Trabalho de Vibrações Mecânicas

Prof. Dr. Ing. Fernando A. N. Castro Pinto

Definindo as constantes do problema:

```
m(*= 5737 *);
ixx (*=8359.73*);
iyy(*=8946.76*);
izz(*=6735.07*);
ixy(*=-257.68*);
ixz(*=460.34*);
iyz(*=-1211.23*);

i = {{ixx, ixy, ixz}, {ixy, iyy, iyz}, {ixz, iyz, izz}};

a(*=2*);
b(*=1.76*);
c(*=1.31*);
(*Posição do Centro de Massa (CM_*_) descrito
 nas coordenadas do sistema original (x,y,z)*)

af(*=1.45*);
bf(*=1.90*);
cf(*=1*);
(*Ponto de aplicação da forca,
descrito nas coordenadas do sistema original (x,y,z)*)

Lx(*=3*);
Ly(*3*);
(*Dimensão do Bloco em x e y*)
```

Definindo as constantes das molas :

```
k1;
k2;
k3;
k4;
```

Definindo os vetores do problema:

```
g(*=9.81*);
grav = {0, 0, -g};(* vetor gravidade *)
peso = m * grav; (* vetor Peso *)
transz = {0, 0, z};
(* vetor posicao do centro de massa escrito no sistema X*,Y*,Z* *)
velz = {0, 0, z_p};(* z ponto,
1a derivada do vetor posicao do centro de massa *)
acelz = {0, 0, z_pp}; (* z dois pontos,
2a derivada do vetor posicao do centro de massa, aceleração vertical *)

rk1 = {-a, -b, -c};
rk2 = {Lx - a, -b, -c};
rk3 = {Lx - a, Ly - b, -c};
rk4 = {-a, Ly - b, -c};
(*Aqui estão os 4 vetores posicao das molas em
 relação ao sistema de coordenadas do CM (x*, y*, z*)*)
rf = {- (a - af), (bf - b), - (c - cf)};
(*Vetor posicao da forca exitação em relação
 ao sistema de coordenadas do CM (x*, y*, z*)*)

rpeso = {0, 0, 0};
 (*em relação ao CM*)

rotx = {teta, 0, 0};(*rotação em x*)
roty = {0, beta, 0};(*rotação em y*)
alphax = {teta_pp, 0, 0};(*aceleração angular em x*)
alphay = {0, beta_pp, 0};(*aceleração angular em y*)
(*Definindo os vetores de rotação em torno de X*e Y*: *)

Fexit = {0, 0, Amp * Cos[34 Pi * t]};
(*Forcas de exitação atuantes no problema*)
```

Com as dadas grandezas, podemos definir os deslocamentos delta de compressao/tração das molas de apoio do sistema, a partir da rotação do cubo rigido ao redor do seu centro de massa, nos angulos teta e beta, respectivamente, para X* e Y*, definidos anteriormente. (assumindo teta = Sin[teta] --> linearização do problema para angulos pequenos)

```
d1 = {0, 0, z - b * teta + a * beta};
d2 = {0, 0, z - b * teta - (Lx - a) * beta};
d3 = {0, 0, z + (Ly - b) * teta - (Lx - a) * beta};
d4 = {0, 0, z + (Ly - b) * teta + a * beta};

Fk1 = - k1 * d1;
Fk2 = -k2 * d2;
Fk3 = -k3 * d3;
Fk4 = -k4 * d4;
```

A nossa equação de movimento para o 1° grau de liberdade de translação em Z será:

```
(*Ao inves de fazer Somatorio de forcas = Ma,
para conseguir representar a equação fiz "Ma - Somatorio de Forcas = 0",
desse modo o lado esquerdo da equação fica representado pelas
 matrizes a seguir, e subentende-se que o lado direito sempre é
  igual a zero. O mesmo raciocinio vale para o calculo das equações
  de movimento dos graus de liberdade de rotação em X* e Y*)
```

```
M1 = Collect[m * acelz - (Fexit + Fk1 + Fk2 + Fk3 + Fk4), {z, z_pp, teta, beta, m}];
M1 // MatrixForm
```

```
(                                                              0
                                                               0
 beta (a k1 + a k4 - k2 (-a + Lx) - k3 (-a + Lx)) + (-b k1 - b k2 + k3 (-b + Ly) + k4 (-b + Ly)) te
```

