

**GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL II**

Tyd: 1 uur

100 punte

---

**LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR**

1. Hierdie vraestel bestaan uit 14 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.

2. Hierdie vraestel bestaan uit DRIE modules.

Kies **EEN** van die **DRIE** modules:

**MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF**  
**MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF**  
**MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)**

3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word.
4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
6. **Afronding van finale antwoorde.**

**MODULE 2: Vier** desimale plekke, tensy anders aangedui.

**MODULE 3: Twee** desimale plekke, tensy anders aangedui.

**MODULE 4: Twee** desimale plekke, tensy anders aangedui.

---

## MODULE 2 STATISTIEK

### VRAAG 1

1.1 Die waarskynlikheid dat jou verjaardag in 'n ewekansig gekose jaar op 'n Sondag sal wees, is  $\frac{1}{7}$ .

(a) Sewe jaar word ewekansig gekies. Bepaal die waarskynlikheid dat jou verjaardag in meer as een van hierdie jare op 'n Sondag sal wees. (7)

(b) 60 jaar word ewekansig gekies. Gebruik 'n geskikte benadering om die waarskynlikheid te bepaal dat jou verjaardag in minstens 13 van hierdie jare op 'n Sondag sal wees. Regverdig die gebruik van jou benadering. (8)

1.2 Nic koop 5 romans en 2 biografieë by 'n boekwinkel. Hy kies 3 van hierdie boeke ewekansig om saam met hom te neem vir 'n week weg in die bos.

(a) Bepaal die waarskynlikheid dat hy 2 romans sal kies. (7)

(b) Die stogastiese veranderlike  $X$  verteenwoordig die getal romans wat Nic kies. Toon al die moontlike waardes van  $X$  en hul ooreenstemmende waarskynlikhede in 'n tabel. (5)

$x$				
$P(X = x)$				

(c) Bereken vervolgens die variansie van  $X$ . (4)  
**[31]**

**VRAAG 2**

- 2.1 Keshav merk op dat die tyd wat 'n volwassene per nag slaap 'n normaalverdeling volg met 'n gemiddelde van 7,5 uur en 'n standaardafwyking van 45 minute.
- (a) Bepaal die waarskynlikheid dat 'n ewekansig gekose volwassene minder as 8 uur per nag slaap. (5)
  - (b) Bepaal die interkwartielvariasiewydte van die verdeling. (6)
  - (c) Indien 200 volwassenes ewekansig uit die verdeling gekies word, beraam hoeveel van hierdie volwassenes slaap minder as 8 uur per nag. (2)
- 2.2 Takudzwanashe het 'n studie gedoen oor hoe lank die Coronavirus aan die buitekant van 'n chirurgiese masker oorleef.
- Die vertrouensinterval wat hy bereken het, is gebaseer op 'n steekproef van 50 chirurgiese maskers.
  - Elke masker is ewe veel aan die virus blootgestel by kamertemperatuur.
  - Die vertrouensinterval was (5,99; 8,01) dae.

**Buitekant van  
chirurgiese masker**

- (a) Bepaal die steekproefgemiddelde van die data. (2)
  - (b) Indien die standaardafwyking 3,5 dae is, bepaal die  $\alpha$  %-vertrouensinterval vir die populasiegemiddelde. (8)
- [23]**

### VRAAG 3

#### 3.1 Meervoudige keuse:

- (a) Kieran en Nate konstrueer albei 95%-vertrouensintervalle vir 'n bepaalde populasiegemiddelde. Kieran gebruik 'n ewekansige steekproef van grootte 40 en Nate 'n ewekansige steekproef van grootte 35.

Watter van die volgende is waar?

- A Kieran se interval het 'n groter vertrouensgraad.
- B Nate se interval het 'n groter vertrouensgraad.
- C Die totale breedte van Kieran se vertrouensintervalberaming is smaller.
- D Die totale breedte van Nate se vertrouensintervalberaming is smaller.

(2)

- (b) Die nulhipotese word die beste verstaan as:

- A 'n Waarskynlikheidsverklaring.
- B Dieselfde as die navorsingshipotese.
- C 'n Verklaring oor die gemiddelde.
- D 'n Verklaring dat daar geen verskil is nie.

(2)

- (c) Die betekenispeil van 'n hipotesetoets dui die volgende aan:

- A Die kans dat ons reg is om nie die nulhipotese te verwerp nie.
- B Hoe betekenisvol die verskil tussen die populasiegemiddelde en die steekproefgemiddelde is.
- C Die kans dat ons verkeerd is om die nulhipotese te verwerp.
- D Of die nulhipotese verwerp moet word of nie.

