UNA VARIABILE CASUALE x CON UNA DISTRIBUZIONE $f(x)$ É CARATTERIZZATA DA UN VALORE DI ASPETTAZIONE μ_x E UNA VARIANZA σ_x^2, DETTE "INDICI STATISTICI"

↳ SONO LEGATE AI MOMENTI, CHE SI DISTINGUONO IN:

· MOMENTI ALGEBRICI : $\mu_k^* = E[x^k] = \int_{\Omega_x} x^k f(x)\,dx$

$\mu_0^* = 1$ E $\mu_1^* = E[x]$

· MOMENTI CENTRALI : $\mu_k = E[(x-\mu_x)^k] = \int_{\Omega_x} (x-\mu_x)^k f(x)\,dx$

$\mu_0 = 1$, $\mu_1 = E[x-\mu_x] = 0$ E $\mu_2 = E[(x-\mu_x)^2] = \sigma_x^2$ "INDICE DI DISPERSIONE"

$\mu_3 = E[(x-\mu_x)^3]$ "INDICE DI ASIMMETRIA"

↳ $\mu_3 = 0$ PER FUNZIONI SIMMETRICHE (GAUSS)

$\mu_3 \neq 0$ PER DISTRIBUZIONI DI POISSON E BINOMIALE

ES. VOGLIAMO CALCOLARE μ_3 DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE $f(x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}$ CON

$E[x] = \tau$ E $var(x) = \tau^2$

$$\mu_3 = \int_0^\infty (x-\tau)^3 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}\,dx$$

$$\begin{aligned} E[(x-\tau)^3] &= E[x^3 - 3x^2\tau + 3x\tau^2 - \tau^3] \\ &= E[x^3] - 3\tau E[x^2] + 3\tau^2 E[x] - \tau^3 \\ &= 6\tau^3 - 6\tau^3 + 3\tau^3 - \tau^3 \end{aligned}$$

DA CUI $\mu_3 = 2\tau^3$

COEFFICIENTE DI ASIMMETRIA : $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$

INDICE DI CURTOSI : $\mu_4 = E[(x-\mu_x)^4]$ MI DICE QUANTO É PIATTA LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

$\mu_4 = 3\sigma^4$ PER LA FUNZIONE DI GAUSS

COEFFICIENTE DI CURTOSI : $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$, IN QUESTO MODO $\gamma_2 = 0$ PER LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI GAUSS

SE $\gamma_2 > 0$ LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE É PIÚ APPUNTITA DELLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI GAUSS

SE $\gamma_2 < 0$ É PIÚ PIATTA

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI : É UNA FUNZIONE CHE RACCHIUDE INFORMAZIONI SU TUTTI I MOMENTI
DIPENDE DA UNA VARIABILE REALE t

↳ FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI ALGEBRICI : $M_x^*(t) = E[e^{tx}] = \int_{\Omega_x} e^{tx} f(x)\,dx$

↓

SI PUÓ SVILUPPARE e^{tx} IN SERIE DI POTENZE $e^{tx} = \sum_0^\infty{}_k \frac{(tx)^k}{k!} = \sum_k \frac{t^k}{k!} x^k$

DA CUI $M_x^* = \sum_k \frac{t^k}{k!} \int_{\Omega_x} x^k f(x)\,dx = \sum_k \frac{t^k}{k!} \mu_k^*$

e $\left.\frac{d^k M_x^*}{dt^k}\right|_{t=0} = \mu_k^*$

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI CENTRALI: $M_x(t) = E[e^{t(x-\mu_1)}]$

↓

$\left.\frac{d^k M_x}{dt^k}\right|_{t=0} = \mu_k$ DA CUI $M_x(t) = e^{-t\mu_1} M_x^*(t)$

UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE É CARATTERIZZATA COMPLETAMENTE SE SI CONOSCONO TUTTI I SUOI MOMENTI O LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

<u>NOTA</u> SE DUE FUNZIONI $f_1(x)$ E $f_2(x)$ POSSONO ESSERE SVILUPPATE IN SERIE DI POTENZE E I LORO MOMENTI SONO UGUALI, ALLORA LE DUE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE COINCIDONO

<u>DIM.</u> $f_1(x) = \sum_0^\infty {}_k\, a_k x^k$ e $f_2(x) = \sum_0^\infty {}_k\, b_k x^k$

$f_1(x) - f_2(x) = \sum_k (a_k - b_k) x^k$

$[f_1(x) - f_2(x)]^2 = \sum_k (a_k - b_k) x^k \, [f_1(x) - f_2(x)]$

$$\int_{\Omega_x} [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx = \sum_k (a_k - b_k) \int_{\Omega_x} x^k [f_1(x) - f_2(x)]\, dx$$

$$= \sum_k (a_k - b_k) \{ \underbrace{\int_{\Omega_x} x^k f_1(x)\, dx}_{\mu_{k,1}^*} - \underbrace{\int_{\Omega_x} x^k f_2(x)\, dx}_{\mu_{k,2}^*} \}$$

PER IPOTESI TUTTI I MOMENTI COINCIDONO, QUINDI IL TERMINE A DESTRA VA A ZERO DA CUI SI RICAVA CHE $f_1(x) = f_2(x)$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

LA PROBABILITÁ DI AVERE K EVENTI FAVOREVOLI SU n TOTALI, SE LA PROBABILITÁ CHE IL SINGOLO EVENTO SIA FAVOREVOLE É p E LA PROBABILITÁ CHE SIA SFAVOREVOLE É $q = 1-p$, É DATA DA $P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI ALGEBRICI É: $M_x^*(t) = E[e^{tk}]$

$$= \sum_0^n {}_k\, e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_k \binom{n}{k} (e^t p)^k q^{n-k}$$

$$= (pe^t + q)^n$$

LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI CENTRALI É: $M_x(t) = E[e^{t(k-\lambda)}]$

$$= e^{-tnp}(pe^t + q)^n$$

$$= (e^{t(1-p)} p + e^{-tp} q)^n$$

$$= (pe^{qt} + qe^{-pt})^n$$

QUINDI: $\mu_0^* = 1$ e $\mu_0 = 1$

$\mu_1^* = np$ e $\mu_1 = 0$

$\mu_2 = npq$

$\mu_3 = npq(1-2p)$ DA CUI $\eta = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$

con $r_1 = 0$ se $p = \frac{1}{2}$ o $n \to \infty$

$\mu_4 = npq\,[1 - 3pq(2-n)]$ da cui $r_2 = \frac{1-6pq}{npq}$

con $r_2 = 0$ se $n \to \infty$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

SI OTTIENE COME LIMITE DELLA DISTRIBUZIONE BINOMIALE PER $np = \text{cost}$, CIOÉ PER $n \to \infty$ E $p \to 0$

$$P(k,\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \qquad \text{con} \quad E[k] = \sum_0^\infty {}_k\, k\, P(k,\nu) = \nu$$

$$var(k) = \nu$$

$$\sum_0^\infty {}_k\, P(k,\nu) = 1$$

LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI ALGEBRICI É: $M_k^*(t) = E[e^{tk}]$

$$= \sum_k e^{tk} \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

$$= e^{-\nu} \sum_k \frac{(e^t \nu)^k}{k!}$$

$$= e^{\nu(e^t - 1)}$$

LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI CENTRALI É: $M_k(t) = E[e^{t(k-\nu)}]$

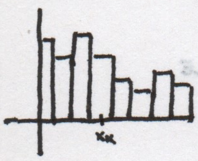
$$= e^{\nu(e^t - t - 1)}$$

QUINDI: $\mu_0^* = 1$ E $\mu_0 = 1$
$\mu_1^* = \nu$ E $\mu_1 = 0$
$\mu_2 = \nu$
$\mu_3 = \nu$ da cui $r_1 = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$

con $r_1 = 0$ PER $\nu \to \infty$

$\mu_4 = 3\nu^2 + \nu$ da cui $r_2 = \frac{1}{\nu}$

UN'APPLICAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DI POISSON SI HA QUANDO SI COSTRUISCONO GLI ISTOGRAMMI



CONSIDERIAMO IL K-ESIMO INTERVALLO DI AMPIEZZA dx CENTRATO NEL VALORE x_k

SE SI FANNO N MISURE SI OTTIENE UN VALORE n_k^m

n_k^m HA UNA DISTRIBUZIONE BINOMIALE, QUINDI $E[n_k^m] = N p_k$

$$var(n_k^m) = N p_k (1 - p_k)$$

DOVE p_k É LA PROBABILITÁ CHE IL SINGOLO EVENTO SIA FAVOREVOLE, OVVERO LA PROBABILITÁ CHE CADA NELL'INTERVALLO CONSIDERATO ; $p_k = \int_{x_k - \Delta x/2}^{x_k + \Delta x/2} f(x)\,dx \simeq f(x_k)\,\Delta x$ SE L'INTERVALLO É ABBASTANZA PICCOLO

SE IL NUMERO TOTALE DI EVENTI É MOLTO ALTO (E QUINDI ANCHE IL NUMERO DI INTERVALLI), LA PROBABILITÁ CHE IL SINGOLO EVENTO CADA NELL'INTERVALLO TENDE A ZERO, SI PUÓ QUINDI ASSUMERE CHE IL NUMERO DI EVENTI IN UN INTERVALLO SEGUE LA DISTRIBUZIONE DI POISSON

QUINDI $E[n_k^m] = \nu = Np_k$

$var(n_k^m) = \nu = Np_k$

SE NON SI CONOSCE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DELLA VARIABILE CASUALE, SI PUÓ USARE LA DEFINIZIONE FREQUENZISTA DI PROBABILITÁ : $p_k = \frac{n_k^m}{N}$

AFFERMANDO SOSTANZIALMENTE CHE QUELLO MISURATO É IL VALORE DI ASPETTAZIONE DEL NUMERO DI EVENTI $E[n_k^m] = n_k^m$ DA CUI $var(n_k^m) = n_k^m$

DISTRIBUZIONE DI GAUSS

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$M_x(t) = E[e^{t(x-\mu)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[+t(x-\mu) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-y^2}{2\sigma^2}\right] \exp\left[\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] dy$$

$$= e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

AVENDO POSTO $\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + t(x-\mu) = \frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2 + 2\sigma^2 t(x-\mu) + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2\right]$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2 - \sigma^4 t^2\right]$$

$$= \frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

$$M_x^*(t) = M_x(t)e^{\mu t} = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$$

QUINDI : $\mu_0^* = 1$ E $\mu_0 = 1$

$\mu_1^* = \mu$ E $\mu_1 = 0$

$\mu_2 = \sigma^2$

$\mu_3 = 0$ DA CUI $\gamma_1 = 0$

$\mu_4 = 3\sigma^4$ DA CUI $\gamma_2 = 0$

FUNZIONE GAMMA

DIPENDE DA DUE PARAMETRI α E β E LA VARIABILE x É UNA VARIABILE REALE POSITIVA

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z}\, dz$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-z}\, dz = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} e^{-z}\, dz = \sqrt{\pi}$$ AVENDO POSTO $z = \frac{y^2}{2}$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty z^{\alpha-1}\cdot z\, e^{-z}\, dz = \int_0^\infty z^{\alpha} e^{-z}\, dz$$
$$= \left[-z^{\alpha} e^{-z}\right]_0^\infty + \alpha\int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z}\, dz$$
$$= \alpha\,\Gamma(\alpha)$$

NEL CASO DI UN NUMERO INTERO , $\Gamma(n+1) = n!$

LA DISTRIBUZIONE GAMMA : · É NORMALIZZATA $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx = \beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)$

· HA VALORE DI ASPETTAZIONE $E[x] = \alpha\beta$

· HA VARIANZA $var(x) = \beta^2\alpha$

DISTRIBUZIONE DI ERLANG

É UN CASO PARTICOLARE DELLA DISTRIBUZIONE GAMMA CON $\alpha = k$ $(k \in \mathbb{Z})$
E $\beta = 1$

$$f(x;k) = \frac{1}{(k-1)!}\, x^{k-1} e^{-x}$$

HA VALORE DI ASPETTAZIONE $E[x] = \frac{1}{(k-1)!}\underbrace{\int_0^\infty x^{k} e^{-x}\, dx}_{\Gamma(k+1) = k!} = k$

HA VARIANZA $var(x) = k$ SAPENDO CHE $E[x^2] = \frac{1}{(k-1)!}\underbrace{\int_0^\infty x^{k+1} e^{-x}\, dx}_{\Gamma(k+2) = (k+1)!} = k^2 + k$

DISTRIBUZIONE DEI TEMPI DI ATTESA

$P_k(t, t+\delta t) = P_{k-1}(0,t)\cdot P_1$ DOVE $P_1 = \mu\,\delta t$ É LA PROBABILITÁ DI AVERE UN EVENTO IN δt E μ É IL NUMERO MEDIO DI EVENTI NELL'UNITÁ DI TEMPO

$P_{k-1}(0,t) = \frac{\nu^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\nu}$ [DOVE $\nu = \mu t$ É IL NUMERO MEDIO DI EVENTI]

QUINDI $P_{k-1}(0,t)\cdot P_1 = \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\mu t}\cdot \mu\,\delta t$

$f_k(t) = \frac{P_k}{\delta t} = \mu\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\mu t}$ (É LA FUNZIONE DI ERLANG PER $x = \mu t$)

$f_1(t) = \mu e^{-\mu t} = \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ DOVE $\mu = \frac{1}{\tau}$ E τ É LA VITA MEDIA

SI VEDE CHE LA FUNZIONE DIVENTA SEMPRE PIÚ SIMMETRICA ALL'AUMENTARE DI K

ES. SUPPONIAMO DI AVERE DUE CATEGORIE DI EVENTI CON LA STESSA PROBABILITÁ CHE SI VERIFICHINO , UNO CON VITA MEDIA τ_1 E L'ALTRO CON VITA MEDIA τ_2

$$P(t, t+\delta t) = P_{0,1}(0,t)\, P_{1,1}\cdot P_{0,2}(0,t) + P_{0,1}(0,t)\, P_{0,2}(0,t)\, P_{1,2}$$
$$= e^{-\frac{t}{\tau_1}}\cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)\delta t$$

QUINDI $f(t) = \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ DOVE $\tau = \tau_1 + \tau_2$

DISTRIBUZIONE DI χ^2

É UN CASO PARTICOLARE DELLA DISTRIBUZIONE GAMMA CON $\alpha = n/2$ E $\beta = 2$

DOVE n É DETTO NUMERO DI GRADI DI LIBERTÁ

$$f(x;n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

HA VALORE DI ASPETTAZIONE

$$E[x] = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

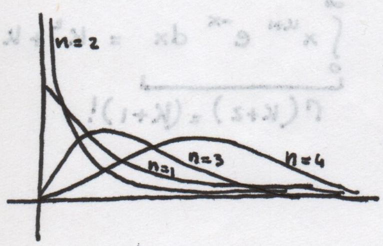
$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty z^{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}\, e^{-z}\, 2\,dz$$

$$= 2\, \underbrace{\frac{\Gamma(n/2+1)}{\Gamma(n/2)}}_{=\frac{n}{2}}$$

$$= n \qquad \text{AVENDO POSTO } z = \frac{x}{2}$$

HA VARIANZA $var(x) = 2n$ SAPENDO CHE

$$E[x^2] = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}+1}\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx = n^2 + 2n$$



$n = 1 \quad \sim \quad x^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{x}{2}}$

$n = 2 \quad \sim \quad e^{-\frac{x}{2}}$

$n = 3 \quad \sim \quad \sqrt{x}\, e^{-\frac{x}{2}}$

$n = 4 \quad \sim \quad x\, e^{-\frac{x}{2}}$

$$M_x^{\circ}(t) = E[e^{tx}] = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \underbrace{\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{x}{2} + tx\right] dx}$$

$$= \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{x}{2}(1-2t)\right] dx$$

$$= \int_0^\infty 2^{\frac{n}{2}-1}\,(1-2t)^{-(\frac{n}{2}-1)}\, z^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-z}\, \frac{2}{(1-2t)}\, dz$$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\,(1-2t)^{-\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= (1-2t)^{-\frac{n}{2}} \qquad \text{AVENDO POSTO } z = \frac{x}{2}(1-2t)$$

$$M_x(t) = E[e^{t(x-n)}] = e^{-nt}\,(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

QUINDI: $\mu_0^{\circ} = 1$

$\mu_1^{\circ} = n$ E $\mu_1 = 0$

$\mu_2 = 2n$

$\mu_3 = 8n$ DA CUI $\gamma_1 = \sqrt{\frac{8}{n}}$

$\mu_4 = 12n^2 + 48n$ DA CUI $\gamma_2 = \frac{12}{n}$

SE INTRODUCIAMO LA VARIABILE $y = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$, VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE PER $n \to \infty$ HA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD

$$M_y^*(t) = E[e^{ty}] = E\left[\exp\left(\frac{tx}{\sqrt{2n}} - \frac{tn}{\sqrt{2n}}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-\sqrt{\frac{n}{2}}\,t\right] \underbrace{E\left[\exp\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\,x\right)\right]}_{= E[e^{t'x}]}$$

$= E[e^{t'x}]$ É LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI DI x $(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$

$$= \exp\left[-\sqrt{\frac{n}{2}}\,t\right]\left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}\,t\right)^{-\frac{n}{2}}$$

BISOGNA DIMOSTRARE CHE $M_y^*(t)$ PER $n \to \infty$ HA LA STESSA ESPRESSIONE DELLA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI DELLA FUNZIONE DI GAUSS

$$\ln M_y^*(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}\,t - \frac{n}{2}\ln\left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}\,t\right) \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$= -\sqrt{\frac{n}{2}}\,t - \frac{n}{2}\left[-\sqrt{\frac{2}{n}}\,t - \frac{t^2}{n} - \frac{2\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}\,t^3 + \dots\right]$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{t^2}{2}$$

DA CUI $M_y^*(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

DALLA DISTRIBUZIONE DI χ^2 SI OTTIENE LA DISTRIBUZIONE DI MAXWELL-BOLTZMANN

↳ IPOTESI:
- I MOTI DELLE PARTICELLE SONO INDIPENDENTI
- IN UN CERTO VOLUME LA LORO DISTRIBUZIONE SPAZIALE DEVE ESSERE CASUALE
- NON C'É UNA DISTRIBUZIONE PRIVILEGIATA DELLE VELOCITÁ, CIOÉ I VETTORI VELOCITÁ DEVONO ESSERE DISTRIBUITI IN MODO CASUALE (IN PRATICA LE PARTICELLE DEVONO ESSERE COSÍ PICCOLE DA NON RISENTIRE DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITÁ)

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ LE COMPONENTI DELLA VELOCITÁ DEVONO AVERE LA STESSA DISTRIBUZIONE, QUINDI $E[v_i] = 0$ E $var(v_i) = \sigma^2$

IPOTIZZIAMO CHE LE COMPONENTI v_i DELLA VELOCITÁ ABBIANO DISTRIBUZIONE NORMALE $N(0, \sigma^2)$

$$v = \left(\textstyle\sum_i v_i^2\right)^{1/2}$$

INTRODUCIAMO UN NUOVO VETTORE $\vec{q} = \frac{1}{\sigma}\vec{v}$, SE LE v_i HANNO DISTRIBUZIONE NORMALE CON VARIANZA σ^2, LE COMPONENTI q_i DEL VETTORE $\vec{q}$ HANNO VARIANZA 1

LA VARIABILE $z = q^2 = \sum_i q_i^2$ HA DISTRIBUZIONE χ_3^2 , $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z}{2}}$

QUINDI $z = q^2 = \frac{v^2}{\sigma^2}$ DA CUI $v = \sigma\sqrt{z}$ E $g(v) = f(z(v))\,\frac{dz}{dv}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{v}{\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \frac{2v}{\sigma^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^2}{\sigma^3} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

SE $\sigma^2 = \frac{KT}{m}$ SI OTTIENE LA DISTRIBUZIONE DI MAXWELL-BOLTZMANN

$$E[v] = \bar{v} = \int_0^\infty v\, g(v)\, dv = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}$$

LA VELOCITÁ PIÚ PROBABILE, CIOÉ QUELLA PER CUI $\frac{dg}{dv} = 0$, VALE $v_P = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$

FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE DI PIÚ VARIABILI CASUALI

MISURANDO n VOLTE UNA VARIABILE CASUALE x SI HA A DISPOSIZIONE UN CAMPIONE DI DIMENSIONE n, CIOÉ CONSIDERANO n VARIABILI $x_1, \dots, x_n$ CHE NELLE OPERAZIONI DI MISURA ASSUMERANNO DEI VALORI SPECIFICI $x_1^*, \dots, x_n^*$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA $f(x_1, \dots, x_n)$: MI PERMETTE DI CALCOLARE LA PROBABILITÁ CHE $x_1 \in (x_1^*, x_1^* + dx_1)$

