Sistemi Dinamici Lineari

Michele Cirafici

DMG & INFN & IGAP, Trieste, Italy
Email: mcirafici@units.it

Dispense per uso interno - da ricontrollare

2 aprile 2025

Indice

In questo capitolo consideriamo sistemi dinamici lineari.

1 Sistemi di equazioni differenziali

Le equazioni differenziali più semplici sono quelle lineari. In particolare la linearità implica che lo spazio delle fasi ha una struttura lineare e quindi può essere naturalmente pensato come uno spazio vettoriale. Per sistemi n-dimensionali è naturale modellare lo spazio delle fasi su $\mathbb{R}^n$. Quindi il campo vettoriale determinato da f diventa più semplicemente una funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineare. Quindi può essere rappresentata da una matrice $A \in \mathsf{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ come $f(x) = A\, x$, per $x \in \mathbb{R}^n$. Il sistema di equazioni differenziali diventa semplicemente

$$\dot{x} = A\, x \tag{1.1}$$

Il modo più comune di approcciare questo problema è quello di andare a vedere autovalori e autovettori della matrice A

$$A\, v = \lambda\, v \tag{1.2}$$

Questa equazione viene risolta studiando gli zeri del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det\left(\lambda I - A\right) = 0 \tag{1.3}$$

Questo è un polinomio di grado n e ha quindi n zeri λ_i, contati con la loro molteplicità. Se alcuni autovalori sono identici, il polinomio caratteristico assume la forma $(r - \lambda)^k\, q(r)$ e in questo caso parliamo di un autovalore λ con multiplicità algebrica k.

Autovettori v sono associati con soluzioni semplici dell'equazione differenziale. Se assumiamo che $x(t) = c(t)\, v$, sostituendo troviamo che $\dot{c}\, v = c\, A\, v = c\, \lambda\, v$ da cui, per $v \neq 0$ implica $c(t) = c_0\, \mathrm{e}^{\lambda t}$. Quindi $x(t) = c_0\, \mathrm{e}^{\lambda t}\, v$ è una soluzione di (1.1).

Siccome le soluzioni di equazioni lineari formano uno spazio vettoriale, se abbiamo k autovettori distinti possiamo formare il vettore

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}\, v_i \tag{1.4}$$

che risolve (1.1). Nel caso più semplice $k = n$ e quindi abbiamo trovato n soluzioni linearmente indipendenti. In generale un autovalore λ ha multeplicità geometrica k se ha k autovettori linearmente indipendenti, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ con $k = \dim \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$. La molteplicità geometrica di un autovalore

λ è al più la sua molteplicità algebrica. Quando queste coincidono per tutti gli autovalori, ci sono n autovettori indipendenti e la matrice degli autovettori $P = [v_1, \ldots, v_n]$ (cioè la matrice che ha come colonne gli autovettori) è non singolare, $\det P \neq 0$.

In questo caso la matrice A è diagonalizzabile, attraverso la trasformazione di similitudine $A \longrightarrow P^{-1}\,A\,P = \Lambda$, con $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Allora la soluzione di (1.1) si trova ponendo $y = P^{-1}x$ da cui

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}A\,x = P^{-1}\,A\,P\,y = \Lambda\,y \tag{1.5}$$

che è un sistema di equazioni differenziali disaccoppiate del tipo $\dot{y}_i = \lambda_i\,y_i$, quindi con soluzioni $y_i(t) = c_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}$. Se introduciamo la matrice

$$\mathrm{e}^{t\Lambda} = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}\right) \tag{1.6}$$

abbiamo

$$x(t) = P\,y = P\,\mathrm{e}^{\Lambda t}\,c \tag{1.7}$$

dove c è la matrice dei coefficienti c_i. In particolare se abbiamo condizioni iniziali $x(0) = x_0$, vediamo $x_0 = P\,c$ e quindi risolviamo per i coefficienti come $c = P^{-1}\,x_0$.

