

ЗАДАЧИ ЗА ЗАДЪЛЖИТЕЛНА
САМОПОДГОТОВКА
ПО
Структури от данни в програмирането

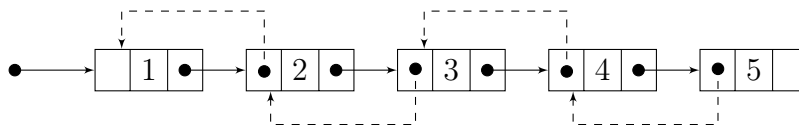
Калин Георгиев

kalin@fmi.uni-sofia.bg

20 май 2020 г.

Съдържание

1	Линеен едносвързан и двусвързан списък	2
1.1	Представяне на двусвързан списък	2
1.2	Списъци и сложности	3
1.3	Итератори за линейни СД	4
1.4	Skip List	5
2	Двоични дървета	7
2.1	Прости обхождания	7
2.2	Отпечатване и сериализация	9
2.3	Извличане на не скаларни свойства	9
2.4	Итериране на елементите на двоично дърво	10
2.5	Представяне на аритметичен израз чрез дърво	10
2.6	Построяване и модификации на дърво	11
3	Изображения (Maps)	16
3.1	HashMap	16
3.2	TrieMap	17
4	Декомпозиране на рекурсивни алгоритми с използване на стек	20



Фигура 1: Двусвързан списък

1 Линеен едносвързан и двусвързан списък

1.1 Представяне на двусвързан списък

Възел на линеен двусвързан списък представяме със следния шаблон на структура:

```
template <class T>
struct dllnode
{
    T data;
    dllnode<T> *next, *previous;
};
```

Освен ако не е указано друго, задачите по-долу да се решат като се реализират методи на клас `DLList` със следния скелет:

```
template <class T>
class DLList
{
    //...
private:
    dllnode<T> *first, *last;
};
```

Преди да пристъпите към задачите, реализирайте подходящи конструктори, деструктор и оператор за присвояване на класа.

Следните задачи да се решат като упражнение за директно боравене с възлите на линеен двусвързан списък. Функциите (методите) да се тестват с подходящи тестове.

- 1.1. Да се дефинира функция `int count(dllnode<T>* l, int x)`, която преброява колко пъти елементът `x` се среща в списъка с първи елемент `l`.
- 1.2. Функция `dllnode<int>* range (int x, int y)` която създава и

връща първия елемент на списък с елементи $x, x + 1, \dots, y$, при положение, че $x \leq y$.

- 1.3. Да се дефинира функцията `removeAll (dllnode<T>*& l, const T& x)`, която изтрива всички срещания на елемента x от списъка l .
- 1.4. Да се дефинира функцията `void append(dllnode*<T>& l1, dllnode<T>*& l2)`, която добавя към края на списъка l_1 всички елементи на списъка l_2 . Да се реализира съответен оператор `+=` в класа на списъка.
- 1.5. Да се дефинира функцията `dllnode* concat(dllnode*<T> l1, dllnode*<T> l2)`, който съединява два списъка в нов, трети списък. Т.е. `concat(l1, l2)` създава и връща нов списък от елементите на l_1 , следвани от елементите на l_2 . Да се реализира съответен оператор `+` в класа на списъка.
- 1.6. Да се дефинира функцията `reverse`, която обръща реда на елементите на списък. Например, списъкът с елементи 1, 2, 3 ще се преобратува до списък с елементи 3, 2, 1.
- 1.7. Да се напише функцията `void removeduplicates (dllnode *&l)`, която изтрива всички дублиращи се елементи от списъка l .

1.2 Списъци и сложности

Функцията `std::clock()` от `<ctime>` връща в абстрактни единици времето, което е изминало от началото на изпълнение на програмата. Обикновено тази единица за време, наречена “tick”, е фиксиран интервал “реално” време, който зависи от хардуера на системата и конфигурацията ѝ. Константата `CLOCKS_PER_SEC` дава броя tick-ове, които се съдържат в една секунда реално време.

