

Гладков Егор Сергеевич

Динамика тороидальных тел в жидкости

Научный руководитель: к.ф.-м.н.,
доцент кафедры теоретической физики
Ветчанин Евгений Владимирович

г.Ижевск, 2019

Введение

Задача о движении тяжёлых твёрдых тел в жидкости рассматривалась в различных её вариациях: движение эллиптической пластиинки¹, монетки², монетки с отверстием³. Построенные математические модели не дают полного их согласования с результатами эксперимента. В этой работе математическая модель строится для тороидальных тел.

¹Kuznetsov S. P. Plate falling in a fluid: Regular and chaotic dynamics of finite-dimensional models // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 3, pp. 345–382.

²Heisinger L., Newton P., Kanso E. Coins falling in water // J. Fluid Mech., 2014, vol. 742, pp. 243– 253.

³Andersen A., Pesavento U., Wang Z. J. Unsteady aerodynamics of fluttering and tumbling plates //J. Fluid Mech., 2005, vol. 541, pp. 65–90.

Цели и задачи

Цель:

Построение математической модели движения тора в жидкости.

Задачи:

- изготовление натурных образцов для проведение эксперимента на натуральной модели тела;
- непосредственное проведение эксперимента и определение траекторий движения;
- построение математической модели движения;
- обработка полученных результатов.

Тороидальное тело

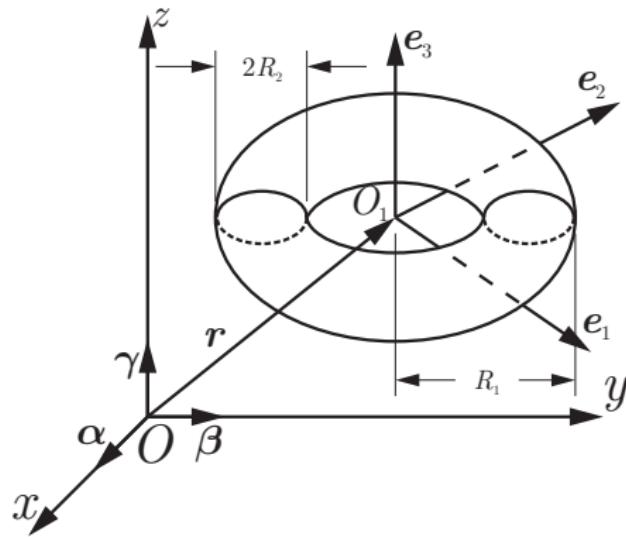


Рис. 1: Тороидальное тело: $Oxyz$ – неподвижная система координат, $O_1e_1e_2e_3$ – подвижная система координат, R_1 – внешний радиус тора, R_2 – радиус образующей окружности тела.

Кинематические соотношения:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}$$

Уравнения движения

Уравнения Кирхгофа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v}, \quad (3)$$

где T — суммарная кинетическая энергия тела и жидкости, включая кинетическую энергию циркуляционного движения жидкости через отверстие. Учитывая импульс, момент импульса, силы тяжести и вязкости уравнения движения примут вид:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{a}) \times \boldsymbol{\omega} - \mu\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{F}, \text{ где } \mathbf{F}_i = f_i v_i |v_i| \quad (4)$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{b}) \times \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{a}) \times \mathbf{v} - \mathbf{G}, \text{ где } \mathbf{G}_i = g_i \omega_i |\omega_i|$$