2 Sistemi lineari planari

Discutiamo adesso l'analisi qualitativa generale dei sistemi planari. Cominciamo a considerare un sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}\,x + a_{12}\,y \\ \dot{y} = a_{21}\,x + a_{22}\,y \end{cases}, \tag{2.1}$$

e denotiamo con $A = \{a_{ij}\}$ la matrice dei coefficienti. Ogni soluzione di questo sistema può essere rappresentata come una curva, o traiettoria, nel piano (x, y). Vogliamo capire, almeno qualitativamente, come sono fatte le traiettorie nel piano (x, y) al variare del parametro t. Localmente l'andamento delle traettorie è determinato da $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Per capire l'andamento delle traiettorie, può essere utile considerare le linee per cui si abbia $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ costante, dette *isocline*. Ad esempio lungo l'isoclina con $\dot{x} = 0$, le traiettorie hanno vettori tangenti verticali (o sono stazionarie), mentre per $\dot{y} = 0$ non c'è moto nella direzione verticale e tutti i vettori tangenti sono orizzontali (o le traiettorie sono stazionarie).

Il comportamento del sistema dipende dalla matrice A. Assumiamo che $\det A \neq 0$ (se $\det A = 0$, almeno uno degli autovalori è zero; in particolare l'origine non è l'unico punto critico). I punti critici si possono classificare a seconda degli autovalori di A.

Autovalori reali Supponiamo ad esempio che A abbia due autovalori distinti e reali. Allora possiamo diagonalizzare il sistema per ottenere

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1\,x \\ \dot{y} = \lambda_2\,y \end{cases}. \tag{2.2}$$

Figura 1: Autovalori reali: 1) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. 2) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. 3) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

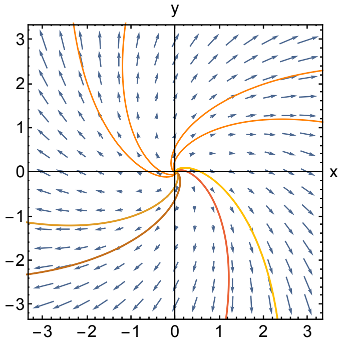

Figura 2: Autovalori complessi coniugati: 1) $\alpha > 0$, $\beta > 0$. 2) $\alpha < 0$, $\beta < 0$. 3) $\alpha = 0$, $\beta > 0$.

Le traiettorie si possono trovare integrando $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\lambda_2\, y}{\lambda_1\, x}$, cioé $|y|^{\lambda_1} = K\,|x|^{\lambda_2}$. La loro forma dipende dagli autovalori, come illustrato in figura 1.

Autovalori complessi Se gli autovalori sono complessi coniugati e distinti, $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$, il sistema (2.1) ha la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha\, x + \beta\, y \\ \dot{y} = -\beta\, x + \alpha\, y \end{cases}, \tag{2.3}$$

che possiamo riscrivere in coordinate polari ($x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$)

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha\, r \\ \dot{\theta} = -\beta \end{cases}, \tag{2.4}$$

La seconda equazione stabilisce se le traiettorie si muovono in direzione oraria o antioraria intorno all'origine ($\beta \neq 0$ perché stiamo assumendo che gli autovalori siano distinti). La forma delle traiettorie è illustrata in figura 2.

Argomenti simili valgono quando abbiamo due autovalori reali uguali.

Se escludiamo il caso in cui le traiettorie spiraleggiano, abbiamo delle traiettorie speciali (linee rette lungo le quali abbiamo crescita o decadimento esponenziale delle soluzioni). Queste corrispondono agli autovettori della matrice A (reali e distinti). Lungo gli autovettori, se le traiettorie si muovono verso il punto critico per $t \longrightarrow +\infty$, parliamo di un *sottospazio stabile*, mentre se le traiettorie si allontanano dal punto critico $t \longrightarrow +\infty$, l'autovettore identifica un *sottospazio instabile*.

3 Esponenziale di operatori limitati e soluzione fondamentale

Torniamo al caso generale. Ci serviranno alcuni risultati sull'esponenziale di operatori lineari. Dato un operatore lineare T, questo è formalmente definito da

$$\mathrm{e}^{T} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \tag{3.1}$$

Se la serie converge, e^{T} definisce un operatore lineare. La convergenza è assicurata se T è un operatore limitato[1], che è sempre il caso per operatori lineari su $\mathbb{R}^n$, dove quindi possiamo vedere T come una matrice $n \times n$.