↳ CONOSCENDO LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA, POSSO CALCOLARE LA $P(x_1 \simeq x_1^*, x_2 \simeq x_2^*, \dots) = f(x_1^*, x_2^*, \dots)\, dx_1, dx_2, \dots$

$$P(x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \dots f(x_1, x_2, \dots)$$

$$P(x_1 \in \Omega_1, x_2 \in \Omega_2, \dots) = \int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega_2} dx_2 \dots f(x_1, x_2, \dots) = 1$$ É NORMALIZZATA

NEL CASO DI VARIABILI CASUALI INDIPENDENTI, $P(x_1 \simeq x_1^*, x_2 \simeq x_2^*, \dots) = P(x_1 \simeq x_1^*) P(x_2 \simeq x_2^*) \dots$
$= f(x_1^*) dx_1\, f(x_2^*) dx_2 \dots$
$= f(x_1^*, x_2^*, \dots) dx_1\, dx_2$

↳ LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA É IL PRODOTTO DELLE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE MARGINALE : FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE, INDIPENDENTEMENTE DALLE ALTRE

$$f_{M_i}(x_i) = \int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega_2} dx_2 \dots f(x_1, x_2, \dots)$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA : FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE, QUANDO I VALORI DI TUTTE LE ALTRE VARIABILI SONO FISSATI

$$f_{C_1}(x_1) = g(x_1 \mid x_2^*, \dots, x_n^*)$$
$$= f(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

PER NORMALIZZARLA SI INSERISCE UNA COSTANTE $C = \frac{1}{\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*)\, dx_1}$

NEL CASO DI PIÚ VARIABILI CASUALI: $E[x_1] = \int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega_2} dx_2 \dots x_1 f(x_1, x_2, \dots)$

$$var(x_1) = E[(x_1 - \mu_1)^2] = E[x_1^2] - E[x_1]^2$$

SI INTRODUCE LA COVARIANZA: $cov(x_i, x_j) = E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]$

↳ DICE QUANTO SONO CORRELATE LE VARIABILI:
- SE x_i E x_j SONO INDIPENDENTI, $cov(x_i, x_j) = 0$
- SE $i = j$, $cov(x_i, x_j) = var$

$$\begin{aligned} E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] &= E[x_i x_j - \mu_i x_j - \mu_j x_i + \mu_i \mu_j] \\ &= E[x_i x_j] - \mu_i \mu_j - \mu_j \mu_i + \mu_i \mu_j \\ &= E[x_i x_j] - E[x_i] E[x_j] \end{aligned}$$

SI INTRODUCE IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE: $\rho_{ij} = \dfrac{cov(x_i, x_j)}{\sigma_i \sigma_j}$

↳ PUÓ ESSERE POSITIVO O NEGATIVO A SECONDA CHE LA COVARIANZA SIA POSITIVA O NEGATIVA, MA É COMUNQUE SEMPRE COMPRESO TRA -1 E 1

DIM. INTRODUCIAMO DUE VARIABILI $y_i = x_i - \mu_i$ E $z = a y_i - y_j$

$$\begin{aligned} E[z^2] &= E[a^2 y_i^2 + y_j^2 - 2a y_i y_j] \\ &= a^2 \underbrace{E[y_i^2]}_{E[(x_i - \mu_i)^2]} + E[y_j^2] - 2a \underbrace{E[y_i y_j]}_{E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]} \\ &= a^2 \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2ac \end{aligned}$$

DOVE c É LA COVARIANZA

ESSENDO IL VALORE DI ASPETTAZIONE DI UNA VARIABILE AL QUADRATO,

$a^2 \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2ac \geq 0$

LA DISUGUAGLIANZA É VERIFICATA SE $\Delta = 4c^2 - 4\sigma_i^2 \sigma_j^2 \leq 0$

DA CUI $c^2 \leq \sigma_i^2 \sigma_j^2$

$\rho_{ij}^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \leq \sigma_i^2 \sigma_j^2$ QUINDI $|\rho_{ij}| \leq 1$

ES. CONSIDERIAMO DUE VARIABILI x_1 E $x_2 = a x_1 + b$ CON $E[x_1] = \mu_1$ E $var(x_1) = \sigma_1^2$

$$E[x_2] = a\mu_1 + b$$

$$var(x_2) = a^2 x_1^2$$

$$\begin{aligned} cov(x_1, x_2) &= \underbrace{E[x_1, x_2]}_{= E[a x_1^2 + b x_1^2]} - \mu_1 (a\mu_1 + b) \\ &= a(\sigma_1^2 + \mu_1^2) + b\mu_1 \\ &= a\sigma_1^2 + a\mu_1^2 + b\mu_1 - a\mu_1^2 - b\mu_1 = a\sigma_1^2 \end{aligned}$$

$$\rho_{12} = \frac{cov(x_1, x_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{a\sigma_1^2}{\sigma_1 a \sigma_1} = 1$$

ES. CONSIDERIAMO DUE VARIABILI CASUALI x, y CON DISTRIBUZIONE UNIFORME IN $(0,1)$ E INTRODUCIAMO LA VARIABILE $z = ax + by$

$$\begin{aligned} cov(x, z) &= E[x(ax + by)] - E[x] E[ax + by] \\ &= a E[x^2] + b E[xy] - a(E[x])^2 - b E[x] E[y] \\ &= a\left(\frac{1}{12} + 0.5^2\right) + b(0.5)^2 - a(0.5)^2 - b(0.5)^2 = \frac{a}{12} \end{aligned}$$

$$\rho_{xz} = \frac{cov(x;z)}{\sigma_x \sigma_z} = \frac{a}{\frac{12}{\sqrt{12}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{12}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

ES. SUPPONIAMO DI AVERE DUE GRANDEZZE FISICHE x, y E UNA SERIE DI MISURE (x_i, y_i) CON GLI ERRORI SULLE x_i TRASCURABILI E QUELLI SULLE y_i σ_i

SUPPONIAMO CHE TRA LE DUE GRANDEZZE VI SIA UNA RELAZIONE LINEARE

$y = mx + q$

DALLE MISURE SI POSSONO OTTENERE DELLE STIME DI $\hat{m}$ E $\hat{q}$

OGNI VOLTA CHE LA MISURA VIENE RIPETUTA, I PUNTI SI DISTRIBUISCONO CASUALMENTE ATTORNO ALLA RETTA CONTINUA, CHE RAPPRESENTA LA RELAZIONE VERA E QUINDI I VERI VALORI DI m E q

AD ESEMPIO, PUÓ RISULTARE UN VALORE DI m PIÚ GRANDE DI QUELLO VERO, DI CONSEGUENZA q SARÁ PIÚ PICCOLO E VICEVERSA

LE STIME CHE SI OTTENGONO SI DISTRIBUISCONO IN MODO TALE DA MOSTRARE CHE C'É UNA CORRELAZIONE TRA I VALORI DI $\hat{m}$ E $\hat{q}$, QUINDI LE STIME NON SONO INDIPENDENTI MA CORRELATE E IN PARTICOLARE LA CORRELAZIONE É NEGATIVA, PERCHÉ SE $\hat{m}$ É PIÚ GRANDE $\hat{q}$ É PIÚ PICCOLO

$$var(\hat{m}) = \sum_i \left(\frac{\partial \hat{m}}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_i^2 \quad E \quad cov(\hat{m},\hat{q}) = \sum_i \left(\frac{\partial \hat{m}}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial y_i}\right)\sigma_i^2$$

PER RIASSUMERE LE CARATTERISTICHE DI VARIANZA E COVARIANZA DI UN CAMPIONE DI n VARIABILI CASUALI SI INTRODUCE LA MATRICE DELLE COVARIANZE V

↳ $V_{ij} = cov(x_i, x_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$

$V_{ii} = \sigma_i^2$

↳ ELEMENTI DIAGONALI

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \\ \vdots & \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \dots \end{pmatrix}$$

LA MATRICE É UNA MATRICE SIMMETRICA $n \times n$, PERCHÉ $\rho_{12} = \rho_{21}$;

SE LE VARIABILI SONO INDIPENDENTI, GLI INDICI DI CORRELAZIONE VANNO A ZERO E LA MATRICE DIVENTA DIAGONALE

DISTRIBUZIONE MULTINORMALE (O NORMALE MULTIVARIATA)

É LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DI PIÚ VARIABILI CASUALI CON DISTRIBUZIONE NORMALE

CONSIDERIAMO n VARIABILI CASUALI E SUPPONIAMO CHE ABBIANO DISTRIBUZIONE NORMALE $f_i(x_i) = N(\mu_i, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} e^{-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA (NEL CASO DI VARIABILI INDIPENDENTI)

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma_1 \dots \sigma_n} e^{-\sum_i \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

SE LE VARIABILI SONO INDIPENDENTI, LA MATRICE DELLE COVARIANZE È LA MATRICE DIAGONALE

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \qquad \det V = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \ldots \sigma_n^2 \qquad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

SI PUÒ SCRIVERE LA SOMMATORIA DELL'ESPONENZIALE $\sum_i \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$ COME

$(\vec{x} - \vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})$ DOVE $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ È IL VETTORE DELLE VARIABILI CASUALI

E $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ È IL VETTORE DEI CORRISPONDENTI VALORI DI ASPETTAZIONE

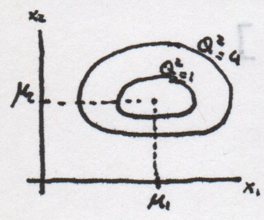
$$V^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1^2} \\ \vdots \\ \frac{x_n - \mu_n}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}$$

PER SEMPLIFICARE, VIENE INTRODOTTO $Q^2 = (\vec{x} - \vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})$

QUINDI $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det V)^{1/2}} e^{-\frac{Q^2}{2}}$

QUESTA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE HA UN MASSIMO PER $\vec{x} = \vec{\mu}$, MAN MANO CHE CI SI ALLONTANA DAL MASSIMO LA FUNZIONE DIMINUISCE E SI POSSONO COSTRUIRE DELLE CURVE DI LIVELLO, CIOÈ VEDERE QUANDO $f = f_{max} - C$ ← COSTANTE

IN REALTÀ È PIÙ COMODO CONSIDERARE I VALORI QUANDO Q^2 DIMINUISCE DI UN CERTO NUMERO DI UNITÀ



$$Q^2 = (x_1 - \mu_1, \; x_2 - \mu_2) \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

PER $Q^2 = 1$ SI OTTIENE UN'ELLISSE, CENTRATA IN (μ_1, μ_2) E CHE HA COME SEMIASSI LE DEVIAZIONI STANDARD DI x_1 E x_2

PER $Q^2 = 4$ LE SEMIASSI CORRISPONDONO A DUE DEVIAZIONI STANDARD

ESSENDO Q^2 LA SOMMA DEI QUADRATI DI DUE VARIABILI CASUALI CON DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD, QUINDI HA UNA DISTRIBUZIONE DI χ^2

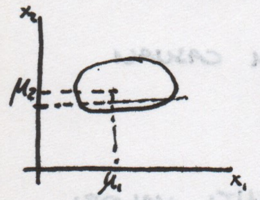
↳ NEL CASO DI DUE VARIABILI, χ^2 HA DUE GRADI DI LIBERTÀ, QUINDI LA PROBABILITÀ CHE LE VARIABILI SI TROVINO ALL'INTERNO DELL'ELLISSE È

$$P(z \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} \, dz = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.39 = 39\%$$

NEL CASO DI VARIABILI INDIPENDENTI, LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE MARGINALE É SEMPLICEMENTE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE GAUSSIANA DELLA SINGOLA VARIABILE

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

NEL CASO DELLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA, QUESTA SI OTTIENE FISSANDO UN CERTO VALORE DI x_2 E CONSIDERANDO LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI x_1 PER QUEL VALORE



$$f(x_1 \mid x_2 = x_2^*) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_2^2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} C$$

DOVE $C = \sqrt{2\pi}\,\sigma_2\, e^{\frac{(x_2^2-\mu_2)}{2\sigma_2^2}}$ É UNA COSTANTE PER NORMALIZZARE LA FUNZIONE

SE LE VARIABILI CASUALI NON SONO INDIPENDENTI, LA MATRICE DELLE COVARIANZE NON SARÁ PIÚ DIAGONALE

$$f(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det V)^{1/2}} e^{-\frac{Q^2}{2}} \qquad \text{DOVE} \quad Q^2 = (\vec{x}-\vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{x}-\vec{\mu})$$

MA $V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}$

NEL CASO A DUE DIMENSIONI, $\det V = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{12})^2$

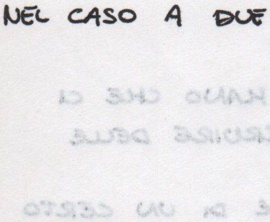
$$V^{-1} = \frac{1}{\det V}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}) = \frac{1}{\det V}\begin{pmatrix} \sigma_2^2(x_1-\mu_1) & -\rho_{12}\sigma_1\sigma_2(x_2-\mu_2) \\ -\rho_{12}\sigma_1\sigma_2(x_1-\mu_1) & \sigma_1^2(x_2-\mu_2) \end{pmatrix}$$

QUINDI
$$Q^2 = \frac{1}{\det V}\left[\sigma_2^2(x_1-\mu_1)^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) + \sigma_1^2(x_2-\mu_2)^2\right]$$
$$= \frac{1}{1-\rho_{12}^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho_{12}\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

PER $\vec{x} = \vec{\mu}$ $Q^2 = 0$ E LA FUNZIONE HA VALORE MASSIMO

NEL CASO DI VARIABILI NON INDIPENDENTI, $Q^2 = \text{cost}$ CORRISPONDE SEMPRE A UN'ELLISSE, NON PIÚ RIFERITA AGLI ASSI PRINCIPALI, BENSÍ RIFERITA AD ASSI RUOTATI RISPETTO A x_1, x_2

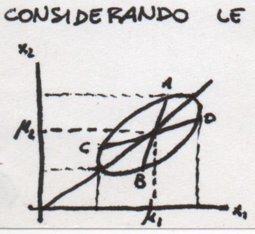


L'INCLINAZIONE DEGLI ASSI DIPENDE DAL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE SE QUESTO É PARI A ZERO, LE VARIABILI SONO INDIPENDENTI E L'ELLISSE É RIFERITA AGLI ASSI

$\sigma_2(1-\rho_{12}^2)^{1/2}$

PIÚ AUMENTA IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE, PIÚ L'ELLISSE SI INCLINA E DIVENTA SOTTILE

CONSIDERANDO LE RETTE CHE CONGIUNGONO I PUNTI DI TANGENZA, SI HA



$\overline{AB}$: $x_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1) + \mu_2$

$\overline{CD}$: $x_2 = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1) + \mu_2$

É INTERESSANTE CONSIDERARE LE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE MARGINALE E CONDIZIONATA

QUANDO LE VARIABILI HANNO UNA DISTRIBUZIONE MULTINORMALE, LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE MARGINALE É NORMALE $f_{M_i}(x_i) = N(\mu_i, \sigma_i^2)$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{r}{2}}$$

DOVE $r = Q^2 - \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} =$

$=$

$$f_{M_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA: $f_{C_i}(x_i) = \dfrac{f(x_i \mid x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_i\, f(x_i \mid x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$

QUINDI $f_{C_2}(x_2) = \dfrac{f(x_1^*, x_2)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, f(x_1^*, x_2)}$ NON É ALTRO CHE UNA DISTRIBUZIONE MARGINALE PER x_1 CALCOLATA IN x_1^*

$$= \left[\frac{e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\right]^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2'} e^{-\frac{(x_2-\mu_2')^2}{2(\sigma_2')^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2'} e^{-\frac{(x_2-\mu_2')^2}{2(\sigma_2')^2}}$$

LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DI x_2 É UNA FUNZIONE DI GAUSS IN CUI LA VARIANZA É DIMINUITA DI UN FATTORE $(1-\rho^2)$

DUNQUE $x_2 = \mu_2' = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1) + \mu_2$ É LA RETTA IN CUI IL VALORE DELLA DISTRIBUZIONE DI x_2 É MASSIMO AL VARIARE DI x_1

DISTRIBUZIONE MULTINOMIALE

NEL CASO DELLA DISTRIBUZIONE BINOMIALE SI CONSIDERANO n EVENTI INDIPENDENTI, CHE SI POSSONO PRESENTARE IN MODO FAVOREVOLE O SFAVOREVOLE
SE p É LA PROBABILITÁ CHE IL SINGOLO EVENTO SIA FAVOREVOLE, LA PROBABILITÁ DI AVERE K EVENTI FAVOREVOLI SU n TOTALI É DATA DA $P(K) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K}$

$$= \frac{n!}{K!(n-K)!} p^K q^{n-K}$$

CON VALORE DI ASPETTAZIONE $E[K] = np$
E VARIANZA $var(K) = npq$

SE IL NUMERO TOTALE DI EVENTI É MOLTO ALTO (E QUINDI ANCHE IL NUMERO DI INTERVALLI), LA PROBABILITÁ CHE IL SINGOLO EVENTO CADA NELL'INTERVALLO TENDE A ZERO, SI PUÓ QUINDI ASSUMERE CHE IL NUMERO DI EVENTI IN UN INTERVALLO SEGUE LA DISTRIBUZIONE DI POISSON

QUINDI $P_K = \frac{\nu^K}{K!} e^{-\nu}$ CON VALORE DI ASPETTAZIONE $E[n_i] = np_i = \nu$
E VARIANZA $var(n_i) = np_i = \nu$

SE LE ALTERNATIVE SONO $m>2$, CON PROBABILITÁ $p_1, \dots, p_m$ CHE IL SINGOLO EVENTO SI VERIFICHI SECONDO LE DIVERSE MODALITÁ (CON $\sum_1^i p_i = 1$), LA PROBABILITÁ DI AVERE k_1 EVENTI IN MODALITÁ 1, k_2 EVENTI IN MODALITÁ 2, ..., k_m EVENTI IN MODALITÁ m, É DATA DALLA DISTRIBUZIONE MULTINOMIALE

$$P(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$$

CON VALORE DI ASPETTAZIONE $E[k_i] = np_i$
VARIANZA $var(k_i) = np_i(1-p_i)$
E COVARIANZA $cov(k_i, k_j) = -n p_i p_j$

É NEGATIVA PERCHÉ SE NELL'INTERVALLO i-ESIMO SI HA UN NUMERO SUPERIORE A QUELLO DEL VALORE DI ASPETTAZIONE, NEGLI ALTRI INTERVALLI CE NE SARANNO MENO

SE IL NUMERO DI INTERVALLI É ELEVATO E QUINDI p_i E p_j SONO MOLTO PICCOLE, LA COVARIANZA TENDE A ZERO

PUÓ ESSERE CHE IL NUMERO TOTALE DI EVENTI n NON SIA UN NUMERO BEN DEFINITO, BENSÍ UNA VARIABILE CASUALE CON DISTRIBUZIONE DI POISSON E VALORE DI ASPETTAZIONE ν; LA PROBABILITÁ DI AVERE n EVENTI DI CUI k_1 SECONDO LA MODALITÁ 1, ..., k_m SECONDO LA MODALITÁ m, É IL PRODOTTO DELLE PROBABILITÁ

$$P(n; k_1, \dots, k_m) = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \cdot \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m} \qquad \text{MA } \sum_1^m{}_i\, k_i = n$$

$$= \frac{(\nu p_1)^{k_1} \cdots (\nu p_m)^{k_m}}{k_1! \dots k_m!} e^{-\nu p_1 \dots - \nu p_m}$$

$$= \frac{(\nu p_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\nu p_1} \cdots \frac{(\nu p_m)^{k_m}}{k_m!} e^{-\nu p_m}$$

$$= \prod_1^m{}_i \frac{\nu_i^{k_i}}{k_i!} e^{-\nu_i} \qquad \text{DOVE} \quad \nu_i = \nu p_i = p_i E[n] = E[k_i]$$

CORRELAZIONE TRA PIÚ VARIABILI CASUALI

IN GENERALE, I VALORI MISURATI POSSONO ESSERE AFFETTI, OLTRE CHE DA ERRORI STATISTICI, ANCHE DA ERRORI SISTEMATICI, I QUALI POSSONO INTRODURRE DELLE CORRELAZIONI TRA MISURE DIVERSE CHE ALTRIMENTI SAREBBERO INDIPENDENTI