A nossa equação de movimento para rotação em x* e y* será:

```
M2A = Collect[i.(alphax + alphay) - (Cross[rk1, Fk1] + Cross[rk2, Fk2] +
       Cross[rk3, Fk3] + Cross[rk4, Fk4] + Cross[rf, Fexit]),
    {teta, teta_pp, beta, beta_pp, z, z_pp, k1, k2, k3, k4, Amp Cos[34 π t]}];
M2A // MatrixForm
```

```
( beta (-a b k1 + k2 (-a b + b Lx) + k4 (-a b + a Ly) + k3 (-a b + b Lx + a Ly - Lx Ly)) + (b² k1 + b²
   beta (a² k1 + a² k4 + k2 (a² - 2 a Lx + Lx²) + k3 (a² - 2 a Lx + Lx²)) + (-a b k1 + k2 (-a b + b Lx
```

Removendo os termos na posicao 3 do vetor, pois nao há aceleração angular em torno do eixo Z*, obtemos:

```
M2 = M2A - {0, 0, iyz beta_pp + ixz teta_pp};
M2 // MatrixForm
```

```
( beta (-a b k1 + k2 (-a b + b Lx) + k4 (-a b + a Ly) + k3 (-a b + b Lx + a Ly - Lx Ly)) + (b² k1 + b²
   beta (a² k1 + a² k4 + k2 (a² - 2 a Lx + Lx²) + k3 (a² - 2 a Lx + Lx²)) + (-a b k1 + k2 (-a b + b Lx
```

Com as equações de movimento nos três graus de liberdade, z, teta e beta, podemos escrever a notação matricial de modo a obter a formulação para os autovalores, que serão os quadrados das frequencias naturais do sistema.

Dessa forma possuimos tres equações de movimento:

```
MF = M1 + M2;
MF // MatrixForm
```

```
( beta (-a b k1 + k2 (-a b + b Lx) + k4 (-a b + a Ly) + k3 (-a b + b Lx + a Ly - Lx Ly)) + (b^2 k1 + b^2
  beta (a^2 k1 + a^2 k4 + k2 (a^2 - 2 a Lx + Lx^2) + k3 (a^2 - 2 a Lx + Lx^2)) + (-a b k1 + k2 (-a b + b Lx
                                                   beta (a k1 + a k4 - k2 (-a + Lx) - k3 (-a +
```

Podemos escrever a matriz de rigidez K como:

```
K =
  {{-a b k1 + k2 (-a b + b Lx) + k4 (-a b + a Ly) + k3 (-a b + b Lx + a Ly - Lx Ly), b^2 k1 + b^2 k2 +
      k3 (b^2 - 2 b Ly + Ly^2) + k4 (b^2 - 2 b Ly + Ly^2), -b k1 - b k2 + k3 (-b + Ly) + k4 (-b + Ly)},
   {a^2 k1 + a^2 k4 + k2 (a^2 - 2 a Lx + Lx^2) + k3 (a^2 - 2 a Lx + Lx^2),
    -a b k1 + k2 (-a b + b Lx) + k4 (-a b + a Ly) + k3 (-a b + b Lx + a Ly - Lx Ly),
    a k1 + a k4 + k2 (a - Lx) + k3 (a - Lx)}, {a k1 + a k4 - k2 (-a + Lx) - k3 (-a + Lx),
    -b k1 - b k2 + k3 (-b + Ly) + k4 (-b + Ly), k1 + k2 + k3 + k4}};
K // MatrixForm
```

```
( -a b k1 + k2 (-a b + b Lx) + k4 (-a b + a Ly) + k3 (-a b + b Lx + a Ly - Lx Ly)          b^2 k1 + b^2 l
          a^2 k1 + a^2 k4 + k2 (a^2 - 2 a Lx + Lx^2) + k3 (a^2 - 2 a Lx + Lx^2)          -a b k1 + k2 (-a b
                        a k1 + a k4 - k2 (-a + Lx) - k3 (-a + Lx)                                    -
```

E a matriz de Massa M como:

```
M = {{ixy, ixx , 0}, {iyy, ixy , 0}, {0, 0, m}};
M // MatrixForm
```

```
( ixy  ixx  0 )
( iyy  ixy  0 )
(  0    0   m )
```

A Força de excitação pode se expressa por:

```
F = {{Amp (b - bf) Cos[34 π t]}, {(-a + af) Amp Cos[34 π t]}, {-Amp Cos[34 π t]}};
F // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \text{Amp}\,(b - bf)\,\text{Cos}[34\,\pi\,t] \\ (-a + af)\,\text{Amp}\,\text{Cos}[34\,\pi\,t] \\ -\text{Amp}\,\text{Cos}[34\,\pi\,t] \end{pmatrix}$$

