GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2018

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL II

Tyd: 1 uur | 100 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 15 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.

2. Hierdie vraestel bestaan uit DRIE modules:

   Kies **EEN** van die **DRIE** modules:

   MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF
   MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF
   MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word.

4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.

5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.

6. **Afronding van finale antwoorde:**

   MODULE 2: **Vier** desimale plekke, tensy anders vermeld.
   MODULE 3: **Twee** desimale plekke, tensy anders vermeld.
   MODULE 4: **Twee** desimale plekke, tensy anders vermeld.

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

1.1 Dit is bekend dat 5,7% van die meisies in Suid-Afrika tussen die ouderdomme van 12 en 17 met AGS (aandaggebreksteuring) gediagnoseer word. Daar is 28 leerders in 'n klas in 'n hoërskool vir meisies. 12 leerders word ewekansig uit die klas gekies. Wat is die waarskynlikheid dat:

(a) Nie meer as 1 van hierdie 12 leerders met AGS gediagnoseer word nie? (7)

(b) Nie een in die klas met AGS gediagnoseer word nie indien nie een van die 12 leerders wat gekies is, met AGS gediagnoseer is nie? (4)

1.2 'n Sak bevat blou balle en rooi balle. Balle word ewekansig uit die sak gehaal. Die waarskynlikheid dat minstens 3 van die balle wat uitgehaal word blou sal wees, word gegee deur:

$$1-\sum_{k=0}^{a}\frac{\binom{12}{k}\binom{8}{f(\mathrm{k})}}{\binom{x}{7}}$$

(a) Word die balle uitgehaal met of sonder vervanging? Motiveer. (2)

(b) Hoeveel balle is daar in die sak? (2)

(c) Hoeveel balle word uit die sak uitgehaal? (1)

(d) Hoeveel van die balle in die sak is rooi? (2)

(e) Skryf die waarde van *a* neer. (2)

(f) Skryf **twee verskillende** moontlike uitdrukkings vir $f(k)$ neer. (2)

[22]

VRAAG 2

2.1 In 1999 (die jaar toe die meeste van julle gebore is) sê "Statistieke Suid-Afrika" vir ons dat 'n afgeronde syfer van 1 400 000 babas in Suid-Afrika gebore is. Die gewig van hierdie babas was normaal verdeel met 'n gemiddelde van 3,2 kg en 'n standaardafwyking van 0,85 kg.

(a) Hoeveel babas sal jy beraam het meer as 2,8 kg geweeg? (7)

(b) Lae geboortegewig (LGG) is die gewig wat aangeteken word deur babas wat gebore word met 'n gewig onder die 10de persentiel. Bepaal die gewig waaronder 'n baba as 'n LGG-baba beskou sal word. (7)

2.2 'n Opname is gedoen om die gemiddelde massa van 64 vroue tussen die ouderdomme van 30 en 40 te bepaal. Die resultate het 'n vertrouensinterval van (59 kg; 63 kg) met 'n standaardafwyking van 9 kg opgelewer.

(a) Wat is die steekproefgemiddelde? (2)

(b) Bepaal die vertrouenspeil, tot die naaste persentasie, dat die interval die ware gemiddelde bevat. (8)

[24]

VRAAG 3

Omar Brandstofmaatskappy beweer dat die bymiddel wat by hul brandstof bygevoeg word, die gemiddelde brandstofverbruik verminder. Smart Maatskappy beweer dat die bymiddel geen effek op die gemiddelde brandstofverbruik het nie. Om hul bewering te verdedig het Omar Brandstofmaatskappy die volgende inligting ingesamel:

	BRANDSTOF MET BYMIDDEL	**BRANDSTOF SONDER BYMIDDEL**
GEMIDDELDE	7,2 liter/100 km	8,1 liter/100 km
STANDAARDAFWYKING	2,85	2
STEEKPROEFGROOTTE	35	38

Gebruik 'n hipotesetoets om die bewering wat deur Omar Brandstofmaatskappy gemaak word teen 'n 5%-betekenispeil te evalueer.