(2)

- (d) 'n Vervaardiger van tennisrakette beweer dat haar rakette met gereeld speel gemiddeld minstens twee jaar sal hou. Lukas toets 'n steekproef en bereken die toetsstatistiek as 1,75. Indien 'n 5%-betekenispeil gebruik word, sal die gevolgtrekking soos volg wees:

- A Daar is voldoende bewys om die vervaardiger se bewering as korrek te beskou.
- B Daar is onvoldoende bewys om die vervaardiger se bewering as korrek te beskou.
- C Daar is voldoende bewys om die vervaardiger se bewering as verkeerd te beskou.
- D Daar is onvoldoende bewys om die vervaardiger se bewering as verkeerd te beskou.

(2)

- 3.2 'n Onderwyser sê vir haar leerders dit neem 'n gemiddelde tyd van 22 minute om die huiswerk te voltooi met 'n standaardafwyking van 5 minute. Thendo beweer dit neem 'n bietjie langer. 'n Hipotesetoets van hierdie bewering by die 7%-betekenispeil is uitgevoer deur 'n ewekansige steekproef van 30 huiswerktake te gebruik.

- (a) Gee die nul- en alternatiewe hipotese.
- (b) Bepaal die moontlike waardes van die steekproefgemiddelde wat tot 'n gevolgtrekking sal lei wat die nulhipotese verwerp.

(2)

(6)

**[16]**

### VRAAG 4

Die waarskynlikheidsfunksie vir die stogastiese veranderlike  $X$ , waar  $k$  'n positiewe konstante is, word gegee.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{k^2}x & 0 < x < k \\ 0 & \text{andersins} \end{cases}$$

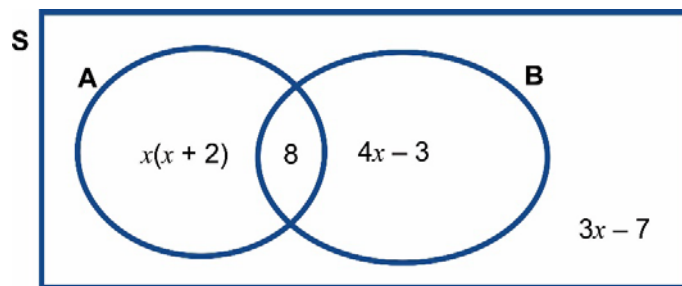
(a) Verifieer dat  $f$  'n digtheidsfunksie is vir alle waardes van  $k$ . (6)

(b) Indien die onderste kwartiel 6 is, bepaal die waarde vir  $k$ . (6)

**[12]**

### VRAAG 5

5.1 Die Venn-diagram wat hieronder gegee word, het 'n steekproefgrootte van 50.



(a) Bepaal die waarde van  $x$ . (4)

(b) Bereken vervolgens  $P(A|B')$ . (3)

(c) Is gebeurtenisse A en B onafhanklik? Regverdig jou antwoord wiskundig. (3)

5.2 Vyf letters word ewekansig gekies uit die nege letters van die woord INFLUENCE.

Bepaal die getal verskillende seleksies indien die 5 letters minstens een N en hoogstens een E insluit.

(8)

**[18]**

**Totaal vir Module 2: 100 punte**

**MODULE 3            FINANSIES EN MODELLERING****VRAAG 1**

ABC Taxi's bedryf 'n pendeldiens tussen King Shaka-lughawe en Pietermaritzburg. Hulle het pas 'n minibustaxi vir R1 200 000 gekoop en besluit om 'n maandelikse delgingsfonds te begin om oor 8 jaar 'n ekwivalente nuwe minibus te koop. Die volgende moet in ag geneem word:

- Die huidige minibus sal ingeruil word om die koste van die nuwe een oor 8 jaar te verminder.
- Die waardeverminderingkoers op die huidige minibus is 15% per jaar volgens die verminderde saldo.
- Die inflasiekoers op nuwe taxi's word op 5,5% per jaar geraam.
- 'n Bedrag van R10 000 sal aan die einde van elkeen van die 8 jaar uit die fonds onttrek word om vir 'n versiening van die minibus te betaal.
- Die rente op die belegging sal 10% per jaar wees, maandeliks saamgestel.
- Die eerste betaling in die delgingsfonds sal onmiddellik gedoen word en die finale betaling oor 6 jaar.

