

Sistemi Dinamici Discreti

Michele Cirafici

DMG & INFN & IGAP, Trieste, Italy
Email: `mcirafici@units.it`

Dispense per uso interno - da ricontrizzare

2 aprile 2025

Indice

1 Sistemi dinamici discreti	1
2 L'esponente di Liapunov	6
3 Dinamica simbolica	7
4 L'insieme di Cantor	10

1 Sistemi dinamici discreti

Consideriamo una funzione reale C^∞ data da $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Denotiamo con $f^n = f \circ \dots \circ f$ la sua iterazione n-esima. In generale possiamo pensare ad f come ad un processo che prende uno stato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ e lo trasforma in un nuovo stato $x_1 \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $x_n = f^n(x_0)$. L'orbita (in avanti, o *forward*) di f è definita come $\mathcal{O}^+ = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se la mappa f è invertibile possiamo definire l'orbita completa $\mathcal{O}^+ = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Un punto x_0 si dice punto fisso se $f(x_0) = x_0$. In questo caso la sua orbita è data dalla sequenza x_0, x_0, x_0, \dots . Può capitare che un punto non sia fissato dalla mappa f , ma che il suo valore ritorni dopo n iterazioni, cioè $f^n(x_0) = x_0$. In questo caso parliamo di un punto periodico di periodo n , o un n -ciclo. In questo caso è spesso utile specificare quando il punto x_0 ha periodo *minimo* n , cioè n è il numero intero più piccolo per cui $f^n(x_0) = x_0$. La sequenza x_0, x_1, \dots, x_n si ripete sotto l'iterazione di f , e forma l'analogo di una orbita chiusa.

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione $g(x) = -x^3$. Ha un punto fisso in $g(0) = 0$, mentre $g(\pm 1) = \mp 1$, quindi ± 1 sono punti periodici di periodo 2, $g^2(\pm 1) = \pm 1$. Per un dato iniziale, ad esempio 3, le iterazioni prendono valori $3, -27, 19683, \dots$

Per sistemi unidimensionali possiamo visualizzare le orbite usando il metodo dell'iterazione grafica. Sul piano (x, y) disegniamo il grafico della funzione $y = f(x)$, e la diagonale $y = x$. Partendo dal punto (x_0, x_0) sulla diagonale disegniamo una linea verticale fino a raggiungere il punto $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$. Quindi disegniamo una linea orizzontale per trovare il punto (x_1, x_1) . Un'altra linea verticale ci porta a $(x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$, e così via.

Un punto x_0 è detto un pozzo (*sink*) o un punto fisso attrattivo se possiamo trovare un intorno $U \ni x_0$ tale che se $y_0 \in U$ allora $f^n(y_0) \in U \forall n$, e $f^n(y_0) \rightarrow x_0$ per $n \rightarrow \infty$. Viceversa un punto fisso repulsivo, o sorgente (*source*) ha la proprietà che tutte le orbite, eccetto x_0 stesso, lasciano U dopo abbastanza iterazioni della mappa f . Vale il seguente

Teorema 1.2. Consideriamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e assumiamo che x_0 sia un punto fisso. Allora

1. Se $|f'(x_0)| < 1$ allora x_0 è un punto fisso attrattivo.
2. Se $|f'(x_0)| > 1$ allora x_0 è un punto fisso repulsivo.
3. Se $|f'(x_0)| = 1$ questo non ci dà nessuna informazione sul carattere di x_0

Dimostrazione. Proveremo il caso 1). Denotiamo $|f'(x_0)| = \nu < 1$. Scegliamo un K tale che $\nu < K < 1$. Siccome f' è una funzione continua, possiamo trovare un δ tale che $|f'(x)| < K$

$\forall x \in I \equiv [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Allora per il teorema di Lagrange (o del valor medio), preso $x \in I$, possiamo trovare un c tra x e x_0 tale che

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \quad (1.3)$$

Siccome $c \in I$, abbiamo che $|f'(c)| < K$ e quindi $|f(x) - x_0| < K|x - x_0|$. Siccome $K < 1$ questo implica che $f(x) \in I$. Possiamo quindi iterare l'argomento, usando adesso $f(x)$ al posto di x . Applicando questo argomento n volte troviamo

$$|f^n(x) - x_0| < K^n|x - x_0| \quad (1.4)$$

che implica $f^n(x) \rightarrow x_0$ per $n \rightarrow \infty$. La dimostrazione nel caso 2) è simile

Per quanto riguarda 3), basta considerare le tre seguenti funzioni, che hanno un punto fisso in 0 con $f'_i(0) = 1$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + x^3 \\ f_2(x) &= x - x^3 \\ f_3(x) &= x + x^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Nel primo caso 0 è una sorgente, nel secondo un pozzo e nel terzo è attrattivo da un lato e repulsivo dall'altro. \square

Esattamente come nel caso continuo, anche i modelli discreti presentano biforazioni. Per questo consideriamo una famiglia di funzioni f_λ che dipendono da un parametro. Il seguente risultato implica che f_λ può avere biforazioni che cambiano il numero di punti fissi solamente quando ha un punto fisso con derivata uguale ad uno.