```
K // MatrixForm
M // MatrixForm
F // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -a\,b\,k1 + k2\,(-a\,b + b\,Lx) + k4\,(-a\,b + a\,Ly) + k3\,(-a\,b + b\,Lx + a\,Ly - Lx\,Ly) & b^2\,k1 + b^2 \\ a^2\,k1 + a^2\,k4 + k2\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2) + k3\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2) & -a\,b\,k1 + k2\,(-a\,b \\ a\,k1 + a\,k4 - k2\,(-a + Lx) - k3\,(-a + Lx) & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ixy & ixx & 0 \\ iyy & ixy & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Amp}\,(b - bf)\,\text{Cos}[34\,\pi\,t] \\ (-a + af)\,\text{Amp}\,\text{Cos}[34\,\pi\,t] \\ -\text{Amp}\,\text{Cos}[34\,\pi\,t] \end{pmatrix}$$

A nossa matriz A1 sera a inversa de M vezes a matriz K:

```
A1 = Inverse[M].K;
A1 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{ixx\,(a^2\,k1 + a^2\,k4 + k2\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2) + k3\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2))\,m}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} + \frac{ixy\,(-a\,b\,k1 + k2\,(-a\,b + b\,Lx) + k4\,(-a\,b + a\,Ly) + k3\,(-a\,b + b\,Lx + a\,Ly -}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} \\ \frac{ixy\,(a^2\,k1 + a^2\,k4 + k2\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2) + k3\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2))\,m}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} - \frac{iyy\,(-a\,b\,k1 + k2\,(-a\,b + b\,Lx) + k4\,(-a\,b + a\,Ly) + k3\,(-a\,b + b\,Lx + a\,Ly -}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} \\ \frac{(ixy^2 - ixx\,iyy)\,(a\,k1 + a\,k4 - k2\,(-a + Lx) - k3\,(-a + Lx))}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} \end{pmatrix}$$

E o nosso X_pp = - lambda X, ou seja, ficamos com a equação matricial [A - lambda I] [X] = 0

In[774]:=
```
lambda = {{l, 0, 0}, {0, l, 0}, {0, 0, l}};
lambda // MatrixForm;

A = A1 - lambda;
A // MatrixForm

(* o polinomio caracteristico de lambda que nos dará as 3
 frequencias naturais do sistema em função das rigidezas das molas *)
eq = Det[A];
Solve[eq == 0, l]
```

Out[777]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{l} -l - \frac{ixx\,(a^2 k1 + a^2 k4 + k2\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2) + k3\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2))\,m}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} + \frac{ixy\,(-a\,b\,k1 + k2\,(-a\,b + b\,Lx) + k4\,(-a\,b + a\,Ly) + k3\,(-a\,b + b\,Lx + a \ldots}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} \\ \frac{ixy\,(a^2 k1 + a^2 k4 + k2\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2) + k3\,(a^2 - 2\,a\,Lx + Lx^2))\,m}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} - \frac{iyy\,(-a\,b\,k1 + k2\,(-a\,b + b\,Lx) + k4\,(-a\,b + a\,Ly) + k3\,(-a\,b + b\,Lx + a\,Ly \ldots}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} \\ \frac{(ixy^2 - ixx\,iyy)\,(a\,k1 + a\,k4 + k2\,(-a + Lx) + k3\,(-a + Lx))}{ixy^2\,m - ixx\,iyy\,m} \end{array}\right.$$

Out[778]=

$$\Big\{\Big\{l \to \frac{1}{3\,(ixy^2 - ixx\,iyy)\,m}\big(ixy^2\,k1 - ixx\,iyy\,k1 + ixy^2\,k2 - ixx\,iyy\,k2 + ixy^2\,k3 - ixx\,iyy\,k3 + \ll 35 \gg + 2\,a\,ixy\,k3\,Ly\,m + 2\,b\,iyy\,k3\,Ly\,m + 2\,a\,ixy\,k4\,Ly\,m + 2\,b\,iyy\,k4\,Ly\,m - 2\,ixy\,k3\,Lx\,Ly\,m - iyy\,k3\,Ly^2\,m - iyy\,k4\,Ly^2\,m\big) + \frac{2^{1/3}\,(\ldots)}{3\,(\ldots + \ll 1 \gg + \sqrt{\ll 1 \gg})^{1/3}} - \frac{(\ldots + \ll 1 \gg + \sqrt{\ll 1 \gg})^{1/3}}{3\,2^{1/3}}\Big\}, \{l \to \ll 1 \gg\}, \Big\{l \to \frac{\ll 1 \gg}{3\,(ixy^2 - ixx\,iyy)\,m} - \frac{\ll 1 \gg \ll 1 \gg \ll 1 \gg}{\ll 1 \gg} + \frac{\ll 1 \gg \ll 1 \gg}{6\,2^{\ll 1 \gg}}\Big\}\Big\}$$

large output | show less | show more | show all | set size limit...