Чрез следния примерен код може да се измери в милисекунди времето за изпълнение на програмния блок, обозначен с “...”.

```
clock_t start = std::clock();
//...
clock_t end = std::clock();

long milliseconds = (double)(end-start)/
                    (CLOCKS_PER_SEC/1000.0);
```

- 1.8. За шаблона `DLList` да се дефинира метод `bool find(const T& x)`, който проверява дали `x` е елемент на списъка или не. Да се напише подходящ тест и да се изследва времевата сложност на метода емпирично.
- 1.9. За шаблона `DLList` да се реализира изтриване на елемент по индекс.
- 1.10. Да се изпробват поне две различни стратегии за разширяване на динамичен масив (например, увеличаване на размера с 1 и с коефициент). Да напишат подходящи тестове и да се сравнят производителностите на двата подхода емпирично.

1.3 Итератори за линейни СД

Следните задачи да се решат като упражнение за работа с итератори. Някои от задачите изискват реализация на клас динамичен масив, линеен едносвързан списък, линеен двусвързан списък и `forward` итератори за тях. Всяка функция да се тества с подходящи тестове върху поне два вида контейнери. Има ли разлика в производителността за някои от тях в зависимост от избора на контейнер?

- 1.11. Да се разшири итераторът на динамичен масив така, че да поддържа оператора за стъпка назад `--`.
- 1.12. Възможно ли е да се разшири итераторът на линеен едносвързан списък така, че да поддържа оператора за стъпка назад `--`? Ако да, какви са слабостите на реализацията и как могат да се решат?
- 1.13. Да се разшири итераторът на линеен двусвързан списък така, че да поддържа оператора за стъпка назад `--`.
- 1.14. Да се дефинира функция `map`, която прилага едноаргументна функция $f : int \rightarrow int$ към всеки от елементите на произволен контейнер. Да се дефинира и шаблон на функцията за списък с произволен тип на елементите.
- 1.15. Да се напише функция `bool duplicates (...)`, която проверява дали в контейнер има дублиращи се елементи.
- 1.16. Да се напише функция `bool issorted (...)`, която проверява дали елементите на даден контейнер са подредени в нарастващ или в намаляващ ред.

- 1.17. Да се напише функцията `bool palindrom (...)`, която проверява дали редицата от елементите на даден контейнер обръзва палиндром (т.е. дали се чете еднакво както отляво надясно така и отдясно наляво).

1.4 Skip List

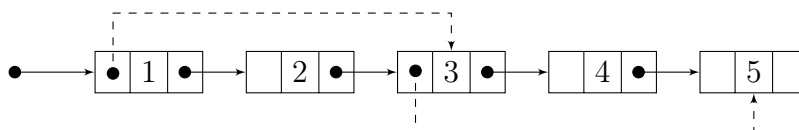
Разглеждаме *опростена* реализация на структурата от данни Skip List (“Списък с прескачане, СП”). Възелът на линейния едносвързан списък разширяваме с още един указател към следващ елемент:

```
template <class T>
struct lnode
{
    T data;
    lnode<T> *next[2];
};
```

Както и при стандартния едносвързан списък, всеки от елементите на СП съдържа в указателя `next[0]` адреса на непосредствения си съсед. Някои от елементите могат да съдържат в указателя `next[1]` адреса на друг елемент, намиращ се по-напред в редицата от елементи (вж. Фигура 2). Например, нека имаме СП с n елемента в нарастващ ред. Ако списъкът е построен така, че всеки \sqrt{n} -ти елемент има указател към следващия \sqrt{n} -ти елемент, то търсенето на елемент ще бъде със сложност $O(\sqrt{n})$ на цената на линейно нарастване на необходимата памет. Идеята може да се продължи така, че всеки елемент да може да има и по-голям брой указатели към елементи все по-напред в СП, но за нашите цели ще се ограничим до описания прост СП.

Следващите задачи изискват реализация на клас `SkipList` с основните му канонични методи и метод за построяване на “бързите връзки”. Реализирайте обикновен метод за вмъкване на елементи `insert`, който вмъква елементи грижейки се само за непосредствените връзки (`next[0]`), и метод `optimize`, който построява бързите връзки в списъка след като в него са вмъкнати определен брой елементи.

