Practica 4

Caballero Jimenez Oscar Emilio

6 de noviembre de 2023

1. Objetivos

- Calcular la transformada discreta directa e inversa de Fourier de una imagen manipulando sus componentes.
- Realizar operaciones de suavizado y de reducción de ruido en imágenes utilizando filtros en frecuencia.
- Realizar operaciones de detección de bordes en imágenes, tanto limpias como ruidosas, utilizando filtros en frecuencia.

2. Introducción

La contribución Joseph Fourier (1822) establece que cualquier función que se repite de manera periódica puede ser expresada como la suma de senos y/o cosenos de diferentes frecuencias cada una multiplicada por un coeficiente diferente. A lo anterior se le conoce como “series de Fourier”.

- Transformada discreta de Fourier en 2D. Las funciones pares que no son periódicas (pero cuya área bajo la curva es finita) pueden ser expresadas como la integral de senos y/o cosenos multiplicados por una función ponderada (pesos). A esta formulación se le conoce como "transformada de Fourier".

  La transformada de Fourier discreta de una función (imagen) $f(x, y)$ de tamaño $M \times N$ está dada por la ecuación:

  $$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

  para $u = 0, 1, 2, ..., M-1$ y $v = 0, 1, 2, ..., N-1$.

  De manera similar, dada $F(u, v)$, obtenemos $f(x, y)$ vía la transformada inversa discreta de Fourier:

  $$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

  para $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ y $y = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

  Las ecuaciones anteriores comprenden el par de transformadas discretas de Fourier bidimensionales (DFT). Las variables u y v son las variables de la transformada o variables de frecuencia, mientras que x y y son las variables espaciales o variables de la imagen.

  Se definen el espectro de Fourier, el ángulo de fase y el espectro de potencia de la siguiente manera, respectivamente:

  $$|F(u,v)| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

Donde $R(u,v)$ e $I(u,v)$ son las partes real e imaginaria de $F(u,v)$ respectivamente.

Es de práctica común multiplicar la función de entrada $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular la transformada de Fourier. De las propiedades de los exponentes tenemos:

$$\Im\left[f(x,y)(-1)^{x+y}\right] = F\left(u - M/2, v - N/2\right)$$

Donde $\Im[\bullet]$ denota la transformada de Fourier del argumento. Esta ecuación establece que el origen de la transformada de Fourier de $f(x,y)(-1)^{x+y}$ [que es $F(0,0)$] está localizada en $u = M-1$ y $v = N-1$. En otras palabras, multiplicando $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ hace que $F(u,v)$ se recorra a las coordenadas de frecuencia $(M/2, N/2)$ que es el centro del área 2D ocupada por la DFT.

- Filtrado en Frecuencia. Generalmente, es imposible establecer relaciones directas entre los componentes en los dominios espacial e de frecuencia de una imagen. Sin embargo, algunas relaciones entre los componentes de la frecuencia y ciertas características de la imagen pueden ser identificadas.

  Por ejemplo, las frecuencias en la transformada de Fourier pueden asociarse con patrones de variación en las intensidades de la imagen. La frecuencia más baja ($u = v = 0$) corresponde al promedio de los valores de gris de la imagen. A medida que nos alejamos del origen, las frecuencias están relacionadas con variaciones suaves en los tonos de gris. A mayores distancias del origen, las frecuencias altas corresponden a cambios rápidos o abruptos en los tonos de gris, como los bordes de los objetos y/o el ruido.

  El proceso de filtrado en el dominio de la frecuencia sigue los siguientes pasos:

  1. Multiplicar la imagen de entrada por $(-1)^{x+y}$ para centrar la transformación.
  2. Calcular $F(u,v)$, la Transformada de Fourier Discreta (TFD) de la imagen obtenida en el paso 1.
  3. Multiplicar $F(u,v)$ por la función filtro $H(u,v)$.
  4. Calcular la Transformada de Fourier Inversa (TFD inversa) del resultado obtenido en el paso 3.
  5. Obtener la parte real del resultado obtenido en el paso 4.
  6. Multiplicar el resultado obtenido en el paso 5 por $(-1)^{x+y}$.

