Задачи за задължителна самоподготовка по Увод в програмирането

email: kalin@fmi.uni-sofia.bg

4 декември 2018 г.

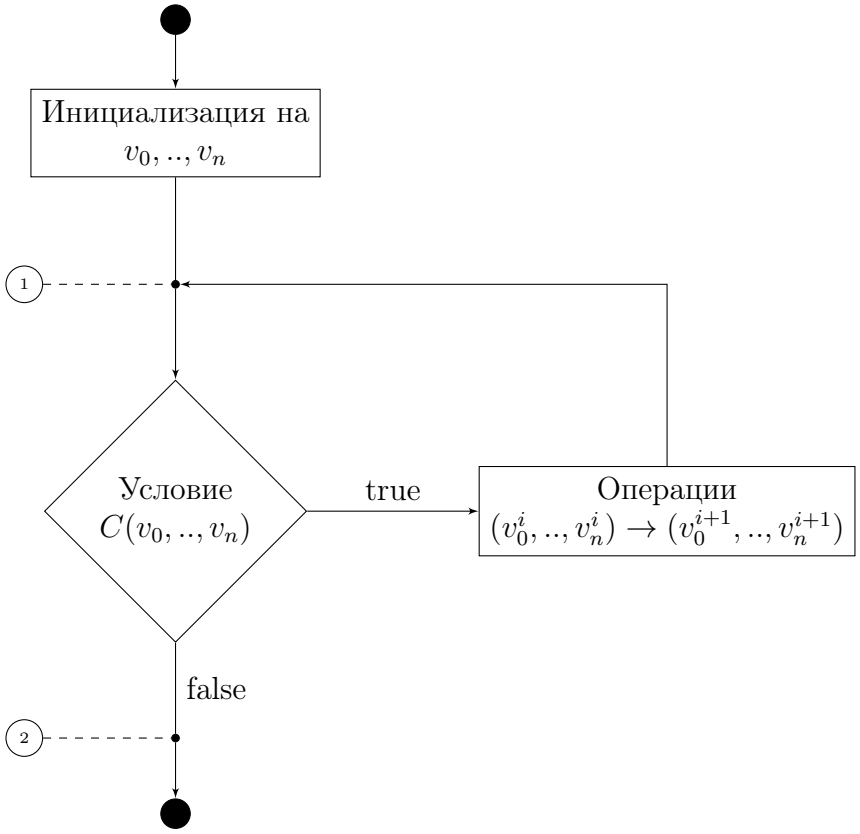
1 Инварианта на цикъл

Изложението в тази секция е силно опростена версия на метода на Флойд (Floyd) за верификация на блок схеми, описан в монументалната му статия [2]. Редица идеи и задачи са взаимствани от книгата [1] на А. Скоскова и С. Николова "Теория на програмите в задачи". За по-подробно изложение и допълнителни примери и задачи препоръчваме тази книга. Изложението по-долу е нарочно опростено, като на места е жертвана прецизността му.

Инварианта на цикъл

Нека е дадена програма или част от програма, която се се състои от единствен `while` цикъл. Нека имаме някакъв набор от работни променливи $v_1, .., v_n$, които се инициализират непосредствено преди `while` цикъла. Условието на цикъла зависи изцяло от работните променливи, а тялото на цикъла използва или променя само тях. Приемаме, че програмата не проивежда странични ефекти и не зависи от такива.

Тоест, за програмата знаем, че: (1) не извършва входни и изходни операции, (2) поведението ѝ зависи изцяло от началните стойности на работните променливи $v_1, .., v_n$ и (3) не модифицира никакви други променливи, освен работните. Такава програма можем да изобразим чрез блок схемата на Фигура 1.



