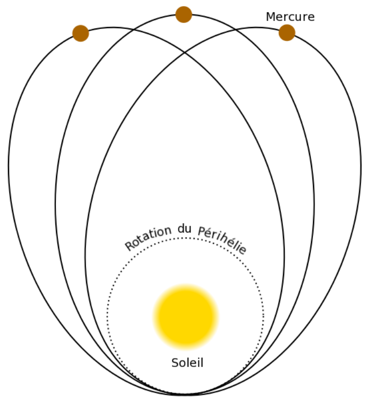
TP 3
Intégration d'équations différentielles

Précession du périhélie de Mercure

Le mouvement d'une planète autour du Soleil obéit à la loi de Newton

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \tag{1}$$



qui implique que sa trajectoire est une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b. Les orientations de ces axes sont fixes si la planète ne ressent que la force (1). En présence de forces supplémentaires (par exemple dues à la présence d'autres planètes), les axes tournent lentement au cours du temps: on parle de précession du périastre. Ainsi, le point sur l'orbite le plus proche du Soleil (périhélie), et aussi le point le plus éloigné (aphélie), tournent lentement autour du Soleil (voir figure). Les mesures de la précession du périhélie de Mercure montrent que cette précession est plus rapide que prévu par la théorie de Newton de la gravitation, cette avance de périhélie ne s'expliquant que par la théorie de la Relativité générale. Dans le cas du système solaire, cette dernière théorie revient, en bonne approximation, à introduire une force de gravitation corrigée

$$\vec{F}_{\text{grav.rel.}} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1+\frac{\alpha}{r^2}\right)\vec{e}_r, \qquad \alpha = 1.1\cdot 10^{-8}\ \text{UA}^2 \tag{2}$$

où M est la masse du Soleil et m la masse de Mercure. On souhaite calculer la vitesse de précession de l'orbite de Mercure due à la correction relativiste qui fait intervenir la constante α. En fixant l'origine du repère à la position du Soleil, l'équation du mouvement de Mercure s'écrit

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{GM}{r^2}\left(1+\frac{\alpha}{r^2}\right)\vec{e}_r \tag{3}$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}(t) &= \vec{v}(t) \\ \dot{\vec{v}}(t) &= -\frac{GM}{r^3}\left(1+\frac{\alpha}{r^2}\right)\vec{r} \end{cases} \tag{4}$$

On rappelle que le Soleil se trouve à l'un des foyers de l'ellipse.[1] Selon la théorie de Newton, la période de rotation T_a d'un objet sur une orbite elliptique de demi grand-axe a est donnée par $T_a = 2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$.

Valeurs numériques Constante de gravitation: $G = 6.67408\cdot 10^{-11}\ \text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}$
Masse du Soleil: $M = 1.98855\cdot 10^{30}\ \text{kg}$
Distance Soleil - Terre: $1\ \text{UA} = 1.496\cdot 10^{11}\ \text{m}$
Orbite de Mercure: $a = 0.387\ \text{UA}$, $e = 0.206$

1. Intégration numérique et importance du choix des unités

Il est possible d'intégrer le système d'équations (4) en utilisant le système international d'unités (SI), mais on travaille alors avec des nombres très grands (la distance r) et très petits (calculer la valeur numérique du rapport GM/r^3 !). Cela conduit à une perte de précision à cause du nombre limité de décimales dans les calculs: seuls les nombres réels proches de 1 ont 15 décimales correctes assurées lorsque les nombres sont codés sur 64 bits, ce qui est le choix standard. Le but de cette première partie est de mettre en évidence cette perte de précision due à l'utilisation d'unités peu adéquates et de montrer qu'elle disparaît lorsqu'on utilise des unités mieux adaptées au système étudié.

[1] Les foyers sont situés sur le grand-axe à une distance ea du centre de l'ellipse où e est l'excentricité. L'excentricité d'un cercle est nulle.

1. Intégrer numériquement, à l'aide de la méthode d'Euler puis de Velocity-Verlet, le système d'équations (4) (lorsque $\alpha = 0$) pour calculer la trajectoire de la planète Terre. On supposera que l'orbite de la Terre est un cercle de rayon 1 UA (on néglige l'excentricité).
   Position initiale de la Terre: $\vec{r}_0 = (1\ \text{UA}, 0)$. Pas de temps: $dt = 0.2$ jour, Temps d'intégration: 2 ans.
   Définir une variable `periode` = *période de rotation T_a.*
   → Graphique montrant la trajectoire exacte et les trajectoires numériques selon Euler et Velocity-Verlet.

2. Un choix d'unités plus naturel que le SI pour décrire le système solaire consiste à mesurer les distances en unités astronomiques (UA) et les temps en années terrestres. L'unité de temps est alors
$$T_\oplus = 2\pi\sqrt{\text{UA}^3/(GM)} \qquad (= 1 \text{ anne terrestre}) \tag{5}$$
   On en déduit l'unité de vitesse: $1\ \text{UA}/T_\oplus$. En notant avec un prime les variables dans ces nouvelles unités (par exemple $t = t'\,T_\oplus$), **démontrer dans le compte-rendu** que le système d'équations devient
$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}'(t') &= \vec{v}'(t') \\ \dot{\vec{v}}'(t') &= -\frac{(2\pi)^2}{r'^3}\left(1 + \frac{\alpha'}{r'^2}\right)\vec{r}', \qquad \alpha' = 1.1 \cdot 10^{-8}, \end{cases} \tag{6}$$
   et la condition initiale: $\vec{r}'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi \end{bmatrix}$.