GLI ERRORI SISTEMATICI SONO QUEGLI ERRORI IN BASE AI QUALI $x_m = x_v + \delta$ SISTEMATICAMENTE

PUÓ ANCHE ESSERCI UN ERRORE SISTEMATICO DI SCALA, PER CUI $x_m = (1+\delta)x_v$

SI FA IL POSSIBILE PER ELIMINARE GLI ERRORI SISTEMATICI, SE QUESTO NON É POSSIBILE SI CERCA DI CORREGGERE, CIOÉ SI CERCANO TUTTE LE POSSIBILI CAUSE DI ERRORI SISTEMATICI E SI CERCA DI VALUTARE δ, IN MODO DA DARE COME VALORE DELLA MISURA $x_c = x_m - \delta$

↳ LA CORREZIONE PUÓ ESSERE NOTA CON UNA CERTA INCERTEZZA σ_δ
QUINDI $x_c \pm \sigma_{stat} \pm \sigma_{sist}$, DOVE σ_{stat} É LEGATA AL VALORE MISURATO E σ_{sist} É L'INCERTEZZA STATISTICA SULL'ERRORE CHE APPLICHIAMO

SE ABBIAMO n VALORI MISURATI $x_1, \dots, x_n$, QUESTI SONO AFFETTI DA INCERTEZZE SISTEMATICHE CHE POSSONO ESSERE DIVERSE PER CIASCUNA DELLE MISURE E, IN PARTICOLARE, SONO INDIPENDENTI TRA DI LORO ("INCERTEZZE SISTEMATICHE PUNTO A PUNTO")

ES. SUPPONIAMO DI AVERE UNA CERTA PREVISIONE PER L'ANDAMENTO DELLA TEMPERATURA DI UN SISTEMA IN FUNZIONE DEL TEMPO $T(t)$
E VOGLIAMO STUDIARE QUESTA DIPENDENZA

IN CORRISPONDENZA DI CERTI TEMPI $t_1, \dots, t_n$ FISSATI E CHE SUPPONIAMO SENZA ERRORE CI SARANNO n VALORI DELLA TEMPERATURA $T_1, \dots, T_n$ CON INCERTEZZA STATISTICA $\sigma_{T_1}, \dots, \sigma_{T_n}$

SUPPONIAMO CHE VI SIA UN ERRORE SISTEMATICO ADDITIVO UGUALE PER TUTTE LE TEMPERATURE

QUINDI L'i-ESIMA TEMPERATURA MISURATA $T_i^m = T_i^v + u_i + \delta$ DOVE u_i HA DISTRIBUZIONE $N(0, \sigma_{T_i}^2)$

SUPPONIAMO DI CONOSCERE δ, CHE HA UNA DISTRIBUZIONE $N(\delta_0, \sigma_\delta^2)$
(NON POSSIAMO CONOSCERLO ESATTAMENTE, MA POSSIAMO CORREGGERLO)

$$T_i^c = T_i^m - \delta_0$$
$$= T_i^v + u_i + \alpha \quad \text{DOVE } \alpha = \delta - \delta_0 \text{ E HA DISTRIBUZIONE } N(0, \sigma_\delta^2)$$

$$E[T_i^c] = T_i^v + E[u_i] + E[\alpha] = T_i^v$$
$$\text{var}(T_i^c) = \sigma_{T_i}^2 + \sigma_\delta^2$$
$$\text{cov}(T_i^c, T_j^c) = E[T_i^c T_j^c] - E[T_i^c]E[T_j^c]$$
$$= T_i^v T_j^v + \sigma_\delta^2 - T_i^v T_j^v$$
$$= \sigma_\delta^2$$

SAPENDO CHE

$$T_i^c T_j^c = (T_i^v + u_i + \alpha) T_j^v + (T_i^v + u_i + \alpha) u_j + (T_i^v + u_i + \alpha)\alpha$$
$$E[T_i^c T_j^c] = T_i^v T_j^v + E[u_i u_j] + E[\alpha u_j] + E[u_i \alpha] + E[\alpha^2]$$

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(T_i^c, T_j^c)}{\sigma_{T_i} \sigma_{T_j}} = \frac{\sigma_\delta^2}{[(\sigma_{T_i}^2 + \sigma_\delta^2)(\sigma_{T_j}^2 + \sigma_\delta^2)]^{1/2}}$$

POSSIAMO FARE L'IPOTESI CHE GLI ERRORI STATISTICI SIANO GLI STESSI SU TUTTE LE TEMPERATURE $\sigma_{T_i}^2 = \sigma_{T_j}^2 = \sigma_T^2$, DA CUI

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_T^2 + \sigma_\delta^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_T^2}{\sigma_\delta^2}} = \begin{cases} 0 & \sigma_\delta^2 \ll \sigma_T^2 \\ 1 & \sigma_\delta^2 \gg \sigma_T^2 \end{cases}$$

FUNZIONI DI UNA O PIÙ VARIABILI CASUALI

IN GENERE, COME RISULTATO DI UN ESPERIMENTO SI HANNO n MISURE $x_1, \dots, x_n$ DI UNA VARIABILE CASUALE x CHE COSTITUISCONO IL CAMPIONE CASUALE (O ALEATORIO)

PER OTTENERE INFORMAZIONI SPECIFICHE SULLA POPOLAZIONE A PARTIRE DAL CAMPIONE SI USA UNA STATISTICA, CHE È UNA FUNZIONE DEL CAMPIONE CASUALE $t(x_1, \dots, x_n)$

SUPPONIAMO DI AVERE n VARIABILI CASUALI $x_1, \dots, x_n$ CHE COSTITUISCONO IL CAMPIONE DI CUI CONOSCIAMO IL VALORE DI ASPETTAZIONE μ_i E LA VARIANZA σ_i^2
INTRODUCIAMO UNA VARIABILE CASUALE y FUNZIONE DEL CAMPIONE $y(x_1, \dots, x_n)$

$$y(\vec{x}) = y(\vec{\mu}) + \sum_i \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_i-\mu_i) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}}(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)$$

$$E[y] = y(\vec{\mu}) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \mathrm{cov}(x_i,x_j)$$

$$\mathrm{var}(y) = \sum_i\sum_j \frac{\partial y}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \mathrm{cov}(x_i,x_j)$$

SE $y = y(x_1,x_2)$, $E[y] = y(\mu_1\mu_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\mathrm{cov}(x_1,x_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}\mathrm{cov}(x_2,x_1) +$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\sigma_1^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\sigma_2^2\right]$$

$$\mathrm{var}(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\sigma_2^2 + 2\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{cov}(x_1,x_2)$$

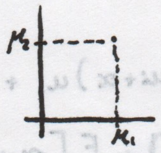
ES. SUPPONIAMO CHE $y = x_1 - x_2$ CON $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho_{12}$

$$E[y] = \mu_1 - \mu_2$$

$$\mathrm{var}(y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(1)(-1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$
$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

SE $\rho_{12} < 0$ $\quad \sigma_y^2 > \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

SE $\rho_{12} > 0$ $\quad \sigma_y^2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2$



UN $\rho < 0$, SIGNIFICA CHE VALORI PICCOLI DI x_1 FAVORISCONO VALORI GRANDI DI x_2 (IN GENERE LA DIFFERENZA RISULTA PIÙ GRANDE, QUINDI AUMENTA LA DISPERSIONE DELLE DIFFERENZE)

SE $\rho > 0$, VALORI GRANDI DI x_1 FORNISCONO VALORI GRANDI DI x_2 E VICEVERSA (LA DIFFERENZA RIMANE LA STESSA)

ES. SUPPONIAMO DI AVERE n MISURE $x_1, \ldots, x_n$ DELLA STESSA GRANDEZZA FISICA, QUINDI CONSIDERIAMO LA MEDIA COME RISULTATO DELLA MISURA $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$

CON $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_i \sigma_i^2$

INTRODUCIAMO $y_i = x_i - \bar{x}$ CON $E[y_i] = 0$

$$\mathrm{var}(y_i) = \sigma_i^2 + \sigma_{\bar{x}}^2 - 2\,\mathrm{cov}(x_i,\bar{x})$$
$$= \sigma_i^2 + \sigma_{\bar{x}}^2 - \frac{2}{n}\sigma_i^2$$

SAPENDO CHE $\mathrm{cov}(x_i,\bar{x}) = E[x_i\bar{x}] - E[x_i]E[\bar{x}]$

$$= \frac{1}{n}\sum_j \underbrace{E[x_i x_j]}_{\mathrm{cov}(x_i,x_j)+\mu^2} - \mu^2$$

$$= \frac{1}{n}(n\mu^2 + \sigma_i^2) - \mu^2 = \frac{\sigma_i^2}{n}$$

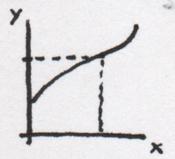
SE $\sigma_i^2 = \sigma^2$ ALLORA $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$ DA CUI $\mathrm{var}(y_i) = \sigma^2 + \frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{2}{n}\sigma^2$

$$= \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

SUPPONIAMO DI AVERE n VARIABILI $x_1, \dots, x_n$ E DUE FUNZIONI $f(x_1, \dots, x_n)$ E $g(x_1, \dots, x_n)$ DELLO STESSO CAMPIONE

$$\mathrm{cov}(f,g) = \sum_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \cdot \sigma_i^2$$

SIA y FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE CASUALE, $y = y(x)$, DI CUI É NOTA LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $f(x)$



LA PROBABILITÁ CHE x CADA IN UN INTERVALLO INFINITESIMO É UGUALE A QUELLA CHE y CADA IN UN INTERVALLO INFINITESIMO

$$dP = f(x)\,dx = g(y)\,dy$$

DA CUI $g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$ VALE PER UNA RELAZIONE BIUNIVOCA TRA x E y

SE x HA UNA DISTRIBUZIONE NORMALE $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ E y É DEFINITA COME $y = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$, ALLORA y HA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD $N(0,1)$

SE x HA UNA DISTRIBUZIONE NORMALE $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ E y É DEFINITA COME $y = \frac{1}{x}$,

ALLORA $x = \frac{1}{y}$ E $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2}$

QUINDI $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp -\frac{\left(\frac{1}{y} - \mu_x\right)^2}{2\sigma_x^2} \quad \frac{1}{y^2}$

SUPPONIAMO CHE y SIA FUNZIONE DI n VARIABILI CASUALI $y = y(x_1, \dots, x_n)$ E SUPPONIAMO DI CONOSCERE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DELLE VARIABILI CASUALI $f(x_1, \dots, x_n)$

CI CHIEDIAMO QUALE SIA LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI y

INTRODUCIAMO n FUNZIONI DELLE STESSE VARIABILI $x_1, \dots, x_n$

$$y = y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_n(x_1, \dots, x_n)$$

QUESTE FUNZIONI DEVONO ESSERE INVERTIBILI, CIOÉ

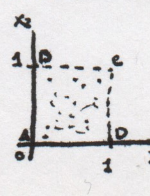
$$x_1 = x_1(y_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_n(y_1, \dots, y_n)$$

$\underline{h(y_1, \dots, y_n)} = f(x_1, \dots, x_n)\,|J|$ DOVE $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA

$$h_1(y_1) = g(y) = \int_{\Omega_y} dy_2 \dots dy_n \; h(y_1, \dots, y_n)$$

ES. SUPPONIAMO DI AVERE DUE VARIABILI INDIPENDENTI x_1, x_2 CON UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $f_i(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x_i \in (0,1) \\ 0 & \text{SE } x_i \notin (0,1) \end{cases}$



DEFINIAMO $y = y_1 = x_1 + x_2$ E INTRODUCIAMO $y_2 = x_1 - x_2$ IN MODO ARBITRARIO

DOBBIAMO ESSERE IN GRADO DI INVERTIRE QUESTE RELAZIONI, IN PARTICOLARE

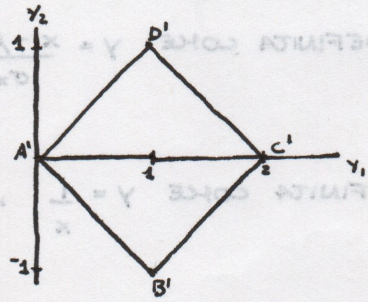
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \end{cases}$$

E CALCOLARE J, QUINDI $\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = \frac{1}{2}$ $\quad$ DA CUI $J = -\frac{1}{2}$

$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = -\frac{1}{2}$

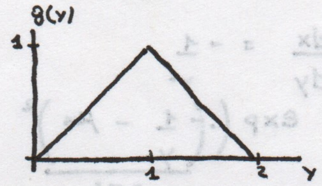
$$h(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)\,|J| = 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$h_1(y_1) = \int_{\mathcal{R}_Y} dy_2\, h(y_1, y_2)$$



$$h_1(y_1) = \begin{cases} \int_{-y_1}^{y_1} \frac{1}{2}\, dy_2 = y_1 & \text{PER } y_1 < 1 \\ \int_{-2+y_1}^{2-y_1} \frac{1}{2}\, dy_2 = 2 - y_1 & \text{PER } y_1 > 1 \end{cases}$$

QUINDI $g(y) = \begin{cases} y & \text{PER } 0 \le y \le 1 \\ 2-y & \text{PER } 1 < y \le 2 \end{cases}$



ES. CONSIDERIAMO DUE VARIABILI INDIPENDENTI x_1, x_2 CON FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x_i \in (0,1) \\ 0 & \text{SE } x_i \notin (0,1) \end{cases}$$

DEFINIAMO $y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\,\cos(2\pi x_2)$ E INTRODUCIAMO $y_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\,\sin(2\pi x_2)$

FACENDO IL RAPPORTO TRA QUESTE DUE FUNZIONI SI OTTIENE $\tan 2\pi x_2 = \frac{y_2}{y_1}$

QUINDI $x_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{y_2}{y_1}$

INOLTRE, $y_1^2 + y_2^2 = -2\ln x_1$ DA CUI $x_1 = e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}}$

$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = -y_1 e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}}$ $\quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -y_2 e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}}$ $\quad$ DA CUI $J = \frac{e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}}}{2\pi(y_1^2+y_2^2)}(-y_1^2 - y_2^2)$

$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{1}{2\pi}\frac{-y_2}{y_1^2+y_2^2}$ $\quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{1}{2\pi}\frac{y_1}{y_1^2+y_2^2}$ $\quad = -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}}$

$$h(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}}$$

QUINDI y_1 E y_2 HANNO FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD $N(0,1)$

ES. CONSIDERIAMO DUE VARIABILI CASUALI u, v CON DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD $N(0,1)$

DEFINIAMO $x_1 = \frac{u}{v}$ E INTRODUCIAMO $x_2 = v$

DA CUI SI RICAVA CHE $u = x_1 x_2$

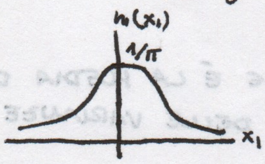
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 \qquad \text{DA CUI} \quad J = x_2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x_2} = 1$$

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 x_2^2}{2}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} x_2 = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_2^2(1-x_1^2)}{2}} x_2$$

$$h_1(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, |x_2| \, e^{-\frac{x_2^2(1-x_1^2)}{2}}$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{1+x_1^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x_1^2} \qquad \text{AVENDO POSTO} \quad t = \frac{-x^2(1-x_1^2)}{2}$$

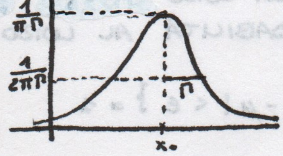


É UN CASO PARTICOLARE DELLA DISTRIBUZIONE DI CAUCHY

VALORE DI ASPETTAZIONE $E[x_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \, x_1 \, h_1(x_1)$ E VARIANZA NON SONO DEFINITI

DISTRIBUZIONE DI CAUCHY

SE SI INTRODUCE LA VARIABILE $x_1 = \frac{x - x_0}{\Gamma}$ RICAVANDO $x = x_1 \Gamma + x_0$ SI PUÓ RICAVARE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI x $\quad f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + (x-x_0)^2}$



HA MASSIMO PER $x = x_0$

Γ CORRISPONDE ALL'AMPIEZZA A MEZZA ALTEZZA

CONSIDERIAMO LA SOMMA $y = \sum_i x_i$ E LA MEDIA $\sum_i \frac{1}{n} x_i$ DI n VARIABILI INDIPENDENTI LA CUI FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA É $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$

$$M_y^*(t) = E[e^{ty}] = \int_{\Omega_{x_i}} dx_1, \dots, dx_n \, e^{ty(x_1,\dots,x_n)} f(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \int_{\Omega_{x_1}} dx_1 \, e^{tx_1} f(x_1) \dots \int_{\Omega_{x_n}} dx_n \, e^{tx_n} f(x_n)$$

$$= \prod_1^n M_{x_i}^*(t)$$

SUPPONIAMO CHE LA VARIABILE x_i ABBIA UNA FUNZIONE DI $\chi^2_{\nu_i}$:
LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI É $\quad M_{x_i}^*(t) = (1-2t)^{-\frac{\nu_i}{2}}$

$$M_y^*(t) = (1-2t)^{-\left(\frac{\nu_1}{2} \dots \frac{\nu_n}{2}\right)} = (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}} \qquad \text{DOVE} \quad \nu = \sum_i \nu_i$$

SI HA QUINDI CHE LA SOMMA DI n VARIABILI CON DISTRIBUZIONE χ^2 É UNA VARIABILE CHE HA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2 CON UN NUMERO DI GRADI DI LIBERTÁ PARI ALLA SOMMA DEI GRADI DI LIBERTÁ

SUPPONIAMO CHE LE x_i ABBIANO DISTRIBUZIONE NORMALE $N(\mu_i, \sigma_i^2)$
LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI É $M^*_{x_i}(t) = \exp\left(\mu t + \sigma_i^2 \frac{t^2}{2}\right)$

$$M^*_y(t) = \prod_1^n {}_i \exp\left(\mu_i t + \sigma_i^2 \frac{t^2}{2}\right)$$
$$= \exp\left(\sum_i \mu_i t + \sum_i \sigma_i^2 \frac{t^2}{2}\right)$$
$$= \exp\left(\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}\right) \qquad \text{DOVE } \mu = \sum_i \mu_i \text{ E } \sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2$$

LA SOMMA DI n VARIABILI CASUALI CON FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI GAUSS INDIPENDENTI HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE GAUSSIANA CON VALORE DI ASPETTAZIONE LA SOMMA DEI VALORI DI ASPETTAZIONE E VARIANZA LA SOMMA DELLE VARIANZE

SE CONSIDERIAMO $y = \frac{1}{n} \sum_i x_i$, $\bar{x}$ HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $N(\mu_{\bar{x}}, \sigma^2_{\bar{x}})$

DOVE $\mu_{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_i \mu_i = \bar{\mu}$ E $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \sum_i \sigma_i^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}^2$

↳ LA MEDIA É CARATTERIZZATA DA UN VALORE DI ASPETTAZIONE CHE É LA MEDIA DEI VALORI DI ASPETTAZIONE E UNA VARIANZA CHE É $\frac{1}{n}$ LA MEDIA DELLE VARIANZE

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI $\mu_i = \mu_x$ E $\sigma_i^2 = \sigma_x^2$, LA MEDIA HA UN VALORE DI ASPETTAZIONE $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ E UNA VARIANZA $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2_x}{n}$

PROPRIETÁ DELLA MEDIA:
- LEGGE DEI GRANDI NUMERI
- TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

LEGGE DEI GRANDI NUMERI: SUPPONIAMO DI AVERE n VARIABILI CASUALI INDIPENDENTI x_i CON LO STESSO VALORE DI ASPETTAZIONE $E[x_i] = \mu$ E STESSA VARIANZA $var(x_i) = \sigma^2$ FINITA
IN QUESTO CASO SI PUÓ DIMOSTRARE CHE LA LORO MEDIA ARITMETICA $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ CONVERGE IN PROBABILITÁ AL LORO VALORE DI ASPETTAZIONE, CIOÉ $\lim_{n\to\infty} P\{|\bar{x} - \mu| < \varepsilon\} = 1$

DOVE ε É UN NUMERO REALE POSITIVO ARBITRARIO

↳ SI DIMOSTRA UTILIZZANDO LA DISUGUAGLIANZA DI ČEBYŠËV, LA QUALE DICE CHE
$P(|y - \mu_y| \geq k\sigma_y) \leq \frac{1}{k^2}$

NEL CASO DELLA MEDIA, $P\left\{|\bar{x} - \mu| \geq k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \leq \frac{1}{k^2}$

POSSIAMO INTRODURRE $\varepsilon = k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ DA CUI $\frac{1}{k^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$