- 1.1 Skryf die verminderde waarde van die ou taxi na 8 jaar neer. (2)
- 1.2 Skryf die koste van 'n nuwe taxi oor 8 jaar neer. (2)
- 1.3 Toon korrek tot 2 desimale plekke dat die effektiewe rentekoers ekwivalent aan 'n nominale koers van 10% per jaar, maandeliks saamgestel, 10,47% per jaar is. (2)
- 1.4 Bepaal die maandelikse betaling wat nodig is om te verseker dat die delgingsfonds die jaarlikse versiening en die koop van die nuwe minibus oor 8 jaar dek. (11)

**[17]****VRAAG 2**

'n Lening van  $P$  rand word op 1 Januarie 2021 verkry en oor 'n aantal jare terugbetaal met gelyke maandelikse paaielemente wat een maand na die verkryging van die lening begin, en dan 'n kleiner finale betaling. Die rente op die lening is 9,75% per jaar, maandeliks saamgestel. Na een jaar het die uitstaande saldo **met** R36 868,69 **verminder**. Die rente wat in die eerste jaar op die lening betaal is, is R47 131,31.

- 2.1 Lei af dat die maandelikse betaling R7 000 is. (5)
- 2.2 Toon deur berekening dat die bedrag van die oorspronklike lening R500 000 is tot die naaste rand. (8)
- 2.3 Wat is die datum en waarde van die finale betaling? (12)

**[25]**

### VRAAG 3

3.1 Die tweedeorde lineêre rekursierelasie (of verskilvergelyking)

$T_n = 7T_{n-1} + aT_{n-2}$ ;  $T_1 = p$ ;  $T_2 = q$  het 'n eksplisiete formule:

$$T_n = 4^n - 5(3^{n-1})$$

Bepaal die waardes van  $a$ ,  $p$  en  $q$ . (6)

3.2 Die getal visse in 'n meer wat gewild is vir visvang neem met 20% per jaar af. Om te voorkom dat die visvoorraad uitgeput raak, voeg die eienaar 1 000 visse aan die einde van elke seisoen by. Tans is daar vermoedelik 100 000 visse in die meer.

(a) Skryf 'n rekursierelasie vir die getal visse,  $F_n$ , in die meer neer op 'n tyd  $n$  jaar van nou af. (4)

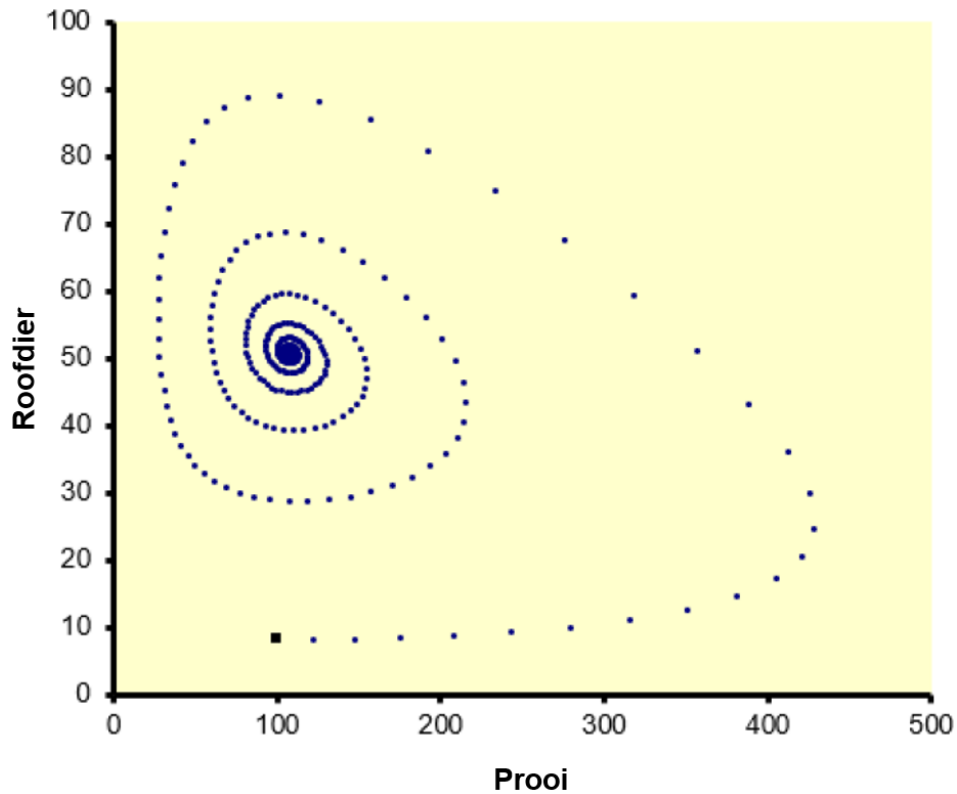
(b) Bepaal die ewewigsgetal visse. (3)