Описание установки

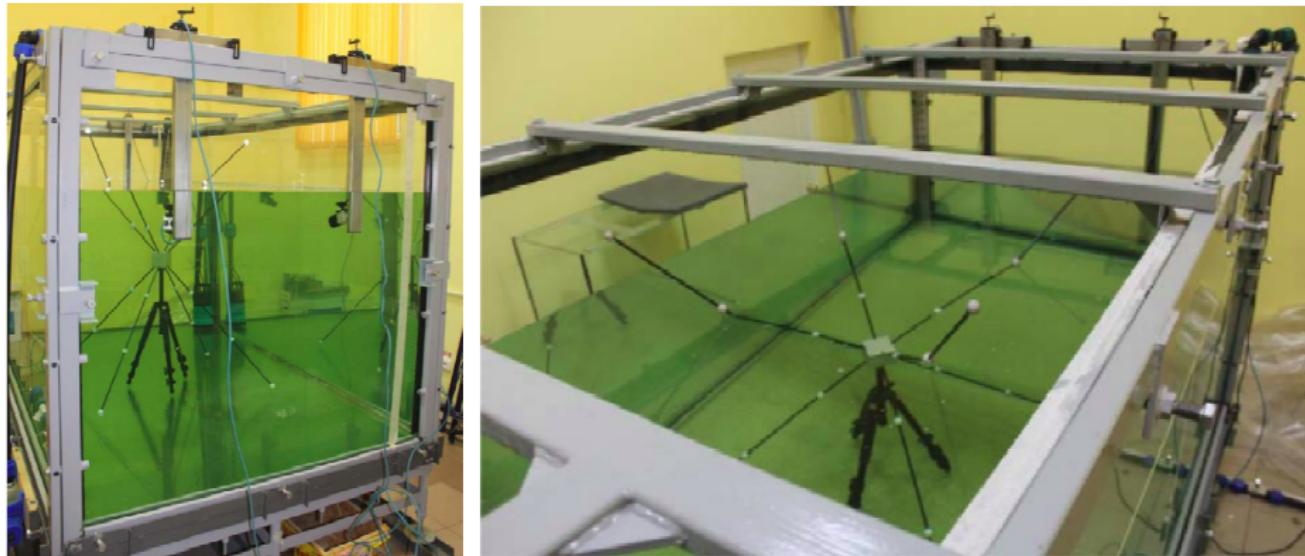


Рис. 2: Бассейн с размерами $2 \times 1.5 \times 1.8$ м, заполненный водой, калибровочная установка, цифровые видеокамеры

Модели торов

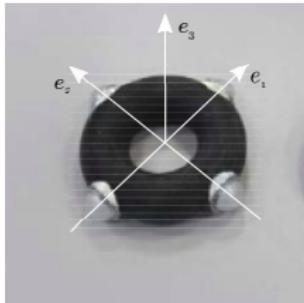


Рис. 3: Расположение подвижной системы координат.



a) $R_1 = 0.050 \text{ м}$



б) $R_1 = 0.060 \text{ м}$



в) $R_1 = 0.075 \text{ м}$

Рис. 4: Модели торов

Характеристики тора с радиусом $R_1 = 0.050$ м

- Объём $V = 1.409 \cdot 10^{-4}$ м³, масса $m = 0.155$ кг;
- Центральный тензор инерции
 $\mathbf{J} = (1.119, \quad 1.119, \quad 2.058) \cdot 10^{-4}$ кг·м⁻²;
- Тензор присоединённых масс
 $\Lambda_v = (0.06249, \quad 0.06249, \quad 0.15903)$ кг;
- Тензор присоединённых моментов инерции
 $\Lambda_\omega = (7.4113 \cdot 10^{-5}, \quad 7.4113 \cdot 10^{-5}, \quad 0)$ кг·м⁻²

Обработка экспериментальных данных

Значения динамических переменных $\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma$ в каждый момент зависят от параметров системы:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_i) &= \mathbf{r}(t_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3), & \boldsymbol{\alpha}(t_i) &= \boldsymbol{\alpha}(t_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3), \quad (5) \\ \boldsymbol{\beta}(t_i) &= \boldsymbol{\beta}(t_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3), & \gamma(t_i) &= \gamma(t_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3).\end{aligned}$$

Определим отклонение расчётных данных от экспериментальных следующим функционалом:

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N (k_r(\mathbf{r}_0(t_i) - \mathbf{r}(t_i))^2 + \right. \quad (6)$$

$$\left. + k_\alpha(\boldsymbol{\alpha}_0(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_i))^2 + k_\beta(\boldsymbol{\beta}_0(t_i) - \boldsymbol{\beta}(t_i))^2 + k_\gamma(\gamma_0(t_i) - \gamma(t_i))^2) \right)^{1/2}.$$

Движение тора с радиусом $R_1 = 0.05$ м

После решения задачи минимизации были получены следующие значения параметров:

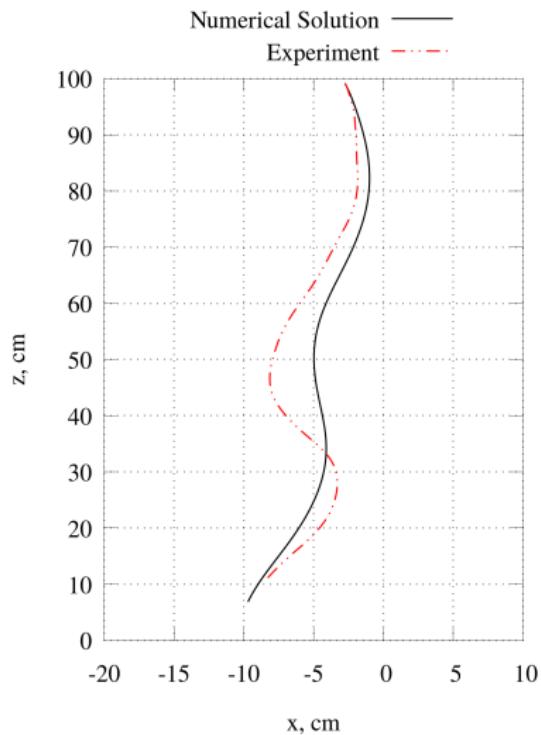
$$\mathbf{a} = (3.623 \cdot 10^{-3}, 3.404 \cdot 10^{-3}, 1.699 \cdot 10^{-2}),$$

$$\mathbf{b} = (1.979 \cdot 10^{-2}, 9.433 \cdot 10^{-3}, -4.512 \cdot 10^{-3}),$$