[9]

VRAAG 4

Die lengtes (in cm) van seuns tussen die ouderdomme van 8 en 18 word opgeteken.
Elke seun word as 'n geordende paar (x; y) voorgestel, waar x die ouderdom van die seun is en y sy lengte. Die volgende resultate word verkry:

$\sum x = 161$ $\sum y = 1910$ $\sum xy = 26270$ $\sum x^2 = 2293$ $\bar{y} = 159\frac{1}{6}$

Daar is bevind dat die korrelasiekoëffisiënt 0,9389 is.

4.1 Toon hoe jy kan aflei dat die lengtes van 12 seuns opgeteken is. (2)

4.2 Bepaal die vergelyking van die regressielyn. (6)

4.3 Lewer kommentaar oor die sterkte van die korrelasie tussen die lengtes en die ouderdomme wat opgeteken is. (2)

4.4 Die regressievergelyking voorspel 'n lengte van 210 cm vir 'n 24-jarige man. Is hierdie resultaat betroubaar? Verduidelik. (2)

[12]

VRAAG 5

Die waarskynlikheidsdigtheidfunksie vir die tyd (in minute) wat deur studente geneem is om 'n toets af te lê, word gegee deur:

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} a(x-30)^2 & 30 \le x \le 60 \\ 0 & \text{andersins} \end{cases}$$

5.1 Toon dat $a = \frac{1}{9\ 000}$. (7)

5.2 Wat is die mediaantyd wat deur studente geneem is om die toets af te lê? Rond af tot die naaste minuut. (7)

[14]

VRAAG 6

6.1 Twee gebeurtenisse, A en B, is sodanig dat:

- A en B onafhanklik is
- P(A) = x
- P(B) = y

Bewys met behulp van 'n Venn-diagram dat A en B' ook onafhanklik is. (8)

6.2 'n Mediese komitee van 5 word gekies uit 6 dokters, 3 tandartse en 7 ander. Bepaal op hoeveel maniere die komitee gekies kan word indien dit minstens een lid moet bevat wat óf 'n dokter óf 'n tandarts is. (4)

6.3 Jamielee trek na 'n nuwe huis en sy het 'n driehoekige vertoonkas met drie rakke gekoop sodat sy haar kristaldiere wat haar ouma vir haar gegee het, kan uitstal. Sy het 11 diere. Die boonste rak van die vertoonkas kan 2 ornamente hou, die middelrak 4 en die onderste rak 6. Op hoeveel maniere kan sy hierdie diere uitstal? (Let wel: Die diere word lukraak op elke rak uitgestal.) (7)

[19]

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

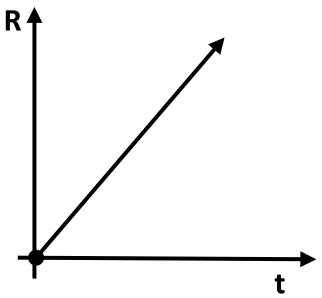
1.1 In Suid-Afrika word BTW bereken teen 15% op belasbare goedere en dienste.

(a) Olive het onlangs R5 640 betaal om haar motor te laat diens; hierdie bedrag sluit BTW in. Bereken wat die diens self gekos het, dit wil sê sonder BTW. (2)

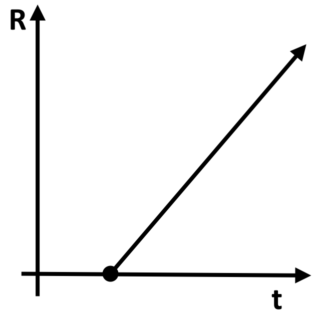
(b) BTW is onlangs van 14% af verhoog. Bereken die persentasie, korrek tot twee desimale plekke, waarmee die koste van goedere en dienste gestyg het. (3)

1.2 Die waarde van 'n belegging verdriedubbel elke 24 maande. Rente word maandeliks saamgestel. Bereken, tot die naaste maand, die tyd waaroor die belegging verdubbel. (5)