DA CUI $P\{|\bar{x} - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$ E $\lim_{n\to\infty} P\{|\bar{x} - \mu| \geq \varepsilon\} = 0$

aggiungi: Chebyšev

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE: SUPPONIAMO DI AVERE n VARIABILI CASUALI INDIPENDENTI x_i CON LO STESSO VALORE DI ASPETTAZIONE $E[x_i] = \mu$ E UNA VARIANZA $var(x_i) = \sigma^2$ FINITA
ALLORA LA MEDIA HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ QUALSIASI SIA LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DELLE VARIABILI DI PARTENZA PURCHÉ n SIA SUFFICIENTEMENTE GRANDE

↳ SI TRATTA DI DIMOSTRARE CHE LA VARIABILE $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ HA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD $N(0,1)$

SAPPIAMO CHE LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI DI UNA VARIABILE CON DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD É $M_y^c(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

$$z = \sum_1^n{}_i \, z_i \qquad z = \frac{\sum_i x_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_i \frac{x_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \qquad z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$M_z^c(t) = E[e^{tz}] = E[\Pi_i e^{tz_i}] = \Pi_i E[e^{tz_i}]$$

$$e^{tz_i} \simeq 1 + z_i e^{tz_i}\Big|_{t=0} t + \frac{1}{2} z_i^2 e^{tz_i}\Big|_{t=0} t^2 + \frac{1}{3!} z_i^3 e^{tz_i}\Big|_{t=0} t^3 + \ldots$$

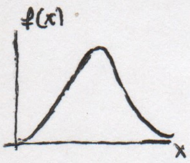
$$E[e^{tz_i}] = 1 + E\left[\frac{x_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] t + \frac{1}{2} E\left[\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2 n}\right] t^2 + \frac{1}{6} E\left[\frac{(x_i-\mu)^3}{\sigma^3 (\sqrt{n})^3}\right] t^3 + \ldots$$

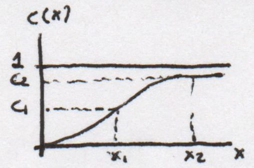
$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2 n} \sigma^2 t^2 + \frac{1}{6} \frac{1}{\sigma^3 (\sqrt{n})^3} \mu^3 t^3 + \ldots$$

$$\simeq 1 + \frac{t^2}{2n} \qquad \text{QUINDI} \qquad M_z^c(t) = \Pi_i \left(1 + \frac{t^2}{2n}\right) = \left(1 + \frac{t^2}{2n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{\frac{t^2}{2}}$$

ES. SE LE x_i HANNO UNA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE, $f(x_i) = \frac{1}{x} e^{-\frac{x_i}{x}}$, LA LORO MEDIA $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_j x_j$ PER $n \to \infty$ HA UNA DISTRIBUZIONE $N\left(x, \frac{x^2}{n}\right)$

SUPPONIAMO DI AVERE UNA VARIABILE CASUALE x DEFINITA IN UN INTERVALLO (a,b) CON UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $f(x)$
POSSIAMO INTRODURRE LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE $C(x) = \int_a^x f(x)\,dx'$





SE x É UNA VARIABILE CASUALE, ANCHE $C(x)$ É UNA VARIABILE CASUALE CHE HA DISTRIBUZIONE UNIFORME IN $(0,1)$

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_a^{x_2} f(x_2)\,dx - \int_a^{x_1} f(x_1)\,dx$$

$$= C(x_2) - C(x_1)$$

$$= C_2 - C_1 = P(C_1 \le C \le C_2)$$

SUPPONIAMO CHE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE SIA ESPONENZIALE $f(x) = \frac{1}{x_0} e^{-\frac{x}{x_0}}$

ALLORA $C(x) = \int_0^x \frac{1}{x_0} e^{-\frac{x'}{x_0}} dx' = e^{-\frac{x'}{x_0}} \Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{x_0}} = c$

DA CUI $e^{-\frac{x}{x_0}} = 1 - c$ E $x = -x_0 \ln(1-c)$

SUPPONIAMO DI AVERE n VARIABILI x_i INDIPENDENTI CON DISTRIBUZIONE UNIFORME IN $(-0.5, 0.5)$

HANNO VALORE DI ASPETTAZIONE $E[x_i] = 0$
E VARIANZA $var(x_i) = \frac{1}{12}$

LA LORO MEDIA $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ HA DISTRIBUZIONE $N\left(0, \frac{1}{12n}\right)$

NOTA SE LE x_i HANNO DISTRIBUZIONE DI CAUCHY, ALLORA LA LORO MEDIA HA DISTRIBUZIONE DI CAUCHY IDENTICA

SUPPONIAMO DI AVERE n VARIABILI CASUALI INDIPENDENTI x_i CON DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD $N(0,1)$ E CONSIDERIAMO LA SOMMA DEI LORO QUADRATI $Q = \sum_i x_i^2$
BISOGNA DIMOSTRARE CHE Q HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2_n

CHIAMIAMO $y = x^2$ DOVE x É UNA GENERICA x_i, LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI y É $g(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|$

QUINDI $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$ DA CUI

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[\left| \frac{1}{2} y^{-1/2} \right| + \left| -\frac{1}{2} y^{-1/2} \right| \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

É UNA FUNZIONE DI χ^2 A UN GRADO DI LIBERTÁ

SE x HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD, IL SUO QUADRATO HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2 A UN GRADO DI LIBERTÁ
SAPPIAMO CHE LA SOMMA DI n VARIABILI CON DISTRIBUZIONE $\chi^2_{\nu_i}$ É ANCORA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2_ν, DOVE $\nu = \sum_i \nu_i$
QUINDI $Q = \sum_i x_i$ HA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2_n

SUPPONIAMO DI AVERE x_i VARIABILI CON DISTRIBUZIONE $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ E DEFINIAMO LA VARIABILE $z_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$

DEFINIAMO $Q = \sum_i \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$

SE LE x_i SONO INDIPENDENTI, Q HA UNA DISTRIBUZIONE χ^2_n CON VALORE DI ASPETTAZIONE $E[Q] = n$ E VARIANZA $var(Q) = 2n$
PER $n \to \infty$ LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2 TENDE A QUELLA DI GAUSS, QUINDI CI SI ASPETTA CHE Q ABBIA UN VALORE $n \pm \sqrt{2n}$ CON UNA PROBABILITÁ DEL 68%

SE LE x_i NON SONO INDIPENDENTI, LA FORMA QUADRATICA É $Q = (\vec{x} - \vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})$
IN QUESTO CASO Q HA SEMPRE FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2_n, PURCHÉ LE x_i ABBIANO DISTRIBUZIONE $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ E NON SIANO RIDONDANTI, CIOÉ NON CI SIA UNA RELAZIONE CHE LE LEGA

IN GENERALE È POSSIBILE TROVARE UNA TRASFORMAZIONE PER LA QUALE LE n VARIABILI x_i VENGONO SCRITTE COME n VARIABILI y_i CON COVARIANZA PARI A ZERO (DIAGONALIZZAZIONE DI V)

SI SCRIVE $Q = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2$

LE y_i HANNO DISTRIBUZIONE $N(0, \sigma_{y_i}^2)$, SUCCESSIVAMENTE SI FA UNA TRASFORMAZIONE DI SCALA, CIOÈ LE y_i VENGONO MOLTIPLICATE CON FATTORI OPPORTUNI IN MODO DA SCRIVERE Q COME LA SOMMATORIA DI n VARIABILI CASUALI z_i CON DISTRIBUZIONE $N(0,1)$

PER $n=2$, LA MATRICE DELLE COVARIANZE È $V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

E $$Q^2 = \frac{1}{1-\rho_{12}^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho_{12}\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

INTRODUCIAMO DUE VARIABILI
$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} + \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right]$$
$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right]$$

QUESTA È LA TRASFORMAZIONE CHE CI SERVE PER DIAGONALIZZARE LA MATRICE DELLE COVARIANZE

INTRODUCIAMO
$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\rho}}\,y_1$$
$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho}}\,y_2$$

QUESTA È LA TRASFORMAZIONE DI SCALA, PER LA QUALE ALLA FINE SI DOVREBBE OTTENERE CHE z_1 E z_2 HANNO DISTRIBUZIONE $N(0,1)$ E SONO INDIPENDENTI

BISOGNA VERIFICARE CHE $Q = z_1^2 + z_2^2$

$$z_1^2 + z_2^2 = \frac{1}{2(1+\rho)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} + 2\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right] +$$
$$+ \frac{1}{2(1-\rho)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{(1-\rho)\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} + 2\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right] + (1+\rho)\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[2\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + 2\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 4\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]$$
$$= \frac{1}{(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + 2\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]$$

$g(z_1, z_2) = f(x_1, x_2)\,|J|$

QUINDI DOBBIAMO RICAVARE x_1, x_2

SCRIVENDO $z_1(\sqrt{1+\rho}) + z_2(\sqrt{1-\rho}) = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}$ DA CUI $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1\left[z_1(\sqrt{1+\rho}) + z_2(\sqrt{1-\rho})\right] + \mu_1$

$z_1(\sqrt{1+\rho}) - z_2(\sqrt{1-\rho}) = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}$ DA CUI $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2\left[z_1(\sqrt{1+\rho}) - z_2\sqrt{1-\rho}\right] + \mu_2$

$$\frac{\partial x_1}{\partial z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1 \sqrt{1+\rho} \qquad \frac{\partial x_1}{\partial z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1 \sqrt{1-\rho} \qquad \text{DA CUI } J = -\frac{1}{2} \sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} - \frac{1}{2} \sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2 \sqrt{1+\rho} \qquad \frac{\partial x_2}{\partial z_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2 \sqrt{1-\rho} \qquad = -\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}$$

QUINDI $g(z_1, z_2) = \dfrac{1}{2\pi (\det V)^{1/2}} e^{-\frac{Q}{2}} \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(z_1^2+z_2^2)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_2^2}{2}}$$

LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DI z_1 E z_2 NON É ALTRO CHE IL PRODOTTO DI DUE FUNZIONI CON DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD

SI CONCLUDE QUINDI CHE z_1 E z_2 HANNO DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD E SONO INDIPENDENTI, QUINDI Q, CHE É LA SOMMA DEI LORO QUADRATI, HA DISTRIBUZIONE χ^2_2

SUPPONIAMO DI AVERE x_i VARIABILI CON DISTRIBUZIONE $N(\mu, \sigma^2)$ E DEFINIAMO $z = \sum_i (x_i - \mu)^2$

SE LE x_i SONO INDIPENDENTI E SE μ É NOTO, $\frac{z}{\sigma^2}$ HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2_n

CON VALORE DI ASPETTAZIONE $E[z] = \sigma^2 n$ E VARIANZA $var(z) = (\sigma^2)^2 2n$?

POSSIAMO INTRODURRE LA VARIABILE $(s')^2 = \frac{1}{n} z = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \mu)^2$ CON VALORE DI ASPETTAZIONE $E[s'] = \sigma^2$ E VARIANZA $var(s') = \frac{2(\sigma^2)^2}{n}$

POSSIAMO USARE s' PER STIMARE LA VARIANZA, OVVERO $\hat{\sigma}^2 = (s')^2$ E $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ PERCHÉ $E[\bar{x}] = \mu$

DEFINENDO $z = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$, QUESTO NON HA PIÚ UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2_n, PERCHÉ $\bar{x}$ E x_i NON SONO PIÚ INDIPENDENTI, ANZI C'É UNA RELAZIONE LINEARE CHE LE LEGA, z HA QUINDI UNA DISTRIBUZIONE χ^2_{n-1}

IN GENERALE, SE SI CONSIDERA LA SOMMA DEI QUADRATI DI VARIABILI CON DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD, QUESTA HA UNA DISTRIBUZIONE χ^2_{n-r}, DOVE r SONO LE RELAZIONI TRA LE VARIABILI

PER DIMOSTRARE, SI PASSA DALLE x_i ALLE y_i TRAMITE UNA TRASFORMAZIONE ORTOGONALE SCRIVENDO $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$, DOVE GLI a_{ij} DEVONO VERIFICARE LE ~~FORMULE~~ CONDIZIONI AFFINCHÉ LA TRASFORMAZIONE SIA ORTOGONALE, IN MODO CHE $\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2$
SUCCESSIVAMENTE, PER UNA DELLE y_i, AD ESEMPIO y_1, SI DECIDE CHE, INVECE DI SCRIVERE $y_1 = \sum_j a_{1j} x_j$, GLI a_{ij} SIANO TUTTI UGUALI TRA LORO COSÍ DA SCRIVERE $y_1 = a \sum_j x_j$
SI TROVA CHE $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$, DA CUI $y_1 = \sqrt{n}\, \bar{x}$

POI SI CONSIDERA $i \geq 2$
ALLA FINE SI TROVA CHE LE y_i HANNO TUTTE DISTRIBUZIONE $N(0, \sigma^2)$
E SI OTTIENE $\sum_1^n x_i^2 = \sum_2^n y_j^2$

↳ SI PASSA QUINDI DA n VARIABILI LEGATE DA UNA RELAZIONE LINEARE A $n-1$ VARIABILI INDIPENDENTI, CIÓ PERMETTE DI DIMOSTRARE CHE z, A PARTE IL FATTORE DI SCALA, HA UNA DISTRIBUZIONE χ^2_{n-1}

QUINDI $z = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2 \sum_2^n y_j^2$ E $\frac{z}{\sigma^2}$ HA DISTRIBUZIONE χ^2_{n-1} CON VALORE DI ASPETTAZIONE $E\left[\frac{z}{\sigma^2}\right] = n-1$ E VARIANZA $var\left(\frac{z}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$ $\quad E[z] = \sigma^2(n-1)$

SE SI INTRODUCE LA STATISTICA $s^2 = \frac{1}{n-1} z = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$, ALLORA $E[s^2] = \sigma^2$

E $var(s^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{n-1}$

L'ERRORE RELATIVO SULLA STIMA DELLA VARIANZA É $\frac{var(s^2)}{(\sigma^2)^2} = \frac{2}{n-1}$ E

L'ERRORE RELATIVO SULLA STIMA DELLA DEVIAZIONE STANDARD É $\frac{\sigma\sqrt{s^2}}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_i x_i^2 + \sum_i \bar{x}^2 - 2\sum_i x_i \bar{x}\right]$$
$$= \frac{n}{n-1}\left[\overline{x^2} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2\right] = \frac{n}{n-1}\left[\overline{x^2} - \bar{x}^2\right] \simeq \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

SE SUFFICIENTEMENTE GRANDE

LA STIMA MIGLIORE DI $E[x^2]$ É $\overline{x^2}$

SE HO DUE VARIABILI x_i E y_i:
$$var(x) = E\left[(x-\mu)^2\right] = E[x^2] - (E[x])^2$$
$$cov(x,y) = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right] = E[xy] - E[x]E[y]$$
$$\hat{c} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} \quad \text{STIMATORE DELLA COVARIANZA}$$
$$\hat{\rho} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\left[(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)\right]^{1/2}}$$

INFERENZA STATISTICA :
- STIMA DEI PARAMETRI
- TEST D'IPOTESI

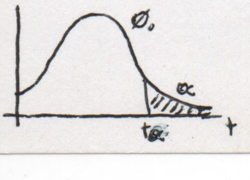
DA UN NUMERO LIMITATO DI OSSERVAZIONI, CHE SI ASSUME COSTITUISCANO UN "CAMPIONE CASUALE", SI VOGLIONO OTTENERE INFORMAZIONI QUANTITATIVE SULL'INTERA POPOLAZIONE DI CUI IL CAMPIONE FA PARTE

IPOTESI STATISTICA: ASSUNZIONE SULLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE O SULLA LEGGE FISICA CHE LEGA DUE VARIABILI

AVENDO A DISPOSIZIONE UN CAMPIONE $x_1, \ldots, x_n$ BISOGNA ESTRARRE DELLE INFORMAZIONI SULLA VALIDITÁ DELL'IPOTESI STATISTICA CHE É STATA FATTA, IN PRATICA SI DEVE CALCOLARE LA PROBABILITÁ CHE L'IPOTESI STATISTICA SIA VERA SULLA BASE DEL CAMPIONE

IL TEST D'IPOTESI É PROPRIO LA PROCEDURA CHE PERMETTE DI STABILIRE LA VALIDITÁ DELL'IPOTESI STATISTICA FATTA E CHE PORTA A RIGETTARE O ACCETTARE QUEST'ULTIMA

IN PRATICA, ABBIAMO A DISPOSIZIONE L'IPOTESI NULLA H_0 E UN CAMPIONE DI DIMENSIONE n $x_1, \ldots, x_n$ PER ESEGUIRE IL TEST D'IPOTESI
INTRODUCIAMO QUINDI UNA FUNZIONE DEL CAMPIONE ALEATORIO $t(x_1, \ldots, x_n)$ (STATISTICA), CHE É UNA VARIABILE CASUALE PERCHÉ FUNZIONE DI VARIABILI CASUALI
NEL CASO IN CUI L'IPOTESI H_0 SIA VERA, É NECESSARIO CONOSCERE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DELLA STATISTICA $\phi_0(t)$
A QUESTO PUNTO SI SCEGLIE UN LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ α CHE DEVE CORRISPONDERE A UN INTERVALLO BEN DEFINITO DELLA STATISTICA DI TEST, IN PARTICOLARE $\int_{t_\alpha}^{\infty} \phi_0(t)\,dt = \alpha$



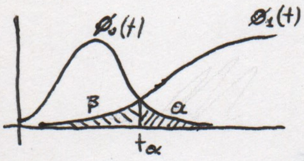
α MI DÁ LA PROBABILITÁ CHE LA STATISTICA DI TEST MI DIA UN VALORE MAGGIORE DI t_α

A QUESTO PUNTO SI CALCOLA LA STATISTICA DEI TEST SUL CAMPIONE SPECIFICO CHE ABBIAMO A DISPOSIZIONE, OTTENENDO UN VALORE t^*

SE $t^* > t_\alpha$, CIOÉ $t^* \in (t_\alpha, \infty)$ "REGIONE CRITICA" SI RIGETTA L'IPOTESI NULLA CON UN LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ α

ERRORE DEL PRIMO TIPO: RIGETTARE L'IPOTESI NULLA ANCHE SE É VERA

SUPPONIAMO CHE SIA VERA L'IPOTESI ALTERNATIVA H_1, IN QUESTO CASO LA STATISTICA DI TEST HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DIVERSA $\phi_1(t)$



PIÚ É PICCOLO α, PIÚ AUMENTA LA PROBABILITÁ CHE, ANCHE SE VERA ϕ_1, LA STATISTICA DEI TEST NON CADA NELLA REGIONE CRITICA

$$\beta = \int_0^{t_\alpha} \phi_1(t)\,dt$$

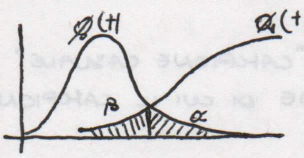
LA PROBABILITÁ CHE LA STATISTICA DEI TEST CADA NELLA REGIONE CRITICA SE É VERA H_1 É PARI A $1-\beta$

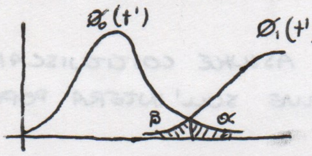
β MI DÁ LA PROBABILITÁ DI NON RIGETTARE L'IPOTESI NULLA ANCHE SE É VERA H_1 (ERRORE DEL SECONDO TIPO)

↳ SE SI SCEGLIE UN α MOLTO PICCOLO, IN MODO DA MINIMIZZARE L'ERRORE DEL PRIMO TIPO, CIOÉ IN MODO DA AVERE UNA BASSA PROBABILITÁ DI RIGETTARE L'IPOTESI NULLA SE É VERA, AUMENTANO β E GLI ERRORI DEL SECONDO TIPO

FRA LE STATISTICHE DI TEST CHE ABBIAMO A DISPOSIZIONE, SCEGLIAMO QUELLE IN CUI, DATO UN CERTO α, SI MINIMIZZA β

↳ SUPPONIAMO DI AVERE DUE IPOTESI ALTERNATIVE

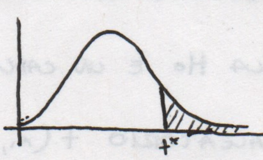




LA STATISTICA DI TEST t' DÁ UN VALORE DI β PIÚ PICCOLO DEL PRIMO, QUINDI SI DOVREBBE SCEGLIERE t'

SE t^* NON CADE NELLA REGIONE CRITICA, NON SI RIGETTA H_0 CON QUEL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ, SI ASSUME SIA VERA FINO A QUANDO NON VIENE PROVATO IL CONTRARIO