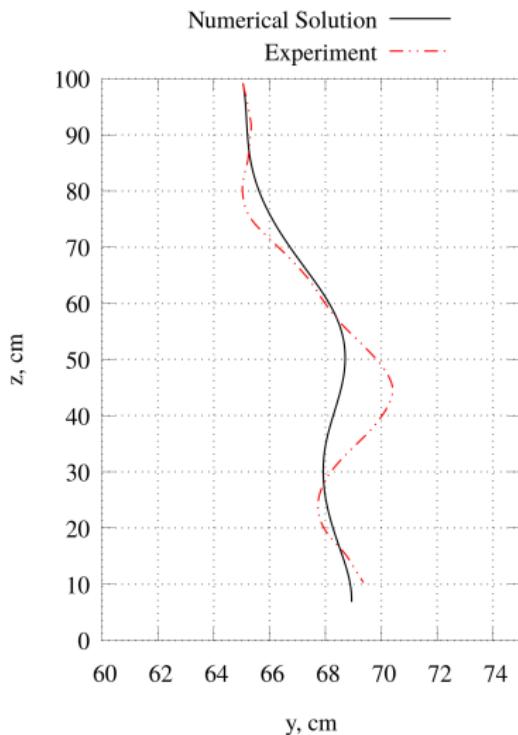
$$f_1 = f_2 = 1.419 \cdot 10^{-5}, \quad f_3 = 1.655,$$

$$g_1 = g_2 = 7.010 \cdot 10^{-5}, \quad g_3 = 2.330 \cdot 10^{-2}.$$

Принимались следующие значения масштабных коэффициентов: $k_r = 10$, $k_\alpha = k_\beta = k_\gamma = 1$. Значениям функционала (6) соответствует $L \approx 3.69$

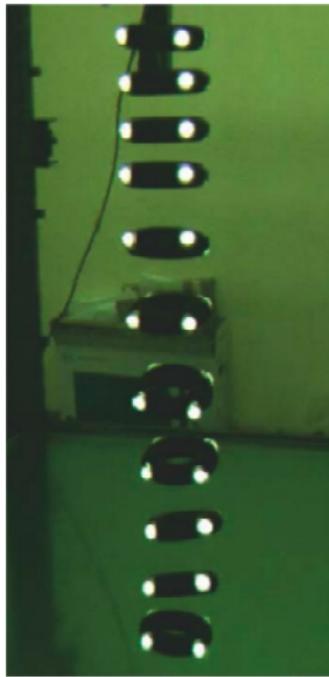


a)



б)

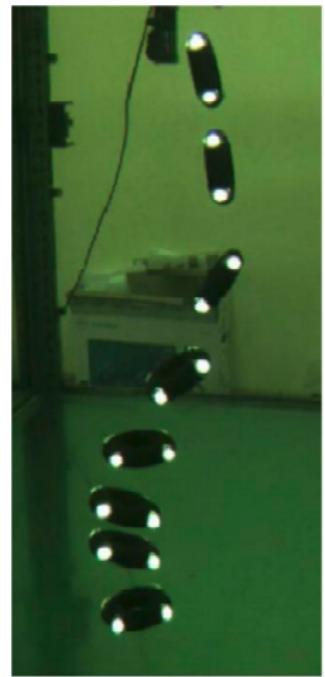
Рис. 5: Проекция траектории движения тора с радиусом $R_1 = 0.05\text{м}$ на координатные плоскости (x, z) и (y, z)



а)



б)



в)