Teorema 1.6. *Sia f_λ una famiglia di funzioni dipendenti in maniera differenziabile (liscia) da λ . Sia x_0 un punto fisso per il valore λ_0 , $f_{\lambda_0} = x_0$ e supponiamo che $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$. Allora esistono due intervalli, I intorno ad x_0 e J intorno a λ_0 , ed una funzione differenziabile $p : J \rightarrow I$ tale che $p(\lambda_0) = \lambda_0$ e $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$. Inoltre f_λ non ha nessun altro punto fisso in I .*

Dimostrazione. Il teorema segue dall'applicazione del teorema della funzione implicita. Definiamo $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Sappiamo della ipotesi del teorema che $G(x_0, \lambda_0) = 0$ e che $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0$. Possiamo quindi applicare il teorema della funzione implicita per concludere l'esistenza della funzione p con le proprietà richieste; $p(\lambda_0) = x_0$ e $G(p(\lambda), \lambda) = 0$. Inoltre $G(x, \lambda) = 0$ solo per $x = p(\lambda)$. \square

Vediamo alcuni esempio di biforazioni. Prendiamo $f_c(x) = x^2 + c$, con c parametro. I punti fissi sono per $x_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4c}}{2}$. Quindi: no punti fissi per $c > \frac{1}{4}$, un punto fisso per $c = \frac{1}{4}$ e due punti fissi per $c < \frac{1}{4}$.

Un altro caso è quando $f' = -1$; in questo caso ci può essere una biforcazione in cui cambia il carattere di un punto fisso. Ad esempio per $f_\lambda(x) = \lambda x$, passando attraverso $\lambda = -1$ il carattere del punto fisso 0 passa da attrattivo a repulsivo. Notiamo anche l'apparire di una famiglia di due cicli (

$f_{-1}(2) = -2$, $f_{-1}(-2) = 2 \dots$). Questo fenomeno in cui un punto fisso passa da stabile a instabile e al suo posto appare un 2-ciclo, viene anche detto *period-doubling bifurcation*.

Si tratta di una biforcazione che non ha analogo nel caso continuo. Consideriamo il sistema

$$x_{n+1} = -x_n - \mu x_n + x_n^3 \quad (1.7)$$

I punti fissi si ottengono per

$$f(x; \mu) - x = x(x^2 - (2 + \mu)) = 0 \quad (1.8)$$

e quindi abbiamo due curve di punti fissi, $x = 0$ (instabile per $\mu < -2$, stabile per $-2 < \mu < 0$ e instabile per $\mu > 0$) e $x^2 = 2 + \mu$ (instabili per $\mu > -2$ e non esistono per $\mu < -2$). Quindi per $\mu = 0$ abbiamo tre punti fissi instabili: come è possibile? Un fenomeno del genere non può succedere per sistemi 1d continui. Invece in questo caso ci salva il fatto che ci sono due orbite periodiche stabili che si biforcano da $(x, \mu) = (0, 0)$.

Il modello logistico discreto. Consideriamo come esempio il modello logistico discreto

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (1.9)$$

con $\lambda > 0$. Per semplicità limitiamoci a variabili a valori nell'intervallo unitario I . La mappa $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ ha due punti fissi $f(x_n) = x_n$ per $x_n = 0$ e $x_n = (\lambda - 1)/\lambda$. Siccome $f'(x_n) = \lambda(1 - 2x_n)$, il punto fisso $x_n = 0$ è attrattivo per $0 < \lambda < 1$ e repulsivo per $\lambda > 1$. Il secondo punto fisso è attrattivo per $1 < \lambda < 3$ e repulsivo per $\lambda > 3$, con una biforcazione a $\lambda = 3$. Inoltre il punto 1 è un due ciclo, visto che $f_\lambda(1) = 0$.