La razón por la cual $H(u,v)$ se llama filtro (también se llama filtro de función de transferencia) es porque suprime ciertas frecuencias en la transformada y deja otras sin cambio. Sea $f(x,y)$ la imagen de entrada y $F(u,v)$ su transformada discreta de Fourier. La transformada de Fourier de la imagen de salida después de aplicar el filtro está dada por:

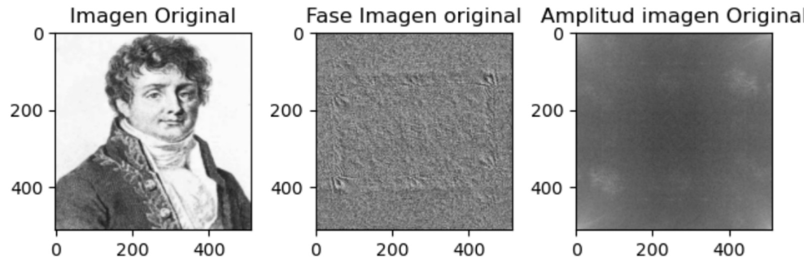
$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$

donde la multiplicación de H por F involucra funciones bidimensionales y está definida elemento a elemento.

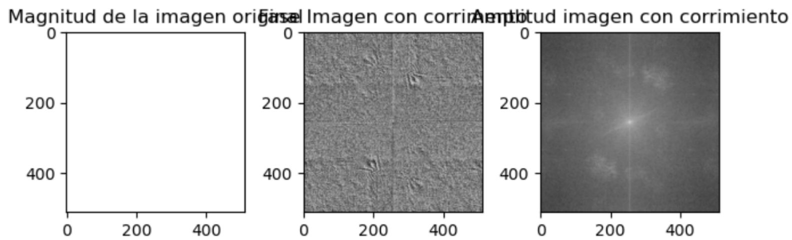
3. Desarrollo

Resuelve los problemas de la lista siguiente y describe tu solución en cada inciso. Los incisos en donde únicamente tengas que desplegar imágenes no requieren de ninguna descripción.[1]

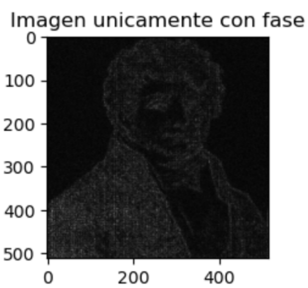
[1] Todos Los resultados se pueden observar mejor en el codigo de la practica



h (a) Incisos a y b



(b) Incisos c y d



(c) Inciso e

Figura 1: Todos los incisos del ejercicio 1

1. Calcular la transformada discreta de Fourier a la imagen del Sr. Fourier y generar el ejemplo visto del libro Castleman.

   a) La versión sin corrimiento de la amplitud y la fase de la imagen de entrada I.

   b) La versión con corrimiento de la amplitud y la fase de la imagen de entrada I.

   c) Regresar con la transformada inversa completa a la imagen original.

   d) Regresar con la transformada inversa sólo con amplitud.

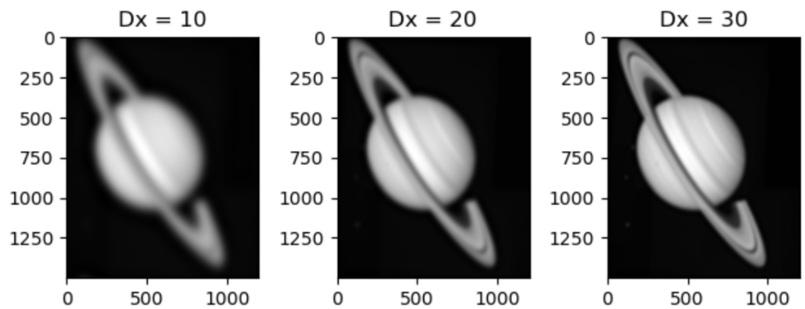
   e) Regresar con la transformada inversa sólo con la fase.

2. Aplicar a una imagen sin ruido y la misma imagen con ruido "sal y pimienta" filtros de suavizamiento y realce.

   a) Aplicar el filtro paso bajas Butterworth, para eliminación de ruido. Prueba para varios valores de frecuencia de corte D0 y para varios valores de orden n y establece cuales valores son mejores para la imagen en cuestión. Realiza el ejercicio para la imagen con y sin ruido.