Фигура 1: Блок схема на част от програма с `while` цикъл

На фигурата, $C(v_1, .., v_n)$ е някакъв логически израз, зависещ само от $v_1, .., v_n$. Да допуснем, че сме "паузирали" изпълнението на програмата в точката, обозначена с "1", точно преди да започне i-тото поред ($i \geq 0$) изпълнение на тялото на цикъла, т.е. непосредствено преди да бъдат изпълнени операторите в него за i-ти път. В този момент, n-торката работни променливи $(v_1, .., v_n)$ имат някакви конкретни стойности. Да ги обозначим с $(v_0^i, .., v_n^i)$. След изпълнение на всички оператори в тялото на цикъла, работните променливи получават някакви нови стойности. Това са точно стойностите $(v_0^{i+1}, .., v_n^{i+1})$, които работните променливи ще имат в началото на $i+1$-вата итерация. Това е изобразено на фигурата чрез прехода $(v_0^i, .., v_n^i) \rightarrow (v_0^{i+1}, .., v_n^{i+1})$.

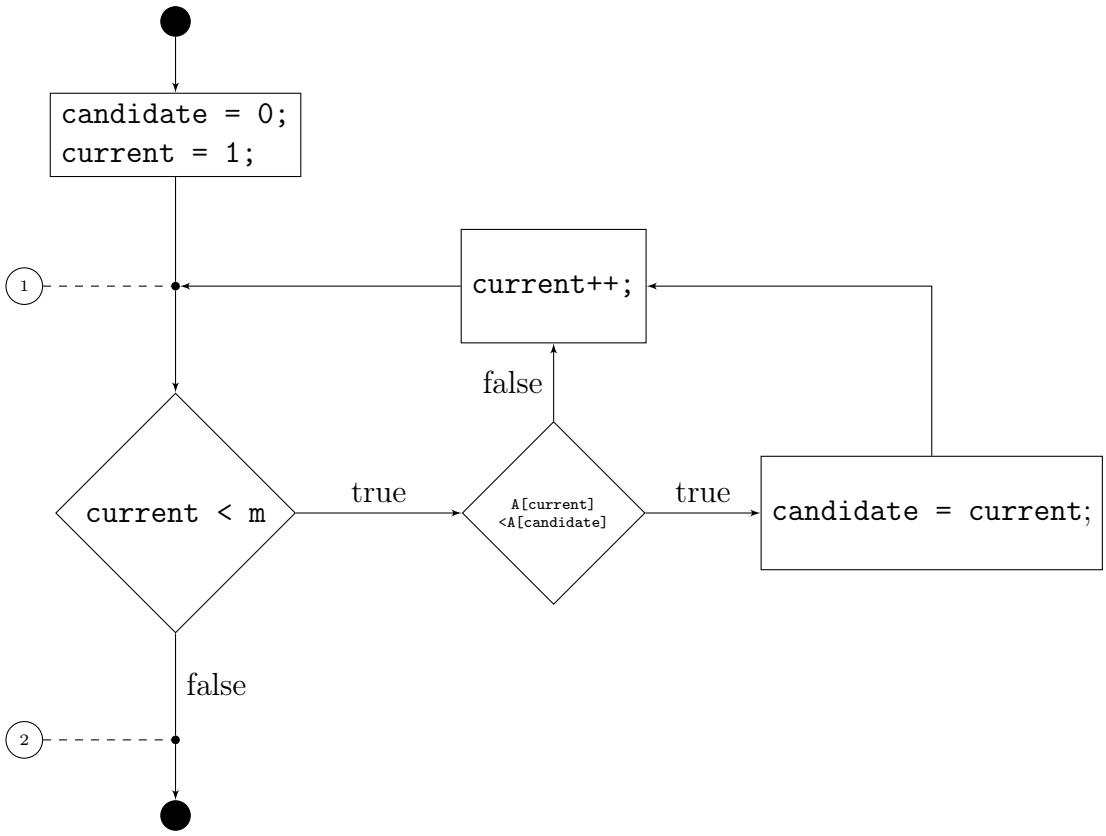
Нека приемем, че при някакво конкретно изпълнение на програмата, при конкретни дадени начални стойности на работните променливи $(v_0^0, .., v_n^0)$, тялото на цикъла ще бъде изпълнено точно $k \geq 0$ пъти, след което условието $C(v_1, .., v_n)$ на цикъла ще се наруши и той ще приключи. Изпълнението на програмата достига точката, обозначена с "2". По този начин се получава редицата от n-торки $(v_0^0, .., v_n^0), .., (v_0^k, .., v_n^k)$, като за всички нейни членове $0 \leq i < k$, освен за последния, знаем че е вярно $C(v_0^i, .., v_n^i)$, а за последния, k-ти член, е вярно обратното – $\neg C(v_0^k, .., v_n^k)$.