Prendiamo in particolare il caso $\lambda = 4$. Per questo valore la dinamica ha un andamento molto complicato. In questo caso $f_4(1/2) = 1$. Quindi $f_4([0, 1/2]) = f_4([1/2, 1]) = I$, entrambi gli intervalli vengono mappati sull'intero I . In particolare esistono $y_0 \in [0, 1/2]$ e $y_1 \in [1/2, 1]$ tali che $f_4(y_0) = f_4(y_1) = 1/2$. Andiamo a vedere la seconda iterazione: $f_4^2(1/2) = 0$, $f_4^2(y_0) = 1$ e $f_4^2(y_1) = 1$. Quindi abbiamo per gli intervalli $f_4^2([0, y_0]) = f_4^2([y_0, 1/2]) = I$ e $f_4^2([1/2, y_1]) = f_4^2([y_1, 0]) = I$. In tutto troviamo $4 = 2^2$ intervalli che vengono mappati in tutto I .

Con un argomento simile possiamo vedere che l' n -esima iterazione f_4^n mappa 2^n intervalli in tutto I . Similmente come abbiamo visto sopra f_4^2 ha quattro punti fissi: 0, $3/4$ e due punti periodici di periodo 2 (questo perché punti fissi di f^2 sono 2-cicli di f). Allo stesso modo vediamo che f_4^3 ha sei punti fissi, oltre a 0 e $3/4$ troviamo anche quattro punti di periodo 3. Per altre iterazioni la situazione diventa ancora più complicata.

Possiamo avere una idea di questa complicazione andando a vedere il grafico del diagramma di biforcazione (dove rimuoviamo i rami instabili della curva; questo è anche detto *orbit diagram*). Questo è in figura 1

Caos. Supponiamo di avere una funzione f definita su un intervallo $I = [\alpha, \beta]$ che manda I in se stesso. Diciamo che la funzione f è *caotica* se valgono

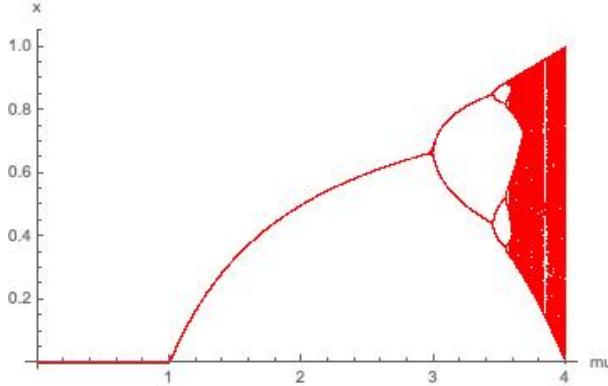


Figura 1: Orbit diagram. Quanto arriviamo vicino a 3, il punto critico diventa instabile e un punto critico stabile di periodo 2 viene creato. Più in avanti a 3.4 circa, questo diventa instabile e un punto critico di periodo 4 viene creato. Proseguendo il comportamento della mappa diventa caotico.

1. I punti periodici di f sono densi in I .
2. La funzione f è transitiva in I , cioè dati due sotto-intervalli $U_1, U_2 \subset I$, esistono $x_0 \in U_1$ e $n > 0$ tale che $f^n(x_0) \in U_2$.
3. f è sensibile rispetto alle condizioni iniziali in I . Esiste una costante β (di sensibilità) tale che per $x_0 \in U \subset I$ intervallo aperto, esistono un $y_0 \in U$ e $n > 0$ tali che $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$.

Si può dimostrare che la condizione numero 2) è equivalente all'esistenza di un'orbita che è densa in I .

Mappa a tenda. Consideriamo la funzione

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -2x + 2 & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (1.10)$$

chiamata la funzione a tenda. Si può vedere che questa mappa è caotica.

Infatti: l'iterata T^n manda gli intervalli $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$, per $k = 0, \dots, 2^n - 1$ in $[0, 1)$. Quindi si vede graficamente che T^n interseca la diagonale $y = x$ una volta in ogni intervallo. Pertanto ogni intervallo contiene un punto periodico di T . Quindi i punti periodici di T sono densi in I . Per quanto riguarda la transitività di T consideriamo due aperti U_1 e U_2 di I . Allora U_1 contiene un intervallo della forma $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ per n grande abbastanza. Ma T^n manda questo intervallo in tutto $[0, 1)$, che in particolare contiene U_2 . Infine prendiamo $x_0 \in I$. Come prima, ogni aperto U contenente x_0 viene mandato in $[0, 1)$ per n grande abbastanza. Allora possiamo trovare $y_0 \in U$ tale che $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| \geq \frac{1}{2} \equiv \beta$.

