Sistemi Dinamici e Caos

Michele Cirafici

DMG & INFN & IGAP, Trieste, Italy
Email: mcirafici@units.it

Dispense per uso interno - da ricontrollare

6 maggio 2024

Indice

1 Generalità

Non cè una definizione universalmente accettata di caos. In questo capitolo ne daremo una comune e vedremo alcune properità. In questa definizione un sistema dinamico si dice caotico se esibisce sensibilità rispetto alle condizioni iniziali ed è transitivo. Vedremo cosa vuol dire.

Definizione 1.1. *Diciamo che un flusso φ ha una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali su un insieme invariante X se esiste un r fissato tale che per ogni $x \in X$ e ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $y \in B_\varepsilon(x) \cap X$ tale che $|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| > r$ per un qualche $t \geq 0$.*

Questa proprietà significa in pratica che un piccolo errore nelle condizioni iniziali può diventare molto grande dopo abbastanza tempo (notiamo che la definizione non dice che questo succede necessariamente, ma che esiste un punto y con questa proprietà). Sistemi di questo tipo possono essere molto complicati da simulare al computer. Tuttavia non è vero che sistemi che esibiscono una dipendenza sensibile siano necessariamente complicati.

Ad esempio prendiamo un sistema lineare $\dot{x} = A\,x$ e $X = \mathbb{R}^n$. Assumiamo che un autovalore λ di A abbia parte reale positiva. Se poniamo $y = x + \varepsilon v$, con v autovettore di λ. Allora abbiamo che $|\varphi_t(y) - \varphi_t(x)| = \varepsilon |v| \, \mathrm{e}^{(\lambda)\mathrm{t}}$.

In particolare la definizione non specifica il tasso di separazione delle orbite. Diremo che due orbite si separano esponenzialmente se

$$|\varphi_t(y) - \varphi_t(x)| \sim c \, \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{1.2}$$

Ci sono altre possibilità, ad esempio due orbite possono separarsi in modo lineare, o polinomiale.

La seconda proprietà che richiediamo è che il sistema "vagabondi un pò ovunque":

Definizione 1.3. *Un flusso φ si dice topologicamente transitivo su un insieme invariante X se dati $U, V \subset X$ aperti non vuoti, esiste un $t > 0$ tale che $\varphi_t(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Si può dimostrare (teorema di Birkhoff) che questo implica l'esistenza di un punto la cui orbita è densa in X.

A questo punto abbiamo la

Definizione 1.4. *Un flusso φ si dice caotico su un insieme invariante compatto X se φ è transitivo e dipende in maniera sensibile dalle condizioni iniziali su X.*

È essenziale che X sia compatto. Come abbiamo detto ci sono varie definizioni di caos. Quella che abbiamo dato ha la proprietà che è preservata da coniugazione topologica

Teorema 1.5. *Siano $\varphi_t : X \longrightarrow X$ e $\psi_t : Y \longrightarrow Y$ con X e Y compatti. Supponiamo che φ sia caotico in X. Allora se ψ è coniugato a φ, ψ è caotico.*

Per cercare di capire se due traiettorie si allontanano possiamo cercare di guardarne la struttura locale, linearizzando. Sappiamo come linearizzare la teoria vicino ad un equilibrio, ma cosa vuol dire linearizzare vicino ad una traiettoria? Prendiamo un punto $x \in M$. Intorno ad x la struttura di M è approssimata dal suo spazio tangente, generato dai vettori tangenti ad x, $T_x M$. Se adesso immaginiamo di variare x in modo continuo, otteniamo il fibrato tangente

$$TM = \{(x, v) \,:\, x \in M \,, v \in T_x M\} \tag{1.6}$$

che ad ogni punto $x \in M$ associa il suo spazio tangente $T_x M$. Fissiamo ora una traiettoria $\varphi_t(x_0)$, che parte da un punto x_0, e chiediamoci come sono le traiettorie vicine. Prendiamo $\varphi_t(x_0 + \varepsilon v_0)$, dove v_0 è un vettore fissato. Al primo ordine in ϵ

$$\varphi_t(x_0 + \varepsilon v_0) \sim \varphi_t(x_0) + \varepsilon D_x \varphi_t(x_0) v_0 + \cdots \tag{1.7}$$