Освен свойството $C(v_0^i, .., v_n^i)$ (или неговото отрицание), което знаем за всички последователни стойности на работните променливи, можем да въведем още едно свойство $I(v_0^i, .., v_n^i)$, наречено "инварианта на цикъла". За свойството I искаме да е вярно за всички възможни стойности на работните променливи, дори и за последния член на редицата им. От там идва името "инварианта", т.е. факт, което е винаги верен.

Това свойство може да е произволно, например тъждествената истина `true` изпълнява условието за инварианта, тъй като е вярна за всички членове на редицата на работните променливи. Инвариантата обаче е най-полезна, когато закодира "смисъла" на работните променливи, и ако от верността на $\neg C(v_0^k, .., v_n^k) \&\& I(v_0^k, .., v_n^k)$ можем да изведем нещо полезно за "крайният резултат" от изпълнението на цикъла, съдържащ се в стойностите $(v_0^k, .., v_n^k)$.

Верификация на програми

Понятието "Инварианта" ще илюстрираме чрез едно нейно приложение: "Верификация на програма". Верификацията на програма е



Фигура 2: Блок схема на програмата за намиране на най-малък елемент в масив

доказателство, че при необходимите начални условия дадена програма изчислява стойност, удовлетворяваща някакво желано свойство. Като пример да разгледаме следната програма, за която ще се уверим, че намира най-малък елемент на едномерен масив A с $m > 0$ елемента $A[0], .., A[m-1]$.

```
size_t candidate = 0, current = 1;
while (current < m)
{
  if (A[candidate] < a[current])
  {
    candidate = current;
  }
  current++;
}
```

Можем да приоложим метода на ивариантата, за да докажем строго, че когато цикълът приключи, то елементът $A[candidate]$ е гарантирано по-малък или равен на всички останали елементи на масива. Като първа стъпка, за улеснение изобразяваме програмата като блок схемата на Фигура 2.

Работните променливи на програмата, освен масива A, са целочислените променливи `candidate` и `current`. Какъв е смисълът на тези променливи? Веднага се вижда, че `current` е просто брояч - служи за обхождане на елементите на масива последователно от $A[0]$ до $A[m-1]$, като на всяка итерация от цикъла се разглежда стойността на $A[current]$.

Интуитивно се вижда, че `candidate` е намерения най-малък елемент на масива до текущия момент от обхождането. Тоест можем да се надяваме, че ако сме разгледали първите i елемента на масива, то правилно сме определили, че най-малкият от тях е $A[current]$.

Тези размишления може да запишем чрез инвариантата:

$I ::= A[candidate] = min(A[0], .., A[current - 1])$.

Тази инварианта очевидно е вярна в началото на изпълнението на програмата, когато $current = 1$, а $candidate = 0$. Как да се уверим, че инвариантата е валидна за всички стойности, през които преминават работните променливи?

Нека допуснем, че инвариантата е вярна за някаква стъпка i от изпълнението на цикъла. Тоест, допускаме $I(candidate^i, current^i)$, или $A[candidate^i] = min(A[0], .., A[current^i - 1])$.