Рис. 6: Падение тора с $R_1 = 0.05$ м. Начальный угол: а) 0° , б) 45° , в) 90°

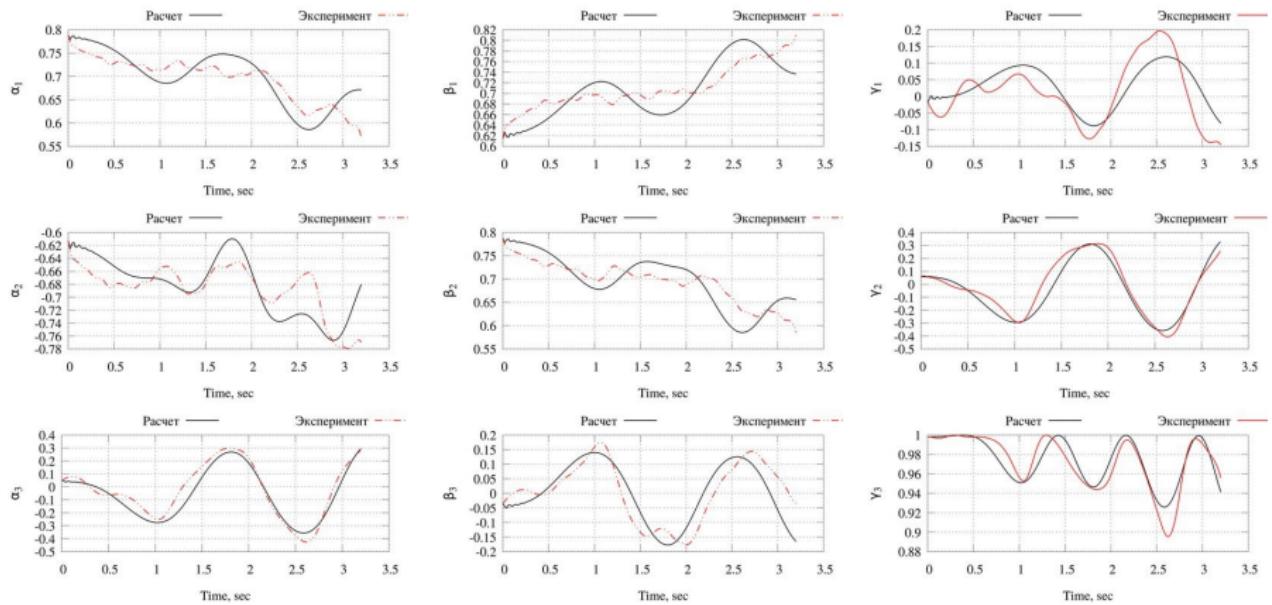


Рис. 7: Изменение компонент векторов α , β и γ во времени для тора с $R_1 = 0.050$ м

Аппроксимация данных искусственной нейронной сетью

Полученные из эксперимента координаты каждого из 4-х маркеров и восстановленные по эти координатам координаты центра масс тора и векторы α, β, γ были сглажены с помощью метода Савицкого—Голая^{4,5}. Также были рассчитаны линейные и угловые скорости и их производные. Для расчёта компоненты сил и моментов сил, действующих на тело были использованы следующие формулы:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{C}\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \mu\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{F}, \quad \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}\mathbf{v} \times \mathbf{v} - \mathbf{G}, \quad (7)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{G} имеют вид:

$$F_i = -f_i v_i |v_i| + (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega})_i, \quad G_i = -g_i \omega_i |\omega_i| + (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega})_i + (\mathbf{a} \times \mathbf{v})_i,$$

⁴Savitzky A., Golay M. J. E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures //Analytical chemistry. – 1964. – Т. 36. – №. 8. – С. 1627-1639.

⁵Gorry P. A. General least-squares smoothing and differentiation by the convolution (Savitzky-Golay) method //Analytical Chemistry. – 1990. – Т. 62. – №. 6. – С. 570-573.

Результаты аппроксимации

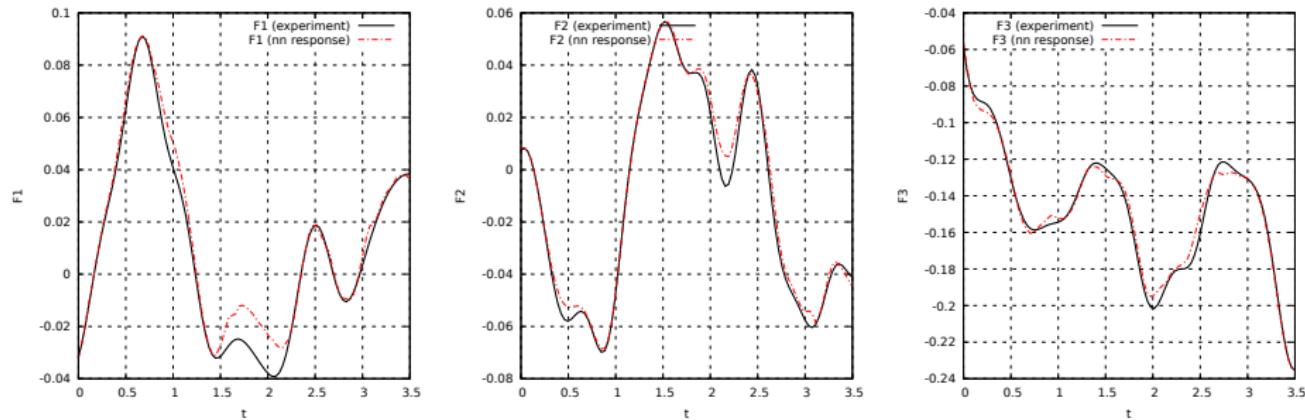


Рис. 8: Зависимость компонент сил вязкости \mathbf{F} от времени для тора диаметром 100 мм и толщиной 30 мм.