Coniugazione per sistemi dinamici discreti. Consideriamo due funzioni $f : I \rightarrow I$ e $g : J \rightarrow J$. Diciamo che f e g sono *coniugate* se esiste un omeomorfismo $h : I \rightarrow J$ tale che il

diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{f} & I \\
 \downarrow h & & \downarrow h \\
 J & \xrightarrow{g} & J
 \end{array} \tag{1.11}$$

commuta; cioè $h \circ f = g \circ h$. Notiamo in particolare che la funzione h porta orbite di f in orbite di g : il fatto che $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$ per $x \in I$ vuol dire a parole che h manda il punto n -esimo dell'orbita di x sotto l'azione di f nel punto n -esimo dell'orbita del punto $h(x)$ sotto l'azione di g .

L'importanza di questo concetto viene dal seguente teorema

Teorema 1.12. *Siano f e g definite come sopra, su intervalli finiti I e J . Supponiamo che f e g siano coniugate attraverso h . Allora se f è caotica in I , g è caotica in J .*

Dimostrazione. Consideriamo $U \subset J$ un aperto e $h^{-1}(J) \subset I$.

- Siccome f è caotica, i punti periodici sono densi in I e quindi possiamo trovare un punto periodico $x \in h^{-1}(U)$ per f . Chiamiamo n il periodo. Allora a causa delle proprietà di h , abbiamo $g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x)$. Quindi $h(x)$ è un punto periodico per g . Inoltre i punti periodici di g sono densi in J .
- Siano U e V due aperti di J . Per la transitività di f , esistono $x_1 \in h^{-1}(U)$ e $m > 0$ tali che $f^m(x_1) \in h^{-1}(V)$. Tuttavia $h(x_1) \in U$ e a causa delle proprietà di h abbiamo $g^m(h(x_1)) = h(f^m(x_1)) \in V$, il che dimostra che anche g è transitiva.
- Chiamiamo β la costante di sensitività di f . Denotiamo $I \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Assumiamo che $\beta < \alpha_1 - \alpha_0$. Prendiamo $x \in [\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$. La funzione $|h(x + \beta) - h(x)|$ è continua e positiva in $[\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$. Quindi questa funzione ha un minimo in $[\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$, che chiamiamo β' . Quindi h porta intervalli di lunghezza β in I in intervalli di lunghezza almeno β' in J . Segue dalle proprietà di h che β' è una costante di sensitività per g .

□

In maniera analoga diremo che h è un omeomorfismo di *semi-coniugazione* se invece di essere una funzione uno a uno, è una funzione al più n a uno, che soddisfa le stesse proprietà. Anche una semi-coniugazione preserva il comportamento caotico, su intervalli di lunghezza finita. L'unica differenza è che mappa cicli in cicli ma senza conservarne il periodo minimo.

Teorema 1.13. *La funzione logistica $f_4(x) = 4x(1 - x)$ è caotica.*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema costruiremo esplicitamente una semi-coniugazione tra la mappa logistica e la mappa della tenda sull'intervallo unitario. La semi-coniugazione è data da $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x)$. Questa funzione è 2 a 1 sull'intervallo $[0, 1]$, tranne che per il punto $1/2$, dove è uno a uno e $h(1/2) = 1$.

Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} h(T(x)) &= \frac{1}{2}(1 - \cos 4\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2\cos^2 2\pi x - 1) = 1 - \cos^2 2\pi x \\ &= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right) = f_4(h(x)). \end{aligned} \quad (1.14)$$

□

2 L'esponente di Liapunov

Introduciamo ora una misura quantitativa di caos, l'esponente di Liapunov associato ad una mappa. L'idea è che il comportamento caotico sia associato ad un tasso esponenziale di repulsione tra traiettorie vicine. Consideriamo

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2.1)$$

e prendiamo due condizioni iniziali x_0 e $x_0 + \epsilon$. Allora definiamo

$$\lambda = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{N} \log \frac{|f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)|}{\epsilon} \quad (2.2)$$

Quindi

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{df^N}{dx}(x_0) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log |(f^N)'(x_0)| \quad (2.3)$$

Prendendo le derivate, usando la regola di derivazione della funzione composta

$$\begin{aligned} (f^N)'(x_0) &= (f(f^{N-1}(x_0)))'(x_0) = (f'(f^{N-1}))(x_0) (f^{N-1})'(x_0) \\ &= f'(f^{N-1}(x_0)) (f'(f^{N-2}))(x_0) (f^{N-2})'(x_0) = \dots = \\ &= f'(f^{N-1}(x_0)) f'(f^{N-2}(x_0)) f'(f^{N-3}(x_0)) \dots f'(f(x_0)) f'(x_0) \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Allora assumendo che il limite esista

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)| \quad (2.5)$$

Notiamo che λ è funzione della condizione iniziale x_0 , e misura di quanto traiettorie che partono vicino si distanziano dalla traiettoria che parte per x_0 .