3. Même question qu'en 1, mais en utilisant les unités définies au point 2. Cela revient à intégrer le système d'équations (6).
   Dupliquer votre programme et le modifier pour qu'il résolve les équations (6). Omettre d'écrire 'prime' dans les noms des variables car toutes les grandeurs dans ce nouveau programme utilisent les unités naturelles.

4. Tracer un graphique montrant l'erreur relative $\epsilon(t) = \dfrac{|\vec{r}(t) - \vec{r}_{\text{exact}}(t)|}{|\vec{r}_{\text{exact}}(t)|}$ de la solution numérique en fonction du temps pour les deux méthodes (Euler et VV) et pour deux valeurs du pas de temps dt: 0.2 et 0.02 jour. Faire ce graphique avec le programme utilisant les unités SI, puis avec celui utilisant les unités naturelles. Commenter les résultats.
   Quel gain en précision obtient-on en utilisant les unités naturelles ? Par quel facteur l'erreur relative est-t-elle réduite lorsqu'on utilise le pas de temps plus petit?
   Dans la suite de ce TP, utiliser uniquement le programme qui emploie les unités naturelles.

5. (*pour les rapides*) Ajouter au graphique précédent l'erreur relative de la solution fournie par l'intégrateur `odeint` de la bibliothèque `scipy` (voir ex 2 du TP 2).

2. Orbite de Mercure selon la théorie de Newton

On fixe la position et vitesse initiale de Mercure à

$$\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} (1+e)a \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}} \end{bmatrix} \qquad \text{(unités SI)} \tag{7}$$

$$\vec{r}'(0) = \begin{bmatrix} (1+e)a' \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi\sqrt{\frac{1}{a'}\frac{1-e}{1+e}} \end{bmatrix} \qquad \text{(unités naturelles)} \tag{8}$$

de sorte que l'orbite est une ellipse de demi-grand axe a (a' est le demi-grand axe mesuré en unité astronomique) et d'excentricité $e = 0.206$, donc de demi-petit axe $b = a\sqrt{1-e^2}$). Avec ces paramètres, Mercure est située initialement à l'aphélie, car ea est la distance entre le Soleil et le centre de l'ellipse.

6. Adapter le programme développé au point 3 pour calculer numériquement la trajectoire de Mercure avec la méthode Velocity-Verlet sur une durée de 5 années mercuriennes (prendre $dt = 0.05$ jour terrestre).

7. Démontrer dans le compte-rendu la formule (7) pour la vitesse initiale.
   Indication: appliquer les principes de conservation de l'énergie et du moment angulaire entre le point initial et le point (0,b).

3. Calcul du taux de précession (cas $\alpha > 0$)

On cherche maintenant à calculer le taux de précession du périhélie de Mercure. Comme α est très faible, ce taux est en fait trop petit pour être mesuré directement dans une simulation. Nous travaillerons donc avec des valeurs de α plus grandes et extrapolerons les résultats à la valeur physique de α.

8. Ajouter le terme correctif en α à la force de gravitation (prendre $\alpha = 0.004$). Ajouter le calcul de l'angle $\theta(t) \in [-\pi, \pi]$ entre le vecteur position de Mercure et l'axe horizontal, celui de la distance $r(t)$ entre Mercure et le Soleil et celui de sa dérivée par rapport au temps donnée par (*démontrer cette formule dans le compte-rendu*)
$$\frac{dr}{dt} = \frac{xv_x + yv_y}{r}. \tag{9}$$
Indication: utiliser `np.arctan2(y,x)` *pour calculer* $\arctan(x/y) \in [-\pi, \pi]$

9. Calculer la trajectoire de Mercure en utilisant la méthode Velocity-Verlet (durée: 5 années mercuriennes) et $\alpha = 0.004$. Tracer un graphique montrant $\theta(t), r(t)$ et dr/dt.

10. La dérivée dr/dt s'annule chaque fois que Mercure atteint le périhélie ou l'aphélie. Modifier le code pour calculer l'angle θ_{aph} lorsque Mercure est à son point le plus éloigné (aphélie) en fonction du temps. Tracer un graphique de θ_{aph} en fonction du temps.
Indication: pour détecter lorsque $dr/dt = 0$, tester si la pente dr/dt a changé de signe lorsque le temps t a avancé d'un pas dt.

11. Calculer les pentes $d\theta_{\text{aph}}/dt$ pour les cas $\alpha = 0.004$, 0.002 et 0.001. Tracer un graphique de ces pentes en fonction de α. En déduire le taux de précession lorsque $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-8}$. Convertir ce taux de précession en secondes d'arc par siècle.
Remarque: 1 seconde d'arc = 1/3600°.