componente da força componente na direção z deve ser zero. Assim,

$$P \frac{\partial w}{\partial n}(x_2, y_2, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.145)$$

onde $\partial w / \partial n$ representa a derivada de w em relação a uma direção n normal ao contorno no ponto (x_2, y_2) .

A solução da equação de movimento da membrana vibratória foi apresentada nas Referências [8.23–8.25]. ■

EXEMPLO 8.11

Vibrações livres de uma membrana retangular

Determine a solução de vibração livre de uma membrana retangular de lados a e b ao longo dos eixos x e y , respectivamente.

Solução: Utilizando o método de separação de variáveis, podemos considerar que $w(x, y, t)$ é

$$w(x, y, t) = W(x, y) T(t) = X(x) Y(y) T(t) \quad (E.1)$$

Usando as equações (E.1) e (8.138), obtemos

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 \quad (E.2)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \beta^2 Y(y) = 0 \quad (E.3)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (E.4)$$

onde α^2 e β^2 são constantes relacionadas com ω^2 da seguinte maneira:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 \quad (E.5)$$

As soluções das equações (E.2) a (E.4) são dadas por

$$X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x \quad (E.6)$$

$$Y(y) = C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y \quad (E.7)$$

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (E.8)$$

onde as constantes C_1 a C_4 , A e B podem ser determinadas pelas condições iniciais e de contorno. ■

8.7 Método de Rayleigh

O método de Rayleigh pode ser aplicado para determinar a freqüência natural fundamental de sistemas contínuos. Esse método é muito mais simples do que a análise exata para sistemas com distribuições variáveis de massa e rigidez. Embora o método seja aplicável a todos os sistemas contínuos, nesta seção nós o aplicaremos somente a vigas.⁴ Considere a viga

⁴ Uma abordagem de equação integral para a determinação da freqüência fundamental de vigas vibratórias é apresentada por Penny e Reed [8.26].

mostrada na Figura 8.14. Para aplicar o método de Rayleigh, precisamos derivar expressões para a máxima energia cinética, para a máxima energia potencial e para o quociente de Rayleigh. A energia cinética da viga pode ser expressa como

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^2 \rho A(x) dx \quad (8.146)$$

A máxima energia cinética pode ser determinada supondo uma variação harmônica $w(x, t) = W(x) \cos \omega t$:

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \rho A(x) W^2(x) dx \quad (8.147)$$

A energia potencial da viga V é igual ao trabalho realizado na deformação da viga. Desprezando o trabalho realizado pelas forças de cisalhamento, temos

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l M d\theta \quad (8.148)$$

onde M é o momento fletor dado pela Equação (8.75) e θ é a inclinação da viga deformada, dada por $\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$. Assim, a Equação (8.148) pode ser reescrita como

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (8.149)$$

Visto que o máximo valor de $w(x, t)$ é $W(x)$, o máximo valor de V é dado por

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (8.150)$$

Igualando V_{\max} e T_{\max} , obtemos o quociente de Rayleigh:

$$R(\omega) = \omega^2 = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho A (W(x))^2 dx} \quad (8.151)$$

Assim, a freqüência natural da viga pode ser determinada tão logo a deflexão $W(x)$ seja conhecida. Em geral, $W(x)$ não é conhecida e, por consequência, deve ser suposta. De modo geral, considera-se a forma de equilíbrio estático para $W(x)$ para obter a freqüência fundamental. Devemos observar que a forma suposta $W(x)$ introduz, não intencionalmente, uma restrição ao sistema (que equivale a somar rigidez adicional ao sistema) e, portanto, a freqüência dada pela Equação (8.151) é mais alta que o valor exato [8.27].

Para uma viga escalonada, a Equação (8.151) pode ser escrita mais convenientemente como

$$R(\omega) = \omega^2$$

$$= \frac{E_1 I_1 \int_0^{l_1} \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx + E_2 I_2 \int_{l_1}^{l_2} \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx + \dots}{\rho A_1 \int_0^{l_1} W^2 dx + \rho A_2 \int_{l_1}^{l_2} W^2 dx + \dots} \quad (8.152)$$

onde E_i, I_i, A_i e l_i correspondem ao i -ésimo trecho ($i = 1, 2, \dots$). ■

EXEMPLO 8.12

Freqüência fundamental de uma viga côncica

Determine a freqüência fundamental de vibração transversal da viga não-uniforme em balanço mostrada a Figura 8.22, usando a forma de deflexão $W(x) = (1 - x/l)^2$.

