Sistemi Dinamici Planari

Michele Cirafici

DMG & INFN & IGAP, Trieste, Italy
Email: `mcirafici@units.it`

Dispense per uso interno - da ricontrollare

23 aprile 2025

Indice

1 Teoria dell'indice

Vedremo adesso un breve accenno a tecniche topologiche. Consideriamo una curva chiusa $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, una mappa uno a uno del cerchio nel piano. Il campo vettoriale ha forma $f = (P, Q)$ e quindi l'angolo che il campo vettoriale forma con l'asse delle x è θ tale che $\tan\theta = Q/P$.

Definizione 1.1. *Data una curva chiusa γ e un campo vettoriale f, l'indice (di Poincaré)*

$$I_\gamma(f) = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \tag{1.2}$$

è il numero intero di rotazioni che il vettore $f(x)$ compie mentre x si muove lungo γ fino a tornare al punto di partenza. $\Delta\theta$ è il cambiamento netto in θ dopo un giro.

Supponiamo che f sia C^1. Differenziando la definizione di θ troviamo ($\sec^2 = 1/\cos^2$)

$$\sec^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{P\mathrm{d}Q - Q\mathrm{d}P}{P^2} \tag{1.3}$$

Usando $\sec^2\theta = 1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2$, troviamo

$$I_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \frac{P\,\mathrm{d}Q - Q\,\mathrm{d}P}{P^2 + Q^2} \tag{1.4}$$

L'indice ha una proprietà molto importante: se deformiamo continuamente la curva γ, senza attraversare un punto di equilibrio, l'indice non cambia. Allo stesso modo, se teniamo ferma la curva ma cambiamo il campo vettoriale in maniera continua, l'indice non cambia. Il motivo è molto semplice, ma anche molto profondo: l'indice è una funzione continua ma può solamente prendere valori interi, cioé non può cambiare senza saltare. Quindi deve rimanere costante. Tantissime applicazioni della topologia alla fisica si basano su definire quantità con queste proprietà.

Teorema 1.5. *Sia A una matrice non-singolare e $\dot{x} = Ax = f(x)$. Sia γ una curva chiusa che racchiude l'origine, orientata in senso antiorario. Allora $I_\gamma(f) = \operatorname{sgn}\det A$*

Dimostrazione. Siccome A è non-singolare, o $ad \neq 0$ o $bc \neq 0$. Possiamo quindi fare una deformazione continua di A per portarla in una delle due forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sgn}a & 0 \\ 0 & \mathrm{sgn}d \end{pmatrix}, \text{oppure} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{sgn}b \\ \mathrm{sgn}c & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

senza cambiare l'indice. Per semplicità scegliamo la prima. Possiamo ora fare una deformazione continua di γ per trasformarla nel cerchio unitario intorno all'origine. Allora

$$I_\gamma(f) = \frac{1}{2pi}\oint_C \mathrm{sgn}a\,\mathrm{sgn}d\,\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{sgn}a\,\mathrm{sgn}d\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}s = \mathrm{sgn}a\,\mathrm{sgn}b \tag{1.7}$$

□

Esempio 1.8. *Consideriamo*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - y^2 = P \\ \dot{y} &= 2xy = Q \end{aligned} \tag{1.9}$$

Poniamo $z = x + \mathrm{i}\, y$. *Allora* $P = \mathrm{Re}\, z^2$ *e* $Q = \mathrm{Im}\, z^2$. *Inoltre* $P = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, $\mathrm{d}P = -4\cos\theta\sin\theta$, *e* $Q = 2\cos\theta\sin\theta$, $\mathrm{d}Q = 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. *Calcoliamo l'indice*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P\mathrm{d}Q - Q\mathrm{d}P}{P^2+Q^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \frac{2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\cos\theta\sin\theta(-4\sin\theta\cos\theta)}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2 + 4\sin^2\theta\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\mathrm{d}\theta = +2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

In generale quando $P = \mathrm{Re}\, z^n$ *e* $Q = \mathrm{Im}\, z^n$ *troviamo indice* n.
Teorema 1.11. *Se la curva* γ *non contiene punti critici di* f*, allora* $I_\gamma(f) = 0$

Dimostrazione. Possiamo rimpicciolire la curva fino ad un cerchietto su cui li campo vettoriale abbia come limite una costante. Allora il campo vettoriale punta nella stessa direzione lungo tutto il cerchietto e quindi l'indice è zero dalla definizione. □

È importante notare che il viceversa non vale, se l'indice è nullo non possiamo concludere che non ci sono punti di equilibrio dentro la curva. Infatti se abbiamo una curva γ contenente diversi punti di equilibrio, possiamo dividerla un più curve γ_i, ognuna che circondi un punto di equilibrio diverso x_i^*. Possiamo quindi definire l'indice per un punto di equilibrio isolato: $I_{x_i^*}(f)$ è l'indice $I_{\gamma_i}(f)$. Abbiamo quindi

$$I_\gamma(f) = \sum_i I_{x_i^*}(f) \tag{1.12}$$

e siccome gli indici dei punti di equilibrio possono essere positivi o negativi, il fatto che l'indice $I_\gamma(f)$ si annulli non implica l'assenza di punti di equilibrio al suo interno.
Teorema 1.13. *Se* γ *è un'orbita periodica di* f*, allora* $I_\gamma(f) = 1$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che se γ è un'orbita periodica, allora f le è sempre tangente. □

In particolare ogni orbita periodica deve necessariamente concludere almeno un punto di equilibrio.

