GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2017

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA

NASIENRIGLYNE

Tyd: 2 uur 200 punte

Hierdie nasienriglyne word voorberei vir gebruik deur eksaminatore en hulpeksaminatore. Daar word van alle nasieners vereis om 'n standaardiserings-vergadering by te woon om te verseker dat die nasienriglyne konsekwent vertolk en toegepas word tydens die nasien van kandidate se skrifte.

Die IEB sal geen gesprek aanknoop of korrespondensie voer oor enige nasienriglyne nie. Daar word toegegee dat verskillende menings rondom sake van beklemtoning of detail in sodanige riglyne mag voorkom. Dit is ook voor die hand liggend dat, sonder die voordeel van bywoning van 'n standaardiserings-vergadering, daar verskillende vertolkings mag wees oor die toepassing van die nasienriglyne.

VRAAG 1

1.1 (a) $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

$k = \ln x$

$(k+3)(k-1) = 0$

$\ln x = -3 \qquad \ln x = 1$

$x = e^{-3} = 0{,}0498 \qquad x = e = 2{,}718$

(b) $|x + p| = \ln q$

$x \geq -p: \qquad x + p = \ln q$

$\qquad x = \ln q - p$

$x \leq -p: \qquad -x - p = \ln q$

$\qquad x = -\ln q - p$

1.2 (a) (0; 3)

(b) $0 = x^2 + |2x - 3|$

$x^2 \neq -|2x - 3|$

Aangesien LK en RK nie beide gelyktydig zero kan wees nie

(c) $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$ (Kritiese punt is by zero van abs waarde term)

(d) $y = x^2 - 2x + 3$ (neem kennis dat ander tak nie tp bevat nie)

$y' = 2x - 2$

$\therefore x = 1; \ y = 2$

VRAAG 2

2.1 $889 = Ae^{15k}$

$596 = Ae^{5k}$

$\therefore e^{10k} = \frac{889}{596}$

$\therefore k = 0{,}04$

$\therefore A = 488$

2.2 $6000 = 488e^{0{,}04t}$

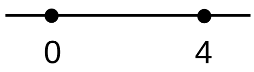
$\therefore t = 62{,}72$

$\therefore$ jaar 2033 (*of aanvaar 2033*)

VRAAG 3

3.1 $x = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4p}}{2p}$

$p(p-4) < 0$



$p = 2$

3.2 $x = -2i$ is ook 'n oplossing

$\therefore x^2 + 4$ is 'n faktor

$\left(x^2+4\right)\left(x^2-2x+5\right) = x^4 - 2x^3 + px^2 - 8x + 20$

$\therefore x = 1 \pm 2i$ en $p = 9$

3.3 Let daarop dat $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$.

Dus: $i + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{2016} = 0$

Dus antwoord = i

VRAAG 4

Bewys waar vir n = 2:

LK = $1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ RK = $\dfrac{2+1}{2(2)} = \dfrac{3}{4}$

Neem aan waar vir $n = k$:

$\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)..........\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{k+1}{2k}$

Bewys waar vir $n = k + 1$

$\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)..........\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)$

$= \left(\dfrac{k+1}{2k}\right)\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)$ volgens aanname

$= \left(\dfrac{k+1}{2k}\right)\left(\dfrac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)$

$= \dfrac{k(k+2)}{2k(k+1)}$

$= \dfrac{k+2}{2(k+1)}$

Maar dit is die formule met $n = k + 1$. Dus het ons deur die beginsel van volledige induksie bewys dat die resultaat waar is vir alle natuurlike waardes van n.

VRAAG 5

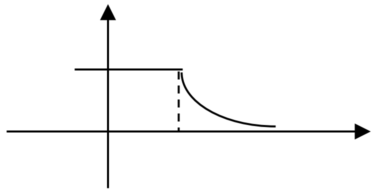
5.1 (a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} 4 = 4$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{4}{x} = 4$

$f(1) = 4$

Dus kontinu by $x = 1$.

Nie differensieerbaar nie vanweë skielike verandering van gradiënt.



(b) $\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} f'(x)$

$\frac{-4}{x^2} = a$

$\therefore a = -1$

$\frac{4}{x} = -x + b$

$\therefore b = 4$

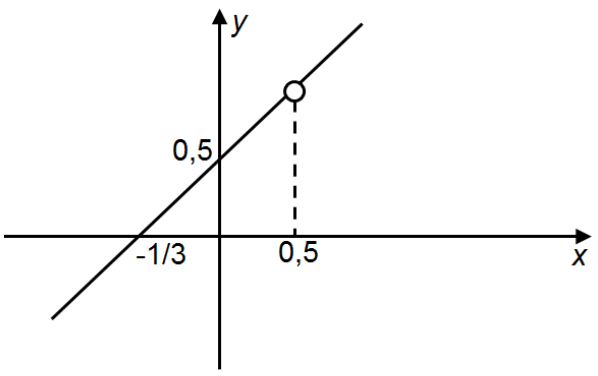
5.2 (a) $6x^2 - x - 1 = (3x-2)(2x+1) + k$

$p = 3$

(b) (i) $f(x) = \frac{(3x+1)(2x-1)}{2(2x-1)}$

Verwyderbare diskontinuïteit by $x = 0{,}5$. Faktor kanselleer uit.