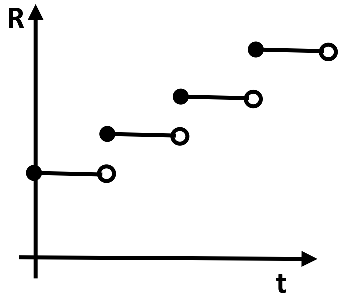
1.3 Vier grafieke word hieronder gegee, met Rand (R) teen tyd (t) geskets. Verbind elkeen van hierdie grafieke met een van die vyf finansiële beskrywings wat gegee word. Elke beskrywing mag 'n maksimum van een keer gebruik word.



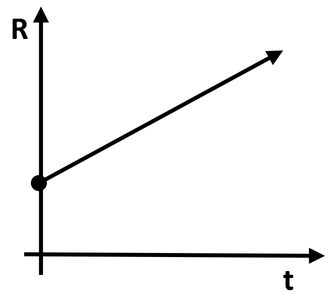
Grafiek A



Grafiek B



Grafiek C



Grafiek D

1. Die koste om by 'n winkelsentrum te parkeer, in tydintervalle gehef.
2. Die wins van 'n nuwe restaurant indien inkomste beginkoste aanvanklik bestry en wins gevolglik eers na 'n paar maande begin wys.
3. Die totale enkelvoudige rente wat met tyd op 'n eenmalige deposito verdien word.
4. Die totale saamgestelde rente wat met tyd op 'n eenmalige deposito verdien word.
5. 'n Loodgieter se rekening is direk eweredig aan die tyd wat hy by 'n kliënt se huis deurbring, plus 'n aanvanklike uitroepfooi wat gevra word. (8)

[18]

VRAAG 2

Harold verkry 'n lening van R500 000 teen 'n jaarlikse rentekoers van 8,8%, maandeliks saamgestel.

2.1 Harold beplan om die lening te amortiseer deur R2 500 per maand te betaal, wat oor een maand begin. Verduidelik met behulp van berekeninge waarom die bank dit nie sal aanvaar dat hy R2 500 per maand terugbetaal nie. (3)

2.2 Die bank wil hê dat hy die lening oor 'n tydperk van 8 jaar afbetaal met gelyke maandelikse paaiemente wat een maand nadat die lening goedgekeur is, begin. Bereken die waarde van hierdie gelyke maandelikse betalings. (5)

2.3 Harold besluit om eerder die lening met 95 maandelikse betalings van R7 300 af te betaal. Bereken die waarde van die finale 96^{ste} betaling, wat minder as R7 300 sal wees. (12)

[20]