- 1.18. Да се реализира итератор на `SkipList` така, че да се възползва от “бързите връзки” в списъка. *Упътване: при обхождането извършвайте “прескачане” в случаите, в които има бърза връзка и*



Фигура 2: Списък с прескачане

в които няма да отидете твърде далеч напред в списъка. Класът на итератора трябва да се промени, за да позволява конструиране на итератор към конкретен елемент на списъка.

- 1.19. Да се извърши времево измерване на проблема за търсене на елемент в подреден **SkipList**, както е обяснено в Секция 1.2, и да се изобрази чрез графика. Да се извършат емпирични сравнения на производителността на търсените със и без оптимизацията.

2 Двоични дървета

2.1 Прости обхождания

Възел на двоично дърво представяме със следния шаблон на структура:

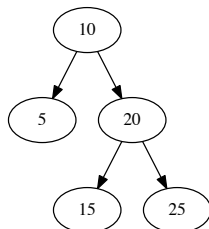
```
template <class T>
struct btreenode
{
    T data;
    btreenode<T> *left, *right;
};
```

Освен ако не е указано друго, задачите по-долу да се решат като се реализират методи на клас `BTree` със следния скелет:

```
template <class T>
class BTree
{
    //...
private:
    btreenode<T> *root;
};
```

Преди да пристъпите към задачите, реализирайте подходящи конструктори, деструктор и оператор за присвояване на класа.

- 2.1. Да се дефинира метод `count` на клас `BTree`, който намира броя на елементите на дървото.
- 2.2. Да се дефинира метод `countEvens` на клас `BTree`, който намира броя на елементите на дърво от числа, които са четни.
- 2.3. Да се дефинира метод `int BTree<T>::searchCount (bool (*pred)(const T&))` към клас `BTree`, който намира броя на елементите на дървото, които удовлетворяват предиката `pred`.
Да се приложи `searchCount` за решаване на горните две задачи.
- 2.4. Да се дефинира метод `bool BTree<T>::height ()`, намиращ височината на дърво. *Височина на дърво наричаме дължината (в брой върхове) на най-дългия път от корена до кое да е листо на дървото. Пример. Височината на дървото на Фигура 3 е 3.*



Фигура 3: Двоично наредено дърво

- 2.5. Да се дефинира метод `countLeaves` на клас `BTree`, който намира броя на листата в дървото.
- 2.6. Да се дефинира метод `maxLeaf` на клас `BTree`, който намира най-голямото по стойност листо на непразно дърво. Да се приеме, че за типа `T` на шаблона `BTree` е дефиниран операторът `<`.
- 2.7. Нека е дадено дървото `t` и низът `s`, съставен само от символите 'L' и 'R' ($s \in \{L, R\}^*$). Нека дефинираме "съответен елемент" на низа `s` в дървото `t` по следния начин:
 - Ако дървото `t` е празно, низът `s` няма съответен елемент
 - Ако низът `s` е празен, а дървото `t` - не, то коренът на дървото `t` е съответният елемент на низа `s`
 - Ако първият символ на низа `s` е 'L' и дървото `t` не е празно, то съответният елемент на низа `s` в дървото `t` е съответният елемент на низа `s + 1` в **лявото** поддърво на `t`
 - Ако първият символ на низа `s` е 'R' и дървото `t` не е празно, то съответният елемент на низа `s` в дървото `t` е съответният елемент на низа `s + 1` в **дясното** поддърво на `t`

Пример. За дървото от Фигура 3, съответният елемент на празния низ е 10, на низа "RL" е 15, а "RLR" няма съответен елемент.

Да се дефинира метод `T& BTree<T>::getElement (const char *s)`, който намира съответния елемент на низа `s`. Какво връща методът в случаите на липса на съответен елемент е без значение.

2.2 Отпечатване и сериализация

- 2.8. Да се дефинира метод `void BTree<T>::prettyPrint ()`, отпечатващ дървото на конзолата по следния начин: (1) всеки наследник е вдясно от родителя си, (2) елементите на еднакво ниво в дървото се отпечатват на еднаква колона от екрана, (3) десните наследници са на предишен ред от родителя си и (4) левите наследници са следващ ред спрямо родителя си.