TEST DI SIGNIFICATIVITÁ: DATA LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE ϕ_0 DELLA STATISTICA DI TEST NELL'IPOTESI IN CUI H_0 SIA VERO, NON SI FISSA IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ A PRIORI, MA SI CALCOLA LA STATISTICA SUL CAMPIONE E SI OTTIENE UN CERTO t^* E SI DEFINISCE $p = \int_{t^*}^{\infty} \phi_0(t)\,dt$, CHE É LA PROBABILITÁ DI OTTENERE PER LA STATISTICA DI TEST UN VALORE CHE SIA MAGGIORE DI QUELLO OTTENUTO SUL CAMPIONE



SE p (P-VALORE) É PICCOLO, INDICA UNA BASSA PROBABILITÁ DI OTTENERE IL VALORE CHE É STATO OTTENUTO, QUINDI UN'ALTA PROBABILITÁ CHE L'IPOTESI NULLA SIA SBAGLIATA

TEST PARAMETRICI : TEST SUI VALORI DEI PARAMETRI DI UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE IN GENERE SI RIFERISCONO A VALORE DI ASPETTAZIONE E VARIANZA

ES. TEST SULLA BONTÀ DI UN DADO, CIOÉ VEDERE SE LA PROBABILITÁ DI OTTENERE UN NUMERO TRA 1 E 6 É $\frac{1}{6}$

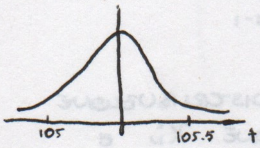
SONO STATI ESEGUITI 315'672 LANCI E SONO STATI OTTENUTI 5 0 6 106'602 VOLTE

L'IPOTESI NULLA H_0 É CHE $p = \frac{1}{6}$

NUMERO DI VOLTE IN CUI SI É OTTENUTO 5 0 6

$t = n_{56}$ HA DISTRIBUZIONE BINOMIALE CON $E[t] = Np = N \cdot \frac{1}{3} = 105'224$

E $var(t) = Np(1-p) = N \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 70'149 = 265^2$



$|t - E[t]| > 2\sigma \quad (\alpha = 5\%)$

$> 3\sigma \quad (\alpha = 3‰)$

TEST PARAMETRICI IN SENSO STRETTO : SI RIFERISCONO A TEST SU PARAMETRI DI DISTRIBUZIONI NORMALI $N(\mu, \sigma^2)$

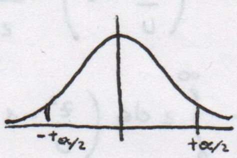
1. TEST SU μ, σ^2 NOTA : SUPPONIAMO CHE LA VARIABILE X ABBIA UN VALORE DI ASPETTAZIONE $\mu = \mu_0$, QUESTA É LA NOSTRA IPOTESI NULLA
ABBIAMO A DISPOSIZIONE UN CAMPIONE DI n VALORI DELLA VARIABILE CASUALE x

CONSIDERIAMO LA MEDIA DELLE VARIABILI CASUALI, CHE HA VALORE DI ASPETTAZIONE $E[\bar{x}] = \mu_0$ E VARIANZA $var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$ E SAPPIAMO

CHE SE LE VARIABILI HANNO DISTRIBUZIONE NORMALE, ANCHE LA MEDIA HA DISTRIBUZIONE NORMALE

INTRODUCIAMO LA STATISTICA DI TEST $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ CHE HA FUNZIONE DI

DISTRIBUZIONE $N(0,1)$



PONENDO $\alpha = 0.05$ SI RICAVA $t_{\alpha/2} = 1.97$

SE $|t^*| > t_{\alpha/2}$ RIGETTO H_0 CON UN LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÀ DEL 5%

ES. SE IL CAMPIONE É COSTITUITO DA 4 VALORI $\underset{x_1}{2.2}$ $\underset{x_2}{4.3}$ $\underset{x_3}{1.7}$ $\underset{x_4}{6.6}$, $\bar{x} = 3.7$

SE $H_0 : \mu_0 = 6.0$ CON UNA DEVIAZIONE STANDARD $\sigma = 3.0$, ALLORA
$t = \frac{\bar{x} - 6.0}{(3.0)/2}$ E $t^* = -1.53$ E SI ACCETTA L'IPOTESI

ES. IL PESO DI ALCUNE CONFEZIONI DI CIBO É 1.6 Kg , LA DITTA DICE CHE LA DISTRIBUZIONE DEL PESO É GAUSSIANA CON $E[x] = 1'600$ g E $\sigma = 120$ g
AVENDO A DISPOSIZIONE UN CAMPIONE DI 100 VARIABILI, SI VUOLE VERIFICARE CHE $\mu = \mu_0 : H_0$

$\bar{x} = 1'570$ g $\quad t^* = \frac{1570 - 1600}{12} = -2.5$ SI RIGETTA L'IPOTESI

2. TEST SU μ, σ^2 NON NOTA : ABBIAMO A DISPOSIZIONE UN CAMPIONE DI n VALORI DELLA VARIABILE CASUALE x

SUPPONIAMO CHE $\mu = \mu_0$: H_0

POSSIAMO USARE IL CAMPIONE PER STIMARE LA VARIANZA

ABBIAMO VISTO CHE $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$

POSSIAMO INTRODURRE COME STATISTICA DI TEST $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$,

PERÓ NON SI SA CHE FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE ABBIA, PERCHÉ $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2} = \sum_1^n{}_i \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$ HA DISTRIBUZIONE χ^2_{n-1}, QUINDI AL NUMERATORE ABBIAMO UNA VARIABILE CON UNA DISTRIBUZIONE NORMALE, MENTRE AL DENOMINATORE ABBIAMO UNA VARIABILE CHE É LA RADICE QUADRATA DI UNA VARIABILE CHE HA, A PARTE UN FATTORE DI SCALA, UNA DISTRIBUZIONE χ^2_{n-1}

POSSIAMO CONSIDERARE UNA VARIABILE x CON DISTRIBUZIONE $N(0,1)$ E UNA VARIABILE y CON DISTRIBUZIONE χ^2_ν E INTRODUCIAMO $z = \frac{x}{\sqrt{y/\nu}}$ E $z_2 = y$

QUINDI $x = z\sqrt{\frac{z_2}{\nu}}$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \sqrt{\frac{z_2}{\nu}} \qquad \frac{\partial x}{\partial z_2} = \frac{z}{\sqrt{\nu}} \frac{z_2^{-1/2}}{2} \qquad \text{DA CUI} \quad J = \sqrt{\frac{z_2}{\nu}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial z_2} = 1$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} y^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

$$g(z, z_2) = f(x,y)|J| = \sqrt{\frac{z_2}{\nu}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2 z_2}{2\nu}} z_2^{\frac{\nu}{2}-1} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{z_2}{2}}$$

$$h(z) = \int_0^\infty dz_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z_2^{\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{z_2}{2}\left(\frac{z^2}{\nu}+1\right)} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu/2)} \frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu}\, 2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu/2)} \int_0^\infty 2\, dq \left(\frac{z^2}{\nu}-1\right) 2^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{z^2}{\nu}-1\right) e^{-q}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu/2)} 2^{\frac{\nu+1}{2}} \left(\frac{z^2}{\nu}-1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \underbrace{\int_0^\infty dq\, q^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-q}}_{= \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu}} \cdot \left(\frac{z^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

AVENDO POSTO $q = \frac{z_2}{2}\left(\frac{z^2}{\nu}+1\right)$

DISTRIBUZIONE DI STUDENT

DISTRIBUZIONE DI STUDENT

$$f(z) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu/2)} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\frac{z^2}{\nu} + 1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

HA VALORE DI ASPETTAZIONE $\mu = 0$

HA UNA FORMA SIMILE ALLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI GAUSS, PERÓ PER UN NUMERO PICCOLO DI GRADI DI LIBERTÁ TENDE AD AVERE UNA FORMA DIVERSA; IN PARTICOLARE, PER $\nu = 1$ SI OTTIENE LA DISTRIBUZIONE DI CAUCHY, MENTRE PER $\nu \to \infty$ TENDE A UNA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD $N(0,1)$

TEST DI χ^2

TEST DI χ^2: MOLTO USATO PER LA PROPRIETÁ ADDITIVA DI χ^2, INFATTI SE UNA VARIABILE É LA SOMMA DI n VARIABILI CON DISTRIBUZIONE $\chi^2_{\nu_i}$ $X^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, ALLORA X^2 AVRÁ DISTRIBUZIONE χ^2_ν, DOVE $\nu = \sum_i \nu_i$

SUPPONIAMO DI AVERE UN CAMPIONE DI n VARIABILI CASUALI INDIPENDENTI E CON FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE NORMALE $x_1, \dots, x_n$ CON VARIANZE NOTE E VALORI DI ASPETTAZIONE CHE SI OTTERRANNO USANDO L'IPOTESI STATISTICA

CONVIENE PORRE $t = x^2 = \sum_i \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$, CHE HA QUINDI DISTRIBUZIONE χ^2_n

DALLA PROPRIETÁ ADDITIVA SEGUE ANCHE CHE I TEST DI χ^2 PERMETTONO DI CONSIDERARE CONTEMPORANEAMENTE PIÚ ESPERIMENTI

↳ SE AD ESEMPIO ABBIAMO UN ESPERIMENTO 1 IN CUI VIENE COSTRUITA, SECONDO L'IPOTESI NULLA, LA VARIABILE x_1^2 CHE HA UN CERTO NUMERO DI GRADI DI LIBERTÁ ν_1 E UN ESPERIMENTO 2 IN CUI SEMPRE IN BASE ALLA STESSA IPOTESI NULLA SI OTTIENE UNA VARIABILE x_2^2 CON UN CERTO NUMERO DI GRADI DI LIBERTÁ ν_2, SI POSSONO METTERE INSIEME I DUE ESPERIMENTI E CONSIDERARE LA SOMMA DELLE DUE VARIABILI $x = x_1^2 + x_2^2$ CHE AVRÁ UNA DISTRIBUZIONE χ^2_ν, DOVE $\nu = \nu_1 + \nu_2$

ES. SUPPONIAMO DI AVER ESEGUITO TRE VOLTE LO STESSO ESPERIMENTO IN CONDIZIONI DIVERSE E DI VOLER TESTARE L'IPOTESI NULLA IN TUTTE E TRE LE ESECUZIONI DELL'ESPERIMENTO

1. NEL PRIMO ESPERIMENTO ABBIAMO OTTENUTO UNA STATISTICA DI TEST $x_1^2 = 11.5$ CON UN NUMERO DI GRADI DI LIBERTÁ $\nu_1 = 7$

   PONIAMO UN LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ $\alpha = 0.05$ E TROVIAMO $t_\alpha = 14.07$
   NON RIGETTIAMO L'IPOTESI NULLA

2. NEL SECONDO ESPERIMENTO ABBIAMO OTTENUTO UNA STATISTICA DI TEST $x_2^2 = 16.4$ CON UN NUMERO DI GRADI DI LIBERTÁ $\nu_2 = 10$

   PONIAMO UN LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ $\alpha = 0.05$ E TROVIAMO $t_\alpha = 18.31$
   NON RIGETTIAMO L'IPOTESI NULLA

3. NEL TERZO ESPERIMENTO ABBIAMO OTTENUTO UNA STATISTICA DI TEST $x_3^2 = 17.4$ CON UN NUMERO DI GRADI DI LIBERTÁ $\nu_3 = 11$

   PONIAMO UN LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ $\alpha = 0.05$ E TROVIAMO $t_\alpha = 19.67$
   NON RIGETTIAMO L'IPOTESI NULLA

SOMMANDO SI OTTIENE $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 45.3$ CON UN NUMERO DI GRADI DI LIBERTÁ $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 28$
PONENDO $\alpha = 0.05$ SI TROVA $t_\alpha = 41.34$ E SI RIGETTA L'IPOTESI NULLA CON UN LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ DEL 5%

NOTA 1. TEST A UNA CODA: NEL TEST DI χ^2 SI ESCLUDONO I VALORI ALTI, CHE HANNO UNA BASSA PROBABILITÀ PERCHÉ TROPPO ALTI
INFATTI, VISTO CHE LA STATISTICA È COSTRUITA CONSIDERANDO VALORE MISURATO E VALORE ATTESO IN UNITÀ DI DEVIAZIONI STANDARD $T = \sum_i \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$

SE I VALORI SONO PICCOLI, I VALORI MISURATI SONO VICINI AI VALORI ATTESI IN BASE ALL'IPOTESI NULLA FATTA
QUINDI NON SI PUÒ RIGETTARE L'IPOTESI

2. ν: PER VARIABILI INDIPENDENTI $\nu = n$
SE CI SONO DELLE RELAZIONI CHE LEGANO LE VARIABILI CASUALI DI PARTENZA E FANNO QUINDI SÌ CHE QUESTE VARIABILI SIANO RIDONDANTI, ALLORA $\nu = n - r$, DOVE r È IL NUMERO DI VINCOLI TRA LE DIVERSE VARIABILI O IL NUMERO DI PARAMETRI STIMATI A PARTIRE DALLO STESSO CAMPIONE

3. $\mathrm{cov}(x_i, x_j) \neq 0$: IN QUESTO CASO, $X^2 = (\vec{x} - \vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})$ E HA UN NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ $\nu = n$

4. $\nu \gg 1$: $E[\chi^2_\nu] = \nu$ E $\mathrm{var}(\chi^2_\nu) = 2\nu$
SE SI AGGIUNGE IL FATTO CHE PER $\nu \gg 1$ LA DISTRIBUZIONE χ^2 TENDE A UNA DISTRIBUZIONE NORMALE, ALLORA SI PUÒ DIRE CHE X^2 HA DISTRIBUZIONE $N(\nu, 2\nu)$
VIENE SPESSO INTRODOTTA LA VARIABILE RIDOTTA $\frac{\chi^2_\nu}{\nu}$, INFATTI $E\left[\frac{\chi^2_\nu}{\nu}\right] = 1$

CON $\mathrm{var}\left(\frac{\chi^2_\nu}{\nu}\right) = \frac{2}{\nu}$

UN DIFETTO DEL TEST DI χ^2 È CHE NON TIENE CONTO DEI SEGNI, QUINDI NON SI PUÒ TENERE CONTO DI DIFFERENZE SISTEMATICHE TRA VALORI MISURATI E VALORI ATTESI

$X^2 = \sum_i \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$ HA DISTRIBUZIONE χ^2 SOLO SE LE x_i HANNO DISTRIBUZIONE NORMALE $N(\mu_i, \sigma_i^2)$

↳ SE AD ESEMPIO LE x_i SONO GRANDEZZE FISICHE MISURATE CON ERRORI MASSIMI, QUINDI $x_i \pm \frac{\Delta}{2}$ E Δ È TALE PER CUI SI PUÒ SOLO DIRE CHE IL VALORE MISURATO SI TROVA NELL'INTERVALLO $\left(x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2}\right)$

SI DICE QUINDI CHE LE x_i HANNO DISTRIBUZIONE UNIFORME NELL'INTERVALLO CONSIDERATO E QUESTO GIUSTIFICA IL FATTO CHE SI PASSA DA ERRORI MASSIMI A ERRORI STATISTICI CONSIDERANDO $\sigma = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}}$

PER CALCOLARE X^2 SI PUÒ SIMULARE L'ESPERIMENTO, CIOÈ SI SIMULANO UN NUMERO ELEVATO DI VOLTE N LE MISURE $x_1, \dots, x_n$ CON LA DISTRIBUZIONE CHE HANNO EFFETTIVAMENTE PER CIASCUNA DI QUESTE N SIMULAZIONI SI CALCOLA X^2, CHE POI SI PUÒ ISTOGRAMMARE VEDENDO COSÌ QUAL È LA SUA REALE DISTRIBUZIONE

ES. SUPPONIAMO DI AVERE DUE GRANDEZZE FISICHE x, y E CHE TRA QUESTE DUE VI SIA UNA RELAZIONE $y = y(x)$, CHE PUÓ ESSERE AD ESEMPIO LINEARE $y = mx+q$
SUPPONIAMO DI AVERE A DISPOSIZIONE n COPPIE (x_i, y_i) IN CUI L'ERRORE SULLE x_i É TRASCURABILE E QUELLO SULLE y_i É σ_i
SUPPONIAMO INOLTRE CHE LE y_i ABBIANO DISTRIBUZIONE $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, DOVE μ_i É IL VALORE DI ASPETTAZIONE CHE SI OTTIENE DALL'IPOTESI NULLA, QUINDI $\mu_i = y(x_i)$
VOGLIAMO QUINDI TESTARE IL FATTO CHE TRA x E y ESISTE UNA RELAZIONE NOTA, CHE PERMETTE DI RICAVARE I VALORI DI ASPETTAZIONE DELLE y

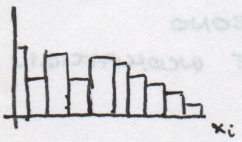
USIAMO COME STATISTICA DI TEST LA VARIABILE $\chi^2 = \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$ E, SE L'IPOTESI NULLA É CORRETTA, LA VARIABILE HA DISTRIBUZIONE χ^2_ν, DOVE $\nu = n$ SE LE MISURE SONO INDIPENDENTI, HANNO DISTRIBUZIONE GAUSSIANA E VALORI DI ASPETTAZIONE DATI DALL'IPOTESI NULLA ~~CON PARAMETRI NOTI~~, OPPURE $\nu = n-r$ SE INVECE I DATI SONO STATI UTILIZZATI PER STIMARE I PARAMETRI DELLA RELAZIONE

A QUESTO PUNTO SI PONE IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ α, SI RICAVA t_α E SE t^* CADE NELLA REGIONE CRITICA, SI RIGETTA L'IPOTESI CHE CI SIA QUELLA RELAZIONE TRA LE DUE VARIABILI

IL TEST DI χ^2 PUÓ ANCHE ESSERE USATO NEL CASO IN CUI L'IPOTESI NULLA CONSISTA IN UN'IPOTESI SULLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE x $H_0: f_0(x)$, LA QUALE HA VALORE DI ASPETTAZIONE μ_0 E VARIANZA σ_0^2
A PARTIRE QUINDI DA UN CAMPIONE DI DIMENSIONE n $x_1, \dots, x_n$ SI VUOLE TESTARE CHE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI x SIA PROPRIO QUELLA IPOTIZZATA

TEST DI PEARSON

DA UN PUNTO DI VISTA PRATICO, SI RIORGANIZZA IL CAMPIONE DI n ELEMENTI E SI PRODUCE UN ISTOGRAMMA

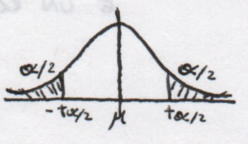


SI PASSA DAGLI n VALORI $x_1, \dots, x_n$ A m VALORI $n_1, \dots, n_m$ CHE SONO IL NUMERO DI EVENTI IN CIASCUN INTERVALLO DELL'ISTOGRAMMA

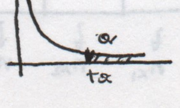
PONENDO COME y_i IL NUMERO DI EVENTI MISURATO NEI DIVERSI INTERVALLI, SI HA
$$\chi^2 = \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \quad \text{DOVE} \quad E[n_i] = n p_i = n \int_{x_i^* - \Delta/2}^{x_i^* + \Delta/2} f_0(x)\,dx$$

SE n É ABBASTANZA GRANDE, $var(n_i) = \mu_i$
PER DIRE CHE χ^2 HA DISTRIBUZIONE χ^2 É NECESSARIO CHE LE n_i ABBIANO DISTRIBUZIONE GAUSSIANA, MA n_i HANNO DISTRIBUZIONE BINOMIALE E, PER UN NUMERO DI EVENTI SUFFICIENTEMENTE ELEVATO, HANNO DISTRIBUZIONE DI POISSON, LA QUALE TENDE A UNA DISTRIBUZIONE NORMALE SE IL VALORE DI ASPETTAZIONE É ABBASTANZA ELEVATO, CIOÉ PER $\mu_i \gtrsim 5$

SUPPONIAMO DI AVERE UNA VARIABILE CASUALE x CON FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $f(x) = N(\mu, \sigma^2)$ CONFRONTIAMO IL VALORE DI UNA MISURA x_1 CON IL VALORE DI ASPETTAZIONE, IN QUESTO CASO $t = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ HA DISTRIBUZIONE $N(0,1)$



SI PUÓ ANCHE USARE IL TEST DI χ^2, IN QUESTO CASO $\chi_1^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2}{\sigma^2}$



CON ENTRAMBI I TEST SI OTTIENE LO STESSO RISULTATO

INVECE, SE SI CONSIDERA UN CAMPIONE DI DIMENSIONE n, IN CUI I VALORI HANNO LO STESSO VALORE DI ASPETTAZIONE $E[x_i] = \mu$ E VARIANZE DIVERSE $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$, É NECESSARIO CHE LE MISURE SIANO COMPATIBILI TRA LORO