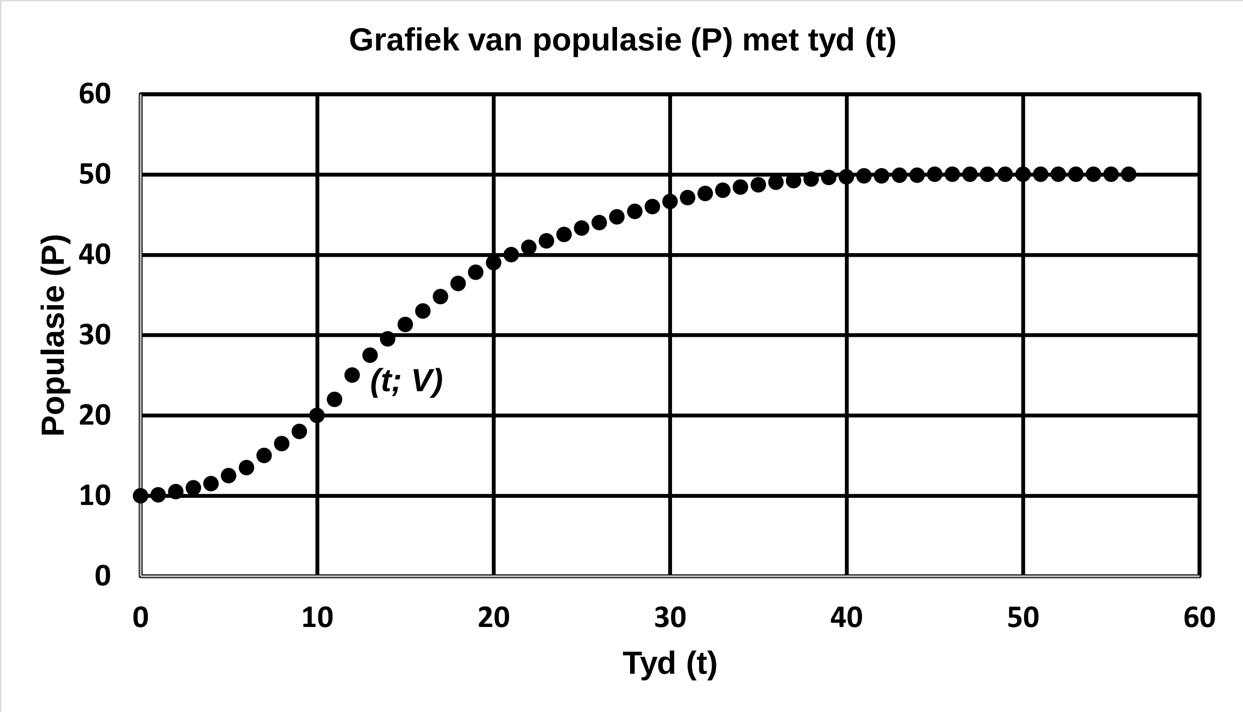
VRAAG 3

'n Bedrag van *x* rand word belê in 'n rekening wat rente verdien teen 8% per jaar, maandeliks saamgestel. Na ses jaar word 'n derde van die opgehoopte geld onttrek en in 'n afsonderlike rekening gedeponeer wat rente verdien teen 10% per jaar, kwartaalliks saamgestel. Die res bly in die oorspronklike rekening en verdien steeds rente teen 8% per jaar, maandeliks saamgestel. Aan die einde van 'n verdere twee jaar is die gekombineerde waarde van die twee rekeninge R20 702,50. Bereken (tot die naaste rand) die waarde van *x*, die oorspronklike deposito.

[12]

VRAAG 4

'n Diskrete populasiemodel word hieronder geskets, met Populasie (*y*-as) en Tyd (*x*-as). Die punt *(t; V)* is die punt op die kromme waarby die konkawiteit van die kromme verander.



4.1 Noem, met 'n rede, die tipe populasiemodel wat hierdie grafiek voorstel. (2)

4.2 Skryf die waarde *V* neer. (2)

4.3 Die model het 'n lyn van beste passing vir $\frac{\Delta P}{P}$ (*y*-as) teen P (*x*-as) met 'n regressievergelyking $\frac{\Delta P}{P} = -0{,}0025P + r$. Bereken die waarde van *r*, die intrinsieke groeikoers van die populasie, korrek tot drie desimale plekke. (4)

4.4 Gebruik *r* = 0,13 en bepaal die waarde van *t*. (6)

[14]

VRAAG 5

In die Karoo-gebiede van Suid-Afrika word die nederige dassie maklik die prooi van die magtige arend. Hul **jaarlikse** populasies word gereël deur die Lotka-Volterra-modelle wat hieronder gegee word:

$$D_{n+1} = D_n + a.D_n\left(1 - \frac{D_n}{18\ 000}\right) - 6\ 000, \quad D_0 = 12\ 000 \qquad \text{en}$$

$$E_{n+1} = E_n + f.b.D_n.E_n - 0{,}1.E_n, \quad E_0 = 30$$

5.1 Beskou die term $f.b.D_n.E_n$ wat in die roofdierformule verskyn.

(a) Verduidelik wat hierdie term voorstel. (2)

(b) Verduidelik wat die parameter *f* voorstel. (2)