2 Il teorema di Poincaré-Bendixson

In questa Sezione esamineremo il teorema di Poincaré-Bendixson e alcune sue conseguenze. Intuitivamente il teorema dice che sistemi dinamici continui in due dimensioni non possono essere caotici. L'idea alla base del teorema è quella di classificare tutti i possibili insiemi ω-limite.

Teorema 2.1. *Sia D in sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso. Sia φ un flusso su D e assumiamo che l'orbita in avanti di un $p \in D$ sia contenuta in un insieme compatto e che $\omega(p)$ non contenga nessun punto di equilibrio. Allora $\omega(p)$ è un'orbita periodica.*

Prima di dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari. Chiamiamo un arco S una sezione trasversa al flusso φ^t se è trasversa al campo vettoriale $f(x)$ per ogni $x \in S$. In un intorno di un punto y tale che $f(y) \neq 0$ esiste sempre una sezione trasversa, eventualmente prendendo un segmento molto piccolo. Inoltre le traiettorie tagliano S nello stesso verso (altrimenti dal fatto che le traiettorie non si intersecano, vediamo che se una traiettoria taglia S in due versi, deve esistere una traiettoria tangente alla sezione). Per τ sufficientemente piccolo, costruiamo l'intorno cilindrico

$$A = \bigcup_{|t|<\tau} \varphi^t(S) \tag{2.2}$$

Notiamo che $\forall x \in A$ esiste un unico s tale che $\varphi^s(x) \in S$.

Lemma 2.3. *Se il flusso φ^t taglia una sezione trasversa per $t_1 < t_2 < \cdots$ allora le intersezioni $\varphi^{t_i}(x)$ sono una successione monotona*

Dimostrazione. Segue dal fatto che le traiettorie non si intersecano □

Lemma 2.4. *Supponiamo che $y \in S$ sia anche $y \in \omega(x)$. Allora y è l'unica intersezione di $\omega(x)$ com S.*

Dimostrazione. Per assurdo prendiamo $y' \in \omega(x) \cup S$ con $y' \neq y$. Siano $\{t_k\}$ e $\{t'_k\}$ due sequenze tali che $x_k = \varphi^{t_k}(x) \longrightarrow y$ e $x'_k = \varphi^{t'_k}(x) \longrightarrow y'$. Per t grandi x_k e x'_k sono in un intorno cilindrico di S. Non è restrittivo, eventualmente cambiando i valori di $\{t_k\}$ e $\{t'_k\}$, supporre che tutti gli x_k e x'_k siano su S.

Allora prendendo da entrambe le sequenze $\{t_k\}$ e $\{t'_k\}$ possiamo costruire una sequenza $\{t''_k\}$ tale che $\varphi^{t''_k}(x)$ oscilli lungo S, in contraddizione con il lemma precedente. □

Andiamo adesso a dimostrare il teorema di Poincaré-Bendixon.

Dimostrazione. Se $\omega(x)$ non contiene punti di equilibrio e $y \in \omega(x)$, allora neanche $\omega(y) \subset \omega(x)$ contiene punti di equilibrio. Prendiamo $z \in \omega(y)$ e S una sezione trasversa contenente z. Prendiamo $\{t_k\}$ una successione tale che $\varphi^{t_k}(y) \longrightarrow z$. Come nel lemma precedente possiamo assumere che i punti $\{\varphi^{t_k}(y)\}$ giacciano su S.

Usiamo il lemma precedente: tutti i punti $\{\varphi^{t_k}(y)\}$ sono in $\omega(x)$ (perché è invariante) e anche $z \in \omega(x)$ (perché $z \in \omega(y) \subset \omega(x)$). Tuttavia l'intersezione di $\omega(x)$ con S è unica: quindi tutti questi punti coincidono con z e quindi la traiettoria di y è periodica.

Chiamiamola γ. Abbiamo dimostrato che γ è contenuta in $\omega(x)$. Adesso dimostriamo che coincidono, cioé che

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi^t(x), \gamma) = 0 \tag{2.5}$$

Consideriamo S trasversa a γ in $y \in \omega(x)$. Sia $\{t_k\}$ una sequenza tale che $x_k = \varphi^{t_k}(x) \longrightarrow y$. Come prima possiamo supporre che $x_j \in S$, e anche che $\varphi^t(x) \notin S$ quando $t \neq t_k$, ad esempio $t_k < t < t_{k+1}$.

Se prendiamo k grande, x_k è arbitrariamente vicino a y e quindi $t_{k+1} - t_k$ è arbitrariamente vicino al periodo T di γ.