IN QUESTO CASO SI CONSIDERA LA LORO MEDIA PESATA $\bar{x} = \dfrac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}$ CHE HA VALORE DI ASPETTAZIONE $E[\bar{x}] = \mu$

QUINDI $t = \sum_i \dfrac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_i^2}$ HA DISTRIBUZIONE χ^2_{n-1} SE LE MISURE SONO COMPATIBILI, CIOÉ SE L'IPOTESI NULLA É CORRETTA, E SE $f(x_i) = N(\mu, \sigma_i^2)$

CONSIDERIAMO DUE MISURE x_1, x_2 E CI CHIEDIAMO SE SONO COMPATIBILI

IN QUESTO CASO, $t = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{(x_2 - \bar{x})^2}{\sigma_2^2}$ HA DISTRIBUZIONE χ_1^2

PONENDO, $\delta = x_1 - x_2$ CON $E[\delta] = 0$, SI TROVA $t' = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ CHE HA DISTRIBUZIONE χ_1^2

(t' É PIÚ IMMEDIATO DI t, PERCHÉ NON VIENE STIMATO ALCUN PARAMETRO)

ES. SUPPONIAMO $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ E $\delta = x_1 - x_2 = 3\sigma$

IN QUESTO CASO, $t' = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{2} = 4.5$

PONENDO UN LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ $\alpha = 0.05$ TROVIAMO $t_\alpha = 3.8$, QUINDI RIGETTIAMO L'IPOTESI

IN QUESTO CASO IL P-VALORE PER t' É CIRCA DEL 3%, OVVERO C'É UNA PROBABILITÁ DI OTTENERE UN VALORE MAGGIORE A QUELLO OTTENUTO DEL 3%, MA CI SONO COMUNQUE DATI SUFFICIENTI PER DIRE CHE LE MISURE SONO TOTALMENTE INCOMPATIBILI

TEST DI INDIPENDENZA

PERMETTE DI TESTARE L'IPOTESI CHE UN CERTO NUMERO DI VARIABILI SIANO INDIPENDENTI E CIOÉ CHE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA SIA IL PRODOTTO DELLE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE DELLE SINGOLE VARIABILI

NEL CASO DI DUE VARIABILI x, y, AVENDO A DISPOSIZIONE UN CAMPIONE DI n COPPIE DI VALORI (x_i, y_i), I DATI VENGONO RAGGRUPPATI IN BASE A CARATTERISTICHE TIPICHE DELLA POPOLAZIONE, OVVERO VENGONO DEFINITI DEI SOTTOINSIEMI DEL LORO CAMPO DI DEFINIZIONE, AD ESEMPIO x_1, x_2, x_3 E y_1, y_2

SI COSTRUISCE QUINDI LA TABELLA DI CONTINGENZA

y \ x	x_1	x_2	x_3	
y_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	$\rightarrow n_{y_1}$
y_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$\rightarrow n_{y_2}$
	$\downarrow n_{x_1}$	$\downarrow n_{x_2}$	$\downarrow n_{x_3}$	

IL NUMERO TOTALE DI COPPIE É $n = \sum_{ij} n_{ij}$, DOVE n_{ij} É UN CONTEGGIO DELLE COPPIE

L'IPOTESI NULLA È CHE x E y SONO INDIPENDENTI

PER TESTARLA SI APPLICA LA DEFINIZIONE FREQUENZISTA DI PROBABILITÀ, OVVERO LA PROBABILITÀ CHE $x \in x_i$ È $P_{x_i} = \frac{n_{x_i}}{n}$ E LA PROBABILITÀ CHE $y \in y_i$ È $P_{y_i} = \frac{n_{y_i}}{n}$

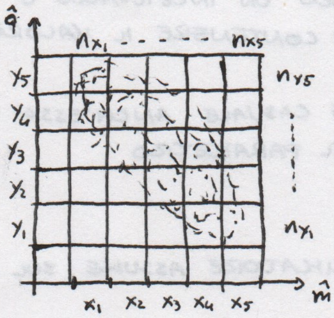
SE x E y SONO INDIPENDENTI, SI HA $P_{x_i y_i} = P_{x_i} P_{y_i} = \frac{n_{x_i} n_{y_i}}{n^2}$ CON

$E[n_{ij}] = n P_{x_i y_i} = \frac{n_{x_i} n_{y_i}}{n}$, OTTENENDO QUINDI IL VALORE DI ASPETTAZIONE PER OGNI VALORE NELLA TABELLA DI CONTINGENZA

SUPPONENDO CHE LE n_{ij} ABBIANO DISTRIBUZIONE DI POISSON, QUINDI $var(n_{ij}) = E[n_{ij}]$, SI OTTIENE LA STATISTICA DI TEST $t = \sum_i \sum_j \frac{(n_{ij} - E[n_{ij}])^2}{E[n_{ij}]}$ CON DISTRIBUZIONE χ^2_ν,

DOVE
$$\nu = n_{righe} \cdot n_{colonne} - n_{relezioni} - 1$$
$$= n_r \cdot n_c - (n_r - 1 + n_c - 1) - 1$$
$$= (n_r - 1)(n_c - 1)$$

ES. STIME DI $\hat{m}$ E $\hat{q}$



ES. UN'INDUSTRIA HA TRE MACCHINE (M) CHE PRODUCONO PEZZI BUONI (C_1) O DIFETTOSI (C_2)

	M_1	M_2	M_3	
C_1	150	140	200	490
C_2	25	40	20	85
	175	180	220	575

$\xrightarrow{P}$

	M_1	M_2	M_3	
C_1				0.85
C_2				0.15
	0.30	0.31	0.39	

$P_b = \frac{490}{575} = 0.85$ E $P_d = 1 - 0.85 = 0.15$

$P_{M_1} = \frac{175}{575} = 0.30$, $P_{M_2} = \frac{180}{575} = 0.31$ E $P_{M_3} = 1 - (P_{M_1} + P_{M_3}) = 0.39$

(490 · 175)/575

CALCOLANDO I VALORI DI ASPETTAZIONE μ_{ij},
SI VEDE CHE $\mu_{ij} > 5 \ \forall ij$
QUINDI SI PUÒ CONSIDERARE UNA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

	M_1	M_2	M_3
C_1	149	153	188
C_2	24	27	33

$$t = \sum_{ij} \frac{(n_{ij} - E[n_{ij}])^2}{E[n_{ij}]} = \frac{(150-149)^2}{149} + \dots$$

E $\nu = (2-1)(3-1) = 2$

PONENDO UN LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ $\alpha = 0.05$ SI TROVA $t_\alpha = 6$ E SI RIGETTA L'IPOTESI, LA CONDIZIONE DEL PEZZO DIPENDE QUINDI DALLA MACCHINA

STIMA DEI PARAMETRI

A PARTIRE DA UN CAMPIONE SI STIMANO NUMERICAMENTE I PARAMETRI CHE INTERVENGONO IN RELAZIONI TRA GRANDEZZE FISICHE O IN DISTRIBUZIONI

STIME PUNTUALI: PERMETTONO DI DETERMINARE IL VALORE NUMERICO DI UN PARAMETRO

↳ · METODO DEI MINIMI QUADRATI
· METODO DEL MAXIMUM LIKELIHOOD

↳ QUESTI DUE METODI PERMETTONO DI OTTENERE LE STIME DEI PARAMETRI CON UNA DETERMINATA IPOTESI STATISTICA, ANCHE NEL CASO IN CUI TALE IPOTESI SIA SBAGLIATA

STIME INTERVALLI: PERMETTONO DI DETERMINARE UN INTERVALLO O UN INSIEME DI VALORI CHE HA UN'ALTA PROBABILITÁ DI CONTENERE IL VALORE VERO DEL PARAMETRO

STIMATORE: É UNA FUNZIONE DEL CAMPIONE CASUALE ANCH'ESSA VARIABILE CASUALE CHE FORNISCE LA STIMA MIGLIORE DEL PARAMETRO
$t(x_1, ..., x_n)$

STIMA: É IL VALORE NUMERICO CHE LO STIMATORE ASSUME SUL SPECIFICO CAMPIONE
$t^* = t(x_1^*, ..., x_n^*)$

LIKELIHOOD: SUPPONIAMO DI AVERE UNA VARIABILE CASUALE x CON UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DIPENDENTE DA UN PARAMETRO $\vec{\theta} = \{\theta_1, ..., \theta_k\}$, $f(x; \vec{\theta})$
PRESO UN CAMPIONE DI DIMENSIONE n COSTITUITO DA n MISURE INDIPENDENTI, LA FUNZIONE DI LIKELIHOOD É $\mathcal{L}(x_1, ..., x_n; \vec{\theta}) = \prod_1^n f(x_i; \vec{\theta})$
INOLTRE VALE LA CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE $\int dx_1, ..., dx_n \mathcal{L}(x_1, ..., x_n; \vec{\theta}) = 1$

SI VUOLE STIMARE UN CERTO PARAMETRO θ CON VALORE VERO θ_0 A PARTIRE DA UN CAMPIONE DI DIMENSIONE n $x_1, ..., x_n$

$E[t] = \theta_0 \;\; \forall n$ (STIMA CENTRATA), ALTRIMENTI $E[t] = \theta_0 + b$ (STIMA ASINTOTICAMENTE CENTRATA), DOVE b É IL BIAS TALE PER CUI $\lim_{n \to \infty} b = 0$

PROPRIETÁ DELLE STIME:

· CENTRATE, CIOÉ TALI PER CUI IL VALORE DI ASPETTAZIONE É IL VALORE VERO DEL PARAMETRO PER QUALSIASI DIMENSIONE DEL CAMPIONE

· CONSISTENTI, OVVERO CONVERGONO IN PROBABILITÁ AL VALORE VERO DEL PARAMETRO
$\lim_n P(|t - \theta_0| > \varepsilon) = 0$

· DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

· EFFICIENTI, CIOÉ DEVONO AVERE UN'INCERTEZZA STATISTICA MINIMA IN BASE AL CAMPIONE CHE SI HA A DISPOSIZIONE, IN PRATICA BISOGNA POTER ESTRARRE TUTTE LE INFORMAZIONI POSSIBILI DAL CAMPIONE
ES. CAMPIONE $x_1, ..., x_n$ IN BASE AL QUALE VOGLIAMO STIMARE UN PARAMETRO θ
ABBIAMO $t_1, ..., t_n$ STIME t.c. $E[t_i] = \theta_0$
$E[(t_1 - \theta_0)^2] < E[(t_2 - \theta_0)^2]$

ESISTE UNA VARIANZA MINIMA AL DI SOTTO DELLA QUALE NON SI PUÒ ANDARE, DATA DALLA DISUGUAGLIANZA DI KRAMER RAO FRECHET

IN PRATICA, DATO UN CAMPIONE $x_1, ..., x_n$ DAL QUALE SI VUOLE ESTRARRE IL VALORE DI UN PARAMETRO θ E LA FUNZIONE DI LIKELIHOOD DEL CAMPIONE E DEL PARAMETRO $\mathcal{L}(x_1, ..., x_n; \theta) = f(x_1, ..., x_n; \theta)$ CHE È LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DELLE N VARIABILI IN UN DETERMINATO VALORE DEL PARAMETRO, LA QUALE PUÒ ANCHE ESSERE SCRITTA COME IL PRODOTTO DELLE DIVERSE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE SE LE VARIABILI SONO INDIPENDENTI $\mathcal{L}(x_1, ..., x_n; \theta) = f(x_1; \theta) ... f(x_n; \theta)$, ALLORA LA VARIANZA DELLA STIMA DEL PARAMETRO $\sigma_\theta^2 \geq \dfrac{\left(\dfrac{d\tau}{d\theta}\right)^2}{E\left[-\dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2}\right]}$

DOVE AL NUMERATORE COMPARE IL VALORE τ, PERCHÉ SI VUOLE GENERALIZZARE IL CASO IN CUI IL VALORE DI ASPETTAZIONE DELLA STIMA NON SIA IL VALORE VERO DEL PARAMETRO, BENSÌ UNA SUA FUNZIONE $E[t] = \tau(\theta_0)$

DIM. $E\left[-\dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2}\right] = E\left[\left(\dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right)^2\right]$ QUESTA UGUAGLIANZA VALE PERCHÉ VALE LA CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE DELLA FUNZIONE DI LIKELIHOOD, ESSENDO LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DELLE VARIABILI $x_1, ..., x_n$

$$\int dx_1, ..., dx_n \, \mathcal{L}(x_1, ..., x_n; \theta) = 1$$

SE I LIMITI DI INTEGRAZIONE NON DIPENDONO DAL PARAMETRO, $\displaystyle\int dx_1, ..., dx_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

$$= \int dx_1, ..., dx_n \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} \mathcal{L}$$

PERCHÉ $\dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = \dfrac{1}{\mathcal{L}} \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$

$$\int dx_1, ..., dx_n \left(\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$= \int dx_1, ..., dx_n \left(\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \mathcal{L}\right) + \int dx_1, ..., dx_n \left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right)^2 \mathcal{L} = 0$$

DA CUI $E\left[\dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2}\right] = -E\left[\left(\dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right)^2\right]$

ORA, $\sigma_t^2 = E[(t - \tau(\theta))^2]$ E VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE

$$E[(t-\tau)^2] \cdot E\left[\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right)^2\right] \geq \left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2$$

POSSIAMO USARE LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ APPLICATA AI VALORI DI ASPETTAZIONE, LA QUALE DICE CHE $E[x^2]E[y^2] \geq (E[xy])^2$, DA CUI

$$E[(t-\tau)^2] \cdot E\left[\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right)^2\right] \geq \left\{E\left[(t-\tau)\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right]\right\}^2$$

ORA, $E\left[(t-\tau)\dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right] = E\left[t \dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right] - E\left[\tau \dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right]$

DOVE $E\left[t \dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right] = \displaystyle\int dx_1, ..., dx_n \left(t \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right) \mathcal{L}$

$$= \int dx_1, ..., dx_n \, t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \sigma} \int dx_1, \dots, dx_n \, \tau \mathcal{L}$$

$$= \frac{\partial \tau}{\partial \sigma}$$

E $$E\left[\tau \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma}\right] = \tau \int dx_1, \dots, dx_n \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma} \mathcal{L}$$

$$= \tau \frac{\partial}{\partial \sigma} \underbrace{\int dx_1, \dots, dx_n \mathcal{L}}_{=1} = 0$$

QUINDI $E\left[(t-\tau)\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma}\right] = \frac{d\tau}{d\sigma}$ DA CUI $\left\{E\left[(t-\tau)\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma}\right]\right\}^2 = \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2$

DIMOSTRANDO LA DISUGUAGLIANZA $\sigma_t^2 \geq \dfrac{\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2}{E\left[-\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^2}\right]}$

UNA STIMA È EFFICIENTE SE È A VARIANZA MINIMA; A VOLTE $E\left[-\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma}\right]$ VIENE INDICATA CON I, DETTA "QUANTITÀ DI INFORMAZIONE", PERCHÉ È APPUNTO LEGATA AL VALORE MINIMO CHE LA VARIANZA PUÒ ASSUMERE

LA DISUGUAGLIANZA DIVENTA UN'UGUAGLIANZA SE DIVENTA UN'UGUAGLIANZA LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ, IN PARTICOLARE SE $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma} = c\,[t-\tau(\sigma)]$, DOVE C È UNA COSTANTE

ES. DATO UN CAMPIONE DI DIMENSIONE n $x_1, \dots, x_n$, DOVE LE VARIABILI CASUALI CHE COSTITUISCONO IL CAMPIONE SONO CARATTERIZZATE DA VALORE DI ASPETTAZIONE $E[x_i] = \mu$ E VARIANZA $Var(x_i) = \sigma^2$, UNA STIMA DEL VALORE DI ASPETTAZIONE È DATA DALLA MEDIA ARITMETICA DEI VALORI DEL CAMPIONE $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$

IN QUESTO CASO:
- IL VALORE DI ASPETTAZIONE DELLA STIMA, CIOÈ DELLA MEDIA, $E[\hat{\mu}] = \mu$
- LA STIMA È CENTRATA
- PER LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI CONVERGE IN PROBABILITÀ AL VALORE DI ASPETTAZIONE
- SE LE x_i HANNO DISTRIBUZIONE GAUSSIANA, ANCHE LA MEDIA HA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA
- SE LE x_i NON HANNO DISTRIBUZIONE GAUSSIANA MA HANNO VARIANZA FINITA, PER IL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE LA MEDIA HA ASINTOTICAMENTE DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

BASTA QUINDI DIMOSTRARE CHE $\hat{\mu} = \bar{x}$ È A VARIANZA MINIMA, CIOÈ EFFICIENTE

- SE LE x_i HANNO DISTRIBUZIONE $N(\mu, \sigma^2)$, ALLORA, CONSIDERANDO INDIPENDENTI LE VARIABILI, $\mathcal{L} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{\sum_i (x_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right]$

$E[\bar{x}] = \mu$ QUINDI $\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2 = 1$

$\ln \mathcal{L} = c - \frac{\sum_i (x_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}$ DA CUI $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu} = 2 \frac{\sum_i (x_i - \mu)}{2\sigma^2}$ E $\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2}$

QUINDI $E\left[-\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu^2}\right] = +\frac{n}{\sigma^2}$ DA CUI $\sigma_t^2 \geq \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n}$ CHE É LA VARIANZA DELLA MEDIA ARITMETICA, QUINDI LA MEDIA ARITMETICA É ANCHE UNA STIMA EFFICIENTE DEL VALORE DI ASPETTAZIONE

- SE LE x_i HANNO DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE $f(x_i; c) = \frac{1}{c} e^{-\frac{x}{c}}$, ALLORA

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n; c) = \frac{1}{c^n} \exp\left[-\Sigma_i \frac{x_i}{c}\right]$$

SAPENDO CHE $E[x_i] = c$ E $var(x_i) = c^2$

$\hat{c} = \bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma_i x_i$ E $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{c^2}{n}$

$\ln \mathcal{L} = -n \ln c - \Sigma_i \frac{x_i}{c}$ DA CUI $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial c} = \frac{-n}{c} + \frac{1}{c^2} \Sigma_i x_i$

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial c^2} = \frac{n}{c^2} - \frac{2}{c^3} n\bar{x}$$

QUINDI $E\left[-\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial c^2}\right] = \frac{-n}{c^2} + \frac{2n}{c^3} E[\bar{x}] = -\frac{n}{c^2} + \frac{2n}{c^2} = \frac{n}{c^2}$

DA CUI $\sigma_c^2 \geq \frac{1}{\frac{n}{c^2}} = \frac{c^2}{n}$ QUINDI LA MEDIA É UNA STIMA EFFICIENTE PER VARIABILI CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

- SE LE k_i HANNO DISTRIBUZIONE DI POISSON $P_k = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$, ALLORA

$$\mathcal{L}(k_1, \dots, k_n; \nu) = e^{-\nu} \frac{\nu^{\Sigma_i k_i}}{k_i!}$$

SAPENDO CHE $E[k] = var(k) = \nu$

$\hat{\nu} = \bar{k} = \frac{1}{n} \Sigma_i k_i$ E $\sigma^2_{\bar{k}} = \frac{\nu}{n}$

$$\ln \mathcal{L} = -\nu + \ln\left(\frac{\nu^{\Sigma_i k_i}}{k_i!}\right) = -\nu + \ln \nu^{\Sigma_i k_i} - \ln k_i! = -\nu + \Sigma_i k_i \ln \nu - \ln k_i!$$

DA CUI $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \nu} = -1 + \frac{\Sigma_i k_i}{\nu}$ E $\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \nu^2} = -\frac{\Sigma_i k_i}{\nu^2} = -\frac{n\bar{k}}{\nu^2}$

QUINDI $E\left[-\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \nu^2}\right] = \frac{n}{\nu^2} E[\bar{k}] = \frac{n}{\nu}$ DA CUI $\sigma_\nu^2 \geq \frac{1}{\frac{n}{\nu}} = \frac{\nu}{n}$ QUINDI LA MEDIA É UNA STIMA EFFICIENTE PER VARIABILI CON DISTRIBUZIONE DI POISSON

METODO DEI MINIMI QUADRATI

SUPPONIAMO DI AVERE n VARIABILI CASUALI $y_1, \dots, y_n$ INDIPENDENTI, CHE I LORO VALORI DI ASPETTAZIONE SIANO NOTI E DIPENDANO DA UN CERTO NUMERO DI PARAMETRI CHE VOGLIAMO STIMARE $E[y_i] = \mu_i = \mu_i(\theta_1, \dots, \theta_2)$

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI CI DICE CHE LA STIMA MIGLIORE DEI PARAMETRI É QUELLA CHE MINIMIZZA LA FORMA QUADRATICA $X^2 = \sum_i w_i^2 (y_i - \mu_i)^2$, DOVE w_i SONO DEI PESI SCELTI OPPORTUNAMENTE

