Gauss – módszer

Hevesi Anikó tanárnő jegyzete

A Gauss – módszer az egyenletrendszer mátrixát ekvivalens átalakítások segítségével úgy rendezi át, hogy a mátrix főátlójában egyesek, a diagonális alatt pedig nullákat kapjunk. A diagonális felett bármilyen szám valós lehet.

$$\left.\begin{matrix} 1 & . & . \\ 0 & 1 & . \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix}$$

Az ekvivalens átalakítások alkalmazása jól látható egy példán. Az egyenletrendszerünk:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 \phantom{{}- x_3} &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixa a következő:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A mátrix rendezését oszloponként végzem. Elöször az első oszlopot hozom a kívánt alakra, majd a másodikat,…

Elöször a főátlón lévő elem helyére kell egyest tennem. Ezt úgy érhetem el, hogy az első sort elosztom azzal a számmal, amely a főátlóban van. Előfordulhat, hogy a főátlóban lévő elem nulla. Ebben az esetben kicserélem a sort egy olyan alatta lévő sorral, ahol a megfelelő oszlopban található szám nem nulla. (Ha nem találok ilyet, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása) Ezután elérem a már említett módon, hogy a főátlón egyeseket kapjak

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7/2 \\ 3 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ezután az oszlop főátló alatii elemeit nullázom a következőképpen: minden sorból kivonom a diagonálison lelő elemet tartalmazó sor annyiszorosát, amilyen szám van azon a helyen, ahol nullát akarok kapni.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7/2 \\ 3 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & -1 & -5/2 \\ 0 & 3 & 1 & -5/2 \end{array}\right]$$

Így a mátrix első oszlopának alakja már megfelelő. A második oszlopban ugyanígy járok el. Kezdem a főátlón levő elemmel. A mi mátrixunkban ez nulla, tehát kicserélem a második sort a harmadikkal.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & -1 & -5/2 \\ 0 & 3 & 1 & -5/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 3 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & -1 & -5/2 \end{array}\right]$$

Végig osztom a sort mátrix[1,1]-vel (második sor második oszlop csak 0-tól indexelve), így a diagonálison egyeseket kapok.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 3 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & -1 & -5/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & -1 & -5/2 \end{array}\right]$$

Így folytatom a mátrix rendezését oszloponként, amíg a mátrix kívánt alakú nem lesz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{array}\right]$$

A főátlóban egyeseket kaptam, a főátló alatt pedig nullákat. A mátrixhoz tartozó egyenletrenszer a következő:

$$\begin{aligned} x_1 \ + \ 2x_2 \qquad\quad &= 7/2 \\ x_2 - 1/3x_3 &= \ -5/6 \\ x_3 &= 5/2 \end{aligned}$$

A mátrix utolsó sorában mindenhol nulla van, cska a főátlóban van egyes. Így az utolsó ismeretlen már ki van fejezve. A többi ismeretlen alulról felfelé haladva fokozatos visszahelyettesítéssel tudom kiszámolni. Az egyenletrenszer gyökei a mátrix n-ik oszlopában lesznek.

$$x_3 = \frac{5}{2}$$

$$x_2 + \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \ -\frac{5}{6}$$

$$x_2 = \ -\frac{10}{6}$$

$$x_1 = 2 \times \left(-\frac{10}{6}\right) + 0 \times \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$x_1 = \frac{41}{6}$$