Solução: Pode-se constatar que a forma de deflexão dada satisfaz as condições de contorno da viga. A área da seção transversal A e o momento de inércia I da viga podem ser expressos como

$$A(x) = \frac{hx}{l}, \quad I(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{hx}{l} \right)^3 \quad (E.1)$$

Assim, o quociente de Rayleigh dá

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l E \left(\frac{h^3 x^3}{12 l^3} \right) \left(\frac{2}{l^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho \left(\frac{hx}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right)^4 dx} = 2,5 \frac{Eh^2}{\rho l^4}$$

ou

$$\omega = 1,5811 \left(\frac{Eh^2}{\rho l^4} \right)^{1/2} \quad (E.2)$$

Sabe-se que o valor exato da freqüência, para esse caso [8.2], é

$$\omega_1 = 1,5343 \left(\frac{Eh^2}{\rho l^4} \right)^{1/2} \quad (E.3)$$

Assim, podemos ver que o valor de ω_1 dado pelo método de Rayleigh é 3,0503 por cento mais alto que o valor exato.

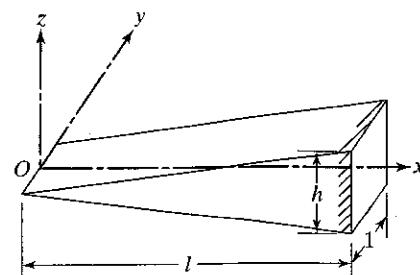


FIGURA 8.22 Viga côncica em balanço. ■

8.8 O método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz pode ser considerado uma extensão do método de Rayleigh. Ele é baseado na premissa de que se pode obter uma aproximação mais precisa do modo natural exato pela superposição de várias funções presumidas do que com a utilização de uma única função presumida, como no método de Rayleigh. Se as funções presumidas forem escolhidas adequadamente, esse método dá não somente o valor aproximado da freqüência fundamental, mas também os valores aproximados das freqüências naturais e das formas modais mais altas. Pode-se usar um número arbitrário de funções, e o número de freqüências que pode ser obtido é igual ao número de funções usadas. Um grande número de funções, embora envolva mais trabalho de cálculo, gera resultados mais precisos.

No caso da vibração transversal de vigas, se n funções forem escolhidas para aproximar a deflexão $W(x)$, podemos escrever

$$W(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) + \dots + c_n w_n(x) \quad (8.153)$$

onde $w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)$ são funções linearmente independentes conhecidas de coordenada espacial x , que satisfazem todas as condições de contorno do problema e c_1, c_2, \dots, c_n são coeficientes a determinar. Os coeficientes c_i têm de ser determinados de modo que as funções presumidas $w_i(x)$ dêem a melhor aproximação possível para os modos naturais. Para obter tais aproximações, os coeficientes c_i são ajustados, e a freqüência natural é mantida estacionária nos modos naturais. Para isso, substituímos a Equação (8.153) no quociente de Rayleigh, Equação (8.151), e a expressão resultante é diferenciada parcialmente em relação a cada um dos coeficientes c_i . Para manter freqüência natural estacionária, igualamos cada uma das derivadas parciais a zero e obtemos

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.154)$$

A Equação (8.154) denota um conjunto de n equações algébricas lineares com coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n e também contém a quantidade indeterminada ω^2 . Isso define um problema algébrico de autovalor semelhante aos que surgem em sistemas com vários graus de liberdade. Em geral, a solução desse problema de autovalor dá n freqüências naturais $\omega_i^2, i = 1, 2, \dots, n$ e n autovetores, cada um contendo um conjunto de números para c_1, c_2, \dots, c_n . Por exemplo, o i -ésimo autovetor correspondente a ω_i pode ser expresso como

$$\vec{C}^{(i)} = \begin{Bmatrix} c_1^{(i)} \\ c_2^{(i)} \\ \vdots \\ c_n^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (8.155)$$

Quando esse autovetor, os valores de $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_n^{(i)}$, é substituído na Equação (8.153), obtemos a melhor aproximação possível para o i -ésimo modo da viga. Um método para reduzir o tamanho do autoproblema no método de Rayleigh-Ritz é apresentado na Referência [8.28]. Uma nova abordagem, que combina as vantagens da análise de Rayleigh-Ritz com o método do elemento finito, é dada na Referência [8.29]. O procedimento de Rayleigh-Ritz básico é ilustrado com a ajuda do exemplo dado seguir.