CI SONO DUE CASI PIÚ COMUNI :

1. $w_i = 1$ QUANDO TUTTE LE DEVIAZIONI STANDARD SONO UGUALI O QUANDO NON SI HANNO INFORMAZIONI SUGLI ERRORI
2. $w_i = \frac{1}{\sigma_i}$ IN CUI I PESI SONO L'INVERSO DELLE DEVIAZIONI STANDARD

CONSIDERIAMO LE VARIABILI INDIPENDENTI E PRENDIAMO $w_i^2 = \frac{1}{\sigma_i^2}$, QUINDI $X^2 = \sum_i \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$

SE LA COVARIANZA É DIVERSA DA ZERO E DI CONSEGUENZA É DIVERSA DA ZERO LA MATRICE DELLE COVARIANZE, $X^2 = (\vec{y} - \vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{y} - \vec{\mu})$

BISOGNA TROVARE I VALORI DEI PARAMETRI CHE MINIMIZZANO X^2, QUINDI SI DERIVA X^2 RISPETTO AI DIVERSI PARAMETRI

$$\begin{cases} \frac{\partial X^2}{\partial \theta_1} = 0 & \Rightarrow \hat{\theta}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X^2}{\partial \theta_\lambda} = 0 & \hat{\theta}_\lambda \end{cases}$$

PONENDO LE DERIVATE UGUALI A ZERO

SI HA QUINDI UN SISTEMA IN λ EQUAZIONI IN λ INCOGNITE CHE PERMETTONO DI OTTENERE IL VALORE DELLE STIME DEI PARAMETRI

IN GENERALE, SI PUÓ SEMPRE TROVARE UNA SOLUZIONE ANALITICA NEL CASO IN CUI I VALORI DI ASPETTAZIONE DIPENDONO LINEARMENTE DAI PARAMETRI $\mu_i = a_{1,i}\,\theta_1 + a_{2,i}\,\theta_2 + \ldots$
(IN QUESTO CASO SI PARLA DI METODO DEI MINIMI QUADRATI LINEARE)

NON SEMPRE É POSSIBILE TROVARE LA SOLUZIONE ANALITICA, IN QUESTO CASO SI TROVA IL MINIMO DELLA FORMA QUADRATICA IN MODO NUMERICO

$$X^2_{min} = \sum_i \frac{(y_i - \mu_i(\hat{\theta}))^2}{\sigma_i^2}$$

SE LE y_i HANNO FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE NORMALE, QUESTA É UNA SOMMA DI QUADRATI CON DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD, QUINDI É UNA VARIABILE CON FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE X^2_ν, DOVE $\nu = n - \lambda$ (PER QUESTO MOTIVO A VOLTE IL METODO DEI MINIMI QUADRATI SI CHIAMA MINIMIZZAZIONE DEL X^2)

ES. SUPPONIAMO DI AVER ESEGUITO IN n ESPERIMENTI DIVERSI n MISURE $x_1, \ldots, x_n$ DI UN'UNICA GRANDEZZA FISICA x (CON VARIANZE DIVERSE $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$)

$E[x_i] = c$ VALORE VERO DELLA GRANDEZZA FISICA, CHE VOGLIAMO STIMARE A PARTIRE DALLE MISURAZIONI

$$X^2 = \sum_i \frac{(x_i - c)^2}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{dX^2}{dc} = -2 \sum_i \frac{(x_i - c)}{\sigma_i^2} = -2 \cdot \left[\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} - c \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right] = 0$$

DA CUI $\hat{c} = \dfrac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}$

QUINDI IL METODO DEI MINIMI QUADRATI MI DICE CHE LA STIMA MIGLIORE DI n VARIABILI CASUALI CON VARIANZE DIVERSE É LA MEDIA PESATA DELLE VARIABILI CASUALI

QUINDI $X^2_{min} = \sum_i \frac{(x_i - \hat{c})^2}{\sigma_i^2}$

SE LE x_i HANNO UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE NORMALE, X^2_{min} HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE χ^2_{n-1} E SI PUÓ FARE IL TEST D'IPOTESI (TEST DI COMPATIBILITÁ DELLE MISURE)

SE LE VARIANZE SONO TUTTE UGUALI, $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $\hat{c} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ E QUINDI ANCHE IL METODO DEI MINIMI QUADRATI MI DICE CHE LA MIGLIOR STIMA DEL VALORE DI ASPETTAZIONE É DATO DALLA MEDIA ARITMETICA

ES. SE ABBIAMO $y_1, \dots, y_n$ QUANTITÁ MISURATE E $x_1, \dots, x_n$ VALORI DI UN'ALTRA GRANDEZZA FISICA E SE SUPPONIAMO CHE CI SIA UNA DIPENDENZA DEL TIPO $y = mx + q$ IN MODO CHE $E[y_i] = mx_i + q$

ALLORA, SE LE y_i SONO INDIPENDENTI E LE VARIANZE $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$, $X^2 = \sum_i \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI É VALIDO ANCHE SE LA RELAZIONE TRA X E Y NON É LINEARE, AD ESEMPIO $y = a e^{-bx}$

IN QUESTO CASO, $E[y_i] = a e^{-bx_i}$ E SI FA LA DERIVATA RISPETTO A a E b CERCANDO $\hat{a}$ E $\hat{b}$

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI PUÓ ESSERE USATO ANCHE PER STIMARE I PARAMETRI DI UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

SUPPONIAMO DI AVERE UNA VARIABILE CASUALE x CON UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CHE DIPENDE DA UN CERTO NUMERO DI PARAMETRI $f(x, \vec{\theta})$ E SUPPONIAMO DI AVERE UN CAMPIONE DI DIMENSIONE n $x_1, \dots, x_n$, A PARTIRE DA QUESTO CAMPIONE VOGLIAMO STIMARE I PARAMETRI DELLA DISTRIBUZIONE

PASSIAMO QUINDI DAL CAMPIONE INIZIALE A n DIMENSIONI $x_1, \dots, x_n$ A UN CAMPIONE COSTITUITO DAL NUMERO DI EVENTI NEGLI INTERVALLI DI UN ISTOGRAMMA $n_1, \dots, n_m$

$$E[n_j] = n p_j = n \int_{\Delta j} dx\, f(x, \vec{\theta}) \underset{\text{SE L'INTERVALLO É ABBASTANZA PICCOLO}}{\simeq} n f(x_j^*, \vec{\theta}) \Delta j$$

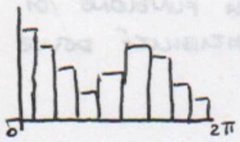
DOVE n_j É IL NUMERO DI EVENTI NELL'INTERVALLO j-ESIMO
n É IL NUMERO DI EVENTI TOTALI
p_j É LA PROBABILITÁ CHE IL SINGOLO EVENTO CADA NELL'INTERVALLO j-ESIMO
x_j^* É IL VALORE CENTRALE DELL'INTERVALLO

SE ABBIAMO MOLTI INTERVALLI NELL'ISTOGRAMMA E QUINDI LE SINGOLE PROBABILITÁ p_j SONO MOLTO PICCOLE E n É SUFFICIENTEMENTE GRANDE IN MODO DA AVERE ANCORA UN VALORE DI ASPETTAZIONE ABBASTANZA GRANDE PER IL NUMERO DI EVENTI, LA DISTRIBUZIONE DEL NUMERO DI CONTEGGI DA BINOMIALE DIVENTA DI POISSON E QUINDI $var(n_j) = n p_j$

QUINDI $X^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$

↳ PER SEMPLIFICARE SI SOSTITUISCE CON n_j (METODO DEI MINIMI QUADRATI SEMPLIFICATO)

ES. SUPPONIAMO DI AVERE UNA VARIABILE CASUALE ϕ DEFINITA IN $(0,2\pi)$ CON FUNZIONE DI DISTRIBUZIONI $f(\phi;a_1,a_2)=\dfrac{(1+a_1\cos\phi+a_2\sin\phi)}{2\pi}$



CI SONO n_j EVENTI IN CIASCUN INTERVALLO E

$$p_j=\frac{1}{2\pi}\left[\Delta_j+a_1\int_{\phi_j}^{\phi_j+\Delta_j}\cos\phi+a_2\int_{\phi_j}^{\phi_j+\Delta_j}\sin\phi\right]$$
$$=p_j(a_1,a_2)$$

METODO DEI MINIMI QUADRATI LINEARE

SI USA QUANDO ESISTE UNA RELAZIONE LINEARE TRA I VALORI DI ASPETTAZIONE NEL CAMPIONE E I PARAMETRI

SE $\vec{y}$ É IL VETTORE DEL CAMPIONE, $\vec{\mu}$ É IL VETTORE DEI VALORI DI ASPETTAZIONE, V É LA MATRICE DELLE COVARIANZE E A PARTIRE DA QUESTE INFORMAZIONI VOGLIAMO STIMARE π PARAMETRI CHE APPARTENGONO AL VETTORE $\vec{\theta}$, SI PUÓ USARE IL METODO DEI MINIMI QUADRATI LINEARE QUANDO $\vec{\mu}=A\vec{\theta}$, DOVE A É UNA MATRICE

SE $y=a_0+a_1x+a_2x^2$, ALLORA $E[y_i]=\mu_i=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2$

IN QUESTO CASO $\vec{\theta}=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$ E $A=\begin{pmatrix}1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\\&\cdots&\end{pmatrix}$.

$$X^2=(\vec{y}-\vec{\mu})^T V^{-1}(\vec{y}-\vec{\mu})$$
$$=(\vec{y}-A\vec{\theta})^T V^{-1}(\vec{y}-A\vec{\theta})$$

É LA FORMA QUADRATICA CHE SI DEVE MINIMIZZARE PER TROVARE LE STIME DEI PARAMETRI θ

$\dfrac{\partial X^2}{\partial\vec{\theta}}=0$ DA CUI $(\vec{y}-A\vec{\theta})^T V^{-1}A=0$

$A^TV^{-1}(\vec{y}-A\vec{\theta})=0$ QUINDI $A^TV^{-1}\vec{y}=A^TV^{-1}A\vec{\theta}$

$$\vec{\theta}=(A^TV^{-1}A)^{-1}A^TV^{-1}\vec{y}$$
$$=B\vec{y}$$

DOVE B É UN PRODOTTO DI MATRICI NOTE

$\downarrow$

SE LE $\vec{y}$ HANNO DISTRIBUZIONE NORMALE, ANCHE LE STIME HANNO DISTRIBUZIONE NORMALE DATO CHE SONO COMBINAZIONE LINEARE DELLE $\vec{y}$

$(V_\theta)_{ij}=E[(\hat{\theta}_i-E[\hat{\theta}_i])(\hat{\theta}_j-E[\hat{\theta}_j])]$ É LA MATRICE DELLE COVARIANZE DELLE STIME

$$V_{\hat{\theta}}=E[(\hat{\theta}-E[\hat{\theta}])^T(\hat{\theta}-E[\hat{\theta}])]$$
$$=E[(B\vec{y}-E[B\vec{y}])(B\vec{y}-E[B\vec{y}])^T]$$
$$=E[B(\vec{y}-E[\vec{y}])(\vec{y}-E[\vec{y}])^TB^T]$$
$$=B\underbrace{E[(\vec{y}-E[\vec{y}])(\vec{y}-E[\vec{y}])^T]}_{V}B^T$$

DA CUI $V_{\hat{\theta}}=(A^TV^{-1}A)^{-1}A^TV^{-1}VV^{-1}A[(A^TV^{-1}A)^{-1}]^T$
$=(A^TV^{-1}A)^{-1}$

CI SI ASPETTA CHE LE STIME ABBIANO UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CON π PARAMETRI, PARI A $\dfrac{1}{(2\pi)^{\pi/2}}\cdot\dfrac{1}{(\det V_{\hat{\theta}})^{1/2}}\,e^{-\frac{Q^2}{2}}$, DOVE $Q^2=(\hat{\vec{\theta}}-\vec{\theta}_0)^T V_\theta^{-1}(\hat{\vec{\theta}}-\vec{\theta}_0)$

LA FORMA QUADRATICA PUÓ ESSERE SCRITTA A PARTIRE DA X^2_{min}

NELLA FORMULA $X^2=(\vec{y}-A\vec{\theta})^TV^{-1}(\vec{y}-A\vec{\theta})$ SI SOSTITUISCE $A\vec{\theta}$ CON $A\vec{\theta}+A\hat{\vec{\theta}}-A\hat{\vec{\theta}}$, DA CUI

$$\chi^2 = (\vec{y} - A\vec{\theta} + A\hat{\vec{\theta}} - A\hat{\vec{\theta}})^T V^{-1} (\vec{y} - A\vec{\theta}) + (\vec{y} - A\vec{\theta} + A\hat{\vec{\theta}} - A\hat{\vec{\theta}})^T V^{-1} (A\hat{\vec{\theta}} - A\vec{\theta})$$

$$= (\vec{y} - A\hat{\vec{\theta}})^T V^{-1} (\vec{y} - A\hat{\vec{\theta}}) + (A\hat{\vec{\theta}} - A\vec{\theta})^T V^{-1} (\vec{y} - A\hat{\vec{\theta}}) + (\vec{y} - A\hat{\vec{\theta}})^T V^{-1} (A\hat{\vec{\theta}} - A\vec{\theta}) +$$

$$+ (A\hat{\vec{\theta}} - A\vec{\theta})^T V^{-1} (A\hat{\vec{\theta}} - A\vec{\theta})$$

$$= \chi^2_{min} + (\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta})^T A^T V^{-1} A (\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta})$$

$$= \chi^2_{min} + (\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta})^T V_{\hat{\theta}}^{-1} (\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta})$$

SUPPONIAMO CHE LA RELAZIONE TRA X E Y SIA DI TIPO LINEARE $y = mx + q$, VOGLIAMO STIMARE I PARAMETRI A PARTIRE DALLE n COPPIE (x_i, y_i) IN CUI LE VARIANZE SU X SONO TRASCURABILI E QUELLE SU Y SONO σ_i^2

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - m x_i - q)^2}{\sigma_i^2}$$

E FACENDO LE DERIVATE RISPETTO A m E q SI OTTENGONO LE STIME DI $\hat{m}$ E $\hat{q}$

OPPURE SI PUÒ USARE IL METODO DEI MINIMI QUADRATI, DEFINENDO

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{E} \quad V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

QUINDI
$$A^T V^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots \\ \cdots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sigma_1^2} & \frac{x_2}{\sigma_2^2} & \cdots \\ \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$A^T V^{-1} A = \begin{pmatrix} \sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{20} & S_{10} \\ S_{10} & S_{00} \end{pmatrix}$$

$$V_{\hat{\theta}} = (A^T V^{-1} A)^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} S_{00} & -S_{10} \\ -S_{10} & S_{20} \end{pmatrix}$$

DOVE $D = S_{00} S_{20} - S_{10}^2$ É IL DETERMINANTE DELLA MATRICE

QUINDI $\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{S_{00}}{D}$, $\sigma_{\hat{q}}^2 = \frac{S_{20}}{D}$ E $\mathrm{cov}(\hat{m}, \hat{q}) = -\frac{S_{10}}{D}$

$$A^T V^{-1} \vec{y} = \begin{pmatrix} \sum_i \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \\ \sum_i \frac{y_i}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{01} \end{pmatrix} \quad \text{E} \quad \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} S_{00} S_{11} - S_{10} S_{01} \\ -S_{10} S_{11} + S_{20} S_{01} \end{pmatrix}$$

ES. SUPPONIAMO CHE UNA GRANDEZZA FISICA X VENGA MISURATA IN DUE ESPERIMENTI DIVERSI:

1. $x_1 \pm \sigma_1$
2. $x_2 \pm \sigma_2$, $z \pm \sigma_z$ CON $\rho_{xz} \neq 0$

VOGLIAMO OTTENERE LA STIMA MIGLIORE DEL VALORE DI X

SE LA MISURA DI Z NON ESISTESSE, $\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_x \end{pmatrix}$

E $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

FACENDO I CALCOLI, SI TROVA CHE LA STIMA MIGLIORE É LA MEDIA PESATA

$$\hat{\mu}_x = \frac{\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} \quad \text{E} \quad \sigma^2_{\hat{\mu}_x} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

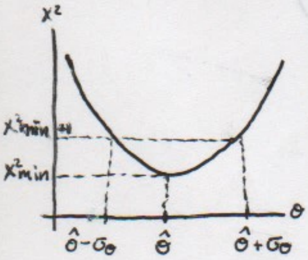
TENENDO CONTO DI z, $\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \rho_{x_2}\sigma_2\sigma_z \\ 0 & \rho_{x_2}\sigma_2\sigma_z & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$, $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_x \\ \mu_z \end{pmatrix}$

E $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ CON $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_z \end{pmatrix}$

FACENDO I CALCOLI, SI TROVA CHE $\hat{\mu}_x$ NON VIENE INFLUENZATO DALLA PRESENZA DELLA MISURA DI z, INFATTI $\hat{\mu}_x$ É SEMPRE DATO DALLA MEDIA PESATA MENTRE $\hat{\mu}_z$ É DATO DALLA SOMMA DEL VALORE DI z A CUI VIENE AGGIUNTA UNA QUANTITÁ CHE DIPENDE DALLA DIFFERENZA DELLE MISURE DI x_1 E x_2

$$X^2 = X^2_{min} + Q^2 \quad \text{DOVE} \quad Q^2 = \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{\sigma_\theta^2}$$

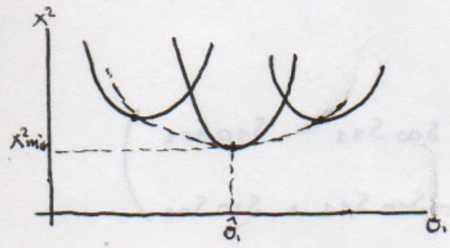
SI PUÓ RISOLVERE IN MODO GRAFICO IL PROBLEMA, CALCOLANDO LA FORMA QUADRATICA PER DIVERSI VALORI DEL PARAMETRO, I QUALI DOVREBBERO STARE SU UNA PARABOLA IL CUI VALORE MINIMO É X^2_{min} CHE SI OTTIENE PER UN CERTO VALORE DEL PARAMETRO CHE VIENE PRESO COME STIMA DEL PARAMETRO



SUCCESSIVAMENTE SI PUÓ CHIEDERE CHE $Q^2 = 1$, CHE SUCCEDE PER UN VALORE θ^* TALE PER CUI $\theta^* - \hat{\theta} = \pm\sigma_\theta$

CON DUE PARAMETRI θ_1, θ_2

$$Q^2 = (\vec{\theta} - \hat{\vec{\theta}})^T V^{-1} (\vec{\theta} - \hat{\vec{\theta}}) = \text{costante}$$
$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(\theta_1 - \hat{\theta}_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(\theta_1 - \hat{\theta}_1)(\theta_2 - \hat{\theta}_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\theta_2 - \hat{\theta}_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$



SI VEDE CHE I MINIMI DELLE VARIE PARABOLE FORMANO UNA PARABOLA, IL CUI MINIMO É IL VALORE X^2_{min}

IN ALTERNATIVA, SI PUÓ FISSARE θ_1 A CERTI VALORI $\theta_{1,i}$ E PER CIASCUNO DI QUESTI CALCOLARE $X^2(\theta_2)$

METODO DEL MAXIMUM LIKELIHOOD

DATO IL CAMPIONE ALEATORIO $x_1, ..., x_n$ BISOGNA CONOSCERE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DEL CAMPIONE, LA QUALE DIPENDERÁ ANCHE DAI PARAMETRI CHE SI VOGLIONO STIMARE

BISOGNA CONOSCERE QUINDI LA FUNZIONE DI LIKELIHOOD, CHE NON É ALTRO CHE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DEL CAMPIONE PER VALORI FISSATI DEI PARAMETRI $\mathcal{L}(x_1, ..., x_n; \theta_1, ..., \theta_r) = f(x_1, ..., x_n; \theta_1, ..., \theta_r)$

$= \prod_i f_i(x_i; \vec{\theta})$ NEL CASO DI VARIABILI INDIPENDENTI

IL METODO DEL MAXIMUM LIKELIHOOD AFFERMA CHE LA STIMA MIGLIORE DEI PARAMETRI $\vec{\theta}$ É QUELLA CHE MASSIMIZZA LA FUNZIONE DI LIKELIHOOD SUL CAMPIONE CHE SI HA A DISPOSIZIONE, CIOÉ QUELLA CHE RENDE MASSIMA LA DENSITÁ DI PROBABILITÁ DEL CAMPIONE CHE SI HA A DISPOSIZIONE
IN PRATICA SI ASSUME CHE IL CAMPIONE OTTENUTO SIA IL PIÚ PROBABILE