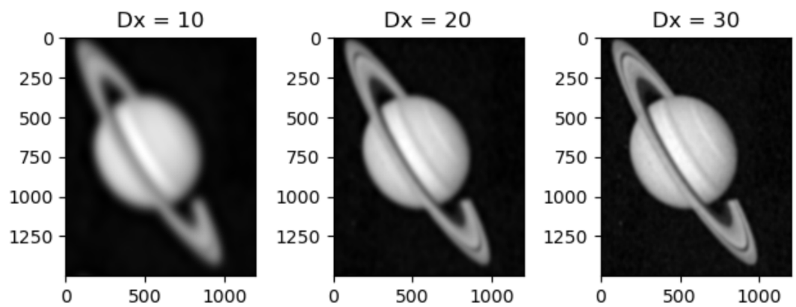
   b) Aplicar el filtro paso altas Butterworth para el realce de bordes. Prueba para varios valores de frecuencia de corte D0 y para varios valores de orden n y establece cuales valores son mejores para la imagen en cuestión.

   Para este segundo ejercicio, podemos notar, que en caso de **paso bajas**, es mejor que D_0 sea un valor alto, así el emborronamiento no es tanto y la imagen se conserva bien, ahora si lo que queremos es emborronar, con un valor bajo para D_0 basta.

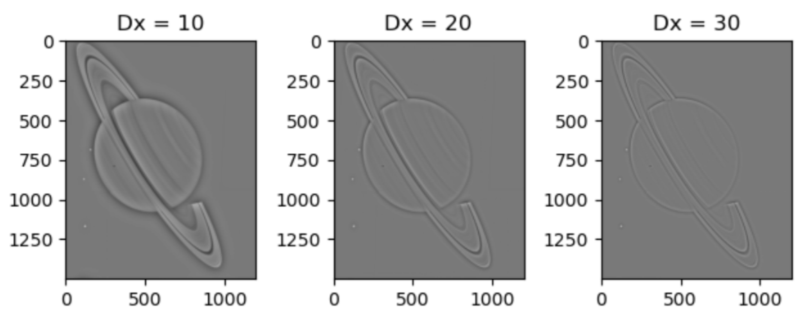


h

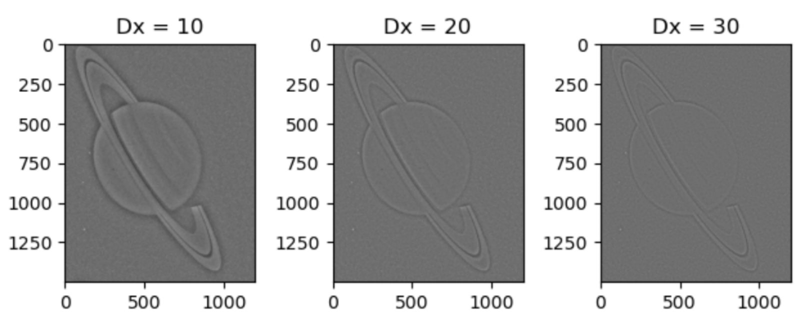
(a) Inciso a, Original



(b) Inciso a, con Ruido



(c) Inciso b, Original



(d) Inciso b, con Ruido

Figura 2: Todos los incisos del ejercicio 2

Para el caso de **paso altas** es mejor tener un valor bajo para D_0, dado que si le damos un valor mediano o grande, nuestra imagen se vuelve completamente gris y los bordes no resaltan, y en teoria, no queremos eso.

En ambos casos podemos observar que el uso de estos filtros, hacen que el ruido desaparezca.

4. Código

El Código de esta practica se encuentra en la carpeta */src*, también se puede encontrar en Github en este repositorio publico: https://github.com/DexenRoss/PDI

5. Conclusiones

En conclusión esta practica me enseño a poder obtener la fase, amplitud, magnitud de una imagen, así mismo, reconstruir la imagen de cada uno de los elementos antes mencionados, además, me pareció bastante interesante el proceso para lograr estos objetivos, por lo tanto, el primer objetivo de la practica se logro hasta este punto.

La parte de suavizado y detección de bordes también me pareció bastante interesante, a través de los filtros **paso bajas** y **paso altas** ver como una imagen se va emborronando y/o remarcando sus bordes dependiendo de un valor estático (no tan estatico dado que debe variar para que esto pase). Con esto podemos palomear los otros dos objetivos de esta practica, y asi poder continuar con el Procesamiento Digital de Imágenes

6. Referencias

1. Gonzalez, R., Woods, R., Digital Image Processing, Prentice Hall, 2008.

2. La ayuda del ayudante Miguel Angel Veloz Lucas