Per la matrice esponenziale valgono le seguenti proprietà (la cui dimostrazione è lasciata per esercizio, usando la definizione in serie di potenze)

- $e^0 = \mathrm{id}$
- $\left(e^T\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-T}$
- Se A e B commutano, allora $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B}$
- Se B è non-singolare, $\mathrm{e}^{BAB^{-1}} = B\,\mathrm{e}^{A}B^{-1}$
- Se $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora $\mathrm{e}^{\Lambda} = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n}\right)$
- Se $T\,v = \lambda\,v$, allora $\mathrm{e}^{T}\,v = \mathrm{e}^{\lambda}\,v$

Una proprietà importante, che non useremo, è la formula di Baker-Campbell-Hausdorff. Nel caso in cui A e B siano matrici che non commutano, cioé $[A, B] = A\,B - B\,A \neq 0$, abbiamo $\mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B} = \mathrm{e}^{C}$ dove i primi termini della matrice C sono

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots \tag{3.2}$$

Abbiamo il seguente
Teorema 3.3. *Sia $A \in \mathsf{Mat}(n \times n)$. Allora il problema ai dati iniziali*

$$\dot{x} = A\,x\ , \qquad x(0) = x_0 \tag{3.4}$$

ha l'unica soluzione $x(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0$

Quindi per risolvere sistemi di equazioni differenziali ordinarie basta saper calcolare l'esponenziale della matrice A

[1] Dall'analisi, un operatore è limitato quando $||T|| = \sup_{|x|=1} |T(x)| < \infty$.

Dimostrazione. Prima dimostriamo che abbiamo effettivamente una soluzione. Ricordiamo che una matrice commuta con i multipli di se stessa; quindi

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{\,tA} &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\,(t+h)A}-\,\mathrm{e}^{\,tA}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\,hA}-\mathrm{id}}{h}\,\mathrm{e}^{\,tA} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(hA)^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{\,tA}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{hA}{h}+\sum_{n=2}^{\infty}h^{n-1}\frac{A^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{\,tA} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{hA}{h}+h\sum_{n=0}^{\infty}h^n\frac{A^{n+2}}{(n+2)!}\right)\mathrm{e}^{\,tA} =\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{hA}{h}+h\,T_{A,h}\right)\mathrm{e}^{\,tA} = A\,\mathrm{e}^{\,tA}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

dove abbiamo usato che $\sum_{n=0}^{\infty}h^n\frac{A^{n+2}}{(n+2)!}$ converge ad un certo operatore lineare $T_{A,h}$ e quindi $hT_{A,h}\longrightarrow 0$ per $h\longrightarrow 0$.

A questo punto è facile verificare che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,\mathrm{e}^{\,tA}x_0) = A\,\mathrm{e}^{\,tA}x_0 = Ax$.

Per dimostrare l'unicità, supponiamo di avere un'altra soluzione y. Allora

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\,\mathrm{e}^{\,-tA}y(t)\big) = -A\,\mathrm{e}^{\,-tA}y(t)+\,\mathrm{e}^{\,-tA}Ay(t) = \big(-A\,\mathrm{e}^{\,tA}+\,\mathrm{e}^{\,-tA}A\big)\,y(t) = 0 \tag{3.6}
$$

perché A e $\mathrm{e}^{\,-tA}$ commutano. Allora abbiamo appena dimostrato che $\mathrm{e}^{\,-tA}y(t) = y_0$, una costante e quindi che $y(t) = \,\mathrm{e}^{\,tA}y_0$. Imponendo le condizioni iniziali, vediamo che $y_0 = x_0$ e quindi che $y(t)$ coincide con $x(t)$. □

Autovalori complessi. Siccome la matrice A è reale, sa ha un autovalore complesso $\lambda = a+\,\mathrm{i}\,b$, con autovettore v, allora anche $\overline{\lambda} = a-\,\mathrm{i}\,b$ è autovalore, con autovettore $\overline{v}$. Se scriviamo $v = u+\,\mathrm{i}\,w$, possiamo scrivere l'equazione agli autovalori come

$$
\begin{aligned}
A\,u &= a\,u - b\,w\\
A\,w &= b\,u + a\,w
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Conviene introdurre la notazione $P = [u, w]$, per la matrice $n\times 2$ le cui due colonne sono i vettori u e v. Allora possiamo scrivere

$$
A\,P = P\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix} \equiv PB \tag{3.8}
$$

dove abbiamo definito la matrice B.