Ad esempio prendiamo un k -ciclo. Questo significa che l'iterazione di f produce solo k valori, che poi si ripetono. Ricordiamo che un punto critico è stabile se $|f'(x^*)| < 1$. Allo stesso modo possiamo dire che un k -ciclo è stabile se $|(f^k)'(x^*)| < 1$ (cioé x^* è un punto fisso stabile di f^k). Allora per un

k -ciclo stabile $\log |(f^k)'(x^*)| < \log 1 = 0$. Quindi¹

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)| = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log |f'(x_i)| \quad (2.7)$$

e usando la derivata di una funzione composta all'indietro

$$\lambda = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log |f'(x_i)| = \frac{1}{k} \log |(f^k)'(x_0)| < 0 \quad (2.8)$$

e quindi per un ciclo periodico stabile l'esponente di Liapunov è sempre negativo. Se abbiamo $|(f^k)'(x_0)| = 0$, allora $\lambda = -\infty$ e chiamiamo il ciclo superstabile.

Consideriamo adesso l'esponente di Liapunov della mappa a tenda. La definiamo come

$$T(x) = \begin{cases} 2r x & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2r(1-x) & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (2.9)$$

dove abbiamo introdotto un parametro r . Allora $|T'(x)| = 2r$ per $x \in [0, 1]$, tranne che per $x = \frac{1}{2}$ dove non è derivabile. Fuori da questo valore

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |T'(x_i)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log 2r = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} N \log 2r = \log 2r > 0 \quad (2.10)$$

per $r > \frac{1}{2}$, come nel caso che abbiamo trattato in precedenza.

3 Dinamica simbolica

Consideriamo adesso la mappa logistica $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ per $\lambda > 4$. In questo caso l'intervallo $I = [0, 1]$ non è più invariante e possiamo trovare delle orbite che scappano a $-\infty$. Infatti se $\lambda > 4$, esiste un intervallo A_0 tale che $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) > 1$ (centrato su $x = 1/2$). Allora $f_\lambda^2(x) = f_\lambda(x' > 1) = \lambda x'(1-x') < 0$. Queste orbite tendono a $-\infty$. Invece gli estremi di A_0 (quando $f_\lambda(x) = 1$) vanno in 0. Vogliamo capire come è fatto Λ , definito come l'insieme di tutti i punti di I tali che le loro orbite non escono da I .

Andiamo all'indietro: A_1 è la preimmagine di A_0 , cioè f_λ manda A_1 in A_0 . A_1 è costituito da due intervalli: i suoi estremi diventeranno eventualmente punti fissi dopo diverse iterazioni. La preimmagine di A_1 , chiamiamola A_2 , è costituita da 4 intervalli. In generale A_n è costituito da 2^n intervalli aperti di I dove l'iterata n -esima giace in A_0 , e quindi esce da I . Allora i punti le cui orbite non escono da I sono $\Lambda = I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

¹Abbiamo usato la relazione per il valor medio di una sequenza periodica di periodo p

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{j=1}^{n \bmod p} x_i \right) = \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{\frac{n}{p}} \sum_{i=1}^p x_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n \bmod p} x_i \quad (2.6)$$

dove nel primo termine il coefficiente tende a uno per $n \rightarrow \infty$ e il secondo termine (che è il resto e contiene solo un numero finito di sommandi) tende a zero.

Dividiamo $I - A_0 = I_0 \cup I_1$, che si trovano rispettivamente a sinistra e a destra. Se prendiamo $x_0 \in \Lambda$, l'intera orbita di x_0 giace in $I_0 \cup I_1$ (perchè gli x_0 in Λ non lasciano mai I). Gli associamo una sequenza

$$S(x_0) = (s_0 s_1 s_2 \cdots) \quad (3.1)$$

dove $s_j = k \iff f_\lambda^j(x_0) \in I_k$, con $k = 0, 1$. A parole le s valgono 0 o 1 a seconda che f_λ^j mandi x_0 in I_0 o in I_1 . Ad esempio $S(0) = (000 \cdots)$. Se prendiamo l'altro punto fisso in I_1 , $S(x^*) = (111 \cdots)$. Il punto 1 viene mandato in 0 $S(1) = (1000 \cdots)$ e così via.