(c) Hoeveel visse moet elke jaar bygevoeg word sodat die getal visse nie met meer as 70% van die huidige totaal verminder nie? (4)

**[17]**

### VRAAG 4

'n Tipiese fasestipping van 'n roofdier-prooi-model:



- 4.1 Gee die aanvanklike getal roofdiere en prooi. (2)
- 4.2 Beraam die ewewigspopulasies van die roofdier en die prooi. (2)
- 4.3 Beskryf wat met die roofdierpopulasie gebeur wanneer die prooi-populasie op sy maksimum waarde is. (2)
- 4.4 Beskryf die effek van 'n verandering van die dravermoë op die ewewigspunt. (2)

**[8]**



## VRAAG 5

In 'n sekere woud vorm konyne die primêre voedselbron vir die jakkalse, maar hulle word nie deur enige ander spesie gejag nie.



Die wisselwerking tussen die jakkalse en konyne kan deur die Lotka-Volterra-vergelykings beskryf word in die vorm wat hieronder getoon word. Let daarop dat waardes aan die parameters gegee is en dat die vergelykings vereenvoudig is. Neem aan dat die siklustyd een maand (of 4 weke) is.

$$F_{n+1} = 0,9722F_n + 0,000052893R_nF_n$$

$$R_{n+1} = 2,6R_n - 0,001778R_n^2 - 0,03R_nF_n$$

Die konyne het 6 konyntjies per werpsel en een werpsel elke 6 weke, en die helfte van die konynpopulasie is vroulik.

5.1 Bewys deur berekening:

- (a) Die oorlewingskoers van die pasgebore konyne is 80%. (6)
- (b) Die suksesvolle aanvalskoers van die jakkalse op die konyne is 3%. (3)
- (c) Die leeftyd van die jakkalse is 3 jaar. (3)
- (d) Die dra vermoë van die omgewing is 900. (3)

5.2 Bereken die ewewigsgetal jakkalse en konyne onderskeidelik. (7)

**[22]**

**VRAAG 6**

- 6.1 Ek belê 'n enkelbedrag in 'n rekening wat saamgestelde rente betaal teen die koers van 1% per maand vir die eerste 3 jaar, 3% per kwartaal vir die volgende 4 jaar en 6% elke 6 maande vir die volgende 5 jaar.

Bepaal die effektiewe rentekoers per jaar oor die 12 jaar. (6)

- 6.2 'n Kolonie miere vermeerder eksponensieel met elke dag wat verbygaan. Aanvanklik is daar 10 000. Na een dag is daar 10 100. Met watter persentasie neem die getal miere elke jaar toe?

(5)  
**[11]**

**Totaal vir Module 3: 100 punte**

## MODULE 4                      MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

### VRAAG 1

Gegee:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

- 1.1 Skryf die enkelmatriks neer wat geskep word wanneer matriks A in die lyn  $y = \sqrt{3}x$  gereflekteer word. (6)
- 1.2 (a) Gee die matriks van die beeld ( $A'$ ) van A na 'n dwarsdruk met 'n faktor van  $-3$ , met die  $y$ -as die invariante lyn. (6)
- (b) Bepaal die verhouding van die oppervlakte van die vorm wat deur die punte in matriks A ingesluit word tot die oppervlakte van die beeld  $A'$ . (2)
- [14]**

### VRAAG 2

Gegee:

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

- 2.1 Die *spoor* van matriks M, geskryf  $\text{tr}(M)$ , is die som van die hoofdiagonale elemente van M.  
Los  $x$  op indien  $\text{tr}(M) = \text{tr}(N)$ . (3)
- 2.2 Skep matriks  $K = M - N$ . (2)
- 2.3 Los op vir  $x$  indien  $x \in \mathbb{R}$  en die determinant van matriks K nul is. (8)
- [13]**