Questo significa che al tempo t, il vettore v_0 è diventato $v(t) = D_x \varphi_t(x_0) v_0$. Cerchiamo un equazione differenziale per $v(t)$. Abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\varphi_t(x_0) + \varepsilon v(t)\right) \sim f(\varphi_t(x_0)) + \varepsilon D f(\varphi_t(x_0)) v(t) + \cdots \tag{1.8}$$

Quindi $\dot{v} = Df(\varphi_t(x_0))v$. Se definiamo $A(t) = Df(\varphi_t(x_0))$, abbiamo $\dot{v} = A(t)v$. La matrice fondamentale[1] delle soluzioni è

$$\Phi(t; x_0) = D_x \varphi_t(x_0) \tag{1.11}$$

e quindi

$$\dot{\Phi} = A(t)\,\Phi \qquad \Phi(0; x) = \mathrm{id} \tag{1.12}$$

Quindi la matrice Φ è un operatore lineare che prende un vettore v e lo sposta lungo la traiettoria

$$\Phi(t; x) \,:\, T_x M \longrightarrow T_{\varphi_t(x)} M \tag{1.13}$$

Se $\varphi_t(x)$ è una soluzione periodica di periodo T, allora la matrice $\Phi(T; x)$ è una mappa da $T_x M$ in se stesso (e in questo caso è chiamata matrice di monodromia). Se invece φ_t non è periodica, lo stesso Φ ci da un'idea di come i vettori tangenti $v(t)$ evolvono.

Usando questa intuizione andiamo a misurare il tasso di crescita asintotica della lunghezza dei vettori tangenti (che quindi misurano la distanza tra traiettorie vicine) come

$$|\Phi(t; x)\, v| \sim \mathrm{e}^{\mu t}\, |v| \tag{1.14}$$

[1] Ricordiamo dall'analisi che per un sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{y} = A(t) y \tag{1.9}$$

la matrice fondamentale di soluzioni è una matrice $\Phi(t, y_0)$, non singolare, che dipende dalle condizioni iniziali, tale che le sue colonne sono soluzioni del sistema linearmente indipendenti. Questo vuol dire che ogni soluzione può essere scritta come $y(t) = \Phi(t; y_0)\, c$ dove c è un vettore costante. In particolare per la matrice fondamentale di soluzioni vale

$$\dot{\Phi}(t; x_0) = A(t)\, \Phi(t; x_0) \tag{1.10}$$

(ricordiamo $|v| = \sqrt{v^T v}$). Il numero μ è detto *esponente di Liapunov*. Intuitivamente, visto che $T_x M$ ha dimensione $n = \dim M$, ci aspettiamo n esponenti di Liapunov indipendenti, a seconda di come variano le traiettorie in direzioni differenti (a volte si parla di *spettro degli esponenti di Liapunov*); operativamente scegliendo diverse direzioni per il vettore iniziale. Tuttavia è spesso molto complicato calcolarli. Una strategia è quella di stimare l'esponente massimo. Prendiamo un tempo T "grande abbastanza", allora stimiamo

$$\mu_{\max}(T) \sim \frac{1}{T} \ln \frac{|v(T)|}{|v_0|} \tag{1.15}$$

e "speriamo" che converga rapidamente al vero esponente. Da un punto di vista pratico, l'esistenza di esponenti di Liapunov positivi per un insieme invariante, è forte indicazione che un sistema dinamico dipende in modo sensibile dai dati iniziali.

2 Il sistema di Lorenz

Forse il più famoso sistema caotico è il sistema di Lorenz, un modello semplificato di un fluido bidimensionale convettivo (scaldato dal basso e raffreddato in alto)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove x misura l'intensità del moto convettivo, y e z le variazioni di temperatura orizzontale e verticale. Il sistema può rappresentare un modello molto semplificato dell'atmosfera. Lorenz osservò che il sistema è caotico e che piccole variazioni nelle condizioni iniziali, ad esempio causate dal batter d'ali di una farfalla, possono cambiare radicalmente l'andamento del sistema (*butterfly effect*).