(c) Bereken, korrek tot vier desimale plekke, die waarde van *f* indien $f.b.D_n.E_n = 15$. (3)

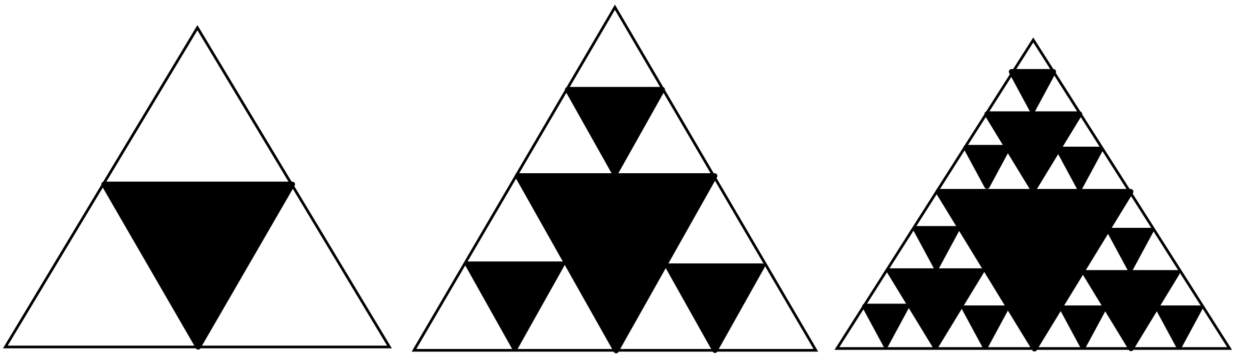
5.2 Die helfte van die populasie dassies is vroulik en elkeen van hulle het elke agt maande 'n werpsel. Elke werpsel het drie kleintjies en die oorlewingskoers van die kleintjies is 67%. Bereken die waarde van die **jaarlikse** intrinsieke groeikoers van die dassies. (5)

5.3 Hierdie populasies neig na 'n ewewig. Bereken die ewewigspopulasie van die dassies. Neem uit Vraag 5.1 (c) aan dat *f* = 0,003. (10)

[22]

VRAAG 6

Die Sierpinski-driehoek is 'n bekende fraktaalontwerp, gebaseer op 'n reeks gelyksydige driehoeke.



FIGUUR 1 **FIGUUR 2** **FIGUUR 3**

In FIGUUR 1 is die middelpunte van die sye van die driehoek verbind om 'n kleiner inwendige driehoek te vorm wat gearseer is.

In FIGUUR 2 is die middelpunte van die sye van die ongearseerde driehoeke weer verbind om kleiner inwendige driehoeke te skep wat ook gearseer is.

In FIGUUR 3 word die proses om middelpunte te verbind en driehoeke te arseer, herhaal.

6.1 Die **oppervlaktes** van die gearseerde driehoeke in elke opeenvolgende figuur is $16\sqrt{3}$, $28\sqrt{3}$ en $37\sqrt{3}$. Die formule $T_{n+1} = \frac{7.T_n}{4} - \frac{3.T_{n-1}}{4}$ genereer die **oppervlaktes** van die gearseerde driehoeke.

(a) Bepaal die oppervlakte (korrek tot drie desimale plekke) van die gearseerde driehoeke in die sesde figuur. (4)

(b) Bepaal die som tot oneindigheid (korrek tot een desimale plek) van die oppervlakte van die gearseerde driehoeke. (2)

6.2 Die (interne en eksterne) **omtrek** van die **gearseerde driehoeke** in die eerste vier figure is onderskeidelik 24, 60, 114 en 195 eenhede. Bepaal 'n tweedeorde-rekursieformule wat die omtrek van al die gearseerde driehoeke in FIGUUR *n* genereer. (8)

[14]

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 Beskou die matrikse $P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ en $Q = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

Bepaal die matriksproduk *PQ.* (4)

1.2 Gebruik Gauss-reduksie om vir *x, y* en z in die volgende stel gelyktydige vergelykings op te los. **Moenie** bloot die antwoorde neerskryf nie; maak seker dat jy ryreduksies aandui.