In maniera analoga, supponiamo ora di avere k autovalori reali e $2m$ autovalori complessi. Assumiamo che i corrispondenti autovettori $(v_1,\ldots,v_k,u_1,w_1,\ldots,u_m,w_m)$ siano linearmente indipendenti e definiamo la matrice

$$
P = [v_1,\ldots,v_k,u_1,w_1,\ldots,u_m,w_m] \tag{3.9}
$$

Siccome questa matrice è non-singolare, abbiamo che

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_1 & & 0 \\ \vdots & & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & B_m \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

cioé è diagonale a blocchi, con blocchi 1×1 dati da λ_j e blocchi 2×2 dati da matrici B_i come sopra. Quindi possiamo scrivere $P^{-1}AP$ come somma di $k+m$ matrici, fatte di zeri e con λ_i o B_i sulla diagonale in posizione i-esima. Tutte queste matrici commutano tra di loro, e quindi possiamo esponenziarle senza problemi. Ne segue che

$$\mathrm{e}^{tA} = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \cdots & & \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \mathrm{e}^{tB_1} & \\ & \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \tag{3.11}$$

Quindi se sappiamo calcolare e^{tB}, sappiamo calcolare l'esponenziale di ogni matrice diagonalizzabile. Vediamo come fare.

Scriviamo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\,\mathrm{id} + b\,\sigma \tag{3.12}$$

con

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

In particolare $[\mathrm{id}, \sigma] = 0$. Vediamo l'esponenziale di σ. Abbiamo che $\sigma^2 = -\mathrm{id}$, $\sigma^3 = -\sigma$, $\sigma^4 = \mathrm{id}$. Quindi

$$\mathrm{e}^{t\sigma} = \mathrm{id} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} t^{2j} + \sigma \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Quindi

$$\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \cos b\,t & \sin b\,t \\ -\sin b\,t & \cos b\,t \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Decomposizione semisemplice-nilpotente. Supponiamo di avere un operatore lineare $T : E \longrightarrow E$, dove E è uno spazio vettoriale complesso (o reale se tutti gli autovalori di T sono reali). Un'autovettore v è definito dalla proprietà che $v \in \ker(T - \lambda\,\mathrm{id})$. Se adesso abbiamo un autovalore λ_k di T con molteplicità algebrica n_k, possiamo definire l'*autospazio generalizzato* come

$$E_k = \ker\left((T - \lambda_k\,\mathrm{id})^{n_k}\right) \tag{3.16}$$

Gli autospazi generalizzati sono invarianti sotto l'azione di T. Cioé se $v \in E_j$, allora $T\,v \in E_j$. Infatti

$$(T-\lambda_k\,\mathrm{id})^{n_k} T\,v = (T-\lambda_k\,\mathrm{id})^{n_k} T\,v - (T-\lambda_k\,\mathrm{id})^{n_k} v\,\lambda_k \tag{3.17}$$

$$= (T-\lambda_k\,\mathrm{id})^{n_k}\,(T\,v-\lambda_k\,v) = (T-\lambda_k\,\mathrm{id})(T-\lambda_k\,\mathrm{id})^{n_k} v = 0 \tag{3.18}$$

siccome $(T-\lambda_k\,\mathrm{id})$ commuta con se stessa.

In maniera analoga definiamo un *autovettore generalizzato* come la soluzione di $(T-\lambda_k\,\mathrm{id})^{n_k} v = 0$, Abbiamo il seguente risultato, non banale

Teorema 3.19 (Decomposizione primaria)**.** *Sia $T : E \longrightarrow E$ con autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Allora $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ dove $\dim E_i$ è la multiplicità algebrica di λ_i*

Per la dimostrazione si veda (Hirsch-Smale).

In particolare una consequenza di questo teorema è che gli autovettori generalizzati $\{v_1, \ldots, v_{n_j}\}$ formano una base per E_j. Quindi la matrice $P = [v_1, \ldots, v_n]$ è non singolare e possiamo definire

$$S = P\Lambda P^{-1} \tag{3.20}$$

dove $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. La matrice S contiene l'informazione sugli autovalori di A. Una matrice diagnalizzabile da una trasformazione di similitudine si dice *semi-semplice.* I seguenti teoremi, che non dimostriamo, ci dicono che la matrice A si può decomporre in modo unico come $A = S + N$, somma di due matrici, una semi-semplice e l'altra nilpotente.