Например, дървото от Фигура 3 би изглеждало по следния начин (включени са номерата на редовете на конзолата):

```
1:      25
2:    20
3:    15
4:  10
5:    5
```

- 2.9. Да се дефинират методи за сериализация и де-сериализация на двоично дърво, като се използва “Scheme формат”.

Представяне на двоично дърво в “Scheme формат” наричаме еднозначно текстово представяне на структурата от данни, образувано по следните правила:

- Празното дърво се представя с низа “()”
- Нека е дадено дървото t с корен x , ляво поддърво t_l и дясно поддърво t_r . Ако s_l е представянето в “Scheme формат” формат на t_l , а s_r е представянето в “Scheme формат” на t_r , то низът “(x s_l s_r)” е представянето на дървото t , където “ x ”, “ s_l ” и “ s_r ” са съответните низове.

Например, дървото от Фигура 3 се представя по следния начин:

```
(10 (20 (25 () ())) (15 () ())) (5 () ()))
```

2.3 Извличане на не скаларни свойства

- 2.10. Да се реализира метод `std::vector<T> BTree<T>::listLeaves ()` намиращ списък със стойностите на листата на дървото.

- 2.11. Да се дефинира метод `std::string BTree<T>::findTrace (const T& x)`. Ако `x` е елемент на дървото, функцията да връща следата на `x` (според дефиницията на “следа”, обсъдена на лекции). Ако `x` не е елемент на дървото, функцията да връща низа “_”.

Пример: За дървото от Фигура 3, следата на елемента със стойност 25 е “RR”.

2.4 Итериране на елементите на двоично дърво

- 2.12. Да се дефинира оператор `T& BTree<T>::operator[] (int i)`, който намира i -тият пореден елемент на дървото при обхождане корен-ляво-дясно.

Пример: За дървото от Фигура 3, елементът с пореден номер 0 е 10, с номер 1 е 5, с номер 2 е 20 и т.н.

2.5 Представяне на аритметичен израз чрез дърво

- 2.13. Нека е даден израз, построен по правилата на следната граматика:

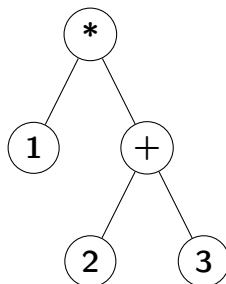
```
<expression> ::= <digit> | (<expression><operator><expression>)  
<digit> ::= 1..9  
<operator> ::= + | - | * | /
```

Да се реализира метод на клас `BTree<char>`, `void parseExpression (std::string s)`, който по правилно построен израз, записан в низа `s`, създава двоично дърво от символи, представящо израза по следното правило:

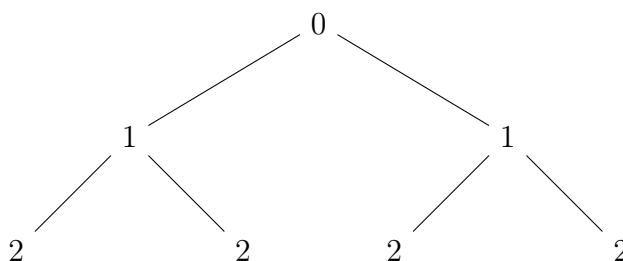
- Ако изразът е от типа “`x`”, където `x` е цифра, то съответното му дърво е листо със стойност символа `x`.
- Ако изразът е от типа “(`<израз 1><op><израз 2>`)””, то съответното му дърво има като стойност на корена символа на съответния оператор, ляво поддърво, съответно на `<израз 1>` и дясно поддърво, съответно на `<израз 2>`.

Дървото на Фигура 8 съответства на израз `(1*(2+3))`.

- 2.14. Да се реализира метод `double BTree<char>::calculateExpresisonTree ()`, който намира стойността на израз, построен от решението на предишната задача.