Definiamo Σ come l'insieme di tutte le sequenze di 0 e 1. Un punto di Σ è quindi $s = (s_0 s_1 s_2 \cdots)$. Possiamo definire una distanza in Σ , definendo la metrica

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \quad (3.2)$$

Si può verificare che questa soddisfa le condizioni di una metrica

1. Positiva: $d(s, t) \geq 0$ e $d(s, t) = 0 \iff s = t$
2. Simmetrica: $d(s, t) = d(t, s)$
3. Disuguaglianza triangolare: $d(s, u) \leq d(s, t) + d(t, u)$

La metrica così definita è convergente perchè i numeratori sono tutti 0 o 1 e quindi per maggiorazione

$$d(s, t) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \quad (3.3)$$

Ad esempio $d(\overline{01}, \overline{10}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$ e $d(\overline{01}, \overline{1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3}$.

Proposizione 3.4. *Se $s_i = t_i$ per $i = 0, \dots, n$, allora $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$. Viceversa, se $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$, abbiamo che $s_i = t_i$ per $i = 0, \dots, n$*

Dimostrazione. Scriviamo

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq 0 + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n} \quad (3.5)$$

avendo introdotto $j = i - (n + 1)$. Viceversa se $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ deve essere $s_j = t_j$ per ogni $j \leq n$, altrimenti, siccome la distanza è maggiore o uguale ad uno qualsiasi dei suoi sommandi

$$d(s, t) \geq \frac{|s_j - t_j|}{2^j} = \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n} \quad (3.6)$$

perchè $j \leq n$. Abbiamo quindi un assurdo. \square

Abbiamo il risultato

Teorema 3.7. *La funzione itinerario $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ è un omeomorfismo per $\lambda > 4$.*

Dimostrazione. Per semplicità vediamo solo il caso di λ grande, cioè assumiamo esista K tale che $|f'_\lambda(x)| > K > 1$, per ogni $x \in I_0 \cup I_1$. Dimostriamo che è 1 a 1. Prendiamo $x, y \in \Lambda$ e supponiamo

$S(x) = S(y)$, cioè che abbiano lo stesso itinerario. Allora per ogni n , $f_\lambda^n(x)$ e $f_\lambda^n(y)$ stanno dallo stesso lato rispetto ad $\frac{1}{2}$ (entrambi in I_0 oppure in I_1). Siccome f ha la forma di una campana, f_λ è monotona nell'intervallo tra $f_\lambda^n(x)$ e $f_\lambda^n(y)$ e tutti i punti di questo intervallo rimangono in $I_0 \cup I_1$. Siccome $|f'_\lambda| > K > 1$, ad ogni iterazione successiva l'intervallo tra $f_\lambda^n(x)$ e $f_\lambda^n(y)$ viene espanso di un fattore K (per lo stesso argomento che abbiamo usato dimostrando il teorema 1.2) e quindi la loro distanza cresce ed eventualmente finiranno su lati opposti rispetto ad $\frac{1}{2}$. Questa è una contraddizione perché avevamo assunto che avessero lo stesso itinerario $S(x) = S(y)$.

Dimostriamo che è surgettiva. Prima, sia $J \subset I$ un intervallo chiuso. Allora

$$f_\lambda^{-n}(J) = \{x \in I | f_\lambda^n(x) \in J\} \quad (3.8)$$

è la preimmagine di J sotto f_λ^n . Allora si può vedere dal grafico di f_λ con $\lambda > 4$ che $f_\lambda^{-1}(J)$ consiste di due sottointervalli, uno in I_0 e uno in I_1 . Se abbiamo $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ troviamo $x \in \Lambda$ tale che $S(x) = s$. Per fare questo definiamo

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= \{x \in I | x \in I_{s_0}, f_\lambda^1(x) \in I_{s_1}, \dots, f_\lambda^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap f_\lambda^{-1}(I_{s_1}) \cap f_\lambda^{-2}(I_{s_2}) \cap \dots \cap f_\lambda^{-n}(I_{s_n}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Quindi

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f_\lambda^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}) \quad (3.10)$$

dove come prima

$$I_{s_1 \dots s_n} = \{x \in I | x \in I_{s_1}, f_\lambda^1(x) \in I_{s_2}, \dots\} \quad (3.11)$$

Se $I_{s_1 \dots s_n}$ è non vuoto $f_\lambda^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ è costituito da due sottointervalli chiusi, uno in I_0 e l'altro in I_1 . Quindi $I_{s_0} \cap f_\lambda^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ è un intervallo chiuso singolo. Quindi

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap f_\lambda^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}} \quad (3.12)$$

Allora abbiamo che $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n}$ è non vuoto e se prendiamo $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n}$ è tale che $x \in I_{s_0}$, $f_\lambda(x) \in I_{s_1}$ e così via. Quindi abbiamo $S(x) = (s_0 s_1 \dots)$. Notiamo che $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n}$ consiste di un punto solo, visto che S è 1 a 1.