Teorema 3.21. *Data la matrice A costruiamo $S = P\Lambda P^{-1}$. Definiamo $N = A - S$. Allora $[N, S] = 0$. Inoltre N è nilpotente, con ordine al più il massimo delle molteplicità algebriche degli autovalori di A.*

Teorema 3.22. *La matrice A definita su uno spazio vettoriale complesso E ha un'unica decomposizione $A = S + N$ dove S è semi-semplice, N nilpotente e $[N, S] = 0$.*

Adesso mettiamo tutto insieme. Abbiamo la nostra matrice A e vogliamo calcolare e^{tA}. Il risultato è

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tS}\,\mathrm{e}^{tN} = P\,\mathrm{e}^{t\Lambda}\,P^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(t\,N)^i}{i!}\right) \tag{3.23}$$

dove n è l'intero per cui $N^n = 0$.

4 Stabilità per sistemi lineari

Abbiamo di fatto visto come risolvere un sistema dinamico lineare. Ci preoccupiamo ora di studiarne la stabilità. Intuitivamente per un sistema lineare, la stabilità è legata all'andamento delle soluzioni per $t \longrightarrow \infty$. Siccome la soluzione ha la forma $x(t) = \mathrm{e}^{tA} x_0$, è lo spettro degli autovalori di A a determinare se gli esponenziali crescono o decadono. Abbiamo quindi la definizione

Definizione 4.1. *Un sistema dinamico lineare si dice spettralmente stabile se nessuno dei suoi autovalori ha parte reale positiva.*

Usando il teorema di decomposizione primaria possiamo scrivere $E = E^u \oplus E^c \oplus E^s$ dove, scrivendo gli autovettori generalizzati come $v_i = u_i + \mathrm{i}\,w_i$

- $E^u = \mathrm{Span}\{u_i, w_i | \mathrm{Re}\,(\lambda_i) > 0\}$ è detto sottospazio instabile
- $E^c = \mathrm{Span}\{u_i, w_i | \mathrm{Re}\,(\lambda_i) = 0\}$ è detto sottospazio centrale
- $E^u = \mathrm{Span}\{u_i, w_i | \mathrm{Re}\,(\lambda_i) < 0\}$ è detto sottospazio stabile

In particolare questi sottospazi sono sottospazi invarianti.
Definizione 4.2. *Un sistema dinamico lineare si dice iperbolico se $E^c = \emptyset$, cioé se tutti gli autovalori hanno parte reale non zero.*

Sistemi dinamici iperbolici presentano il caso generico; di norma gli autovalori hanno parte reale nulla solo per valori speciali dei parametri del problema. Associato a questa situazione è lo studio delle biforcazioni.

Una definizione più forte di stabilità è
Definizione 4.3. *Un sistema dinamico lineare si dice linearmente stabile se tutte le soluzioni sono limitate per $t \longrightarrow \infty$*

In particolare le soluzioni nel sottospazio stabile (con $x_0 \in E^s$) sono tutte limitate per $t > 0$, mentre se $x_0 \in E^u$ tutte le soluzioni non sono limitate. Nel sottospazio centrale possono essere limitate o no (non lo sono se la matrice nilpotente N è non banale, perché in quel caso sono presenti termini t^k).

Una definizione ancora più forte è
Definizione 4.4. *Un sistema dinamico lineare si dice asintoticamente linearmente stabile se tutte le soluzioni vanno a 0 per $t \longrightarrow \infty$, e quindi $E = E^s$.*

In particolare abbiamo il seguente risultato
Teorema 4.5. *Abbiamo che $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{tA}\, x_0 = 0$ per tutti x_0 se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa.*

Dimostrazione. Vediamo uno sketch della dimostrazione, aggiungete dettagli per esercizio.

Se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, allora abbiamo $x_0 \in E^s$ e tutti i termini della soluzione hanno l'andamento $t^k\, e^{ta_i}\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, tb_i}$ per autovalori $\lambda_i = a_i + \mathrm{i}\, b_i$. Gli esponenziali complessi corrispondono a seni e coseni che sono limitati, quindi di fatto possiamo solo guardare $t^k\, \mathrm{e}^{\,ta_i}$. Quindi le soluzioni sono limitate e in particolare vanno a zero per $t \longrightarrow \infty$.