Notiamo la simmetria $(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, z)$. In particolare il sistema di Lorenz è un sistema dissipativo, nel senso che il volume dello spazio delle fasi si contrae lungo il flusso. Abbiamo visto (cfr il teorema di Liouville)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Vol} D = \int_D \nabla \cdot f \tag{2.2}$$

nel nostro caso

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial}{\partial x} \sigma(y - x) + \frac{\partial}{\partial y}(rx - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - bz) = -\sigma - 1 - b < 0 \tag{2.3}$$

negativo e costante. Siccome è una costante possiamo portarla fuori dall'integrale e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Vol} D = -(\sigma + 1 + b)\ \mathrm{Vol} D \tag{2.4}$$

da cui

$$\mathrm{Vol} D(t) = \mathrm{Vol} D(0)\, \mathrm{e}^{-(\sigma+1+b)t} \tag{2.5}$$

cioè si contrae con velocità esponenziale[2].

[2] In particolare questo implica che non esistono orbite quasiperiodiche perché queste devono giacere su un toro invariante

I punti critici sono $(0,0,0)$ e per $r > 1$ anche $x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}$ e $z^* = r-1$, detti $C^{\pm}$. Abbiamo già discusso la stabilità dell'origine e trovato una funzione di Liapunov. Si può vedere che $C^{\pm}$ sono linearmente stabili per

$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \tag{2.6}$$

Per $r = r_H$ diventano instabili e c'è una biforcazione di Hopf (che non abbiamo visto). Lorenz ha trovato che per $r > r_H$ ($\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$) numericamente le soluzioni hanno un andamento aperiodico. Ad esempio descrivono un butterfly pattern sul piano $(x(t), z(t))$. Questo insieme in 3d è detto attrattore strano: si tratta di un frattale. In particolare è un insieme di punti con volume nullo e area di superficie infinita.

Le traiettorie esibiscono dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Lorenz trova che $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| \, \mathrm{e}^{\lambda t}$ con $\lambda \sim 0.9$, dove λ è l'esponente di Liapunov.

Per descrivere questo comportamento diamo la definizione seguente. Chiamiamo caos un comportamento aperiodico a lungo termine in un sistema deterministico che ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

Ricordiamo che un attrattore A è un insieme invariante in avanti, che attrae un aperto di condizioni iniziali ($A \subset U$, ogni traiettoria che inizia in U finisce in A), ed è minimale (non contiene nessun sottoinsieme che soddisfa le condizioni precedenti). Un attrattore strano è un attrattore che esibisce dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

Nel caso del sistema di Lorenz, che le orbite non sono un lunghissimo ciclo limite è stato dimostrato soltanto nel 1999.

3 Frattali

Prima di tornare agli attrattori strani, chiediamoci come calcolare la dimensione di un insieme di punti. Intuitivamente la possiamo pensare come il minimo numero di coordinate di cui abbiamo bisogno per individuarne la posizione. Ma questo non è cosıchiaro: prendiamo ad esempio la curva di van Koch. La otteniamo prendendo un segmento, dividendolo per tre, e rimpiazzando il terzo di mezzo con due lati di un triangolo. Ripetiamo la stessa procedura per ogni segmento della curva così ottenuta. Questa è una curva sul piano; è unidimensionale? Se S_0 ha lunghezza L_0, allora S_1 ha lunghezza $L_1 = \frac{4}{3}L_1$ e così via fino a $L_n = (\frac{4}{3})^n L_0 \longrightarrow \infty$ per $n \longrightarrow \infty$. Quindi la curva ha lunghezza infinita. Per lo stesso ragionamento due punti arbitrari sono a distanza infinita. Quindi i punti sulla curva K non sono determinati dalla lunghezza d'arco partendo da un punto, perché tutti i punti hanno distanza infinita tra loro. Sembra che abbia dimensione maggiore di 1, ma certamente ha dimensione minore di 2.

Si possono introdurre generalizzazioni dell'idea di dimensione.

Box dimension Copriamo il nostro insieme con scatole di dimensione ε. Per una linea $N(\varepsilon) \sim \frac{L}{\varepsilon}$, per una superficie $N(\varepsilon) \sim \frac{A}{\varepsilon^2}$. Se abbiamo un insieme di $\mathbb{R}^D$ $N(\varepsilon)$ è il numero minimo di D-dim cubi con cui copriamo il nostro insieme. Allora la dimesione d del nostro insieme si trova dalla power law

$$N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^d} \tag{3.1}$$

Per i frattali questa definizione da un d non intero. Più precisamente

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} \tag{3.2}$$

se esiste.