Per finire dimostriamo che è continua. Prendiamo $x \in \Lambda$ e supponiamo $S(x) = (s_0 s_1 \dots)$. Prendiamo $\epsilon > 0$ e n tale che $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Per ogni possibile combinazione $t_0 \dots t_n$ prendiamo $I_{t_0 \dots t_n}$. Ci sono 2^n possibili combinazioni e quindi 2^n intervalli; $I_{s_0 \dots s_n}$ è uno di quegli intervalli. Inoltre, siccome sono tutte le possibili combinazioni, $\Lambda \subset \bigcup I_{t_0 \dots t_n}$. Allora possiamo scegliere un δ tale che $|x - y| < \delta$ e $y \in \Lambda$ implica $y \in I_{s_0 \dots s_n}$, cioè i primi $n + 1$ termini di $S(y)$ coincidono con $S(x)$.

Allora $d(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$ (per una proposizione precedente) e quindi S è continua. In modo simile si può anche dimostrare che S^{-1} è continua. \square

La mappa shift. Adesso costruiamo una mappa $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ che è caotica, coniugata a f_λ per $\lambda > 4$, ma più facile da comprendere. È definita come $\sigma(s_0 s_1 \dots) = (s_1 s_2 \dots)$, cioè cancellando il primo termine. È una mappa 2 a 1, $\sigma(0 s_1 s_2 \dots) = \sigma(1 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 \dots)$.

Proposizione 3.13. *La funzione $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ è continua.*

Dimostrazione. Prendiamo $s = (s_0 s_1 \dots) \in \Sigma$ and $\epsilon > 0$. Scegliamo inoltre n tale che $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ e prendiamo $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Se abbiamo $t = (t_0 t_1 \dots)$ tale che $d(s, t) < \delta$, allora $s_i = t_i$ per $i = 0, \dots, n+1$ per una proposizione precedente. Allora $\sigma(s) = (s_1 s_2 \dots)$ and $\sigma(t) = (s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} t_{n+2} \dots)$ e quindi $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$ e quindi σ è continua. \square

La funzione σ è abbastanza semplice che possiamo trovarne tutti i punti periodici. Ad esempio $(\bar{0})$ e $(\bar{1})$ sono punti fissi, $(\bar{0}\bar{1})$ e $(\bar{1}\bar{0})$ sono 2-cicli. In generale un punto periodico di periodo n è $(\overline{s_0 s_1 \dots s_{n-1}})$ perché ogni iterazione di σ elimina la prima entrata. In particolare i punti periodici sono densi: prendiamo un punto $t = (t_0 t_1 \dots)$ qualsiasi. Allora possiamo costruire un punto periodico prendendo i primi i termini $s = (\overline{t_0 \dots t_i})$. Quindi la distanza $d(s, t) \leq \frac{1}{2^i}$ e allora $\lim_{i \rightarrow \infty} d(s, t) = 0$ e quindi i punti periodici sono densi.

Teorema 3.14. *La funzione $S : \Lambda \longrightarrow \Sigma$ è una coniugazione tra f_λ e σ*

Dimostrazione. Siccome S è un omeomorfismo dobbiamo solo dimostrare che $S \circ f_\lambda = \sigma \circ S$. Prendiamo $x_0 \in \Lambda$. Allora $S(x_0) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ e quindi $x_0 \in I_{s_0}$, $f_\lambda(x_0) \in I_{s_1}$, $f_\lambda^2(x_0) \in I_{s_2}$ e così via. Cioè abbiamo l'itinerario di f_λ e quindi $S(f_\lambda) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$. Allora $S(f_\lambda(x_0)) = \sigma(S(x_0))$ \square

Possiamo esibire esplicitamente un punto periodico che ha un'orbita densa

$$s^* = (01|00011011|000001 \dots | \dots) \quad (3.15)$$

dove nel blocco i ci sono tutte le possibili sequenze di 0 e 1 di lunghezza i . In particolare se prendiamo un qualsiasi $t = (t_0 t_1 \dots)$ possiamo sempre trovare i primi n termini da qualche parte dentro s^* . Quindi esiste un k tale che

$$\sigma^k(s^*) = (t_0 t_1 \dots t_n s_{n+1} s_{n+2} \dots) \quad (3.16)$$

e quindi per un risultato precedente $d(\sigma^k(s^*), t) \leq \frac{1}{2^n}$. Questo implica che l'orbita di s^* sotto σ passa arbitrariamente vicino ad ogni punto di Σ , cioè è densa. In particolare σ è transitiva. Allo stesso modo in cui abbiamo trovato s^* possiamo costruire infiniti punti con orbite dense semplicemente rimaneggiando le posizioni dei blocchi. Notiamo che invece è molto difficile trovare orbite dense di f_λ .