$3x + 2y = 11$ $x - 2z = 0$ $6y + 4z = 5$ (8)

1.3 Die **spoor** van 'n matriks is die som van die elemente van die hoofdiagonaal. Gee die spoor van:

(a) die 3 × 3-identiteitsmatriks. (2)

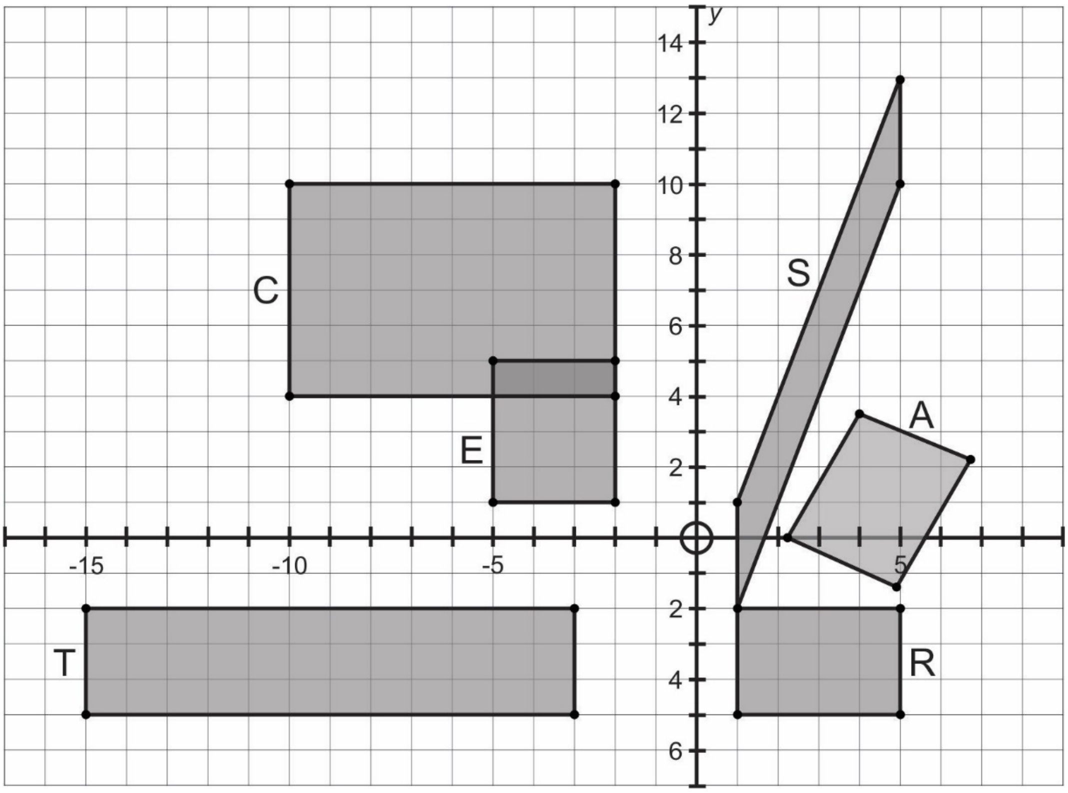
(b) die transformasiematriks vir 'n refleksie. (2)

(c) die getransponeerde matriks waarvan die spoor *t* is. (2)

[18]

VRAAG 2

In die skets hieronder word ses figure (A, C, E, S, T en R) gegee. Almal is transformasies van mekaar.