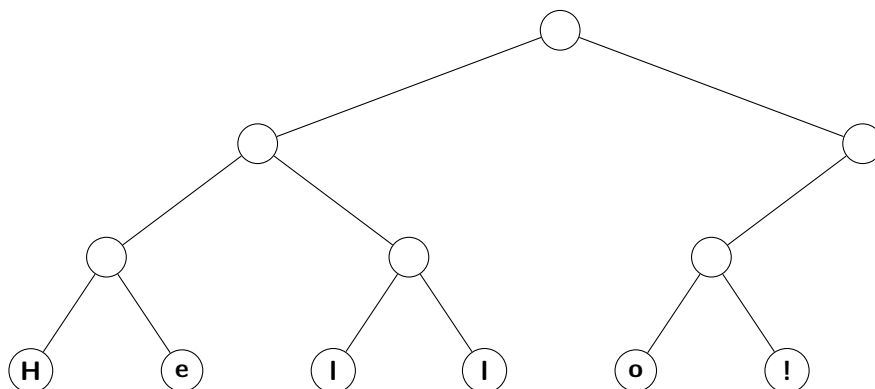
Фигура 4: Дърво на израза $(1*(2+3))$.



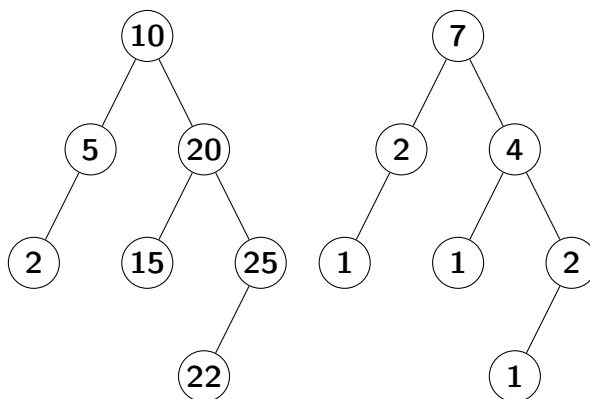
Фигура 5: Идеално балансирано двоично дърво с височина 3

2.6 Построяване и модификации на дърво

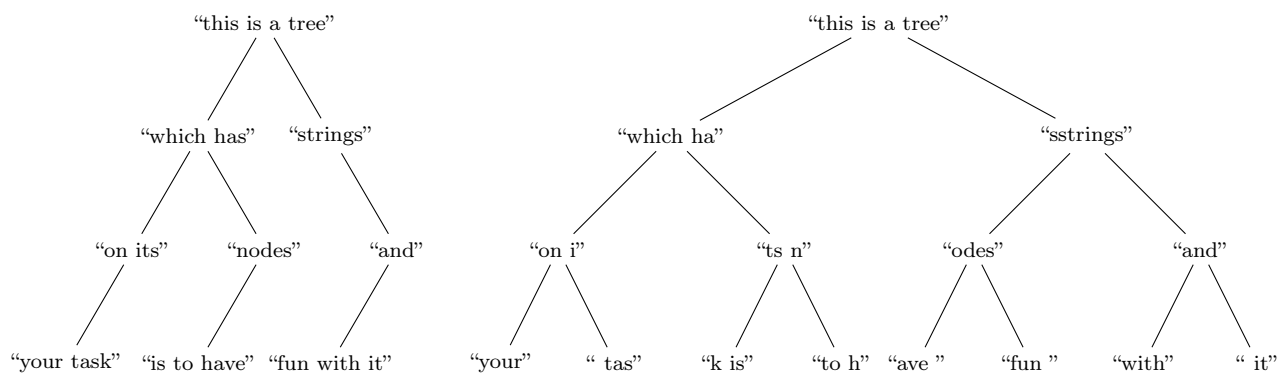
- 2.15. По дадено число h да се построи идеално балансирано двоично дърво с височина h . Стойността на всеки от елементите на дървото да е равна на нивото, в което се намира елемента (вж. Фигура 5).
- 2.16. Нека е даден символен низ s с дължина n . Нека h е такава, че $2^h \geq n > 2^{h-1}$ (минималната височина на двоично дърво, което има поне n листа в последното си ниво). Да се дефинира функция, която по даден низ s построява двоично дърво от символи с височина h , такава, че низът s е разположен в листата на дървото, четени от ляво надясно. Възлите на дървото, които не са листа, да съдържат символа интервал. Вж. Фигура 6
- 2.17. Стойността на всеки възел V в дадено двоично дърво от числа да се замени с броя на всички елементи на поддървото, на което V е корен. Вж. Фигура 7. *При операцията всеки от възлите да бъде посетен най-много веднъж!*
- 2.18. Дадено е дърво с низове по върховете. Дървото да се балансира по следния начин:
- Резултатното дърво има същия брой нива като изходното.