DI SOLITO SI SCEGLIE DI MASSIMIZZARE IL $\ln\mathcal{L}$, QUESTO PERCHÉ NEL CASO DI VARIABILI INDIPENDENTI LA PRODUTTORIA DIVENTA UNA SOMMATORIA $\ln\mathcal{L} = \sum_i f_i(x_i, \vec{\theta})$ E NEL CASO DI VARIABILI CON DISTRIBUZIONE GAUSSIANA RIMANE L'ESPONENZIALE

↳ PER MASSIMIZZARLO, SI FA LA DERIVATA RISPETTO AI r PARAMETRI E LA SI PONE UGUALE A ZERO, IN QUESTO MODO SI TROVANO LE STIME DEI PARAMETRI $\hat{\theta}_1 ... \hat{\theta}_r$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln\mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \ln\mathcal{L}}{\partial \theta_r} = 0 \end{cases}$$

PROPRIETÁ DEGLI STIMATORI:

a. SE ESISTE UNA STIMA A VARIANZA MINIMA, QUESTA É QUELLA CHE SI TROVA CON IL METODO DEL MAXIMUM LIKELIHOOD

LE STIME A VARIANZA MINIMA SONO QUELLE PER LE QUALI LA DISUGUAGLIANZA DI CRAMER RAO DIVENTA UN'UGUAGLIANZA $\sigma_\theta^2 \geq \dfrac{\left(\dfrac{d\tau}{d\theta}\right)^2}{E\left[-\dfrac{\partial^2 \ln\mathcal{L}}{\partial\theta^2}\right]}$, QUESTO NEL CASO IN CUI IL VALORE DI ASPETTAZIONE DELLO STIMATORE É FUNZIONE DEL PARAMETRO $E[t] = \tau(\theta)$, SE INVECE $E[t] = \theta$ $\sigma_\theta^2 \geq \dfrac{1}{E\left[-\dfrac{\partial^2 \ln\mathcal{L}}{\partial\theta^2}\right]}$

QUESTA DISUGUAGLIANZA SI DIMOSTRA CON LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ, PER LA QUALE $E[x^2]E[y^2] \geq (E[xy])^2$
NEL NOSTRO CASO, $x^2 = (t-\theta)^2$ E $y^2 = \left(\dfrac{\partial \ln\mathcal{L}}{\partial\theta}\right)^2$

LA DISUGUAGLIANZA DI CRAMER RAO DIVENTA UN'UGUAGLIANZA QUANDO LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ DIVENTA UN'UGUAGLIANZA E QUESTO SUCCEDE QUANDO $x = ky$, OVVERO $(t-\theta)^2 = k\left(\dfrac{\partial \ln\mathcal{L}}{\partial\theta}\right)^2$

D'ALTRA PARTE, IL METODO DEL MAXIMUM LIKELIHOOD MI DICE CHE $\left.\dfrac{\partial \ln\mathcal{L}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$

QUINDI LA STIMA CHE SI OTTIENE PONENDO LA DERIVATA DEL LOGARITMO DI LIKELIHOOD UGUALE A ZERO É PROPRIO LA STIMA A VARIANZA MINIMA

QUESTA PROPRIETÁ NON FA RIFERIMENTO ALLA DIMENSIONE DEL CAMPIONE

b. LE STIME, ALMENO ASINTOTICAMENTE, SONO CENTRATE, OVVERO I VALORI DI ASPETTAZIONE DEGLI STIMATORI SONO I VALORI VERI DEI PARAMETRI

c. LE STIME SONO EFFICIENTI, IL METODO DEL MAXIMUM LIKELIHOOD FORNISCE GLI STIMATORI CHE HANNO LA VARIANZA PIÚ PICCOLA

d. LE STIME ASINTOTICAMENTE HANNO FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE NORMALE

ES. CONSIDERIAMO UN CAMPIONE $x_1, \dots, x_n$ DI VARIABILI CASUALI CON LA STESSA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $f(x_i;\theta)$ CHE DIPENDE DAL PARAMETRO θ CHE VOGLIAMO STIMARE

IN GENERALE, $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}$ É UNA VARIABILE CASUALE CON VALORE DI ASPETTAZIONE

$$E\left[\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right] = 0 \quad \text{E VARIANZA} \quad var\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right) = E\left[\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

MA $E\left[\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right)^2\right] = E\left[-\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2}\right] = I$ DA CUI LA VARIANZA MINIMA $\sigma_t^2 \geq \frac{1}{I}$

NEL CASO IN CUI LE VARIABILI SIANO INDIPENDENTI, $\mathcal{L} = \prod_i f(x_i;\theta)$ CHE FACENDO IL LOGARITMO DIVENTA $\ln \mathcal{L} = \sum_i \ln f$ CHE DERIVATO RISPETTO AL PARAMETRO É $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = \sum_i \frac{\partial \ln f}{\partial \theta}$ LA SOMMA DI n VARIABILI CASUALI E

QUINDI PER IL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE, LA DERIVATA DEL LOGARITMO DI LIKELIHOOD FATTA RISPETTO A θ, PER $n \to \infty$, TENDE AD AVERE UNA DISTRIBUZIONE NORMALE $N(0, I)$

QUINDI, SE CONSIDERIAMO $\Psi = \frac{\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}}{\sqrt{I}}$, ALLORA Ψ HA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $N(0,1)$

SE SUPPONIAMO CHE LA STIMA A VARIANZA MINIMA ESISTA OVVERO CHE $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = A(t-\theta)$, ALLORA $\Psi = \frac{A(t-\theta)}{A\sigma_t} = \frac{(t-\theta)}{\sigma_t}$ DA CUI t HA DISTRIBUZIONE $N(\theta, \sigma_t^2)$

SUPPONIAMO DI AVERE UN CAMPIONE DI n MISURE $x_1, \dots, x_n$ DI UNA GRANDEZZA FISICA x CON FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $N(\mu, \sigma^2)$ VOGLIAMO STIMARE μ E σ^2 A PARTIRE DAL CAMPIONE USANDO IL METODO DEL MAXIMUM LIKELIHOOD

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{E} \quad \ln \mathcal{L} = \ln(2\pi)^{-\frac{n}{2}} - n\ln\sigma - \sum_i \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu} = 2\frac{\sum_i (x_i-\mu)}{2\sigma^2} = 0 \quad \text{DA CUI} \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_i (x_i-\mu)^2 = 0 \quad \text{DA CUI} \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_i (x_i-\hat{\mu})^2$$

IL VALORE DI ASPETTAZIONE DI $\hat{\mu}$ É CENTRATO $E[\hat{\mu}] = \mu$ E IL VALORE DI ASPETTAZIONE DI $\hat{\sigma}^2$ É CENTRATO PER $n \to \infty$ $E[\hat{\sigma}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

ORA, $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i (x_i - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} (n\hat{\mu} - n\mu)$

$= \frac{n}{\sigma^2} (\hat{\mu} - \mu)$ CHE É COME SCRIVERE $A(t - \theta)$

E $\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu^2} = - \frac{n}{\sigma^2}$ QUINDI $I = E\left[- \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu^2} \right] = \frac{n}{\sigma^2}$

DA CUI $\sigma^2_{\hat{\mu}} = \frac{\sigma^2}{n}$ LA VARIANZA DELLA MEDIA É n VOLTE PIÚ PICCOLA DELLA VARIANZA DEL CAMPIONE

INOLTRE, $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} (\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)$ E $\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^{2\,2}} = \frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma^2)^2} - \frac{n}{(\sigma^2)^3} \hat{\sigma}^2$

QUINDI $E\left[- \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^{2\,2}} \right] = - \frac{n}{(\sigma^2)^2} + \frac{n}{2(\sigma^2)^2} = - \frac{n}{2(\sigma^2)^2}$ DA CUI $\sigma^2_{\hat{\sigma}^2} = \frac{2(\sigma^2)^2}{n}$

NEL CASO DI PIÚ PARAMETRI, $(V^{-1})_{ij} = E\left[- \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right]$

NEL NOSTRO CASO $E\left[- \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu \partial \sigma^2} \right] = E\left[- \frac{n}{\sigma^2} (\mu - \hat{\mu}) \right]$

$= - \frac{n}{\sigma^2} \underbrace{E[(\mu - \hat{\mu})]}_{=0} = 0$

QUINDI $V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2_{\hat{\mu}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2_{\hat{\sigma}^2}} \end{pmatrix}$ DA CUI $\mathrm{cov}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = 0$

SE LE x_i HANNO FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE NORMALE $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, DOVE LE $\mu_i = E[x_i] = \mu_i(\theta_1, \dots, \theta_L)$ SONO FUNZIONE DEI PARAMETRI DA STIMARE, ALLORA

$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n} e^{- \sum_i \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$

$\ln \mathcal{L} = c - \sum_i \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}$ PER MASSIMIZZARE $\ln \mathcal{L}$ BISOGNA MINIMIZZARE LA SOMMATORIA, QUINDI LA QUANTITÁ $X^2 = \sum_i \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}$ CHE É LA STESSA QUANTITÁ CHE IL METODO DEI MINIMI QUADRATI MI DICE DI MINIMIZZARE PER OTTENERE LA STIMA MIGLIORE DEI PARAMETRI

SE LE VARIABILI NON SONO INDIPENDENTI, E QUINDI LA LORO COVARIANZA É DIVERSA DA 0, L'ESPONENTE PUÓ ESSERE SCRITTO COME $\frac{1}{2} Q^2$, DOVE $Q^2 = (\vec{x} - \vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})$

SE LE x_i SONO MISURE DI UNA STESSA GRANDEZZA FISICA E HANNO QUINDI VALORI DI ASPETTAZIONE UGUALI $\mu_i = \mu$, ALLORA $\ln \mathcal{L} = c - \frac{1}{2} \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_i^2}$ E $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu} = \sum_i \frac{(x_i - \mu)}{\sigma_i^2} = 0$

DA CUI $\hat{\mu} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}$ LA STIMA MIGLIORE DEL VALORE DI ASPETTAZIONE É LA MEDIA PESATA

ORA, $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu} = \sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} - \mu \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} = \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \left(\frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} - \mu \right)$

$$= \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right) (\hat{\mu} - \mu)$$

QUINDI $\sigma^2_{\hat{\mu}} = \frac{1}{E\left[-\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu^2} \right]} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}$

SE LA VARIABILE CASUALE t HA UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE $f(t, \nu) = \nu e^{-\nu t}$ E SUPPONIAMO UN CAMPIONE $t_1, \dots, t_n$, ALLORA

$\mathcal{L} = \prod_i \nu e^{-\nu t_i} = \nu^n e^{-\nu \sum t_i}$

$\ln \mathcal{L} = n \ln \nu - \nu \sum_i t_i$ E $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \nu} = \frac{n}{\nu} - \sum_i t_i = 0$ DA CUI $\hat{\nu} = \frac{n}{\sum_i t_i}$ È L'INVERSO DELLA MEDIA ARITMETICA

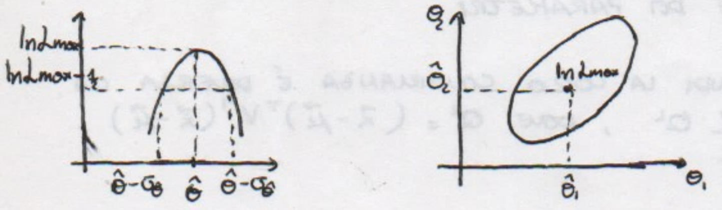
ORA, $\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \nu} = \frac{n}{\nu} - \sum_i t_i = \frac{n}{\nu} - \frac{n}{\hat{\nu}} = n\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\hat{\nu}} \right)$ IN QUESTO CASO NON SI PUÒ DIRE CHE LO STIMATORE FORNITO DAL METODO DEL MAXIMUM LIKELIHOOD È A VARIANZA MINIMA E OTTENERE LA VARIANZA DERIVANDO UNA SECONDA VOLTA RISPETTO A ν

SE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE FOSSE STATA $f(t, \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$, ALLORA LO STIMATORE DI τ SAREBBE STATO A VARIANZA MINIMA, CON $\hat{\tau} = \frac{1}{n} \sum_i t_i$

NEL CASO IN CUI NON SIA POSSIBILE RISOLVERE ANALITICAMENTE LE FUNZIONI DI LIKELIHOOD, SI PUÒ PROCEDERE CON METODI GRAFICI O NUMERICI

IN QUESTO CASO SI SCRIVE LA FUNZIONE DI LIKELIHOOD, SI CONSIDERA IL SUO LOGARITMO E SI VARIANO I PARAMETRI IN MODO DA MASSIMIZZARLO

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = \ln \mathcal{L}(\hat{\theta}) + \underbrace{\left.\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\right|_{\theta = \hat{\theta}}}_{=0} (\theta - \hat{\theta}) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2}\right|_{\theta = \hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta})^2 + \dots$$



$\ln \mathcal{L} = \mathcal{L}_{max} - \frac{1}{2}$ CORRISPONDE ALL'ELLISSE

UNBINNED MAXIMUM LIKELIHOOD

SI USA QUANDO SI PASSA DAL CAMPIONE $x_1, \dots, x_n$ AL CAMPIONE $n_1, \dots, n_m$ COSTITUITO DAL NUMERO DI EVENTI NEI DIVERSI INTERVALLI DELL'ISTOGRAMMA

IN QUESTO CASO, $\mathcal{L}(n_1, \dots, n_m; \vec{\theta}) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$ DOVE p_i È LA PROBABILITÀ CHE IL SINGOLO EVENTO CADA NELL'i-ESIMO INTERVALLO

$$P_i = \int_{x_i^* - \frac{\Delta}{2}}^{x_i^* + \frac{\Delta}{2}} f(x_i, \theta)\, dx$$ DOVE x_i^* È IL VALORE CENTRALE DELL'i-ESIMO INTERVALLO

SUPPONIAMO DI AVERE UN CAMPIONE $x_1, \dots, x_n$ E CHE LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI x SIA DEL TIPO $f(x, a) = \frac{1}{2\pi}(1 + a\cos x)$ CON $x \in (0, 2\pi)$ VOGLIAMO STIMARE a A PARTIRE DAL CAMPIONE

IN QUESTO CASO SI PUÒ USARE IL METODO DEI MOMENTI, CHE CONSISTE NEL CONSIDERARE IL VALORE DI ASPETTAZIONE $E[\cos x] = \int_0^{2\pi} f(x, a)\cos x\, dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a\cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{a}{2\pi}\pi = \frac{a}{2}$$

DOVE a È IL PARAMETRO INCOGNITO CHE VOGLIAMO STIMARE A PARTIRE DAL CAMPIONE

SE CONSIDERIAMO IL VALORE MEDIO DI COSX CALCOLATO SUL CAMPIONE, QUESTO SARÀ $\overline{\cos x} = \frac{1}{n}\sum_i \cos x_i$ CON VALORE DI ASPETTAZIONE $E[\overline{\cos x}] = \frac{a}{2}$

QUINDI $\hat{a} = 2\,\overline{\cos x}$ CON VARIANZA $\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{4}{n^2}\sum_i var(\cos x_i)$

DOVE $var(\cos x) = \underbrace{E[\cos^2 x]}\, - (E[\cos x])^2$

$var(\sin x) = \underbrace{E[\sin^2 x]} - (E[\sin x])^2$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)$$

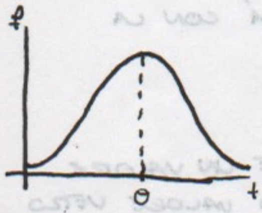
$= \frac{1}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2}{2}\right)$

DA CUI $\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{4}{n^2}\, n\, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \simeq \frac{2}{n}$

CON I METODI VISTI FINO AD ORA A PARTIRE DAL CAMPIONE $x_1, \dots, x_n$ ABBIAMO STIMATO NUMERICAMENTE I PARAMETRI A CUI SONO STATI ASSOCIATI DEGLI ERRORI $\hat{\sigma} \pm \sigma_\theta$, ABBIAMO QUINDI DETERMINATO UN INTERVALLO (t_1, t_2), CON $t_i = \hat{\theta} \pm \sigma_\theta$, CHE HA UNA CERTA PROBABILITÀ DI INCLUDERE IL VALORE VERO DEL PARAMETRO

L'INTERVALLO DETERMINATO PRENDE IL NOME DI INTERVALLO DI CONFIDENZA E LA PROBABILITÀ ASSOCIATA È DETTA LIVELLO DI CONFIDENZA

SUPPONIAMO DI AVERE UN CAMPIONE $x_1, \dots, x_n$ E CONSIDERIAMO LA STATISTICA $t(x_1, \dots, x_n)$ CON FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE GAUSSIANA $f(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t} e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2\sigma_t^2}}$



LA FUNZIONE DI t SARÀ UNA GAUSSIANA CENTRATA SUL VALORE VERO DEL PARAMETRO

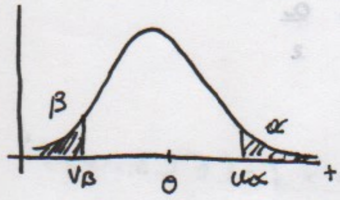
Supponiamo di aver ottenuto un certo valore t^* e di conoscere la deviazione standard della nostra stima, possiamo prendere come intervallo di confidenza $I = (t^* - 2\sigma_t, t^* + 2\sigma_t)$ che corrisponde a un livello di confidenza del 95%.

La probabilità che questo intervallo contenga il valore vero del parametro è uguale alla probabilità che la stima disti dal valore vero del parametro per più di due deviazioni standard

quindi $$P = \int_{\theta - 2\sigma_t}^{\theta + 2\sigma_t} f(t,\theta)\, dt = 0.95$$

Esistono comunque dei metodi che permettono di determinare gli intervalli di confidenza anche nel caso in cui la funzione di distribuzione della stima non sia gaussiana

Ad esempio, si può usare la variabile $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})$ come stima della $var(x)$; sapendo che la funzione di distribuzione di s^2 è una distribuzione χ^2_{n-1} a meno di un fattore di scala

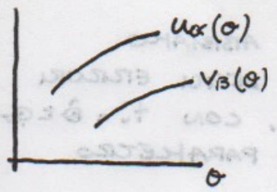


quindi se conosciamo la funzione di distribuzione delle stime $f(t,\theta)$ che dipenderà dal valore vero del parametro, possiamo comunque determinare gli intervalli di confidenza senza usare la funzione di distribuzione gaussiana

Una volta nota la funzione di distribuzione, si possono determinare due valori v_β e u_α tali per cui l'integrale della funzione fino a v_β abbia un certo valore β e l'integrale della funzione dopo u_α abbia un certo valore α

in questo caso $\quad P(v_\beta < t < u_\alpha) = 1 - \alpha - \beta$

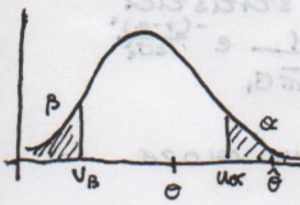
In realtà, se cambia il valore vero del parametro θ cambia anche la funzione di distribuzione e quindi in funzione del valore vero del parametro v_β e u_α non hanno dei valori fissati, ma si spostano



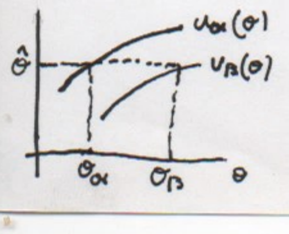
Ad esempio, in questo caso avremo che all'aumentare del valore vero del parametro la distribuzione si sposterà verso destra

Le curve descritte da u_α e v_β determineranno una striscia detta "striscia di confidenza"

Supponiamo di aver ottenuto una stima $\hat{\theta}$ a partire dal campione



se la distribuzione si sposta verso destra quando il valore vero del parametro aumenta, per un certo valore vero del parametro si avrà che u_α coinciderà con la stima



A partire da questa curva, si può determinare un valore del parametro θ_α tale per cui per quel certo valore vero del parametro, la stima coincide con u_α

$P(\hat{\theta} > u_\alpha) = \alpha$ CHE COINCIDE CON LA $P(\theta < \theta_\alpha)$

ANALOGAMENTE, $P(\hat{\theta} < v_\beta) = \beta$ CHE COINCIDE CON LA $P(\theta > \theta_\beta)$

QUINDI SE SI CONSIDERA COME INTERVALLO DI CONFIDENZA $I = (\theta_\alpha, \theta_\beta)$ GLI SI PUÓ ASSOCIARE UN LIVELLO DI CONFIDENZA PARI A $P = 1 - \alpha - \beta$