Per finire σ è sensitiva ai dati iniziali. Ad esempio dato un $s = (s_0 s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} s_{n+2} \dots)$ qualsiasi possiamo costruire un punto arbitrariamente vicino $s' = (s_0 s_1 s_2 \dots \hat{s}_n \hat{s}_{n+1} \hat{s}_{n+2} \dots)$ dove \hat{s} nega s , se $s = 0$, $\hat{s} = 1$ e viceversa. Quindi abbiamo che $d(s, s') \leq \frac{1}{2^n}$ ma $d(\sigma(s), \sigma(s')) = 2$, la distanza massima tra due punti di Σ . Abbiamo quindi dimostrato che

Teorema 3.17. *La mappa σ è caotica in Σ . Quindi f_λ è caotica in Λ per $\lambda > 4$.*

Quindi σ produce un modello calcolabile di una funzione caotica.

4 L'insieme di Cantor

Il nostro insieme Λ è un esempio di un insieme di Cantor (Georg Cantor 1845-1918). In questa Sezione descriveremo l'insieme di Cantor più semplice. Definiamo C come segue: prendiamo l'intervallo $I = [0, 1]$ e applichiamo ricorsivamente la regola che ad ogni intervallo chiuso togliamo l'aperto centrale di lunghezza $\frac{1}{3}$ dell'intervallo di partenza. Al passo n -esimo abbiamo 2^n chiusi di lunghezza

$\frac{1}{3^n}$. L'insieme di Cantor è definito per $n \rightarrow \infty$ (e si può dimostrare che è omeomorfo al nostro Λ).

Definiamo l'indirizzo di ciascun punto din C : ad ogni passo un punto di C si trova in uno degli intervalli a destra R o a sinistra L del pezzo che viene rimosso a quel passo. Quindi gli associamo una stringa infinita, ad esempio $LRLLLRLR\cdots$. Ad esempio: $0 = LLL\cdots$, $1 = RRR\cdots$, $\frac{1}{3} = LRRR\cdots$, $\frac{7}{9} = RLRRR\cdots$. Questi esempi sono estremi di intervalli. La maggior parte dei punti di C però non è l'estremo di nessun intervallo. Ad esempio il punto $LRLRLRLR\cdots$ è dentro $[0, \frac{1}{3}] \cap [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cap [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cap [\frac{20}{81}, \frac{7}{27}] \cap \cdots$.

Proposizione 4.1. *L'insieme C non è numerabile.*

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che C sia numerabile. Allora possiamo associare un intero ad ogni indirizzo, ad esempio $1 \leftrightarrow LLLL\cdots$, $2 \leftrightarrow RRRR\cdots$, $3 \leftrightarrow LRLR\cdots$, $4 \leftrightarrow RLRL\cdots$, e così via. Costruiamo un indirizzo che non è in questa lista: è l'indirizzo che al posto i -esimo ha la negazione dell'entrata i -esima dell'elemento i -esimo della lista. Visto che è costruito negando un elemento di ogni stringa, questo indirizzo non fa parte della lista di cui sopra. \square

Possiamo descrivere C nel modo seguente. Scriviamo ogni $x \in [0, 1]$ in base 3, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ con $a_i = 0, 1, 2$ a seconda che si trovi nel primo, secondo o ultimo terzo dell'intervalllo i -esimo. Quindi i punti di C sono i punti di $[0, 1]$ che possono essere scritti nell'espansione in base 3 senza che vi appaia 1 (notiamo che l'espansione in base 3 non è unica, ad esempio $\frac{1}{3} = 0.10000\cdots = 0.02222\cdots$). Basta che esista una rappresentazione senza 1).

Proposizione 4.2. *C ha tanti punti quanti $[0, 1]$*

Dimostrazione. Se $x \in C$, allora $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ con $a_i = 0, 2$. Se sostituiamo ad ogni 2 un 1, possiamo pensare alla stringa di a_i come all'espansione binaria di un numero qualsiasi in $[0, 1]$ (la corrispondenza è al più 2 a 1). \square

Proposizione 4.3. *C ha misura nulla.*

Dimostrazione. Basta che facciamo la somma delle lunghezze degli intervalli rimossi

$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + 4\frac{1}{27} + \cdots = \frac{1}{3} \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \quad (4.4)$$

\square

Approfondimenti

- Morris W. Hirsch, Stephen Smale and Robert L. Devaney *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* Academic Press (2012)
- G.C. Layek *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos* Springer (2015)