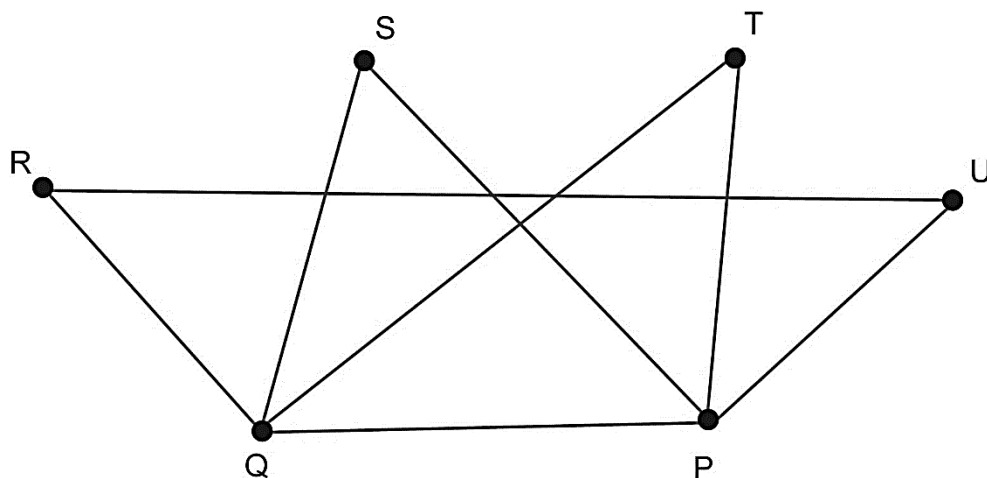
### VRAAG 3

'n Sagteware-ingenieur programmeer 'n analoog wyserplaat om op 'n digitale skerm vertoon te word. Om die korrekte tyd op die skerm te toon, moet die eindpunt van elke wyser korrek op die koördinaatvlak geplaas word. Die oorsprong is by die middelpunt van die horlosie. (Elke digitale wyser is dan net 'n lyn van die oorsprong na die eindpunt.) Om 12:00 word die eindpunt van die minuutwyser op 6 eenhede op die vertikale as en die eindpunt van die uurwyser op 4 eenhede op die vertikale as gestel.



- 3.1 Bereken die hoek wat die sekondewyser tussen elke sekonde beweeg. (2)
- 3.2 Bereken die posisie op die digitale skerm van die eindpunt van die
- (a) minuutwyser om 12:12 (8)
- (b) uurwyser om 12:12 (4)
- [14]**

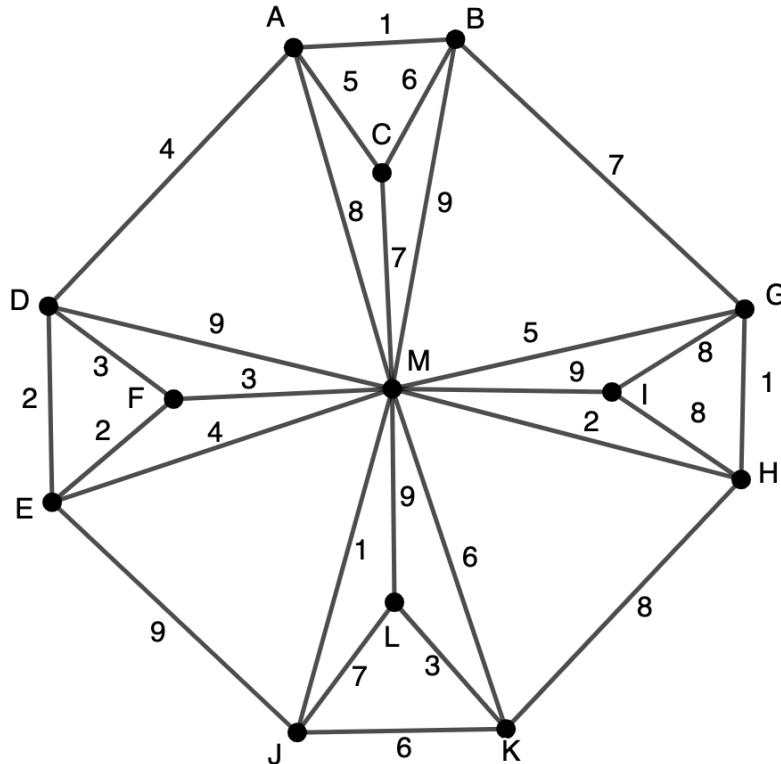
### VRAAG 4



- 4.1 Gee die omgewing van Q. (2)
- 4.2 Teken die komplement van die grafiek. Benoem die nodusse noukeurig. (5)
- 4.3 Noem die voorwaardes vir 'n Euler-kring om te bestaan. (2)
- 4.4 Noem een Euler-kring wat by Q begin. Noem die nodusse in die volgorde waarin hulle besoek word. (5)
- [14]**

### VRAAG 5

Die koninklike tuine is in 'n oktagoon ontwerp. Binne die oktagoon is klein betonpaadjies en wandelpaaie met besproeiingspype wat water aan die fontein voorsien wat onder elke wandelpad loop. Elke nodus is 'n fontein. Die gewig van die skakels is die wandelpadafstand tussen elke fontein.