Результаты аппроксимации

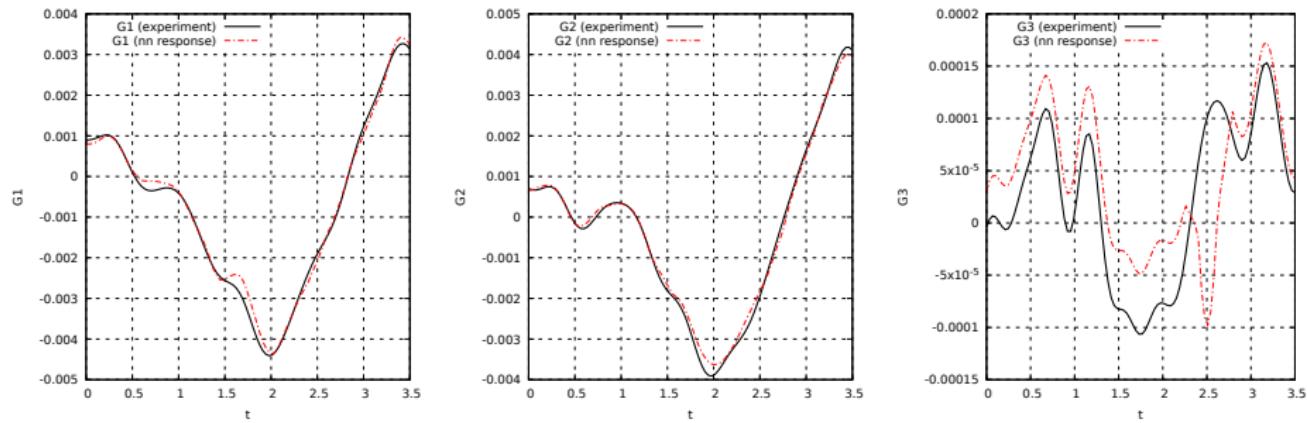


Рис. 9: Зависимость компонент моментов сил вязкости \mathbf{G} от времени для тора диаметром 100 мм и толщиной 30 мм.

Качественные диаграммы нейронной сети

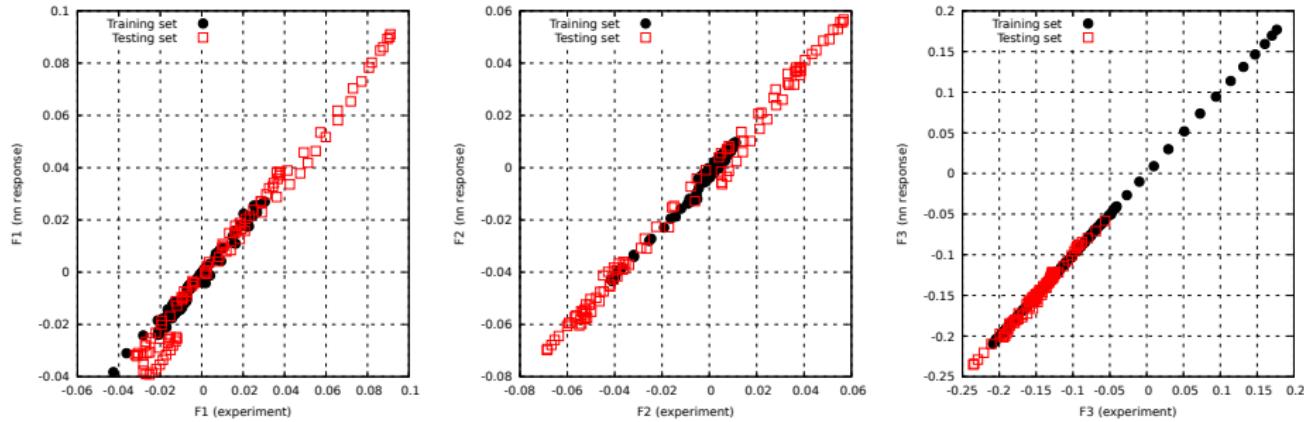


Рис. 10: Качественные диаграммы искусственной нейронной сети для сил вязкости.