In questo intervallo la distanza di $\varphi^t(x_j)$ da $\varphi^t(y)$ (e quindi da γ) è limitata da costante $\times$ $\mathrm{dist}(y, x_k)$ e quindi è arbitrariamente piccola. $\square$

Consideriamo un'applicazione del teorema. Prendiamo il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} &= b - ay - x^2 y \end{aligned} \tag{2.6}$$

per $a > 0$ e $b = \frac{1}{2}$. Si tratta di un modello semplificato della reazione di glicolisi (la trasformazione di zucchero in energia, dove molecole più energetiche Y si trasformano in molecole meno energetiche X liberando energia). Avvengono due reazioni chimiche contemporaneamente. La prima $A + Y \longrightarrow A + X$ è catalizzata da A e viene descritta da

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ay \\ \dot{y} &= -ay \end{aligned} \tag{2.7}$$

La seconda è $2X + Y \longrightarrow X$, descritta da

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 y \\ \dot{y} &= -x^2 y \end{aligned} \tag{2.8}$$

La concentrazione di Y è rifornita a ritmo b costante, mentre il termine $-x$ è descrive un ultima reazione $X \longrightarrow Z$ in altri prodotti.

Abbiamo un punto critico per $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{4a+1}\right)$. Per studiarne la stabilità calcoliamo la matrice Jacobiana

$$Jac = \begin{pmatrix} -1 + 2xy & x^2 + a \\ -2xy & -(x^2 + a) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

al punto critico (x^*, y^*). Vediamo che $\det Jac = \frac{1}{2y^*} > 0$ e quindi possiamo escludere che si tratti di un punto sella perchè il determinante è il prodotto degli autovalori. Se gli autovalori hanno lo stesso segno, possiamo determinarlo guardando la traccia: $\mathrm{Tr} Jac = -1 + y^* - \frac{1}{2y^*}$. Per un equilibrio instabile $\mathrm{Tr} Jac > 0$ e questo si ha per

$$1 + \frac{4a+1}{4} - \frac{2}{4a+1} < 0 \tag{2.10}$$

e quindi $3 - 24a - 16a^2 > 0$. Questo è certamente vero per a piccolo. Scegliamo a tale che sia verificata e l'equilibrio sia instabile. Possiamo quindi racchiudere il punto critico da una piccola curva γ_1, lungo la quale il flusso è uscente.

Costruiamo adesso un contorno, dalla forma di parallelogramma, lungo il quale il flusso è entrante:

- Sulla linea $y = 0$ abbiamo $\dot{y} = \frac{1}{2} > 0$ e quindi il flusso punta verso l'alto

- Andiamo a vedere la linea $x = -\varepsilon$. Allora $\dot{x} = \varepsilon + ay$ e quindi $\dot{x} > 0$ se $y > 0$, quindi il flusso punta verso destra
- Studiamo le isocline

$$\begin{aligned}\dot{x} = 0 &\Longrightarrow y = \frac{x}{a + x^2} \\ \dot{y} = 0 &\Longrightarrow y = \frac{1}{2(a + x^2)}\end{aligned} \tag{2.11}$$

  In particolare $y = \frac{1}{2(a+x^2)}$ ha un massimo per $y = \frac{1}{2a}$. Se andiamo a vedere la linea $y = \frac{1}{2a} + \varepsilon$ troviamo

$$\dot{y} = \frac{1}{2} - a\left(\frac{1}{2a} + \varepsilon\right) - x^2\left(\frac{1}{2a} + \varepsilon\right) = -a\varepsilon - \frac{x^2}{2a} - x^2\varepsilon < 0 \tag{2.12}$$

  e quindi il flusso punta verso il basso.

- Notiamo che $\dot{x} + \dot{y} = -x + \frac{1}{2}$ e quindi quando $x > \frac{1}{2}$ si ha $\dot{x} + \dot{y} < 0$. Quindi se prendiamo la retta $x + y = c$ vediamo che la funzione $F(x, y) = x + y - c$ ha $\dot{F} < 0$ per $x > \frac{1}{2}$. Quindi le traiettorie sulla linea $x + y = c$ entrano nella regione

$$D = \{(x, y) \mid F(x, y) < 0\} \tag{2.13}$$

  Adesso scegliamo c nel modo più semplice: $x + y = c$ interseca $y = \frac{1}{2a} + \varepsilon$ per $x = \frac{1}{2}$ per $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} + \varepsilon$

Quindi, riassumendo, lungo il bordo della regione

$$\begin{aligned}
&x = 0, \qquad 0 \le y \le \frac{1}{2a} + \varepsilon \\
&y = 0, \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} + \varepsilon \\
&y = \frac{1}{2a} + \varepsilon, \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\
&x + y - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2a} + \varepsilon\right) = 0, \qquad \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} + \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.14}$$

il flusso è entrante. Chiamiamo il bordo γ_2. Allora il flusso è entrante nella regione D il cui bordo è $\gamma_1 \cup \gamma_2$ e questa regione non contiene nessun punto critico. Pertanto per il teorema di Poincaré-Bendixon deve esistere un'orbita periodica in D.

Approfondimenti

- Steven H. Strogatz , *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* Westview Press CRC Press (2018)
- Wiggins S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* Springer (2003)
- Meiss *Differential Dynamical Systems*