Die terreinopsigter voorsien die volgende lys van besproeiingspype:

Begin by A:

$$A-B = 1$$

$$M-J = 1$$

$$G-H = 1$$

$$M-H = 2$$

$$E-F = 2$$

$$E-D = 2$$

$$F-M = 3$$

$$L-K = 3$$

$$A-D = 4$$

$$A-C = 5$$

$$M-K = 6 \text{ en } I-H = 8, \text{ vir 'n totale afstand van } 38.$$

5.1 Wat word geskep deur die skakels hierbo te volg? (2)

5.2 Watter algoritme is gebruik? (2)

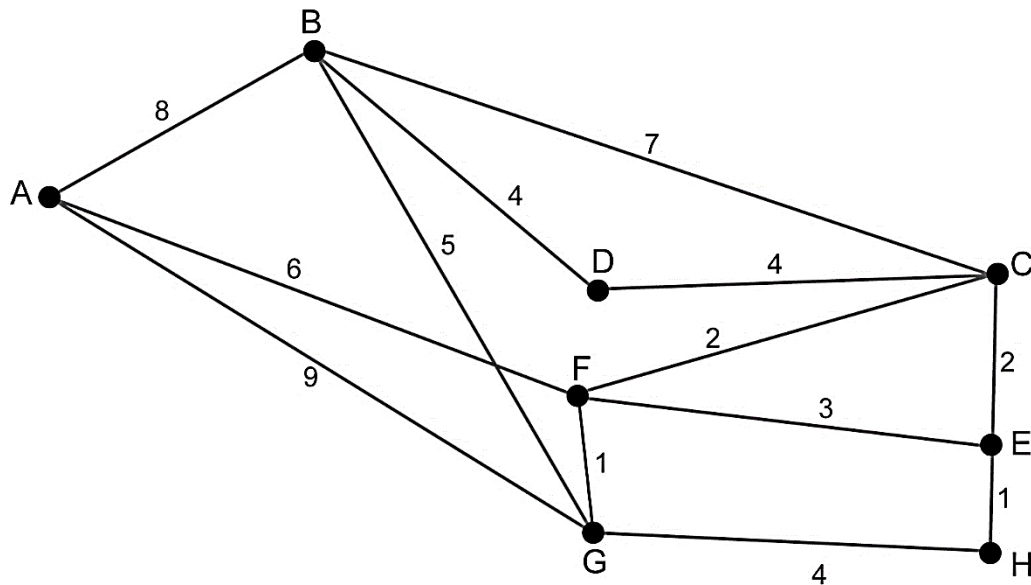
5.3 Gebruik 'n alternatiewe algoritme om 'n soortgelyke struktuur te skep wat by A begin. (8)

5.4 Die struktuur wat in Vraag 5.3 geskep is, is **niet uniek niet**. Watter skakel(s) moet verwyder word om te verseker dat dit uniek is? (3)

**[15]**

### VRAAG 6

'n Amateuratleet is in haar behuisingskompleks ingeperk. Sy het in die grafiek hieronder 'n kaart geteken van al die moontlike hardlooppaie en hul tye.



Die atleet wil graag 'n reeks moontlike goeie hardlooproetes bepaal. Bereken die reeks roetes vir die grafiek hierbo deur by A te begin en die volgende te doen:

- 6.1 Bereken die ondergrens deur nodus F weg te laat. (6)
  - 6.2 Bepaal 'n bogrens vir die atleet se roete. Gebruik die Naaste Bure-algoritme en teken die volgorde waarin skakels gekies word duidelik aan. (8)
  - 6.3 Gebruik inspeksie om 'n "goeie roete" te bepaal wat die atleet kan kies. (3)
- [17]**

### VRAAG 7

Indien  $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$  en  $P = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ :

- 7.1 Bereken  $P^{-1}$ . (3)
  - 7.2 Toon dat  $A = PDP^{-1}$ . (4)
  - 7.3 Bepaal vervolgens  $A^5$  en toon alle matriksberekeninge. (6)
- [13]**

**Totaal vir Module 4: 100 punte**