Фигура 6: Дърво, в чиито листа е разположен низът “Hello!”



Фигура 7: Примерно дърво и същото дърво, стойностите на чиито възли са заместени с размера на съответното им поддърво



Фигура 8: Примерно дърво от низове преди и след балансирането

- б) Всяко k -то ниво на резултатното дърво да съдържа точно 2^k елемента (считаме, че коренът е на ниво 0).
- в) Нека s_k е низът, получен при конкатенацията на всички низове на ниво k на изходното дърво, обхождани от ляво надясно. Нека дължината на низа s_k е n_k символа. i -тият пореден елемент на нивото k в резултатното дърво да съдържа i -тата поредна последователност от $\lceil n_k/2^k \rceil$ на брой символи на s_k , освен най-десния, който съдържа последните “останали” символи от s_k . Т.е. s_k да се “раздели” поравно между елементите в резултатното дърво.

На Фигура 8 са илюстрирани примерно изходно дърво и резултатът от балансирането му по горното правило. Всички елементи на ниво 1, освен последния, съдържат по $8 = \lceil 16/2 \rceil$ символа. Всички елементи на ниво 2, освен последния, съдържат по $4 = \lceil 14/4 \rceil$ символа и т.н.

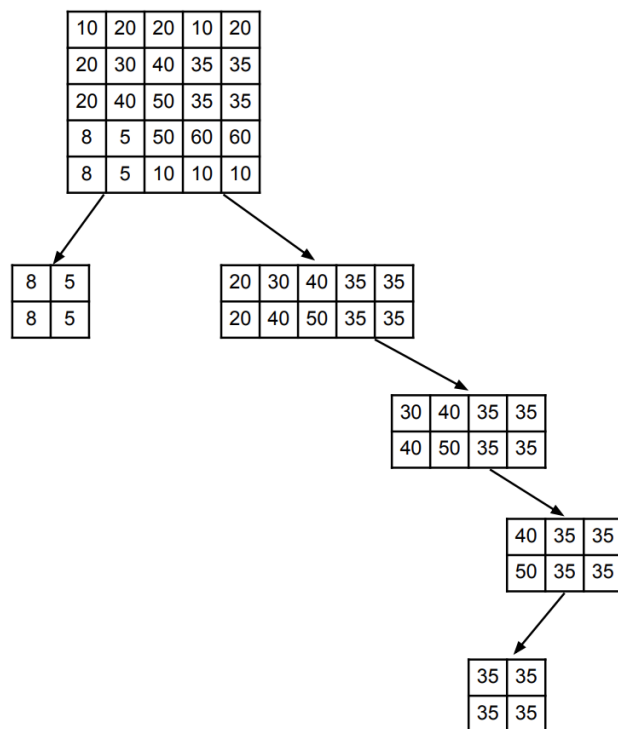
Упътване: предварително намерете вектора $(s_0, s_1, \dots, s_{h-1})$ и го използвайте за балансирането.

2.19. Нека е дадена матрица от цели числа $A_{M \times N}$ с елементи $(a_{i,j})$. “Лява” подматрица на A наричаме такава подматрица $A'_{M' \times N'}$ на A , всеки елемент на която е по-малък от $a_{0,0}$. “Дясна” подматрица на A наричаме такава подматрица $A'_{M' \times N'}$ на A , всеки елемент на която е по-голям от $a_{0,0}$. По дадена матрица A да се построи двоично дърво T със следните свойства:

- Коренът на T съдържа матрицата A .
- Нека v е произволен възел от дървото T , съдържащ матрица X . Ако X има поне една лява подматрица с размер поне 2×2 , то левият наследник на X съдържа най-голямата (по брой елементи) лява подматрица на X . Ако има повече от една лява подматрица с максимален брой елементи, то левият наследник на v е произволна една от тях. Ако X няма лява подматрица с размер поне 2×2 , то v няма ляв наследник.
- Аналогичното свойство за десния наследник на v и най-голямата дясна подматрица (подматрици) на X .