Качественные диаграммы нейронной сети

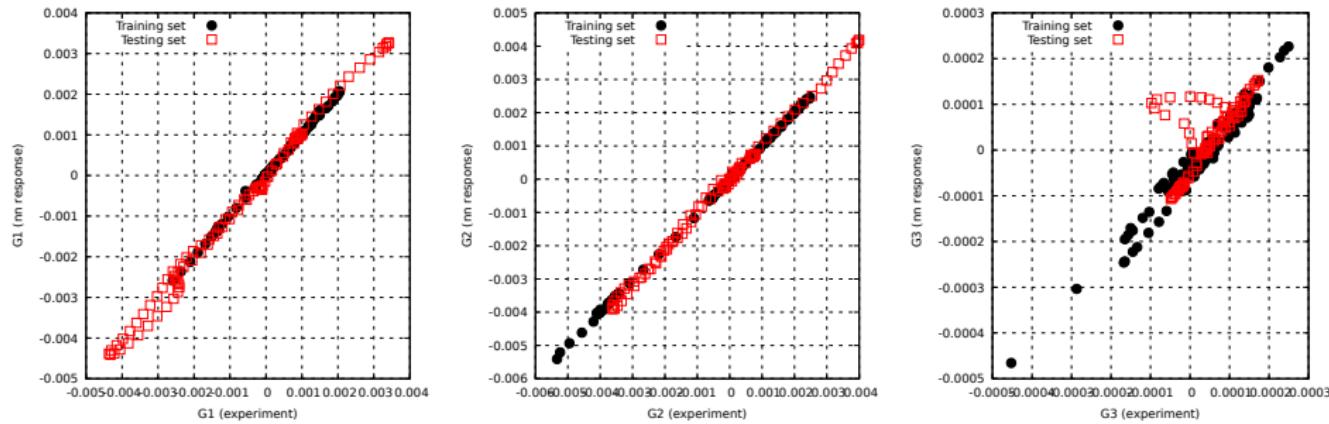


Рис. 11: Качественные диаграммы искусственной нейронной сети для моментов сил вязкости.

Выводы

Получены результаты:

- ① Данная математическая модель удовлетворительно описывает движение тороидальных тел;
- ② Метод минимизации показал свою эффективность в данной задаче;
- ③ Нейросеть успешно аппроксимирует экспериментальные данные;
- ④ Векторы циркуляции \mathbf{a} и \mathbf{b} могут быть непостоянны.

По результатам работы была выпущена статья⁶.

⁶Vetchanin E. V., Gladkov E. S. Identification of parameters of the model of toroidal body motion using experimental data //Nonlinear Dynamics. – 2018. – T. 14. – №. 1. – С. 99-121.

-  Борисов А. В., Кузнецов С. П., Мамаев И. С., Тененев В. А. Описание движения тела эллиптического сечения в вязкой несжимаемой жидкости с помощью модельных уравнений, реконструированных на основе обработки данных // Письма в ЖТФ, 2016, т. 42, №17, с. 9–19.
-  Ветчанин Е. В., Кленов А. И. Экспериментальные исследования падения винтовых тел в жидкости // Нелинейная динамика, 2017, т. 13, №4, с. 585–598.
-  Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. Москва: АН СССР, 1962. 404с.
-  Ламб Г. Гидродинамика. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1947. 929 с.
-  Тененев В. А., Якимович Б. А. Генетические алгоритмы в моделировании систем. Ижевск: ИжГТУ, 2010. 308 с.
-  Хайкин С., Нейронные сети: полный курс, 2-е издание. : Пер. с англ. — М. : Издательский дом "Вильямс 2006. — 1104 с. : ил. — Парал. тит. англ.

Спасибо за внимание

Кинетическая энергия тела:

$$T_b = \frac{1}{2} [(m(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})], \quad (8)$$

где m — масса тела, \mathbf{J} — центральный тензор инерции.

Кинетическая энергия жидкости обусловлена эффектом присоединённых масс⁷:

$$T_f = \frac{1}{2} [(\mathbf{v}, \Lambda_{\mathbf{v}} \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\omega}, \Lambda_{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\omega})]$$

где $\Lambda_{\mathbf{v}}$ — диагональный тензор присоединённых масс, $\Lambda_{\boldsymbol{\omega}}$ — тензор присоединённых моментов инерции. Диагональный вид тензоров обусловлен выбором системы координат и формой тела.

⁷Короткин А. И. Присоединённые массы судостроительных конструкций: Справочник. - СПб.: Мор Вест, 2007. -448 с., ил.