2.1 Indien E die beeld van R is, beskryf die transformasie in woorde. (2)

2.2 Indien S die beeld van R is, noem die faktor waarmee R parallel aan die *y*-as dwarsgedruk is. (2)

2.3 Indien C die beeld van S is, noem die faktor waarmee die oppervlakte van S vergroot is. (4)

2.4 Indien T die beeld van C is, bereken 'n enkele transformasiematriks wat C direk op T sal afbeeld. (6)

2.5 Indien A die beeld van R is na 'n antikloksgewyse rotasie, bereken (korrek tot twee desimale plekke) die rotasieskerphoek indien die beeld van hoekpunt (5; –2) nou by (4,025; 3,578) lê. (10)

[24]

VRAAG 3

Die inverse van die 3 × 3-matriks $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ moet bepaal word deur diagonalisering te gebruik. Die eerste drie stappe word korrek gegee:

STAP 1: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{Ry 1} \\ \text{Ry 2} \\ \text{Ry 3} \end{array}$

STAP 2: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 25 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 20 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{Ry 1} \\ \text{Ry 2} - 6.\text{Ry 1} \\ \text{Ry 3} - 5.\text{Ry 1} \end{array}$

STAP 3: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 25 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -8 & 7 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} 5.\text{Ry 1} - \text{Ry 2} \\ \text{Ry 2} \\ 10.\text{Ry 3} - 7.\text{Ry 2} \end{array}$

3.1 Skryf die determinant van die oorspronklike matriks neer. (2)

3.2 Voltooi die diagonaliseringsproses. (6)

3.3 Skryf vervolgens die inverse van die matriks neer, waar die elemente van die matriks heelgetalle is. (4)

[12]

VRAAG 4

Beskou 'n eenvoudige, samehangende grafiek met 8 nodusse. Vier nodusse het graad 6, twee het graad 4, een het graad 1 en die graad van die agtste nodus is onbekend.

4.1 Verduidelik kortliks waarom hierdie grafiek nie 'n Euler-kring sal bevat nie. (2)

4.2 Sal hierdie grafiek 'n Euler-baan bevat? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)

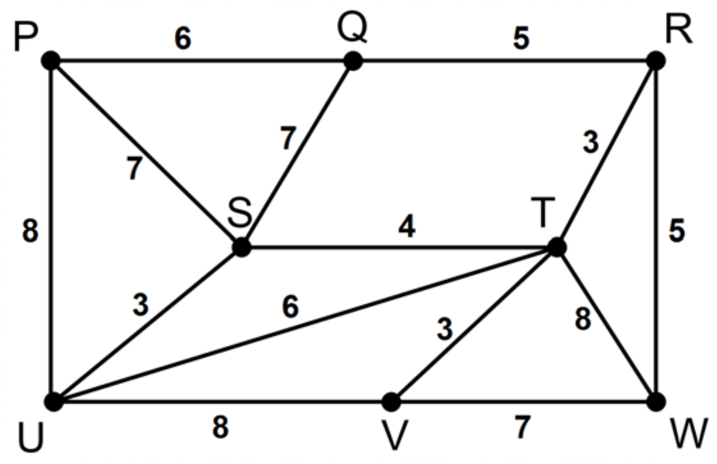
4.3 Indien die grafiek 'n Hamilton-kring bevat, hoeveel skakels sal hierdie kring bevat? (2)

4.4 Bepaal die graad van die agtste nodus indien die grafiek 19 skakels het. (4)

[10]

VRAAG 5

Die gegewe grafiek bestaan uit 8 nodusse en 14 skakels, met die betrokke gewig op elke skakel aangedui.



Tabel 1 hieronder stel al die ondergrense van nodus R voor. Die nodus wat genoem word, is die nodus wat aanvanklik uitgelaat is toe die ondergrens van R bereken is.

TABEL 1: ONDERGRENSE VAN NODUS R

P	Q	S	T	U	V	W
36	36	35	37	35	36	36

Tabel 2 hieronder stel 'n onvolledige lys van bogrense van die onderskeie nodusse voor.