На Фигура 9 е изобразено едно такова дърво.

- а) Да се избере подходящо представяне на матрици и на двоично дърво с матрици по върховете.



Фигура 9: Наредено дърво от матрици

- б) Да се дефинира функция за построяване на дърво по горното правило по дадена матрица за корена му.
- в) Да се отпечата дървото чрез Graphviz. Повече информация за отпечатване на матрици като елемент на дървото може да се намери в документацията на Graphviz.

3 Изображения (Maps)

3.1 HashMap

Следните задачи са базирани на проста реализация на хеш таблица с отворено адресиране:

```
template <class KeyType, class ValueType>
class HashMap;
```

Редовете в хеш таблицата са елементи от структурата:

```
template <class KeyType, class ValueType>
struct TableElement
{
    KeyType key;
    ValueType value;
    TableElement<KeyType,ValueType> *next;
}
```

Самата хеш таблица е представена с член данната на класа `HashMap` `TableElement<KeyType, ValueType> **table`.

- 3.1. Да се дефинира метод `HashMap::efficiency()`, който изчислява ефективността на хеш таблицата като отношението $\frac{all-coliding}{all}$, където *coliding* е броят на ключовете, записани при колизия, а *all* е броят на всички записани ключове.
- 3.2. Да се дефинира оператор `<<` за клас `HashMap`, който отпечатва в поток всички двойки ключ-стойност в Хеш таблицата.
- 3.3. Да се напише програма, която въвежда от клавиатурата две текста с произволна големина t_1 и t_2 . Програмата да извежда броя на всички срещания на думи в t_2 , които се срещат и в t_1 .

Пример: за следните текстове

In computing, a hash table (hash map) is a data structure used to implement an associative array, a structure that can map keys to values. A hash table uses a hash function to compute an index into an array of buckets or slots, from which the correct value can be found.

и

Ideally, the hash function will assign each key to a unique bucket, but this situation is rarely achievable in practice (usually some keys will hash to the same bucket)

Този брой е 10, съставен от думите *the* (2 срещания във втория текст), *a* (1 срещане), *hash* (2), *function* (1), *to* (2), *is* (1), *keys* (1).

- 3.4. Да се напише програма, която въвежда от клавиатурата две текста с произволна големина t_1 и t_2 . Програмата да извежда броя на уникалните думи в t_2 , които се срещат и в t_1 .

Пример: за двата текста от предишната задача, този брой е 7, съставен от думите *the*, *a*, *hash*, *function*, *to*, *is*, *keys*.

- 3.5. Да се напише програма, която прочита от входа даден текст с произволна големина и намира такава дума с дължина повече от 3 букви, която се среща най-често в текста. Пример: за текста

In computing, a hash table (hash map) is a data structure used to implement an associative array, a structure that can map keys to values. A hash table uses a hash function to compute an index into an array of buckets or slots, from which the correct value can be found.

Най-често срещаната дума е *hash*.

- 3.6. От клавиатурата да се въведе цялото положително число n , следвано от $2 \times n$ цели положителни числа $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$. Програмата да печата на екрана “Yes”, ако изображението, дефинирано като $h(a_i) = b_i, i = 1, \dots, n$ е добре дефинирана функция. Т.е. програмата да проверява дали има два различни индекса i и j , за които е изпълнено $a_i = a_j$, но $b_i \neq b_j$.

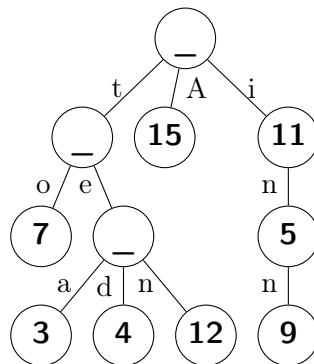
- 3.7. Да се дефинира метод

```
void map ([подходящ тип] f)
```

на хеш-таблицата, който прилага функцията f над всички стойности в хеш-таблицата.