Кинетическая энергия циркуляционного движения жидкости⁸, описывается линейной по скоростям функцией вида:

$$T_c = (\mathbf{a}, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}, \boldsymbol{\omega}), \quad (9)$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} — векторы, определяемые циркуляционным движением жидкости через отверстие в теле. В рамках идеальной жидкости они постоянны. В вязкой жидкости может быть иначе⁹.

⁸Ламб Г. Гидродинамика. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1947. 929 с.

⁹Heisinger L., Newton P., Kanso E. Coins falling in water // J. Fluid Mech., 2014, vol. 742, pp. 243–253.

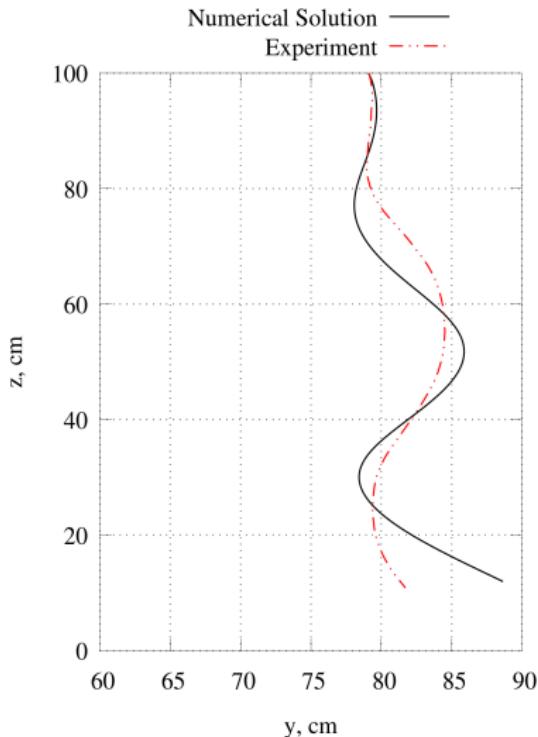
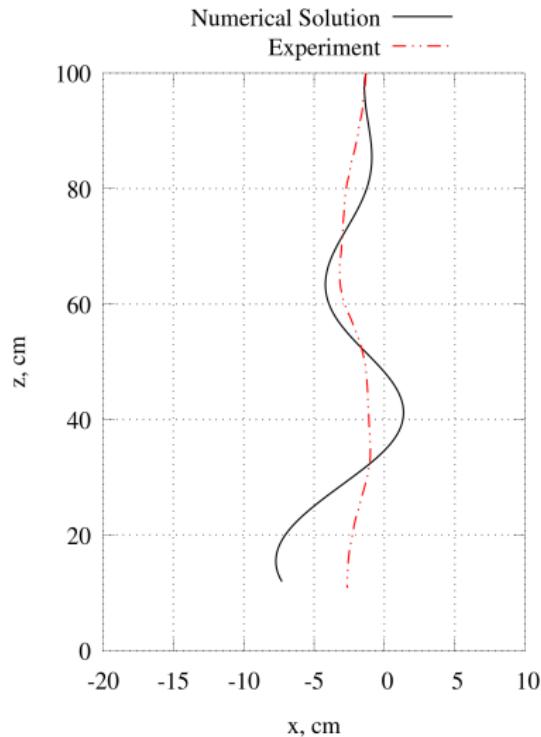


Рис. 12: Проекция траектории движения тора с радиусом $R_1 = 0.060\text{м}$ на координатные плоскости (x, z) и (y, z)