EXEMPLO 8.13

As duas primeiras freqüências de uma viga cônica

Determine as freqüências naturais da viga cônica em balanço do Exemplo 8.12 usando o método de Rayleigh-Ritz.

Solução: Consideramos que as funções de deflexão $w_i(x)$ são

$$w_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (E.1)$$

$$w_2(x) = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (E.2)$$

$$w_3(x) = \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (E.3)$$

Se usarmos uma aproximação de um termo

$$W(x) = c_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (E.4)$$

a freqüência fundamental será a mesma que a determinada no Exemplo 8.12. Agora, usamos a aproximação de dois termos

$$W(x) = c_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + c_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (E.5)$$

O quociente de Rayleigh é dado por

$$R[W(x)] = \omega^2 = \frac{X}{Y} \quad (E.6)$$

onde

$$X = \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (E.7)$$

$$Y = \int_0^l \rho A(x) [W(x)]^2 dx \quad (E.8)$$

Se a Equação (E.5) for substituída, a Equação (E.6) torna-se uma função de c_1 e c_2 . As condições que tornam ω^2 ou $R[W(x)]$ estacionária são

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial c_1} = \frac{Y \frac{\partial X}{\partial c_1} - X \frac{\partial Y}{\partial c_1}}{Y^2} = 0 \quad (E.9)$$

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial c_2} = \frac{Y \frac{\partial X}{\partial c_2} - X \frac{\partial Y}{\partial c_2}}{Y^2} = 0 \quad (E.10)$$

Essas equações podem ser reescritas como

$$\frac{\partial X}{\partial c_1} - \frac{X}{Y} \frac{\partial Y}{\partial c_1} = \frac{\partial X}{\partial c_1} - \omega^2 \frac{\partial Y}{\partial c_1} = 0 \quad (\text{E.11})$$

$$\frac{\partial X}{\partial c_2} - \frac{X}{Y} \frac{\partial Y}{\partial c_2} = \frac{\partial X}{\partial c_2} - \omega^2 \frac{\partial Y}{\partial c_2} = 0 \quad (\text{E.12})$$

Substituindo a Equação (E.5) nas equações (E.7) e (E.8), obtemos

$$X = \frac{Eh^3}{3l^3} \left(\frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^2}{10} + \frac{c_1 c_2}{5} \right) \quad (\text{E.13})$$

$$Y = \rho h l \left(\frac{c_1^2}{30} + \frac{c_2^2}{280} + \frac{2c_1 c_2}{105} \right) \quad (\text{E.14})$$

Com a ajuda das equações (E.13) e (E.14), as equações (E.11) e (E.12) podem ser expressas como

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \omega^2 \cdot \frac{1}{15} \right) & \left(\frac{1}{5} - \omega^2 \cdot \frac{2}{105} \right) \\ \left(\frac{1}{5} - \omega^2 \cdot \frac{2}{105} \right) & \left(\frac{1}{5} - \omega^2 \cdot \frac{1}{140} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.15})$$

onde

$$\omega^2 = \frac{3\omega^2 \rho l^4}{Eh^2} \quad (\text{E.16})$$

Igualando o determinante da matriz na Equação (E.15) a zero, obtemos a equação de freqüência

$$\frac{1}{8.820} \omega^4 - \frac{13}{1.400} \omega^2 + \frac{3}{50} = 0 \quad (\text{E.17})$$

As raízes da Equação (E.17) são dadas por $\omega_1 = 2,6599$ e $\omega_2 = 8,6492$. Assim, as freqüências naturais da viga côncava são

$$\omega_1 \approx 1,5367 \left(\frac{Eh^2}{\rho l^4} \right)^{1/2} \quad (\text{E.18})$$

$$\omega_2 \approx 4,9936 \left(\frac{Eh^2}{\rho l^4} \right)^{1/2} \quad (\text{E.19})$$

8.9 Exemplos utilizando MATLAB

EXEMPLO 8.14

Representação gráfica da resposta de vibração forçada de uma viga simplesmente apoiada

Utilizando MATLAB, obtenha um gráfico da resposta de regime permanente da viga pinada-pinada considerada no Exemplo 8.8, Equação (E.7), para $n = 1, 2$ e 5 .