На итерация $i+1$ имаме $candidate^{i+1} = current^i$ и $current^{i+1} = current^i + 1$, и следователно трябва да покажем, че $A[candidate^{i+1}] = min(A[0], .., A[current^{i+1} - 1])$.

След навлизане в тялото на цикъла, имаме две възможности:

1) $A[current^i] \geq A[candidate^i]$. От допускането следва, че добавянето на $A[current^i]$ към $min(A[0], .., A[current^i - 1])$ не променя стойността на минимума, или $min(A[0], .., A[current^i - 1]) = min(A[0], .., A[current^i - 1], A[current^i])$. От тук директно се вижда, че инвариантата е вярна за интерация $i+1$.

2) $A[current^i] < A[candidate^i]$. Тъй като по допускане $A[candidate^i] = min(A[0], .., A[current^i - 1])$, от тук следва, че $A[current^i] < min(A[0], .., A[current^i - 1])$, следователно

   $A[current^i] = min(A[0], .., A[current^i - 1], A[current^i])$.

   Но след присвояването имаме $candidate^{i+1} = current^i$, от където $A[candidate^{i+1}] = min(A[0], .., A[current^i])$. Но $current^i = current^{i+1} - 1$, от където получаваме верността на I за итерация $i+1$: $A[candidate^{i+1}] = min(A[0], .., A[current^{i+1} - 1])$.

Доказателството протича по индукция. Уверяваме се, че инвариантата е вярна за цялата редица от стойности на `candidate` и `current`.

Какво се случва в края на цикъла, когато имаме $\neg(current < m)$? Тъй като числата са цели, а `current` се увеличава само с единица, можем да заключим, че $current = m$. Замествайки това равенствио в инвариантата получаваме твърдението

$A[candidate] = min(A[0], .., A[m-1])$.

Тоест, намерили сме минималния елемент на масива.

1.1. Да се докаже строго, че за следната функция е вярно $pow(x, y) = x^y$:

a)
```
unsigned int pow (unsigned int x, usnigned int y)
{
  unsigned int p = 1, i = 0;
  while (i < y)
  {
    p *= x;
    i++;
  }
  return p;
}
```

б)
```
unsigned int pow (unsigned int x, usnigned int y)
{
  unsigned int p = 1;
  while (y > 0)
  {
    p *= x;
    y--;
  }
  return p;
}
```

в)
```
unsigned int pow (unsigned int x, usnigned int y)
{
  unsigned int z = x, t = y, p = 1;
  while (t > 0)
  {
    if (t%2 == 0)
    {
      z *= z;
      t /= 2;
    }else{
      t = t - 1;
      p *= z;
    }
  }
  return p;
}
```

1.2. Да се докаже строго, че за следната функция е вярно $sqrt(n) = [\sqrt{n}]$.

```
unsigned int sqrt (unsigned int n)
{
  unsigned int x = 0, y = 1, s = 1;
  while (s <= n)
  {
    x++;
    y += 2;
    s += y;
  }
  return x;
}
```

1.3. Да се напише програма, която проверява дали дадени два масива A и B с еднакъв брой елементи m са еднакви, т.е. съдържат същите елементи в същия ред. Да се докаже строго, че програмата работи правилно.

1.4. Да се докаже, че следната функция връща истина тогава и само тогава, когато масивът `A` с `n` елемента съдържа елемента `x`.

```
bool member (int A[], size_t n, int x)
{
  size_t i = 0;
  while (i < n && A[i] != x)
  {
    i++;
  }
  return i < n;
}
```

1.5. Да се напише програма, която проверява дали даден масив A с m елемента е сортиран, т.е. дали елементите му са наредени в нарастващ ред. Да се докаже строго, че програмата работи правилно.

Литература

[1] Александра Соскова, Стела Николова, “Теория на програмите в задачи”, Софтех, 2003

[2] R. W. Floyd. “Assigning meanings to programs.” Proceedings of the American Mathematical Society, Symposia on Applied Mathematics. Vol. 19, pp. 19–31. 1967.