Viceversa, se abbiamo un autovalore con parte reale positiva, possiamo prendere condizioni iniziali nel sottospazio instabile associato a quell'autovalore e trovare una soluzione che cresce in maniera esponenziale. In maniera analoga, se abbiamo un autovalore con parte reale nulla, possiamo trovare una condizione iniziale per la quale soluzioni sono del tipo $t^k\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, b_i t}$ che non vanno a zero per $t \longrightarrow \infty$. □

Analoghe considerazioni valgono nel limite $t \longrightarrow -\infty$.

5 Oscillatori armonici disaccopiati

Come applicazione andiamo a studiare un sistema di due oscillatori armonici disaccoppiati

$$\dot{x}_i = \omega_i\, y_i \tag{5.1}$$

$$\dot{y}_i = -\omega_i\, x_i \tag{5.2}$$

per $i = 1, 2$. Derivando la prima equazione e sostituendovi la seconda troviamo appunto l'equazione di un oscillatore armonico. Riscriviamo il sistema in coordinate polari

$$x_i = r_i \cos\theta_i \tag{5.3}$$

$$y_i = r_i, \sin\theta_i \tag{5.4}$$

Derivando $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ troviamo che $\dot{r}_i = 0$. Similmente derivando $\tan\theta_i = y_i/x_i$ troviamo $\dot{\theta}_i = -\omega_i$.

Allora il sistema in coordinate polari ha la forma

$$\dot{r}_i = 0 \tag{5.5}$$

$$\dot{\theta}_i = -\omega_i \tag{5.6}$$

con $i = 1, 2$. Quindi r_1 e r_2 sono costanti lungo tutte le soluzioni. Possiamo fissarli, ad esempio a $r_1 = r_2 = 1$. Le due variabili θ_1 e θ_2 sono periodiche. Quindi le traiettorie giacciono su un toro in $\mathbb{R}^4$. Sul toro il sistema diventa

$$\dot{\theta}_1 = -\omega_1 \tag{5.7}$$

$$\dot{\theta}_2 = -\omega_2 \tag{5.8}$$

Se vediamo il toro come un quadrato i cui lati vengono identificati, allora il campo vettoriale ha pendenza costante $\dot{\theta}_1/\dot{\theta}_2 = \omega_2/\omega_1$. Questo significa che quando una soluzione raggiunge per esempio $\theta_1 = 2\pi$ ad un certo valore $\theta_2 = c$ riappare a $\theta_1 = 2\pi$ con lo stesso valore $\theta_2 = c$ e la stessa pendenza.

Se ω_2/ω_1 è un numero razionale n/m la soluzione attraversa gli estremi del quadrato, n volte verticalmente e m volte orizzontalmente prima di tornare al punto di partenza.

Nel caso irrazionale le cose si fanno più interessanti. Definiamo la *mappa di Poincaré* come la mappa che associa ad un punto $x_0 = \theta_{2,0}$ per $\theta_1 = 0$, la coordinata sul cerchio θ_2 della traiettoria quando ritorna a $\theta_1 = 0$. Questo punto viene detto il punto del primo ritorno.

Supponiamo che il primo ritorno avvenga al punto $\theta_2(\tau)$, dove τ è il tempo per cui $\theta_1(\tau) = 2\pi$. Siccome $\theta_1(t) = \theta_1(0) + \omega t$, $\theta_1(\tau) = 2\pi = \omega_1 \tau$ da cui $\tau = 2\pi/\omega_1$. Allora $\theta_2(\tau) = x_0 + \omega_2(2\pi/\omega_1)$. Quindi la mappa di Poincaré sul cerchio è definita da

$$f(x_0) = x_0 + 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1} \mod 2\pi \tag{5.9}$$

cioé ruota i punti del cerchio θ_2 di un angolo $2\pi\omega_2/\omega_1$. Questa mappa associa un sistema dinamico discreto ad un sistema dinamico continuo.

Si può dimostrare che per ω_2/ω_1 irrazionale l'orbita di x_0 è densa nel cerchio.

Approfondimenti

- Morris W. Hirsch, Stephen Smale and Robert L. Devaney *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* Academic Press (2012)

- G.C. Layek *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos* Springer (2015)