TABEL 2: BOGRENSE VAN ELKE NODUS

P	Q	R	S	T	U	V	W
47	47	onbekend	42	42	41	48	45

5.1 Ontwerp 'n spanboom van minimum gewig deur Prim se Algoritme te gebruik en begin by nodus T. Maak seker dat jy die volgorde aandui waarin jy die skakels kies. Gee ook duidelik die totale lengte van hierdie spanboom. (8)

5.2 Voltooi Tabel 2 deur die bogrens van nodus R te bereken. Gebruik die Naastebure-algoritme en toon die volgorde waarin jy die skakels kies duidelik. (10)

5.3 Indien x die gewig van 'n "goeie roete" voorstel, verwys na die tabelle hierbo en verduidelik waarom $37 \leq x \leq 41$. (2)

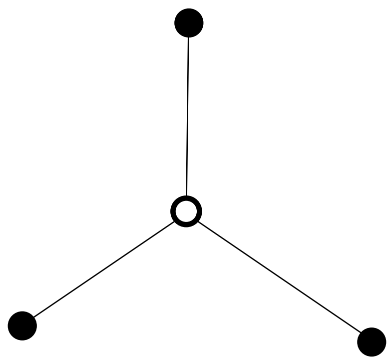
5.4 Bepaal deur inspeksie 'n "goeie roete" vir die grafiek wat by nodus R begin. Teken die skakels wat jy kies sorgvuldig aan, sowel as die gewig van die roete. (8)

[28]

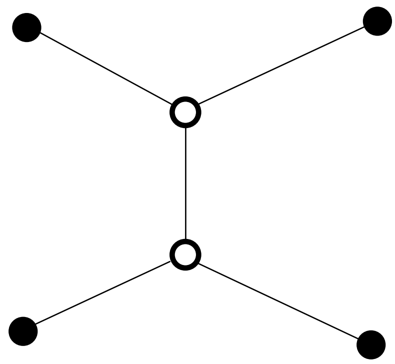
VRAAG 6

Die **Steiner-boomprobleem** is vernoem na die Switserse wiskundige Jakob Steiner (1796–1863).

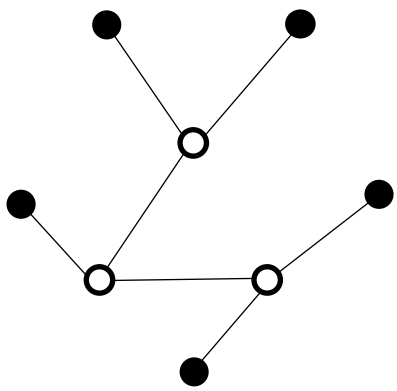
Vir enige grafiek bestaande uit *n* nodusse moet die nodusse slegs **indirek** met mekaar verbind word deur ingevoegde Steiner-nodusse te gebruik. Die resultaat is altyd 'n boom. Vier spesifieke gevalle word hieronder gegee. Die soliede kolle stel die oorspronklike nodusse van die grafiek voor en die oop ringe stel die ingevoegde Steiner-nodusse voor.



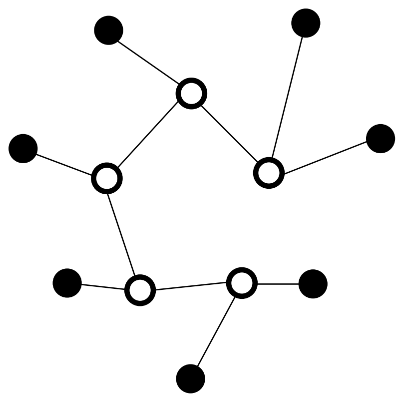
3 oorspronklike nodusse en
1 Steiner-nodus



4 oorspronklike nodusse en
2 Steiner-nodusse



5 oorspronklike nodusse en
3 Steiner-nodusse



7 oorspronklike nodusse en
5 Steiner-nodusse

6.1 Gee die graad van elke Steiner-nodus. (2)

6.2 Noem die verwantskap tussen die getal oorspronklike nodusse *n* en die getal skakels *e*. (2)

6.3 Skets 'n moontlike Steiner-boom in 'n grafiek met 6 oorspronklike nodusse. Gebruik soliede kolle vir die oorspronklike nodusse en oop ringe vir die Steiner-nodusse. (4)

[8]

Totaal vir Module 4: 100 punte