(ii) $\therefore y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}; \quad x \neq \frac{1}{2}$



(c) $f'(x) = \frac{(3x-2)(12x-1) - (6x^2 - x - 1)(3)}{(3x-2)^2}$

$\therefore 0 = 18x^2 - 24x + 5$ d.w.s. $\Delta > 0$

VRAAG 6

6.1 Deur die kosinusreël te gebruik:

$10^2 = 10^2 + 8^2 - 2(10)(8)\cos\hat{O}$

$\therefore \hat{O} = 1{,}159$ radiale

6.2 Oppervlakte van sektor = $\frac{1}{2}(10)^2(1{,}159) = 57{,}96$ eenhede^2

Oppervlakte van driehoek = $\frac{1}{2}(8)(10)\sin 1{,}159 = 36{,}656$

Gearseerde gebied = 21,3 eenhede^2

VRAAG 7

7.1 $y = -(4x+3)^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x+3)^{-\frac{3}{2}}(4)$$

$$= \frac{2}{(4x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

$m = 2$ en $n = \frac{3}{2}$

7.2 (a) $\cos y \dfrac{dy}{dx} - \sin x = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos y}$$

(b) $x = \dfrac{\pi}{3}$:

$$\sin y + \frac{1}{2} = 1$$

$$\sin y = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}} = 1$$

7.3 (a) $x_{r+1} = x_r - \dfrac{\tan x + x^2 + 1}{\dfrac{1}{\cos^2 x} + 2x}$

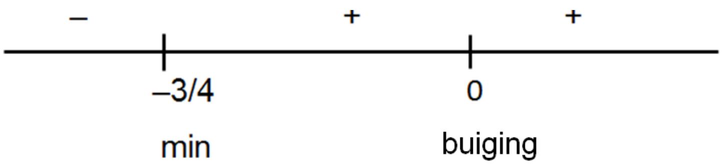
$x_0 = -1$
$x1 = -1{,}31047803...$
$x2 = -1{,}227348576...$
$x3 = -1{,}181802226...$
$x4 = -1{,}172412988...$

(b) $x5 = -1{,}172093968...$
$x6 = -1{,}172093617...$
$x7 = -1{,}1720936...$

VRAAG 8

8.1 $4x^3 + 3x^2 = 0$

$\therefore x^2(4x+3) = 0$



$g''(x) = 12x^2 + 6x$

$0 = 6x(2x+1)$

$x = 0$ of $x = -\dfrac{1}{2}$

Dus is $x = 0$ stasionêr (neem kennis dat teken van die gradiënt nie verander nie) en $x = -\dfrac{1}{2}$ is niestasionêr.

8.2 $y = \int 4x^3 + 3x^2 dx$

$y = x^4 + x^3 + C$

$4 = 1 + 1 + C$

$y = x^4 + x^3 + 2$

8.3 Vir kubies is $f''(x)$ lineêr en gevolglik het $f''(x) = 0$ altyd 'n oplossing.
Vir vierdegraads is $f''(x)$ kwadraties en gevolglik is dit moontlik dat $f''(x) = 0$ nie reële oplossings het nie.

VRAAG 9

9.1 (a) RK

$$\begin{aligned} &= \sec^2\theta\left(\tan^2\theta + 1\right) \\ &= \sec^2\theta\left(\sec^2\theta\right) \\ &= \sec^4\theta \end{aligned}$$

(b)

$$\int \sec^2\theta.\tan^2\theta + \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\tan^3\theta}{3} + \tan\theta + C$$

9.2 (a)

$$\int \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x \; dx$$

$$= \int 1 + \sin 2x \, dx$$

$$= x - \frac{\cos 2x}{2} + C$$

(b)

$$\frac{1}{6}\int 6(x-2)\left(3x^2 - 12x + 5\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{9}\left(3x^2 - 12x + 5\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

VRAAG 10

10.1 Die draaipunt van die grafiek is (2; 4). By die draaipunt verander die reghoeke van onderbenadering na oorbenadering, dus kanselleer die fout in 'n mate uit.

10.2 (a) $2 \times 2 = 4$

(b) $h(-x) = \frac{3}{2}h(x)$

$\frac{3}{2} \times 2 + 2 = 5$ eenhede

(c) $2 - 2 = 0$

10.3 (a) $y = a\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{1}{p}$

$0 = a\left(\frac{p^2}{4}\right) + \frac{1}{p}$

$a = -\frac{4}{p^3}$

(b) Oppervlakte = $\int_0^p -\frac{4}{p^3}\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{1}{p}\,dx$

$$= \left[-\frac{4}{p^3}\frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^3}{3} + \frac{1}{p}x\right]_0^p$$

$$= \frac{2}{3}$$

Totaal: 200 punte