3.2 TrieMap

Следните задачи са базирани на проста реализация на речник (map) с ключове - символни низове и произволен тип на стойностите чрез префиксно дърво (Trie). Вж. Фигура 10. Възлите в дървото съдържат указател към стойността на key-value двойката, а по дъгите на дървото са записани поредните букви от ключовете. Стойността е



Фигура 10: TrieMap, съдържащ двойките to:7, tea:3, ted:4, ten:12, A:15, i:11, in:5 и inn:9.

`nullptr` за междинните възли, които не съответстват на записан ключ. Наследниците на всеки възел са представени чрез `std::map<char, TrieNode*>` или някаква друга структура, която позволява наследникът да се “анотира” с буква:

```

template <class ValType>
struct TrieNode
{
    ValType *value;
    std::map<char, TrieNode<ValType*>*> children;
};

template <class ValType>
class TrieMap
{
public:
    //...
private:
    TrieNode<ValType> *root;
};

```

3.8. За клас `Trie` да се разработи приятелски клас `TrieUtilities`, който да реализира методи за:

- Намиране на височината на дървото.
- Намиране на дължината на най-дългия ключ, записан в дървото.
- Намиране на броя на записаните стойности в дървото.

- Намиране на броя на буквите на латинската азбука, които *не* *учстват* в никой ключ на дървото.
- 3.9. Да се разработи оператор за индексирание (`[]`) на `Trie`, който да работи за четене и писане на ключове.
- 3.10. Да се дефинира итератор за `Trie`, позволяващ обхождането на ключовете му в нарастващ ред относно лексикографската наредба.
- 3.11. Да се реализира отпечатване на `Trie` в `dotty` формат.

4 Декомпозиране на рекурсивни алгоритми с използване на стек

Упътване: Решете задачите с рекурсия и след това преобразувайте решението в решение със стек.

- 4.1. (*) Да се дефинира функция за намиране на стойността на полинома на Ермит $H_n(x)$ (x е реална променлива, а n неотрицателна цяла променлива), дефиниран по следния начин:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x), n > 1,$$

за дадени n и x с използване на стек.

- 4.2. Нека е дадена абстрактна шахматна дъска с размери $n \times n$, $4 \leq n \leq 8$ и число k , $0 \leq k \leq n$. Казваме, че разположени на дъската k коня образуват “валидна конфигурация”, ако никоя фигура не е поставена на поле, което се “бие” от друга фигура според съответните шахматни правила.

Да се дефинира клас `KnightConfig`, представящ “конфигуратор” на шахматни коне. Конструкторът на класа инициализира конфигуратора с числата n и k . Класът позволява “обхождането” една по една на всички валидни конфигурации за дадените параметри, по подобие на `forward` итератор на структура от данни. Класът да притежава следните методи:

- `void KnightConfig::printCurrentConfig()`: Отпечатва текущо намерената конфигурация. Пример за отпечатана конфигурация с $n = 5, k = 2$:

```
- - - - -  
- - Н - -  
- - - - -  
- - - - Н  
- - - - -
```

- `void KnightConfig::findNextConfig()`: Намира следваща конфигурация.

- `bool KnightConfig::noMoreConfigs()`: Показва дали всички възможни конфигурации са вече изчерпани.

4.3. Да се реши задачата за Ханойските кули с използване на стек.

Да се дефинира клас `HanoiPlayer` със следните методи:

- Конструктор с параметър, указващ броя дискове върху лявото колче за началното състояние на играта.
- Метод `bool final()`, който показва дали играта е достигнала финално състояние (т.е. всички дискове са на дясното колче).
- Метод `makeMove()`, който извършва един ход от играта.
- Метод `printBoard()`, който отпечатва текущото състояние на игровата дъска, например по следния начин:

```

2
3      1
5 * 4
```

На примера е изобразено състояние на играта, при което на лявото колче има три диска - с размери 5, 3 и 2, на средното колче няма дискове, а на дясното има два диска - с размери 4 и 1.

Литература