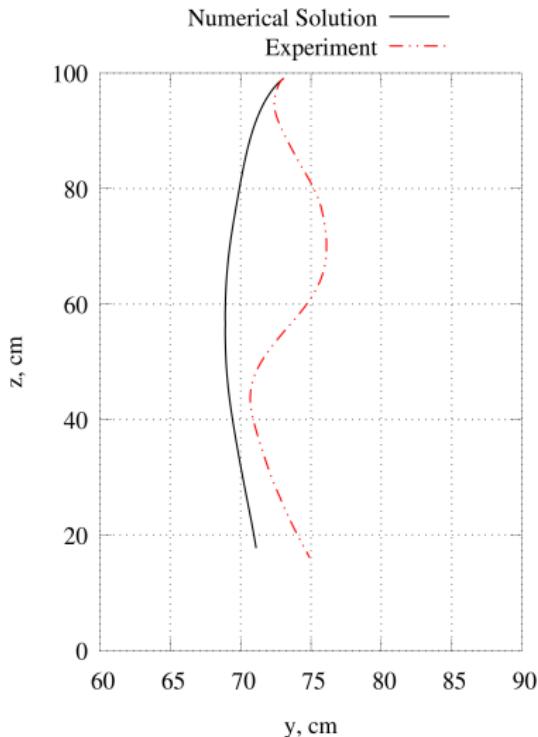
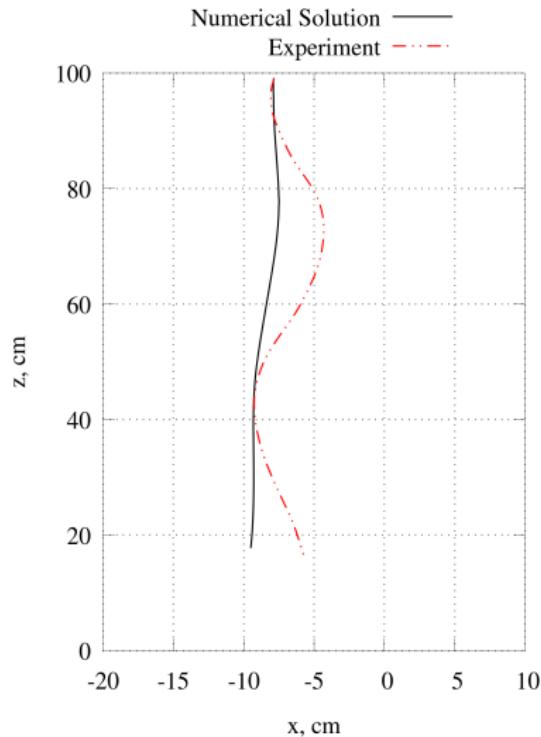


Рис. 13: Проекция траектории движения тора с радиусом $R_1 = 0.075$ м на координатные плоскости (x, z) и (y, z)

Нейронная сеть

Искусственная нейронная сеть хорошо подходит для аппроксимации функций как универсальный аппроксиматор¹⁰. С её помощью были аппроксимированы компоненты сил и моментов сил вязкости (см. рис. 8, 9, 10, 11).

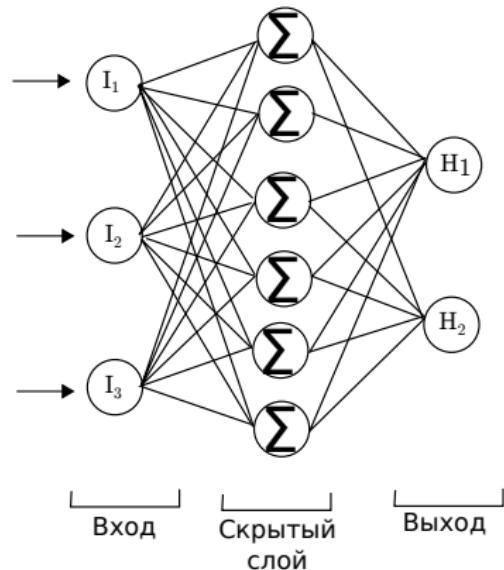


Рис. 14: Простейшая нейросеть

Метод Савицкого—Голая. Сглаживание

Экспериментальные данные обрабатываются набором из m коэффициентов свёртки C_i согласно выражению:

$$Y_j = \sum_{i=\frac{1-m}{2}}^{\frac{m-1}{2}} C_i y_{j+i}, \quad \frac{m-1}{2} \leq j \leq n - \frac{m-1}{2}. \quad (10)$$

Коэффициенты свертки C_i , или свёрточные веса, выбираются для полиномов различных степеней из соответствующих таблиц.

Пример таблицы для сглаживания

Таблица 1: Коэффициенты свёртки для 5-точечного квадратичного сглаживания

i	-2	-1	0	1	2
-3					
-2	31	9	-3	-5	3
-1	9	13	12	6	-5
0	-3	12	17	12	-3
1	-5	6	12	13	9
2	3	-5	-3	9	31
3					
<i>нормировочные постоянные</i>	35	35	35	35	35

Метод Савицкого—Голая. Дифференцирование

Кроме того, метод даёт возможность дифференцировать данные. При подсчёте n -й производной в уравнении 10 нужно учесть дополнительный масштабирующий коэффициент: $\frac{1}{h^n}$, где h — расчётный шаг. Чтобы дифференцировать функцию, нужно также использовать свёрточные коэффициенты. Существует ряд таблиц с уже вычисленными весами для различных видов дифференцирования.

Пример таблицы для дифференцирования

Таблица 2: Коэффициенты свёртки для 5-точечного кубического дифференцирования

i	-2	-1	0	1	2
-3					
-2	-125	-19	1	5	-29
-1	136	-1	-8	-13	88
0	48	12	0	-12	-48
1	-88	13	9	1	-136
2	29	-5	-1	19	125
3					
<i>нормировочные постоянные</i>	84	42	12	42	84