Ad esempio per l'insieme di Cantor S_n abbiamo 2^n intervalli di lunghezza $(\frac{1}{3})^n$. Prendiamo $\varepsilon = (\frac{1}{3})^n$. Abbiamo allora bisogno di 2^n intervalli per coprire l'insieme di Cantor. Siccome $\varepsilon \to 0$ per $n \to \infty$ vediamo

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \log 2}{n \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} \sim 0.63 \tag{3.3}$$

4 Attrattori Strani

Cerchiamo di capire come emergono i comportamenti dei sistemi caotici. Ad esempio, come possono le traiettorie separarsi esponenzialmente ma rimanere dentro una regione compatta? Intuitivamente questo è dovuto allo stretching and folding dello spazio delle fasi (come preparando la pasta: se facciamo cadere una goccia di colorante, la condizione iniziale, dopo molte iterazioni il colore si sarà distribuito un po' ovunque).

Un esempio è la mappa del panettiere B dal quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ in se stesso, definita da

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n, ay_n) & 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \\ (2x_n - 1, ay_n + \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

con $a \in (0, \frac{1}{2}]$. Vediamo come funziona la mappa. Consideriamo il quadrato di partenza. Prendiamo la prima metà, $x_n \leq \frac{1}{2}$. Allora $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n, ay_n)$ e la direzione orizzontale è allungata di un fattore due, quella verticale contratta di un fattore a. Guardiamo la seconda metà, $x_n \geq \frac{1}{2}$. Allora $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n, ay_n) + (-1, \frac{1}{2})$. Abbiamo la stessa cosa di prima, ma ora l'immagine è spostata a sinistra di -1 e in alto di $\frac{1}{2}$.

Vediamo ora che per $a < \frac{1}{2}$ troviamo un attrattore frattale: A tale che $\forall (x_0, y_0)$ dato iniziale, l'iterazione della mappa $B^n(x_0, y_0) \to A$ per $n \to \infty$. Vediamo che $B^n(S)$, con S il quadrato iniziale, è data da 2^n striscie di altezza a^n. Il limite $B^\infty(S)$ è un frattale. (Notiamo che $B^{n+1}(S) \subset B^n(S)$ e un teorema assicura che l'intersezione contabile di una famiglia nested di compatti è non-vuota). A attrae tutte le orbite $B^n(x_0, y_0)$ giace su una delle strisce $B^n(S)$. Tutti i punti di questa striscia hanno distanza minore di a^n da A perché A è contenuto in $B^n(S)$. Siccome $a^n \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$, allora $B^n(x_0, y_0) \longrightarrow A$ per $n \to \infty$.

Troviamo la box dimension di A per $a < \frac{1}{2}$. Approssimiamo A con $B^n(S)$: si tratta di 2^n strisce di altezza a^n e lunghezza 1. Lo copriamo con boxes di lato $\varepsilon = a^n$. Ci vogliono $\frac{1}{a^n}$ boxes per coprire una striscia. Ci sono 2^n strisce e quindi $N \sim a^{-n} \times 2^n = (\frac{a}{2})^{-n}$. Quindi

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log\left((\frac{a}{2})^{-n}\right)}{\log(a^{-n})} = 1 + \frac{\log \frac{1}{2}}{\log a} \tag{4.2}$$

Notiamo che $d \longrightarrow 2$ per $a = \frac{1}{2}$. Inoltre se R è una regione, B allunga R di un fattore 2 e lo schiaccia di un fattore a. Quindi area$(B(R)) = 2a^n$area(R) e quindi per $a < \frac{1}{2}$, area$(B(R)) <$ area(R). Invece per $a\frac{1}{2}$, la mappa preserva l'area. Per $a < \frac{1}{2}$ il sistema è dissipativo.

Approfondimenti

- Steven H. Strogatz , *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* Westview Press CRC Press (2018)
- Wiggins S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* Springer (2003)
- Meiss *Differential Dynamical Systems*